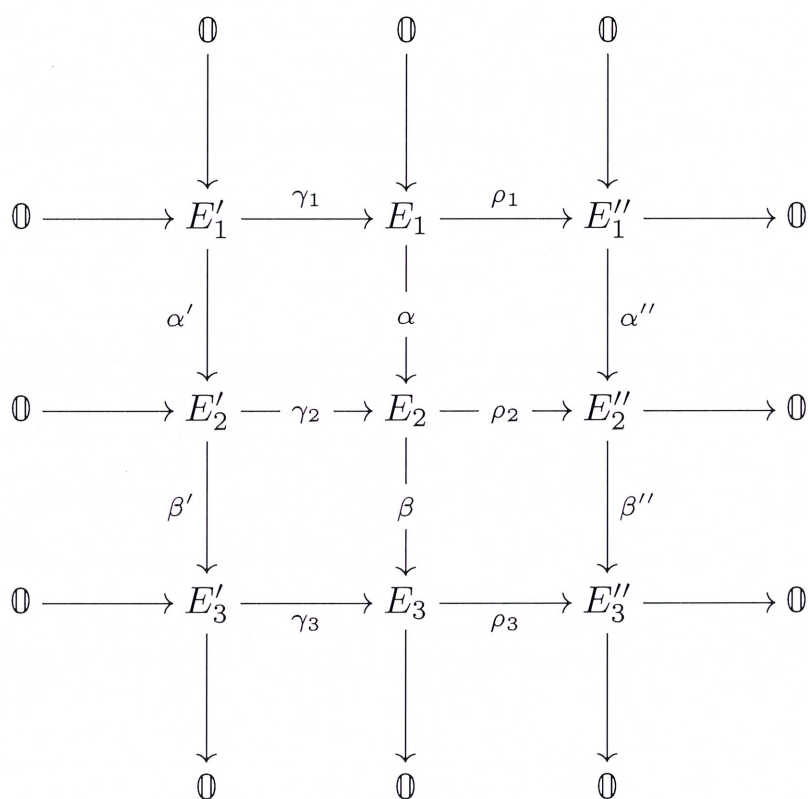


Chapitre 26

Dimension



Un exemple de diagramme.

Dimension

L'espace physique dans lequel nous nous déplaçons est de dimension 3.

Le plan décrit par une feuille est de dimension 2.

Une droite est de dimension 1.

De façon générale, on peut définir la dimension $\dim(E)$ d'un espace vectoriel E . Elle peut être finie ou infinie, et dans ce chapitre nous étudierons le cas de la dimension finie.

Par exemple, on a $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^$.*

26

Dimension

plan de cours et principaux résultats

I. Considérations préliminaires

34.17

1) Notions complémentaires sur les familles finies

34.18

34.29

- a) taille d'une famille
- b) concaténation de familles
- c) retrait d'un élément à une famille
- d) sous-familles
- e) sous-familles et liberté, sous-familles et caractère générateur
- f) la famille vide

2) Familles libres maximales et familles génératrices minimales

- a) un lemme

Lemme 26.1 [Ⓢ]

Soit $\mathcal{L}$ une famille libre de E et soit $x \in E$. Alors,

$$\mathcal{L} \vee (x) \text{ liée} \implies x \in \text{Vect}(\mathcal{L}).$$

- b) une famille libre maximale est une base

Proposition 26.2 [Ⓢ]

Une famille libre maximale de E est une base de E .

- c) une famille génératrice minimale est une base

Proposition 26.3 [Ⓢ]

Une famille génératrice minimale de E est une base de E .

II. Dimension

34.2

34.1

34.20

1) Espaces vectoriels de dimension finie

- a) définition
- b) exemples

2) Lemme de Steinitz

3) Théorème de la base incomplète et théorème de la base extraite

- a) version générale

Théorème 26.4

Soit $\mathcal{F}$ une famille finie libre de E et soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie de E . Alors,

$$\exists \mathcal{G}' \leq \mathcal{G} : \mathcal{G}' \vee \mathcal{F} \text{ base de } E.$$

- b) théorème de la base incomplète

Théorème 26.5

Soit E un ev^{df} .

Soit $\mathcal{F}$ une famille libre de E . Alors, $\mathcal{F}$ peut être complétée en une base de E .

c) théorème de la base extraite

Théorème 26.6

Soit E un ev^{df} .

De toute famille génératrice de E , on peut extraire une base de E .

4) Dimension

a) existence de base

Proposition 26.7

Tout espace vectoriel de dimension finie admet une base.

b) définition de la dimension

c) exemples

d) vocabulaire

e) cas de la dimension nulle

5) Caractérisation des espaces de dimension infinie

III. Propriétés des espaces de dimension finie

34.3 ☑

34.13 ▲

34.45 ▲▲

1) Familles dans un espace de dimension finie

a) Petites familles, grandes familles

👑 Proposition 26.8

Soit E ev^{df} et soit $\mathcal{F}$ une famille finie de E .

- 1) a) $\mathcal{F}$ libre $\implies |\mathcal{F}| \leq \dim(E)$
b) $\mathcal{F}$ génératrice de $E \implies |\mathcal{F}| \geq \dim(E)$
c) $\mathcal{F}$ base de $E \implies |\mathcal{F}| = \dim(E)$
- 2) a) $|\mathcal{F}| > \dim(E) \implies \mathcal{F}$ est liée
b) $|\mathcal{F}| < \dim(E) \implies \mathcal{F}$ n'est pas génératrice de E

b) Familles de bonne taille

👑 Théorème 26.9^①

On suppose que $|\mathcal{F}| = \dim(E)$. Alors, on a

- 1) $\mathcal{F}$ libre $\implies \mathcal{F}$ base de E
- 2) $\mathcal{F}$ génératrice de $E \implies \mathcal{F}$ base de E

2) Sous-espaces vectoriels en dimension finie

a) premières propriétés

b) une condition suffisante d'égalité

👑 Proposition 26.10

Soit F un sous-espace vectoriel de E , ev^{df} . Alors, on a

$$\dim(E) = \dim(F) \implies E = F.$$

3) Espace produit

Proposition 26.11^①

Soient E, F ev^{df} . Alors, $E \times F$ est de dimension finie et on a

$$\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F).$$

IV. Applications linéaires en dimension finie

34.5 118

Soient E, F ev^{df} .

34.19 888

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.

34.26 8

1) Injectivité, surjectivité, bijectivité

Proposition 26.12 ①

- 1) $f : E \rightarrow F$ *injective* $\implies \dim(E) \leq \dim(F)$.
- 2) $f : E \rightarrow F$ *surjective* $\implies \dim(E) \geq \dim(F)$.
- 3) $f : E \rightarrow F$ *iso* $\implies \dim(E) = \dim(F)$.

2) Isomorphismes

3) Critère d'isomorphisme en cas d'égale dimension

Théorème 26.13

On suppose que $\dim(E) = \dim(F)$. Alors,

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ iso.}$$

👑 Corollaire 26.14

Soit E ev^{df} et soit $f \in L(E)$. Alors,

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ iso.}$$

4) $L(E, F)$ est de dimension finie

Proposition 26.15 ①

Soient E, F ev^{df} . Alors, $L(E, F)$ est de dimension finie et on a

$$\dim(L(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F).$$

V. Sommes directes et théorème du rang

34.14 1

1) Dimension d'une somme directe

34.16 118

2) Supplémentaire en dimension finie

34.34 118

Proposition 26.16

Soit E ev^{df} et soit F $\text{sev } E$. Alors F admet un supplémentaire dans E .

3) Rang

- a) définition
- b) un exemple
- c) premières propriétés

Proposition 26.17 ①

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire entre ev^{df} . Alors,

- 1) $\text{rg}(f) \leq \dim(E)$
- 2) $\text{rg}(f) \leq \dim(F)$

d) cas particuliers importants

e) rang de la composée

Proposition 26.18

Dans le diagramme d'ev^{df} $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$, on a

- 1) $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(g)$
- 2) $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(f)$

f) invariance du rang après composition par un isomorphisme

4) **Formule du rang**

- a) théorème du rang
- b) formule du rang

👑 **Théorème 26.19**

Soit E ev^{df} et soit F ev. Soit $f : E \rightarrow F$ linéaire. Alors,

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker}(f)) + \text{rg}(f).$$

5) **Formule de Grassmann**

👑 **Proposition 26.20**

Soit E ev et soient F, G sev^{df} E . Alors,

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

6) **Deux conditions suffisantes de somme directe pleine**

Proposition 26.21

Soit E ev^{df} et soient F, G sev E tels que

$$\dim(E) = \dim(F) + \dim(G).$$

Alors,

- 1) $E = F + G \implies E = F \oplus G$
- 2) $F \cap G = \{0_E\} \implies E = F \oplus G$

VI. Applications

1) **Critère nucléaire d'inversibilité**

👑 **Théorème 26.22**

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors,

$$A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \text{Ker}(A) = \{0_{\mathbb{K}^n}\}.$$

2) **Matrices triangulaires supérieures**

Proposition 26.23

Soit $A \in T_n^+(\mathbb{K})$. Alors,

$$A \text{ inversible} \implies A^{-1} \in T_n^+(\mathbb{K}).$$

3) **Retour sur l'interpolation de Lagrange**

Ch 26

Dimension

M

• K est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Rq : Tout marche au dessus d'un corps K quelconque

(ex : $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} ; (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$
 $\mathbb{Q}[\zeta]$, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier, $\mathbb{F}_2$)

• E, F, G K -ev

• $m, n, p \in \mathbb{N}$

• On note $\underline{K}^n := M_{n,1}(K) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} ; x_1, \dots, x_n \in K \right\}$

I Considerations préliminaires

1) Notions complémentaires sur les familles (finies)

a) Taille d'une famille

Si $\overline{x} \in E^n$ et $\overline{x}$ s'écrit $\overline{x} = (x_1, \dots, x_n)$

avec $\forall i, x_i \in E$

On dit que $\overline{x}$ est de taille n et on note #

$$|\overline{x}| = n$$

Ex 1 $E = \mathbb{R}^3$ et $\overline{\mathcal{F}} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right)$

On a $|\overline{\mathcal{F}}| = 3$

b) Concaténation

Si de $\oplus$ $\mathcal{G} \in E^m$ et $\mathcal{G}$ s'écrit

$$\mathcal{G} = (y_1, \dots, y_m) \text{ avec } \forall j, y_j \in E,$$

On note

$$\overline{\mathcal{F}} \vee \mathcal{G} := (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$$

C'est la concaténation de $\overline{\mathcal{F}}$ et $\mathcal{G}$ $\in E^{n+m}$

c) retrait d'un élément d'une famille

Si $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note

$$\overline{\mathcal{F}} \setminus (x_{i_0}) := (x_1, \dots, x_{i_0-1}, x_{i_0+1}, \dots, x_n)$$

On la note aussi $(x_1, \dots, \bigvee_{i_0}, \dots, x_n)$

d) Sous-famille

Def : On dit que $\mathcal{G}$ est une sous-famille de

$$\overline{\mathcal{F}} \overset{\Delta}{\text{ssi}} \exists \phi \llbracket 1, m \rrbracket \longrightarrow \llbracket 1, n \rrbracket : \begin{cases} \phi \text{ injective} \\ \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, x_{\phi(i)} = y_i \end{cases}$$

On note alors $\mathcal{G} \leq \mathcal{T}_P$

Ex : $(x_5, x_1, x_2) \leq (x_1, x_2, \dots, x_{15})$

e) Propriétés $\oplus$

$$|\mathcal{T}_P \vee \mathcal{G}| = |\mathcal{T}_P| + |\mathcal{G}|$$

$$|\mathcal{T}_P \setminus (x)| = |\mathcal{T}_P| - 1 \quad (\text{si } x \text{ est dans } \mathcal{T}_P)$$

$$\mathcal{G} \leq \mathcal{T}_P \Rightarrow |\mathcal{G}| \leq |\mathcal{T}_P|$$

f) Ss-famille, liberté, génération

Prop : E ev.; $\mathcal{T}_P$ famille d'éléments de E

1) Si $\mathcal{T}_P$ est libre, toute sous-famille de $\mathcal{T}_P$ est libre

2) Si $\mathcal{T}_P$ est génératrice dans E , toute sous-famille de $\mathcal{T}_P$ l'est également.

g) la famille vide

On la note $()$; on a $|()| = 0$

On a $() \leq \mathcal{T}_P$ pour toute famille $\mathcal{T}_P$ de E

Rq: Tout ceci se généralise aux familles $(x_i)_{i \in I} \in E^I$ quelconques sans problèmes, sauf la taille, qui n'est définie que si I est fini.

