Chapitre 23

# Dénombrement

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 1 | | | | | | |
| **1** | 1 | 1 | | | | | |
| **2** | 1 | 2 | 1 | | | | |
| **3** | 1 | 3 | 3 | 1 | | | |
| **4** | 1 | 4 | 6 | 4 | | | |
| **5** | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | |
| **6** | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 |
| | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |

Les sept premières lignes du triangle de Pascal

*Soit $E$ un ensemble.*

*On dit que $E$* est fini *s'il existe $n \in \mathbb{N}$ un entier et $f : [\![1, n]\!] \longrightarrow E$ une application bijective. On appelle alors $n$ le* cardinal de $E$ *et on le note* $\mathsf{Card}(E) := n$.

*Le dénombrement consiste en l'étude des cardinaux des ensembles. Dénombrer un ensemble, c'est calculer son cardinal.*

Lycée CHATEAUBRIAND
**MPSI 3**

Colas Bardavid

# 23
# Dénombrement

plan de cours et principaux résultats

## I. Cardinaux

29.3

### 1) Une notation

### 2) Définitions

a) cardinaux
b) numérotations

### 3) Transfert de finitude

### 4) Cardinaux et inclusion

**Proposition 23.1**
*Soit $E$ un ensemble fini. Alors, on a*

$$\left.\begin{array}{l} A \subset E \\ |A| = |E| \end{array}\right\} \implies A = E.$$

### 5) Cardinaux des unions

a) cas disjoint

**Proposition 23.2**
*Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille finie d'ensembles finis et deux à deux disjoints. Alors,*

$$\bigsqcup_{i\in I} A_i \text{ est fini} \qquad \text{et} \qquad \left|\bigsqcup_{i\in I} A_i\right| = \sum_{i\in I} |A_i|.$$

b) formule d'inclusion-exclusion

**Proposition 23.3**
*Soient $A$ et $B$ de ensembles finis. Alors,*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

### 6) Formule du crible

a) cas de trois ensembles
b) cas de quatre ensembles
c) formule de crible/Poincaré

**Proposition 23.4**
*Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soient $A_1, \dots, A_p$ des ensembles finis. Alors,*

$$\left|\bigcup_{i=1}^{p} A_i\right| = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I\subset[\![1,p]\!] \\ |I|=k}} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|.$$

## II. Applications entre ensembles finis

29.20
29.8

### 1) Fibres

a) définition

b) propriétés

### 2) Conditions nécessaires d'injectivité, de surjectivité et de bijectivité

### 3) Bijectivité en cas d'égale cardinalité

**Théorème 23.5**

*Soient $E$ et $F$ des ensembles finis tels que*

$$|E| = |F|$$

*et soit $f : E \longrightarrow F$.*

*Alors, on a*

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective.}$$

### 4) Principe des tiroirs

## III. Cardinaux des constructions ensemblistes

29.9
29.10
29.21

### 1) Produit cartésien

a) le résultat

**Proposition 23.6** Ⓣ

*On a*

$$|E \times F| = |E| \times |F|.$$

b) corollaires

### 2) Applications de $E$ dans $F$

**Proposition 23.7** Ⓣ

*On a*

$$|\mathscr{F}(E, F)| = |E|^{|F|}.$$

### 3) Parties de $E$

**Proposition 23.8** Ⓣ

*On a*

$$|\mathscr{P}(E)| = 2^{|E|}.$$

### 4) Fonctions injectives de $E$ dans $F$

**Proposition 23.9** Ⓣ

*On a*

$$\mathrm{Card}\Big\{ f : E \longrightarrow F \;\Big|\; f \text{ est injective} \Big\} = \frac{|F|!}{(|F| - |E|)!}.$$

# IV. Permutations, liste sans répétition, parties à $k$ éléments

29.17
29.25
29.36

## 1) Permutations

a) définition
b) cardinal

**Proposition 23.10** Ⓣ
*On a*
$$|\mathfrak{S}_E| = |E|\,!\,.$$

## 2) Listes sans répétition

a) définition
b) cardinal

## 3) Parties à $k$ éléments

a) formule de Pascal
b) somme des coefficients binomiaux
c) formule explicite pour $\binom{n}{k}$

# ch 23
# Denombrement

## I Cardinal

### 1) Notation

Si $n \in \mathbb{N}$, on note $E_n := \{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k \leq n\}$
$(= [\![1, n]\!])$

Rq : pour $n = 0$, on a $E_0 = \emptyset$

### 2) Définition

Prop - Déf° : Soit $E$ un ensemble

1) On dit que $E$ est fini $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$
$\exists n \in \mathbb{N}, \exists f : E_n \longrightarrow E : f$ bij

2) Soient $n, m \in \mathbb{N}$. On a

$$\left.\begin{array}{l} \exists f : E_n \longrightarrow E : f \text{ bij} \\ \exists g : E_n \longrightarrow E : g \text{ bij} \end{array}\right\} \Longrightarrow n = m$$

Si $E$ est fini, l'unique $n \in \mathbb{N}$ tq
$\exists f : E_n \longrightarrow E$ bij est appelé
le cardinal de $E$, et est noté $\text{Card } E$ ou $|E|$ ou
$\# E$

D/ 2) rec cf poly $\blacksquare$

**Déf° :** Soit $E$ un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$.

Une numérotation de $E$ est une bijection

$$f : E_n \longrightarrow E$$

**Rq de redaction :**

Si $E$ fini de cardinal $n$,

On pourra toujours écrire :

« Écrivons $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ »

**D/** Ĉ $|E| = n$, fixons une numerotation

$$f : E_n \longrightarrow E.$$

On note, si $k \in E_n$, $x_k = f(k)$

Ĉ $f$ surjective, on a $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ $\blacksquare$

**Rq :** Ĉ $f$ est inj, on a que les $x_i$ sont 2 à 2 $\neq^{nts}$

## 3) Transfert de finitude

**Prop :** Soient $E, F$ des ens.

Soit $f : E \longrightarrow F$

1) $\left.\begin{array}{l} F \text{ fini} \\ f \text{ injective} \end{array}\right\} \Rightarrow (E \text{ fini et } |E| \leq |F|)$

2) $\left.\begin{array}{l} E \text{ fini} \\ f \text{ surjective} \end{array}\right\} \Rightarrow (F \text{ fini et } |F| \leq |E|$

**D/** cf poly.

## 4) Cardinal et inclusion

**Prop :** Soit $E$ un ens fini.

Alors : 1) $A \subset E \Rightarrow (A \text{ fini et } |A| \leq |E|)$

2) −50% $\left.\begin{array}{l} A \subset E \\ |A| = |E| \end{array}\right\} \Rightarrow A = E$

**D/** 1) Ocsql $i : \begin{array}{l} A \longrightarrow E \\ x \longmapsto x \end{array}$

Alors $i$ inj et on utilise 3)

2) cf poly

**Rq :** Si $E$ n'est pas fini, on dit $E$ est infini

La notion de cardinal est réservée aux ens finis !

