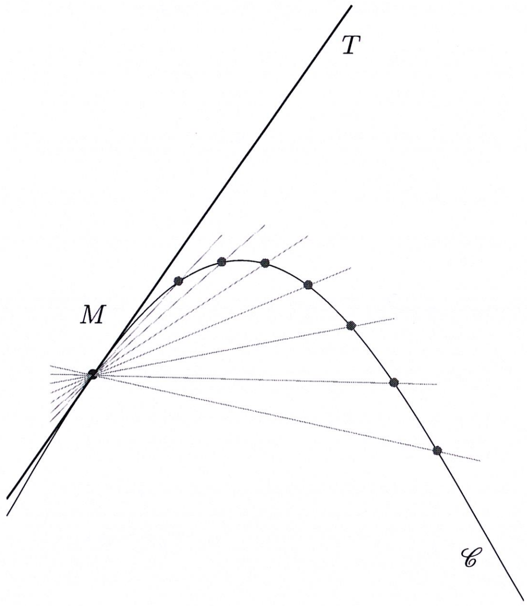
Chapitre 22

Dérivations



La tangente T à $\mathscr{C}$ au point M est « la limite »
des cordes passant par M et par un point se rapprochant de M.

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on a défini $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des fonctions continues. L'étape suivante, qu'on va accomplir dans ce chapitre, est de définir et étudier les fonctions dérivables $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, dont l'ensemble est noté $\mathscr{D}(I,\mathbb{R})$.

On peut alors définir

$$\begin{aligned} \mathscr{C}^0(I,\mathbb{R}) &:= \mathscr{C}(I,\mathbb{R}) \\ \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R}) &:= \Big\{ f \in \mathscr{D}(I,\mathbb{R}) \mid f' \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R}) \Big\} \\ \forall i \geqslant 1, \quad \mathscr{C}^i(I,\mathbb{R}) &:= \Big\{ f \in \mathscr{D}(I,\mathbb{R}) \mid f' \in \mathscr{C}^{i-1}(I,\mathbb{R}) \Big\} \end{aligned}$$

et enfin

$$\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R}) := \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \mathscr{C}^i(I,\mathbb{R}).$$

On a la tour d'inclusions d'espaces vectoriels

$$\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R}) \subset \ldots \subset \mathscr{C}^i(I,\mathbb{R}) \subset \ldots \subset \mathscr{C}^2(I,\mathbb{R}) \subset \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R}) \subset \mathscr{D}(I,\mathbb{R}) \subset \mathscr{C}(I,\mathbb{R}).$$

Lycée CHATEAUBRIAND
MPSI 3

Colas Bardavid

22
Dérivation
plan de cours et principaux résultats

I. Dérivation

28.5
28.17
28.41

1) Taux d'accroissement

Notation 22.1 Ⓣ
La fonction taux d'accroissement de f en a, *notée* $\tau_{f,a}$ *est définie par*

$$\tau_{f,a} : \begin{cases} I \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}. \end{cases}$$

2) Dérivabilité

a) trois points de vue
b) définition
c) tangente
d) exemples
e) dérivabilité à droite et à gauche

3) Fonction dérivée

a) définition
b) exemple

4) Dérivable implique continue

II. Dérivation et opérations

28.9
28.44

1) Opérations algébriques

2) Composition

3) Dérivation de la réciproque

Proposition 22.2 Ⓣ
Soit $f : I \longrightarrow J$ *une bijection continue et soit* $a \in I$.
On suppose f *dérivable en* a. *Alors,*

1) f^{-1} *dérivable en* $f(a)$ $\iff$ $f'(a) \neq 0$;
2) *si on note* $b := f(a)$, *on a alors*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

4) Dérivée du produit de N fonctions

III. Dérivées successives

28.33
28.31

1) Rappels sur les dérivées successives, sur $\mathscr{D}^n$, $\mathscr{C}^n$ et sur $\mathscr{C}^\infty$

2) Dérivable n'implique pas $\mathscr{C}^1$

Fait 22.3
On considère la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{cases}$$

Alors,

1) *f est dérivable ;*
2) *mais, f n'est pas $\mathscr{C}^1$.*

3) Opérations dans $\mathscr{D}^n$ et $\mathscr{C}^n$

4) Formule de Leibniz

Proposition 22.4 Ⓣ
On a

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

5) Composition

6) Réciproque

IV. Extension à $\mathbb{C}$ à l'arrivée

1) Définition

2) Caractérisation

3) Opérations, constructions

V. Théorème des accroissements finis

28.23
28.24
28.25
28.32
28.28

1) Extrema locaux

a) définition

Définition 22.5 Ⓣ
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $a \in I$. On dit que f admet un maximum local en a $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\exists \delta > 0 : \ \forall x \in I \cap]a-\delta, a+\delta[, \ \ f(x) \leqslant f(a).$$

b) exemples

2) Lemme de l'extremum local

Lemme 22.6
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $a \in \mathring{I}$ où f est dérivable. Alors

$$f \text{ admet un extremum local en } a \implies f'(a) = 0.$$

3) Théorème de Rolle

a) énoncé

> **Théorème 22.7**
> *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.*
> *Alors,*
> $$f(a) = f(b) \quad \Longrightarrow \quad \exists c \in \,]a,b[\,: \; f'(c) = 0.$$

b) c'est faux dans $\mathbb{C}$

4) Théorème des accroissements finis (TAF)

a) énoncé

> **Théorème 22.8** Ⓣ
> *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.*
> *Alors,*
> $$\exists c \in \,]a,b[\,: \; \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

b) c'est faux dans $\mathbb{C}$

5) Inégalité des accroissements finis (IAF)

a) version réelle

> **Théorème 22.9** Ⓣ
> *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable et soit $C \in \mathbb{R}_+$ tels que*
> $$\forall x \in I, \; |f'(x)| \leqslant C.$$
> *Alors,*
> $$\forall x, y \in I, \; |f(x) - f(y)| \leqslant C|x-y|.$$

b) version complexe

VI. Dérivée et monotonie 28.3

28.21

1) Extension aux bornes de quelques propriétés

2) Caractérisation des fonctions constantes

3) Caractérisation de la (dé)croissance

> **Proposition 22.10**
> *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Alors,*
> $$f \text{ croissante sur } I \quad \Longleftrightarrow \quad \big(\forall x \in I, \; f'(x) \geqslant 0\big).$$

4) Caractérisation de la stricte (dé)croissance

> **Proposition 22.11**
> *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes*
> (i) *f strictement croissante sur I*
> (ii) *$f' \geqslant 0$ et $\big\{x \in I \mid f'(x) = 0\big\}$ ne contient aucun intervalle de longueur > 0.*

VII. Théorème de la limite de la dérivée

1) Le théorème

Théorème 22.12
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et soit $a \in I$. On suppose que $f \in \mathscr{D}\big(I \setminus \{a\}, \mathbb{R}\big)$ et que

$$f'(x) \underset{\substack{x \to a \\ \neq}}{\longrightarrow} \ell \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Alors :

1) *on a* $\boxed{\tau_{f,a}(x) \underset{\substack{x \to a \\ \neq}}{\longrightarrow} \ell\,;}$
2) *en particulier :*
   - *si $\ell \in \mathbb{R}$, f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.*
   - *si $\ell \notin \mathbb{R}$, f n'est pas dérivable en a.*

2) Application au prolongement $\mathscr{C}^k$

a) prolongement des fonctions $\mathscr{C}^0$
b) prolongement des fonctions $\mathscr{C}^1$
c) prolongement des fonctions $\mathscr{C}^k$

Ch 22 Dérivation

Soit J un intervalle, Soit I un intervalle tq $\begin{cases} \ell(I)>0 \\ \ell(J)>0 \end{cases}$

I Dérivation

1) Taux d'accroissement

Notation : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$

Soit $a \in I$

La fonction taux d'accroissement de f en a, notée $T_{f,a}$ est

$$T_{f,a} : I \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Faits : 1) (T) $T_{f,a}(x) = T_{f,x}(a)$

2) OCSD

$$\underset{a}{I} \xrightarrow{f} \underset{f(a)}{J} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

Soit $x \in I$ tq $f(x) \neq f(a)$ (D'où $x \neq a$)

Donc $f(x) \in J \setminus \{f(a)\}$

Mais, on a $T_{g,f(a)} : J \setminus \{f(a)\} \longrightarrow \mathbb{R}$

Calculons Donc

$$T_{g,f(a)}(f(x)) = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)}$$

$$= \frac{x-a}{f(x)-f(a)} \, \frac{(g\circ f)(x) - (g\circ f)(a)}{x-a}$$

$$= \frac{T_{g\circ f,a}(x)}{T_{f,a}(x)}$$

Ie $T_{g\circ f,a} = T_{g,f(a)}(f(x)) \times T_{f,a}(x)$

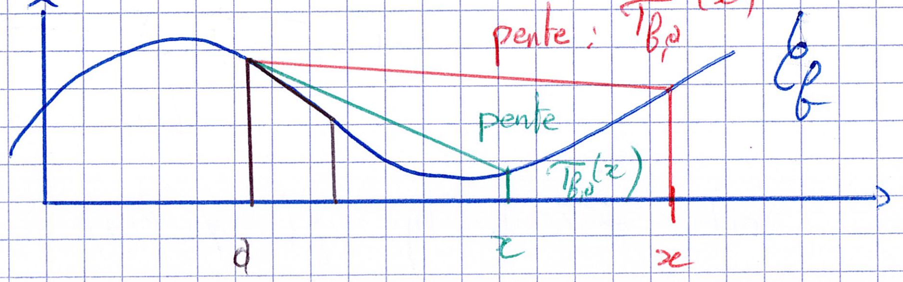
* L'"opérateur" $T_{\cdot,a}$ $\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(I,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(I\setminus\{a\},\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & T_{f,a}(\cdot) \end{array}$

est une AL : AC / AF

2.) Derivabilité

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ Soit $a \in I$

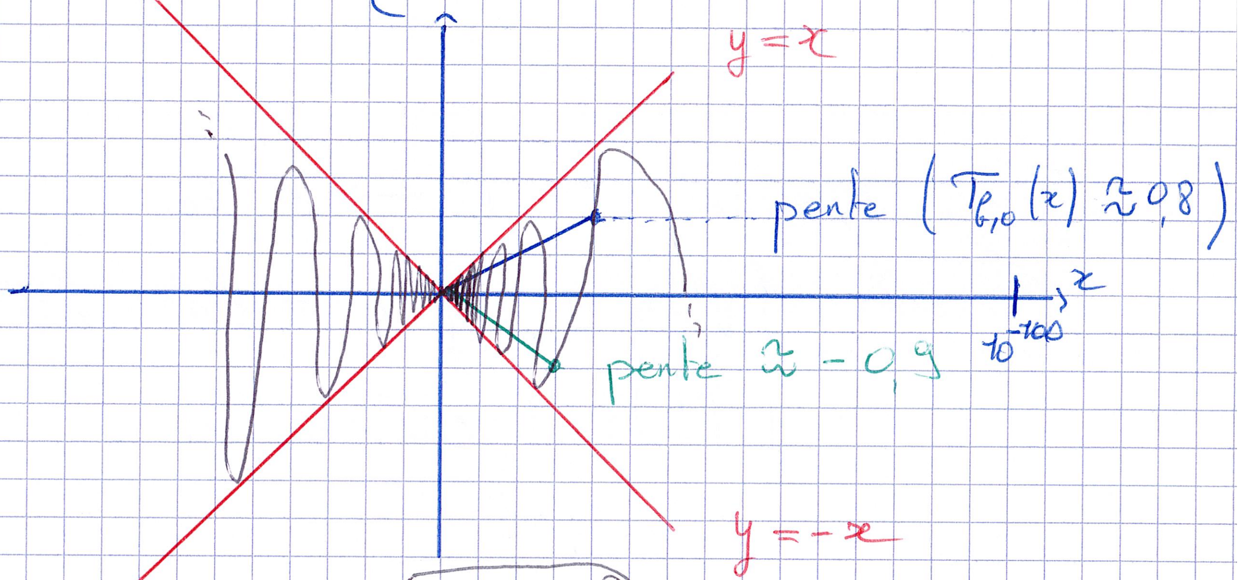
d^n



d^n T

$$f(x) = \begin{cases} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

+ zoom



But $\boxed{T_{f,0}(\cdot)\ ?}$

a) Trois p^{ts} de vue

Proposition (technique)

Les Assertions suivantes sont équivalentes.