2) Familles libres maximales & familles génératrices minimales

a) un lemme

Lemme: Soit $\overline{F}$ une famille de E libre

Soit $x \in E$. Alors :

$$\overline{F} \cup \{x\} \text{ liée} \Rightarrow x \in \text{Vect}(\overline{F})$$

D/ Orsq $\overline{F} \cup \{x\}$ liée

1ère version (finie):

on écrit $\overline{F} = (x_1, \dots, x_n)$ avec $\begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ \forall i, x_i \in E \end{cases}$

Si $(x_1, \dots, x_n)$ liée fixons $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n + \lambda x = 0_E$$

et tq $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda) \neq (0, \dots, 0)$

• Si $\lambda = 0$, on a nécessairement

$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$ et on a alors

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0_E \quad \bullet \text{ C'est absurde car}$$

$(x_1, \dots, x_n)$ libre.

• Ainsi : $\lambda \neq 0$ et on peut écrire

$$x = \sum_{i=1}^n -\frac{\lambda_i}{\lambda} x_i$$

Donc $x \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ ■

2^{ème} Version (cas quelconque) :

On écrit $\overline{P} = (x_i)_{i \in I} \in E^I$ où I ensemble

$\hat{C}$ $(x_i)_{i \in I} \vee (x)$ liée, fixons $(\lambda_i)_{i \in I} \vee (\lambda)$

une famille presque nulle de scalaires k_q

$$\sum_{(i \in I)} \lambda_i x_i + \lambda x = 0_E \quad \text{et } k_q$$

$(\lambda_i)_{i \in I} \vee (\lambda)$ est non nulle.

• Si $\lambda = 0$: on a $(\lambda_i)_{i \in I}$ est non nulle

$$\text{et } \sum_{(i \in I)} \lambda_i x_i = 0_E \quad \text{C'est absurde.}$$

• Donc $\lambda \neq 0$ et on écrit $x = \sum_{(i \in I)} -\frac{\lambda_i}{\lambda} x_i$

• On a bien $x \in \text{Vect}(\mathcal{T})$

b) Une famille libre maximale est une base

Prop : (Version abstraite)

Soit $\mathcal{L}$ une famille libre de E tq

(*) $\forall \mathcal{G}$ famille de E , $\mathcal{L} < \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{G}$ liée

Alors : $\mathcal{L}$ est une base de E

(* : ie $\mathcal{G}$ est une surfamille stricte de $\mathcal{T}$:

def^o formelle : (exo)

D/ Orq (*) $\forall \mathcal{L}$ est génératrice dans E

Soit $x \in E$. Alors $\mathcal{L} \cup \{x\}$ est une surfamille stricte de $\mathcal{L}$. Donc elle est liée,

D'après a), on a $x \in \text{Vect}(\mathcal{T})$. Ainsi :

$\mathcal{L}$ est génératrice dans E ■

c) Une famille génératrice minimale de E est une base de E

Prop: Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E
 $\forall \mathcal{P}$ famille de E , $\mathcal{P} < \mathcal{G} \Rightarrow$
 $\mathcal{P}$ n'est pas génératrice dans E
Alors $\mathcal{G}$ est une base de E

D/ $\mathcal{G}$ libre (cas fini)

Ecrivons $\mathcal{G} = (x_1, \dots, x_n)$ avec $\begin{cases} n \in \mathbb{N}^* \\ \forall i, x_i \in E \end{cases}$

ORPA et Osg $\mathcal{G}$ liée. Fixons donc

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \text{ tq } \in \mathbb{K}^n \text{ tq } \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0_E$$

et fixons $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tq $\lambda_{i_0} \neq 0$

$$\text{On a } x_{i_0} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^n -\frac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}} x_i$$

$\mathcal{H}_q (x_1, \dots, \check{x}_{i_0}, \dots, x_n)$ génératrice dans E

Soit $x \in E$. $\mathcal{G}$ est génératrice dans E ,
fixons $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{K}$ tq

$$x = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i$$

On a

$$x = \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^n \lambda_i x_i \right) + \lambda_{i_0} x_{i_0} \quad // \quad \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^n - \frac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}} x_i$$
$$= \sum_{\substack{i=1 \\ i_0 \neq i_0}}^n \left(\mu_i - \frac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}} \mu_{i_0} \right) x_i$$

Ainsi:

$$x \in \text{Vect} \left((x_1, \dots, \check{x}_{i_0}, \dots, x_n) \right)$$

Donc

$(x_1, \dots, \check{x}_{i_0}, \dots, x_n)$ génératrice dans E

C'est ABS car $(x_1, \dots, \check{x}_{i_0}, \dots, x_n) < \mathcal{B}$

II Dimension

1) Espaces vectoriels de dim finie

a) def°

Def°: Soit E un K -ev. On dit que E est de dimension finie

Δ
ssi $\exists \mathcal{P}$ famille finie de E : $\mathcal{P}$ génératrice dans E

ie Δ
ssi $\exists n \in \mathbb{N}, \exists (x_1, \dots, x_n) \in E^n$: $(x_1, \dots, x_n)$ génératrice dans E

On note $\# E$ ev db

b) exemples

• $\mathbb{R}_n[X]$; $(1, X, X^2, \dots, X^n)$

• $M_n(\mathbb{R})$; $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$

• $\mathbb{R}^3$; $(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$

• l'ensemble des suites 2-périodiques

$$E := \left\{ (u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_n \right\}$$

avec : $\left(\left((-1)^n \right)_{n \in \mathbb{N}}, \left(1 \right)_{n \in \mathbb{N}} \right)$
notée α / notée β

D/ Soit $(u_n)_n \in G$

Astuce : $u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$

Ocsd $P := x^2 - 1$

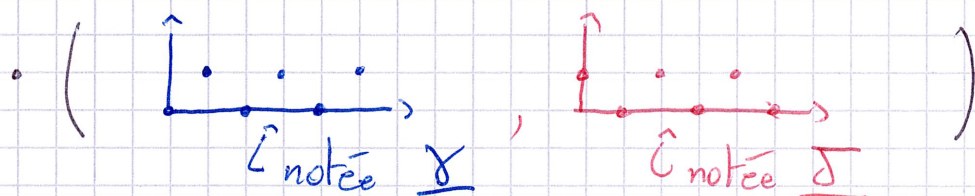
C'est le polynôme caractéristique de
 " $\forall n, u_{n+2} = u_n$ "

On a $\mathbb{Z}_{\mathbb{R}}(P) = \{-1, 1\}$

DALC⁺⁺ : $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \forall n, u_n = \lambda(1)^n + \mu(-1)^n$

Ie, on a $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : u = \lambda \underline{\alpha} + \mu \underline{\beta}$

Ainsi $u \in \text{Vect}(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$ ■



D/ On a $u = u_0 \underline{\alpha} + u_1 \underline{\beta}$ (AC) ■

• $T_n^+(K)$:

$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots \right)$

ie $(E_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq n}$

qu°: Ch d'éléments dans cette famille : $\frac{n(n+1)}{2}$

$$D^1/ \quad n + (n-1) + \dots + 1 = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \blacksquare$$

D²/ Je dois compter le nb de cases au dessus de la diagonale. C'est $\frac{n^2-n}{2} + n \quad \blacksquare$

Déf°: On dit que E est de dimension infinie si E n'est pas de dimension finie

Exemples:

$\mathbb{R}[X]$ est dimension infinie

D/ ORPA et osq $\mathbb{R}[X]$ evdf
Fixons donc $\oplus P_1, \dots, P_N \in \mathbb{R}[X]$ tq

$$\mathbb{R}[X] = \text{Vect}(P_1, \dots, P_N)$$

(Osq $\forall i, P_i \neq 0$) Astuce: Notons

$$d := \max_{i \in [1, n]} \deg(P_i)$$

On a $\textcircled{AC} \quad \forall i, P_i \in \mathbb{R}_d[X]$

$\hat{=}$ $\mathbb{R}_d[X]$ ser $\mathbb{R}[X]$, on a $\textcircled{AC}$

$$\text{vect}(P_1, \dots, P_N) \text{ ser } \mathbb{R}_d[X]$$

$\textcircled{Abs}$ car $X^{d+1} \notin \mathbb{R}_d[X]$ mais $X^{d+1} \in \mathbb{R}[X]$
 $\parallel$
 $\text{vect}(P_1, \dots, P_N) \quad \blacksquare$

- $\mathcal{C}^\infty([0,1], \mathbb{R})$

- $\left\{ (u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_n \text{ nulle APER} \right\}$

- $\left\{ (u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_n \xrightarrow{CV} \right\}$

- $\widetilde{\mathbb{R}[X]}$

- $\mathcal{T}_P(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

- $F! \left\{ (u_n)_n \mid (u_n)_n \text{ est cte} \right\} = \text{Vect}\left((1)_{n \in \mathbb{N}}\right)$

- $\left\{ f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 0 \right\}$

- $\left\{ (u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_n u_n \xrightarrow{ACV} \right\}$

$\mathcal{C}$ est $\mathcal{P}^1(\mathbb{N})$ l'ens des suites
sommables cf DL Noël

- $\left\{ (u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid "(u_n)_n \text{ est périodique}" \right\}$

2) Lemme de Steinitz

Lemme : Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Soit E un K -ev engendré par n vecteurs.

Alors toute famille de $(n+1)$ vecteurs (de E) est liée

D/ (rec) sur n

• On note $\oplus \mathcal{P}(n)$: "Si E est un K -ev et

si $\exists (x_1, \dots, x_n) \in E^n : E = \text{vect}(x_1, \dots, x_n)$,

alors $\forall \overline{TP} \in E^{n+1}$, $\overline{TP}$ est liée "

• $n=1$

Soit E un K -ev. Or $\exists x \in E : E = \text{vect}(x)$

Fixons un tel x_0

(dⁿ)

Soit $(x, y) \in E^2$ tq (x, y) est liée.

$\hat{C}$ $E = \text{vect}(x_0)$, fixons $\lambda, \mu \in K$ tq

$$\begin{cases} x = \lambda x_0 \\ y = \mu x_0 \end{cases}$$

• Si $\lambda = \mu = 0$: On a $x = y = 0_E$; donc (x, y) liée

• Si $\lambda \neq 0$: On écrit $y = \frac{\mu}{\lambda} \lambda x_0 = \frac{\mu}{\lambda} x$
OFAA

Donc (x, y) liée

• Si $\mu \neq 0$: de $\bar{m}$

D'où $P(1)$

Hérédité : Ilq $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tq $P(n)$, Ilq $P(n+1)$

Soit E en tq $\exists (x_1, \dots, x_{n+1}) \in E^{n+1}$: $E = \text{vect}(x_1, \dots, x_{n+1})$

Fixons une telle famille $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in E^{n+1}$ génératrice de E

Soit $\overline{P} \in E^{n+2}$ qu'on écrit $\overline{P} = (y_1, \dots, y_{n+2})$

avec $\forall i, y_i \in E$. Ilq $\overline{P}$ liée.

Pour $i \in [1, n+2]$, on écrit

$$y_i = \lambda_1^{[i]} x_1 + \lambda_2^{[i]} x_2 + \dots + \lambda_{n+1}^{[i]} x_{n+1}$$

avec $\forall j, \lambda_j^{[i]} \in K$

Ⓜ Faisons du pivot de Gauss

$$y_1 = \boxed{\lambda_1^{[1]} x_1} + \lambda_2^{[1]} x_2 + \dots$$

$$y_2 = \lambda_1^{[2]} x_1 + \lambda_2^{[2]} x_2 + \dots$$

$$y_3 = \lambda_1^{[3]} x_1 + \lambda_2^{[3]} x_2 + \dots$$

1^{er} cas (cas défavorable)

$$\text{Osg } \forall i \in \llbracket 1, n+2 \rrbracket, \lambda_1^{[i]} = 0$$

On a donc $\forall i, y_i \in \text{Vect}(x_2, x_3, \dots, x_{n+1})$

Or, $\text{Vect}(x_2, \dots, x_{n+1})$ est un ev engendré par n vecteurs !

Or, Grâce à $P(n)$, je sais que dans un tel ev : toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.