Ne parlez pas de "card $\mathbb{N}$" ou "card $[0,1]$"

## 5) Cardinal, union et intersection

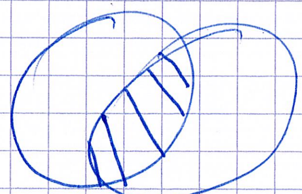
**Prop :** Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille finie d'ensembles finis deux à deux disjoints.

Alors : $$\left| \bigsqcup_{i \in I} A_i \right| = \sum_{i \in I} |A_i|$$

D/ cf poly $\blacksquare$

**Th :** (Formule d'inclusion - exclusion)

Soient $A, B$ des ens finis. Alors :
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

D/ $d^n$ A  B

On a $(A \setminus B) \sqcup (A \cap B) \sqcup (B \setminus A) = A \cup B$

Donc $|A \cup B| = |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A|$

- Astuce : $A = (A \setminus B \sqcup A \cap B)$ (ok)

Donc $|A| = |A \setminus B| + |A \cap B|$

Donc $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$

De m̅ : $|B \setminus A| = |B| - |A \cap B|$

- ccl : ok ■

## 6) Formule du crible

### a) Cas de 3 ensembles.

On a
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

D/
$$|A \cup B \cup C| = |(A \cup B) \cup C|$$
$$= |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C|$$
$$= (|A| + |B| - |A \cap B|) + \dots$$

On utilise la double distributivité

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

Donc
$$|(A \cup B) \cap C| = |A \cap C| + |B \cap C| - |(A \cap C) \cap (B \cap C)|$$

et $(A \cap C) \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$ ■

ccl : $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C|$
$- |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$
$+ |A \cap B \cap C|$

## b) Cas de quatre ensembles

on a Ⓣ

$$|A \cup B \cup C \cup D| = |A| + |B| + |C| + |D|$$
$$-(|A \cap B| + |A \cap C| + |A \cap D| + \dots)$$
$$+ (|A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + \dots)$$
$$-|A \cap B \cap C \cap D|$$

C

## c) Cas general

Th (Formule du crible, de Poincarré)

Prop :
$$\left|\bigcup_{i=1}^{p} A_i\right| = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I\subset [\![1,p]\!] \\ |I|=k}} \left|\bigcap_{j\in I} A_j\right|$$

D/ rec sur $p$

$p=1$ ok

$p=2$ c'est $|A\cup B| = |A|+|B|-|A\cap B|$

Hé Soit $p\in\mathbb{N}^*$ Osq le résultat vrai au rang $p$.

Mq il est vrai au rang $(p+1)$

Soient $A_1, \dots, A_{p+1}$ des ens. finis. On a :

Deux chemins possibles :

$$\bigcup_{i=1}^{p+1} A_i$$

$$A_1\cup A_2\cup\dots\cup(A_p\cup A_{p+1}) \qquad = \left(\bigcup_{i=1}^{p} A_i\right)\cup A_{p+1}$$

On a
$$\left|\bigcup_{i=1}^{p+1} A_i\right| = \overbrace{\left|\bigcup_{i=1}^{p} A_i\right|}^{①} + |A_{p+1}| \underbrace{- \left|\left(\bigcup_{i=1}^{p} A_i\right)\cap A_{p+1}\right|}_{②}$$

$|A\cup B| = |A|+|B| - |A\cap B|$

- ① = ... ok
- On a $\left(\bigcup_{i=1}^{p} A_i\right) \cap A_{p+1} = \bigcup_{i=1}^{p} (A_i \cap A_{p+1})$

par double-distributivité.

- On applique "$HR_p$" à cette union :

② $= \left| \bigcup_{i=1}^{p} (A_i \cap A_{p+1}) \right|$

$$= \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subset [\![1,p]\!] \\ |I| = k}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \cap A_{p+1} \right|$$

Astuce (Md notation)

Si $I \subset [\![1, p+1]\!]$, on note $A_I = \bigcap_{i \in I} A_i$

Ex : $A_{\{1,2,3\}} = A_1 \cap A_2 \cap A_3$

Ainsi ② $= \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} (\ldots)$

<u>preuve suspendue</u>

---

Prop : (formule du crible bis)

$$\left| \bigcup_{i=1}^{p} A_i \right| = \sum_{\substack{I \subset [\![1,p]\!] \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} |A_I|$$

## D/ $f^{le}$ bis $\Longrightarrow$ $f^{le}$ (crible)

- Osq $(*)$

- On a $\mathcal{P}([\![1,p]\!]) \setminus \{\emptyset\} = \bigsqcup_{k=0/1}^{p} \mathcal{P}_k([\![1,p]\!])$

ens des parties à $k$ éléments de $[\![1,p]\!]$

- Or ($f^{le}$ de sommation par paquets)

$$\sum_{i \in \bigsqcup_{\cancel{k=0}}^{p} E_k} a_i = \sum_{k=1}^{p} \sum_{i \in E_k} a_i$$

Ainsi $\left| \bigcup_{i=1}^{p} A_i \right| = \sum_{k=1}^{p} \sum_{I \in \mathcal{P}_k([\![1,p]\!])} (-1)^{|I|+1} |A_I|$ ∎

$(-1)^{k+1}$

## D/ $f^{le}$ crible bis

rec sur $p$

- $p = 1, 2$ : ok
- Hérédité : Osq $HR_p$ vraie

Soient $A_1, \dots, A_{p+1}$ des ens finis.

