Chapitre 21

Continuité

Bernard BOLZANO
(1781 – 1848)

Karl WEIERSTRASS
(1815 – 1897)

Bolzano

La notion de fonction continue a mis du temps à émerger. C'est à Bolzano, un prêtre et mathématicien hongrois d'origine italienne, qu'on la doit :

$$f \text{ est continue en } a \overset{\Delta}{\text{ssi}}$$
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \forall x \in I,\ |x - a| \leqslant \delta \implies \big|f(x) - f(a)\big| \leqslant \varepsilon$$

Weierstrass

Attention, l'ensemble des fonctions continues contient des fonctions qui peuvent être très compliquées. Weierstrass (mathématicien allemand qui poursuivit le travail de fondation de l'analyse moderne) construisit une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est continue mais qui n'est nulle part dérivable !

Lycée Chateaubriand
MPSI 3

Colas Bardavid

21
Continuité
plan de cours et principaux résultats

I. Continuité

27.15
27.23
27.25

1) Continuité
a) continuité en un point
b) un premier exemple
c) continuité sur I

2) Prolongement par continuité
a) définition
b) exemple : la fonction sinus cardinal

3) Caractérisation séquentielle de la continuité

Théorème 21.1 Ⓣ

$$f \text{ est continue en } a \iff \Big(\forall (x_n)_n \in I^{\mathbb{N}}, \quad x_n \longrightarrow a \implies f(x_n) \longrightarrow f(a)\Big).$$

4) Image par une fonction continue d'une suite convergente
a) les limites passent aux fonctions continues

Corollaire 21.2 Ⓣ
Si f est continue, alors

$$u_n \longrightarrow \ell \quad \implies \quad f(u_n) \longrightarrow f(\ell).$$

b) application aux suites définies par récurrence

Corollaire 21.3 Ⓣ
Soit $f : I \longrightarrow I$ une fonction continue et soit $(u_n)_n \in I^{\mathbb{N}}$ une suite telle que

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

Alors,

$$\boxed{u_n \longrightarrow \ell \quad \implies \quad f(\ell) = \ell.}$$

5) Caractérisation séquentielle des limites

Proposition 21.4 Ⓣ
On a

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \iff \Big(\forall (u_n)_n \in I^{\mathbb{N}}, \quad u_n \longrightarrow a \implies f(u_n) \longrightarrow \ell\Big).$$

6) Opérations sur les fonctions continues

7) Composition des fonctions continues

II. Continuité des fonctions usuelles

1) Les fonctions constantes

2) La fonction $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ est continue

3) Les fonctions polynomiales sont continues

4) Les fonctions lipschitziennes sont continues

a) définition

Définition 21.5
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

1) *Soit $C \geqslant 0$.*
On dit que f est C-lipschitzienne $\stackrel{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\boxed{\forall x, y \in I, \quad \big|f(x) - f(y)\big| \leqslant C|x-y|.}$$

2) *On dit que f est lipschitzienne* $\stackrel{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\exists C \geqslant 0 : f \text{ est } C\text{-lipschitzienne.}$$

b) les fonctions lipschitziennes sont continues

Proposition 21.6
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors,

$$f \text{ lipschitzienne} \implies f \text{ continue.}$$

5) Fonctions trigonométriques

a) sinus et cosinus sont 1-lipschitziennes

Fait 21.7

1) *Les fonctions* $\sin(\cdot)$ *et* $\cos(\cdot)$ *sont* 1*-lipschtziennes.*
2) *Autrement dit, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a*

$$\big|\sin(x) - \sin(y)\big| \leqslant |x-y|$$
$$\big|\cos(x) - \cos(y)\big| \leqslant |x-y|.$$

b) les fonctions trigonométriques sont continues

6) Logarithme

a) définition
b) lipschitzianité du logarithme sur $[a, +\infty[$
c) le logarithme est continu

7) Exponentielle

8) Fonctions puissance

a) continuité des fonctions puissance sur $\mathbb{R}_+^*$
b) la fonction racine

III. Grands théorèmes pour les fonctions continues

27.4
27.11
27.13

1) Théorème des valeurs intermédiaires

a) un lemme

b) théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 21.8

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et soient $a, b \in I$ tels que $a < b$.
Soit $y \in \mathbb{R}$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors,

$$\boxed{y \text{ est atteint par } f(\cdot).}$$

c) version plus abstraite du TVI

2) Théorème des bornes atteintes

a) une fonction continue sur un segment y est bornée

b) théorème des bornes atteintes

Théorème 21.9 Ⓣ

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors,

$$\boxed{f \text{ est bornée et atteint ses bornes.}}$$

c) contre-exemples

d) démonstration du théorème des bornes atteintes

3) Théorème des fonctions continues injectives

Théorème 21.10

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors,

$$f \text{ injective} \implies f \text{ strictement monotone.}$$

4) Théorème de la bijection monotone

Théorème 21.11

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et strictement monotone. On note $J := f(I)$.
D'après le TVI, on sait que J est un intervalle.
Alors,