Donc $(y_1, \dots, y_{n+1})$ est liée

Donc en particulier la sous-famille $\mathcal{T}$ est liée

2^e cas (cas favorable)

$$\text{Osg } \exists i_0 \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket : \lambda_1^{[i_0]} \neq 0$$

Fixons un tel i_0 Ⓜ Pivot de Gauss

Je pose $(AC)^{14}$ pour $i \in [1, n+2] \setminus \{i_0\}$

$$\widetilde{y}_i = y_i - \frac{\lambda_1^{[i]}}{\lambda_1^{[i_0]}} y_{i_0}$$

Par construction, on a

$$\widetilde{y}_i \in \text{Vect}(x_2, \dots, x_{n+1})$$

$$\widetilde{y}_i \in \text{Vect}(x_2, \dots, x_{n+1})$$

or $\text{Vect}(x_2, \dots, x_{n+1})$ est un ev engendré par n vecteurs

Et $(\widetilde{y}_1, \dots, \widetilde{y}_{i_0}, \dots, \widetilde{y}_{n+1})$ est de taille $(n+1)$

Donc grâce à $\mathcal{P}(n)$: elle est liée

Fixons donc $\mu_1, \dots, \mu_{n+1} \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{n+2} \mu_i \widetilde{y}_i = 0_E \quad (*)$$

et fixons $i_1 \in [1, n+2] \setminus \{i_0\} \setminus \{i_2\} \setminus \dots \setminus \{i_{n+1}\} \setminus \{i_0\}$ tq $\mu_{i_1} \neq 0$

On réécrit (*) $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{n+2} \mu_i \left(y_i - \frac{\lambda_1^{[i]}}{\lambda_1^{[i_0]}} y_{i_0} \right) = 0_E$

l'un des μ_i est $\neq 0$

$$\text{i.e.} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{n+2} \mu_i y_i - \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{n+2} \mu_i \frac{\lambda_1^{[i]}}{\lambda_1^{[i_0]}} \right) y_{i_0} = 0_E$$

Donc : $(y_1, \dots, y_{n+2})$ liée

3) Théorème de la base incomplète (TBI) et Théorème de la base extraite (TBE)

a) Version générale

Th: Soit $\mathcal{T}$ une famille libre finie de E .

Soit $\mathcal{G}$ ———— génératrice finie de E

Alors : $\exists \mathcal{G}' \subseteq \mathcal{G} : \mathcal{T} \cup \mathcal{G}'$ base de E .

i.e : je peux compléter la famille libre $\mathcal{T}$
à l'aide de vecteurs de $\mathcal{G}$ en une base de E .

DL On considère les les complétions qui
marchent.

Je note

$$\mathcal{A} := \left\{ \mathcal{G}' \subseteq \mathcal{G} \mid \mathcal{T} \cup \mathcal{G}' \text{ libre} \right\}$$

$$\text{On a : } \mathcal{A} \neq \emptyset \text{ car } \left\{ \begin{array}{l} () \subseteq \mathcal{G} \\ \mathcal{T} \cup () = \mathcal{T} \end{array} \right.$$

De ④, les tailles d'éléments de $\mathcal{B}$ sont majorées

Demo annulée

Th : Soit E ev^{df}.

Soit $\overline{T_P}$ une famille libre de E

Soit $\underline{y}$ ————— génératrice de E

Alors : $\exists \underline{y}' \leq \underline{y} : \overline{T_P} \cup \underline{y}'$ base de E

D/

• Déjà, on a forcément $\overline{T_P}$ finie

• $\hat{C} \ E$ ev^{df} : fixons $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ une famille génératrice de E

• Si $\overline{T_P}$ était infinie, on pourrait considérer

$\overline{T_{P_0}}$ une sous-famille de $\overline{T_P}$ de taille $p+1$

• Or, le lemme de Steinitz nous dit que

$\overline{T_{P_0}}$ est liée : (Abs)

• Bilan : $\overline{T_P}$ est finie et, mieux : $|\overline{T_P}| \leq p$

On considère $\mathcal{B} : \{ \underline{y}' \leq \underline{y} \mid \overline{T_P} \cup \underline{y}' \text{ libre} \}$

On a $\mathcal{B} \neq \emptyset$ car $() \in \mathcal{B}$

Or, $\forall y' \in \mathcal{A}, |y'| \leq p$

P Or on vu que $\overline{T_P}$ est finie.

Soit $y' \in \mathcal{A}$ $\hat{C}$ $\overline{T_P} \vee y'$ libre, pour les m
raisons que ci-dessus, on a $|\overline{T_P} \vee y'| \leq p$

$\hat{C}$ $|\overline{T_P} \vee y'| = |\overline{T_P}| + |y'|$, on a

$$|y'| \leq |\overline{T_P} \vee y'| \leq p \quad \blacksquare$$

Fixons donc y_0' un élément de $\mathcal{A}$ de taille maximale

• $\Pi_q \overline{T_P} \vee y_0'$ base de E

• Déjà, $\overline{T_P} \vee y_0'$ libre, par defⁿ de y_0' ($\in A$)

Soit $x \in E$. $\Pi_q x \in \text{Vect}(\overline{T_P} \vee y_0')$

$\hat{C}$ y_0' est génératrice de E , x s'écrit
comme une CL finie de y_0' .

Fixons donc $y_1, \dots, y_N$ des éléments
de la famille y_0' et $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{K}$ tq

$$x = \sum_{i=1}^N \lambda_i y_i$$

écher

Pieux, mq tous les éléments de $\mathcal{G}$ sont dans
 $\text{Vect}(\overline{\mathbb{P}} \vee \mathcal{G}')$

Ecrivons $\mathcal{G} = (g_i)_{i \in I}$ où I ensemble
 et où $\forall i \in I, g_i \in E$

et $\mathcal{G}_0 = (g_{i_1}, \dots, g_{i_N})$ où $N \in \mathbb{N}$ et où
 $i_1, i_2, \dots, i_N \in I$

Soit $i \in I$. Mq $g_i \in \text{Vect}(\overline{\mathbb{P}} \vee \mathcal{G}_0)$

1^{er} cas : $i \in \{i_1, \dots, i_N\}$: c'est ok (Ac)

2^e cas : i n'est pas l'un des i_k

$$\text{Ocsd} \quad \mathcal{G}' := \mathcal{G}_0 \vee (g_i)$$

$$\text{On a} \quad \mathcal{G}' \leq \mathcal{G} \quad \text{et} \quad |\mathcal{G}'| > |\mathcal{G}_0|$$

Donc $\overline{\mathbb{P}} \vee \mathcal{G}'$ ne peut pas être libre

(sinon on aurait $\mathcal{G}'$ ds $\mathcal{F}$)

Ecrivons $\overline{\mathbb{P}} = (z_1, \dots, z_q)$ avec $(-)$

Fixons $\mu_1, \dots, \mu_q, \lambda_1, \dots, \lambda_N; \lambda \in \mathbb{K}$

non tous nuls tq

inutile



Donc $(\mathcal{T} \cup \mathcal{G}_0') \cup \{y_i\}$ liée

D'après le lemme 2.2) : $y_i \in \text{Vect}(\mathcal{T} \cup \mathcal{G}_0')$

* CC : On a $\forall i \in I, y_i \in \text{Vect}(\mathcal{T} \cup \mathcal{G}_0')$

Donc : $\text{Vect}(\{y_i\}_{i \in I}) \subset \text{Vect}(\mathcal{T} \cup \mathcal{G}_0')$

Donc $\underbrace{\text{Vect } \mathcal{G}}_{=E} \subset \text{Vect}(\mathcal{T} \cup \mathcal{G}_0')$ ■

Rq** : À l'aide de l'axiome du choix, on peut démontrer ce thm sous l'hyp E ev db. (on utilise le lemme de Zorn)

b) TBI

Th : Soit E ev db

Soit $\mathcal{T}$ une famille libre de E . Alors :

$\mathcal{T}$ peut être complétée en une base de E

D/ $\hat{C}$ E ev db, fixons $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E

On sait par a) que $\exists \mathcal{G}' \subseteq \mathcal{G} : \mathcal{T} \cup \mathcal{G}'$ base de E ■

c) TBE

Th: Soit E evdf. De toute famille génératrice de E , je peux extraire une base.

D/ On applique a) avec $\overline{P} := ()$ ■

h) Dimension

a) Existence de base

Prop - R^x: Tout evdf possède une base

D/ $\hat{C}()$ est libre, d'après le TBE, je peux la compléter en une base

b) déf^e de la dimension

Prop - Déf

Soit E evdf

1) Toutes les bases de E ont m taille

2) La taille de l'une quelconque de ces bases est appelée dimension de E et est notée $\dim(E) \in \mathbb{N}$

D/ 1) Soient B_1, B_2 deux bases de E .

$$\text{Hq } |B_1| = |B_2|$$

I idée : lemme de Steinitz

• Comme B_1 est génératrice de E , on a $\textcircled{+}$

$\overline{TP}$ famille libre de $E \Rightarrow \overline{TP}$ est finie et

$$|\overline{TP}| \leq |B_1|$$

D/ cf ci-dessus

• $\hat{C} B_2$ est libre, on a donc $|B_2| \leq |B_1|$

• De $\overline{m}$: $|B_1| \leq |B_2|$

• d'où $|B_1| = |B_2|$ $\square$

Rq!! : Lorsque E est de dimension infinie, il est strictement interdit d'écrire $\dim E$.

On n'écrit pas $\dim E = \infty$!

c) Exemples

• On a $\underline{\mathbb{R}^n}$ est un evb.

On a $\dim \underline{\mathbb{R}^n} = n$

• Plus g^{alt} : $\dim \underline{\mathbb{K}^n} = n$

• R_q! : $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$ -ev. Une $\mathbb{R}$ base de $\mathbb{C}$ est $(1, i)$:
 $\forall z \in \mathbb{C}, \exists! (x, y) \in \mathbb{R}^2 : z = x + y \cdot i$
On a $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$ mais $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$

• On a $\dim M_n(\mathbb{K}) = n^2$; mieux $\dim$

$$M_{n,p}(\mathbb{K}) = n \times p$$

(une base de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ est $(E_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$)

• On a $\dim T_n^+(\mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2}$

□ En effet $T_n^+(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} \boxed{*} & \cdots & \boxed{*} \\ \boxed{*} & \ddots & \vdots \\ (0) & \cdots & \boxed{*} \end{pmatrix} \right\}$

• On a $\dim D_n(\mathbb{K}) = n$

Une base de $D_n(\mathbb{K})$ est

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & (0) \\ & 1 & \\ (0) & & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & & (0) \\ & 0 & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix} \right)$$

On pose $E := \{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid \text{tr } M = 0\}$

Fact !! : E sev $M_2(\mathbb{R})$

D/ $\hookrightarrow$

Astuce: pour mq E sev, on cherche une AL $f: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow F$ avec F ev tq $E = \text{Ker}(f)$

Idee: On prend $\text{tr}: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$

On a $\text{tr}(\cdot) \in L(M_2(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ la trace est une forme linéaire sur $M_2(\mathbb{R})$

Ainsi : E sev $M_2(\mathbb{R})$ ■

Rq: si E ev et si E' sev E : alors, il existe F ev et il existe $f \in L(E, F)$ tq

$$E' = \text{Ker}(f)$$

Ex: On sait que $T_n^+(\mathbb{R})$ sev $M_n(\mathbb{R})$

On cherche F ev et $f: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow F$ AL tq

$$T_n^+(\mathbb{R}) = \text{Ker}(f)$$

Faisons-le pour $n=3$. Ocsol

$$f: M_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \mapsto (d, h, g)$$

$$\text{On a } \text{Ker } f = T_3^+(\mathbb{R}) \quad \blacksquare$$

Rq: On a l'idée gale: si E est evdf et si on impose une relat^o supplémentaire (linéaire) aux éléments de E , on obtient:

$$F \subset E \quad \text{tg} \quad \dim F = \dim E - 1$$

• Ceci se généralise: si on impose P relations, on a envie de dire que $\dim F = \dim E - P$

Rq^{*}: On a $M_n(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{R}$ -ev.
On a $\dim_{\mathbb{R}}(M_n(\mathbb{C})) = 2n^2$

Une $\mathbb{R}$ -base de $M_n(\mathbb{C})$ est

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & i \end{pmatrix}, \dots \right)$$

d) Vocabulaire

Déf: Soit E un $\mathbb{K}$ -ev

• On dit que E est une ($\mathbb{K}$ -) droite (vectorielle) Δ_{ss}

$$E \text{ evdf et } \dim E = 1$$

• De $\overline{m}$, on dit que E est un plan Δ_{ss}
 $E \text{ evdf et } \dim E = 2$