D1 $T_{f,a}(x)$ admet une limite finie quand $x \xrightarrow{\neq} a$

ie $\exists\, \ell \in \mathbb{R}$: $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow[x \neq a]{} \ell$

D2 Il existe $\ell \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon(\cdot) : I' \longrightarrow \mathbb{R}$ tq

$$\begin{cases} \forall h \in I', \ f(a+h) = f(a) + \ell \cdot h + \varepsilon(h)h \\ \varepsilon(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0 \end{cases}$$

où $I' = \{h \in \mathbb{R} \mid a + h \in I\}$

" $I' = I - a$ "

On peut alors écrire :

$$\boxed{f(a+h) \underset{h \to 0}{=} f(a) + \ell h + o(h)}$$

(D3) $\exists$ Il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}$ tq

$$\begin{cases} \forall x \in I, & f(x) = f(a) + \varphi(x)(x-a) \\ \varphi(\cdot) \text{ est continue en } a \end{cases}$$

Commentaire sur (D3)

Donnons-nous φ tq (D3)

Si $x \neq a$, on a $\varphi(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x-a} = T_{f,a}$

Donc $\varphi\big|_{I \setminus \{a\}} = T_{f,a}$

Idée : on prolonge $T_{f,a}$ au point a

Osq $f : I \to \mathbb{C}$ C^0

Alors : $T_{f,a} : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ est C^0

en tant que quotient de f° C^0

Donc : si $T_{f,a}(\cdot)$ admet une limite en a ;

on prolonge $T_{f,a}(\cdot)$ par continuité en a.

On obtient $\varphi(\cdot)$

Dans le cas où $D_1 / D_2 / D_3$ sont vraies, on a alors

$$\underbrace{\lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} \tau_{f,a}(x)}_{D1} = \underbrace{P}_{D2} = \underbrace{\varphi(a)}_{D_3}$$

D/ $D_1 \Longrightarrow D_2$ Osq D_1 : On pose $P := \lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} \tau_{f,a}(x)$

$\left(B^\circ \quad f(a+h) = f(a) + Ph + \varepsilon(h) h \right)$

On pose $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$

$$h \longmapsto \begin{cases} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} - P & \text{si } h \neq 0 \\ 0 & \text{si } h = 0 \end{cases}$$

On a bien $\forall h \in I$, $f(a+h) = f(a) + Ph + h \cdot \varepsilon(h)$

Et : si $h \neq 0$: on a $\varepsilon(h) = \tau_{f,a}(a+h) - P$

Or on a $\lim_{\substack{h \to 0 \\ \neq}} \tau_{f,a}(a+h) = \lim_{x \to a} \tau_{f,a}(x) = P$

Donc $\varepsilon(h) \xrightarrow[\substack{h \to 0 \\ \neq}]{} 0$ Ĉ $\varepsilon(0) = 0$, on a bien

$$\varepsilon(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

CCl : $f(a+h) \underset{h \to 0}{=} f(a) + Ph + \underbrace{o(h)}_{\varepsilon(h) h}$

$(D2) \Longrightarrow (D3)$ Soit $\varepsilon(\cdot)\ I \longrightarrow \mathbb{R}$ tq $(\ldots)$ et $\ell \in \mathbb{R}$

Je pose $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} T_{f,a}(x) & \text{si } x \neq a \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}$$

On a bien : $\forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + \varphi(x)(x-a)$

Mq $\varphi(\cdot)$ est C^0 en a

- Si $x \neq a$: $\boxed{\text{!!}}$ On pose h tq $x = a+h$ (ie $h := x-a$)

On a $\varphi(x) = T_{f,a}(x) = T_{f,a}(a+h)$

$$= \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$= \frac{f(a) + \ell h + \varepsilon(h)h - f(a)}{h}$$

$$= \ell + \varepsilon(h) \underset{\substack{x \to a \\ \neq \\ h \to 0 \\ \neq}}{\longrightarrow} \ell$$

$\hat{C}$ $\varphi(a) = \ell$, on a mq $\varphi(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \varphi(a)$

Donc $\varphi(\cdot)$ est C^0 en a

(D3) $\Rightarrow$ (D1) (T) : Ocsd $\varphi : I \to \mathbb{R}$ tq (D3)

On a $\varphi(x) \xrightarrow[x \to a]{} \varphi(a)$ donc $\varphi(x) \xrightarrow[\substack{x \to a \\ \neq}]{} \varphi(a)$

Or, d'après les considérations à propos de (D3),

on a : $\forall x \neq, \quad \varphi(x) = T_{f,a}(x)$

CCl : $T_{f,a}(x) \xrightarrow[\substack{x \to a \\ \neq}]{} \varphi(a)$ ∎

b) Déf°

Déf° : On dit que f est dérivable en a $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$:

(D1) ie (D2) ie (D3) est vraie

Le réel

$$\lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} T_{f,a}(x) = l = \varphi(a)$$

est noté $f'(a)$ et est appelé nombre dérivé de f en a

On dit que f est dérivable (sur I) $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$\forall a \in I, \quad f$ dérivable en a

On note alors $f' : I \to \mathbb{R}$
$\quad x \mapsto f'(x)$

C'est la (fonction) dérivée de f

• On note $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ l'ens de $f : I \to \mathbb{R}$ dérivables sur I.

c) Tangente

Déf : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $a \in I$ telle que f est dérivable en a.

La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a, notée $T_{f,a}$, est la droite d'équat° :

$$T_{f,a} : y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

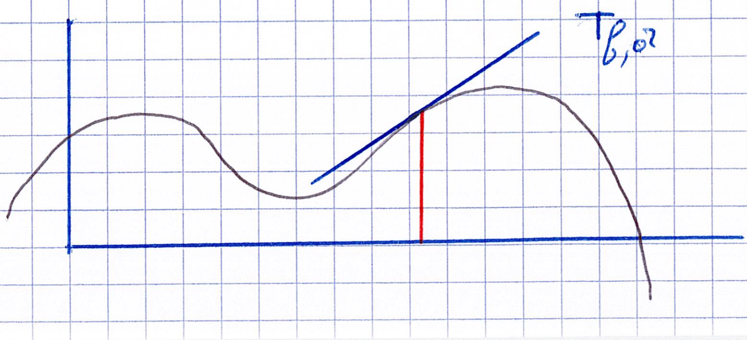
Astuce : Tte droite "non verticale" possède une équation $y = \alpha x + \beta$.

Bcp mieux, tte droite de ce type possède une éq° : $y = A(x-a) + B$

(Il suffit de prendre $A := \alpha$ et B tq

$\beta = B - aA$ ie $B := \beta + aA = \beta + a\alpha$)

d^n



Donnons-nous une éq° $y \overset{(*)}{=} A(x-a) + B$ de $T_{f,a}$

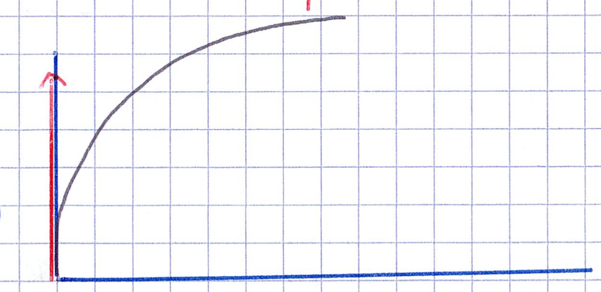
- Déjà, on veut q $A = f'(a)$
- On a $\begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix} \in T_{f,a}$ (AC) **donc** les coordonnées de $\begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix}$ vérifient $(*)$
- Donc $f(a) = A(a-a) + B$ Donc $\boxed{B = f(a)}$

d) Exemples

(1°) Ocsd $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ Est-elle dérivable en 0 ?

NON : car $\mathcal{C}_{\sqrt{\cdot}}$ "a une tangente verticale" au point $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

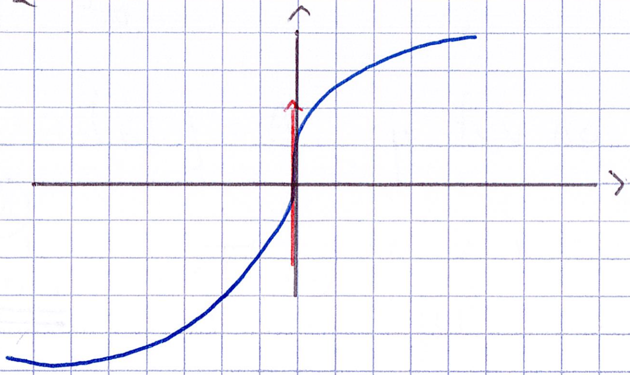
(dⁿ)



Complexifions cet exemple : à la recherche de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et tq $\mathcal{C}_f$ admet une tangente verticale en $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

ie on cherche $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tq

$\mathcal{C}_f =$



On prend $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\left(\text{ou} \quad \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt[3]{x} \end{array} \right)$$

Fait : $\sqrt{\cdot}$ n'est pas derivable en 0

D/ Ocsd $\tau_{\sqrt{\cdot},0} \; \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$

Soit $x > 0$, on a $\tau_{\sqrt{\cdot},0}(x) = \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0}$

$$= \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$$

■

(2) Etudions $|\cdot|$ dn

Fait : $|\cdot|$ n'est pas dérivable en 0.

D/ On distingue 2 cas ①:

- Si $x > 0$: $T_{|\cdot|,0}(x) = \dfrac{|x| - |0|}{x - 0} = \dfrac{|x|}{x} = \dfrac{x}{x} = 1$

- si $x < 0$: $T_{|\cdot|,0}(x) = -1$ de m

Donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} T_{|\cdot|,0}(x) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} T_{|\cdot|,0}(x) = -1$

Donc $T_{|\cdot|,0}$ n'a pas de limite en 0 ∎

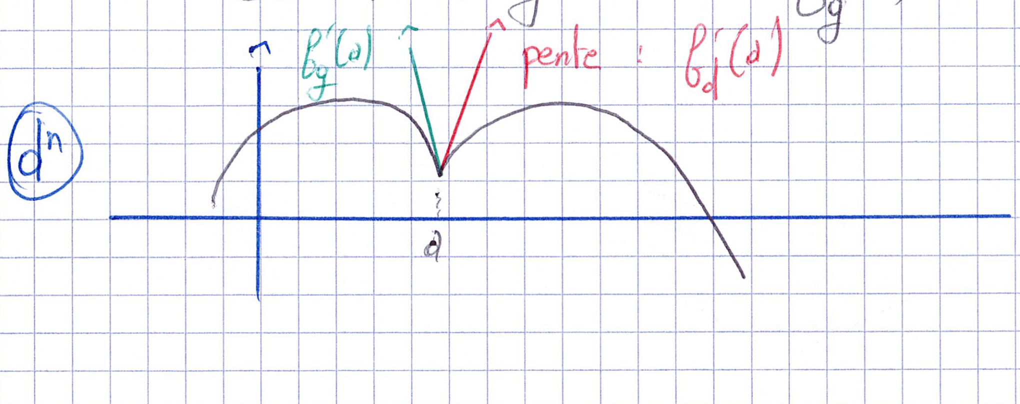
e) dérivabilité à droite & à gauche

Déf^{o} : • On dit que f est dérivable à droite en a

$\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} T_{f,a}(x)$ existe et est finie. On la note

alors $f'_d(a)$

• De m à gauche : $f'_g(a)$



2) Fonctions dérivée

a) déf°

C'est f'

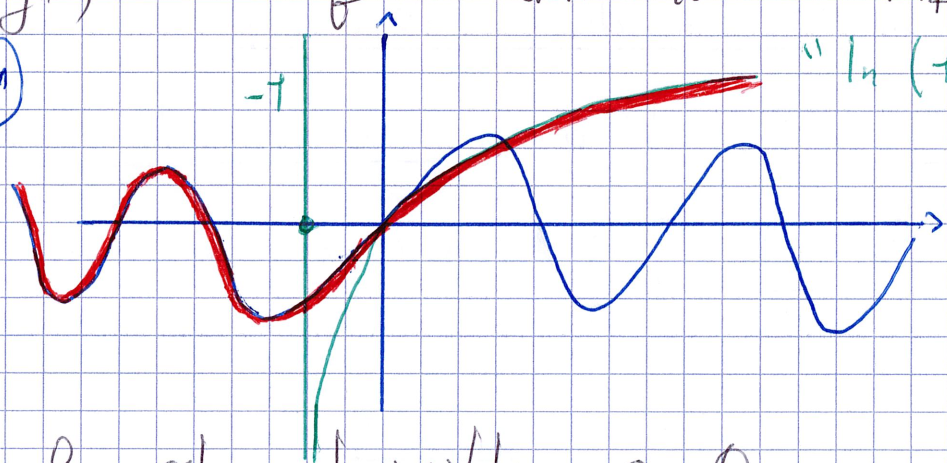
b) exemple.

