

Chapitre 25

Séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

La valeur en 2 de la fonction ζ de Riemann, définie par $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.
(ζ = lettre grecque « zêta »)

Les séries sont des sommes infinies.

Contrairement à ce que pourrait suggérer l'intuition, une somme infinie de termes tous strictement positifs peut converger. Un premier exemple est le suivant :

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots = 2,$$

qu'on écrira

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2.$$

Dans ce chapitre, on étudie les séries et on établit des critères pour prouver que ces sommes infinies existent. Les séries sont un outil de base de l'analyse mathématique. Elles permettent d'étudier rigoureusement des phénomènes connus (comme le développement décimal des nombres réels) ; elles sont aussi à l'origine de nombreux développements modernes (comme la théorie des ondelettes par exemple).

25

Séries

plan de cours et principaux résultats

I. Séries

33.15

1) Définitions

33.19

2) Exemples fondamentaux

33.20

a) la série $\sum_n \frac{1}{2^n}$

b) la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$

c) la série exponentielle $\sum_n \frac{z^n}{n!}$

33.17

3) Autres exemples

a) la série harmonique alternée $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

b) la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$

4) La nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes

5) Reste d'une série convergente

a) définition

b) faits-réflexes fondamentaux

Fait 25.1

Soit $\sum_n u_n$ une série convergente, dont la suite des restes est notée $(R_n)_n$.

Alors, on a

1) $\forall n \in \mathbb{N}, R_n = S - S_n$

2) $R_n \rightarrow 0$.

6) Opérations sur les séries convergentes

7) Étude des suites *via* les séries

8) Séries grossièrement divergentes

a) terme général des séries convergentes

Proposition 25.2

$$\sum_n u_n \xrightarrow{\text{CV}} \implies u_n \rightarrow 0.$$

b) contre-exemples

Proposition 25.3

En général, l'implication

$$u_n \rightarrow 0 \implies \sum_n u_n \xrightarrow{\text{CV}}$$

est fausse.

c) séries grossièrement divergentes

9) Séries géométriques

II. Comparaison séries/intégrales

33.35

1) Formule de comparaison séries/intégrales

33.23

33.27

Proposition 25.4

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ une fonction décroissante et soient $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $a \leq b$. Alors,

$$f(b) + \int_a^b f(t) dt \leq \sum_{k=a}^b f(k) \leq \int_a^b f(t) dt + f(a).$$

2) Séries de Riemann

a) définition

b) le critère de Riemann

Proposition 25.5 [⊕]

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \xrightarrow{\text{CV}} \iff \alpha > 1$$

3) Compléments sur les séries de Riemann

a) cas $\alpha < 1$

b) cas $\alpha > 1$

4) Une application

Proposition 25.6

Soit $a > 1$. Alors, on a $a^n = o(n!)$.

III. Critères de convergence

33.5

1) Séries à termes positifs

33.36

a) une notation

b) l'alternative pour les SATP

c) pour les SATP : critère de convergence par majoration

33.38

Proposition 25.7 [⊕]

Soient $\sum_n u_n$ et $\sum_n w_n$ des SATP. Alors,

$$\left. \begin{array}{l} u_n \leq w_n \text{ APCR} \\ \sum_n w_n \xrightarrow{\text{CV}} \end{array} \right\} \implies \sum_n u_n \xrightarrow{\text{CV}}$$

2) Nature des SATP à termes généraux équivalents

a) le résultat

Théorème 25.8

Soient $\sum_n u_n$ et $\sum_n w_n$ des SATP. Alors,

$$u_n \sim w_n \implies \sum_n u_n \text{ et } \sum_n w_n \text{ ont même nature.}$$

b) exemple

c) démonstration

d) convergence de $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

e) un contre-exemple

3) Application : DA de la série harmonique

IV. Séries absolument convergentes

33.13 
33.32 

- 1) Définitions
- 2) Exemples
- 3) $ACV \Rightarrow CV$

Théorème 25.9 ^①

$$\sum_n u_n \xrightarrow{ACV} \Rightarrow \sum_n u_n \xrightarrow{CV}$$

- 4) Inégalité triangulaire
- 5) Absolue convergence par domination

Proposition 25.10

Soient $\sum_n u_n$ et $\sum_n w_n$ des séries. Alors, on a

- 1)
$$\left. \begin{array}{l} u_n = o(w_n) \\ \sum_n w_n \xrightarrow{ACV} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_n u_n \xrightarrow{ACV}$$
- 2)
$$\left. \begin{array}{l} u_n = O(w_n) \\ \sum_n w_n \xrightarrow{ACV} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_n u_n \xrightarrow{ACV}$$

- 6) Critère de Riemann-Bertrand

Proposition 25.11 ^①

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} \xrightarrow{CV} \iff \alpha > 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)$$

- 7) Contre-exemples

V. Développement décimal d'un nombre réel

- 1) Un premier fait
- 2) Développement décimal
- 3) Caractérisation des rationnels
- 4) $\mathbb{R}$ possède plus d'éléments que $\mathbb{N}$
 - a) ensembles dénombrables
 - b) $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable

Théorème 25.12

$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

VI. Séries alternées

33.31

33.41

1) Définition

2) Théorème des séries alternées

Théorème 25.13

Soit $(a_n)_n \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ telle que $(a_n)_n$ décroît et $a_n \rightarrow 0$. Alors,

1) $\sum_n (-1)^n a_n \xrightarrow{\text{CV}}$

2) De plus, on a

$$0 \leq \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \leq a_0.$$

Autrement dit : la somme de $\sum_n (-1)^n a_n$ est du signe de son premier terme et est majorée en valeur absolue par $|a_0|$.

Ch 25 M Séries

En général, on ne peut pas faire de somme infinie.

Dans ce chapitre, on se concentre sur la q^0 :

À quelle condition suffisante puis-je écrire :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \quad ?$$

K est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

$$(u_n)_n, (v_n)_n, (w_n)_n \in K^{\mathbb{N}}$$

I Séries

1) Définitions

Déf : La suite de terme général u_n notée $\sum_n u_n$

ou $\sum_{n \geq 0} u_n$ est le couple

$$\left((u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (s_n)_{n \in \mathbb{N}} \right)$$

où $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par $\oplus \quad s_n = \sum_{k=0}^n u_k$

• (T) S_m est appelée : somme partielle
d'indice m de $\sum_n u_n$

• On dit que $\sum_n u_n$ converge et on note #
 $\sum_n u_n \xrightarrow{CV}$, Δ_{ss} $\exists p \in \mathbb{K} : S_n \rightarrow p$

• On appelle alors somme de la série le nombre
 S définie par

$$S := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

• Si $\sum_n u_n$ n'est pas convergente, on dit qu'elle
est divergente.

On note # $\sum_n u_n$ Div.

Rq : Attention aux notations !

• $\sum_n u_n$: C'est un "objet"

• $\sum_{k=0}^n u_k$: c'est un élément de $\mathbb{K}$

• $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ interdiction d'écrire cette somme
si on n'a pas mg $\sum_n u_n \xrightarrow{CV}$

Rq : On définit les séries $\sum_{n \geq 1} u_n$ ou $\sum_{n \geq 2} u_n$, etc

2) Exemples Gondamen Faux

a) $\sum_n \frac{1}{2^n}$

Elle est CV,

On note, si $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n := \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}$$

Ma $(S_n)_n \xrightarrow{CV}$

D/ Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $S_n = \frac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right)$

$$\hat{C} \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \longrightarrow 0 \quad (\text{car } |\frac{1}{2}| < 1)$$

$$\text{On a } S_n \longrightarrow 2$$

Ainsi, on a :

Fait :

1) $\sum_n \frac{1}{2^n} \xrightarrow{CV}$,

2) On a : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$

b) La série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$

Prop : La série $\sum_n \frac{1}{n}$ diverge

D/1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $(\oplus H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k})$

On a :
 (*) $H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \stackrel{\text{AC}}{\geq} \frac{1}{2n} \sum_{k=n+1}^{2n} 1 = \frac{1}{2}$

• ORPA et osq $\sum_n \frac{1}{n} \xrightarrow{UV}$

(• $\subset \forall n, \frac{1}{n} > 0 : (R^x \text{ on } \underline{a(H_n)_n} \hat{I}^r) \text{ limite}$

• On fixe $P \in \mathbb{R}$ tq $H_n \rightarrow P$

• Par extract^o, on a $H_{2n} \rightarrow P$

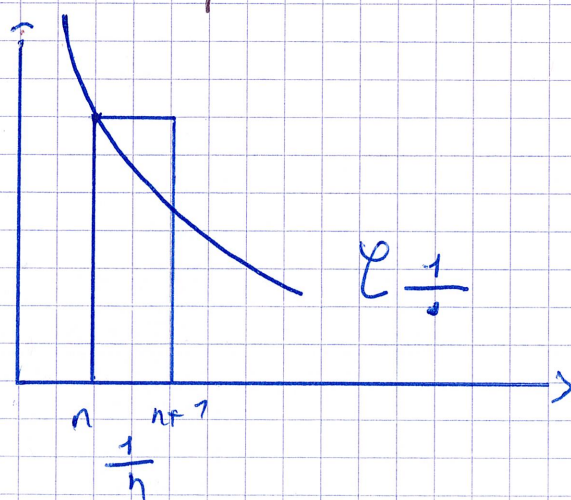
• En passant à la limite dans (*): On obtient

$$P - P \geq \frac{1}{2} \quad (\text{Abs})$$

Rq: $\hat{C} (H_n)_n \hat{I}^r$, on a donc $H_n \rightarrow +\infty$

D/2 $\hat{I}^r$ par comparaison $\Sigma - \int$

(d^n)



$\hat{I}^r$ Je me met en mode

" $H_n \geq (-)$

on voit $\frac{1}{n} \geq \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt$

Formalisons. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tel $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $[n; n+1]$ Donc

$$\forall t \in [n, n+1], \quad \frac{1}{t} \leq \frac{1}{n}$$

Donc en intégrant (DLBS):

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{n} dt = \frac{1}{n}$$

(*)_n

• Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On somme les " $\leq$ " (*)_n pour $n \in [1, N]$.