Exemples :

• $\mathbb{R}^2$ est un plan

• Ocsd $E := \{ (u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_n \text{ est 2-periodique} \}$

On a vu que
est une base de E

D/ • Caractère générateur

Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 2-periodique

On a $(u_n)_n = u_0 \underline{\alpha} + u_1 \underline{\beta}$

(AC) (AF)

• Elle est libre

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \mid \lambda \underline{\alpha} + \mu \underline{\beta} = (0, 0, \dots)$

On a donc $\lambda \underbrace{\alpha_0}_{=1} + \mu \underbrace{\beta_0}_{=0} = 0$

Donc $\lambda = 0$. De $\overline{m}$ pour l'indice m :

On a $\mu = 0$ ■

CC1 : $\{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u \text{ 2-periodique} \}$ est un plan

- $\mathbb{R}_1[x]$ est un plan : une base de $\mathbb{R}_1[x]$ est $(1, X)$

Fait ! Δ piège

$\mathbb{R}_n[x]$ evdb et $\dim(\mathbb{R}_n[x]) = n+1$

D/ une base de $\mathbb{R}_n[x]$ est $(\underbrace{x^0}_{\downarrow 1}, x^1, \dots, x^n)$

- Exemple très intéressant.

$$\text{Ocsd} \quad E := \{ f \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f'' = -f \}$$

Fait ! (Astuce classique)

$$\forall f \in E, \quad f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

D/ Soit $f \in E$

On mq par rec sur n que $\forall n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$n=0$: ok car $f \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$n=1$: ok car $f \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ donc f' est dérivable donc f' est $\mathcal{C}^0$

$$(\text{En gal } \mathcal{D}^k(I, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^{k-1}(I, \mathbb{R}))$$

↑
(AC)

Hérédité : On procède par rec double

Soit $n \in \mathbb{N}$, On sq $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ et $f' \in \mathcal{C}^{n-1}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$

Mq f est $\mathcal{C}^{n+2}$ ie mq f' est $\mathcal{C}^{n+1}$; ie mq f'' est $\mathcal{C}^n$

Or, $f'' = -f$ et f est $\mathcal{C}^n$

Donc f'' est $\mathcal{C}^n$ ■

On admet que $E = \text{Vect}(\cos, \sin)$

D/ $\oplus$ $y'' = -y \rightarrow y'' + y = 0 \rightarrow P = X^2 + 1.$

$$\rightarrow Z_{\mathbb{C}}(P) = \{i, -i\} = \left\{ 1 \cdot e^{i\pi/2}, 1 \cdot e^{-i\pi/2} \right\}$$

bug

$$\rightarrow \text{Sol}(y'' = -y) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{at} \left(\alpha \cos(bt) + \beta \sin(bt) \right) \\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right.$$

(Rq : On écrit $Z_{\mathbb{C}}(P) = \{r e^{\pm i\theta}\}$ si on

regarde $U_{n+2} = a U_{n+1} + b U_n$

$$\rightarrow E_{a,b} = \left\{ \left(r^n \left(\alpha \cos(n\theta) + \beta \sin(n\theta) \right) \right) \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

Cas des EDL d'ordre 2

$$\text{On écrit } Z_{\mathbb{C}}(P) = \{a+ib, a-ib\}$$

$$I_{cl}: \quad \mathbb{Z}_4(P) = \{0 \neq i, 0-i\} \quad \begin{matrix} a=0 \\ b=1 \end{matrix}$$

Donc $\text{Sol}(y'' = -y) =$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \alpha \cos(t) + \beta \sin(t) \end{array} ; (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Fait (admis)

$$\begin{aligned} E &= \{ f \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f'' = -f \} \\ &= \text{Vect}(\cos(\cdot), \sin(\cdot)) \end{aligned}$$

Fait: $(\cos, \sin)$ est libre.

$$D^2 / \oplus \quad \lambda \cos + \mu \sin = \tilde{0} \quad \text{puis on évalue en } 0 \text{ et en } \frac{\pi}{2} \quad \blacksquare \text{ (AF)}$$

$$D^2 / \oplus \quad \mu \left(\lambda \sin + \mu \cos = \tilde{0} \right) \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \lambda \left(\lambda \cos - \mu \sin = \tilde{0} \right)$$

↓ on somme

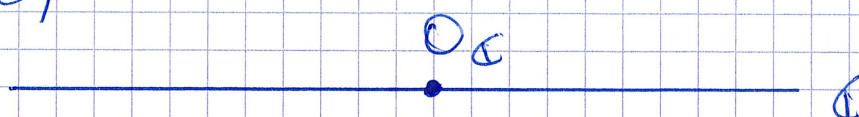
$$(\mu^2 + \lambda^2) \cos(\cdot) = \tilde{0} \xrightarrow{\cos \neq \tilde{0}} \lambda^2 + \mu^2 = 0$$

$$\rightarrow \lambda = \mu = 0 \quad \blacksquare$$

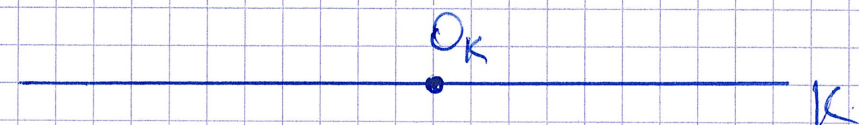
cc1: $\text{Sol}(y'' = -y)$ est un plan
 $\equiv (\mathbb{R}^2) \text{ Vect}(\cos, \sin)$

- $\mathbb{C}$ est une $(\mathbb{C})$ droite

(d^n) (bizarre)



$(K \text{ corps})$



e) Cas de la dimension nulle

Fait - R^x : Soit E evdb. Alors :

$$\dim E = 0 \iff E = \{0_E\}$$

(d^n)

• 0_E

D/ inutile
 $(\Leftarrow)$

$\hookrightarrow$: $E = \{0_E\}$ alors $()$ est une base de E .

1°) $()$ est libre (R^x , on quantifie sur le vide)

2°) $()$ est génératrice : en effet, $0_E = \sum_{\text{vide}}$

$(\Rightarrow)$ Orsq $\dim E = 0$. Donc $()$ est une base de E .

Soit $x \in E$. On a $x = \sum_{\text{vide}} = 0_E$

5) Caractérisation des espaces de dimension infinie.

Prop: Soit E ev. Alors

E est de dimension infinie $\Leftrightarrow \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$
: $(x_n)_n$ est libre

D/ $\Leftrightarrow$ On mq la contraposée.

Mq E evdf $\Rightarrow \exists (x_n) \in E^{\mathbb{N}} : (x_n)$ libre.

Osq E evdf $\textcircled{R^*}$ On note $p := \dim(E)$

ORPA et on fixe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ libre.

On a en particulier $(x_0, \dots, x_p) \in E^{p+1}$
est libre.

C'est en contradiction avec le lemme de Steinitz.

$\Rightarrow$ Osq E de dimension infinie.

On construit $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ par (rec)

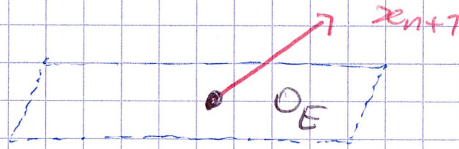
$n=0$ Déjà $E \neq \{0_E\}$ (sinon on aurait
 E evdf avec $\dim E = 0$)

Fixons $x_0 \in E \setminus \{0_E\}$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Or on a construit
 $(x_0, \dots, x_n) \in E^{n+1}$ une famille libre.
 $\hat{C} \in \Gamma$ n'est pas un evdf, la famille
 $(x_0, \dots, x_n)$ n'est pas génératrice.

(d)ⁿ

E)



Fixons donc $x_{n+1} \in E \setminus \text{Vect}(x_0, \dots, x_n)$.

On a $(x_0, \dots, x, x_{n+1})$ est libre

D/ (AF) / oral ■

Bilan; on a construit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tq

$\forall N \in \mathbb{N}, (x_0, \dots, x_N)$ libre.

Rappel : (5) $\rightarrow$ subtil

Une famille TP est libre ssi l'les ses
 sous familles finies sont libres.

III) Propriété des evdb

1) Famille des evdb !!

a) Petites familles, grandes familles

Prop $\square$:

Soit E evdb. Soit $\mathcal{F}$ une famille finie de E
Alors :

1) a) $\mathcal{F}$ libre $\Rightarrow |\mathcal{F}| \leq \dim(E)$

b) $\mathcal{F}$ génératrice dans $E \Rightarrow |\mathcal{F}| \geq \dim(E)$

c) $\mathcal{F}$ base de $E \Rightarrow |\mathcal{F}| = \dim(E)$

2) (version contraposée)

a) $|\mathcal{F}| > \dim(E) \Rightarrow \mathcal{F}$ est liée

b) $|\mathcal{F}| < \dim(E) \Rightarrow \mathcal{F}$ n'est pas génératrice de E

D/ $(\mathbb{R}^n)^{\square}$ $\hat{C}$ E evdb, fixons $\mathcal{B}$ base de E

On note n la dimension de E , $n := \dim(E)$

On a $|\mathcal{B}| = n$

1) a) Soit $\mathcal{F}$ libre.

(D/ ORPA et osg $|\mathcal{F}| \geq n+1$; OCSD $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$
tg $|\mathcal{F}| = n+1$; d'après le lemme de Steinitz,
elle est liée (Abs))

(D1) D'après le TBI, on peut compléter

T_P en une base de E . Fixons $\mathcal{Y}$ tq $T_P \cup \mathcal{Y}$ base de E .

Ettes ces bases ont la même taille, on a :

$$\begin{aligned} |T_P \cup \mathcal{Y}| &= n, \text{ donc } |T_P| \leq n \\ &= \underbrace{|T_P| + |\mathcal{Y}|}_{\in \mathbb{N} \geq 0} \end{aligned}$$

b) Or T_P génératrice de E .

D'après le TBE, fixons $\mathcal{Y}' \subseteq \mathcal{Y}$ tq $\mathcal{Y}'$ base de E .

$$\text{On a } n = |\mathcal{Y}'| \leq |\mathcal{Y}| \quad \blacksquare \text{ b)}$$

c) $\Rightarrow$ Or T_P base de E donc T_P libre ;
donc $|T_P| \leq n$.

Mais T_P génératrice dans E ; donc

$$|T_P| \geq n \quad \blacksquare \text{ c)}$$

2) On contredit 1) $\blacksquare$

Dz / Titouan

Un des $\oplus$ grands reflexes de l'Algèbre Lin.

Une AL peut-être définie par décret
(des valeurs qu'elle prend sur une base)

Fixons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$
des bases respectives de E et F .

Ocsd l'AL $u: E \rightarrow F$ définie par

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, u(e_i) = f_i \quad \text{décret}$$

$\hat{u}$ "transporte" la base $\mathcal{B}$ sur la base $\mathcal{C}$

donc DALC : u iso $\blacksquare$

3) ^M Critère d'iso en cas d'égale dimension:

(-50%) ^M

Thm : Soient E, F evdf tq $\dim(E) = \dim(F)$

Soit $f: E \rightarrow F$ AL. Alors on a

$$f \text{ inj} \iff f \text{ surj} \iff f \text{ bij}$$

Corollaire $\square$: $E \text{ evdf}$; $f \in L(E)$ Alors :

$$f \text{ inj} \Leftrightarrow f \text{ surj} \Leftrightarrow f \text{ bij (iso donc auto)} \\ \text{ie } f \in GL(E)$$

DI $\hat{C}$ $E \text{ evdf}$, on note $n := \dim(E)$ et on fixe $(e_1, \dots, e_n) \in E^n$ une base de E .

$$f \text{ inj} \Rightarrow f \text{ surj}.$$

Osq $f \text{ inj}$. Donc DALL : $f(e_1), \dots, f(e_n)$ est libre

$\hat{C}$ cette famille est de taille n et que la $\dim(E) = n$, DALL, on voit que $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est génératrice de F donc f est surj.

$$f \text{ surj} \Rightarrow f \text{ bij}.$$

Osq $f \text{ surj}$. Donc $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est génératrice de F .

$\hat{C}$ elle est de taille n et $\hat{C} \dim(F) = n$,

DALL, on voit qu'il s'agit d'une base de F .

