Chapitre 27

Matrices et applications linéaires

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{t^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{t^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{t^4} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ 0 & 0 & 0 & a_{4,4} & a_{4,5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{5,5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{t^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{t^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{t^4} \end{pmatrix}$$

$$\Vert$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \mathbf{t} \cdot a_{1,2} & \mathbf{t^2} \cdot a_{1,3} & \mathbf{t^3} \cdot a_{1,4} & \mathbf{t^4} \cdot a_{1,5} \\ 0 & a_{2,2} & \mathbf{t} \cdot a_{2,3} & \mathbf{t^2} \cdot a_{2,4} & \mathbf{t^3} \cdot a_{2,5} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \mathbf{t} \cdot a_{3,4} & \mathbf{t^2} \cdot a_{3,5} \\ 0 & 0 & 0 & a_{4,4} & \mathbf{t} \cdot a_{4,5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{5,5} \end{pmatrix}$$

Dans ce chapitre, on poursuit l'étude des matrices à l'aide des outils de l'algèbre linéaire : théorie des espaces vectoriels, applications linéaires et théorie de la dimension.

En fait, il est possible de transposer tout problème d'algèbre linéaire de dimension finie en problème sur les matrices. Nous expliquerons ici ces techniques et montrerons plusieurs applications.

Lycée CHATEAUBRIAND
MPSI 3

Colas Bardavid

27

Matrices et applications linéaires

plan de cours et principaux résultats

I. Application linéaire canoniquement associée à une matrice

35.13

1) Définition

2) Propriétés

II. Matrice d'une application linéaire

35.17
35.31

1) Matrice d'un vecteur dans une base

a) définition
b) exemple dans $\mathbb{R}^3$
c) faits généraux

2) Matrice d'une application linéaire

a) définition
b) exemple dans $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
c) isomorphisme fondamental

3) Matrice d'un endomorphisme

a) définition
b) premiers faits
c) toute matrice peut être vue comme la matrice d'une application linéaire
d) questions naturelles

4) Compatibilité aux actions

5) Compatibilité à la composition

Proposition 27.1 ⓣ
On considère le diagramme d'ev^{df} *munis de base*

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{g} & G. \\ \mathscr{B} & & \mathscr{C} & & \mathscr{D} \end{array}$$

Alors, on a

$$_{\mathscr{D}}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g \circ f) = {}_{\mathscr{D}}\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(g) \times {}_{\mathscr{C}}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f).$$

6) Cas des endomorphismes

7) Compatibilité à l'inverse

8) Matrice d'une famille de vecteurs

a) définition
b) caractérisation des bases
c) une application aux polynômes

9) Changements de base

a) problématique

b) matrice de changement de base

Définition 27.2
Soit E ev$^{\text{df}}$ *et soient $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ deux bases de E. La* matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ *est*

$$\mathsf{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}').$$

On la notera toujours P.

c) propriétés

Fait 27.3 Ⓣ
On a

$$P = {}_{\mathscr{B}}\mathsf{Mat}_{\mathscr{B}'}(\mathrm{Id}_E).$$

d) formules de changement de base

Proposition 27.4
Soit E ev$^{\text{df}}$ *et soit $f \in \mathrm{L}(E)$. On considère deux bases :*

$$\mathscr{B} \text{ la « base initiale »} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{B}' \text{ la « nouvelle base »}$$

et on note

$$M := \mathsf{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \qquad \text{et} \qquad M' := \mathsf{Mat}_{\mathscr{B}'}(f).$$

On note

$$P \text{ la matrice de passage } \mathscr{B} \text{ à } \mathscr{B}'.$$

Alors, on a

$$\boxed{M = PM'P^{-1}.}$$

e) moyen mnémotechnique

10) Matrices semblables

a) idée

b) définition

c) propriétés

11) Trace d'un endomorphisme

a) définition

b) propriétés

III. Image, noyau et rang d'une matrice 35.5 35.10 35.24

1) Image

a) définition

b) propriété

2) Noyau

a) définition

b) propriétés

3) Critère nucléaire d'inversibilité

♛ Théorème 27.5
Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Alors,

$$A \text{ inversible} \iff \mathsf{Ker}(A) = \{0_{n,1}\}.$$

4) Rang d'une matrice

a) rang d'une famille de vecteurs

b) rang d'une matrice

c) formule du rang

5) **Le rang d'une application linéaire est le rang de sa matrice**

6) **Propriétés du rang des matrices**

a) rangs remarquables

> **Proposition 27.6 (réduction en chlorure d'argent)**
> *Soit $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors,*
> $$\mathsf{rg}(A) = 1 \quad\Longrightarrow\quad \exists C \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ \exists L \in \mathrm{M}_{1,p}(\mathbb{K}) : A = CL.$$

b) propriétés générales

7) **Effet des opérations élémentaires**

a) invariance du rang par opérations élémentaires

> **Proposition 27.7**
> *Le rang d'une matrice est invariant par toutes les opérations élémentaires.*

b) opérations élémentaires et noyau

> **Proposition 27.8**
> *Le noyau d'une matrice est invariant par les opérations élémentaires sur les lignes.*

c) opérations élémentaires et image

> **Proposition 27.9**
> *L'image d'une matrice est invariante par les opérations élémentaires sur les colonnes.*

IV. Réduction en rang d'une matrice, matrices équivalentes 35.33

1) **Une notation**

2) **Matrice adaptée au rang d'une application linéaire**

3) **Matrices équivalentes**

a) définition
b) propriétés

4) **Forme réduite en rang d'une matrice**

> **Théorème 27.10**
> *Soit $M \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On note $r := \mathsf{rg}(M)$. Alors,*
> $$M \text{ est équivalente à } \mathsf{J}_r^{[n,p]}.$$

5) **Rang de la transposée**

> **Proposition 27.11** Ⓣ
> *On a $\mathsf{rg}(A) = \mathsf{rg}(A^\top)$.*

6) **Le rang des colonnes égale le rang des lignes**

7) **Calcul pratique du rang**

Matrices semblables

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $\boxed{A = PBP^{-1}.}$
Alors, on a :

	A	$=$	$P\ B\ P^{-1}$
Calcul algébrique			
	A^2	$=$	$P\ B^2\ P^{-1}$
si $k \in \mathbb{N}$	A^k	$=$	$P\ B^k\ P^{-1}$
si $f \in \mathbb{K}[X]$	$f(A)$	$=$	$P\ f(B)\ P^{-1}$
Nilpotence			
	A nilpotente	$\Longleftrightarrow$	B nilpotente
si A est nilpotente	$\min\{k \in \mathbb{N} \mid A^k = 0\}$	$=$	$\min\{k \in \mathbb{N} \mid B^k = 0\}$
Inversibilité			
	$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$	$\Longleftrightarrow$	$B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$
si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$	A^{-1}	$=$	$P\ B^{-1}\ P^{-1}$
Dimensions			
	$\mathsf{rg}(A)$	$=$	$\mathsf{rg}(B)$
	$\dim \mathsf{Ker}(A)$	$=$	$\dim \mathsf{Ker}(B)$
Trace			
	$\mathsf{tr}(A)$	$=$	$\mathsf{tr}(B)$
Images et noyaux			
	$\mathsf{Im}(A)$	$=$	$P\ \mathsf{Im}(B)$
	$\mathsf{Ker}(A)$	$=$	$P\ \mathsf{Ker}(B)$
Images et noyaux 2			
	$\mathsf{Im}(A)$	$\xrightarrow[\sim]{u_{P^{-1}}}$	$\mathsf{Im}(B)$
	$\mathsf{Ker}(A)$	$\xrightarrow[\sim]{u_{P^{-1}}}$	$\mathsf{Ker}(B)$
Déterminant			
	$\det(A)$	$=$	$\det(B)$
Transposée			
	A^T	est semblable à	B^T
	A^T	$=$	$\left(P^{-1}\right)^\mathsf{T}\ B^\mathsf{T}\ (P)^\mathsf{T}$
Réduction			
	$\mathsf{Sp}(A)$	$=$	$\mathsf{Sp}(B)$
si $\lambda \in \mathbb{K}$	$E_\lambda(A)$	$=$	$P\ E_\lambda(B)$
	$E_\lambda(A)$	$\xrightarrow[\sim]{u_{P^{-1}}}$	$E_\lambda(B)$
	$\dim E_\lambda(A)$	$=$	$\dim E_\lambda(B)$
	$\chi_A(X)$	$=$	$\chi_B(X)$
Exponentielle			
	$\exp(A)$	$=$	$P\ \exp(B)\ P^{-1}$