On obtient:

$$\sum_{n=1}^N \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = H_N$$

• n On a, (AC),

$$\sum_{n=1}^N \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt = \underbrace{\int_1^2 + \int_2^3 + \dots + \int_N^{N+1}}_{\text{md "..."}} = \int_1^{N+1} \frac{1}{t} dt$$

$$= \int_1^{N+1} \frac{1}{t} dt$$

• Or, $\int_1^{N+1} \frac{1}{t} dt = [\ln(t)]_1^{N+1} = \ln(N+1)$

Rq: En gen : une "somme continue" est $\oplus$ simple à calculer qu'une "somme discrète" (ie Σ)

cf $\sum_{k=1}^N k^4 = \dots$ ~~$\neq$~~ $\int_1^N t^4 dt = \frac{N^5 - 1}{5}$

CC: $H_N \geq \ln(N+1) \longrightarrow +\infty$

Donc $\sum_n \frac{1}{n}$ div $\blacksquare$

c) La série exponentielle

Prop: Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ - Alors on a :

1) la série $\sum_n \frac{z_0^n}{n!}$ CV,

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_0^n}{n!} = \exp(z_0)$

D/ Avec l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée
à : $f : [0, t] \longrightarrow \mathbb{C}$
 $t \longmapsto \exp(tz_0)$ ϕ chop

Bilan informel :

$$\bullet 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \dots = 2$$

$$\bullet 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots \text{ diverge}$$

$$\bullet 1 + z_0 + \frac{z_0^2}{2} + \frac{z_0^3}{6} + \dots = \exp(z_0)$$

Autres exemples

a) La série harmonique alternée $\sum_n \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

$$\text{ie } 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

D/ (Asfurieuse)

$$\bullet \text{ Soit } N \in \mathbb{N}^*. \text{ On note } S_N := \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{p=0}^{N-1} \frac{(-1)^p}{p+1}$$

$$\bullet \text{ On a } \boxed{n}$$

$$H_N = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \int_0^1 t^n dt \stackrel{\text{linéarité de l'intégrale}}{=} \int_0^1 \sum_{n=0}^{N-1} \boxed{(-1)^n t^n} dt$$

$(-t)^n$

$$\bullet \text{ Soit } t \in [0, 1]. \text{ On a } -t \neq 1 \text{ Donc}$$

SG s'applique et on a :

$$\sum_{n=0}^{N-1} (-t)^n = \frac{1 - (-t)^N}{1 - (-t)} = \frac{1}{1+t} - \frac{(t)^N}{1+t}$$

$$\bullet \text{ CCL : } S_N = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{1+t} dt}_{\text{I}} - \underbrace{\int_0^1 \frac{(-t)^N}{1+t} dt}_{\text{J}_N}$$

• On a

$$I = \left[\ln(1+t) \right]_0^1 = \ln(2)$$

• Ilq $J_N \rightarrow 0$, on écrit

$$|J_N| \leq \int_0^1 \frac{t^N}{\underbrace{1+t}_{\geq 1}} dt \leq \int_0^1 t^N dt = \frac{1}{N+1} \rightarrow 0$$

• Donc $J_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \ln(2)$ ■

Prop: 1) $\sum_n \frac{(-1)^n}{n+1} \xrightarrow{CV}$

2) et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$

b) La série $\sum_n \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$

Prop: Soit $x \in]-1, 1[$ Alors :

1) la série $\sum_n \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \xrightarrow{CV}$,

2) On a : $\sum_n \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \ln(1+x)$

Rq: il faut le remarquer avec :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots$$

qd $x \rightarrow 0$

• $\hat{a}$, on va avoir

$$\forall x \in]-1, 1[, \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

DI On déf. $f:]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \ln(1+x)$

• On a $f \in \mathcal{C}^\infty(]-1, +\infty[, \mathbb{R})$ et:

$$\forall n \geq 1, \forall x > -1, f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} (n-1)!}{(1+x)^n}$$

• Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1} (n-1)!$

• On applique FTI $f_{b,n,0}(x)$:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{k!} \frac{(x-0)^k}{k!}$$

$$+ \int_0^x \frac{(-1)^n n!}{(1+t)^{n+1}} \frac{(x-t)^n}{n!} dt$$

$$= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + \int_0^x \frac{(-1)^n (x-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt$$

S_N

$$\boxed{\int_0^x \frac{(-1)^n (x-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt}$$

$I_n^{[x]}$

• Ma $I_n^{[x]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

• 1^{er} Cas : Orsq $x \in [0, 1]$

(*) déjà, on intègre DLBS et :

$$|I_n^{[x]}| \leq \int_0^x \frac{(x-t)^n}{\underbrace{(1+t)^{n+1}}_{\geq 1}} dt \leq \int_0^x \underbrace{(x+t)^n}_{\leq x} dt$$

(...)

(...)

$$\int_0^x x^n dt = x x^n = x^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

si $x \in [0, 1]$

$$= \left[\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^x \times (-1) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

• 2^e Cas : Orsq $x \in]-1, 0[$:

On a :

$$|I_n^{[x]}| = \left| \int_x^0 \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt \right| \leq \int_x^0 \dots =$$

$$= \int_x^0 \frac{|x-t|^n}{|1+t|^{n+1}} dt$$

$= 1+t \geq 1+x$

$$= \int_x^0 \frac{1}{1+t} \left(\frac{x-t}{1+t} \right)^n dt = \left(\frac{0-x}{1+0} \right)^n$$

Majorer tout

Soit $t \neq -1$, on a

$$\frac{t-x}{1+t} = \frac{(1+t)-x-1}{1+t} = 1 - \frac{x+1}{1+t}$$

OFAA $1+t$

$$\frac{1}{1+t}$$

• Rq: $t \mapsto \frac{t-x}{1+t}$ est donc (≥ 0) et $\hat{I}$

• $\hat{I} \in [x, 0]$, on a $1+t \geq 1+x > 0$ et $1+t \leq 1$
donc $\frac{1}{1+t} \geq 1$

$$\text{Donc } \frac{t-x}{1+t} \leq 1 - (x+1) = -x = |x|$$

Ainsi, $\forall t \in [x, 0]$, $\left| \frac{x-t}{1+t} \right|^n \leq |x|^n \text{ car } \left| \frac{1}{1+t} \right|^n$ sur $\mathbb{R}_+$

$$\text{Donc } |I_n^{[x]}| \leq \int_x^0 \frac{1}{1+t} |x|^n dt = |x|^n \int_x^0 \frac{1}{1+t}$$

$$= |x|^n [\ln(1+t)]_x^0 = -|x|^n \ln(1+x)$$

$$= |x|^n \ln\left(\frac{1}{1+x}\right)$$

$\downarrow$ car $|x| < 1$

0

Question :

Ainsi : $\forall x \in]-1, 1[$, $\sum_n \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \xrightarrow{CV}$.

Qu'en est-il pour $x = -1$?

On retrouve $-\sum_n \frac{1}{n}$ qui Div.

h) La nature d'une série ne dépend pas de ses
iers termes

Prop: Soient $(u_n)_n, (w_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Alors :

$u_n = w_n$ APCR $\Rightarrow \sum_n u_n$ et $\sum_n w_n$ ont
la même nature (CV ou Div)

D/ $\oplus$ • $S_n := \sum_{k=0}^n u_k$ et $T_n := \sum_{k=0}^n w_k$

• On fixe $N_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_0, u_n = w_n$.

• Soit $n \geq N_0$. On a

$$S_n = \sum_{k=0}^{N_0-1} u_k + \sum_{k=N_0}^n \underbrace{u_k}_{= w_k}$$

$$= S_{N_0-1} + \left(\sum_{k=0}^n w_k - \sum_{k=0}^{N_0-1} w_k \right)$$

$$= (S_{N_0-1} - T_{N_0-1}) + T_n$$

* Donc

$$\begin{cases} (S_n)_n \xrightarrow{CV} \Rightarrow (T_n)_n \xrightarrow{CV} \\ (T_n)_n \xrightarrow{CV} \Rightarrow (S_n)_n \xrightarrow{CV} \end{cases}$$

5) Reste d'une série convergente

a) def^o

Prop-Def^o: Soit $\sum_n u_n$ une série convergente. Alors

1) Si: $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{k \geq n+1} u_k$ converge

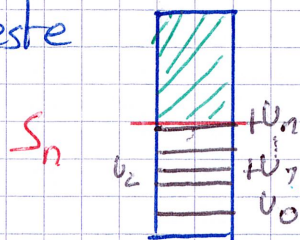
2) La somme est appelée reste d'indice n
de $\sum_k u_k$

3) On la note en gal: R_n . On a aussi

$$R_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$$

D/ 1) Les séries $\sum_{k \geq 0} u_k$ et $\sum_{k \geq n+1} u_k$ ne diffèrent que par leurs premiers termes. Elles ont donc m nature

Rq: L'idée du reste



b) Faits - $\mathbb{R}^x$ fondamentaux

On note $\oplus$: $\sum_n u_n$ Série supposée CV,

$$\bullet S_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

$$\bullet S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

$$\bullet R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$$

Fait - $\mathbb{R}^x$: $S_n + R_n = S$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixe

D/ Soit $N \geq n+1$. On note $T_N := \sum_{k=n+1}^N u_k$

I idée: faire $N \rightarrow \infty$

$$\bullet \text{ On a } T_N + S_n = S_N$$

$\bullet$ À la limite qd $N \rightarrow \infty$, on a

$$R_n = \left\{ \left(\lim_{N \rightarrow \infty} T_N \right) + S_n = \left(\lim_{N \rightarrow \infty} S_N \right) \right\} = S$$

Fait - $(R^x)^\infty_2$

$$R_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

D/ On a $\forall n, R_n + S_n = S$

Donc $\forall n, R_n = S - S_n$

Or $S - S_n \rightarrow 0$ ■

6) Opérations sur les séries convergentes

Prop[⊕] :

$$\left. \begin{array}{l} 1) \sum v_n \xrightarrow{CV} \\ \sum w_n \xrightarrow{CV} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum (v_n + \lambda w_n) \xrightarrow{CV}$$

2) Dans ce cas, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (v_n + \lambda w_n) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n \right) + \lambda \left(\sum_{n=0}^{\infty} w_n \right)$$

D/ (AF) ■

Prop : ($K = \mathbb{C}$) . Soit $(z_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

$$1) \text{ On a : } \sum_n z_n \xrightarrow{CV} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_n \operatorname{Re}(z_n) \xrightarrow{CV} \\ \sum_n \operatorname{Im}(z_n) \xrightarrow{CV} \end{cases}$$

$$2) \text{ Ds ce cas, on a } \sum_{n=0}^{\infty} z_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re}(z_n) \right) + i \left(\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im}(z_n) \right)$$

D/ (AF) ■

7) Etude des suites via les séries



Idees:

- une suite peut être vue comme une série,
- Ainsi, les techniques pour les séries peuvent s'appliquer aux suites.