- On a $\left| \bigcup_{i=1}^{p+1} A_i \right| = \underbrace{\left| \bigcup_{i=1}^{p} A_i \right|}_{①} + |A_{p+1}| + \underbrace{\left| \left( \bigcup_{i=1}^{p} A_i \right) \cap A_{p+1} \right|}_{②}$

• On a ② $= \left| \bigcup_{i=1}^{p} (A_i \cap A_{p+1}) \right| \overset{(HR_p)}{=} \left| \sum_{\substack{I \subset [\![1,p]\!] \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{i \in I} (A_i \cap A_{p+1}) \right| \right.$

• Si $I \subset [\![1,p]\!]$, on a $\bigcap_{i \in I} (A_i \cap A_{p+1})$

$$= \bigcap_{i \in I \cup \{p+1\}} A_i$$

(ex : $(A_1 \cap A_{p+1}) \cap (A_8 \cap A_{p+1}) \cap (A_{14} \cap A_{p+1})$

ie $I = \{1, 8, 14\}$

$= A_1 \cap A_8 \cap A_{14} \cap_{p+1}$

$$= A_{I \cup \{p+1\}}$$

• CCl : ② $= \sum_{I \subset [\![1,p]\!]} (-1)^{|I|+1} \left| A_{I \cup \{p+1\}} \right)$

$\boxed{n}$ or, les $I \cup \{p+1\}$ qd $I \in \mathcal{P}([\![1,p]\!])$

sont les $J \in \mathcal{P}([\![1,p+1]\!])$ tq $p+1 \in J$

• Donc

② $= \sum_{\substack{J \subset [\![1,p+1]\!] \\ \text{tq } p+1 \in J \\ \text{tq } J \neq \{p+1\}}} (-1)^{|J|}$

(car ⊕ $|I \cup \{p+1\}| = |I| + 1$ )

• Puis :

$$① = \sum_{I \subset [\![1,p]\!]} (-1)^{|I|+1} |A_I|$$

$J \subset [\![1, p+1]\!]$

tq $(p+1) \notin J$

$$= \sum_{\substack{J \subset [\![1,p+1]\!] \\ J \neq \emptyset \\ p+1 \notin J}} (-1)^{|J|+1} |A_J|$$

• Donc $① + ② = \displaystyle\sum_{\substack{J \subset [\![1,p+1]\!] \text{ tq} \\ J \neq \emptyset \text{ et } J \neq \{p+1\}}} (-1)^{|J|+1} |A_J|$

• <u>CCl</u> : $① + |A_{p+1}| - ② = \displaystyle\sum_{\substack{J \subset [\![1,p+1]\!] \text{ tq} \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{|J|+1} |A_J|$

# III Applications entre ensembles finis

## 1) Une condition nécessaire d'injectivité

**Prop :** Soient $E, F$ des ens finis.

Soit $f : E \longrightarrow F$

Alors $f$ injective $\Longrightarrow |E| \leq |F|$

## 2) Une condition necessaire de surjectivité

**Prop :** $f : E \longrightarrow F$ inj $\Longrightarrow |E| \geq |F|$

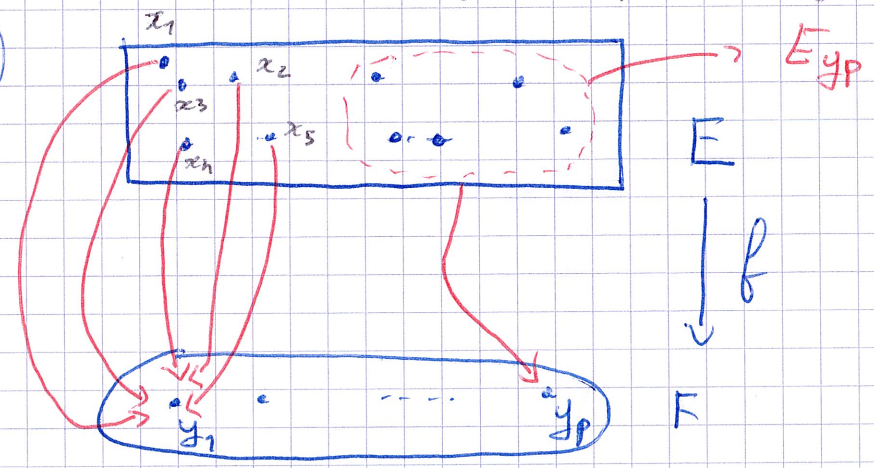
## 3) D/

OCsd $f : E \longrightarrow F$

si $y \in F$, on note $E_y$ (ou $E_y^{[f]}$)

la partie de $E$ définie par $E_y := f^{-1}(\{y\})$

dn




Rq : la partie $E_y$ est appelée la fibre de $f$

au dessus de $y$

**Fait 1 :**

Les $E_y$ qd $y \in F$ sont 2 à 2 disjoints

**D/** Soient $y, y' \in F$

Mq $y \neq y' \Rightarrow E_y \cap E_{y'} = \emptyset$

par contraposition, mq

$E_y \cap E_{y'} \neq \emptyset \Rightarrow y = y'$

**D/** Osq $E_y \cap E_{y'} \neq \emptyset$ CR

Fixons donc $x_0 \in E_y \cap E_{y'}$

Cô $x_0 \in E_y$, on a $f(x_0) = y$

De m̄, ĉ $x_0 \in E_{y'}$, on a $f(x_0) = y'$

Donc $y = y'$ ■

**Fait 2 :** Les fibres $E_y$ recouvrent $E$, Ie :

$$\bigcup_{y \in F} E_y = E$$

D/ Déjà, $\forall y \in F$, $E_y \subset E$, on a

$$\bigcup_{y \in F} E_y \subset E$$

Mq $E \subset \bigcup_{y \in F} E_y$

Soit $x \in E$. On cherche $y \in F$ tq $x \in E_y$

- On pose $y := f(x)$, on a alors $x \in E_y$
- Ainsi $x \in \bigcup_{y \in F} E_y$ ∎

**Fait 3** (E fini)

$f : E \longrightarrow F$ injective $\Longleftrightarrow \forall y \in F, \left( |E_y| \leq 1 \right)$

D/ ($\Rightarrow$) Osq $f$ inj. Soit $y \in F$.