ch 27 : Matrices & AL

- $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (en fait, ça marche pour tout corps k)
- $n, p, q, r \in \mathbb{N}^*$
- On note $\underline{\mathbb{K}^n} := M_{n,1}(\mathbb{K})$

__But du chapitre :__ Établir et utiliser l'équivalence entre les matrices et les AL entre evdf

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] & F \arrow[rr, bend right, "2^e \text{ dico}"'] & & A \in M_{n,p}(\mathbb{K}) \arrow[ll, bend right, "1^{er} \text{ dico}"'] \end{tikzcd}$$

I Rappels : application linéaire canoniquement associé à une matrice.

1) Déf° :

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$

__L'ALCA__ à A est $u_A : M_{p,1}(\mathbb{K}) \longrightarrow M_{n,1}(\mathbb{K})$

$$X \longmapsto A \cdot X$$

Ie c'est $u_A : \mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^n$
$X \longmapsto AX$

Ex : $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

$u_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 4x + 5y + 6z \end{pmatrix}$

2) Propriétés

- Déjà, u_A est linéaire
- AC Mieux : l'application qui à A associe u_A est linéaire

c'est

$$ALCA^{[n,p]} : M_{n,p}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$$
$$A \longmapsto u_A$$

ie $ALCA^{[n,p]} \in \mathcal{L}\left(M_{n,p}(\mathbb{K}), \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)\right)$

D/ : $(u_A + \lambda u_B)(X) = u_A(X) + \lambda u_B(X)$

$= AX + \lambda BX = (A + \lambda B)X =$

$= u_{A+\lambda B}(X)$

- $u_A + \lambda u_B = u_{A+\lambda B}$ ie $ALCA(A) + \lambda ALCA(B) = ALCA(A + \lambda B)$ ∎

- u_A n'est pas forcement injective.

- Mieux : On a $\boxed{\mathrm{Ker}(u_A) = \mathrm{Ker}(A)}$

Rappel : Ker A regroupe les relat° de liaisons entre les colonnes de A.

Ex : $A := \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

On a $5C_1 = C_2$ ie $5C_1 - C_2 = 0_{3,1}$

donc (R*) : $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\, A$

efc Donc $\mathrm{Ker}(A) \neq \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Donc $\boxed{u_A \text{ n'est pas inj}}$

- Mais : $A \longmapsto u_A$ est injective

- Mieux :

Prop : $\mathrm{ALCA}^{[n,p]} : M_{n,p}(\mathbb{K}) \longrightarrow L(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$

est un isomorphisme d'espace vectoriels

C'est la description de $L(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$

• Cas Carré $(n=p)$

On a maintenant $\boxed{ALCA^{[n]} : \underbrace{M_n(\mathbb{K})}_{} \xrightarrow{\sim} \underbrace{\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)}_{}}$

On a une multiplicat° (interne) dans $M_n(\mathbb{K})$

C'est un $\mathcal{L}(E)$
C'est une algèbre

• Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$

Soit $X \in \mathbb{K}^n$

On a $(u_A \circ u_B)(X) = u_A(u_B(X))$

$= A \times (u_B(X)) = A \times (B \times X) = (A \times B) \times X$

$= u_{AB}(X)$

Donc $u_A \circ u_B = u_{AB}$

• Ie $ALCA(A \times B) = ALCA(A) \circ ALCA(B)$

($\circ$ le "fois" de $\mathcal{L}(E)$)

• De ⊕ : $u_{I_n} = Id_{\mathbb{K}^n}$ (Ac)

• Bilan : On dit que $ALCA^{[n]} : M_n(\mathbb{K}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbres

· On a :

$$A \text{ inv} \iff u_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n \quad \text{iso}$$

Dans ce cas : $(u_A)^{-1} = u_{A^{-1}}$

D/ AF

Bilan : On a la moitié du dico

$$\begin{tikzcd} A \in M_n(\mathbb{K}) \arrow[r, bend right, "\sim"'] & u_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n \end{tikzcd}$$

Ex AC/AF

A matrice nilpotente $\iff$ $u_A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ endo nilpotent.

II Matrice d'une AL

Soient E, F des $\mathbb{K}$-ev, On note $n := \dim(E)$, $p := \dim(F)$

1) Matrice d'un vecteur dans une base.

a) déf°

Déf : Soit $(e_1, \dots, e_p)$ base de E, qu'on note $\mathcal{B}$. Soit $x \in E$

Ĉ x s'écrit de manière unique :

$$x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$$

On peut poser $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(x) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$

C'est la matrice colonne composée des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$, appelée <u>matrice de x dans $\mathcal{B}$</u>

b) Exemple

On se place dans $\mathbb{R}^3$ et ocsd

$$\mathcal{B} := \Bigg(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_3} \Bigg)$$

Exercice ++ : Mq $\mathcal{B}$ base de $\mathbb{R}^3$

1°) Je pose $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2°) DALC : $\boxed{(e_1, e_2, e_3) \text{ base de } \underline{\mathbb{R}}^3 \Leftrightarrow A \text{ inversible}}$

$\mathbb{R}^{\times}$

3°) or, l'inversibilité d'une matrice est invariante par opélem DALC.

4°) Donc :

A inv $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ inv $\quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$

5°) Or $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ inv car dans $T_3^+(\mathbb{R})$

et à coeff diag Tous $\neq 0$

6°) Ainsi, A inv et donc $\mathcal{B}$ base $\underline{\mathbb{R}}^3$ ■

On prend $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Calculons $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$

<u>sol° ( )</u>

- Le seul vecteur qui intervient en 2e coordonnée est e_1

Donc on aura $x = 2e_1 + \lambda e_2 + \mu e_3$ ie :

$x - 2e_1 = \lambda e_2 + \mu e_3$

seul e_2 intervient en 4è coordonnée

Donc $\lambda = -1$ Donc on aura

$x - 2e_1 = -e_2 + \mu e_3$ ie

$x - 2e_1 + e_2 = \mu e_3$; donc on prend $\mu = 2$

Bilan : $x \in 2e_1 - e_2 + 2e_3$

ie $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$

Sol° :

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ OALES

$x = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 \iff \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$$\iff \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha = 2 \\ \alpha + \beta + \gamma = 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 3 \\ \alpha = 2 \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases} \qquad L_3 \longleftrightarrow L_1$$

$$\iff \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 3 \\ \quad -\beta - \gamma = -1 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \quad\quad -\gamma = -2 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha = 3 - (\beta + \gamma) = 3 - 1 = 2 \\ \beta = 1 - \gamma = -1 \\ \gamma = 2 \end{cases}$$

<u>CCl</u> : On a $x = 2e_1 - e_2 + 2e_3$

et donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) faits généraux ⊕ ($\mathcal{B}$ base E)

- C'est l'application $\mathrm{Coords}_{\mathcal{B}}$. Ie, on a

$$\forall x \in E, \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \mathrm{Coords}_{\mathcal{B}}(x)$$

(Soit $x \in E$.