Donc f est un iso $\Rightarrow$

$$f \text{ bij} \Rightarrow f \text{ inj} : \text{ok} \blacksquare$$

h) $L(E, F)$ est un evdf

Prop.

Soient E, F evdf. Alors

$$1) L(E, F) \text{ evdf}$$

$$2) \dim [L(E, F)] = \dim(E) \times \dim(F)$$

Lemme : $\textcircled{+} \dim(E^p) = p \dim(E).$

D/ ok car $\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$ puis $\textcircled{+}$

D/ élément

Notons $n := \dim E$ et $p := \dim F$

Fixons $(e_1, \dots, e_n) \in E^n$ et $(f_1, \dots, f_p) \in F^p$

des bases de E et F respectivement

Une AL peut être définie par décret, pour $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $j_0 \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on définit

$u_{i_0, j_0} \in L(E, F)$ par :

$$\begin{cases} u_{i_0, j_0}(e_{i_0}) = f_{j_0} \\ \forall i \neq i_0, u_{i_0, j_0}(e_i) = 0_F \end{cases}$$

Prop (1) $(u_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est une base de $L(E, F)$

(10) Caractère libre :

Soit $(\lambda_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ une famille de scalaires $\lambda_{i,j}$

$$(*) \quad \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \lambda_{i,j} u_{i,j} = 0_{L(E,F)}$$

Soit $i_0 \in [1, n]$, on évalue (*) en i_0

On obtient

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \lambda_{i,j} u_{i,j}(e_{i_0}) = 0_F$$

nul si $i \neq i_0$

$$(*) = \sum_{j=1}^p \lambda_{i_0,j} \cdot \beta_j$$

$$ie \quad \sum_{1 \leq j \leq p} \lambda_{i_0,j} \beta_j(e_{i_0}) = 0_F$$

Comme $(\beta_j)_j$ est une bas, elle est libre.

Donc : $\forall j, \lambda_{i_0, j} = 0$

Ceci étant vrai pour tout i_0 : On a $\forall i, j, \lambda_{i, j} = 0$

Donc, on a la liberté

(*) Caractère générateur $\uparrow \oplus$

Soit $w \in L(E, F)$.

(B°) Analyse-synthèse

$$w = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \lambda_{i,j} v_{i,j} \quad (e_{i_0})$$

est $\neq$ seulement
si $i = i_0$

$$\rightsquigarrow \underbrace{w(e_{i_0})}_{\in F} = \sum_{1 \leq j \leq p} \lambda_{i_0, j} b_j$$

Qui sont les $\lambda_{i_0, j}$? Ce sont les coordonnées de $w(e_{i_0})$ dans la base $(b_j)_j$ de

Synthèse

Soit $i_0 \in [1, n]$

$\hat{c} \quad \underline{w(e_{i_0})} \in F$ et $\hat{c} \quad (b_1, \dots, b_p)$ base de F

fixons $\lambda_1^{[i_0]}, \dots, \lambda_p^{[i_0]} \in K$ tq

$$w(e_{i_0}) = \lambda_1^{[i_0]} b_1 + \dots + \lambda_p^{[i_0]} b_p$$

$$Mq \quad w = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \lambda_j^{[i]} v_{i,j}$$

$$\underline{D^{(A)}} / Mq \quad \forall x \in E, w(x) = \sum_{(-)} (-) (x)$$

(R^x) $f=g \rightsquigarrow$ c'est une $\forall$ -assertion

$$\forall x \in E, f(x) = g(x)$$

Soit $x \in E$

On écrit $x = \sum_{i=1}^n \mu_i e_i$ avec $\forall i, \mu_i \in K$
 et $(e_i)_i$ base de E

On calcule :

$$w(x) = \sum_{i=1}^n \mu_i w(e_i) \quad \text{par def des } \lambda_j^{[i]}$$

$$= \sum_{j=1}^p \lambda_j^{[i]} \beta_j$$

$$= \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n \mu_i \lambda_j^{[i]} \beta_j$$

$$= \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n \mu_i \lambda_j^{[i]} \beta_j \quad \text{c'est } v_{i,j}(e_i)$$

$$\sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n \mu_i \lambda_j^{[i]} v_{i,j}(e_i)$$

échec

Plus simple:

On calcule $\sum_{i=1}^n \lambda_i^{[i]} v_{i,j}(x)$

Si $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a

$$v_{i_0,j}(x) = v_{i_0,j} \left(\sum_{i=1}^n \mu_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n \mu_i \underbrace{v_{i_0,j}(e_i)}_{\substack{= \beta_j \\ \text{si } i=i_0}} \\ = \mu_{i_0} \beta_j$$

$$\text{Donc : } \sum_{i=1}^n \lambda_j^{[i]} v_{i,j}(x) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \lambda_j^{[i]} \mu_i \beta_j$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\sum_j \lambda_j^{[i]} \beta_j \right) \mu_i = \sum_{i=1}^n \mu_i w(e_i)$$

$$\uparrow \\ \sum_{j=1}^p \lambda_j^{[i]} \beta_j = w(e_i)$$

$$= w \left(\sum_{i=1}^n \mu_i e_i \right)$$

$$= w(x) \quad \blacksquare \textcircled{a}$$

D1/⑥ $M_q \quad w = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \lambda_j^{[i]} u_{i,j}$

Idee: On mq elles coïncident sur une base
 ie mq $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, w(e_i) = \left(\sum_{j=1}^p \lambda_j^{[i]} u_{i,j} \right) (e_{i_0})$

Soit $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$

On calcule

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \lambda_j^{[i]} u_{i,j} (e_{i_0}) = \sum_{j=1}^p \lambda_j^{[i_0]} b_j$$

$$= w(e_{i_0}) \text{ par déf. des } \lambda_j^{[i]}$$

CC1: $(u_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est une base de $L(E, F)$
 de taille $m \times p$
 $\swarrow \quad \searrow$
 $\dim(E) \quad \dim(F)$

D2/① $n = \dim(E)$
 $(e_1, \dots, e_n)$ base de E

Ocsd

$$\underline{\Phi} : L(E, F) \longrightarrow F^n \\ \beta \longmapsto (\beta(e_1), \dots, \beta(e_n))$$

Alors : • $\underline{\Phi}$ est linéaire

• $\underline{\Phi}$ est un iso

(! on sait DALC :

$$\beta \text{ iso} \iff \underline{\Phi}(\beta) \text{ base de } F$$

(1°) Calculons $\text{Ker}(\underline{\Phi})$

Soit $\beta \in \underline{\Phi}^{-1}(0_{F^n})$; on a $\forall i, \beta(e_i) = 0_F$

$\hat{c}$ β est nulle sur la base $(e_1, \dots, e_n)$:

$$\beta = 0_{L(E, F)}$$

cc : $\text{Ker } \underline{\Phi} = \{0_{L(E, F)}\}$, et $\underline{\Phi}$ inj. ■

(2°) Soit $\forall q, \underline{\Phi}$ surj

$$\text{Soit } (y_1, \dots, y_n) \in F^n$$

⚡ Astuce DALC : Soit $\beta : E \rightarrow F$ l'AL
définie par $\forall i \in [1, n], \beta(e_i) = y_i$
(par décret)

On a $\underline{\Phi}(e) = (y_1, \dots, y_n)$ ■

Bilan : $\underline{\Phi} : L(E, F) \xrightarrow{\sim} F^n$ iso

Donc $(\mathbb{R}^x)$ $\dim(L(E, F)) = \dim(F^n)$
 $= n \cdot \dim(F)$ ■
 $\dim E$

D³

Lemme (v1) (en 11e dimension)

$$\left\{ \begin{array}{l} E \xrightarrow{\sim} F' \\ F \xrightarrow{\sim} F' \end{array} \right\} \Rightarrow L(E, F) \xrightarrow{\sim} L(E', F')$$

D¹² (exo) ⊕ Fixons $E \xrightarrow[\sim]{\phi} E'$ et $F \xrightarrow[\sim]{\psi} F' (-)$ ■

Rappel : Description de $L(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$

Ocsol $\underline{\mathcal{I}} : M_{n,p}(\mathbb{K}) \longrightarrow L(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$
 $A \longmapsto U_A = M_{p,1}(\mathbb{K})$

où $U_A = M_{p,1}(\mathbb{K}) \longrightarrow M_{n,1}(\mathbb{K})$
 $X \longmapsto A \cdot X$

Prop: 1) Ψ : AL

2) Ψ inj

3) Mieux; Ψ iso

D/ 1) (AF) 2) (AF) + + + + 3) $(AC)/(AF)$ ■

Fin : On fixe $\mathcal{D}$ $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ des bases
respectives de E et F

et notons $n := \dim(F)$ et $p := \dim(E)$

On a $CL_{\mathcal{B}} : \mathbb{K}^p \xrightarrow{\sim} E$ et $CL_{\mathcal{C}} : \mathbb{K}^n \xrightarrow{\sim} F$

D'après le lemme :

$$L(E, F) \cong L(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$$

$$\cong M_{n,p}(\mathbb{K})$$

description

↓ de dimension $n \times p$ ■

V Sommes directes et Théorème du rang.

1) Dimension d'une somme directe.

Prop: Soit E ev. Soient F, G sev^{df} E ,
qui sont en somme directe. Alors :

$$\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$$

D/ $\hat{C}$ F est un ev^{df}, fixons $(e_1, \dots, e_n) \in F^n$

une base de F , avec $n \in \mathbb{N}$ et $\forall i, e_i \in F$.

De $\bar{m}$, fixons $(b_1, \dots, b_p) \in G^p$ une base de
 G avec $p \in \mathbb{N}$ et $\forall j, b_j \in G$.

On a vu que $(e_1, \dots, e_n, b_1, \dots, b_p)$ est une base
de $F \oplus G$.

D/ (AF) ■

cc1 : 1) $F \oplus G$ ev^{df}

2) $\hat{C} \mid (e_1, \dots, e_n, b_1, \dots, b_p) \mid = n+p$, on

a bien $\dim(F \oplus G) = n+p$ ■

D² / Ocsd

$$\varphi: F \times G \longrightarrow F \oplus G$$
$$(x_F, x_G) \longmapsto x_F + x_G$$

On a φ AL, on a φ surj par defo de $F \oplus G$.

En fin, on sait que

φ inj $\Leftrightarrow F$ et G sont
en somme directe

Bilan : $F \times G \xrightarrow[\varphi]{\sim} F \oplus G$

Donc $\dim(F \times G) = \dim(F \oplus G)$ etc ■

2) Supplémentaire en dimension finie

Prop : Soit E evdf et soit $F \text{ sev } E$

Alors : F possède un supplémentaire dans E .

D/ $\hat{C}$ E evdf, F evdf, Fixons donc

$(e_1, \dots, e_p) \in F^p$ une base de F , où $p \in \mathbb{N}$

et où $\forall i, e_i \in F$

$\hat{C}$ $(e_1, \dots, e_p)$ base de F : $(e_1, \dots, e_p)$ est une
famille libre de E

D'après le TBI. (th de la base incomplète),

fixons $q \in \mathbb{N}$ et $b_1, \dots, b_q \in E$ tq

$(e_1, \dots, e_p, b_1, \dots, b_q)$ base E

Notons $G := \text{vect}(b_1, \dots, b_q)$

Alors : (1°) $F \cap G = \{0_E\}$

D/ (AF) ⁺⁺

(2°) $F \oplus G = E$

D/ (AF) ⁺⁺

Bien : on a $F \oplus G = E$

I.e, G est un supplémentaire de F dans E ■

Rq* : C'est encore vrai en dim g.c. (en utilisant l'axiome du choix)

3) Rang !!

a) déf. !!