ORPA et Osq $|E_y| \geq 2$.

Fixons donc $x_0 \neq x_1 \in E_y$ On a $f(x_0) = y = f(x_1)$

Abs

($\Leftarrow$) Osq $\forall y \in F$, $|E_y| \leq 1$

Mq $f$ est inj. Soient $x, x' \in E$

tq $f(x) = f(x')$ On note $y := f(x)$

On a $x, x' \in E_y$ or $|E_y| \leq 1$ donc

$x = x'$

donc $f$ inj ∎

**Fait 4** ($E$ fini)

$f : E \longrightarrow F$ surjective $\Longleftrightarrow \forall y \in F, |E_y| \geq 1$

D/ AF ■

D/ 1) • Osq $f$ inj. Mq $|E| \leq |F|$

• Déjà, ĉ $E = \bigsqcup_{y \in F} E_y$ donc

$$|E| = \sum_{y \in F} |E_y|$$

• Or $f$ inj Donc : $\forall y \in F, |E_y| \leq 1$

• Donc : $|E| = \sum_{y \in F} \underbrace{|E_y|}_{\leq 1} \leq \sum_{y \in F} 1 = |F|$ ■ R*

D/ 2) AF ■

## 4) Condition nécessaire (CN) de bij

**Prop :** (T) $f : E \longrightarrow F$ bij $\Longrightarrow |E| = |F|$

D/ ok

## 5) !!! Bijectivité en cas d'égale cardinalité

**Th** (-50%) : ($E$, $F$ ens. finis) ($f : E \longrightarrow F$)

On suppose $|E| = |F|$

On a

$f$ inj $\Longleftrightarrow$ $f$ surj $\Longleftrightarrow$ $f$ bij

Rq ! • On rappelle que si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$.

Alors $f$ inj $\Longleftrightarrow$ $f$ surj $\Longleftrightarrow$ $f$ bij

• Soit $\overbrace{(X_1, \ldots, X_n)}^{\mathcal{F}} \in (\mathbb{K}^n)^n$ une famille "de bonne taille" de $\mathbb{K}^n$ Alors.

$\mathcal{F}$ libre $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{F}$ génératrice ds $\mathbb{K}^n$

$\Longleftrightarrow$ $\mathcal{F}$ base $\mathbb{K}^n$

D/ • Osq $f$ inj. Mq $f$ surj

• Astuce : 1) je retourne aux fibres

2) OFAA une $\sum$ nulle de termes ≥0

• Allons-y

• On a $|E| = \sum_{y \in F} |E_y| = |F| = \sum_{y \in F} 1$

homogénéiser

- D'où : $\sum_{y \in F} |E_y| = \sum_{y \in F} 1$

- D'où : $\sum_{y \in F} (|E_y| - 1) = 0$

- On a : $\forall y \in F, |E_y| \leq 1$ car $f$ inj

  Donc : $\forall y \in F, (|E_y| - 1) \leq 0$

- Ainsi : $(*)$ est une $\sum$ nulle de termes $\leq 0$

  DALC, on a donc : $\forall y \in F, (|E_y| - 1) = 0$

- Donc : $\forall y \in F, |E_y| = 1$

- Donc $f$ bij donc $f$ surj.

- Mq $f$ surj $\Rightarrow$ $f$ bij : AF $^{2+}$

- Enfin : $f$ bij $\Rightarrow$ $f$ inj c'est ok ■

## 6) Principe des tiroirs

Principe : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $p > n$

Si on range $p$ foulard dans $n$ tiroirs, alors l'un des tiroirs (au moins) contiendra au moins 2 foulards.

D/ Ocsd On note $E := \{\text{foulards}\}$

$F := \{\text{tiroirs}\}$

Ocsd

$$f : \begin{array}{l} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto \text{tiroirs où } x \text{ est rangé.} \end{array}$$

On a $|E| > |F|$ donc $f$ n'est pas injective.

CCl : $\exists x, x' \in E : x \neq x'$ et $f(x) = f(x')$ ■

Rq : en Anglais : "pigeonhole principe"

Application :

Soient $x_0, \dots, x_{10} \in [0,1]^4$

Alors, $\exists k \neq p : |x_k - x_p| \leq \frac{1}{10}$

D/ on écrit $[0,1] = [0, \frac{1}{10}[ \cup [\frac{1}{10}, \frac{2}{10}[ \sqcup \dots$

$\sqcup [\frac{9}{10}, 1]$

Comme il y a 10 parties et 11 nombres, d'après le principe des tiroirs, fixons $k \neq p$ tq $x_k$ et $x_p$ sont dans la m̂ partie.

Ĉ cette partie a pour longueur $\frac{1}{10}$, on a nécessairement : $|x_k - x_p| \leqslant \frac{1}{10}$ ■

## III Cardinal de construct° ensemblistes.

Soient $E, F$ des ens finis.

On pose $n := |E|$ et $m := |F|$

### 1) Produit cartésien

#### a) le résultat

**Prop :** $|E \times F| = |E| \times |F|$

**D/** On a $E \times F = \bigsqcup_{x_0 \in E} \{x_0\} \times F$

note $(x_0, F)$

- Si $x \neq x'$, on a $(x, F) \cap (x', F) = \emptyset$

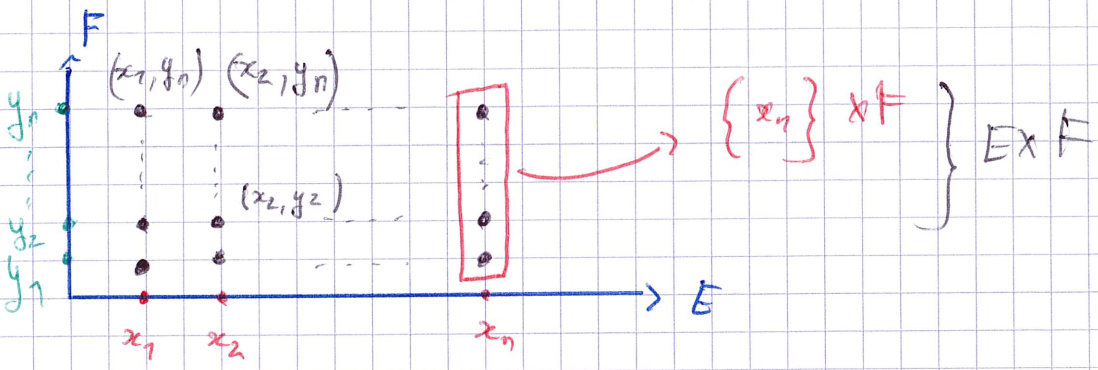
(sinon on aurait $(x, y_0) \in (x, F) \cap (x', F)$

et donc $x = x'$ )