On écrit $\mathrm{Coords}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ avec $\forall i, \lambda_i \in \mathbb{K}$

J'ai le droit de le faire car

$$\mathrm{Coords} : E \longrightarrow \mathbb{K}^p$$

On a $CL_{\mathcal{B}}(\mathrm{Coords}_{\mathcal{B}}(x)) = x$

ie $CL_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix}\right) = x$

Si on écrit ⊕ $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$, alors on a

$$CL_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_p\end{pmatrix}\right) = \boxed{\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p} = x$$

Donc $\quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_p\end{pmatrix} = \mathrm{coords}_{\mathcal{B}}(x)$ ∎

__Corollaire :__ E ev^{df} ; $\mathcal{B}$ base de E ; $p := \dim(E)$

1) L'application $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\cdot) : E \longrightarrow \mathbb{K}^p$

est linéaire

2) Mieux c'est un isomorphisme

__D/__ en effet, $\mathrm{Coords}_{\mathcal{B}} : E \longrightarrow \mathbb{K}^p$ est un iso ∎

__Fait :__ $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ base E, Alors : (†)

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e_i) = \varepsilon_i$$

__D/__ (†) :

$$e_i = 0e_1 + \cdots + 0e_{i-1} + 1e_i + 0\,e_{i+1} + \cdots + 0e_n$$

$$\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\end{pmatrix}$$

i-ième coordonnée

Notation

On note $\mathcal{B}_n$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ ie

on pose $\mathbb{B}_n := \left(\varepsilon_1^{[n]}, \varepsilon_2^{[n]}, \dots, \varepsilon_n^{[n]} \right)$

Fait : Soit $X \in \mathbb{K}^n$ On a

$$\mathrm{Mat}_{\mathbb{B}_n}(X) = X$$

D/ $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$= x_1 \varepsilon_1 + \cdots + x_n \varepsilon_n$

Donc $\mathrm{Mat}_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)}(X) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x$ ■

2) Matrice d'une AL

a) def°

Soient E, F evdf, $f : E \longrightarrow F$ AL

Soient $(e_1, \dots, e_p) = \mathcal{B}$ base de E,

$(f_1, \dots, f_n) = \mathcal{C}$ base de F

La matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, notée

$$ {}_{\mathcal{C}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) $$

est la matrice dont la j-ième colonne (pour $j \in [\![1, p]\!]$) est $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f(e_j))$

Schéma :

$$ {}_{\mathcal{C}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & \cdots & f(e_p) \end{array} \in F \\ \begin{pmatrix} \circ & & \circ \\ \circ & & \circ \\ \vdots & & \vdots \\ \circ & & \circ \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ /f_1 \\ /f_2 \\ \vdots \\ /f_n \end{array} $$

Exemple $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

Ocsd $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x - y + z \\ x - 2y \end{pmatrix} $$

Base de $\mathbb{R}^3$ $\mathbb{B}_3$ ou $\mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Base de $\mathbb{R}^2$ $\mathbb{B}_2$ ou $\mathcal{C} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

Je pose $A_1 := \operatorname{Mat}_{\mathbb{B}_2 \, \mathbb{B}_3} (f)$

$A_2 := \operatorname{Mat}_{\mathbb{B}_2 \, \mathcal{B}} (f)$

$A_3 := \operatorname{Mat}_{\mathcal{C} \, \mathbb{B}_3} (f)$

$A_4 := \operatorname{Mat}_{\mathcal{C} \, \mathcal{B}} (f)$

$(A_1)^T$ $f(\varepsilon_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \operatorname{mat}_{\mathbb{B}_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$f(\varepsilon_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ idem

$f(\varepsilon_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ idem

$$\boxed{A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}}$$

$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $f(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $f(e_3) = f(e_3)$

$$\boxed{A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

A^3 $\textcircled{T}$ Decomposons $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{C}$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

cl : $\boxed{A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}}$

A_4 = AF

c) isomorphisme fondamental

<u>Prop</u> $\textcircled{T}$ E ev df, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ base E

F ev df, $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ base F

Alors : l'application

$$\mathrm{Mat}(\cdot)_{\mathcal{C}\,\mathcal{B}} : \quad \mathcal{L}(E, F) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$
$$f \longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}\,\mathcal{B}}(f)$$

est un isomorphisme

D/ c'est linéaire

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$, soit $\lambda \in \mathbb{K}$

Soit $j \in [\![1,p]\!]$. On a :

$$(f+\lambda g)(e_j) = f(e_j) + \lambda g(e_j)$$

Or $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\cdot) : F \longrightarrow \mathbb{K}^n$ est une AL

DACQP

Donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}\big((f+\lambda g)(e_j)\big) = \boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}\big(f(e_j)\big)} + \lambda\, \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}\big(g(e_j)\big)$

AC $+\infty$ $\|$

$C_j\big({}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}(f)\big)$ par déf°

Donc :

$$\forall j \in [\![1,p]\!],\quad C_j\Big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}\,\mathcal{B}}(f+\lambda g)\Big) = C_j\Big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}\,\mathcal{B}}(f) + \lambda\, \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}\,\mathcal{B}}(g)\Big)$$

Donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}\,\mathcal{B}}(f+\lambda g) = \ldots$

AC

• Mq c'est inj

Soit $f \in \mathrm{Ker}(\ell(\cdot))$

ie Soit $f : E \longrightarrow F$ AL tq $\underset{\mathcal{C}\,\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(f) = 0_{n,p}$

Soit $j \in [\![1,p]\!]$, On a donc $C_j\left(\underset{\mathcal{C}\,\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(f)\right) = 0_{n,1}$

ie $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f(e_j)) = 0_{n,1}$

Donc $f(e_j) = 0_F$

AC

Ĉ $(e_1, \dots, e_p)$ base de E, on a $f = 0_{\mathcal{L}(E,F)}$ ■ inj.

• Surj : -50 % c'est gratuit

En effet $\dim(\mathcal{L}(E,F)) = p \times n = \dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))$

Rq : La surj se montre aussi directement à l'aide d'un decret bien choisi AF^{++}

3) Matrice d'un endomorphisme

a) Définition

Notat°

Soit E ev^{df} muni d'une base $\mathcal{B}$

On pose $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) := \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}\,\mathcal{B}}(f)$

b) premiers faits

Fait (T) :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) = I_n \in M_n(\mathbb{K})$$

$n := \dim(E)$

D/

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathrm{Id}(e_1) & e_2 & \cdots & e_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} |e_1 \\ |e_2 \\ \\ \\ |e_n \end{array}$$

Fait

$A \in M_n(\mathbb{K})$

On dispose de $u_A \in L(\mathbb{K}^n)$

Alors $\operatorname{Mat}_{\mathbb{B}_n}(A) = A$

D/ Soit $j \in [\![1,n]\!]$

On a $C_j\left(\mathrm{Mat}_{\mathbb{B}}(u_A)\right) = \mathrm{Mat}_{\mathbb{B}_n}\left(u_A(\varepsilon_j)\right)$

$$u_A(\varepsilon_j) = A \cdot \varepsilon_j = C_j(A)$$

$= \mathrm{Mat}_{\mathbb{B}_n}\left(C_j(A)\right)$

Or (R) $\mathrm{Mat}_{\mathbb{B}_n}(X) = X \quad \forall X \in \mathbb{K}^n$!