• Soit $(U_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

• On note $\textcircled{T} \quad \sigma_n := U_n - U_{n-1} \text{ si } n \in \mathbb{N}^*$

Prop:

La suite $(U_n)_n$ et la série $\sum_{n \geq 1} \sigma_n$ ont la même nature. (CV ou DV)

D/ • On note $\textcircled{T} \quad S_n = \sum_{k=0}^n \sigma_k$

• On a $\textcircled{T} \quad S_n = \sum_{k=1}^n U_k - U_{k-1} = U_n - U_0$

• Ainsi: $\sum_{n \geq 1} \sigma_n \xrightarrow{CV} \Leftrightarrow (S_n)_{n \geq 1} \xrightarrow{CV}$

$\Leftrightarrow (U_n)_n \xrightarrow{CV} \quad \blacksquare$

8) Séries grossièrement divergentes

a) terme g^{dl} des séries CV

Prop: $\sum_n u_n \xrightarrow{CV} \Rightarrow u_n \rightarrow 0$

D/ • Oseq $\sum_n u_n \xrightarrow{CV}$

• Ainsi : $(S_n)_n \xrightarrow{CV}$

• Fixons donc $p \in \mathbb{K}$ tq $S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p$

• Par extract⁰ : $S_{n+1} \rightarrow p$

• Donc $S_{n+1} - S_n \rightarrow 0$

• I.e $u_{n+1} \rightarrow 0$

• Donc $u_n \rightarrow 0$ ■

b) Ctrex

Prop $\square$

$u_n \rightarrow 0 \not\Rightarrow \sum_n u_n \xrightarrow{CV}$ en g^{dl}

D/ La série $\sum_n \frac{1}{n}$ converge ■

c) série grossièrement divergente

Déf°: On dit que $\sum_n u_n$ est grossièrement divergente Δ si $u_n \not\rightarrow 0$

Ex: $\sum_n (-1)^n$ est grossièrement div car
 $(-1)^n \not\rightarrow 0$

Appl: cat°:

Si $x \in \mathbb{R}$, on considère la série $\sum_n \frac{(-1)^n}{n} x^n$:
C'est une série paramétrée par $x \in \mathbb{R}$

Ex: pour $x = 1$ on a $\sum \frac{(-1)^n}{n}$
 $x = -1$ ——— $\sum \frac{1}{n}$

Fait: $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sum_n \frac{(-1)^n x^n}{n} \xrightarrow{CV} \right\} =]-1, 1]$

D/D Cf + haut

C: $-1 \in \text{Conv.}$

* Soit $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$: mg $x \notin \text{conv}$

On a $|x| > 1$

• On a $\left| \frac{(-1)^n x^n}{n} \right| = \frac{|x|^n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$

par croissance comparée car $|x| > 1$

• Donc $\sum_n \frac{(-1)^n}{n} x^n$ est grossièrement divergente ■

g) Séries géométriques

Déf : Une série géométrique c'est une série de la forme

$$\sum_n x^n \quad \text{où } x \in \mathbb{C}$$

Prop : Soit $x \in \mathbb{C}$, On a :

1) $\sum_n x^n \xrightarrow{CV} \iff |x| < 1$

2) Dans ce cas, on a : $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

D/ 1) $(\Rightarrow) \text{ et } (\Leftarrow)$

$$\sum_n x^n \xrightarrow{CV} \Rightarrow x^n \rightarrow 0 \Rightarrow |x| < 1$$

$$(\Leftarrow) \text{ et } (\Leftarrow) \quad S_n := \sum_{k=0}^n x_k$$

Osq $|x| < 1$

Donc $(x \neq 1)$

On a $(\text{SG } x \neq 1)$

$$\text{On a } S_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

⌋ $|d| < 1$, on a

$$d^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 ; \text{ donc } \frac{d^{n+1}}{1-d} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{Donc } S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1-d}$$

$$\text{Ainsi, on a 2) : } \sum_{n=0}^{\infty} d^n = \frac{1}{1-d} \blacksquare$$

II !! Comparaison séries / intégrales

1) Formule de comparaison série / intégrale

Prop: Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ où $a, b \in \mathbb{N}$ et $a < b$.

Où f décroissante et continue

Alors :

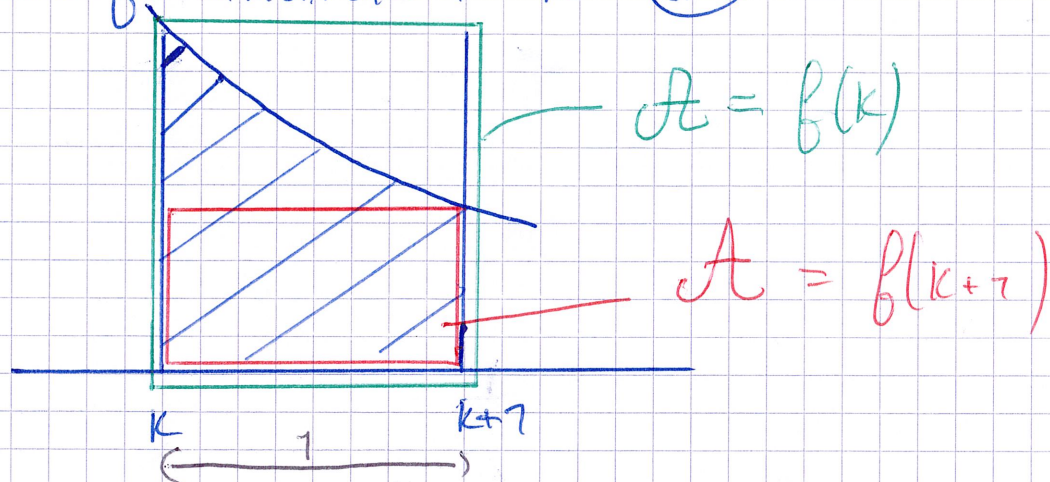
$$\sum_{k=a}^b f(k) \leq \int_a^b f(t) dt$$

$$f(b) + \int_a^b f(t) dt \leq \sum_{k=a}^b f(k) \leq \int_a^b f(t) dt + f(a)$$

Rq: La formule est éventuellement à connaître.

Mais : C'est surtout la technique qui est à connaître.

D/  Idée fondamentale : le $\odot^n$



Soit $k \in [a; b-1]$ Mg

$$f(k-1) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k) \quad (*)_k$$

$\hat{C} f \downarrow$ sur $[k, k+1]$, on a :

$$\forall t \in [k, k+1], \quad f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$$

En intégrant (DLBS), on a

$$\underbrace{\int_k^{k+1} f(k+1) dt}_{= f(k+1)} \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \underbrace{\int_k^{k+1} f(k) dt}_{f(k)}$$

"Retournons" $(*)_k$: Soit $k \in [a+1, b-1]$.

On a d'après $(*)_k$: $\int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k)$

d'après $(*)_{k-1}$: $f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt$

• Bilan : on a mg $\forall k \in [a+1; b-1]$,

$$\int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt$$

• Donc, en sommant :

$$(1) \quad \sum_{k=a+1}^{b-1} \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \sum_{k=a+1}^{b-1} f(k) \leq \sum_{k=a+1}^b \int_{k-1}^k f(t) dt$$

$$= \int_{a+1}^b f(t) dt \quad = \int_a^{b-1} f(t) dt$$

De (1), on a $f(a)$

$$(2) \quad \int_a^{a+1} f(t) dt \leq f(a) \leq f(a) \text{ d'après } (*)_a$$

et (3) $f(b) \leq f(b) \leq \int_{b-1}^b f(t) dt$ d'après $(*)_{b-1}$

En sommant (1), (2), (3) : on conclut ■

2) Séries de Riemann

a) déf

Def : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série de Riemann de paramètre α est

$$\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$$

Rq : • On peut aussi la définir si $\alpha \in \mathbb{C}$ via
$$n^\alpha := e^{\alpha \ln(n)} = \exp_{\mathbb{C}}(\alpha \ln(n))$$

• écrivons $\alpha = \alpha + i\beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

On a
$$n^\alpha = n^\alpha \times \underbrace{n^{i\beta}}_{= e^{(\ln(n) i\beta)}}$$

$$\in \mathbb{U}$$

Donc $|n^\alpha| = n^{\operatorname{Re}(\alpha)}$

Ex :

• $\sum_n \frac{1}{n}$

• Si $\alpha \leq 0$, $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ n'a pas intérêt car elle est grossièrement divergente

• Pour $\alpha = 0$: c'est $\sum_n 1$

• Pour $\alpha = -1$: c'est $\sum_n n$

• Pour $\alpha = 2$, cas particulier important : $\alpha = 2$; $\boxed{\sum_n \frac{1}{n^2}}$

• Question : CNS sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que

$$\sum_n \frac{1}{n^\alpha} \xrightarrow{CV} ?$$

b) Le critère de Riemann

Prop

$$\sum_n \frac{1}{n^\alpha} \xrightarrow{CV}, \quad (\Leftrightarrow) \quad \alpha > 1$$

Applications

- $\sum \frac{1}{n^2} \xrightarrow{CV}, \quad (\alpha = 2)$
- $\sum \frac{1}{n!} \xrightarrow{Div}, \quad (\alpha = \frac{1}{2})$
- $\sum \frac{1}{n \sqrt{n}} \xrightarrow{CV}, \quad (\alpha = \frac{3}{2})$

Rq : Pour l'instant

$\sum_n \frac{1}{n \sqrt{n}}$ est la série $\xrightarrow{CV}$ dont le terme

g_{nl} tend le $\ominus$ rapidement vers 0

(mieux : $\sum_n \frac{1}{n^{1+10^{-6}}} \xrightarrow{CV}$ car $1+10^{-6} > 1$)

D/ • Déjà, si $\alpha = 1$ on a bien $\sum_n \frac{1}{n} \xrightarrow{Div}$

Rq $a < 1 \Rightarrow \sum_n \frac{1}{n^a}$ Div

Osg $a < 1$

Idee : En gros de dire que

$$\frac{1}{n^a} \geq \frac{1}{n}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Comme $n \geq 1$ et $1-a > 0$, on a

$$n^{1-a} \geq 1$$

Donc $\frac{1}{n^a} \geq \frac{1}{n}$

• Donc $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^a} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \longrightarrow +\infty$
(cf ⊕ haut)

Ainsi, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^a} \longrightarrow +\infty$

Rq : autre

$$\hat{C} \quad a < 1, \left| \frac{1}{n} \right| = o\left(\frac{1}{n^a}\right)$$

Donc $\left| \frac{1}{n} \right| \leq \left| \frac{1}{n^a} \right|$ APCR

i.e. $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^a}$ APCR ■

Rq ^(T) $a_n = o(b_n) \Rightarrow |a_n| \leq |b_n|$ APCR

$$\left(\Rightarrow_{\text{recurs}} \forall \varepsilon > 0, |a_n| \leq \varepsilon |b_n| \text{ APCR} \right)$$

$$\underline{D/} \quad \frac{a_n}{b_n} \longrightarrow 0 \quad \text{Donc} \quad \frac{|a_n|}{|b_n|} \leq \gamma \text{ APCR}$$

$$\text{I.e. } |a_n| \leq |b_n| \text{ APCR}$$

$$\bullet \text{ Mg } d > 1 \Rightarrow \sum_n \frac{1}{n^d} \xrightarrow{\text{CV}}$$

Soit $d > 0$ pour commencer.