$$f^{-1} : J \longrightarrow I \text{ est continue.}$$

IV. Continuité uniforme

27.28

1) Définition et premières considérations

a) définition

Définition 21.12

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est uniformément continue $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \quad \forall x, y \in I,\ |x - y| \leqslant \delta \implies |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon.$$

b) un non-exemple

c) la continuité uniforme entraîne continuité

2) Caractérisation séquentielle de l'uniforme continuité

3) Théorème de Heine

Théorème 21.13 Ⓣ

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors, on a

$$f \text{ continue} \implies f \text{ uniformément continue.}$$

V. Norme infinie

27.32

1) Fonctions bornées

2) Définition et propriété fondamentale

a) définition

Définition 21.14
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée. La norme infinie de f, *notée $\|f\|_\infty$, est définie par*

$$\|f\|_\infty := \sup_{t\in I} |f|.$$

b) propriété fondamentale

Proposition 21.15
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée. Alors, on a

1) a) $\|f\|_\infty$ *est une borne de f ;*
   b) ie *on a*

$$\forall t \in I, \quad |f(t)| \leqslant \|f\|_\infty.$$

2) a) *Mieux, $\|f\|_\infty$ est la meilleure borne de f ;*
   b) *plus précisément, on a, pour tout $M \in \mathbb{R}_+$,*

$$\big(\forall t \in I, \ |f(t)| \leqslant M\big) \quad \Longrightarrow \quad M \geqslant \|f\|_\infty.$$

3) C'est une norme

a) définition des normes

Définition 21.16
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Une norme N sur E *est une application*

$$\mathsf{N} : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

vérifiant, pour tous $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

1) l'inégalité triangulaire *:* $\mathsf{N}(x+y) \leqslant \mathsf{N}(x) + \mathsf{N}(y)$ *;*
2) l'homogénéité *:* $\mathsf{N}(\lambda x) = |\lambda|\, \mathsf{N}(x)$ *;*
3) la séparation *:* $\mathsf{N}(x) = 0 \iff x = 0_E$.

b) $\|\cdot\|_\infty$ est une norme

Proposition 21.17
$\|\cdot\|_\infty$ *est une norme sur $\mathscr{B}(I, \mathbb{R})$.*

c) dessins
d) convergence dans $\mathscr{B}(I, \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$