• Soit $(x, y) \in E \times F$, on a $(x, y) \in (x, F)$

CCl : $|E \times F| = \sum_{x_0 \in E} |\{x_0\} \times F|$

Dn




Soit $x_0 \in E$ Osd

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \{x_0\} \times F \\ y & \longmapsto & (x_0, y) \end{array}$$

C'est une bij° Donc $|\{x_0\} \times F| = |F|$

• CCl :

$$|E \times F| = \sum_{x_0 \in E} |F| = |F| \overbrace{\sum_{x_0 \in E} 1}^{|E|} \quad \blacksquare$$

## b) Corollaires

**Corollaire** (T)

1) $|E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p| = \prod_{i=1}^{p} |E_i|$

2) $|E^p| = |E|^p$ D/ ok ■

## 2) Application de E dans F

**Prop** ☹

$$|\mathcal{F}(E,F)| = |F|^{|E|}$$

**Rq :** on rappelle que :

$$F^E := \mathcal{F}(E,F)$$

D/[1] • (R$^\times$) On écrit $E = \{x_1, \cdots, x_n\}$

• Pour construire $f : E \longrightarrow F$, on procède ĉ suit :

1°) On choisit $f(x_1)$ : on a $|F|$ choix possibles.

2°) ——— $f(x_2)$ ———

n°) On choisit $f(x_n)$ ———

• Ce procédé de construct° étant exhaustif et sans redondances, on a :

$$|\mathcal{F}(E,F)| = \underbrace{|F| \times \dots \times |F|}_{n \text{ fois}} = |F|^n = |F|^{|E|}$$

D²/ • On écrit $E = \{x_1, \dots, x_n\}$

• Ocsd

$$\Phi : \begin{array}{rcl} \mathcal{F}(E,F) & \longrightarrow & F^n \\ f & \longmapsto & (f(x_1), \dots, f(x_n)) \end{array}$$

• On a $\Phi$ bij.

(D/ : $\Phi$ inj : Soient $f, g : E \to F$ tq $\Phi(f) = \Phi(g)$. Soit $x$ E.

Fixons $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tq $x = x_{i_0}$.

On a $\Phi(f)_{i_0} = \Phi(g)_{i_0}$ ie $f(x_{i_0}) = g(x_{i_0})$

ie $f(x) = g(x)$ Donc $f = g$

$\Phi$ surj : Soit $(y_1, \dots, y_n) \in F^n$.

On cherche $f : E \to F$ tq $\Phi(f) = (y_1, \dots, y_n)$

Ocsd $f : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & y_i \text{ si } x = x_i \end{array}$ ok ■ )

Donc $|\mathcal{F}(E,F)| = |F^n| = |F|^n = |F|^{|E|}$

## 3) !! Parties de E

**Prop :** $\quad |\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}$

**D/** Ocsd $\quad \Phi : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{F}(E, \{0,1\})$

$$A \longmapsto \mathbb{1}_A$$

et $\quad \Psi : \mathcal{F}(E, \{0,1\}) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$

$$f \longmapsto \{x \in E \mid f(x) = 1\}$$

i.e $\quad f^{\langle -1 \rangle}(\{1\})$

• Alors, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(E) \arrow[loop left, "\mathrm{Id}_{\mathcal{P}(E)}"] \arrow[r, bend left, "\Phi"] & \mathcal{F}(F, \{0,1\}) \arrow[l, bend left, "\Psi"] \arrow[loop right, "\mathrm{Id}_{\mathcal{F}(E, \{0,1\})}"]
\end{tikzcd}$$

• Donc $\Phi$ bij

• Donc $\quad |\mathcal{P}(E)| = |\mathcal{F}(E, \{0,1\})|$

$$= |\{0,1\}|^{|E|} = 2^{|E|}$$

$D^2$/ • par procédé de construction.

• Écrivons $E = \{x_1, \dots, x_n\}$

• Pour construire $A \in \mathcal{P}(E)$, on procède c° suit :

1°) On répond à la q° : $x_1 \in A$ ? Deux réponses possibles

2°) ———————— $x_2 \in A$ ? ————————

⋮

n°) ———————— $x_n$ ————————

• Ce procédé de construct° étant exhaustif et sans redondances, on a :

$$|\mathcal{P}(E)| = \underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_{n \text{ fois}}$$

■

## 1) Fonct° inj de $E \longrightarrow F$

Prop : On a

$$\text{Card}\left\{ f : E \longrightarrow F \mid f \text{ inj} \right\} = \frac{|F|!}{(|F|-|E|)!}$$

0 si $|E| > |F|$

Rq : Ie $\underbrace{m(m-1)(m-2)\dots(m-(n-1))}_{n \text{ facteurs}}$.

D/ • On écrit $E = \{x_1, \dots, x_n\}$

• Pour construire $f : E \longrightarrow F$ inj, on procède comme suit :

1°) On choisit $f(x_1)$ : on a $|F|$ choix possibles.

2°) ——— $f(x_2)$ : on a $|F|-1$ choix possibles car $f(x_2) = f(x_1)$

3°) ——— $f(x_3)$ : on a $|F|-2$ choix possibles

⋮

n°) ——— $f(x_n)$ : on a $|F|-(n-1)$ choix possibles.