$= C_j(A)$

$\mathrm{Mat}_{\mathbb{B}}(u_A) = A$ ■

Fait "dual" :

Soit $f \in L(\mathbb{K}^n)$

$\mathrm{ALCA}\left(\mathrm{Mat}_{\mathbb{B}_n}(f)\right) = f$

D/ • $\mathbb{R}^*$ c'est des AL

• $\mathbb{R}^*$ Pour mq $f = g$ il suffit de mq f et g coïncident sur une base

• Ici $\longrightarrow$ on prend $\mathbb{B}_n$

• Soit $i \in [\![1, n]\!]$ On calcule

$$\mathrm{ALCA}\left(\mathrm{Mat}_{\mathbb{B}_n}(f)\right)(\varepsilon_i)$$

$$= \mathrm{ALCA}(A)(\varepsilon_i) \quad \text{où l'on a noté}$$

$$A := \mathrm{Mat}_{\mathbb{B}_n}(f)$$

$$= u_A(\varepsilon_i) = A \times \varepsilon_i = C_i(A)$$

$$\overset{!}{=} C_i\left(\mathrm{Mat}_{\mathbb{B}}(f)\right)$$

$$= \mathrm{Mat}_{\mathbb{B}_n}\left(f(\varepsilon_i)\right) = f(\varepsilon_i)$$

$\forall X, \ \mathrm{Mat}_{\mathbb{B}_n}(X) = X$

ccl : $\forall i, \ \mathrm{ALCA}\left(\mathrm{Mat}_{\mathbb{B}_n}(f)\right)(\varepsilon_i) = f(\varepsilon_i)$ ■

Bilan :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}(\mathbb{K}^n) \arrow[r, bend left] & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \arrow[l, bend left, "\mathrm{ALCA}^{[n]}(\cdot)"] \end{tikzcd}$$

Sont reciproques l'une de l'autre.

c) Toute matrice peut être vue ĉ la matrice d'une AL.

C'est la méthode qui permet de géomètriser un probleme matriciel.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

> Soit E evdf tq $\dim E = n$
> Fixons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base E
> DALC, l'AL $\begin{array}{rcl} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \end{array}$
> est un iso

Fixons donc $f \in \mathcal{L}(E)$ tq $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$

Puis on bosse avec f

À la fin, on retraduit le résultat obtenu pour A

d) Questions naturelles

f iso $\iff$ $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ inv ? (très fonctorielle)

f nilpotente $\iff$ $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ nilpot ?

${}_{\mathcal{D}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = {}_{\mathcal{D}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) \cdot {}_{\mathcal{C}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$?

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$?

$\vdots$

4) Compatibilité aux actions

Prop : Ocsd (+) $E \xrightarrow{f} F$ Soit $x \in E$
$\mathcal{B}$ $\mathcal{C}$

Alors, on a :

$$\underset{\mathcal{C}}{\text{Mat}}(f(x)) = \underset{\mathcal{C}\,\mathcal{B}}{\text{Mat}}(f) \times \underset{\mathcal{B}}{\text{Mat}}(x)$$

D/ Geste astucieux

On rq q (*) l'égalité à démontrer est "linéaire"

(*) $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f(x)) = \underset{\mathcal{C}\,\mathcal{B}}{\text{Mat}}(f) \times \underset{\mathcal{B}}{\text{Mat}}(x)$

Ocsd $\Phi : E \longrightarrow \mathbb{K}^n$ où $n := \dim(F)$
$x \longmapsto \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f(x))$

et $\tilde{\Phi} : E \longrightarrow \mathbb{K}^n$
$x \longmapsto A \times \underset{\mathcal{B}}{\text{Mat}}(x)$

où $A := \underset{\mathcal{C}\,\mathcal{B}}{\text{Mat}}(f)$

- Mq $\Phi = \tilde{\Phi}$. (R*) On le mq sur une base

Quelle base ? $\mathcal{B}$

On écrit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ avec $\begin{cases} p \in \mathbb{N} \\ \forall i,\ e_i \in E \end{cases}$

- Soit $i \in [\![1, p]\!]$.
On a $\tilde{\Phi}(e_i) = A \times \boxed{\underset{\mathcal{B}}{\text{Mat}}(e_i) = \varepsilon_i}$

$$= A \times \mathcal{E}_j = C_j(A) = C_j\left(\underset{\mathcal{C}\ \mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(f)\right)$$

$$\underset{\text{par déf}^\circ}{=} \underset{\mathcal{C}}{\mathrm{Mat}}(f(e_j)) = \Phi(e_j) \quad \blacksquare$$

5) Compatibilité à la composition.

<u>Prop</u> :

Ocsd (T) $\underset{\mathcal{B}}{E} \xrightarrow{f} \underset{\mathcal{C}}{F} \xrightarrow{g} \underset{\mathcal{D}}{G}$ (evdf)

Alors on a :

$$\underset{\mathcal{D}\ \mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(g \circ f) = \underset{\mathcal{D}\ \mathcal{C}}{\mathrm{Mat}}(g) \times \underset{\mathcal{C}\ \mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(f)$$

<u>D/</u>
- On note $n := \dim E$ $\quad p := \dim F$ $\quad q := \dim G$
- On écrit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$

$\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_p)$

$\mathcal{D} = (g_1, \dots g_q)$

- Notons $A := \underset{\mathcal{C}\ \mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(f)$; $B := \underset{\mathcal{D}\ \mathcal{C}}{\mathrm{Mat}}(g)$

Notons $C := \underset{\mathcal{D}\ \mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(g \circ f)$

- Mq $C = B \times A$
- $\hat{C}$ $M \longmapsto u_M$ est inj, mq $u_C = u_{B \times A}$
- Soit $X \in \mathbb{K}^n$

Idée : $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(\cdot) : E \longrightarrow \mathbb{K}^n$ iso

Fixons donc $x \in E$ tq $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$

On calcule :

$$u_C(X) = C \times X = \underset{\mathcal{D}\ \mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(g \circ f) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$$

DACQP

$$= \mathrm{Mat}_{\mathcal{D}}\left((g \circ f)(x)\right)$$

$$= \mathrm{Mat}_{\mathcal{D}}\left(g(f(x))\right)$$

AC

$$= \underset{\mathcal{D}\ \mathcal{C}}{\mathrm{Mat}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f(x))$$

DACQP

$$= B \times \underset{\mathcal{C}\ \mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$$

DACQP

$$= B \times A \times X = u_{B \times A}(X)$$

$\blacksquare$

D°/ $A := \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}\,\mathcal{B}}(f)$ et $B := \mathrm{Mat}_{\mathcal{D}\,\mathcal{C}}(g)$

Soit $i \in [\![1, n]\!]$ $(n := \dim(E))$

$$\begin{array}{ccccc} E & \longrightarrow & F & \longrightarrow & G \\ n & & p & & q \\ (e_1, \dots, e_n) & & (f_1, \dots, f_p) & & (g_1, \dots, g_q) \end{array}$$