OCSd $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} \sin x & \text{si } x \leq 0 \\ \ln(1+x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

• Déjà, on a f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$

$d^{\circ 1}$



Mq f est dérivable en 0

D/ Notons $g := \sin$ et $d :]-1;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \ln(1+x)$$

On sait que $g(\cdot)$ et $d(\cdot)$ sont dérivables en 0

Et : $g'(0) = \sin'(0) = \cos(0) = 1$

$$d'(0) = \frac{1}{1+0} = 1$$

Si $x<0$:

On a $T_{f,0}(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}$

$= T_{g,0}(x) \xrightarrow[x \to 0]{} g'(0) = 1$

Donc on a $T_{f,0}(x) \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ <}]{} 1$

Rq : $g(0) = d(0) = 0$

Si $x>0$: dem

$T_{f,0}(x) = T_{d,0}(x) \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ \neq}]{} d'(0) = 1$

Donc $T_{f,0}(x) \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ >}]{} 1$

ccl : $T_{f,0}(\cdot)$ admet une limite en 0

ccl : $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

On dit qu'on a fait un recollement dérivable.

h) Dérivable $\Rightarrow C^0$

Prop : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $a \in I$.

Alors : f dérivable en $a \Rightarrow f$ continue en a

D/ Osq f dérivable en a

D'après D3, fixons donc $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tq

$$\begin{cases} \forall x \in I, \ f(x) = f(a) + \varphi(x)(x-a) \\ \varphi(\cdot) \text{ est } C^0 \text{ en } a \end{cases}$$

- Ĉ $x \longmapsto (x-a)$ est C^0, par opération, on a

  $x \longmapsto \varphi(x)(x-a)$ est C^0 en a

- Donc $x \longmapsto f(a) + \varphi(x)(x-a)$ l'est aussi

- **Bilan** : $\boxed{f \text{ est } C^0 \text{ en } a \quad \blacksquare}$

Corollaire : $\mathcal{D}(I,\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$

II Dérivations et opérations.

1) Opérations algébriques

Prop : Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $a \in I$.

On suppose f, g dérivables en a

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

Alors, on a :

1) $f + \lambda g$ est dérivable en a et $(f+\lambda g)'(a) =$

$$f'(a) + \lambda g'(a)$$

2) fg est dérivable en a et $(fg)'(a)$

$$= f'(a)\, g(a) + f(a)\, g'(a)$$

3) Osq $f(a) \neq 0$ Alors $f(x) \neq \mathcal{V}(a)$ et

$\frac{1}{f}$ (qui est définie au $\mathcal{V}(a)$) est dérivable en a

et on a $\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = \dfrac{-f'(a)}{f^2(a)}$

4) Si $g(a) \neq 0$, de $\overline{m}$: $\frac{f}{g}$ est dérivable en a

et $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) =$

$$\frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2}$$

D/ 1) On a vu q $h \longmapsto \tau_{h,a}(\cdot)$ est un AL

Donc si $x \neq a$, on a

$$\tau_{f+\lambda g,\, a}(x) = \tau_{f,a}(x) + \lambda\, \tau_{g,a}(x) \quad (AF)$$

$$\tau_{f,a}(x) \xrightarrow[x \to a]{} f'(a) \qquad \tau_{g,a}(x) \xrightarrow[x \to a]{} g'(a)$$

Par opé sur les limites, on a donc

$$\tau_{f+\lambda g,\, a}(x) \xrightarrow[\substack{x \to a \\ \neq}]{} f'(a) + \lambda g'(a)$$

ccl : $f + \lambda g$ dérivable en a et $(f+\lambda g)'(a) = f'(a) + \lambda g'(a)$

1)

2) D_1 égal^{nt} $\oplus$:

$$\tau_{fg,a}(x) = \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a}$$

$$= \frac{\big(f(x) - f(a)\big)g(x) + f(a)g(x) - f(a)g(a)}{x-a}$$

OFAA

$f(x) - f(a)$

$$= \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\, g(x) + \frac{f(x)\big(g(x)-g(a)\big)}{x-a}$$

$$= \tau_{f,a}(x)\, g(x) + f(x)\, \tau_{g,a}(x)$$

$\tau_{f,a}(x) \longrightarrow f'(x)$; $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} g(a)$; $\tau_{g,a}(x) \longrightarrow g'(a)$

or g dériv en a

Donc g C^0 en a, donc ...

Donc par operations :

$\tau_{fg,a}(x) \longrightarrow f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$

<u>ccl</u> : (...) <u>ok</u> ■ 2)

exo : essayer avec D_3

3) Osq $f(a) \neq 0$

Mq $\frac{1}{f}$ dérivable en a

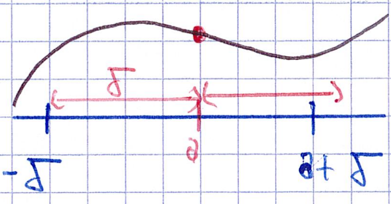
- <u>Déjà</u> : $\hat{c}$ f dérivable en a, f C^0 en a.

- Osq <u>$f(a) > 0$</u>, $\hat{c}$ f C^0 en a, on sait que $f > 0$ au $\mathcal{V}(a)$

Ainsi, $\frac{1}{f}$ est définie au $\mathcal{V}(a)$

Fixons donc $\delta > 0$ tq $\forall x \in \left]a-\delta, a+\delta\right[\cap I$, $f(x) > 0$

$\mathcal{D}^n$



Soit $u \in I \cap \left]a-\delta, a+\delta\right[\setminus \{a\}$

On calcule $\tau_{\frac{1}{f},a}(u) = \dfrac{\frac{1}{f}(u) - \frac{1}{f}(a)}{u-a}$

$= \dfrac{f(a) - f(u)}{f(u)f(a)} \times \dfrac{1}{u-a}$

$$= -\frac{1}{f(u)f(a)}\,\tau_{f,a}(u)$$

• déjà : $\tau_{f,a}(u) \xrightarrow[\substack{u \to a \\ \neq}]{} f'(a)$

$\hat{C}$ f C^0 en a, $f(x) \xrightarrow[\substack{u \to a \\ \neq}]{} f(a)$ et donc

par opération sur les limites :

$$\frac{1}{f(u)\,f(a)} \xrightarrow[\substack{u \to a \\ \neq}]{} \frac{1}{f^2(a)}$$

Ainsi, $\tau_{\frac{1}{f},a}(u) \longrightarrow -\frac{f'(a)}{f^2(a)}$ [redacted]a)

h) T $\quad f/g = f \times \frac{1}{g}$

$$\longrightarrow \quad (f/g)'(a) = f'(a) \times \frac{1}{g}(a) + f(a) \times \left(\frac{1}{g}\right)'(a)$$

$$= \frac{f'(a)}{g(a)} - \frac{f(a)\,g'(a)}{g(a)^2}$$

$$= \frac{g(a)\,f'(a) - f(a)\,g'(a)}{g(a)^2}$$

2) Composition

Prop

On esd $a \in I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{R}$

Alors $\left.\begin{array}{l} f \text{ dérivable en } a \\ g \text{ derivable en } f(a) \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f$ derivable en a

et $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \times f'(a)$

D/ " à la physicienne " T

$$\tau_{g \circ f, a}(u) = \frac{g(f(u)) - g(f(a))}{u - a}$$

$$= \frac{g(f(u)) - g(f(a))}{f(u) - f(a)} \times \underbrace{\frac{f(u) - f(a)}{u - a}}_{\tau_{f,a}}$$

OFAA

$$= \tau_{g, f(a)}(f(u)) \times \tau_{f,a}(u)$$

Notations

Faisons une compo des limites !

1) $f(u) \xrightarrow[u \to a, \neq]{} f(a)$ 2) $\tau_{g, f(a)}(y) \xrightarrow[y \to f(a)]{} g'(f(a))$

ccl : $\tau_{g, f(a)}(f(u)) \xrightarrow[u \to a, \neq]{} g'(f(a))$

<u>Rq</u> : Cette démo ne marche pas car on peut avoir $f(u) = f(a)$ et ne pas pouvoir diviser par $f(u) - f(a)$

- Ie, $\tau_{g, f(a)}$ ne peut pas ê évalué en $f(a)$
- Mais, on sait que $\tau_{g, f(a)}$ est prolongeable par continuité en $f(a)$
- Donc <u>idée</u> $\longrightarrow$ on utilise (D_3)

<u>D/</u> 1) ĉ f dérivable en a, Fixons $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tq

(1) $\forall x \in I, \ f(x) = f(a) + (x-a)\varphi(x)$

(2) φ C^0 en a

de m̄, fixons $\psi : J \longrightarrow \mathbb{R}$ tq

(1) $\forall y \in J, \ g(y) = g(f(a)) + (y - f(a)) \times \psi(y)$

(2) ψ C^0 en $f(a)$

Soit $u \in I$, on a

1°) $(g \circ f)(u) = g(f(u)) = g(f(a)) + (f(u) - f(a))\,\psi(f(u))$

$= (g \circ f)(a) + (f(a) + (u-a)\varphi(u) - f(a))\,\psi(f(u))$

$$= (g \circ f)(a) + (u-a)\underbrace{\varphi(u)\,\psi(f(u))}_{\theta(u)}$$

• **déjà** : $\theta(\cdot)$ est C^0 en a

(en **effet** : f est dérivable donc C^0 en a ;
ĉ $\psi(\cdot)$ est C^0 en $f(a)$)

Par composition : $\psi \circ f$ C^0 en a

• φ C^0 en a

• Donc $\varphi(\cdot) \times (\psi \circ f)(\cdot)$ est C^0 en a

• **Enfin** : $\theta(a) = \underbrace{\varphi(a)}_{\to f'(a)}\ \underbrace{\psi(f(a))}_{\to g'(f(a))}$

3) dérivation des Bijections réciproques

Prop : Soit $f : I \longrightarrow J$ bijection continue
Soit $a \in I$

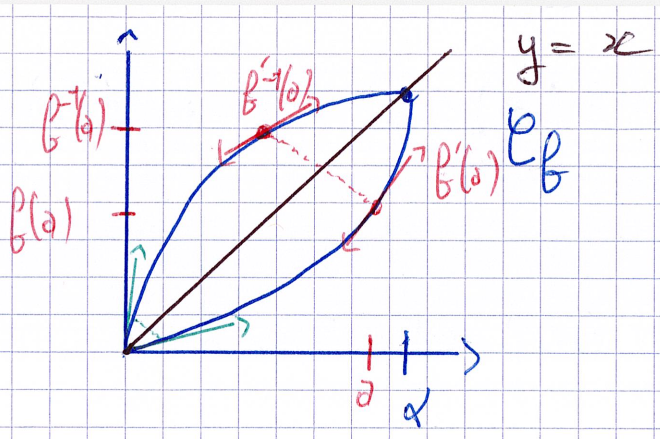
On suppose que f dérivable en a

Alors on a : $f'(a) \neq 0 \iff f^{-1}$ dérivable en $f(a)$

Dans ce cas, on a :