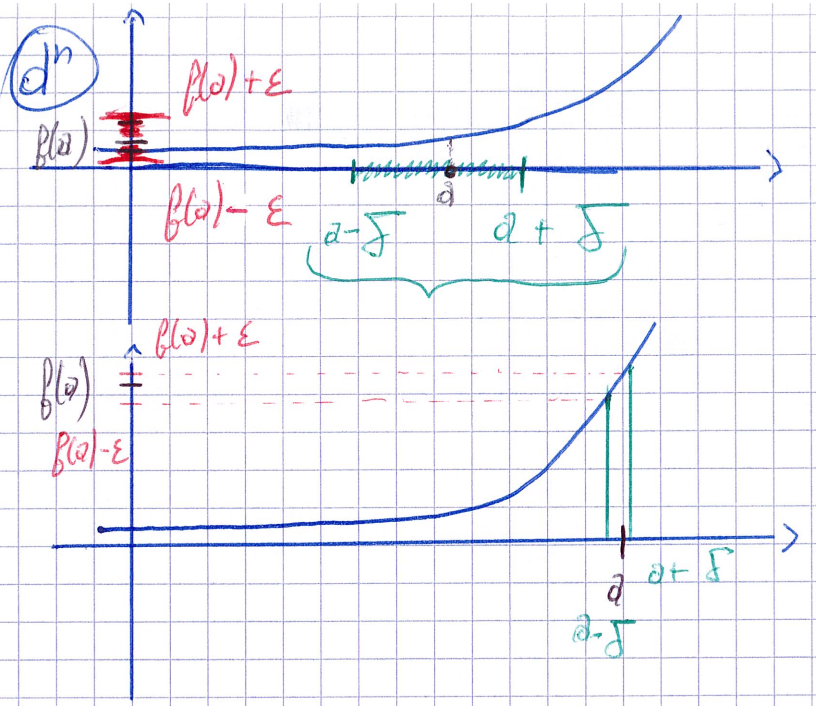
VI. Extension à $\mathbb{C}$

1) Limites

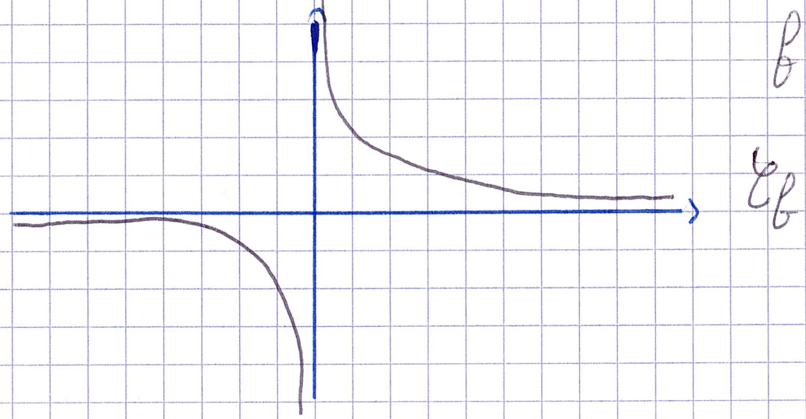
2) Continuité

CTN ①

d^n



②



$$f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{x}$$

③

<u>Rq :</u> Autre preuve : (Osq $y \leq x$)

$$\cos(x) - \cos(y) = \Big[\cos(\cdot)\Big]_y^x = \int_y^x -\sin(t)dt$$

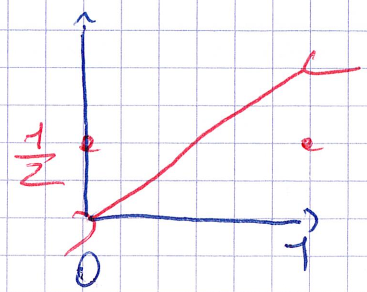
Donc $|\cos(x) - \cos(y)| = \left|\int_y^x \sin(t)\,dt\right|$

$$\overset{(R^*)}{\leq} \int_y^x \sin(t)\,dt$$

⚠ !!! Pr que cette $\leq$ soit V, il faut que $x \leq y$

De $\overline{m}$ si $z \leq y$ $\blacksquare$

(3.1)



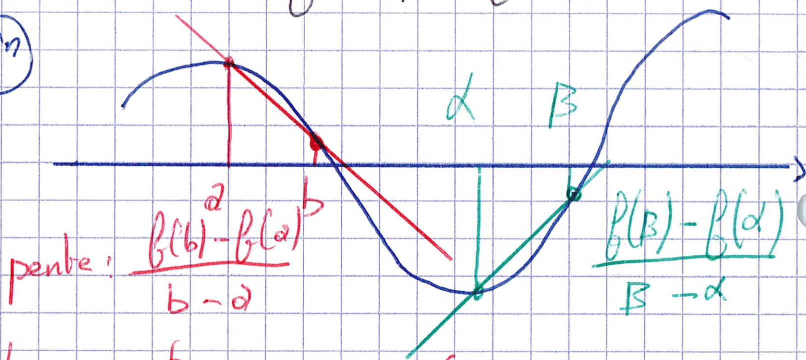
(h) Démo de f inj + C^0 $\Longrightarrow$ f strict monotone

ORPA et on fixe $a < b$ et $\alpha < \beta$ tq

$f(a) \geq f(b)$ et $f(\alpha) \leq f(\beta)$

idée !

d^n



(2) On amène continuement $a \longrightarrow \alpha$

Les cordes suivent $b \longrightarrow \beta$

(3) Par une sorte de TVI, à un moment donné, la corde sera horizontale

Ocsd $A : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$t \longmapsto a + (\alpha - a)t$

$B : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$t \longrightarrow b + (\beta - b)t$

On a $A(0) = a$ et $A(1) = \alpha$ De $\overline{m}$ $B(0) = b$

$B(1) = \beta$

d^n

Lemme : $\forall t \in [0,1],\ A(t) < B(t)$

D/ Soit $t \in [0,1]$.

Posons $\Delta(t) := B(t) - A(t)$

On a $\Delta(t) = b + (\beta - b)t - (a + (\alpha - a)t)$

$= (1-t)(b-a) + t(\beta - \alpha)$

d^n

Osq p. ex $b - a \leq \beta - \alpha$.