Ce procédé de const° étant exh et ss redond, on a le résultat

## IV Permutations, listes sans répétition, parties à k éléments

### 1) Permutations

#### a) déf°

<u>Déf°</u> : Ⓣ Une permutation de $E$ est $f : E \longrightarrow E$ bijective

On note $S_E$ ou $\mathfrak{S}_E$ l'ens des permutat° de $E$

<u>Rappel</u> : $(\mathfrak{S}_E, \circ, Id_E)$ est un groupe.

#### b) Cardinal

<u>Prop</u> Ⓣ : Soit $E$ un ensemble fini,

Alors $|\mathfrak{S}_E| = |E|!$

<u>D/</u> Soit $f : E \longrightarrow E$. DALC

DALC : $f$ inj $\Longleftrightarrow$ $f$ bij

Donc $\mathfrak{S}_E = \{ f : E \longrightarrow E \mid f \text{ inj} \}$

Donc $|\mathfrak{S}_E| = \dfrac{|E|!}{(|E| - |E|)!} = |E|!$ ■

## 2) Listes sans répétit°

### a) déf°

**Déf** : Soit $E$ un ensemble et soit $p \in \mathbb{N}^*$

Une liste sans répétition à $p$-élé$^{nts}$ dans $E$

est un $p$-uplet $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ tq

$\forall i,j \in [\![1, p]\!], \quad i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$

**Fait f$^{al}$** : L'application

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} p\text{-listes sans} \\ \text{répétit° dans } E \end{array} \right\} & \longrightarrow & \left\{ f : [\![1,p]\!] \to E \mid f \text{ inj} \right\} \\ (x_1, \dots, x_p) & \longmapsto & \begin{array}{ccc} [\![1,p]\!] & \to & E \\ i & \mapsto & x_i \end{array} \end{array}$$

est bijective

D/ ok ■

### b) Cardinal

**Prop** : Il y a $\dfrac{|E|!}{(|E|-p)!}$ $p$-listes de $E$ sans répétit°

D/ ok ■

## 3) Parties à $k$-éléments

Rappels ①

① $\mathcal{P}_k(E) := \left\{ A \subset E \;\middle|\; \text{et} \begin{array}{l} A \text{ fini} \\ |A| = k \end{array} \right\}$

② exo Prop : ① Soient $E, F$ ens$^{f}$ (ensemble fini)

Alors :

$$|E| = |F| \implies |\mathcal{P}_k(E)| = |\mathcal{P}_k(F)|$$

D/ Mieux : donnons-nous $E \xrightarrow[\sim]{\phi} F$

une bijection

Mq
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_k(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}_k(F) \\ A & \longmapsto & \text{exo ?} \end{array}$$
est bij ∎

③ $\binom{n}{k} := \operatorname{card}\left( \mathcal{P}_k(⟦1, n⟧) \right)$

### a) f$^{le}$ de Pascal

Prop : Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $k \in \mathbb{Z}$

Alors $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$

D/ combinatoire

Osq $k \in [\![0,n]\!]$

On note $\mathcal{P}_k^{[n+1]} = \left\{ A \subset [\![1,n+1]\!] \;\middle|\; \begin{array}{l} |A| = k \\ \text{et } n+1 \in A \end{array} \right\}$

$\mathcal{P}_k^{\cancel{[n+1]}} := \left\{ A \subset [\![1,n+1]\!] \;\middle|\; \begin{array}{l} |A| = k \\ \text{et } n+1 \notin A \end{array} \right\}$

On a

(1) $\mathcal{P}_k([\![1,n+1]\!]) = \mathcal{P}_k^{[n+1]} \sqcup \mathcal{P}_k^{\cancel{[n+1]}}$

(2) Donc $\binom{n+1}{k} = \left|\mathcal{P}_k^{[n+1]}\right| + \left|\mathcal{P}_k^{[n+1]}\right|$

(3) On a $\mathcal{P}_k^{\cancel{[n+1]}} = \mathcal{P}_k([\![1,n]\!])$

Donc $\left|\mathcal{P}_k^{[n+1]}\right| = \binom{n}{k}$

(4) Ocsd $\mathcal{P}_{k-1}([\![1,n]\!]) \xrightarrow{\Phi} \mathcal{P}_k^{[n+1]}([\![1,n+1]\!])$

AC $A \longmapsto A \cup \{n+1\}$

On a $\Phi$ bij

Donc $\left|\mathcal{P}_k^{[n+1]}\right| = \binom{n}{k-1}$ $\blacksquare$

## b) Somme des coeff binom.

**Prop :** On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

**Rq :** On a une D/ newton avec $(1+1)^n$

**D combinatoire /**

On a $\mathcal{P}([\![1,n]\!]) = \displaystyle\bigsqcup_{k=0}^{n} \mathcal{P}_k([\![1,n]\!])$

Donc $\displaystyle |\mathcal{P}([\![1,n]\!])| = \sum_{k=0}^{n} |\mathcal{P}_k([\![1,n]\!])|$

↳ c'est $\binom{n}{k}$

↳ $2^{|[\![1,n]\!]|}$ i.e. $2^n$ $\blacksquare$

## e) une formule explicite pour $\binom{n}{k}$

**Prop** (T) $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

**D/ combinatoire.** Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $k \in [\![0,n]\!]$

Notons $\mathcal{A} := \{k\text{-listes de } [\![1,n]\!] \text{ sans repetition}\}$

Ocsd $\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{P}_k([\![1,n]\!])$

$(x_1, \dots, x_k) \longmapsto \{x_1, \dots, x_k\}$

① On a $\Phi$ surjective (D/AC)

② Idée : regarder les fibres de $\Phi$

③ Soit $A \in \mathcal{P}_k(⟦1, n⟧)$. On regarde

$$\mathcal{A}_A^{[\Phi]} = \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathcal{A} \mid \{x_1, \dots, x_k\} = A\}$$

④ On a :
$$\mathcal{A} = \bigsqcup_{A \in \mathcal{P}_k(⟦1,n⟧)} \mathcal{A}_A^{[\Phi]}$$

⑤ Donc
$$|\mathcal{A}| = \sum_{A \in \mathcal{P}_k(⟦1,n⟧)} |\mathcal{A}_A^{[\Phi]}|$$