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)} \qquad \left(\text{si } b := f(a),\ (f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} \right)$$

d^n



D/ 1) ($\Leftarrow$) Osq f^{-1} dérivable en $f(a)$

Je dérive $f^{-1} \circ f$ en a, c'est ok d'après 2)

On a $(f^{-1} \circ f)'(a) = (f^{-1})'(f(a)) \times f'(a)$

Or $\forall x$, $(f^{-1} \circ f)(x) = x$

donc $(f^{-1} \circ f)'(a) = 1$

d'où $(f^{-1})'(f(a)) \times f'(a) = 1$

donc $f'(a) \neq 0$ et $(f^{-1})(f(a)) = \dfrac{1}{f'(a)}$

($\Rightarrow$) Osq $f'(a) \neq 0$

Mq $f^{-1}(a)$ dérivable en $f(a)$

$\hat{c}$ f dérivable en a

1) Fixons $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tq

$\forall x \in I$, $f(x) = f(a) + \varphi(x)(x-a)$,

2) φ est C^0 en a

On veut mq $\exists \psi : J \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \forall y \in J,\ f^{-1}(y) = f^{-1}(f(a)) + \psi(y)(y - f(a)) \\ \psi\ C^0 \text{ en } f(a) \end{cases}$$

Soit $y \in J$ notation : Posons $x := f^{-1}(y)$

On utilise +) $f(f^{-1}(y)) = \varphi(f^{-1}(y)) \times (f^{-1}(y) - a) + f(a)$

on remplace $y = f(a) + \varphi(f^{-1}(y)) \times (f^{-1}(y) - a)$

Lemme : $\forall y \in J,\ \varphi(f^{-1}(y)) \neq 0$

D/ mq $\forall x \in I,\ \varphi(x) \neq 0$

Si $x = a$, $\varphi(a) = f'(a) \neq 0$

Si $x \neq a$, on a $f(x) \neq f(a)$ car f injective donc $\varphi(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \neq 0$

On a donc

$$f^{-1}(y) - a = \frac{1}{\varphi(f^{-1}(y))}(y - f(a)).$$

ie $f^{-1}(y) = f^{-1}\big(f(a) + \psi(y)\,(y - f(a))\big)$

où on a posé $\psi(y) := \dfrac{1}{\varphi(f^{-1}(y))}$

- Or, f est continue sur I, donc

  d'après le thm de la bij monotone,

  $f^{-1}(\cdot)$ est continue sur J.

- donc par composition et opérations, $\psi(\cdot)$ C^0 en $f(a)$ ■

h) Dérivée du produit de N fonctions

Prop ⊕ :

$$(f_1 \times f_2 \times \dots \times f_N)' = f_1' \times f_2 \times \dots \times f_N + f_1 \times f_2' \times \dots \times f_N + \dots$$
$$+ f_1 \times f_2 \times \dots \times f_N'$$

Rq! ie $\left(\prod_{i=1}^{N} f_i\right)' = \sum_{k=1}^{N} f_k' \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{N} f_j$

2) Si les f_i sont toutes non-nulles,

On peut écrire bcp ⊕ simple :

3) $(f_1 f_2 \dots f_N)' = \sum_{k=1}^{N} \dfrac{f_k'}{f_k} (f_1 f_2 \dots f_N)$

ie $\dfrac{(f_1 f_2 \cdots f_N)'}{f_1 \cdots f_N} = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \dfrac{f_k'}{f_k}$!

<u>Rq</u> : Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^*$

On note # $dL(f) = f'/f$

C'est la dérivée logarithmique de f

<u>Prop</u> : $dL(fg) = dL(f) + dL(g)$

$dL(f^\alpha) = \alpha \, dL(f)$

$dL\left(\frac{1}{f}\right) = -dL(f)$

<u>Corollaire</u> : $dL(f_1 \cdots f_N) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} dL(f_k)$

AF ex : $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$

III dérivées successives

1) Rappels

On a bien compris que $\mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$ est l'ens des fonct° dérivables n fois.

et que $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}) \overset{\Delta}{\underset{ssi}{}}$ f dérivable n fois.

et $f^{(n)}$ (= dérivée n-ième de f) est continue.

Enfin, f est $\mathcal{C}^\infty \overset{\Delta}{\underset{ssi}{}}$ "f est dérivable autant de fois qu'on veut", ie ssi, $\forall m \in \mathbb{N}^*$, f dérivable m fois
$\in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$

<u>Rq</u> : Voici une def possible de "f dérivable n fois"

On dit que f est n fois dérivable $\overset{\Delta}{\underset{ssi}{}}$

$\exists\ \varphi_0, \dots, \varphi_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tq

$$\begin{cases} \varphi_0 = f \\ \forall i \in [\![0, n-1]\!],\ \varphi_i \text{ est dérivable} \\ \forall i \in [\![0, n-1]\!],\ \varphi_{i+1} = \varphi_i' \end{cases}$$

<u>schéma</u>

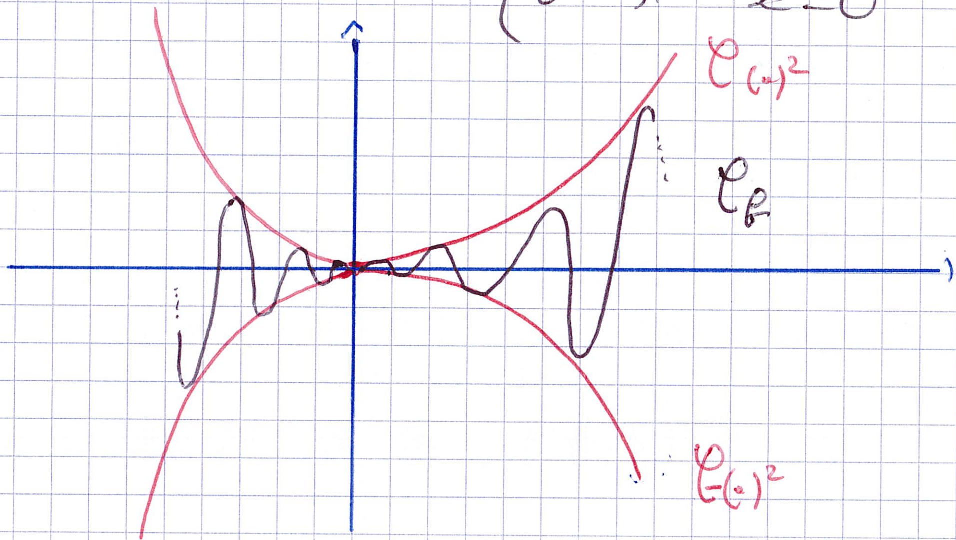
$$\underset{\varphi_0}{f} \longrightarrow \underset{\varphi_1}{f'} \longrightarrow \underset{\varphi_2}{f''} \ \cdots \longrightarrow \underset{\varphi_n}{f^{(n)}}$$

2) Dérivable $\not\Rightarrow \mathcal{C}^1$

On csd $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

d^n



Rq : $\sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \to \pm\infty}{\sim} \frac{1}{x}$

Donc $f(x) \sim x$ de $\bar{m}$ en $-\infty$

• Déjà, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

Fait 1 : f dérivable en 0

D/ $\tau_{f,0}(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$

$$= x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

donc $|\tau_{f,0}(x)| \leqslant |x| \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$

donc $\tau_{f,0}(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ On a ainsi, f dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

Fait 2 :

1) f' n'est pas continue en 0

2) Mais f' continue sur $\mathbb{R}^*$

Rq : On peut mq (c'est un DL) $\exists f$ dérivable, $\in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et tq $\forall a \in \mathbb{R}$, f' n'est pas continue en a.

D/ Soit $x \neq 0$, on a $f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
$+ \; x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$
$= 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

ORPA et Osq f' C^0 en 0

On a $f'(x) \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ \neq}]{} f'(0) = 0$

Donc $2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ \neq}]{} 0$

Or, $2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ \neq}]{} 0$

ccl : $\cos\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ \neq}]{} 0$ Abs Rappel :
$\lim\limits_{x \to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \nexists$

X

3) Opérations dans $\mathcal{D}^n$ et $\mathcal{C}^n$

Prop : Soient, $f, g : I \to \mathbb{R}$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$

1) $\left.\begin{array}{l} f \in \mathcal{C}^n([a,b], \mathbb{R}) \\ g \text{ ———————} \end{array}\right\} \Rightarrow f + \lambda g \in \mathcal{C}^n([a,b], \mathbb{R})$

2) Dans ce cas, on a

$$(f + \lambda g)^{(n)} = f^{(n)} + \lambda g^{(n)}$$

D/ T rec

n=0 ok

Hérédité : T Osq $f, g \in \mathcal{C}^{n+1}$

Par déf°, on a f, g dérivables et $f' + g' \in \mathcal{C}^n$

Mq $f + \lambda g \in \mathcal{C}^{n+1}$

- Déjà, ĉ f et g sont dérivables, d'après (T), on sait que $f + \lambda g$ l'est.
- De plus, on a $(f + \lambda g)' = f' + \lambda g'$
- Grace à HR_n : ĉ $f', g' \in \mathcal{C}^n$, on a

$$f' + \lambda g' \in \mathcal{C}^n$$

- Donc : $(f + \lambda g)' \in \mathcal{C}^n$

Ie : $f + \lambda g \in \mathcal{C}^{n+1}$

Enfin, on a $(f+\lambda g)^{(n+1)} = (f'+\lambda g')^{(n)}$

par déf°

Replacer $[a,b]$ par I

$HR_n \longrightarrow \; = (f')^{(n)} + \lambda (g')^{(n)}$

$= f^{(n+1)} + \lambda g^{(n+1)}$ ∎

<u>Rq</u> : Ici, l'hyp de rec est ⊕

$\mathcal{P}(n) =$ " $\forall f,g \in \mathcal{C}^n([a,b],\mathbb{R}), \begin{cases} f+\lambda g \in \mathcal{C}^n([a,b],\mathbb{R}) \\ (f+\lambda g)^{(n)} = f^{(n)} + \lambda g^{(n)} \end{cases}$ "

<u>Corollaire</u> :

1) $\mathcal{C}^n([a,b],\mathbb{R})$ sev $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$

2) $\begin{array}{rcl} \mathcal{C}^n([a,b],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f^{(n)} \end{array}$

est une <u>AL</u>

<u>Corollaire</u> : $f,g \in \mathcal{C}^\infty \implies f+\lambda g \in \mathcal{C}^\infty$

<u>D/</u> Mq $\forall n \in \mathbb{N}$, $f+\lambda g \in \mathcal{C}^n$

Soit n. On a $f,g \in \mathcal{C}^n$ puisque $f,g \in \mathcal{C}^\infty$

Donc d'après ⊕ haut : $f+\lambda g \in \mathcal{C}^n$

<u>CCL</u> : $\forall n$, $f+\lambda g \in \mathcal{C}^n$; ie : $f+\lambda g \in \mathcal{C}^\infty$ ∎

b) Produit

Prop : $f, g \in \mathcal{C}^n \Rightarrow f \times g \in \mathcal{C}^n$

D/ rec (T) $n = 0$: ok

H^{é} : Rq : $P(n)$: " $\forall f, g \in \mathcal{C}^n$, $f \cdot g \in \mathcal{C}^n$ "

Soit $n \in \mathbb{N}$. Osq $\forall f, g \in \mathcal{C}^n$, $fg \in \mathcal{C}^n$

Mq $P(n+1)$

Soient $f, g \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b], \mathbb{R})$

Mq $f \cdot g \in \mathcal{C}^{n+1}$

· "Déjà", $\hat{c}$ $f, g \in \mathcal{C}^{n+1}$, on a f, g dérivables.