On a donc $\Delta(t) \geq (1-t)(b-a) + t(b-a)$

$= b - a > 0$ ■

Ocsd $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$t \longmapsto \dfrac{f(B(t)) - f(A(t))}{B(t) - A(t)}$

On a $\varphi(0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a} \leq 0$

et de $\overline{m}$ $\varphi(1) \geq 0$

de $\textcircled{+}$, $\varphi(\cdot)$ est C^0

$\textcircled{T}$ TVI $\longrightarrow$ fixons $t_0 \in [0,1]$ tq $\varphi(t_0) = 0$

On a alors : $f(A(t_0)) = f(B(t_0))$

$\hat{C}$ $A(t_0) < B(t_0)$: cela contredit que f inj $\blacksquare$

IV Continuité uniforme

1) Déf° et 1ères considérations

a) Déf°

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$

Déf° : On dit que f est uniformément continue

$\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x, y \in I,$$
$$|x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f|$$

Rq f^{ale} : Cela revient à demander qu'on puisse prendre le $\overline{m}$ $\delta > 0$ de continuité pour tous les $a \in I$

b) non-exemple

Prop : La f° $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ n'est pas unif^{nt} C^0

D/ ORPA : Avec $\varepsilon = 1$, on fixe $\delta > 0$

tq $|x-y| \leq \delta \Rightarrow |e^x - e^y| \leq 1$

d^n

Pour $n \in \mathbb{N}$, je pose $x_n := n$ $y_n := n + \delta$

On a $\forall n$, $|x_n - y_n| \leq \delta$, $y_n \geq x_n$.

On a donc $\forall n$, $|e^{x_n} - e^{y_n}| \leq 1$

Soit $n \in \mathbb{N}$

On a $|e^{x_n} - e^{y_n}| = |e^n - e^n e^\delta|$

$= (|1 - e^\delta|) e^n \leq 1$

Donc $\forall n$, $|1 - e^\delta| \leq \frac{1}{e^n} \longrightarrow 0$

Donc, on a $|1 - e^\delta| = 0$ ie $\delta = 0$ Abs ■

c) Unif $C^0 \Rightarrow C^0$

Fait : Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Alors :

$$f \text{ unif}^{nt}\ C^0 \Rightarrow f\ C^0$$

D/ Soit $\varepsilon > 0$ ĉ f unif^{nt} C^0 ; fixons δ tq

$$\forall x, y \in I,\quad |x-y| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \delta$$

Soit $a \in I$. Mq f est C^0 en a.

Soit $x \in I$ tq $|x - a| \leqslant \delta$. On a $|f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$ ∎

2) Caractérisation séquentielle de l'uniforme continuité

Prop : Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Alors

$$f \text{ unif}^t\ C^0 \iff \forall (x_n)_n, (y_n)_n \in I^{\mathbb{N}},$$

$$\left(x_n - y_n \longrightarrow 0 \Rightarrow f(x_n) - f(y_n) \longrightarrow 0 \right)$$

Rq : $\emptyset$ raison pour q $(x_n)_n$ ni $(y_n)_n$ $\xrightarrow{CV}$

D/ Osq f unif^t C^0

Soient $(x_n)_n, (y_n)_n \in I^{\mathbb{N}}$ tq $x_n - y_n \longrightarrow 0$

Mq $f(x_n) - f(y_n) \longrightarrow 0$

Idée : utilisons les ε

Soit $\varepsilon > 0$ $\hat{C}$ f unif^t C^0 : fixons $\delta > 0$ tq $(\dots)$

$\hat{C}$ $x_n - y_n \longrightarrow 0$, fixons N_0 tq $\forall n \geqslant N_0$,

$$|x_n - y_n| \leqslant \delta$$

Soit $n \geqslant N_0$

On a $|x_n - y_n| \leqslant \delta$: D'après $(*)$, on a $|f(x_n) - f(y_n)| \leqslant \varepsilon$

__Ccl__ : on a mq $f(x_n) - f(y_n) \longrightarrow 0$ ■ $(\Rightarrow)$

$(\Leftarrow)$

__Idée__ : On fait $\hat{c}$ le sens $(\Leftarrow)$ de la caract$^{\circ}$ seq de la cont^{é}.

1°) Contraposée

2°) Sequentialisation d'une $(\forall \delta > 0, \exists)$-assertion

Mq $\underbrace{f \text{ non } (\text{unif } C^0)}$ $\Longrightarrow$ non (caract$^{\circ}$ seq)

(1) $\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0, \exists x, y \in I : |x - y| \leqslant \delta$ et $|f(x) - f(y)| > \varepsilon_0$

(2) $\exists (x_n)_n, (y_n)_n \in I^{\mathbb{N}}$: $x_n - y_n \longrightarrow 0$ et $f(x_n) - f(y_n) \not\longrightarrow 0$

Osq (1)

Fixons donc $\varepsilon_0 > 0$ tq

$(*)$ $\forall \delta > 0, \exists x, y \in I$: $\begin{cases} |x - y| \leqslant \delta \\ |f(x) - f(y)| > \varepsilon_0 \end{cases}$