Idee : On fait une comparaison $\Sigma - \int$

Md notation Si $n \geq 1$, on note

$$\int_n^{[a]} := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^d}$$

$$\text{et } f_0: \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$t \longmapsto \frac{1}{t^d}$$

$$\bullet \hat{C} \quad d > 0 \quad \text{on a} \quad f_0 \searrow \searrow$$

$\bullet$ Par comparaison $\Sigma - \int$, on a

$$\frac{1}{n^d} + \int_1^n f_0(t) dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^d} \leq \int_1^n f_0(t) dt + \frac{1}{1^d}$$

$$\bullet \text{ On a } \int_1^n \frac{1}{t^d} dt \stackrel{\text{Md notation}}{=} \int_1^n t^{-d} dt$$

!
si $d \neq 1$

$$= \left[\frac{t^{-d+1}}{-d+1} \right]_1^n =$$

$$\begin{cases} \frac{1}{1-d} \left[n^{1-d} - 1 \right] & \text{si } d \in]0, 1[\\ \frac{1}{d-1} \left[1 - \frac{1}{n^{d-1}} \right] & \text{si } d > 1 \end{cases}$$

• Si $\alpha = 1$:

$$\int_1^n \frac{1}{t} dt = \ln(n)$$

• CC1 : $O_n \alpha$:

$$\frac{1}{n^\alpha} + \int_1^n f_\alpha(t) dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_1^n f_\alpha(t) dt + \frac{1}{1^\alpha}$$

$$(1) \quad \frac{1}{n} + \ln(n) \leq \sum_n^{[1]} \leq \ln(n) + 1$$

$$\text{i.e.} \quad \frac{1}{n} + \ln(n) \leq H_n \leq \ln(n) + 1 \quad (1)$$

(2) Si $\alpha \in]0, 1[$

$$\frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \left(n^{1-\alpha} - 1 \right) \leq \sum_n^{[2]} \leq \frac{1}{1-\alpha} \left(n^{1-\alpha} - 1 \right) + 1$$

(3) Si $\alpha > 1$ $\frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{\alpha-1} \left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right) \leq \sum_n^{[3]} \leq \frac{1}{\alpha-1}$

$$\frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{\alpha-1} \left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right) \leq \sum_n^{[3]} \leq \frac{1}{\alpha-1} \left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right) + 1$$

Rq : Si $\alpha \leq 0$, $f_\alpha \uparrow$ et donc

$$1 + \frac{1}{1-\alpha} \left(n^{1-\alpha} - 1 \right) \leq \sum_n^{[4]} \leq \frac{1}{1-\alpha} \left(n^{1-\alpha} - 1 \right) + n^{-\alpha} \quad (4)$$

CC1: • Déjà, $\forall k, \frac{1}{k^a} \geq 0$, on a $(S_n^{[a]})_n \uparrow$

• Or si $a > 1$ On a, si $n \geq 1$:

$$S_n^{[a]} \leq \frac{1}{a-1} \left(1 - \frac{1}{n^{a-1}} \right) + 1 \leq \frac{1}{a-1} + 1$$

• Ainsi $(S_n^{[a]})$ est $\uparrow$ et majorée, elle converge.

• Donc $a > 1 \Rightarrow \sum_n \frac{1}{n^a} \xrightarrow{CV} \blacksquare$

Rq: on note

$$\zeta(a) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$$

$\hat{=}$ zêta (nd) mieux: ζ

On a :

$$\zeta :]1; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

C'est la fonction zêta de Riemann.

• On a $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ i.e. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

3) Compléments sur les séries de Riemann.

a) cas $\alpha = 1$

Prop : $H_n \sim \ln(n)$

D/ on a $\forall n \geq 1$,

$$\underbrace{\frac{1}{n} + \ln(n)}_{\sim \ln(n)} \quad H_n \leq \underbrace{\ln(n) + 1}_{\sim \ln(n)} \quad (\text{cf } \textcircled{a})$$

Par encadrement, $H_n \sim \ln(n)$ ■

b) Prop cas $\alpha < 1$

Prop : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{1-\alpha} n^{1-\alpha} \rightarrow +\infty$

D/ • Si $\alpha \in]0, 1[$, on a

et

$$\begin{aligned} S_n^{[\alpha]} &\sim \frac{1}{1-\alpha} n^{1-\alpha} & \sim n^{1-\alpha} \\ S_n^{[\alpha]} &\leq \boxed{\frac{1}{1-\alpha} (n^{1-\alpha} - 1) + 1} \\ S_n^{[\alpha]} &\geq \boxed{\frac{1}{1-\alpha} (n^{1-\alpha} - 1) + \frac{1}{n^\alpha}} \end{aligned}$$

$\rightarrow +\infty \qquad \rightarrow 0$

$$\frac{1}{n^\alpha} = o(n^{1-\alpha})$$

$$\sim \frac{1}{1-\alpha} n^{1-\alpha}$$

Par encadrement : $\textcircled{\text{OK}}$

• Si $d < 0$

$$(\dots) \geq S_n^{[d]} \geq (\dots), \text{ de m ok } \blacksquare$$

c) Cas $d \leq 0$

Prop : Soit $\alpha \geq 0$. On a

$$\sum_{k=1}^n k^\alpha \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

Ex : si $\alpha = 2$, on a $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
 $\sim \frac{2n^3}{6} = \frac{n^3}{3}$

on retrouve le résultat.

D/ on pose $\alpha := -d$

on a $\alpha \leq 0$

Donc, on a (h) $\forall n \geq 1$,

$$n^{-\alpha} + \frac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} \geq S_n^{[\alpha]} \geq \frac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} + 1$$

$$n^\alpha + \frac{n^{1+\alpha}-1}{1+\alpha}$$

$$\sim \frac{1}{n^{1+\alpha}}$$

car $n^\alpha = o(n^{1+\alpha})$ $\blacksquare$

$$\sum_{k=1}^n k^\alpha$$

$$\geq \frac{n^{1+\alpha}-1}{1+\alpha} + 1$$

$$\sim \frac{n^{1+\alpha}}{1+\alpha}$$

a) Cas $d > 1$.

Rq : Il est inespéré d'obtenir un équivalent de

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^d} !$$

En effet : $\sum_n \frac{1}{n^d} \xrightarrow{CV}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^d} > 1 \text{ donc}$$

un équivalent de $S_n^{[d]}$ serait $\zeta(d)$.

Idée . Dans ce cas, on cherche un équivalent du reste

On note $\oplus$

$$R_n^{[d]} := \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^d}$$

Prop :

$$R_n^{[d]} \sim \frac{1}{d-1} \frac{1}{n^{d-1}}$$

D/ (à retenir) Soient $n, N \in \mathbb{N}^*$ tq $n+1 \leq N$

$$\text{On } \left(\frac{1}{N^d} \right) + \int_{n+1}^N \frac{1}{t^d} dt \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^d} \leq \int_{n+1}^N \frac{1}{t^d} dt + \frac{1}{(n+1)^d}$$

$$\begin{matrix} \xrightarrow{\circ} \\ N \rightarrow \infty \end{matrix}$$

• bot : à la fin, faire $N \rightarrow \infty$

Calculons

$$\int_{n+1}^N \frac{1}{t^\alpha} dt = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_{n+1}^N$$

$$= \frac{1}{\alpha-1} \left(\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{N^{\alpha-1}} \right)$$

• C. $\alpha-1 > 0$, on a $\frac{1}{N^{\alpha-1}} \rightarrow 0$

• Donc $\int_{n+1}^N \frac{dt}{t^\alpha} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$

• On passe à la limite les inég. larges dans (*)

On obtient :

$$\frac{1}{\alpha-1} \underbrace{\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}}_{\sim \frac{1}{n^{\alpha-1}}} \leq R_n^{[\alpha]} \leq \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}} + \frac{1}{(n+1)^\alpha}$$

$$\underbrace{\frac{1}{(n+1)^\alpha}}_{\sim \frac{1}{n^{\alpha-1}}} \sim \frac{1}{n^{\alpha-1}} = o\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$$

$$\sim \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}} \qquad \sim \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

• DALL, $\hat{C}$ $R_n^{[\alpha]}$ est encadré par deux suites équivalentes l'une à l'autre, on a

$$R_n^{[\alpha]} \sim \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

h) Applicat°

Prop : $\forall d > 1, d^n = o(n!)$

D/ (exo) ■

III Critère de convergence

1) SATP

a) une notation :

Notation : On considère $\sum_n a_n$ une série à termes réels

Si $\forall n, a_n \geq 0$, on dit que $\sum_n a_n$ est à termes positifs :

on note # $\sum_n a_n$ SATP

Rq : De $\overline{\mathbb{R}}$, on note # $\sum_n a_n$ SATP APCR si $a_n \geq 0$ APCR

b) L'alternative pour les SATP

Soit $\sum_n a_n$ une SATP

on note $\oplus$ $S_n := \sum_{k=0}^n a_k$

Prop :

1) $(S_n)_n$ croissante

2) ou bien $(S_n)_n$ est majorée et alors on a

$\sum_n a_n \xrightarrow{CV}$ ou bien $(S_n)_n$ n'est pas majorée

et on a alors
$$\begin{cases} S_n \rightarrow +\infty \\ \sum_n a_n \text{ Div} \end{cases}$$

Bilan : Si $\sum_n a_n$ est une SATP (APCR)

alors pour mq $\sum_n a_n \xrightarrow{CV}$

il suffit de majorer $(S_n)_n$

c) critère de $\xrightarrow{CV}$ par majoration des SATP.