· D'après (II) : $f \cdot g$ l'est aussi

· De (I), on a : $(fg)' = f'g + fg'$

idée : $\hat{c}$ f est $\mathcal{C}^{n+1}$, on a $f' \in \mathcal{C}^n$.

$\hat{c}$ g est $\mathcal{C}^{n+1}$, en particulier, elle est $\mathcal{C}^n$.

On applique $P(n)$ à f' et à g :

Donc $f'g \in \mathcal{C}^n$

De $\overline{m}$: $fg' \in \mathcal{C}^n$

Donc, par a) : $f'g + fg'$ est $\mathcal{C}^n$

Ie : $(fg)'$ est $\mathcal{C}^n$

CCl : par déf° : fg est $\mathcal{C}^{n+1}$ ∎

Corollaire : $f, g \in \mathcal{C}^\infty \Longrightarrow f \times g \in \mathcal{C}^\infty$

D/ ok ■

Corollaire : $\mathcal{C}^n([a,b], \mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^\infty([a,b], \mathbb{R})$ sont des $\mathbb{R}$-algèbres.

Rappel

$$\begin{tikzcd}
 & & & \text{Corps} \\
\text{Monoïde} \arrow[r] & \text{Groupe} \arrow[r] \arrow[d] & \text{Anneaux} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & \text{Groupe abélien} \arrow[r] & \text{ev} \arrow[r] & \text{algèbre}
\end{tikzcd}$$

Ex Corps $(\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$

Ex algèbre commutative : $\mathbb{R}[X]$ (intègre), $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$

non commutative : $M_n(\mathbb{R})$

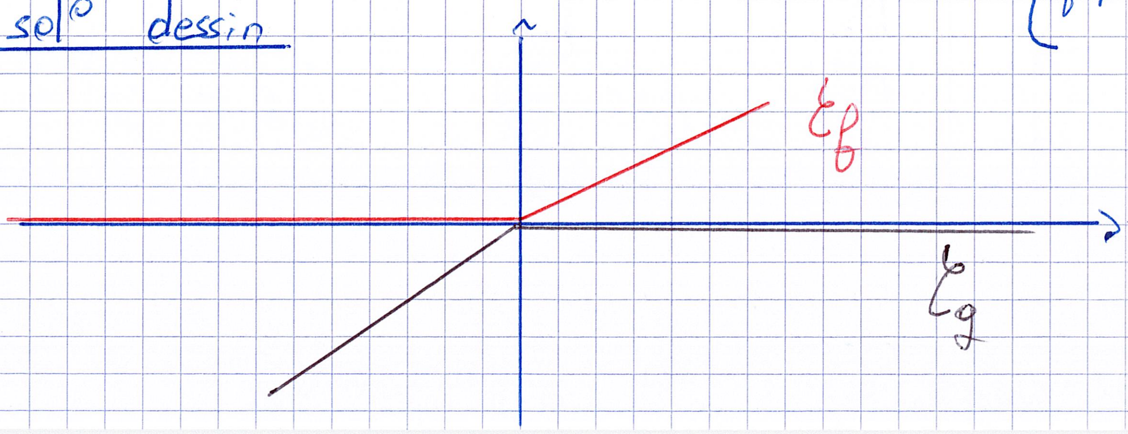
ex : $\mathcal{L}(E)$

Question : Existe-t-il des algèbres non intègres ?

oui : $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

D/ On cherche $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ C^0 tq : $\begin{cases} f \times g = \tilde{0} \\ f \neq \tilde{0} \text{ et } g \neq \tilde{0} \end{cases}$

sol° dessin



Sol° f^{le}, ⊕ $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

ou : $\dfrac{x + |x|}{2}$ ou $\max(\tilde{0}, Id_{\mathbb{R}})$

Et : $\dfrac{x - |x|}{2}$ ou $\min(\tilde{0}, Id_{\mathbb{R}})$

Exemple minimal d'alg commutative et non intègre

$\mathbb{R}^2$ muni de $\begin{cases} (x,y) + (x'+y') = (x+x', y+y') \\ (x,y) \times (x'+y') = (xx', yy') \end{cases}$

C'est non intègre car $(1,0) \times (0,1) = 0_{\mathbb{R}^2}$

Rq $^{*/2}$: $\mathbb{R}^2 \underset{(R\text{-alg})}{\simeq} \mathcal{F}(\{0,1\}, \mathbb{R})$

c) Composition.

Prop : Ocsd

$I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{R}$

Alors : $\left.\begin{array}{l} f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}) \\ g \in \mathcal{C}^n(J, \mathbb{R}) \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$

D/ ⊕ rec $n=0$: ok

Hé : ⊕

(...)

$\in \mathcal{C}^{n+1}$ donc $\mathcal{C}^n$

$$(g \circ f)' = \boxed{g' \circ f} \times f' \in \mathcal{C}^n$$

$\in \mathcal{C}^n$

Osq $\mathcal{C}^{n+1}$

est $\mathcal{C}^n$ par hyp de rec

Le produit de $\mathcal{C}^n$ est $\mathcal{C}^n$ d'après b) ■

<u>Corollaire</u> : $f, g \in \mathcal{C}^\infty \Rightarrow g \circ f \in \mathcal{C}^\infty$

d) remarque

Tout ce qui précède vaut encore pour $\mathcal{D}^n$

h) !! Formule de Leibniz

<u>Rq</u> : le signe $\int$ vient de Leibniz

<u>Proposition</u> (T)

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

<u>Exemple</u>

- $(fg)' = f'g + fg'$
- $(fg)'' = (f'g + fg')' = (f'g)' + (fg')'$

$$= (f''g + f'g') + (f'g' + fg'')$$

$$= f''g + 2f'g' + fg''$$

• $(fg)''' = f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''$

D/ Réc $\underline{n=0}$: ok

Hérédité : (T)

Rq !! : On remarque ici avant de se lancer dans les calculs qu'on a deux pistes :

(1) $(fg)^{(n+1)} = ((fg)')^{(n)} = (f'g + fg')^{(n)}$

$= (f'g)^{(n)} + (fg')^{(n)}$

(2) $(fg)^{(n+1)} = ((fg)^{(n)})' =$

$\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}\right)'$

$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k)} g^{(n-k)}\right)'$

$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n+1-k)} \right]$

$=$ ok (AF) ■

5) Composition

Cf ⊕ haut

6) Bijection repq

<u>Prop :</u> Soit $f : I \longrightarrow J$ une bijection dérivable tq $\forall x \in I,\ f'(x) \neq 0$

<u>Alors :</u> 1) $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}) \Longrightarrow f^{-1} \in \mathcal{C}^n(J, \mathbb{R})$

2) $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}) \Longrightarrow f^{-1} \in \mathcal{C}^\infty(J, \mathbb{R})$

<u>D/</u> 1) ⓡ rec

<u>$n=1$:</u> Déjà, ĉ $\forall x \in I,\ f'(x) \neq 0$, on a vu que $\forall y \in J$, f^{-1} est dérivable en y.

<u>Ainsi :</u> $f^{-1} \in \mathcal{D}(J, \mathbb{R})$; et :

$$\forall y \in J,\quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

- Ĉ f est $\mathcal{C}^1$, on a $f' \in \mathcal{C}^0$
- Ĉ f est $\mathcal{C}^0$ (car dérivable car $\mathcal{C}^1$), d'après le thm de la bijection monotone, f^{-1} est $\mathcal{C}^0$

- Par composition : $f' \circ f^{-1}$ est $\mathcal{C}^0$.

- $\hat{C}$ $\forall y, (f' \circ f^{-1})(y) \neq 0$ par opération sur les fonctions continues : $\dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$ est $\mathcal{C}^0$

- CCl : $(f^{-1})'$ est $\mathcal{C}^0$; ie f^{-1} est $\mathcal{C}^1$ ■ $n=1$

Hérédité : AF ■

Rq : on a oublié de mq

$$\left.\begin{array}{l} f : I \longrightarrow \mathbb{R} \\ \forall x, f(x) \neq 0 \\ f \in \mathcal{C}^{n/\infty} \end{array}\right\} \frac{1}{f} \in \mathcal{C}^n$$

D/ AF ■

IV Extension à $\mathbb{C}$

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$

1) Déf°

Soit $a \in I$

On dit que f est dérivable en a $\overset{\Delta}{ssi}$

$$\lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{existe} \quad (\ldots)$$

Ex : ① La f° $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \longmapsto \frac{3t^2 + it^3}{2}$

Elle est dérivable et on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = \frac{6t + 3it^2}{2}$$

② **Prop** : 1) Soit $a(\cdot) : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable

Alors $\frac{d\, e^{ia(t)}}{dt}$ $ia'(t)\, e^{ia(t)}$

2) Soit $\alpha(\cdot) : I \longrightarrow \mathbb{C}$ Alors

$$\frac{d\, e^{\alpha(t)}}{dt} = \alpha'(t)\, e^{\alpha(t)}$$

D/ cf ch 8 ∎

2) Caractérisation

<u>Prop :</u> $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ dérivable $\Longleftrightarrow \begin{cases} Re(f) : I \to \mathbb{R} \text{ dérivable} \\ Im(f) \text{ ---} \\ \text{---} \end{cases}$

Dans ce cas : $f' = Re(f)' + i\,Im(f')$

3) Opération et Construction

Tout marche.

<u>Rq</u> : • pour la composition c'est $I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{C}$

• les résultats sur f^{-1} n'ont plus ϕ sens

On dispose de $\mathcal{D}^k(I, \mathbb{C})$, $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{C})$, $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{C})$

V Théorème des accroissements finis (TAF)

1) Extrema locaux

a) déf°

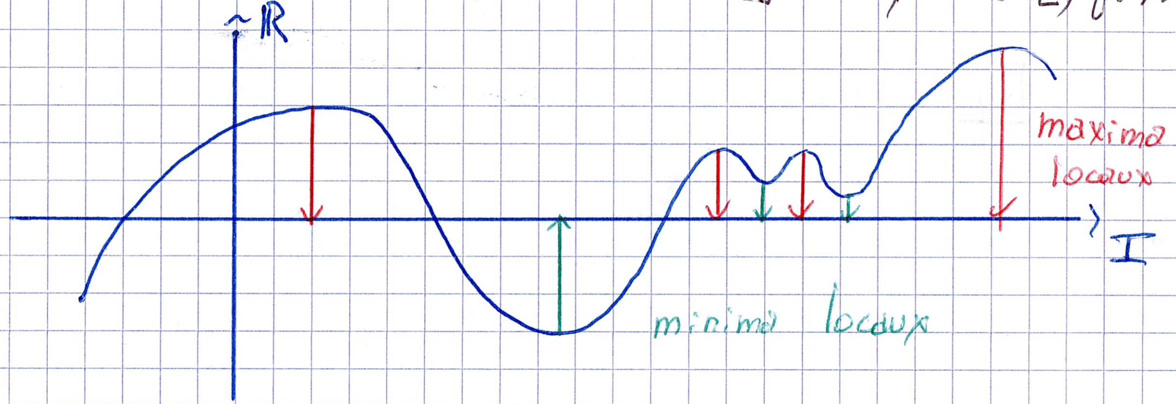
Def : (I intervalle ; $a \in I$)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que

f admet un minimum local au point

a $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\exists \delta > 0 : \forall x \in]a-\delta ; a+\delta[, f(x) \geq f(a)$

d°



- De m̄ : maximum local
- extremum local := min local ou max local

b) Exemples

Ocsd $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto x$

On voit que f admet un min local en 0

• Ocsd $g :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ $\longrightarrow$ elle n'admet pas de min local.
$x \longmapsto x$