Si $n \in \mathbb{N}$, on pose $\delta = \frac{1}{n+1}$ et grace à $(*)$, On fixe $x_n, y_n \in I$ tq $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n+1}$

et $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon_0$

On a construit aussi deux suites $(x_n)_n, (y_n)_n \in I^{\mathbb{N}}$

ĉ $\forall n$, $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n+1}$, par controle, on a $x_n - y_n \to 0$

De ④, ĉ $\forall n$, $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon_0$, on a

$$f(x_n) - f(y_n) \not\to 0 \quad \blacksquare$$

3) Théorème de Heine

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Th}^{Ⓣ} \;♛\; : \text{ Soit } f : [a,b] \to \mathbb{R} \\ \text{Alors : } f \text{ continue} \implies f \text{ uniformément continue} \end{array}}$$

D/ Osq f C^0 et ORPA

D'après 2), fixons donc $(x_n)_n, (y_n)_n \in [a,b]^{\mathbb{N}}$

tq $x_n - y_n \longrightarrow 0$ et $f(x_n) - f(y_n) \not\to 0$

Rq : c'est insuffisant. Grâce à la preuve de 2)

Fixons plutôt : $\varepsilon_0 > 0$ et $(x_n)_n, (y_n)_n \in [a,b]^{\mathbb{N}}$

tq $x_n - y_n \longrightarrow 0$ et $\forall n$, $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon_0$

R^x $(x_n)_n \in [a,b]^{\mathbb{N}} \longrightarrow$ BW

D'après BW, fixons $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ extractrice et

$\ell \in [a,b]$ tq $x_{\varphi(n)} \longrightarrow \ell$

$\hat{C}$ $x_n - y_n \longrightarrow 0$, on a par extract° : $x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)} \longrightarrow 0$

D'où : $y_{\varphi(n)} \longrightarrow \ell$

$\hat{C}$ f est C^0 en ℓ, on a $\begin{cases} f(x_{\varphi(n)}) \longrightarrow f(\ell) \\ f(y_{\varphi(n)}) \longrightarrow f(\ell) \end{cases}$

Donc $f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)}) \longrightarrow 0$

Or, $\forall n$, $\left| \underbrace{f(x_{\varphi(n)})}_{\downarrow f(\ell)} - \underbrace{f(y_{\varphi(n)})}_{\downarrow f(\ell)} \right| \geqslant \varepsilon$

À la limite $0 \geqslant \varepsilon_0$ Abs ■

V Norme infinie

1) Fonctions bornées

On note $\mathcal{B}(I, \mathbb{R}) : \left\{ f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ bornée} \right\}$

Fait : $\mathcal{B}(I, \mathbb{R})$ sev $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

D/ AF ■

Prop : $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}) \subset \mathcal{B}([a,b], \mathbb{R})$

D/ ok ■

2) Déf° et propriété f^ale

a) déf°

Déf° : Soit $f \in \mathcal{B}(I, \mathbb{R})$

La norme infinie de f notée $\|f\|_\infty$ est le réel ≥ 0 déf par

$$\|f\|_\infty := \sup_{t \in I} |f(t)|$$

Ex :

- $\| \sin \|_\infty = \| \cos \|_\infty = 1$
- $\| \arctan \|_\infty = \frac{\pi}{2}$

b) propriété f^{ale}

Prop : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée Alors on a :

1) a) $\|f\|_\infty$ est une borne de f

b) ie on a $\forall x \in I, \quad |f(x)| \leq \|f\|_\infty$

2) a) Mieux : $\|f\|_\infty$ est la meilleure borne de f

b) ie, pour tout $M \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\left(\forall x \in I, \ |f(x)| \leq M\right) \Longrightarrow M \geq \|f\|_\infty$$

"M est une borne de f"