On regarde $C_i(B \times A) = B \times C_i(A)$

$$\begin{array}{c} \\ \\ /g_1 \\ \vdots \\ \\ /g_q \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a_{1i} & a_{2i} & \cdots & a_{pi} \\ g(f_1) & g(f_2) & \cdots & g(f_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & & b_{2p} \\ & & & \vdots \\ b_{q1} & b_{q2} & \cdots & b_{qp} \end{pmatrix} \end{array}
\begin{array}{c} f(e_i) \\ \begin{pmatrix} & a_{1i} & \\ & a_{2i} & \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ & a_{pi} & \end{pmatrix} \end{array}
\begin{array}{c} \\ /f_1 \\ \vdots \\ \\ /f_p \end{array}$$

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{D}\,\mathcal{C}}(g)$

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}\,\mathcal{B}}(f)$

On a $f(e_i) = a_{1i} f_1 + \dots + a_{pi} f_p$

On a (R$^\times$) $M \times X$ est une CL des colonnes de M

$$B \times C_i(A) = a_{1i}\, C_1(B) + a_{2i}\, C_2(B) + \dots + a_{pi}\, C_p(B)$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1i}\, b_{11} + a_{2i} b_{12} + \dots + a_{pi}\, b_{1p} \\ a_{1i}\, b_{21} + a_{2i}\, b_{22} + \dots + a_{pi}\, b_{2p} \\ \vdots \\ a_{1i}\, b_{q1} + a_{2i}\, b_{q2} + \dots + a_{pi}\, b_{qp} \end{pmatrix}$$

C'est $C_i(B \cdot A)$

- Notons $C : \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}\,\mathcal{B}}(g \circ f)$

qui est la i-ième colonne de C ?

c'est $\mathrm{Mat}_{\mathcal{D}}(g(f(e_i)))$

- On calcule

$$g(\boxed{f(e_i)}) = g(a_{1,i}\, f_1 + a_{2,i}\, f_2 + \dots + a_{p,i}\, f_p)$$

$$= a_i\, g(f_1) + \dots + a_{p,i}\, g(f_p)$$

Donc par linéarité : c'est $C_1\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{D}\,\mathcal{C}}(g)\right)$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{D}}\left(g(f(e_i))\right) = a_{1,i}\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{D}}(g(f_1)) + \cdots}$$
$$+ \mathrm{Mat}_{\mathcal{D}}(g(f_p))$$

C'est la m̄ colonne que precedement

$$\begin{pmatrix} b_{1,i} \\ \vdots \\ b_{pi} \end{pmatrix}$$

- Ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{D}}\left((g\circ f)(e_i)\right) = C_i(C) = C_i(B\cdot A)$

- Donc $C = BA$ ■

6) Cas des endomorphismes

Prop E ev^{df} ; $\mathcal{B}$ base E.

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$

Alors : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g\circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$

D/ c'est un cas particulier de 5)

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{f} & E & \xrightarrow{g} & E \\ \mathcal{B} & & \mathcal{B} & & \mathcal{B} \end{array}$$ ■

Rq* : Ie $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(\cdot) : \mathcal{L}(E) \xrightarrow{\sim} M_n(\mathbb{K})$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbres.

Corollaire (T)

1) $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_N) = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(f_1) \times \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(f_2) \times \dots \times \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(f_N)$

2) $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(f^N) = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(f)^N$

3) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$

Rappel : Je peux évaluer P en $f \in \mathcal{L}(E)$

On a $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}\Big(\underbrace{P(f)}_{\in \mathcal{L}(E)}\Big) = P\Big(\underbrace{\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(f)}_{M_n(\mathbb{K})}\Big)$

D/ 1) (Fec) ok ■

2) ok avec 1) ■

3) Ecrivons $P = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k$ avec $(\dots)$

On calcule

- $P(f) = \sum_{k=0}^{N} a_k f^k$

- On note $A := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$
- On a
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P(f)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\sum_{k=0}^{N} a_k f^k\right)$$
linéarité de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\cdot)$
$$= \sum_{k=0}^{N} a_k \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^k)}_{= \left[\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\right]^k = A^k}$$
$$= \sum_{k=0}^{N} a_k \cancel{\ } A^k = P(A)$$

7) Compatibilité à l'inverse

__Prop :__ Soient E, F evdf munis de bases respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Soit $f : E \to F$ __AL__

Ie, on csd
$$\underset{\mathcal{B}}{E} \xrightarrow{f} \underset{\mathcal{C}}{F}$$

Osq $\dim E = \dim F$ et on note $n := \dim E$

On a donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}\,\mathcal{B}}(f) \in M_n(\mathbb{K})$

On a f iso $\iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}\,\mathcal{B}}(f)$ inv

__D/__ $(\Rightarrow)$ Osq f iso

On dispose donc de $F \xrightarrow{f^{-1}} E$

Ocsd
$$\underset{\mathcal{B}}{E} \xrightarrow{f} \underset{\mathcal{C}}{F} \xrightarrow{f^{-1}} \underset{\mathcal{B}}{E}$$

D'après 5), on a

$$\boxed{{}_{\mathcal{B}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(f^{-1}\circ f\right) = \underbrace{\underset{\mathcal{B}\ \mathcal{C}}{\mathrm{Mat}}\left(f^{-1}\right)}_{B} \times \underbrace{\underset{\mathcal{C}\ \mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(f)}_{A}}$$

$$\begin{array}{l} \shortparallel \\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) \\ \shortparallel \\ I_n \end{array}$$

On a donc $B\cdot A = I_n$

- De m̄, ĉ $f\circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$, on a $A\cdot B = I_n$
- <u>Bilan</u> : A inv et $A^{-1} = B$

i.e. $\left(\underset{\mathcal{C}\ \mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(f)\right)^{-1} = {}_{\mathcal{B}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}\left(f^{-1}\right)$ $\blacksquare$ $(\Rightarrow)$

$(\Leftarrow)$ On note $A := \underset{\mathcal{C}\ \mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(f)$

Osq A inv. Notons $\mathcal{B} := A^{-1}$

<u>Idée</u> : ĉ $\begin{array}{rcl} L(F,E) & \xrightarrow{\sim} & M_n(\mathbb{K}) \\ g & \longmapsto & \underset{\mathcal{B}\ \mathcal{C}}{\mathrm{Mat}}(g) \end{array}$

est surjective et ĉ $B\in M_n(\mathbb{K})$:

fixons $g \in L(F,E)$ tq $\underset{\mathcal{B}\ \mathcal{C}}{\mathrm{Mat}}(g) = B$

On a $BA = I_n$ i.e $\underset{\mathcal{B}\,\mathcal{C}}{\mathrm{Mat}}(g) \times \underset{\mathcal{C}\,\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(f) = I_n$

Donc DACQP : $\underset{\mathcal{B}\,\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(g \circ f) = \underset{\mathcal{B}\,\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(\mathrm{Id}_E)$

• Č $\underset{\mathcal{B}\,\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(\cdot) : L(E) \longrightarrow M_n(\mathbb{K})$ est injective,

car c'est un iso !