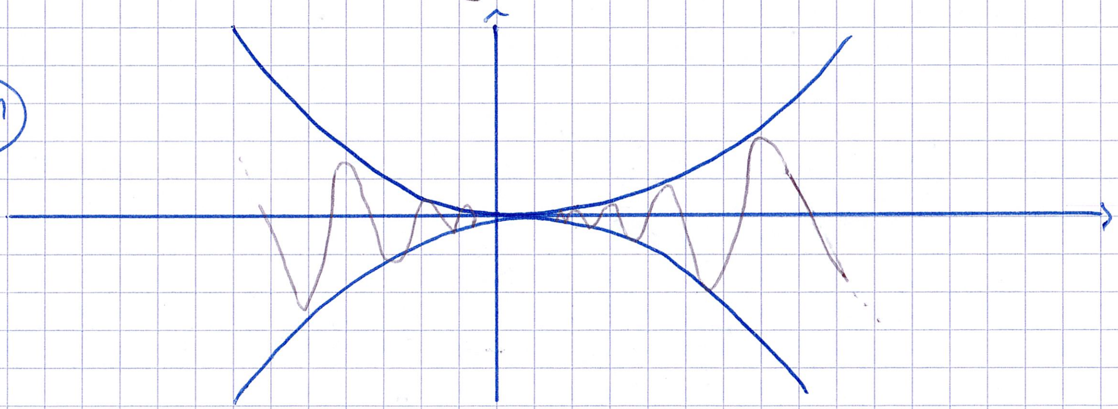
Rq $\exists$ min global $\Rightarrow$ $\exists$ min local

• On csd $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Notons $A := \{ a \in \mathbb{R} \mid h \text{ admet un min local en } a \}$

d^n



On a $0 \notin A$

0 est un pt d'accumulation de A

2) Lemme de l'extremum local

Prop : Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ admet un extremum local en } a \\ f \text{ dérivable en } a \\ (a \text{ n'est pas une borne de l'intervalle} \\ \quad \text{ie } a \in \mathring{I} \end{array}\right\} \Rightarrow f'(a) = 0$$

D/ • Déjà, ĉ $a \in \mathring{I}$: fixons $\delta > 0$ tq

$]a-\delta ; a+\delta[\subset I$

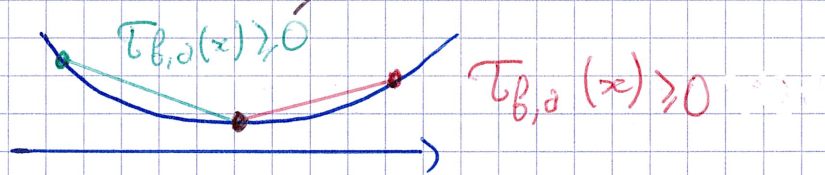
- regardons $\tau_{f,a}$

Soit $x \in]a-\delta ; a+\delta[$ tq $x \neq a$

ĉ $\tau_{f,a}(x) \xrightarrow[x \neq a]{x \to a} f'(a)$, on a en particulier

$$\tau_{f,a}(x) \xrightarrow[x > a]{x \to a} f'(a)$$

d^n



(si $x > a$ $\longrightarrow$ $f(x) - f(a) \geq 0$ car a min local Faux)

On effectivise la minimalité locale de f en a

Fixons $\delta > 0$ tq $\forall x \in]a-\delta_1, a+\delta_1[\cap I$,

$f(x) \geq f(a)$

On pose $\delta_2 := \min(\delta, \delta_1)$

Osq $x \in]a-\delta_2, a+\delta_2[\setminus \{x\}$

| Si $\underline{x > a}$: on a $\begin{cases} f(x)-f(a) \geq 0 \\ x-a \geq 0 \end{cases}$

donc $\tau_{f,a}(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$

• de $\overline{m}$, si $\underline{x < a}$: $\tau_{f,a}(x) \leq 0$

• Ĉ $\tau_{f,a}(x) \xrightarrow[x \to a,\ >]{} f'(a)$ et Ĉ $\forall x \in]a, a+\delta_2[$, $\tau_{f,a}(x) \geq 0$,

par passage à la lim dans $\geq$, on obtient $f'(a) \geq 0$

• de $\overline{m}$ sur $]a-\delta_2, a[$ $f'(a) \leq 0$

• $\underline{\text{ccl}}$: $f'(a) = 0$ ■

$\underline{\text{Question :}}$ Osq f admet un min local en a

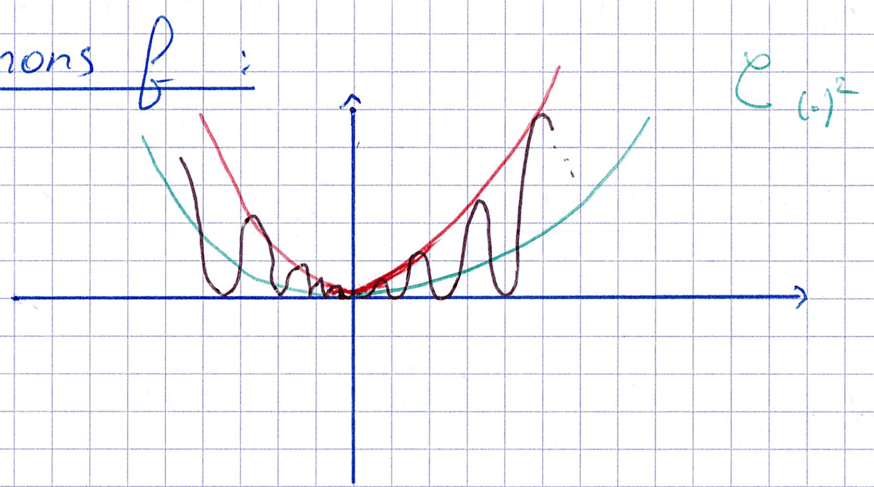
Existe-t-il necessairement $\delta > 0$ tq.

x	$a-\delta$		a		$a+\delta$
f		$\searrow$		$\nearrow$	

ctrex : On prend

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right) + 1\right) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

dessinons f :



On a $\forall x$, $f(x) \geq 0$ car $\sin \geqslant -1$

donc $\forall x$, $\sin\left(\frac{1}{x}\right) + 1 \geqslant 0$ donc $f \geqslant 0$

donc f admet un minimum global donc local en 0

rq : il n'existe pas $\delta > 0$:

x	$-\delta$	0	δ
f	$\searrow$	0	$\nearrow$

Notons $A := \{a \in \mathbb{R} \mid f \text{ admet un min local en } a\}$

déterminons A

Soit $a \in A$: Osq $a \neq 0$

On a $a^2\left(\sin\left(\frac{1}{a}\right)+1\right)=0$ donc $\sin\left(\frac{1}{a}\right)=-1$

$\longrightarrow \frac{1}{a} \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ donc $\exists k \in \mathbb{Z}$:

$$a = \frac{2}{\pi} \times \frac{1}{4k-1}$$

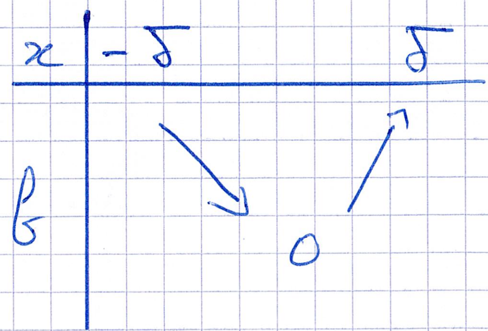
Rcp^t : on vérifie que ces points sont dans A :

B°

$$\frac{1}{a} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi = \pi\left(\frac{4k-1}{2}\right)$$

cl : $A = \left\{ \underbrace{\frac{2}{\pi}\,\frac{1}{4k-1}}_{a_k} \ ; k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \{0\}$

ORPA et on fixe $\delta > 0$ tq



$\hat{C}$ $\frac{1}{4k-1} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$, fixons $k_0 \in \mathbb{N}$ tq

$$0 < a_{k_0} < \delta$$

de $\overline{m}$, fixons $k_1 \leqslant 0$ tq $-\delta \leqslant a_{k_1} < 0$

ĉ $f \nearrow$ sur $[0, \delta[$ et ĉ $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(a_{k_0}) = 0 \end{cases}$

et ĉ $0, a_{k_0} \in [0, \delta[$, on a

$\forall x \in [0, a_{k_0}]$, $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(a_{k_0})$ AC

Donc f est nulle sur $[0, a_{k_0}]$.

Donc $\forall x \in]0, a_{k_0}]$, $\sin \frac{1}{x} = -1$

Donc $\forall \theta \geqslant \frac{1}{a_{k_0}} = \frac{\pi}{2}(4k_0 - 1)$, $\sin \theta = -1$

C'est absurde.

- Question

Existe-t-il $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ admettant un min local en a ?

tq : 1°) a est l'unique min local de f

2°) On a pas

x	$a-\delta$		a		$a+\delta$
f		$\searrow$		$\nearrow$	

(au sens large)

13°) Clément $x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \underline{\underline{2}}x^2$

On a $f_{CP} > 0$ sur $\mathbb{R}^*$ et $f_{CP}(0) = 0$

Donc 0 est bien l'unique p^t où f vaut 0.

On a $(x \neq 0)$

$$f'_{CP}(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) + 4x$$

$$= \underbrace{2x\Big(\underbrace{\sin\left(\tfrac{1}{x}\right) + 2}_{\geq 1 \text{ et } \leq 3}\Big)}_{\varphi(x)} - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$\varphi(x) \longrightarrow 0$

$x \leq \varphi(x) \leq 3x$

Fixons $\delta' > 0$:

$$\forall x \in]-\delta', \delta'[\setminus \{0\}, \quad |\varphi(x)| < \overset{\varepsilon}{0{,}1}$$

ORPA et on fixe $\delta > 0$ tq :

$-\ \delta < \delta'$

x	$-\delta$	0	a	b	δ
f	$\searrow$			$\nearrow$	

(large)

Fixons $a, b \in]0, \delta[$ tq $\begin{cases} \cos\left(\frac{1}{a}\right) = 1 \\ \cos\left(\frac{1}{b}\right) = -1 \end{cases}$

AC

On a $\ell'_{CL}(a) < -0,9$ et $\ell'_{CL}(b) > 0,9$ AC

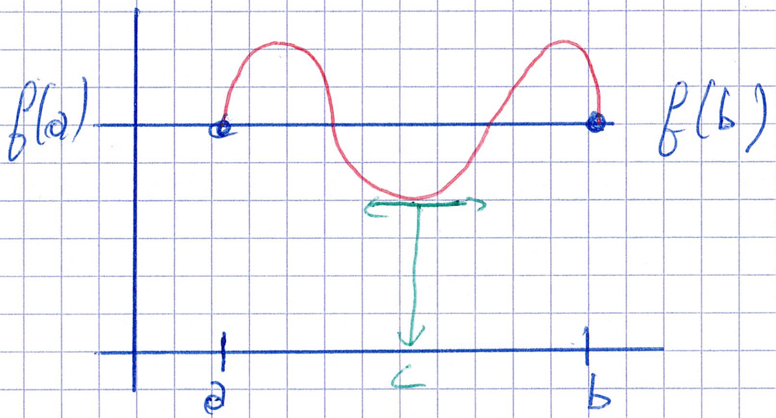
3) M Th de Rolle

a) Enoncé

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$
dérivable sur $]a,b[$

Alors : $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in]a,b[: f'(c) = 0$

d^n



D/ T • Ĉ f est C^0 sur le segment $[a,b]$,
d'après le thm des bornes atteintes,
fixons $x_M, x_m \in [a,b]$ tq

$$f(x_m) = \inf_{t \in [a,b]} f(t) \quad \text{et} \quad f(x_M) = \sup_{t \in [a,b]} f(t)$$