D/ C'est un peu évident

1) b) Ou : $\|f\|_\infty$ majore $\{|f(t)| \ ; t \in I\}$

2) b) Si $\forall t \in I, \ |f(t)| \leq M$, alors

M majore $\{|f(t)| \ ; t \in I\}$. Or sup ~~f(t)~~

Or $\sup\{(|f(t)|) \ ; t \in I\}$

(ie $\|f\|_\infty$) est le + petit des majorants

Donc $\|f\|_\infty \leq M$ ■

3) C'est une norme

a) Def° des normes

Déf M : Soit E un $\mathbb{R}$-ev

Une norme sur E est une application

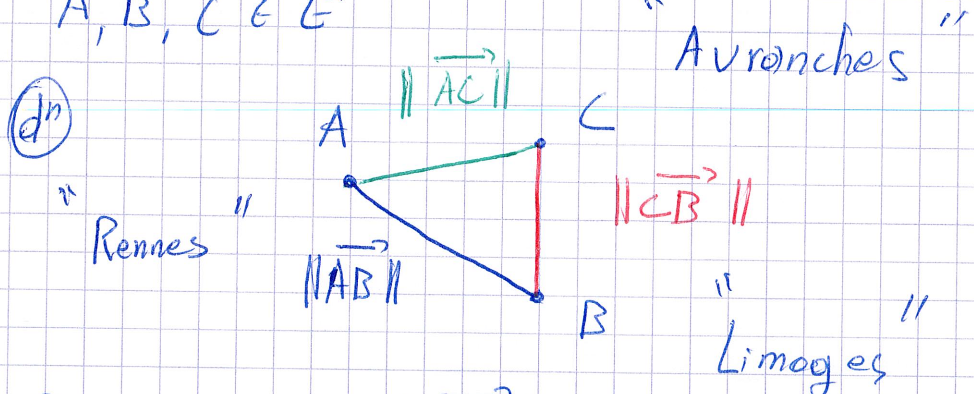
$N : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :

1) $\forall x, y \in E, \quad N(x+y) \leq N(x) + N(y)$
(ineg triang.)

2) $\forall x \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$
(homogeneité)
(donc $N(0_E) = N(0_{\mathbb{R}} \cdot 0_E) = 0_{\mathbb{R}} N(0_E) = 0$)

3) $\forall x \in E, \quad N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$

<u>Rq</u> : On prend le pt de vue affine. Soient $A, B, C \in E$



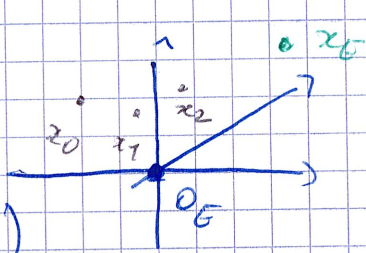
On a $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\| \leq \|\overrightarrow{AC}\| + \|\overrightarrow{CB}\|$

Rq : De m̄ pour les $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.

Déf : Un espace vectoriel normé (evn) est un couple $(E, \|\cdot\|_E)$ où E ev et $\|\cdot\|_E$ est une norme sur E

Rq : Tout ce qu'on a fait en analyse peut être fait dans les evn

Exemple :



Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un evn

Soit $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ et soit $x \in E$

On dit que $(x_n)_n$ tend vers x pour $\|\cdot\|_E$ et on note $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_E} x$

Δ

ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, \|x - x_n\|_E \leq \varepsilon$

NB $\|x-y\|$: c'est la distance entre x et y.

Fait : $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_E} x$

$\iff \|x_n - x\|_E \longrightarrow 0$

b) $\|\cdot\|_\infty$ est une norme.

<u>Prop :</u> $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur le $\mathbb{R}$-ev $\mathcal{B}(I,\mathbb{R})$

D/ Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée tq $\|f\|_\infty = 0$

On a $\forall t$, $|f(t)| \leq 0$ Donc $f = \tilde{0}$

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée et soit $\lambda \in \mathbb{R}$

(*) Mq $\|\lambda f\|_\infty \leq |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$

(*) AC Mq $|\lambda|\,\|f\|_\infty$ majore $\{|\lambda f(t)| ; t \in I\}$

C'est ok car si $t \in I$, on a $|\lambda f(t)| = |\lambda|\,\underbrace{|f(t)|}_{\leq \|f\|_\infty}$

$\leq |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$

(*) ĉ $\boxed{\|\lambda f\|_\infty \text{ par déf}^{\circ} \text{ est la borne optimale de } \lambda f \quad \text{AC} ++}$

On a $\|\lambda f\|_\infty \leq |\lambda|\,\|f\|_\infty$

(*) Astuce

(si $\lambda = 0$, on a bien $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda|\,\|f\|_\infty$)

Osq $\lambda \neq 0$, On applique (*) avec $f \leftarrow \lambda f$ et $\lambda \leftarrow \frac{1}{\lambda}$

On a $\|f\|_\infty \leq \frac{1}{|\lambda|}\|\lambda f\|_\infty$ ie $|\lambda|\,\|f\|_\infty \leq \|\lambda f\|_\infty$

homogénéité

• Inég. triang.

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ bornées

Soit $t \in I$. On a

$$|(f+g)(t)| = |f(t)+g(t)| \leq \underbrace{|f(t)|}_{\leq \|f\|_\infty} + \underbrace{|g(t)|}_{\leq \|g\|_\infty}$$

$$\leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

Donc $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ est une borne de $f+g$.