Prop :

Soit $\sum_n a_n$ une SATP (APCR)

Soit $\sum_n b_n$ une série. Alors

$$\left. \begin{array}{l} a_n \leq b_n \text{ (APCR)} \\ \sum_n b_n \xrightarrow{CV} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_n a_n \xrightarrow{CV}$$

D/ • $Osq \sum_n a_n$ SATP APCR

• $Osq \sum_n a_n \leq b_n$ APCR

Fixons donc $N_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_0, a_n \leq b_n$

• $Osq \sum_n b_n \xrightarrow{CV}$

• Fixons $N_1 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_1, a_n \geq 0$

• Posons $N_2 := \max(N_0, N_1)$

① On a $\forall n \geq N_2, \sum_{k=N_2}^n b_k \leq \sum_{k=N_2}^{\infty} b_k$

② Soit $n \geq N_2$

On a $\sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^{N_2-1} a_k + \sum_{k=N_2}^n a_k$

$\leq \sum_{k=0}^{N_2-1} a_k + \sum_{k=N_2}^n b_k$

$\leq \sum_{k=0}^{N_2-1} a_k + \sum_{k=N_2}^{\infty} b_k$ ne dépend pas de n

où $S_{N_2-1} := \sum_{k=0}^{N_2-1} a_k$

Donc $\left(\sum_{k=0}^n a_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée APCR donc est majorée

• D'après b), $\sum_n a_n \xrightarrow{CV}$ ■

2) Nature des SATP à termes généraux équivalents

a) le résultat

Prop $\square$

Soient $\sum_n a_n$ et $\sum_n b_n$ SATP (APCR)

Alors $a_n \sim b_n \Rightarrow \sum_n a_n$ et $\sum_n b_n$ ont
m même nature

D/O $\sum_n a_n$ et $\sum_n b_n$ SATP, $\text{Oseq } a_n \sim b_n$

• Si $b_n \neq 0$ APCR, on a $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1$

• En particulier $\frac{a_n}{b_n} \leq 2$ APCR

• $\hat{=}$ $\forall n, b_n \geq 0$, on a donc

$$a_n \leq 2b_n \text{ APCR}$$

• Ainsi, $\hat{=}$ $\sum a_n$ SATP, on a :

$$\sum_n b_n \xrightarrow{CV} \Rightarrow \sum_n a_n \xrightarrow{CV}$$

• Si on n'a pas $b_n \neq 0$ APCR,

la cel (*) est encore vraie

b) Exemple

OCSO la serie $\sum_n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \cdot \left(e^{\frac{1}{n+\sqrt{n}}} - 1\right)$

• On a $d_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{n+\sqrt{n}}$

car $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \rightarrow 0$ donc $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$

et car $\frac{1}{n+\sqrt{n}} \rightarrow 0$ donc $e^{\frac{1}{n+\sqrt{n}}} - 1 \sim \frac{1}{n+\sqrt{n}}$

• $\hat{C} \frac{1}{n+\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n}$, on a $d_n \sim \frac{1}{n\sqrt{n}}$

Astuce: On a $\forall n, \frac{1}{n\sqrt{n}} > 0$ $\hat{C} d_n \sim \frac{1}{n\sqrt{n}}$,

on a DALC $d_n > 0$ APCR

Donc le théorème de convergence des séries par équivalence des termes généraux s'applique:

On a $\sum_n d_n \xrightarrow{CV} \Leftrightarrow \sum_n \frac{1}{n\sqrt{n}} \xrightarrow{CV}$

• Or, d'après le critère de Riemann, $\hat{C} \frac{3}{2} > 1$, $\frac{1}{n^{3/2}}$

• CC: $\sum_n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \left(e^{\frac{1}{n+\sqrt{n}}} - 1\right) \xrightarrow{CV}$

Rq: il est insensé ++ de calculer

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \left(e^{\frac{1}{n+\sqrt{n}}} - 1\right)$$

d) Nature de $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

Rq: À la fin du cours, on pourra utiliser le CSA

Idée/R^x/astuce

Je regroupe les termes 2 à 2

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$$

Rq: Ainsi

$$S_n = \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} \right) - \dots$$

• On soit DALC : $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}}$ Div

$$\text{On a } S_{2n} = \sum_{p=1}^n \frac{(-1)^{2p-1}}{\sqrt{2p-1}} + \frac{(-1)^{2p}}{\sqrt{2p}}$$

$$= \sum_{p=1}^n \frac{1}{\sqrt{2p}} - \frac{1}{\sqrt{2p-1}}$$

$$= \sum_{p=1}^n \frac{\sqrt{2p-1} - \sqrt{2p}}{\sqrt{2p} \sqrt{2p-1}}$$

conjugue

$$= \sum_{p=1}^n \frac{(2p-1) - (2p)}{\sqrt{2p} \sqrt{2p-1} (\sqrt{2p} + \sqrt{2p-1})}$$

$$= \sum_{p=1}^n \frac{-1}{\sqrt{2p} \sqrt{2p-1} (\sqrt{2p} + \sqrt{2p-1})}$$

~ ?

$$\text{or } \frac{1}{\sqrt{2P-1} \sqrt{2P-1} (\sqrt{2P-1} + \sqrt{2P-1})} \sim \frac{1}{2(\sqrt{2P-1})^3} = \frac{1}{4\sqrt{2} P^{3/2}}$$

$$\text{Or } \forall P > 1, \frac{1}{4\sqrt{2} P^{3/2}} > 0$$

$$\sum \frac{1}{P^{3/2}} \xrightarrow{CV},$$

d'après le critère de Riemann.

• Donc d'après le critère de CV, des SATP à termes g^{aux} équivalents,

$$\text{on a } \sum_P \frac{(-1)^{2P-1}}{\sqrt{2P-1}} + \frac{(-1)^P}{\sqrt{2P-1}} \xrightarrow{CV},$$

Fixons donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tq $S_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda$

$$\text{or } \frac{(-1)^{2n+1}}{\sqrt{2n+1}} \longrightarrow 0$$

$$\text{Donc } S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{(-1)^{2n+1}}{\sqrt{2n+1}} \longrightarrow \lambda$$

$$\hat{C} \quad S_{2n} \longrightarrow \lambda \text{ et } S_{2n+1} \longrightarrow \lambda$$

$$\text{DALL} : \text{on a } S_n \longrightarrow \lambda$$

$$\underline{\text{Faît}} : \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{CV},$$

e) un ctrex

On cherche $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ tq

• $a_n \sim b_n$

• $\sum_n a_n \xrightarrow{CV}$, Mais $\sum_n b_n \xrightarrow{Div}$

Lemme - R^X (AC) (T)

$$\left. \begin{array}{l} \sum_n U_n \xrightarrow{CV} \\ \sum_n W_n \xrightarrow{Div} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_n U_n + W_n \xrightarrow{Div}$$

D/ Orsq $\sum_n U_n \xrightarrow{CV}$ et $\sum_n W_n \xrightarrow{Div}$,

ORPA et Orsq $\sum_n U_n + W_n \xrightarrow{CV}$

Donc, $\hat{c}$ la somme de deux séries $\xrightarrow{CV}$

est $\xrightarrow{CV}$, on a

$$\sum_n (U_n + W_n) - U_n \xrightarrow{CV}$$

ie $\sum_n W_n \xrightarrow{CV}$ c'est absurde ■

Critex :

On prend $\textcircled{+}$

$$\begin{cases} a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \\ b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \end{cases}$$

$$\hat{C} \quad \frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{on a} \quad \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

$$\hat{C} \quad \sum_n \frac{1}{n} \xrightarrow{\text{Div}}, \quad \text{et} \quad \hat{C} \quad \sum_k \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \xrightarrow{\text{CV}},$$

$$\text{on a} \quad \sum_n b_n \xrightarrow{\text{Div}},$$

3) DA de la série harmonique

$$\text{On note } \textcircled{+} \quad H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

a) Premier terme

Prop : $H_n \sim \ln(n)$

D/ ok ■

Lemme : $\frac{1}{n} + \ln(n) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$

D/ cf $\textcircled{+}$ haut

b) Deuxième terme

On pose $\textcircled{+}$ $a_n := H_n - \ln(n)$

On cherche un équivalent simple de $(a_n)_n$

D'après le lemme, on a $\forall n \geq 1$

$$\frac{1}{n} \leq a_n \leq 1$$

Donc : $\forall n, a_n \in [0, 1]$

Donc $(a_n)_n$ est bornée

I.e $a_n = O(1)$

$\textcircled{\text{exo}}$ $u_n \rightarrow +\infty \Rightarrow \sqrt{u_n} = o(u_n)$

Prop : $H_n = \ln(n) + O(1)$

c) amélioration du deuxième terme



Astuce Étudions la monotonie de $(a_n)_n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On calcule

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= (H_{n+1} - \ln(n+1)) - (H_n - \ln(n)) \\ &= (H_{n+1} - H_n) + (\ln(n) - \ln(n+1)) \\ &= \frac{1}{n+1} \textcircled{R^x} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\text{Or } \forall x > -1, \ln(1+x) \leq x$$

$$\text{Donc } a_{n+1} - a_n \leq 0$$

$$\underline{\text{cc1}} : (a_n)_n \searrow$$

$$\hat{=} (a_n)_n \text{ bornée}$$

$$(a_n)_n \xrightarrow{\text{CV}}$$

Notation : On note

$$\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

C'est la constante d'Euler

Bilan : $\textcircled{T}$

$$\bullet H_n = \ln(n) + a_n$$

$$\bullet a_n \longrightarrow \gamma$$

$$\bullet \text{ie } a_n = \gamma + o(1)$$

Prop :

$$H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

$$(\gamma \approx 0,58)$$

d) troisième terme

Idee : écrire a_n $\hat{=}$ une série

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\text{On a } a_n = H_n - \ln(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt$$

$$\text{On a } \ln(n) = \int_1^n \frac{dt}{t} = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$$
$$= \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} - \int_1^n \frac{dt}{t}$$
$$= \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} - (\ln(n+1) - \ln(1))$$
$$= \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Donc :

$$a_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \right) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