Déf : Soient E, F ev et soit

$E \xrightarrow{f} F$ une AL

* On dit que f est de rang fini Δ_{ssi}

$\text{Im}(f)$ est de dimension finie

* On appelle alors rang de f et on note $\text{rg}(f)$ l'entier naturel défini par

$$\text{rg}(f) := \dim(\text{Im}(f))$$

Rq: $F \text{ evdb} \Rightarrow$ toute AL $f: E \rightarrow F$

est de rang fini $\overline{m}$ si: E est de dimension infinie

b) Exemples

• Une forme linéaire est toujours de rang fini
puisque c'est $f: E \rightarrow \mathbb{K}$

$$\dim(\mathbb{K}) = 1$$

• Si: $f \in L(E, \mathbb{K})$ et si: $f \neq 0_{E^*}$, on sait DALL
que:

• f est surjective

On a alors: $\text{Im}(f) = \mathbb{K}$

et donc $\dim(\text{Im}(f)) = 1$

Bilan: $\left. \begin{array}{l} f \in E^* \\ f \neq 0_{E^*} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{rg}(f) = 1$

Lemme $\textcircled{T}$

$E \text{ evdb}$; $(e_1, \dots, e_n)$ base E ; $f: E \rightarrow F$ AL

Alors (rappel):

1) $\textcircled{R^*}$ $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$

2) Ainsi: $\text{rg}(f) = \dim(\text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)))$

D/ ok

• OCSol $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

$$U_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

Calculons $\text{rg}(U_A)$

OCSol $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

DA CQP, on a

$$\text{rg}(U_A) = \dim [\text{Vect}(U_A(\varepsilon_1), U_A(\varepsilon_2), U_A(\varepsilon_3))]$$

On a $U_A(\varepsilon_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, U_A(\varepsilon_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, U_A(\varepsilon_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$

Notons $F := \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}\right)$

On a $F \text{ sev } \mathbb{R}^3$

donc $F \text{ est } \underline{\text{d.f.}}$

donc $\dim(F) \leq \dim(\mathbb{R}^3) = 3$

Ici, il y a une chute de dimension, car les trois vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ sont liés

Notons : $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

$$v_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$v_3 := \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

On a $v_2 - v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$v_3 - v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, on a $v_2 - v_1 = v_3 - v_2$

Donc

$$V_3 - 2V_2 + V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi: (V_1, V_2, V_3) liée

(Rq: (V_1, V_2, V_3) est une famille génératrice de F

(AC) D'après le TBE: il existe

$B \subset (V_1, V_2, V_3)$ tq B base de F)

$$\hat{C} \quad V_2 = \frac{V_1 + V_3}{2}$$

$$\text{On a) } \text{Vect}(V_1, V_2, V_3) = \text{Vect}(V_1, V_3) = F$$

Donc (V_1, V_3) est une famille génératrice de F

Or (V_1, V_3) libre

car $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $V_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$ ne sont pas
colinéaires

Bilan: (V_1, V_3) est une famille libre et génératrice
dans F .

Donc $\dim(F) = |(V_1, V_3)| = 2$ et
donc $\boxed{\text{rg}(U_A) = 2}$

c) premières propriétés

Prop ^⑦ Soient E, F ev. de $\mathcal{B}$; $E \xrightarrow{\mathcal{B}} F$ AL

Alors :

1) $\text{rg}(\mathcal{B}) \leq \dim(F)$

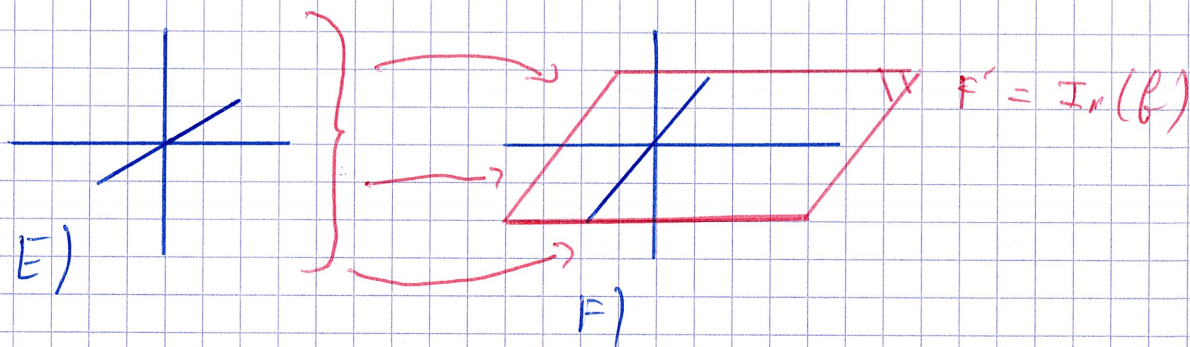
2) $\text{rg}(\mathcal{B}) \leq \dim(E)$

3) donc $\text{rg}(\mathcal{B}) \leq \min(\dim(E), \dim(F))$

D/ 1) Notons $\mathcal{B}' \mid F' := \text{Im}(\mathcal{B})$

1) On a $F' \subset F$ donc $\dim(F') \leq \dim(F)$
" $\text{rg}(\mathcal{B})$ par def°

schéma



2) On a $\mathcal{B}' \mid F' : E \rightarrow F'$ surj

DALC : $\dim(E) \geq \dim(F') = \text{rg}(\mathcal{B})$

3) ok ■

d) Les particuliers importants

E evdb

$n := \dim(E)$

$F' := \text{Im}(f)$

F evdb

$p := \dim(F)$

$f: E \rightarrow F$ AL

Prop 1: $\text{rg}(f) = p \iff f$ surjective

On dit que le rang est plein à l'arrivée

D/ $(\Rightarrow) f \text{ surj} \Rightarrow F' = F \Rightarrow \dim(F') = \dim(F) = p$

$(\Rightarrow)$ ~~↓~~ -50%

Osq $\text{rg}(f) = p$. On a donc $\dim(F') = \dim(F)$

C' F' sev F , on a DALC (-50%): $F = F'$

Ie $\text{Im}(f) = F$ ie f surj ■

Prop 2: $\text{rg}(f) = 0 \iff f$ est nulle

D/ $(\Leftarrow)$ Osq f nulle. Donc $\text{Im}(f) = \{0_F\}$ donc

$\dim(F') = 0$ ■ $(\Rightarrow)$

$(\Rightarrow)$ Osq $\text{rg}(f) = 0$. Donc $\dim(F') = 0$

Donc F' est l'espace nul ie $F' = \{0_F\}$.

Donc f est nulle

Ie $f = 0_{L(E,F)}$

Prop 3 : $\text{rg}(\beta) = n \iff \beta \text{ inj}$

On dit que le rang de β est plein au départ

D/ $(\Leftarrow)$

Osq $\beta \text{ inj}$. On a vu que $\beta|^{F'} : E \rightarrow F'$ surj

Or, comme $\beta \text{ inj}$, on a aussi $\beta|^{F'} \text{ inj}$

Bilan : $\beta|^{F'} : E \xrightarrow{\sim} F'$ est surj et inj, est iso

Donc $\dim(E) = \dim(F')$ ie $n = \text{rg}(\beta)$ $\Leftarrow$

D/ $(\Rightarrow)$ Osq $\dim(E) = \dim(F')$

D' On a $\beta|^{F'} : E \rightarrow F'$ qui est surj

C' $\dim(E) = \dim(F')$, DALC (-50%) on a donc $\beta|^{F'} \text{ bij}$ et donc inj

Donc $\beta \text{ inj}$ $\blacksquare$

D²/ Fixons $(e_1, \dots, e_n)$ base de E

On sait que $(\beta(e_1), \dots, \beta(e_n))$ est une famille génératrice de F' .

Or, on a $\dim(F') = \text{rg}(\beta) = n = |\beta(e_1), \dots, \beta(e_n)|$

Ainsi, $(\beta(e_1), \dots, \beta(e_n))$ est une famille génératrice de F' "de bonne taille"

DALC (-50%) : c'est une base.

Donc c'est une famille libre de F'

Ainsi, $\beta : E \rightarrow F$ envoie la base $(e_1, \dots, e_n)$ sur

une famille libre. DALC : f est inj. ■

Prop 4^(T): E evdB ; $n = \dim(E)$

$$f \in L(E)$$

Alors $\text{rg}(f) = n \iff f$ iso (ie f auto
ie $f \in GL(E)$)

On dit que le rang de f est plein.

DI (←) Orsq f iso. Donc f surj.

$$\text{Donc } \text{Im}(f) = E$$

$$\text{Donc } \text{rg}(f) = n$$

$\Rightarrow$ Orsq $\text{rg}(f) = n$. Ainsi $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(E)$

$\hat{=}$ $\text{Im}(f)$ sev E , on a $\text{Im}(f) = E$
-50%

En effet, si un sev est de dimension pleine alors il est plein "

Donc f est surj

Or E evdB et $f \in L(E)$ M
(R^x) $\hat{=}$ f surj, f bij
ie f iso ■

Bilan : Soit $f \in L(E)$

$\text{rg}(f)$	f
0	f est nulle (f n'est pas du tout un iso)
<u>1</u>	<u>f est très simple</u>
$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	" f n'est pas loin d'être un iso"
n	f est un iso

e) rang de la composée

Prop!!

$$\text{Ocsd} \quad E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \quad \text{ev db}$$

Alors on a :

$$1) \text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(g)$$

$$2) \text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(f)$$

$$3) \text{ Ainsi, } \text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg}(f), \text{rg}(g))$$

D/ ① On sait que $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$

donc d'après DALC, comme $\text{Im } g$ est d.f., on a

$$\dim(\text{Im}(g \circ f)) \leq \dim(\text{Im}(g))$$

$$\text{②} \quad \text{Mq} \quad \text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(f)$$

$$\text{ie mq} \quad \dim(\text{Im}(g \circ f)) \leq \dim(\text{Im}(f))$$

On a $g|_{\text{Im}(f)} : \text{Im}(f) \rightarrow E$ donc

DALCP,

$$\text{rg}(g|_{\text{Im}(f)}) \leq \dim(\text{Im}(f))$$

$$\text{Donc comme } g \circ f = g|_{\text{Im}(f)} \circ f$$

$$\text{On a} \quad \dim(\text{Im}(g \circ f)) \leq \text{rg}(g|_{\text{Im}(f)})$$

$$\text{d'après donc } \text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(f)$$

③ ok!

$$\begin{aligned} \text{D/}^2 \text{ d) On a } \text{Im}(g \circ f) &= (g \circ f)(E) \\ &= g(f(E)) = g(\text{Im}(f)) \end{aligned}$$

$$\text{4) On a } \text{Im}(f) \subset F \text{ donc } g(\text{Im}(f)) \subset g(F) \\ \text{Im}(g)$$

$$\text{Bilan : } \text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$$

$$\text{Donc DALC } \dim(\text{Im}(g \circ f)) \leq \dim(\text{Im}(g))$$

$$\text{ie } \text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(g)$$

2) On a $g|_{\text{Im}(f)} : \text{Im}(f) \longrightarrow G$

On a $(g|_{\text{Im}(f)}) = g|_{\text{Im}(f)}(\text{Im}(f)) = g(\text{Im}(f))$
 $= g(f(E)) = (g \circ f)(E) = \text{Im}(g \circ f)$

ie $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im}(g|_{\text{Im}(f)})$

Donc $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(g|_{\text{Im}(f)}) \leq \dim(\text{Im}(f)) = \text{rg}(f)$

Car $g|_{\text{Im}(f)} : \text{Im}(f) \longrightarrow G$ est DACQP ■

b) invariance du rang après composition par un isomorphisme

Prop: $E, F \text{ ev}$; $f : E \longrightarrow F$

1) On a $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{\varphi} F'$ ($\varphi : F \longrightarrow F'$ iso)

Alors $\text{rg}(f) = \text{rg}(\varphi \circ f)$

2) On a $E' \xrightarrow{\phi} E \xrightarrow{f} F$ (où $\phi : E' \xrightarrow{\sim} E$ iso)

Alors $\text{rg}(f \circ \phi) = \text{rg}(f)$

D/ 2) On a $\text{Im}(f \circ \phi) = (f \circ \phi)(E')$

On

Déjà, DACQP : $\text{rg}(\varphi \circ f) \leq \text{rg}(f)$

Astuce : on écrit $f = \varphi^{-1}(\varphi \circ f)$

DACQP : $\text{rg}(f) \leq \text{rg}(\varphi \circ f)$ ■ 2)

M h) Formule du rang

a) Version géométrique

On se place en dim qq.