Donc (AC) $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

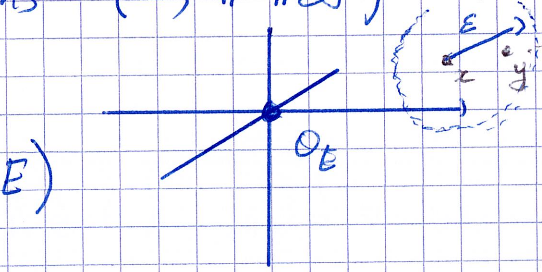
c) Dessins

Soit $\varepsilon > 0$.

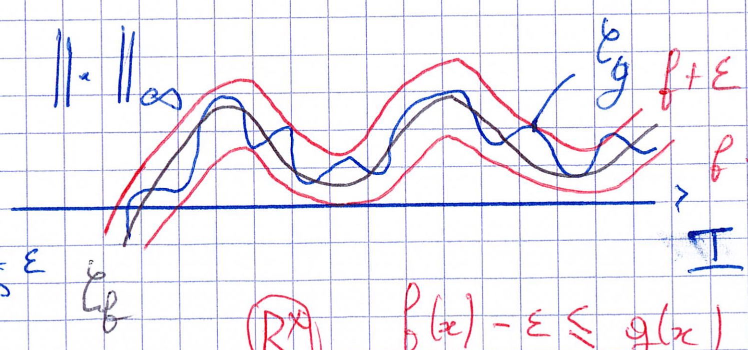
Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ bornées

Osq $\|f-g\|_\infty \leq \varepsilon$ "f et g sont ε-proches pour $\|\cdot\|_\infty$"

d^n dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$ evn



d^n pour $\|\cdot\|_\infty$



$f(x) - g(x) \leq \|f-g\|_\infty = \varepsilon$

(R*) $f(x) - \varepsilon \leq g(x) \leq f(x) + \varepsilon$

d) Convergence uniforme

<u>Déf°</u> : Soit I intervalle

Soit $(f_n)_n \in \mathcal{B}(I, \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$

⚠ $(f_n)_n$ est une suite de fonctions

Soit $f \in \mathcal{B}(I, \mathbb{R})$

On dit que $(f_n)_n$ converge uniformement vers f

et on note $f_n \xrightarrow[n \to \infty]{CVU} f$

⚠ ssi $f_n \xrightarrow[n \to \infty]{\|\cdot\|_\infty} f$

<u>Rq</u> : • ie ssi $\| f_n - f \|_\infty \longrightarrow 0$

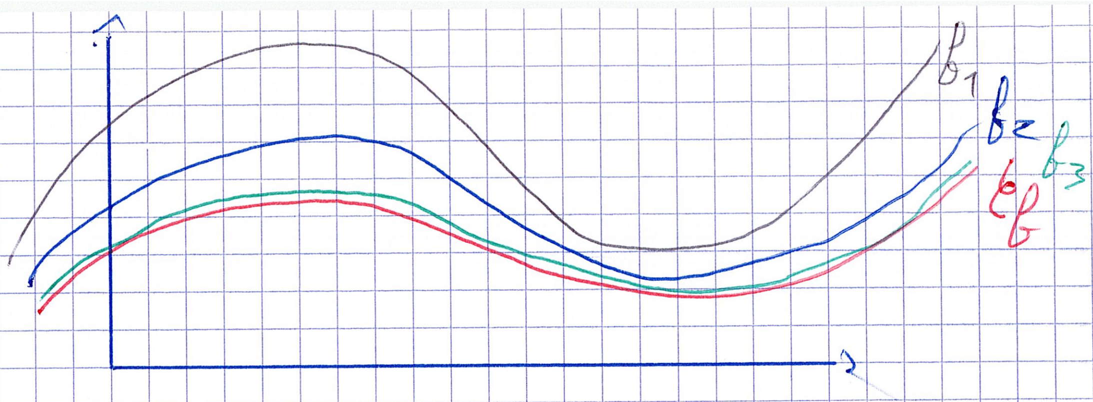
• ie ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, \| f_n - f \| \leq \varepsilon$

R° $\sup x_i \leq C \iff \forall i, x_i \leq C$

• ie ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists \cancel{N} N \in \mathbb{N}$:

$\forall n \geq \cancel{N} N, \forall t \in I, | f_n(t) - f(t) | \leq \varepsilon$

f_n



Exo · 27.32

· Ⓣ $f_n \xrightarrow{CVU} f \overset{(*)}{\Longrightarrow} \left(\forall x \in I,\ f_n(x) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} f(x)\right)$

!! · Mq en g^{al}, la rcpq de $(*)$ est F

· Soit $(f_n)_n \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ et soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$

Mq $f_n \xrightarrow{CVU} f \Longrightarrow \int_a^b f_n(t)\,dt \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\,dt$

VI Extension "dans $\mathbb{C}$"

1) Limites

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$. Soit $a \in \overline{I}$ un pt où l'on prend des limites.