⑥ Calculons le cardinal de la fibre

AC On a compris que $|\mathcal{A}_A^{[\Phi]}| = k!$

D/ Idée : On exhibe une bijection entre
$$\mathcal{A}_A^{[\Phi]} \text{ et } \mathfrak{S}_A$$

On change de p$^t$ de vue.

$$\mathcal{A} := \{f : ⟦1, k⟧ \longrightarrow ⟦1, n⟧ \mid f \text{ inj}\}$$

et $\Phi$ :
$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{P}_k(⟦1, n⟧) \\ f &\longmapsto f(⟦1, k⟧) \end{aligned}$$

Et $\mathcal{A}_A^{[\Phi]} = \left\{ f : [\![1,k]\!] \longrightarrow [\![1,n]\!] \;\middle|\; \underset{=A}{f([\![1,k]\!])} \right\}$

- Soit $f_0 \in \mathcal{A}_A^{[\Phi]}$ et ocsd

$$\Psi_{f_0} : \begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_A & \longrightarrow & \mathcal{A}_A^{[\Phi]} \\ \sigma : A \xrightarrow{\sim} A & \longmapsto & \sigma \circ f_0 \end{array}$$

- On a $\Phi_{f_0}$ bij

- Donc $\left| \mathcal{A}_A^{[\Phi]} \right| = \left| \mathfrak{S}_A \right| = |A|! = k!$

- <u>ccl</u>

$$\left| \left\{ \begin{array}{c} k\text{-listes de } [\![1,n]\!] \\ \text{sans répétit°} \end{array} \right\} \right| = \sum_{A \in \mathcal{P}_k([\![1,n]\!])} \left| \mathcal{A}_A^{[\Phi]} \right|$$

$k!$

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

et $\displaystyle \frac{n!}{(n-k)!} = \sum_{A \in \mathcal{P}_k([\![1,n]\!])} k!$

$$= k! \times \left| \mathcal{P}_k([\![1,n]\!]) \right|$$

- <u>ccl</u> : $\displaystyle \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ ∎

Dénombrement

# Plans de table

## I. Énoncé du problème

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ avec $m \leqslant n$. On considère un ensemble de $n+m$ convives avec $n$ filles et $m$ garçons. La table à laquelle ils s'assoient est ronde et les convives s'assoient avec la contrainte suivante : deux garçons ne peuvent pas être assis l'un à côté de l'autre.
On souhaite calculer le nombre de plans de table possibles.

## II. Solution

On imagine qu'une place est privilégiée par rapport aux autres : on peut imaginer que c'est la place à côté du radiateur. On distingue deux cas :

- Premier cas : c'est une fille qui est assise à la place privilégiée.

  Pour choisir un plan de table, on commence d'abord par décider un ordre $f_1, f_2, \dots, f_n$ de l'ensemble des filles. C'est dans cet ordre qu'elles seront assises à la table, en partant de la place privilégiée et en tournant dans le sens direct (et sans compter les éventuels garçons entre eux). Il y a $n!$ tels choix.

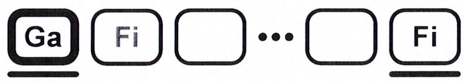
  Ensuite, une fille a à sa gauche un ou zéro garçon et il y a exactement $m$ filles qui ont un garçon à leur gauche. Pour choisir le plan de table, on choisit donc les $m$ filles qui seront dans ce cas. Il y a $\binom{n}{m}$ choix.

  Enfin, il y a $m!$ façons de placer les garçons sur ces places.

  Au total, dans ce cas, on a $\boxed{n!\,m!\binom{n}{m} = \frac{(n!)^2}{(n-m)!} \text{ choix.}}$

- Deuxième cas : c'est un garçon qui est assis à la place privilégiée.

  On a $m$ choix pour lui. À sa gauche, il y a une fille, on a $n$ façons de la choisir. Dans le schéma ci-dessous

  les places soulignées sont les places qu'on a choisies et la place entourée en gras est la place privilégiée. Les places à choisir ne sont pas soulignées. La place la plus à gauche parmi celles-là est nécessairement celle d'une fille. On est donc dans un cas similaire au cas précédent : les choix restants sont au nombre de $\dfrac{((n-1)!)^2}{((n-1)-(m-1))!} = \dfrac{((n-1)!)^2}{(n-m)!}$.

  Au total, dans cette situation, le nombre de façons de placer les garçons et les filles vaut $\boxed{nm\frac{((n-1)!)^2}{(n-m)!}.}$

Bilan : le nombre de plans de table possibles vaut donc

$$\frac{(n!)^2}{(n-m)!} + nm\frac{((n-1)!)^2}{(n-m)!} = \boxed{\frac{n((n-1)!)^2(n+m)}{(n-m)!}.}$$

## III. Remarque finale

Si l'on veut compter le nombre de plans de table à rotation des convives autour de la table près, il suffit de diviser le résultat final par $n+m$. En effet, chaque plan de table peut donner $n+m$ plans de tables similaires, en faisant se décaler tout le monde du même nombre de places. Ce nombre de plans de tables à rotation près vaut donc

$$\boxed{\frac{n((n-1)!)^2}{(n-m)!}.}$$

Dénombrement

# L'astuce des taquets

Dans ce qui suit, on va calculer le nombre de façons de ranger $\ell$ boules dans $n$ boîtes.
Comme application, on a va compter le nombre de suites croissantes.

## I. Ranger $\ell$ boules dans $n$ boîtes

### 1) Énoncé du problème

Soient $\ell, n \in \mathbb{N}^*$.
On considère $\ell$ boules et $n$ boîtes $B_1, \ldots, B_n$.
Les $\ell$ boules sont indiscernables et les $n$ boîtes sont numérotées de 1 à $n$.
On se demande combien il y a de manières de placer les $\ell$ boules dans ces $n$ boîtes.

### 2) Reformulation du problème

En fait, ce qui nous intéresse, c'est le nombre $k_i$ de boules dans chaque boîte $B_i$. Ces entiers $k_i$ vérifient

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ k_i \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} k_i = \ell.$$

On note donc

$$A(\ell, n) := \Big\{(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n \mid \sum_{i=1}^{n} k_i = \ell\Big\}$$

et on veut calculer $\mathsf{Card}\big(A(\ell, n)\big)$.