• Donc $g \circ f = \mathrm{Id}_E$

• De m̄ : $f \circ g = \mathrm{Id}_F$

• Donc : f iso $\blacksquare$

Rq : • On aurait pu conclure avec des -50%

• On a mq $\underset{\mathcal{B}\,\mathcal{C}}{\mathrm{Mat}}(f^{-1}) = \left(\underset{\mathcal{C}\,\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(f)\right)^{-1}$

qd f iso

Corollaire : E ev^{df}, $\mathcal{B}$ base E, $f \in L(E)$
Alors :

1) $f \in GL(E) \iff \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(f) \in GL_n(\mathbb{K})$

2) Dans ce cas, on a $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(f^{-1}) = \left[\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(f)\right]^{-1}$

D/ ok ■

8) Matrice d'une famille de vecteurs

a) déf°

Déf : E evdf ; $\mathcal{B}$ base E ; $\mathcal{F} \in E^p$ $(p \geq 1)$

une famille à p vecteurs de E qu'on écrit (+)

$\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p)$

La matrice de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{B}$ notée $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$

est définie par $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) :=$

$$\left(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1) \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_p) \right)$$

$\in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

b) Caractérisation des bases

Prop (T) E evdf dim n ; $\mathcal{B}$ base E

$\mathcal{F} \in E^n$ famille "de bonne taille"

Alors $\mathcal{F}$ base $E \iff \underbrace{\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})}_{}$ inv

$\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

D/ exo - test ■

c) Une application aux polynômes

Soit $n \in \mathbb{N}$

Soient $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ 2 à 2 $\neq$'s

On a $\forall i, \ (X-\alpha_i)^n \in \mathbb{K}_n[X]$

Prop (exo)

La famille $\left((X-\alpha_0)^n, (X-\alpha_1)^n, \dots, (X-\alpha_n)^n \right)$

est une base de $\mathbb{K}_n[X]$

D/ exo - test * $\blacksquare$

Rq : Si $\alpha \in \mathbb{K}$, la famille

$$\left(1, (X-\alpha), (X-\alpha)^2, \dots, (X-\alpha)^n \right)$$ R^* est une

base de $\mathbb{K}_n[X]$

D^1/ • C'est une famille échelonnée en degrés ; DALC elle est libre

• Elle est de bonne taille ; DALC (-50%) : c'est une base $\blacksquare$

D^2/ On note $\mathcal{T}_e$ cette famille, On pose

$$A := \underset{(1, X, \dots, X^n)}{\mathrm{Mat}} (\mathcal{T}_e)$$

Si $p \in \mathbb{N}$, on a $(X-\alpha)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-\alpha)^{p-k} X^k$

Donc $\underset{(1,X,\dots,X^n)}{\mathrm{Mat}}\left((X-a)^p\right) = \begin{pmatrix} (-a)^p \\ p(-a)^{p-1} \\ \frac{p(p-1)}{2}(-a)^{p-2} \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\leftarrow$ indice " $k=p$ " (AC)++

$(X-a)^p \in \mathbb{K}_n[X]$ si $p \leq n$

$(1,X,\dots,X^n)$ base $\mathbb{K}_n[X]$

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ si $x \in E$

Bilan : $\underset{(1,X,\dots,X^n)}{\mathrm{Mat}}(\mathcal{T}_P) =$

$$= \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 & \cdots & (-a)^p \\ 0 & 1 & -2a & \cdots & p(-a)^{p-1} \\ | & 0 & 1 & \cdots & p(p-1)(-a)^{p-2} \\ | & | & 0 & \ddots & \vdots \\ | & | & | & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \\ \vdots \\ X^n \end{array}$$

Elle est dans $T_{n+1}^{+}(\mathbb{K})$ et ses coeff diag sont tous $\neq 0$: elle est inv.

Bilan : $\mathcal{T}_P$ base ■

D³/ (R^x) Taylor polynomial

$$P \in \mathbb{K}_n[X] : P = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a) \frac{(X-a)^k}{k!}$$

Ainsi $(1, (X-a), \dots, (X-a)^n)$ est génératrice dans $\mathbb{K}_n[X]$

Ĉ elle est de bonne taille → c'est une base ■

9) Changements de base (s)

a) problématique

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soit $\mathcal{B}$ base de E

On dispose de $M := Mat_{\mathcal{B}}(f)$

Si $\mathcal{B}'$ est une autre base E, on dispose également de $M' := Mat_{\mathcal{B}'}(f)$

① Question : Quel est le lien entre M et M' ?

Schéma

$$\begin{tikzcd}
 & & f \arrow[dll, "\mathcal{B}"'] \arrow[dl, "\mathcal{B}'"] \arrow[d, "\mathcal{B}''"] \arrow[dr, "\mathcal{B}'''"] & \\
M & M' & M'' & M'''
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{L}(E)$ monde vectoriel géometrie

$M_n(\mathbb{K})$ monde matriciel calcul

② Y-a-t-il une f^{le} reliant M à M' ?

<u>Rq</u> : q^d on dispose de $f \in \mathcal{L}(E)$, $\boxed{\text{on aime bcp}}$

trouver $\mathcal{B}$ base E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ soit

<u>remarquablement structurée</u>

<u>Exemple</u> : $E = \mathbb{R}_2[X]$ $\quad \mathcal{B} = (X^2-1,\ 2X^2+X,\ X+5)$

$D \in \mathcal{L}(E)$ la dérivation

calculons $\quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(D) = \begin{pmatrix} -\frac{20}{3} & -\frac{40}{3}+\frac{2}{3} & 2/3 \\ \frac{10}{3} & \frac{20}{3}-\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{8}{3}+\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

On a $P_2 - 2P_1 = X+2$

Donc $P_3 - (P_2 - 2P_1) = P_3 - P_2 + 2P_1 = 3$

Donc $P_3 - \frac{5}{3}(P_3 - P_2 + 2P_1) = X$

<u>Bilan</u> : $\boxed{1 = \frac{2}{3}P_1 - \frac{1}{3}P_2 + \frac{1}{3}P_3}$

$X = -\frac{10}{3}P_1 + \frac{5}{3}P_2 - \frac{2}{3}P_3$

ie $\quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(D) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -20 & -38 & 2 \\ 10 & 19 & -1 \\ -4 & -7 & 1 \end{pmatrix}$

Notons-la M.

On a $M^3 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\underbrace{D^3}_{=\,0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])}}) = 0_3$ $\quad$ sur $\mathbb{R}_2[X]$

Ainsi : M est nilpotente.

• Considerons la base $\mathcal{B}' = \left(1, X, \frac{X^2}{2}\right)$

On a alors $M' := \underset{\mathcal{B}'}{\mathrm{Mat}}(D) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

remarquablement structurée

<u>Bilan</u> $D(\cdot) \quad \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & D(\cdot) \arrow[dl, "\mathcal{B}"'] \arrow[dr, "\mathcal{B}'"] & \\ \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -20 & -38 & 2 \\ 10 & 19 & -1 \\ -4 & -7 & 1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{tikzcd}$$

b) matrice de changement de base

<u>Def°</u> : E evdf

Soit $\mathcal{B}$ base E (base initiale)

Soit $\mathcal{B}'$ base E (nouvelle base)

La matrice de chg^t de base de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ ou <u>matrice de passage</u> de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$$

On la note <u>P</u>

Rq : Souvent, on aura $\mathcal{B}$ = base canonique
$\mathcal{B}'$ = base adaptée à la situation

Ex : Si on se place dans $\mathbb{R}^3$, si $\mathcal{B} = \mathbb{B}_3$

et : $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

alors on a $P = \left(\mathrm{Mat}_{\mathbb{B}_3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathrm{Mat}_{\mathbb{B}_3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathrm{Mat}_{\mathbb{B}_3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Propriétés

E evdf ; $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ bases E ; on note P la matrice de Passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$;

P est "gratuite"

On note P' la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$

Fait : $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\,\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E)$