• $\hat{C} \quad a_n \longrightarrow \gamma$ et $\hat{C} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \longrightarrow 0$

on a $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \right) \longrightarrow \gamma$

• I.e :

Fait : La somme $\sum_n \frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \xrightarrow{CV}$

et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} = \gamma$

• Trame suivant du DA

On a $a_n \longrightarrow \gamma$

On pose $\textcircled{+} \quad \varepsilon_n := a_n - \gamma$

D'après $(*)$, on a

$$\varepsilon_n = - \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \right) + \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

Soit $k \geq 1$

On a $\left(\frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \right)$

$= \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{t} \right) dt$

OFAA le fait q t est proche de $\mathbb{R} \quad k$

cdv $t = k + \theta$ ($dt = d\theta$)

Si $\theta \in [0, 1]$, on a $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+\theta} = \frac{\theta}{k(k+\theta)}$

et $\frac{\theta}{k(k+1)} \leq \frac{\theta}{k(k+\theta)} \leq \frac{\theta}{k^2}$

Donc $\frac{1}{2} \frac{1}{k(k+1)} \leq \int_0^1 \frac{\theta}{k(k+\theta)} d\theta \leq \frac{1}{2} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{2} \frac{1}{k(k-1)}$

n Coup de bol :

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

Soit $N \geq n$. On a

$$\underbrace{\frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}}_{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1} \right)} \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^N \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right)}_{= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N} \right)}$$

quand $N \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{2n}$$

cc : $\hat{\varepsilon}_n = - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

Et $\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)$
 $= \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

DL : $\frac{1}{1+h} = 1 - h + h^2 - h^3 + o(h^2)$

cc : $-\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \geq \varepsilon_n \geq -\frac{1}{2n}$
 $+ \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$
 $= \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

cc : $\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \geq \varepsilon_n \geq \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Prop

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Rq : Soyez attentifs, l'année prochaine vous redémontrerez ce résultat à l'aide de techniques $\oplus$ intelligentes

IV Séries absolument convergentes.

1) déf

Def°: On dit que la série $\sum_n a_n$ est absolument convergente Δ ssi $\sum_n |a_n| \xrightarrow{CV}$

On note $\# \sum_n u_n \xrightarrow{ACV}$

Ex: $\left. \begin{array}{l} \sum a_n \text{ SATP (APCR)} \\ \sum a_n \xrightarrow{CV} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_n a_n \xrightarrow{ACV}$

° Si $\sum u_n \xrightarrow{CV}$ et si $\sum_n |u_n| \xrightarrow{Div}$,
on dit que $\sum_n u_n$ est semi-convergente.

Ex: $\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$ est semi-convergente.

(exo) Soit $x \in]-1, 1[$

Ilq $\sum \frac{(-1)^n}{n} x^n \xrightarrow{ACV}$

2) Exemples

ok

3) $ACV \Rightarrow CV$

Th : Soit $\sum_n u_n$ une série (à coeffs $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

Alors :

$$\sum_n u_n \xrightarrow{ACV} \Rightarrow \sum_n u_n \xrightarrow{CV}$$

D/ cas $\mathbb{R}$

• Soit $(a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tq $\sum_n |a_n| \xrightarrow{CV}$

• Ilq $\sum_n a_n \xrightarrow{CV}$

💡 Astuce : on sépare les a_n en deux groupes
les ≥ 0 et les < 0

On note si $x \in \mathbb{R}$ $x^+ := \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

et

$$x^- := \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Lemme :

$$\bullet \forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq x^+ \leq |x|$$

$$\bullet \forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq -x^- \leq |x|$$

D/ok par disjonction de cas ■

Lemme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x = x^+ + x^-$$

D/ok ■

Soit $n \in \mathbb{N}$

Je note

$$\begin{aligned} S_n &:= \sum_{k=0}^n a_k \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^n a_k^+}_{T_n} + \underbrace{\sum_{k=0}^n a_k^-}_{U_n} \end{aligned}$$

Fait : $(T_n)_n \xrightarrow{CV}$

D/ $\sum_n a_n^+$ SATP

$$\bullet \text{ De } \oplus, \forall n, \quad 0 \leq a_n^+ \leq |a_n|$$

$$\bullet \sum_n |a_n| \xrightarrow{CV}$$

$$\text{DALC : } \sum_n a_n^+ \xrightarrow{CV}$$

h) inégalité triangulaire

Prop : Soit $\sum_n u_n$ une série ACV

$$\left| \sum_n u_n \right| \leq \sum_n |u_n|$$

D/ Soit $N \in \mathbb{N}$

On a (*) $\left| \sum_{n=0}^N u_n \right| \leq \sum_{n=0}^N |u_n|$ par inégalité triang.

Or $\sum_{n=0}^N u_n \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_n$

Rappel $\oplus$ $(\mathbb{R}^*)$

$$z_n \rightarrow \lambda \Rightarrow |z_n| \rightarrow |\lambda|$$

D/ $\oplus$

on a donc $\begin{aligned} \operatorname{Re}(z_n) &\rightarrow \operatorname{Re}(\lambda) \\ \operatorname{Im}(z_n) &\rightarrow \operatorname{Im}(\lambda) \end{aligned}$

Donc, par opération sur les limites

$$\operatorname{Re}(z_n)^2 + \operatorname{Im}(z_n)^2 \rightarrow \operatorname{Re}(\lambda)^2 + \operatorname{Im}(\lambda)^2 = |\lambda|^2$$

Or $a_n \rightarrow A \Rightarrow \sqrt{a_n} \rightarrow \sqrt{A}$

Donc

$$\sqrt{\operatorname{Im}(z_n)^2 + \operatorname{Re}(z_n)^2} \rightarrow |\lambda|$$

ie $|z_n| \rightarrow |\lambda|$

D/2

Rappel : $||a| - |b|| \leq |a - b| \leq |a| + |b|$

$$||z_n| - |\lambda|| \leq |z_n - \lambda| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Par contrôle, on a donc $|z_n| \rightarrow |\lambda|$ $\blacksquare_2$

(...)

Donc
$$\left| \sum_{n=0}^N u_n \right| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \left| \sum_{n=0}^{\infty} u_n \right|$$

• De ④, on a :

$$\sum_{n=0}^N |u_n| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$$

• Donc, en passant à la limite dans (*), on a

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| \quad \blacksquare$$

5) Critère d'ACV

Prop

Soient $\sum_n u_n$ et $\sum_n w_n$ des séries

$$\text{Alors : } \left. \begin{array}{l} 1) \quad u_n = o(w_n) \\ \sum w_n \text{ ACV} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_n u_n \text{ ACV}$$

$$2) \text{ Meux } \left. \begin{array}{l} u_n = O(w_n) \\ \sum w_n \text{ ACV} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_n u_n \text{ ACV}$$

Fait: $(U_n)_n \xrightarrow{CV}$

D/ De m car

$$\bullet \sum_n -a_n^- \text{ SATP}$$

$$\bullet \forall n, 0 \leq -a_n^- \leq |a_n|$$

$$\bullet \sum_n |a_n| \xrightarrow{CV}$$

DALC: $\sum_n -a_n^- \xrightarrow{CV}$

Donc $\sum_n a_n^- \xrightarrow{CV}$ $\blacksquare$

CL: $(S_n)_n \xrightarrow{CV}$

i.e. $\sum_n a_n \xrightarrow{CV}$ $\blacksquare \mathbb{R}$

$$\frac{D/\mathbb{C}}{Mq} \cdot Osg \quad \sum_n |u_n| \underline{CV},$$

$$\cdot Mq \quad \sum_n u_n \underline{CV}$$

DALC, il suffit de mq

$$\begin{cases} \sum \operatorname{Re}(u_n) \underline{CV}, \\ \sum \operatorname{Im}(u_n) \underline{CV}, \end{cases}$$

$$\cdot Mq \quad \sum_n \operatorname{Re}(u_n) \underline{CV},$$

$\textcircled{n}$ Idée / Astuce / $\mathbb{R}^x$

$$Mq \quad \sum_n \operatorname{Re}(u_n) \xrightarrow{ACV}, \quad \text{ie } Mq \quad \sum_n |\operatorname{Re}(u_n)| \underline{CV}$$

$$\textcircled{\mathbb{R}^x} \quad \forall z \in \mathbb{C}, |\operatorname{Re}(z)| \leq |z| \quad \textcircled{AF} \rightarrow \textcircled{d^n}$$

$$\cdot \hat{C} \quad \forall n, |\operatorname{Re}(u_n)| \leq |u_n|$$

$$\hat{C} \quad \sum_n |u_n| \underline{CV}, \quad \text{on a } \sum_n |\operatorname{Re}(u_n)| \underline{CV},$$

• D'après le cas réel, on a donc

$$\boxed{\sum_n \operatorname{Re}(u_n) \underline{CV},}$$

$$\cdot \text{De } \overline{m}, \quad \sum_n \operatorname{Im}(u_n) \underline{CV},$$

$$\cdot \text{Donc DALC, } \sum_n u_n \underline{CV}, \quad \blacksquare$$

Rq : On peut avoir $U_n = O(w_n)$ et
" $(U_n)_n$ dépasse $(w_n)_n$ "

Ex : $U_n = 5n^3 + 78n^2 + 105n + 246$

On a $U_n = O(n^3)$

D/ Évidemment $U_n = o(w_n) \Rightarrow U_n = O(w_n)$
(en effet, $\varepsilon_n \rightarrow 0 \Rightarrow (\varepsilon_n)_n$ bornée)

2) Orsq $U_n = O(w_n)$

Fixons donc $C \in \mathbb{R}_+$ et $N_0 \in \mathbb{N}$ tq

(*) $\forall n \geq N_0, |U_n| \leq C |w_n|$

• $\hat{C} \sum_n |w_n| \xrightarrow{CV}$ et $\hat{C} \sum_n |U_n|$ SATP et

d'après (*), on a

$$\sum |U_n| \xrightarrow{ACV}$$

$$\text{I.e. } \sum_n U_n \xrightarrow{ACV} \blacksquare$$

6) Contre-exemple

Prop [Ⓣ]

$$\left. \begin{array}{l} u_n = o(w_n) \\ \sum_n w_n \xrightarrow{CV} \end{array} \right\} \nrightarrow \sum u_n \xrightarrow{CV} \text{ " est F en g"al}$$