### 3) L'astuce des taquets

Pour dénombrer $A(\ell, n)$, on va utiliser la remarque suivante, qui est à retenir :

> Placer les $\ell$ boules dans les $n$ boîtes, cela revient à placer $n-1$ taquets dans $\ell + n - 1$ cases.

En effet, ces $n-1$ taquets vont déterminer $n$ groupes. Le nombre de cases vides après avoir mis ces $n-1$ taquets vaut $\ell$ : ainsi, les $n-1$ taquets déterminent exactement la répartition de $\ell$ éléments en $n$ groupes.

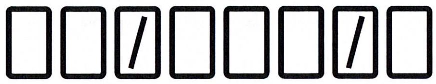
### 4) Exemples

Voyons cela sur des exemples.
On considère $\ell = 6$ et $n = 3$ : on veut placer 6 boules dans trois boîtes.
On va donc placer $n - 1 = 2$ taquets dans $\ell + n - 1 = 8$ cases.

**Exemple 1.**
Imaginons la répartition suivante :

$$B_1 : 2 \text{ boules} \qquad B_2 : 3 \text{ boules} \qquad B_3 : 1 \text{ boule.}$$

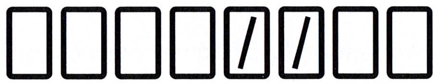
La représentation de cette répartition en taquets est :



**Exemple 2.**
Imaginons la répartition suivante :

$$B_1 : 4 \text{ boules} \qquad B_2 : 0 \text{ boule} \qquad B_3 : 2 \text{ boules.}$$

La représentation de cette répartition en taquets est :



### 5) Conclusion

Ainsi, le nombre de façons de ranger $\ell$ boules dans $n$ boîtes correspond au nombre de façons de placer $n - 1$ taquets dans $\ell + n - 1$ cases :

$$\boxed{\text{c'est } \binom{\ell + n - 1}{n - 1}.}$$

Autrement dit,

$$\#\left\{ (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} k_i = \ell \right\} = \binom{\ell + n - 1}{n - 1}.$$

## II. Nombre de suites finies croissantes

On va appliquer ce résultat pour compter le nombre de suites croissantes.
On fixe $p, n \in \mathbb{N}$. On considère

$$F(p, n) := \left\{ f : [\![0, p]\!] \longrightarrow [\![0, n]\!] \;\middle|\; f \text{ est croissante} \right\}.$$

On cherche le cardinal de $F(p, n)$.

### 1) Connaître les pas d'une suite revient à connaître la suite

La première chose à remarquer, c'est que si l'on connaît le premier terme d'une suite et la suite de ses pas, alors on connaît la suite. Par exemple, si je sais que le premier terme de ma suite est 42, et que les pas successifs de la suite sont $(-1, 8, 30, 15)$, alors je sais que ma suite est

$$(42, 41, 49, 79, 94).$$

**2) Formalisation**

Introduisons une notation pour le pas d'une suite. Si $f : [\![0,p]\!] \longrightarrow [\![0,n]\!]$ est une application, on notera $\Delta_f : [\![0,p]\!] \longrightarrow \mathbb{Z}$ l'application définie par

$$\begin{cases} \Delta_f(0) := f(0) & \text{c'est le premier terme} \\ \Delta_f(i) := f(i) - f(i-1) \text{ si } i \in [\![1,p]\!] & \text{c'est la suite des pas.} \end{cases}$$

Par exemple, si on considère la suite $f = (6, 9, 4, 14, 42)$, alors la suite des pas $\Delta_f$ est

$$\Delta_f = (6, +3, -5, +10, +28).$$

**3) Quelques propriétés de la suite des pas**

Soit $f : [\![0,p]\!] \longrightarrow [\![0,n]\!]$.

- Alors, on a
$$\sum_{i=0}^{p} \Delta_f(i) = f(0) + \sum_{i=1}^{p} \big(f(i) - f(i-1)\big) = f(p).$$
- Si $f$ est croissante, alors, la suite de ses pas est positive. Comme par ailleurs $f(0) \geqslant 0$, on a donc, si $f$ est croissante :
$$\forall i \in [\![0,p]\!],\ \ \Delta_f(i) \geqslant 0.$$
- On peut toujours compléter $f$ en une fonction $\overline{f} : [\![0,p+1]\!] \longrightarrow [\![0,n]\!]$ encore croissante et vérifiant $\overline{f}(p+1) = n$. Cette fonction $\overline{f}$ vérifie :
$$\begin{cases} \forall i \in [\![0,p+1]\!],\ \ \Delta_{\overline{f}}(i) \geqslant 0 \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{p+1} \Delta_{\overline{f}}(i) = n. \end{cases}$$

**4) Conclusion**

Ainsi, dénombrer les suites croissantes $f : [\![0,p]\!] \longrightarrow [\![0,n]\!]$ est équivalent à dénombrer l'ensemble

$$\left\{ (k_0, \dots, k_{p+1}) \in \mathbb{N}^{p+2} \,\middle|\, \sum_{i=0}^{p+1} k_i = n \right\}.$$

D'après ce qu'on a vu, on a donc

$$\mathsf{Card}\big(F(p,n)\big) = \binom{n + (p+2) - 1}{(p+2) - 1} = \binom{n+p+1}{p+1}.$$

**5) Bilan**

On considère maintenant $p, n \in \mathbb{N}^*$.

Pour compter le nombre d'applications croissantes $f : [\![1,p]\!] \longrightarrow [\![1,n]\!]$, il suffit de remarquer que, « par translation », on a une bijection entre

$$\Big\{ f : [\![1,p]\!] \longrightarrow [\![1,n]\!] \ \Big|\ f \text{ est croissante} \Big\} \quad \text{et} \quad \Big\{ f : [\![0,p-1]\!] \longrightarrow [\![0,n-1]\!] \ \Big|\ f \text{ est croissante} \Big\}.$$

On retrouve donc le résultat démontré en TD :

$$\boxed{\mathsf{Card}\Big\{ f : [\![1,p]\!] \longrightarrow [\![1,n]\!] \ \Big|\ f \text{ est croissante} \Big\} = \binom{n+p-1}{p}.}$$