D/ AF C'est juste l'application des def° ∎

Corollaire :

1) P inversible

2) $P^{-1} = P'$

D/ 1) ok car Id_E iso et DALC

2) Et on a $\left(\underset{\mathcal{B}\ \mathcal{B}'}{Mat}(Id_E)\right)^{-1} = \underset{\mathcal{B}'\ \mathcal{B}}{Mat}(Id_E^{-1})$ DAL

$$\dots = \underset{\mathcal{B}'\ \mathcal{B}}{Mat}(Id_E) = P' \blacksquare$$

d) Formules de changements de base

Notations : E evdf ; $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ base E

On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$

Soit $x \in E$, on note

$$X := Mat_{\mathcal{B}}(x)$$

$$X' := Mat_{\mathcal{B}'}(x)$$

Prop :

$$X = PX'$$

Moyen mnemothechnique : $X' = PX'$

on repète le son "xp", "x prime"

D/ On a

$$PX' = \underset{\mathcal{B}\,\mathcal{B}'}{\mathrm{Mat}}(Id_E) \times \underset{\mathcal{B}'}{\mathrm{Mat}}(x)$$

$$\overset{\text{DALC}}{=} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(Id_E(x)\right)$$

$$= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = X$$

$$\left(\underset{\mathcal{C}\,\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(f) \times \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(x) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f(x)) \right.$$

Proposition

Soit $f \in L(E)$

On note $M := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$

$M' := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$

Alors, on a :

$$M = PM'P^{-1}$$

e) Moyen mnémothechnique

Si vous faites MP, vous pouvez devenir premier ministre (Prime minister, PM)

On a $MP = PM'$ et PM = prime donc : PM'

f) démo

D/ Ocsd

$$E_{\mathcal{B}'} \xrightarrow{Id_E} E_{\mathcal{B}} \xrightarrow{f} F_{\mathcal{B}} \xrightarrow{Id_E'} E_{\mathcal{B}'}$$

DALC, on a :

$$\text{“} \underset{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}{Id_E} \circ \underset{\mathcal{B} \to \mathcal{B}}{f} \circ \underset{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}}{Id_E} = \underset{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}'}{f} \text{”}$$

On a $\mathrm{Mat}(\ldots) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \underset{\mathcal{B}'\ \mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(Id_E) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$

$\times \underset{\mathcal{B}\ \mathcal{B}'}{\mathrm{Mat}}(Id_E)$

Donc $M' = P^{-1} M P$ ∎

Rq : (B°) • $MP = PM' \longrightarrow M' = P^{-1}MP$

• Puis on remplace M par A et M' par B pex.

• ccl : $B = P^{-1}AP$

10) Matrices semblables.

a) Idée

Soit $(A, B) \in (M_n(\mathbb{K}))^2$ L'idée est :

A et B sont dites semblables

$\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ elles proviennent d'une même AL ie $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$\exists\ E$ evdf, $\exists f \in \mathcal{L}(E)$, $\exists \mathcal{B}, \mathcal{B}'$ base E tq

$A = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(f)$ et $B = \underset{\mathcal{B}'}{\mathrm{Mat}}(f)$

ie :

$$\begin{array}{ccc} & f \in \mathcal{L}(E) & \\ & \swarrow^{\mathcal{B}} \quad \downarrow^{\mathcal{B}'} & \\ A & & B \end{array}$$

monde vectoriel

monde matriciel

b) déf°

Déf° : Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$

On dit que A et B sont semblables $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$: $\boxed{A = PBP^{-1}}$

Rq : on aurait pu écrire $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$:

$$A = P^{-1} B P$$

c) Propriétés

On définit ainsi une relation sur $M_n(\mathbb{K})$ appelée relation de similitude

Prop : C'est une relation d'équivalence

D/ⓣ • Déjà, A est tjrs semblable à A ($A = I_n A I_n^{-1}$)

• Osq A est semblable à B et on écrit

$$A = PBP^{-1} \quad (*) \quad \text{avec } P \in GL_n(\mathbb{K})$$

Donc en faisant $P^{-1}(*)P$: $P^{-1}AP = B$

Donc B est semblable à A, on a la symétrie

• Transitivité

$$A = PBP^{-1} \qquad \text{On a } A = (PQ)C(PQ)^{-1}$$

$$B = QCQ^{-1}$$

Ainsi :

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ semblable } B \\ B \text{ semblable } C \end{array}\right\} \Rightarrow A \text{ semblable à } C \quad \blacksquare$$

Rq :* Si G groupe et si $x, y \in G$, on dit que x et y sont conjugués $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\exists g \in G : x = gyg^{-1}$

Prop 1 : $f \in L(E)$, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ bases E

Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ semblables.

D/ $MP = PM'$ P inv.

Prop 2 :

A, B semblables $(\in M_n(\mathbb{K}))$

Alors : il existe E evdf dim n, $f \in L(E)$

et il existe $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ base E tq $\begin{cases} A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \\ B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) \end{cases}$

D/ • Déjà • Soit E evdf, dim n (qcq)

• Soit $\mathcal{B}$ base E (qcq)

• $\mathcal{C}\ f : L(E) \longrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ iso $L(E) \longrightarrow M_n(\mathbb{K})$

$L(E) \sim M_n(\mathbb{K})$

Fixons $f \in L(E)$ tq $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$

C^n A et B semblables, fixons

tq $A = PBP^{-1}$ $P \in GL_n(\mathbb{K})$

(13°) $M = PM'P^{-1}$

Idée : interpreter P c̃ une Mat de chgt de base.

- Soit $\mathbb{P} \in E^n$, famille de E tq $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathbb{P})$
- Alors : P est exact^{nt} la matrice de chgt de base de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$
- DALC On a donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = P \, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) P^{-1}$$

- Ie $A = P \, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) P^{-1}$

Donc $A = P \mathcal{B} P^{-1}$

- En multipliant par P et P^{-1} : on obtient

$$\mathcal{B} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) \quad \blacksquare$$

11) Trace d'un endo

a) déf°

Lemme (T)

A et B semblables $\Longrightarrow tr(A) = tr(B)$

D/ • Déjà, fixons $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tq $A = PBP^{-1}$

• On a $tr(A) = tr(PBP^{-1})$

$= tr(P^{-1}(PB))$

$= tr(B)$ ■

Déf : Soit E evdf Soit $f \in L(E)$

1) Si $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ bases de E, alors

$$tr\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\right) = tr\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)\right)$$

2) la trace de f notée $tr(f)$ est l'élément de $\mathbb{K}$ égal à $tr(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$ pour $\mathcal{B}$ une base de E

Rq : Ainsi, la déf° de $tr(f)$ n'est pas intrinsèque

b) Propriétés

Prop : ① $tr(f + \lambda g) = tr(f) + \lambda\, tr(g)$

D/ ok ■

Prop : On a $tr : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathbb{K}$ qui est une forme linéaire ; ie $tr(\cdot) \in \mathcal{L}(E)^*$.