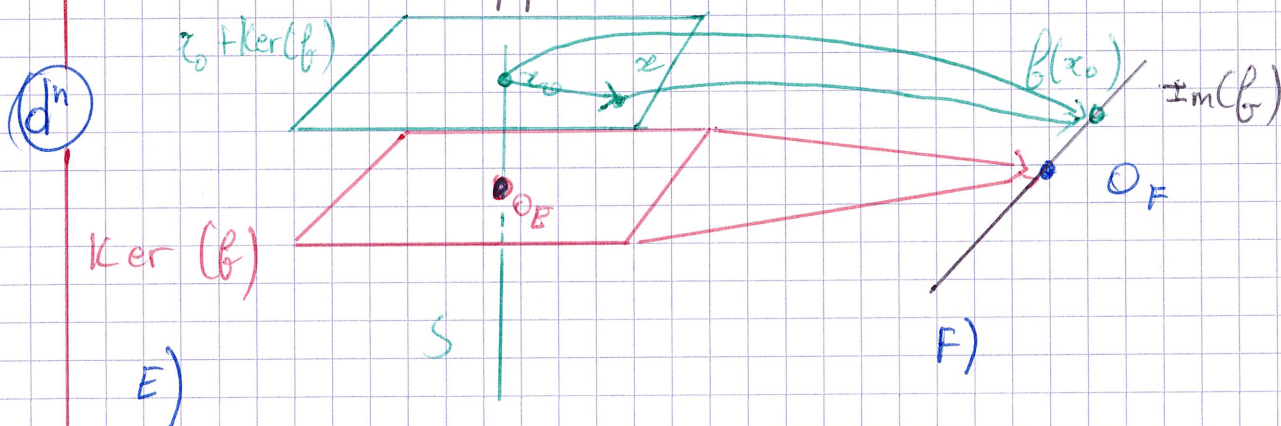
💡 Idée : On veut lier "la place que prend $f: E \rightarrow F$ " et la taille de son noyau.

Si $f: E \rightarrow F$ et si $\text{Ker}(f)$ est très grand, on a alors beaucoup de $x \in E$ tq $f(x) = 0_F$; et donc f va "occuper peu de place".

Prop (théorème géométrique du rang)

Soient E, F des evs. Soit $f: E \rightarrow F$ AL

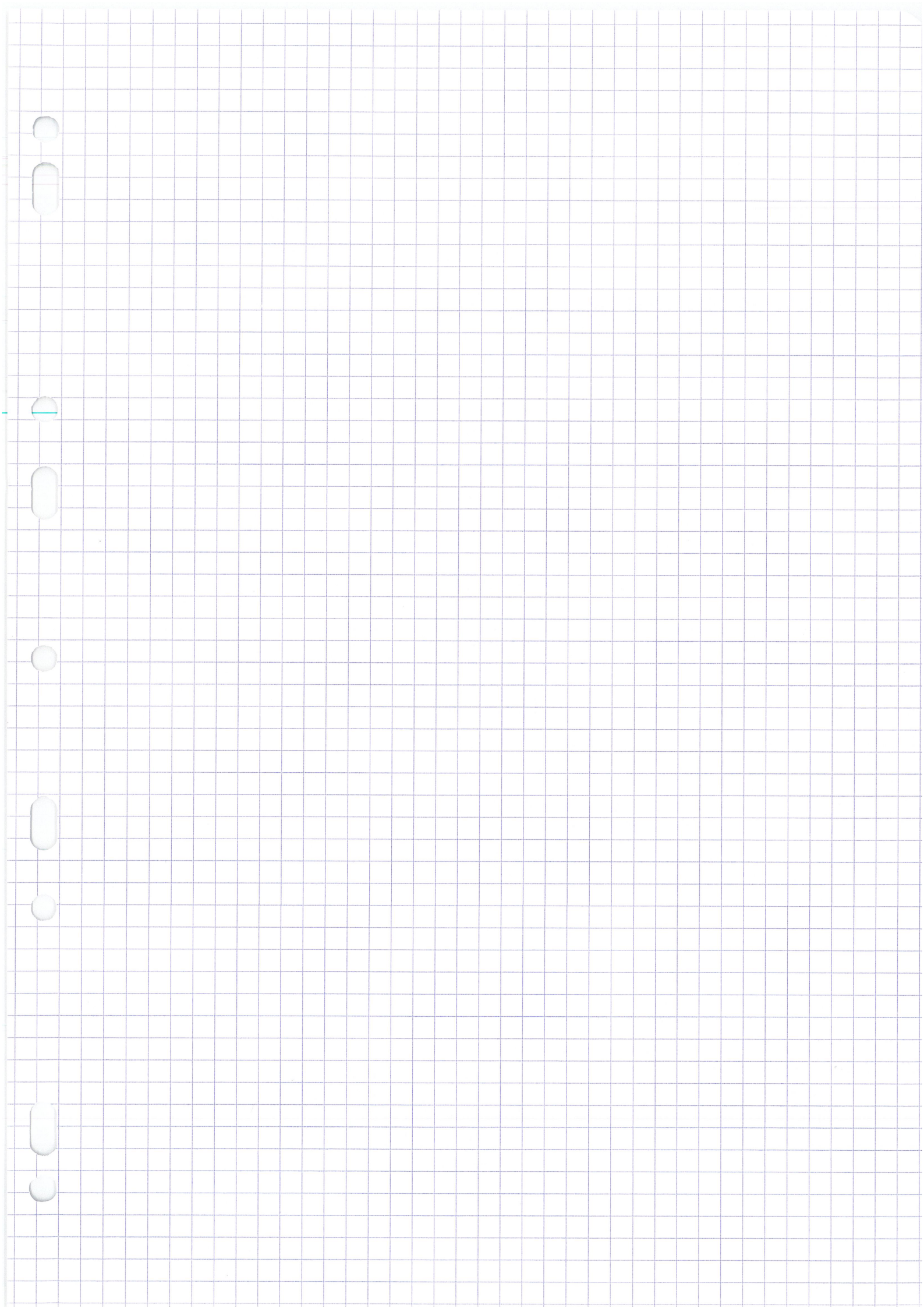
Soit S un supplémentaire de $\text{Ker}(f)$ dans E



Alors $f|_S : S \xrightarrow{\sim} \text{Im}(f)$ est un iso

I.e: tout supplémentaire de $\text{Ker}(f)$ dans E est isomorphe via (f) à $\text{Im}(f)$





D/ D'ajout $f|_S |_{\text{Im}(f)} : S \rightarrow \text{Im}(f)$ est bien définie.

• ⚠ Le caractère surjectif de $f|_S |_{\text{Im}(f)}$ n'est pas gratuit.

En effet, ce qui est gratuit c'est :

$$\forall y \in \text{Im}(f), \exists x \in E : y = f(x)$$

Mais nous, ce qu'on veut mq c'est :

$$\forall y \in \text{Im}(f), \exists x_s \in S : y = f(x_s)$$

Soit $y \in \text{Im}(f)$. Fixons $x \in E$ tq $y = f(x)$

⌢ $E = S \oplus \text{Ker}(f)$, écrivons

$$x = x_s + x_k \text{ avec } \begin{cases} x_k \in \text{Ker}(f) \\ x_s \in S \end{cases}$$

$$\text{On a } y = f(x) = f(x_s) + f(x_k) = f(x_s)$$

CC : On a bien mq $f|_S |_{\text{Im}(f)} : S \rightarrow \text{Im}(f)$ est surj 

• Caractère injectif.

(R^x) On calcule $\text{Ker}(f|_S |_{\text{Im}(f)})$

$$\text{On a } \text{Ker}(f|_S |_{\text{Im}(f)}) = \text{Ker}(f|_S) \stackrel{(R^x)}{=} \text{Ker}(f) \cap S$$

⌢ $\text{Ker}(f)$ et S sont en $\oplus$, on a $\text{Ker}(f) \cap S = \{0_E\}$

cel : $\text{Ker}(f|_S | \text{Im}(f)) = \{0_E\} : L' \underline{AL}$ est inj ■

b) ple du rang

Soit E evdf

Soit F ev

Soit $f: E \longrightarrow F$ AL

MTh : 1) $\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(E)$

2) ie $\text{rg}(f) = \dim(E) - \dim(\text{Ker}(f))$

D/ • D'jà, $\hat{C}$ E evdf, fixons S un supplémentaire de $\text{Ker}(f)$ dans E .

• D'ACQP, on a S et $\text{Im}(f)$ sont isomorphes (via f)

• $\hat{C}$ $E = S \oplus \text{Ker}(f)$, on a $\dim(E) = \dim(S) + \dim(\text{Ker}(f))$

• $\hat{C}$ $S \cong \text{Im}(f)$, on a :

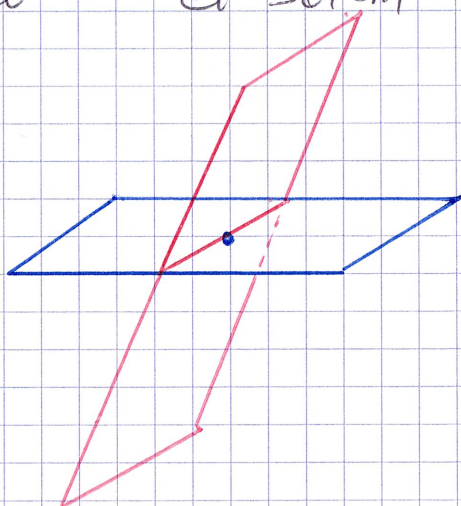
$$\dim(\text{Im}(f)) = \dim(S) = \dim(E) - \dim(\text{Ker}(f))$$

2) ok ■

5) Formule de Grassmann

Soit E ev. df et soient F, G , sev E

(d^n)
 E)

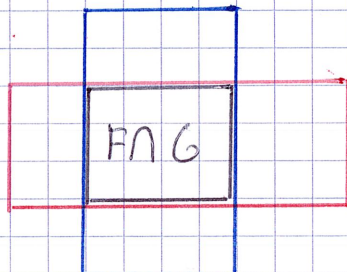


Prop $\square$:

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Dr⁷

schéma



(interdit)

⌢ $F \cap G$ est un sev E ev. df : fixons

$(e_1, \dots, e_n)$ base de $F \cap G$

• C'est une famille libre de F

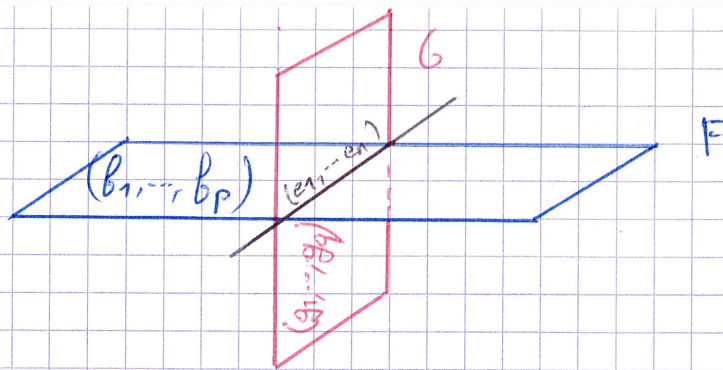
D'après le TB I : complétons-la en une base

$(\underbrace{e_1, \dots, e_n}_{\in F \cap G}, \underbrace{b_1, \dots, b_p}_{\in F})$ base de F

• De $\overline{m}$, on la complète en une base

$(\underbrace{e_1, \dots, e_n}_{\in F \cap G}, \underbrace{g_1, \dots, g_q}_{\in G})$ base de G

(dⁿ)



tg $(e_1, \dots, e_n, b_1, \dots, b_p, g_1, \dots, g_q)$

base de $F + G$

D/: • caractère générateur

Soit $x \in F + G$ qu'on écrit $x = x_F + x_G$
 ave $x_F \in F$ et $x_G \in G$

(*) $\hat{C} (e_1, \dots, e_n, b_1, \dots, b_p)$ base F ,
 fixons $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_p \in \mathbb{K}$

tg $x_F = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n + \mu_1 b_1 + \dots + \mu_p b_p$

(*) de $\overline{m}$, fixons $\theta_1, \dots, \theta_n, \rho_1, \dots, \rho_q \in \mathbb{K}$

tg $x_G = \theta_1 e_1 + \dots + \theta_n e_n + \rho_1 g_1 + \dots + \rho_q g_q$

(*) Ainsi :

$$x = \sum_{i=1}^n (\lambda_i + \theta_i) e_i + \sum_{j=1}^p \mu_j b_j + \sum_{k=1}^q \rho_k g_k \quad \blacksquare \text{ gén.}$$

• Caractère libre : !!