Soit $\ell \in \mathbb{C}$

Déf° : On dit que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \quad \overset{\Delta}{\text{ssi}}$

1) si $a \in \mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in I, \quad |x-a| \leq \delta$$

$$\Rightarrow \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

module

2) si $a = +\infty$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R} : \forall x \in I, \quad x \geq x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

3) si $a = -\infty$: AF

Prop :

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \iff \begin{cases} \mathrm{Re}(f(x)) \xrightarrow[x \to a]{} \mathrm{Re}(\ell) \\ \mathrm{Im}(f(x)) \xrightarrow[x \to a]{} \mathrm{Im}(\ell) \end{cases}$$

D/ (...) $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ (...) $\blacksquare$

2) Continuité

Exemple : Ocsd $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

$t \longmapsto \dfrac{-4t^2+4}{t^2+1} + i\arctan(t)$

Alors $f(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} -4 + i\dfrac{\pi}{2}$

Ocsd $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

$t \longmapsto e^{it}$

Alors g n'a pas de limites qd $t \longrightarrow +\infty$

ORPA Fixons $\ell \in \mathbb{C}$ tq $e^{it} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$

On a donc $\mathrm{Re}(e^{it}) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Re}(\ell)$

ie $\cos(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Re}(\ell)$ ABS ■

2) Continuité

$(E, \|\cdot\|_E)$ evn

Déf$^{\circ}$: Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ et soit $a \in I$

- On dit que f est $\mathcal{C}^0$ en a $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

module

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, : \forall x \in I, |x-a| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| \leq \varepsilon$

$\|f(x)-f(a)\|_E \leq \varepsilon$

- On dit que f est continue (sur I) $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$
$\forall a \in I$, f est $\mathcal{C}^0$ en a

- On note $\mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ l'ens de ces fonctions.

idée : tout ce qu'on a vu dans $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ est valable pour $\mathcal{C}(I, \mathbb{C})$:

- stabilité par $+$, $\times$, $\cdot$, $\frac{1}{\cdot}$, composition

Fait : $\mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ est une $\mathbb{C}$-algèbre

Thm : Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ continue.

Alors : 1) f est bornée

2) $\exists x_0 \in [a,b] : |f(x_0)| = \sup_{t \in I} |f(t)|$

Lemme : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ Alors :

$$f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{C}) \Longrightarrow |f| \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$$

D/ • Idée n°1 : $I \xrightarrow[f]{} \mathbb{C} \xrightarrow{|\cdot|} \mathbb{R}$

puis "par composition"

Pas possible car la composition dont on dispose c'est

$$\left.\begin{array}{l} \begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"] & J \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cap"] & \mathbb{C} \\ & \mathbb{R} & \end{tikzcd} \\ f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \\ g \in \mathcal{C}(I, \mathbb{C}) \end{array}\right\} \quad g \circ f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{C})$$

D/ Nowar Annulée

Prop :

$$f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{C}) \iff \begin{cases} \mathrm{Re}(f) \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \\ \mathrm{Im}(f) \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \end{cases}$$

D/ f C^0 en a $\iff f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a)$

$$\iff \begin{cases} \mathrm{Re}\,(f(x)) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \mathrm{Re}\,(f(a)) \iff \\ \mathrm{Im}\,(\dots) \ \dots \end{cases}$$

D/ Lemme (Nowar)

Osq $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{C}) \longrightarrow Re(f)$ et $Im(f)$ C^0

$\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ est stable par $+$ et $\times$

$Re(f)^2 + Im(f)^2$ C^0 $\longrightarrow$ On a $\cancel{I \to \mathbb{R}_+}$

$$I \xrightarrow[Re(f)^2 + Im(f)^2]{} \mathbb{R}_+ \xrightarrow{\sqrt{\cdot}} \mathbb{R}$$

Donc $t \longmapsto \sqrt{Re(f(t))^2 + Im(f(t)^2)}$ C^0

ie $|f|$ est C^0 ■

D/ Antoine

Avec $||a| - |b|| \leqslant |a-b|$ et des $\varepsilon > 0$ ■

Rq : la caracterisation sequentielle est encore V.

ÀF : l'énoncer + exo AF D/

D/ borne atteinte $\mathbb{C}$

On applique les bornes atteintes à

$|f|$ $[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ Continu. ■