• Premier cas : Osq que $x_m \in]a,b[$ ou $x_M \in]a,b[$

P. ex : Osq $x_m \in]a, b[$ $\hat{C}$ f atteint son minimum en x_m, en particulier, f admet un min local en x_m

$\hat{C}$ $x_m \in]a, b[$ et f dérivable en x_m : d'après le lemme de l'extremum local :

$$f'(x_m) = 0$$

2^e cas : Osq $(x_m = a$ ou $x_m = b)$ et $(x_M = a$ ou $x_M = b)$

alors $f(x_m) = $ " $f(a)$ ou $f(b)$ " $= f(x_M)$

puisque $f(a) = f(b)$

On a alors f constante. Donc $f = \tilde{0}$

On a alors $f'\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$ $\blacksquare$

b) $\mathbb{C}$ faux

OCsd $f : [0 ; 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \longmapsto e^{it}$ $\in \mathcal{C}^{\infty}([0, 2\pi], \mathbb{C})$

On a $f(0) = 1 = f(2\pi)$ Mais

$\forall t \in [0, 2\pi]$, $f'(t) = i e^{it} \neq 0$

(de module 1)

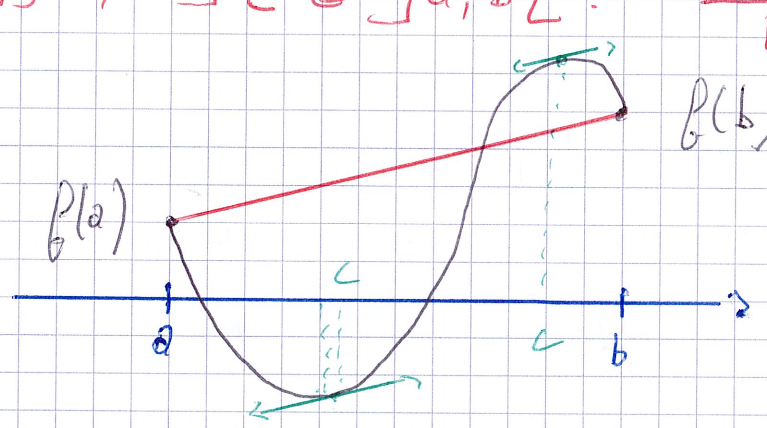
4) TAF

a) Enoncé

Th : Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$
dérivable sur $]a,b[$

Alors ; $\exists c \in]a,b[: \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

dⁿ



D/ idée : on se ramène à Rolle.

On cherche une f° auxiliaire $\varphi(\cdot)$
tq $\varphi(a) = \varphi(b)$
du type $\varphi(x) = f(x) - qqch(x)$ où $qqch(\cdot)$
est un f° affine

On pose $\varphi\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$$

On a
$$\varphi(a) - \varphi(b) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}a$$
$$- f(b) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}b$$

$$= [f(a) - f(b)] + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(b-a) = 0$$

- De Ⓣ φ est C^0 sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
- Grâce à Rolle, fixons $c \in]a,b[$ tq $\varphi'(c) = 0$

Or, $\varphi'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, on a

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

■

Rq Ⓣ : "L'écart entre la corde et $\mathcal{C}_f$ au pt d'abscisse x" est ~~$\Delta(x) = f(x)$~~

$$\Delta(x) := f(x) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)\right)$$

On a $\Delta(a) = \Delta(b) = 0$ puis on applique Rolle ■

Rq : Le TAF généralise Rolle

c) Le TAF est faux dans $\mathbb{C}$

$\bar{\Pi}$ ctrex

5) Inégalité des accroissements finis (IAF)

Rq : On prend le train Rennes - Paris et Ocsd

$$f : [0, 2h] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto \text{la distance parcourue pendant la durée } t$$

On a $f(0) = 0$ et $f(2h) = 350$ km

D'après le TAF :

$$\exists\ t_0 \in]0, 2h[\ : f'(t) = \frac{350 \text{ km}}{2h}$$
$$= 175 \text{ km} \cdot h^{-1}$$

La vitesse moyenne du train est 175 km/h, Donc à au moins instant, la vitesse instantanée du train sera égale à la vitesse moyenne.

a) version réelle

Th (IAF) ♛

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable.

Soit $c \in \mathbb{R}_+$ tq

$$\forall\ t \in I,\ |f'(t)| \leq c$$

Alors :

$$\forall x, y \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leq C\, |x-y|$$

Rq : on a une interpretation cinématique

D/ Soient $x, y \in I$. Si $x = y$: c'est ok.

Osq $x \neq y$. Par exemple, osq $y > x$

On a $f|_{[x,y]} : [x,y] \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable

D'après le TAF, fixons $c \in]x, y[$ tq $f'(c) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

$\hat{c}$ $|f'(c)| \leq C$, on a $\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| \leq C$

D'où $|f(y) - f(x)| \leq C\, |y - x|$ ■

Rq : Ie

- $|f'| \leq C \implies f$ est C-lipschitzienne
- Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$

On a donc $f' \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$

D'après le cours (DALC) :

f' bornée par $\|f'\|_\infty$.

Donc f est $\|f'\|_\infty$-lipschitzienne ■

c) Version complexe

Rq : Soient $t_0, t_{max} \in \mathbb{R}$ tq $t_0 < t_{max}$

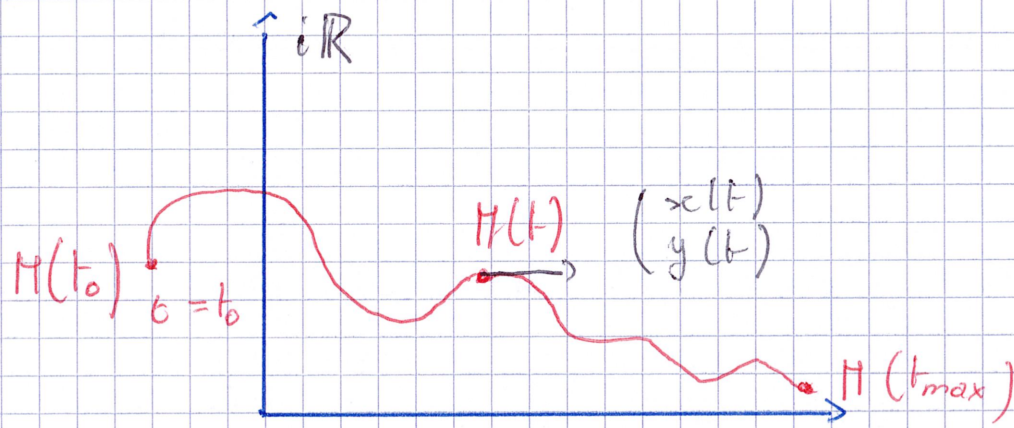
OCsd $M : [t_0, t_{max}] \longrightarrow \mathbb{C}$ dérivable

On écrit $M(t) = x(t) + i\, y(t)$ avec

$x(\cdot), y(\cdot) : [t_0, t_{max}] \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables

(Ou on pose $x := \mathrm{Re}(M)$ et $y := \mathrm{Im}(M)$)

dⁿ



On pose $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

On a
$$\|\vec{v}(t)\| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}$$
$$= |x'(t) + i y'(t)|$$
$$= |M'(t)|$$

On a $|M(t_{max}) - M(t_0)| =$ distance parcourue

distance parcourue $\leq V_{max} \cdot T$

où V_{max} est la vitesse max et $T = t_{max} - t_0$

Th

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ dérivable de classe $\mathcal{C}^1$

Soit $C \geqslant 0$ tq $\forall t \in I$, $|f'(t)| \leqslant C$

Alors, $\forall x, y \in I$, $|f(x) - f(y)| \leqslant C\,|x-y|$

D/ Soit $x, y \in I$ Osq $x \leqslant y$

On a $$f(y) - f(x) = \big[f(t)\big]_x^y = \int_x^y f'(t)\,dt$$

On peut écrire cela car f' est $\mathcal{C}^0$

On a alors $$|f(y) - f(x)| = \left|\int_x^y f'(t)\,dt\right| \leqslant \int_x^y |f'(t)|\,dt \leqslant C \int_x^y dt = C\,|y-x| \quad \blacksquare$$

VI Dérivée et monotonie

1) extension aux bornes de qq propriétés

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tq $a < b$

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

Prop

1) $\left.\begin{array}{l} f \nearrow\!\!\nearrow \text{ sur }]a,b[\\ f\ C^0 \end{array}\right\} \Rightarrow f \nearrow\!\!\nearrow \text{ sur } [a,b]$

2) $\left.\begin{array}{l} f \nearrow \text{ sur }]a,b[\\ f\ C^0 \end{array}\right\} \Rightarrow f \nearrow \text{ sur } [a,b]$

3) $\left.\begin{array}{l} f\ c^{te} \text{ sur }]a,b[\\ f\ C^0 \end{array}\right\} \Rightarrow f\ c^{te} \text{ sur } [a,b]$

4) $\left.\begin{array}{l} f \nearrow\!\!\nearrow \text{ sur }]a,b[\\ f \nearrow \text{ sur } [a,b] \end{array}\right\} \Rightarrow f \nearrow\!\!\nearrow \text{ sur } [a,b]$

D/ 2) Osq f C^0 et $f \nearrow$ sur $]a,b[$

Mq $f \nearrow$ sur $[a,b]$

Soient $x, y \in [a,b]$ tq $x \leq y$

- Si $x, y \in]a,b[$: ok
- Si $x = y$ ok

• Si $x = a < y < b$

On pose $x_n := a + \frac{y-a}{n}$ pour $n \geq 1$

On a $x_n \longrightarrow a$ et on a $\forall n$, $a \leq x_n \leq y$

Ĉ $f \nearrow$ sur $]a,b[$, on a $f(x_n) \leq f(y)$

Or $f(x_n) \longrightarrow f(a)$ car f C^0

Par passage à la lim dans les $\leq$: $f(a) \leq f(y)$

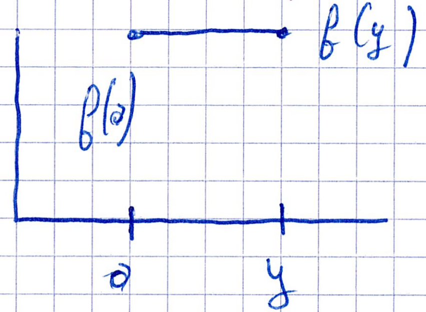
• Si autre cas, c'est ok $\blacksquare$

4) Déjà, d'après 2) : $f \nearrow$ sur $[a,b]$.

• Soient y tq $a < y$. Mq $f(a) < f(y)$

• On sait que $f(a) \leq f(y)$ car $f \nearrow$

• ORPA et osq $\underline{f(a) = f(y)}$



• Si $a < x < y$, on a : $f(a) \leq f(x) \leq f(y)$

et donc $f(x) = f(a)$ Donc

f c^{te} sur $[a,y]$ Abs

3) ok (en disant que $c^{te} \iff \nearrow$ et $\searrow$)

1) Mq

$$\left.\begin{array}{l} f \nearrow \text{ sur } [a,b] \\ f \nearrow\nearrow \text{ sur }]a,b[\end{array}\right\} \Rightarrow f \nearrow\nearrow \text{ sur } [a,b]$$

Déjà fait !!

2) Caractérisation des f° c^{tes}

Prop : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur I
dérivable sur $\mathring{I}$

Alors : $(\forall x \in \mathring{I}, f'(x) = 0) \Rightarrow f$ c^{te}

Rq : ⚠ simple $f' = \tilde{0} \Rightarrow f$ c^{te}

D/ Idée TAF Osq $\forall x \in \mathring{I}$, $f'(x) = 0$

Soient $x, y \in \mathring{I}$, Osq $x < y$.

On a f dérivable sur $[x,y]$

D'après le TAF, fixons $c \in]x,y[$ tq

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c) = 0$$

Donc $f(x) = f(y)$

Donc f c^{te} sur $\mathring{I}$; donc sur I ■

Rq : $\mathbb{C}$ - vrai

Soit $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{C})$ tq $f' = \tilde{0}$

On a $\mathrm{Re}(f)' = \mathrm{Re}(\tilde{0}) = \tilde{0} \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$

Donc $\mathrm{Re}(f)$ c^{te}.

De m : $\mathrm{Im}(f)$ c^{te}. CCl : f c^{te} ■

3) Caractérisation de ↗

Prop : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable.