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_p, \theta_1, \dots, \theta_q \in K$ tq

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^p \mu_i b_i + \sum_{k=1}^q \theta_k g_k = 0_E$$

On a

$$\underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^p \mu_i b_i}_{\in F} = \underbrace{- \sum_{k=1}^q \theta_k g_k}_{\in G}$$

Donc : $-\sum_{k=1}^q \theta_k g_k \in F \cap G$

Ecrivons donc : $-\sum_{k=1}^q \theta_k g_k = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$

avec $\forall i, \alpha_i \in K$

(*) On obtient $\sum_{i=1}^n (\lambda_i - \alpha_i) e_i + \sum_{j=1}^p \mu_j b_j = 0_E$

$\hat{C} (e_1, \dots, e_n, b_1, \dots, b_p)$ base de F ,

on a $\forall j, \mu_j = 0$

(*) De $\bar{m}$: on montrera-t-on $\forall k, \theta_k = 0$

(*) Finalement, on a

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0_E$$

(*) $\hat{C} (e_1, \dots, e_n)$ base $F \cap G$

On a $\forall i, \lambda_i = 0$

Conclusion

(*) déjà, on a $n = \dim(F \cap G)$ par défⁿ de n ,

(*) D'après (*), $n + p = \dim(F)$

(*) (**) $n + q = \dim(G)$

(*) Enfin, DAPQP : $n + p + q = \dim(F + G)$

$$\begin{aligned} \bullet \text{D'où : } \dim(F + G) &= (\dim(F) - n) + (\dim(G) - n) + n \\ &= \dim(F) + \dim(G) - n \\ &= \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

D/2

• On déf $\varphi : F \times G \longrightarrow F + G$
 $(x_F, x_G) \longmapsto x_F + x_G$

• On a $\text{Im}(\varphi) = F + G$

• Donc $\text{rg}(\varphi) = \dim(F + G)$

• Or, (R*) ple rang

$$\begin{aligned} \text{rg}(\varphi) &= \dim(F \times G) - \dim(\ker(\varphi)) \\ &= \dim(F) + \dim(G) - \dim(\ker(\varphi)) \end{aligned}$$

* CCL : $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(\text{Ker}(\Psi))$

* On a vu dans un chap précédent que :

$$\Psi : F \cap G \xrightarrow{\sim} \text{Ker}(\Psi)$$

$$x_{FG} \longmapsto (x_{FG}, -x_{FG}) \quad \text{est un iso}$$

Ainsi : $\dim(\text{Ker}(\Psi)) = \dim(F \cap G)$

* D'où le résultat ■

6) Deux CS de somme directe pleine

Prop !! : $E \text{ ev}^{\text{db}}, F, G \text{ sev } E \text{ tq}$

$$\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$$

Alors, on a : (-50%)

1) Si F et G sont en somme directe, alors leur somme est pleine.

ie F et G en $\oplus \Rightarrow E = F \oplus G$

2) Si la somme $F+G$ est pleine, alors elle est directe, ie

$$E = F + G \Rightarrow E = F \oplus G$$

Rq : On dit[#] que les dimensions de F et de G sont complémentaires dans E

D/ 1) • Orsq F et G sont en $\oplus$

• On a $F \cap G = \{0_E\}$

• Donc $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G)$ (d'après

• Donc $\dim(F+G) = \dim(E)$ Grassmann

• Ainsi : $F+G$ est un sev E de "dimension pleine"

DALC (-50%) , "il est plein" ie $F+G = E$ ■

2) • Orsq $F+G = E$. Donc $\dim(F+G) = \dim(E)$

• Or $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$

• Donc : $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G)$

• Or, d'après Grassmann :

$$\dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F+G)$$

• Ainsi : $\dim(F \cap G) = 0$ et donc

$$F \cap G = \{0_E\}$$

• Donc F et G sont en $\oplus$ ■

VI Application

4) Critère nucléaire d'inversibilité

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$

$$\underline{\text{Th}} : A \text{ inversible} \Leftrightarrow \text{Ker}(A) = \{0_{n,1}\}$$

D/ $\Rightarrow$ Mg (contraposition) $\text{Ker}(A) \neq \{0_{n,1}\}$ preuve annulée

Osg A inv, mg $\text{Ker}(A) = \{0_{n,1}\}$

Soit $X \in \text{Ker}(A)$, $0_n \circ AX = 0_{n,1}$

Donc $A^{-1}AX = A^{-1}0_{n,1}$

Donc $X = 0_{n,1} \Rightarrow$

$\Leftarrow$ Osg $\text{Ker}(A) = \{0_{n,1}\}$

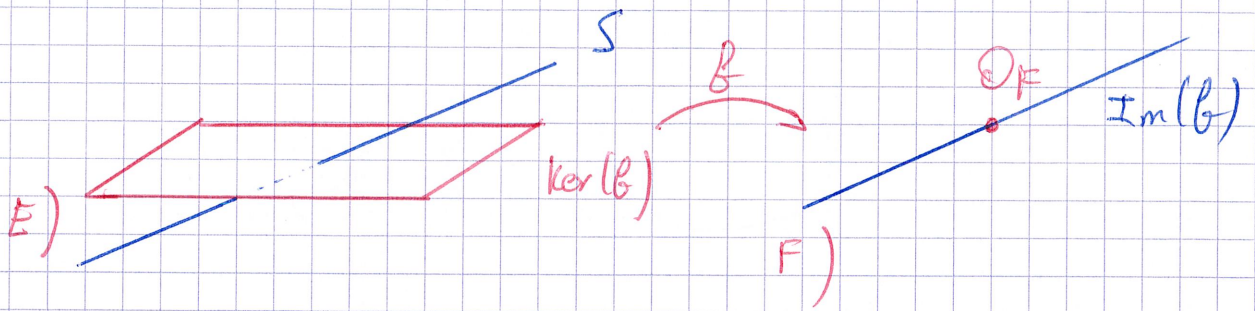
Astuce / Idée / $\mathbb{R}^x$ / Méthode

$\rightarrow$ Je quitte le monde des matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & & \vdots \\ \vdots & & a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Je vais dans le monde des AL

$\rightarrow$ On dit qu'on géométrise la situation.



Ocsd

$$U_A : \underline{\mathbb{K}^n} \longrightarrow \underline{\mathbb{K}^n}$$

$$X \longmapsto AX$$

$$\text{On a } \text{Ker}(U_A) = \left\{ X \in \underline{\mathbb{K}^n} \mid U_A(X) = 0_{\underline{\mathbb{K}^n}} \right\}$$

$$= \left\{ X \in M_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0_{n,1} \right\}$$

$$= \text{Ker}(A)$$

$$\text{Donc } \text{Ker}(U_A) = \{0_{n,1}\}$$

$$\text{Donc } : U_A \text{ inj}$$

Or $U_A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ et est un endo inj d'un evb

DALC (-50%) : U_A est un iso

$$\mathbb{K}^n \xrightarrow{U_A} \mathbb{K}_n$$

$$\curvearrowright$$

$$B := (U_A)^{-1}$$

Lemme 1 :

$$\forall B, U_A \circ U_B = U_{AB}$$

Lemme 2 : On soit que :

$$U_- : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{L}(\underline{\mathbb{K}^n})$$

$$A \longmapsto U_A \quad \text{est un iso}$$

• Fixons donc $B \in M_n(\mathbb{K})$ tq

$$U_B = (U_A)^{-1} \in L(\mathbb{K})$$

• On a $U_B \circ U_A = U_{BA} = \text{Id}_{\mathbb{K}^n} = U_{I_n}$

• Or :

$$M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow L(\mathbb{K}^n)$$

$$C \longmapsto U_C \text{ est inj}$$

• Donc $BA = I_n$

• De $\bar{m}$: $AB = I_n$

• CC : On a donc A est inversible ■

Rq : • On a en particulier :

$$U_A \text{ iso} \Leftrightarrow A \text{ inv}$$

$$\bullet \text{ Mg } AB = I_n \Leftrightarrow BA = I_n$$

$$\text{D/ } AB = I_n \longrightarrow U_A \circ U_B = U_{I_n} \\ \qquad \qquad \qquad = \text{Id}_{\mathbb{K}^n}$$

U_A surj
↓ - 50%

U_A iso $\longrightarrow U_A$ inversible

matrices

$$BA = I_n$$

$$A^{-1}AB A = A^{-1}I_n A$$

2) Matrices triangulaires supérieures

Prop: Soit $A \in T_n^+(\mathbb{K})$ $A \in T_n^+(\mathbb{K})$ triang. sup.

Alors : $A \text{ inv} \Rightarrow A^{-1} \in T_n(\mathbb{K})$

Rq*: Si $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $M_n(\mathbb{K})$

ie : 1°/ $\mathcal{A} \text{ sev } M_n(\mathbb{K})$

2°/ $\forall M, N \in \mathcal{A}, M \times N \in \mathcal{A}$

3°/ $I_n \in \mathcal{A}$

Exemples:

• $D_n(\mathbb{K})$ les matrices diag

• $\{\nu I_n; \nu \in \mathbb{K}\}$ ie $\text{Vect}(I_n)$

• $T_n^+(\mathbb{K})$

• $\left\{ (a_{ij})_{i,j} \in M_n(\mathbb{K}) \mid i+j \text{ impair} \Rightarrow a_{ij} = 0 \right\}$
(matrices figrées)

• $T_n^+(\mathbb{K})$

• $T_n^-(\mathbb{K})$

• $T_n^p(\mathbb{K})$ avec $p \leq 0$

• $\Delta \subset L_n(\mathbb{K})$ n'est pas un sev. $M_n(\mathbb{K})$!

- L'ens des matrices triang sup par blocs avec une structure par blocs fixée.

ex: $\left\{ \begin{pmatrix} \boxed{\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}} & (*) \\ & \boxed{M} \end{pmatrix} \right\}$

- Prop: Soit $A \in \mathcal{A}$ Alors:

$$A \text{ inv} \Rightarrow A^{-1} \in \mathcal{A}$$

D/. Ocsol

$$\begin{aligned} \lambda_A : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{A} \\ M &\longmapsto AM \end{aligned}$$

- On a $\lambda_A \in L(\mathcal{A})$

- Or A inversible. On a λ_A injective.

Calculons en effet les (λ_A) .

Soit $M \in \text{Ker}(\lambda_A)$. On a $\lambda_A(M) = 0_n$ ie $AM = 0_n$

Donc $A^{-1}AM = A^{-1}0_n$ ie $M = 0_n$

- Donc λ_A inj. Mais $\lambda_A \in L(\mathcal{A})$ et $\mathcal{A} \text{ sev}^{\text{db}} M_n(K)$

- D'ALO, λ_A bij, λ_A surj

- Or $I_n \in \mathcal{A}$

Fixons donc $B \in \mathcal{A}$ tq $\lambda_A(B) = I_n$

- On a $AB = I_n$

Donc $A^{-1} A B A = A^{-1} I_n A$; donc $B = A^{-1}$

• CC1: $A^{-1} \in \mathcal{A}$ ■

3) Retour sur l'interpolation de Lagrange

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Soient $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ qu'on suppose $2 \leq n$ et $\alpha_i \neq \alpha_j$ si $i \neq j$

Prop: Soient $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{K}$ Alors:

$$\exists ! P \in \mathbb{K}_n[X] : \forall i \in [0, n], P(\alpha_i) = y_i$$

On définit $\Phi : \mathbb{K}_n[X] \longrightarrow \mathbb{K}^{n+1}$

$$P \longmapsto (P(\alpha_0), P(\alpha_1), \dots, P(\alpha_n))$$

Déjà Φ linéaire.

Il y a Φ inj. On calcule le noyau:

Soit $P \in \ker \Phi$.

On a donc $\forall i \in [0, n], P(\alpha_i) = 0$

Il est $\{\alpha_0, \dots, \alpha_n\} \subset \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}(P)$. Donc

P possède au moins $(n+1)$ racines

Si $\deg(P) \leq n$, D'après le théorème de Lagrange, on sait que $P = 0$.

• cl: $\ker \Phi = \{0\}$ et donc Φ inj

• $\hat{\Phi} \in L(E)$, $\hat{\Phi}^{\top} \dim(K_n[x]) = n+1 = \dim(K^{n+1})$

DALL, on a donc Φ surj.

• Ainsi: $\forall (y_0, \dots, y_n) \in K^{n+1}, \exists P \in K_n[x]$:

$$\forall i, P(\alpha_i) = y_i$$

• Rq: la D/ donnée dans le chap 12

est meilleure, elle donne une écriture explicite d'un tel P c'est:

$$P = \sum_{i=0}^n y_i L_i$$

où $(L_0, \dots, L_n)$ est la base de Lagrange de $K_n[x]$ associée à $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$

où $\textcircled{1}$:

$$L_i = \frac{\prod_{j \neq i} \prod_{k=0}^n (x - \alpha_k)}{\prod_{j \neq i} (\alpha_i - \alpha_j)}$$