D/ On prend [Ⓣ] $w_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

$$u_n := \frac{1}{n}$$

On a $u_n = o(w_n)$, On a $\sum_n w_n \xrightarrow{CV}$

Mais $\sum_n u_n \xrightarrow{DVK} \blacksquare$

7) Critère de Riemann-Bertrand

Prop: Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors

$$\sum_n \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} \xrightarrow{CV}$$

$$\Leftrightarrow \alpha > 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)$$

D/ À retenir

On va procéder par comparaison

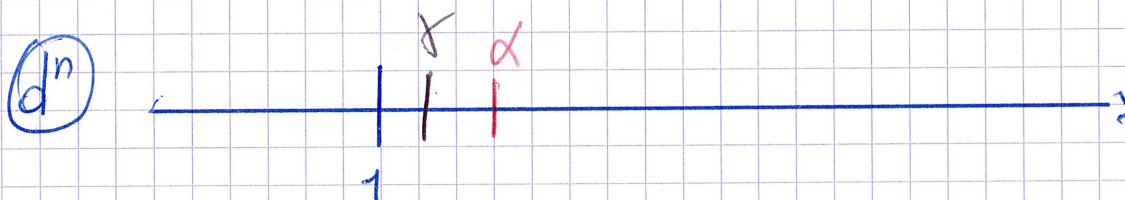
1er cas : Orq $\boxed{\alpha > 1}$

Ide : On veut q $\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^3} \rightarrow 0$ assez vite

Ie : On cherche à "coincer"

$\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^3}$ sous une suite dont on sait qu'elle " $\rightarrow 0$ suffisamment vite"

Rq : " $\frac{1}{n^\alpha}$ est coincé sous $\frac{1}{n^\beta}$ "
si $\alpha \geq \beta$



Fixons $\beta \in \mathbb{R}$ tq $1 < \beta < \alpha$
(par ex $\beta := \frac{\alpha+1}{2}$)

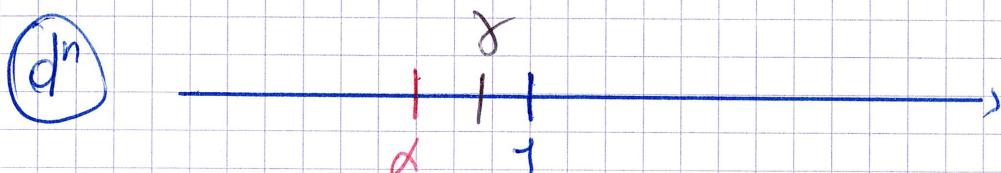
$$\text{On a } \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^3} = o\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$$

$$\frac{\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^3}}{\frac{1}{n^\beta}} = \frac{n^\beta}{n^\alpha \ln(n)^3} = \frac{1}{n^{\alpha-\beta} \ln(n)^3}$$

$$= \frac{\ln(n)^{-\beta}}{n^{\alpha-\gamma}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{car } \underline{\alpha - \gamma > 0}$$

et par croissance comparée

2^e cas : $0 < \alpha < 1$



Fixons $\delta \in \mathbb{R}$ tq $\alpha < \gamma < 1$

On a $\frac{1}{n^\delta} = o\left(\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}\right)$

D/ (AF)

ORPA et $0 < \alpha < 1$ $\sum_n \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} \xrightarrow{CV}$

$\hat{C} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ est > 0 APUR, on a

$$\sum_n \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} \xrightarrow{ACV},$$

Donc d'après le critère d'absolue convergence
par domination :

$$\sum_n \frac{1}{n^\delta} \xrightarrow{CV}, \quad \text{C'est absurde}$$

car $\sum_n \frac{1}{n^\delta} \xrightarrow{Div}$ d'après le critère de Riemann

CCL du cas 1 :

$$\text{On a } \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} = o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$$

or $\sum \frac{1}{n^\gamma} \xrightarrow{ACV}$ car $\gamma > 1$ et d'après le critère de Riemann.

D'après le critère d'ACV, par dominat° :

$$\sum_n \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} \xrightarrow{ACV} \text{ donc } \xrightarrow{CV} \blacksquare$$

3^e Cas : Orsq $\alpha = 1$

$$\text{Il q } \sum \frac{1}{n \ln(n)^\beta} \xrightarrow{CV} \Leftrightarrow \beta > 1$$

4^{er} Cas $\beta \leq 0$

On écrit $\beta = -\gamma$ avec $\gamma > 0$

$$\text{On a } \frac{1}{n \ln(n)^\beta} = \frac{\ln(n)^\gamma}{n}$$

$$\text{et } \frac{1}{n} = o\left(\frac{\ln(n)^\gamma}{n}\right)$$

$$\text{CCL : } \sum_n \frac{\ln(n)^\gamma}{n} \xrightarrow{DIV}$$

$$\text{D/ } \textcircled{AF}^{++}$$

$$\text{2^e Cas : } \beta = 0 \quad \textcircled{OK}$$

$$\text{D/ } \textcircled{AC}^{++} \quad \blacksquare$$

3^e Cas : Osg $\beta > 0$

Idee on fait de la comparaison $\Sigma - \int$

$$\text{Osgd } f:]1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \frac{1}{t \ln(t)^\beta}$$

• On a $\ln(\cdot) > 0$ et $\uparrow$ sur $]1, +\infty[$

• Donc $\ln(\cdot)^\beta > 0$ et $\uparrow$ _____

• Enfin $t \longmapsto t$ _____

$$\left. \begin{array}{l} \text{or } f > 0 \text{ et } \uparrow \\ g > 0 \text{ et } \uparrow \end{array} \right\} \Rightarrow f \times g > 0 \text{ et } \uparrow$$

cci : $\beta \downarrow \downarrow$

• Soit $n \geq 2$, on a

$$\frac{1}{n \ln(n)^\beta} \downarrow \int_2^n \frac{dt}{t \ln(t)^\beta} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)^\beta} \leq \boxed{\int_2^n \frac{1}{t \ln(t)^\beta} dt} + \frac{1}{2 \ln(2)^\beta}$$

I_n

R^x / Astuce

On reconnaît $u' u^{qgch}$

avec $u = \ln(\cdot)$ et $qgch = -\beta$

1er cas : $\beta \neq 1$

On a
$$I_n = \int_z^n (\ln(t))^{-\beta} \frac{1}{t} dt$$

$$= \left[\frac{\ln(t)^{-\beta+1}}{-\beta+1} \right]_z^n$$

$$= \frac{1}{1-\beta} \left(\ln(n)^{1-\beta} - \ln(z)^{1-\beta} \right)$$

2e cas : Or $\beta > 1$

Mq
$$\sum_n \frac{1}{n \ln(n)^\beta} \xrightarrow{CV}$$

(R^x) Je me met en mode $\leq$

On a
$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)^\beta} \leq \frac{1}{\beta-1} \left(\frac{1}{\ln(z)^{\beta-1}} - \frac{1}{\ln(n)^{\beta-1}} \right) + \frac{1}{2 \ln(z)^\beta}$$
$$\leq \frac{1}{\beta-1} \times \frac{1}{\ln(n)^{\beta-1}} + \frac{1}{2 \ln(z)^\beta}$$

Ainsi, les sommes partielles de la SATP

$$\sum_n \frac{1}{n \ln(n)^\beta}$$
 sont majorées : On a $\xrightarrow{CV}$ $\blacksquare$
($a = 1, \beta > 1$)

3^e Cas: Soit $\beta < 1$

$$\text{Il y a } \sum_n \frac{1}{n \ln(n)^\beta} \xrightarrow{\text{DIV}}$$

$$\text{On a } \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)^\beta} > \frac{1}{1-\beta} \left(\ln(n)^{1-\beta} - \ln(2)^{1-\beta} \right) + \frac{1}{n \ln(n)^\beta}$$

$\xrightarrow{\beta < 1} +\infty$ $\xrightarrow{\beta < 1} 0$
 car $1-\beta > 0$

$$\sum_n \frac{1}{n \ln(n)^\beta} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

$\alpha = 1; \beta = 1$

On définit $g:]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$t \mapsto \frac{1}{t \ln(t)}$$

Soit N . On note $U_N := \sum_{k=2}^N \frac{1}{k \ln k}$

On a D.A.L.C

$$\frac{1}{N \ln N} \leq \int_2^N g(t) dt \leq U_N \leq \int_2^N g(t) dt + \frac{1}{2 \ln 2}$$

C'est elle qui nous intéresse

On a

$$\int_z^N g(t) dt = \left[\ln(\ln(t)) \right]_z^N = \overbrace{\ln(\ln(N))}^{+\infty} - \ln(\ln(z))$$

Par minoration : $U_N \rightarrow +\infty$

V Développement décimal des nombres réels.

1) Un premier fait

Fait : $0,999\dots = 1$

D/ • Qu'est-ce que $0,999\dots$?