Alors : f croissante $\iff f' \geq 0$

D/ Idée : $\Leftarrow$ TAF

$\Rightarrow$ $\tau_{f,a}$

$\Rightarrow$ Soit $a \in I$. Soit $x \in I \setminus \{a\}$. On distingue 2 cas.

Premier cas : Osq $x > a$; f ↗, on a

$f(x) \geq f(a)$

Donc $\dfrac{\overbrace{f(x) - f(a)}^{\geq 0}}{\underbrace{x - a}_{>0}} = \tau_{f,a}(x) \geq 0$

• De m : $x < a \Rightarrow \tau_{f,a}(x) \geq 0$

Par pass. lim dans $\leq$:

$\lim\limits_{x \to a} \tau_{f,a}(x) \geq 0$ ie $f'(a) \geq 0$ ■ ($\Leftarrow$)

($\Rightarrow$) Osq $f' \geq 0$ Mq $f \nearrow$, Soient $x, y \in I$

tq $x < y$

Grace au TAF sur $[x,y]$ (où f est d'

fixons $c \in]x,y[$ tq $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(c)$

$\hat{c}$ $f'(c) \geq 0$ et $\hat{c}$ $y - x \geq 0$,

On a $f(y) - f(x) \geq 0$ ie

$f(y) \geq f(x)$ ■

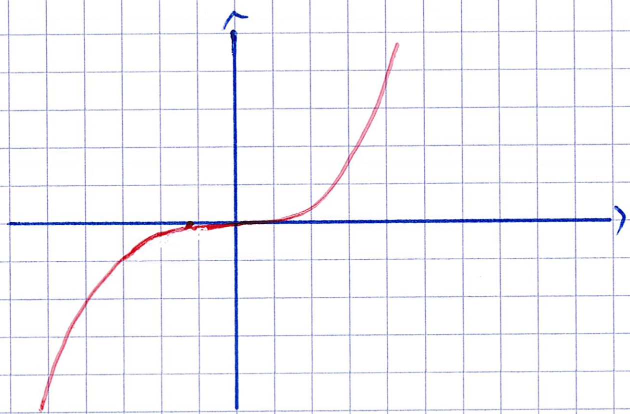
4) Caractérisation de $\nearrow \nearrow$

⚠ On n'a pas $f \nearrow\!\nearrow \iff f' > 0$

Ctrex : Ocsd $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^3$

On a $f \nearrow\!\nearrow$, mais $f'(0) = 0$

d^n



Prop : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable.

On a $f \nearrow\!\nearrow \iff \begin{cases} f' \geq 0 \\ f' \text{ s'annule en peu de points.} \end{cases}$

$\iff f'$ est presque > 0

$\iff \begin{cases} f' \geq 0 \\ Z(f') \text{ est d'intérieur vide} \end{cases}$

$\iff \begin{cases} f' \geq 0 \\ Z(f') \text{ ne contient aucun intervalle de longueur } > 0 \end{cases}$

où $Z(f') := \{ x \in I \mid f'(x) = 0 \}$

Ex : Ocsd $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x + \sin x$

On a (T) $f'(x) = -\cos(x) + 1 \geq 0$

Donc $f \nearrow$

qui est $Z(f')$? Soit $x \in Z(f')$

OALES :

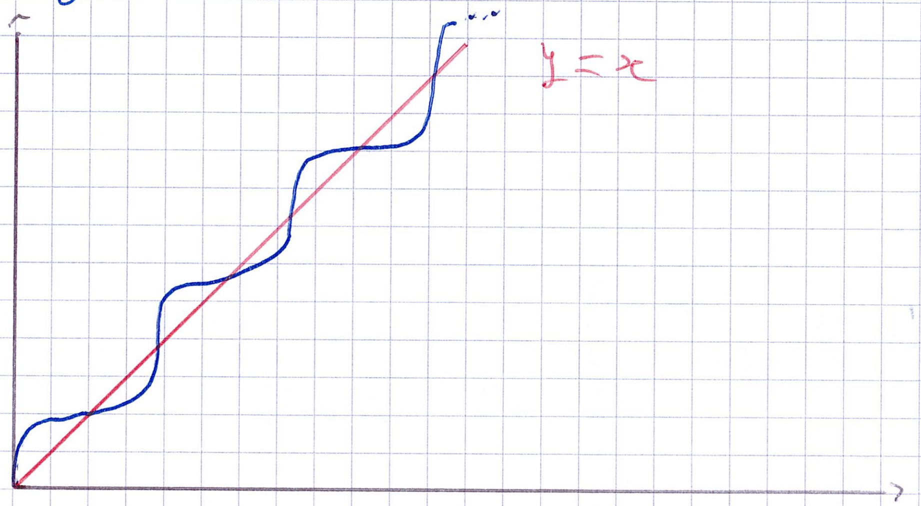
$x \in Z(f') \iff \cos(x) = 1$
$\iff x \equiv \pi \ [2\pi]$

Donc $Z(f') = \{\pi + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}\}$

Donc $Z(f')$ est d'intérieur vide.

Donc $f \nearrow\nearrow$

d^n



Rq ! : En particulier, si $Z(f') = \phi$, on a $f \nearrow\nearrow$

Ie $f' > 0 \implies f \nearrow\nearrow$

D/ ⚠ être précis :

$\Rightarrow$ Osq $f \uparrow\uparrow$. On a $f \uparrow$ donc $f' \geq 0$

ORPA et osq $Z(f')$ contient un intervalle $[a,b]$ avec $b>a$

On a $\forall x \in [a,b]$, $f'(x)=0$.

Donc f est cste sur $[a,b]$

ABS ■ $\Rightarrow$

$\Leftarrow$ Osq $f' \geq 0$ et $Z(f')$ est d'intérieur vide.

Déjà, $f \uparrow$

ORPA et Osq $f \uparrow\uparrow$: fixons donc $a, b \in I$ tq $a<b$ et $f(a) \geq f(b)$

$\hat{C}$ $f \uparrow$, on a $f(a) \leq f(b)$ donc $f(a)=f(b)$

Rq : En fait, $\left.\begin{array}{l} f \uparrow \\ \text{non } (f \uparrow\uparrow) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, a<b$: f cste sur $[a,b]$

D/ soit $x \in [a,b]$, on a $a \leq x \leq b$

$\hat{C}$ $f \uparrow$, $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$

Donc $f(x) = f(a) = f(b)$

Donc : sur $[a,b]$, $f = \widetilde{f(a)}$ ■

Donc $f' = 0$ sur $[a,b]$,

Donc $[a,b] \subset Z(f')$ Abs ■

VII Théorème de la limite de la dérivée

1) Le théorème

Th :

Soit $a \in I$

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ C^0

On suppose que f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$

On suppose que f' admet une limite en a, et on fixe $l \in \overline{\mathbb{R}}$ tq $f'(x) \xrightarrow[x \neq a]{x \to a} l$

Alors : 1) On a $\tau_{f,a}(x) \xrightarrow[x \neq a]{x \to a} l$

2) En particulier, si $l \in \mathbb{R}$, on a

a) f dérivable en a et $f'(a) = l$

b) Et : $f'(x) \xrightarrow[x \to a]{} f'(a)$

c) f' est C^0 en a

d^n ________________ I

D/ 1) Idée : TAF sur intervalle très petit, autour de a

Pour ê + tranquile, on utilise la caract° séquentielle des lim.

En fait : mieux, pour simplifier la tâche, on mq $\tau_{f,a}(x) \xrightarrow[x \xrightarrow{>} a]{} \ell$ $(*_1)$ et $\tau_{f,a}(x) \xrightarrow[x \xrightarrow{<} a]{} \ell$

Mq $(*_1)$ par caract° seq.

Soit $(x_n)_n \in (I \cap]a, +\infty[)^{\mathbb{N}}$ tq

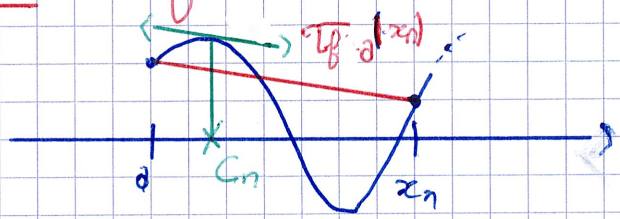
$x_n \longrightarrow a$

Mq $\tau_{f,a}(x_n) \longrightarrow \ell$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Idée : On fait le TAF sur $[a, x_n]$

d°



On applique le TAF à f sur $[a, x_n]$

(En effet, f est $\mathcal{C}^0$ sur $[a, x_n]$
f est d^1 sur $]a, x_n[$)

Fixons $c_n \in]a, x_n[$ tq $f'(c_n) = \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}$

On définit ainsi une suite $(c_n)_n \in (I \setminus \{a\})^{\mathbb{N}}$

Ĉ $\forall n,\ a < c_n < x_n$ et ĉ $x_n \longrightarrow a$,

par encadrement, on a $\boxed{c_n \longrightarrow a}$

Ĉ $f'(x) \xrightarrow[x \underset{\neq}{\to} a]{} \ell$, on a $f'(c_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \ell$

Donc $T_{f,a}(x_n) \longrightarrow \ell$

Ainsi, par carac° seq., on a $T_{f,a}(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$

• De $\overline{m}$: $T_{f,a}(x) \xrightarrow[x \underset{<}{\to} a]{} \ell$

• Donc $T_{f,a}(x) \xrightarrow[x \underset{\neq}{\to} a]{} \ell$

2) ok ∎

2) Applicat° au prolongement $\mathcal{C}^k$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tq $a<b$

Soit $f :]a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\underline{C^0}$

a) prolongement $\mathcal{C}^0$

Osq $f(x) \xrightarrow[x \underset{>}{\to} a]{} \ell_0$ où $\ell_0 \in \mathbb{R}$

Alors, f est prolongeable par C^0 sur $[a,b]$

Plus précisément, on pose $\tilde{f} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x>a \\ \ell_0 & \text{si } x=a \end{cases}$$

Alors, $\tilde{f}$ est C^0

b) Prolongement $\mathcal{C}^1$

Osq f est $]a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$

Osq $\begin{cases} f(x) \underset{x \to a, >}{\longrightarrow} l_0 \\ f'(x) \underset{x \to a, >}{\longrightarrow} l_1 \end{cases}$ $l_0, l_1 \in \mathbb{R}$

<u>Prop :</u> La f^0 $\tilde{f} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ qui prolonge f par continuité est $\mathcal{C}^1$

Et $\tilde{f}'(a) = l_1$

<u>D/</u> On est exactement dans le cadre du thm de la limite de la dérivée

En effet, $\tilde{f} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^0$ sur $[a,b]$
d^1 sur $]a,b]$

et $\tilde{f}'(x) \underset{x \to a, >}{\longrightarrow} l_1$

Ce thm affirme que $\tilde{f}$ est d en a
(2) a) du thm)

$\hat{C}$ $\tilde{f}$ est d sur $]a,b]$, on a $\tilde{f}$ est d sur $[a,b]$

De (1) $\tilde{f}'$ est $\mathcal{C}^0$ en a (2) c) du th)

$\hat{C}$ $\tilde{f}'$ est $\mathcal{C}^0$ sur $]a,b]$

(en effet sur $]a,b]$, on a $\tilde{f} = f$ et donc $\tilde{f}' = f'$)

(c) : $\tilde{f}'$ est C^0 sur $[a,b]$

$\tilde{f}$ est $\mathcal{C}^1$

c) Prolongement $\mathcal{C}^k$

Osq f est $\mathcal{C}^k$

Osq $\forall\, i \in [\![0,k]\!]$, $f^{(i)}(x) \xrightarrow[x \to a]{} l_i$

où les $l_i \in \mathbb{R}$

Prop : Le prolongement par C^0 $\tilde{f} : [a,b] \to \mathbb{R}$ de f est $\mathcal{C}^k$

D/ exo $\blacksquare$

d) Cas $\mathcal{C}^\infty$

exo L'énoncer