• C'est $\underbrace{0,9}_{9 \times 10^{-1}} + \underbrace{0,09}_{9 \times 10^{-2}} + \underbrace{0,009}_{9 \times 10^{-3}} + \dots$

• La série $\sum_n \frac{9}{10^n}$ est CV, car

$\left| \frac{1}{10} \right| < 1$: la série géo

$$\sum_n \frac{1}{10^n} \xrightarrow{\text{CV}} \text{DALC}$$

• Bilan :

$$0,99\dots := 9 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n$$

• Or, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{1}{10} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{10} \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{1}{9}$

• CC1 : $0,999\dots = 1$ ■

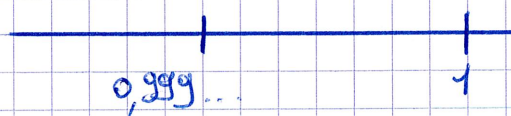
D2/ Posons $\alpha := 0,999\dots$

On a $10\alpha = 9,999\dots$

Donc $10\alpha - \alpha = 9$ ie $9\alpha = 9$ ie $\alpha = 1$ ■

"D3/" OR PA et esq $0,999\dots \neq 1$

Donc on a $0,999\dots < 1$



On pose $\beta := \frac{1+\alpha}{2}$, on a

$0,999\dots < \beta < 1$ "abs" ■

D4/ On a $\frac{1}{3} = 0,333\dots$

Donc $3 \cdot \frac{1}{3} = 0,999\dots$ ie $1 = 0,999\dots$

Rq: de $\overline{m}$,

$$0,42 = 0,42999 \dots$$

D/ (exo) ■

2) Développement décimal

On exclut les dev^{nts} décimaux qui ne se terminent pas par une suite de "9"

Fait: Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}^{\mathbb{N}^*}$

Alors:

1) La série $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{10^n} \xrightarrow{CV}$

2) On note $0, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$

D/ (AF) ■

Notons $\mathcal{A} := \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \{0, \dots, 9\}^{\mathbb{N}^*} \mid \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}^*, \\ \exists n \geq N \text{ s.t. } a_n \neq 9 \end{array} \right\}$

Th: Soit $x \in [0, 1[$

1) Alors: $\exists ! (a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \mathcal{A}; x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$

2) Cette suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est appelée: développement décimal (illimité) de x

D/ non ■

3) Caractérisation des rationnels,

Soit $x \in \mathbb{R}$ qu'on écrit

$$x = \varepsilon \cdot \overline{b_N \dots b_1 b_0}^{(10)} + 0, a_1 a_2 a_3 \dots$$

avec $\varepsilon \in \{\pm 1\}$, $b_0, \dots, b_N \in \{0, \dots, 9\}$

et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \mathcal{A}$

Prop:

$$x \in \mathbb{Q} \iff (a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ APCR}$$

D/ (exo) ■

Prop:

$$x \in \mathbb{Q} \iff (a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ périodique APCR}$$

D/ $\Leftarrow$ exo-ok

$\Rightarrow$ exo* ■

Exemple :

$$\alpha := 0, \underline{12345} 42 42 42 \dots$$

$$10^5 \alpha - 12345 = 0, 42 42 42 \dots$$

$$= \frac{42}{100} + \frac{42}{100^2} + \frac{42}{100^3} + \dots$$

$$= 42 \times \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{100}\right)^n$$

$$= 42 \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}}$$

$$= \frac{42}{99}$$

Bilan :

$$\alpha = \frac{12345 + \frac{42}{99}}{10^5}$$

$$= \frac{1\,222\,155 + 42}{9900\,000}$$

$$= \frac{1\,222\,197}{9900\,000} = \text{ok}$$

Application :

$$0, 10 1001 0001 00001000001 \dots \notin \mathbb{Q}$$

(exo) Def° formelle

4) $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable (1891) $\square$

Déf^o: Soit E un ensemble. On dit que E est dénombrable si:

$$\exists \varphi: \mathbb{N} \longrightarrow E: \text{ bijection}$$

• On dit que φ est une énumération de E

Rq: • $(\mathbb{R}^*)$: si E dénombrable, on peut écrire

$$E = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$$

$$\bullet \text{ ie } E \approx \mathbb{N}$$

Th: $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable

Question: Existe-t-il un type d' ∞ str^{ct} "cointé" entre l'infini discret ($\mathbb{N}$) et l'infini continu ($\mathbb{R}$)?

D/ ORPA et on énumère $\mathbb{R}$: fixons

$$\varphi: \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R} \text{ une bijection.}$$

On note $\oplus$ $x^{[n]} := \varphi(n)$

On a donc $]0, 1[= \left\{ x^{[1]}, x^{[2]}, x^{[3]}, \dots \right\}$

Si $i \in \mathbb{N}^*$, on écrit

$$x^{[i]} = 0, a_1^{[i]} a_2^{[i]} a_3^{[i]} \dots$$

h On fait "une diagonale de Cantor"

On a besoin d'une fonction auxiliaire

$$\theta : [0, 9] \longrightarrow [0, 9] \text{ tq}$$

$$\forall a \in [0, 9], \theta(a) \neq a$$

$$\forall a \in [0, 9], \theta(a) \neq 9$$

D/ Ocsd $\theta : [0, 9] \longrightarrow [0, 9]$

$$i \longmapsto \begin{cases} 1 \text{ si } i \in [0, 9] \setminus \{4\} \\ 7 \text{ si } i = 4 \end{cases}$$

On écrit

$x^{[1]}$	0,	$a_1^{[1]}$	$a_2^{[1]}$	$a_3^{[1]}$	...
$x^{[2]}$	0,	$a_1^{[2]}$	$a_2^{[2]}$	$a_3^{[2]}$	...
$x^{[3]}$	0,	$a_1^{[3]}$	$a_2^{[3]}$	$a_3^{[3]}$	...

On pose $\alpha := 0, a_1^{[1]} a_2^{[2]} a_3^{[3]} \dots$

Plus : $\beta := 0, \theta(a_1^{[1]}) \theta(a_2^{[2]}) \theta(a_3^{[3]}) \dots$

On a $\beta \in]0, 1[$

Fixons donc $N_0 \in \mathbb{N}$ tq $\beta = 0, \theta(a_1^{[1]}) \dots$

ie on a :

$$0, \theta(a_1^{[1]}) \theta(a_2^{[2]}) \dots \theta(a_{N_0}^{[N_0]})$$

$$= 0, a_1^{[N_0]} a_2^{[N_0]} a_3^{[N_0]} \dots a_{N_0}^{[N_0]}$$

Par unicité du devt décimal, en regardant la N_0 -ième décimale de β , on a

$$\theta(a_{N_0}^{[N_0]}) = a_{N_0}^{[N_0]} \quad \text{Abs}$$

VI Séries alternées

1) Déf°

Déf°: Une série alternée est une série du type
$$\sum_n (-1)^n a_n \quad \text{ou} \quad \sum (-1)^{n+1} a_n, \quad \text{où } (a_n)_n \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$$

Ex: $\sum \frac{(-1)^n}{n}$; $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$; $\sum (-1)^n$

2) Théorème des séries alternées TSA

a) le théorème

Th:

Soit $(a_n)_n \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ tq $(a_n)_n \searrow$

et tq $a_n \rightarrow 0$

Alors : 1) la série $\sum_n (-1)^n a_n$ CV,

2) De $\oplus$ $0 \leq \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \leq a_0$

Rq: ie la somme de $\sum_n (-1)^n a_n$ est du signe
du 1^{er} terme et $\leq$ en valeur absolue
à ce 1^{er} terme (en valeur absolue)

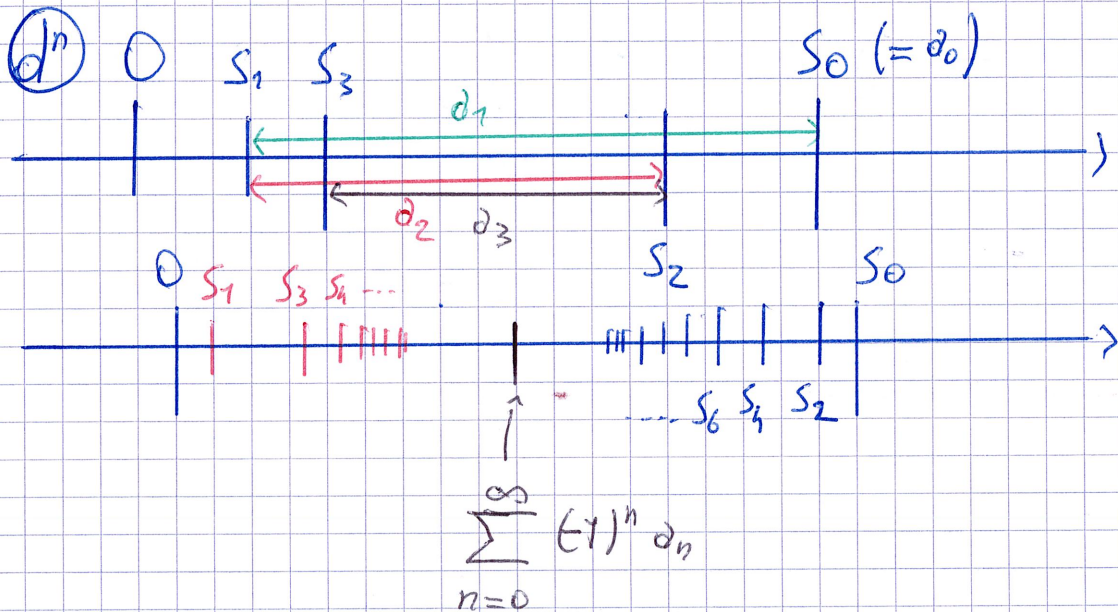
$$\underline{D/\oplus} \quad S_N := \sum_{n=0}^N (-1)^n d_n$$

Id petit n

$$d_0 \leq d_0$$

$$d_0 - d_1 \leq d_0 \text{ car } d_1 \geq 0$$

$$d_0 - d_1 + d_2 = d_0 - \underbrace{(d_1 - d_2)}_{\geq 0 \text{ car } (d_n)_n \downarrow}$$



On pose $\oplus \quad U_n := S_{2n+1} \quad w_n = S_{2n}$

$Mq (U_n)_n \nearrow$

$$(U_{n+1} - U_n = S_{2n+3} - S_{2n+1} = (-1)^{2n+3} d_{2n+3} + (-1)^{2n+2} d_{2n+2}$$

$$= d_{2n+2} - d_{2n+3} \geq 0$$

car $(d_m)_m \searrow$)

② De $\overline{m} : (w_n)_n \searrow$
 $(\underline{D} / \textcircled{AF})$

Ma $w_n - u_n \longrightarrow 0$
 $(\underline{D} / w_n - u_n = - (-1)^{2n+1} a_{2n+1} = a_{2n+1} \longrightarrow 0)$

Ainsi, $(u_n)_n$ et $(w_n)_n$ sont adjacentes; DALC;
 fixons donc $P \in \mathbb{R}$ tq $\begin{cases} u_n \longrightarrow P \\ w_n \longrightarrow P \end{cases}$

CC: $S_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} P$ i.e. $\sum_n (-1)^n a_n \xrightarrow{CV} \blacksquare_1)$

De ④, on a $u_0 \leq P \leq w_0$
 $\swarrow \quad \searrow$
 $S_1 = a_0 - a_1 \geq 0 \quad S_{2 \cdot 0} = S_0 = (-1)^0 a_0 = a_0$

CC: $0 \leq \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \leq a_0 \quad \blacksquare$

b) majorat° du reste d'une série alternée (Bonus)

Th: Sous les $\overline{m}$ hypothèses, on a

$$|R_n| \leq a_n (\longrightarrow 0)$$

ou $R_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k$

D/ Fixons n_0 , $\# R_0$ est la somme
d'une série alternée vérifiant les
bonnes hypothèses.

On peut donc appliquer a) ■