D/ ok ■

Prop : $tr(fg) = tr(gf)$

$f, g \in \mathcal{L}(E)$

D/ • Fixons $\mathcal{B}$ base E

$$tr(fg) = tr(Mat_{\mathcal{B}}(fg))$$

def°

$$= tr(Mat_{\mathcal{B}}(f) \times Mat_{\mathcal{B}}(g))$$

$$= tr(Mat_{\mathcal{B}}(g) \cdot Mat_{\mathcal{B}}(f))$$

$$= tr(Mat_{\mathcal{B}}(gf))$$

$$= tr(gf) \quad ■$$

III !! Image, Noyau, Rang d'une matrice

1) Image

a) définition

Déf : Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ Alors, $\mathrm{Im}(A)$ est l'espace engendré par les colonnes de A

C'est un sev de $\mathbb{K}^n$

Plus précisément, c'est :

$$\mathrm{Im}(A) := \mathrm{Vect}\left(C_1(A), C_2(A), \dots, C_p(A) \right)$$

Ex : On prend $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

On a $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \right)$

Or, $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \right)$

Donc $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \right)$

Donc $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$

Donc AC $\mathrm{Im}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x+y \\ 2x+4y \\ 3x+7y \end{pmatrix} ; x, y \in \mathbb{R} \right\}$

- Ĉ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \right)$ libre : c'est une base de $\mathrm{Im}(A)$

b) propriétés

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$

On dispose de $U_A : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ X & \longmapsto & A \cdot X \end{array}$

C'est une AL

Prop : $Im(A) = Im(U_A)$

D/ $\mathcal{E}$ $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ base de $\mathbb{K}^p$

On a (R*) $Im(f) = Vect(f(\varepsilon_1), \dots f(\varepsilon_p))$

Si $f : \mathbb{K}^p \longrightarrow F$ qcq

Or (*) $U_A(\varepsilon_j) = A \cdot \varepsilon_j = C_j(A)$

Bilan : $Im(U_A) = Vect(C_1(A), \dots, C_p(A))$
$= Im(A)$ ∎

2) Noyau

a) définition

Rappel : $Ker(A) := \{ X \in \mathbb{K}^p \mid AX = 0_{n,1} \}$

Et les éléments de $Ker(A)$ correspondent exactement aux relations de liaisons entre les colonnes de A.

Ex : $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

modèle de rédaction

Calculons $Ker(A)$. Soit $X \in \mathbb{R}^3$ qu'on écrit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ avec $x, y, z \in \mathbb{R}$

OALES

$X \in Ker(A) \iff AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \\ 7x + 8y + 9z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ -3y - 6z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ -6y - 12z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 7L_1 \end{cases}$$

paramètres

inconnues principales

$$\iff \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ y + 2z = 0 & L2 \leftarrow \frac{L_2}{-3} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -2y - 3z = z \\ y = -2z \end{cases}$$

Donc ~~$\mathbb{R}^x$~~ ~~Ker~~ $Ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} ; z \in \mathbb{R} \right\}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ -2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} ; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Propriétés

Prop : $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(u_A)$

(Sev $\mathbb{K}^p$)

D/ Soit $X \in \mathbb{K}^p$. OALES :

$$X \in \text{Ker}(A) \iff AX = 0_{n,1}$$
$$\iff u_A(X) = 0_{n,1}$$
$$\iff X \in \text{Ker}(u_A) \quad \blacksquare$$

3) Critère nucléaire d'inversibilité

Thm : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$

Alors A inv $\iff \text{Ker}(A) = \{0_{n,1}\}$

D/ $\Longrightarrow$ Osq A inversible.

Soit $X \in Ker(A)$ On a $AX = 0$

Donc $A^{-1}AX = 0$ ie $X = 0$

CCl : $Ker(A) = \{0\}$

$\Longleftarrow$

Osq $Ker(A) = \{0\}$

Donc $Ker(u_A) = \{0\}$

or $u_A : \underline{\mathbb{K}^n} \longrightarrow \mathbb{K}^n$ AL

Donc DALC (-50%) c u_A inj ; u_A iso

Fixons donc $g \in L(\mathbb{K}^n)$ tq $u_A \circ g = g \circ u_A = Id_{\mathbb{K}^n}$

Donc $Mat_{\mathbb{B}_n}(u_A \circ g) = Mat_{\mathbb{B}}(Id_{\mathbb{K}^n})$

$\underbrace{Mat_{\mathbb{B}_n}(u_A)}_{A} \times Mat_{\mathbb{B}}(g)$

Je pose $B := Mat_{\mathbb{B}_n}(g)$

On a $AB = I_n$, de m : $BA = I_n$ ■

4) rang d'une matrice

a) rang d'une famille de vecteurs

Déf : E ev, $p \in \mathbb{N}^*$

$\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p)$ famille E

Le rang de $\mathcal{F}$ noté $rg(\mathcal{F})$ est

$$rg(\mathcal{F}) := \dim Vect(x_1, \dots, x_p)$$

b) rang d'une matrice

Déf° : Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$

Le rang de A noté $rg(A)$ est

$$rg(A) = rg(C_1(A), C_2(A), \dots, C_p(A))$$

Ex : $rg \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 2$

Rq : $\hat{C}$ $Im(A) = Vect(C_1(A), \dots, C_p(A))$

On a $rg(A) = \dim(Im(A))$

c) f^{le} du rang

Thm : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors

$$rg(A) + \dim Ker(A) = n$$

D/ On applique $\mathcal{f}^{le}$ rg à $u_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n_n$ AL

$$n = \dim \underset{\substack{\| \\ \mathrm{Ker}(A)}}{\mathrm{Ker}(u_A)} + \underset{\substack{\| \\ \mathrm{rg}(A)}}{\mathrm{rg}(u_A)}$$

car $\mathrm{Im}(u_A) = \mathrm{Im}(A)$

(AF) Enoncer le thm si $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$

5) Le rang d'une AL est le rang de sa matrice

Prop

$$\underset{\mathcal{B}}{E} \xrightarrow{f} \underset{\mathcal{C}}{F}$$

Alors $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}\,\mathcal{B}}(f) \right)$

D/ (T) $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$

$\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$

On note $A := \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}\,\mathcal{B}}(f)$

On a $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f(e_1)), \dots, \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f(e_p)) \right)$

Lemme : Soient E, F ev

Soit $f : E \longrightarrow F$ AL

Soit $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$

Alors $\mathrm{rg}(f(x_1), \dots, f(x_p)) = \mathrm{rg}(x_1, \dots, x_p)$

si f inj

D/ On note $F := \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$

Ocsd $f|_F^{\mathrm{Vect}(f(x_1), \dots, f(x_n))} : F \longrightarrow \mathrm{Vect}(f(x_1), \dots, f(x_n))$

C'est surjectif par déf°.

C'est inj car f l'est. Donc c'est un iso ■

$\hat{C}$ $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\cdot) : F \longrightarrow \mathbb{K}^n$ iso

On a $\mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f(e_1)), \dots, \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f(e_p))\right)$

$= \mathrm{rg}(f(e_1), \dots, f(e_p))$

$= \dim\left(\underbrace{\boxed{\mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_p))}}_{= \mathrm{Im}(f)}\right)$

$= \mathrm{rg}(f)$ ■

6) Propriétés du rang

a) rang remarquables

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$

$$\boxed{\underline{\text{Prop :}} \quad \mathrm{rg}(A) = 0 \iff A = 0_n}$$

D/ ok

Rq : $0 \leq \mathrm{rg}(A) \leq n$ (car $\mathrm{Im}(A)$ sev $\mathbb{K}^n$)

Prop : $rg(A) = n \iff A$ inversible

D/ $\Rightarrow$ Ĉ $rg(A) = rg(u_A)$

On a $rg(u_A) = n$

Ĉ $Im(u_A)$ sev $\mathbb{K}^n$ $(u_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n)$

On a $Im(u_A) = \mathbb{K}^n$

Donc u_A surj

Donc DALC (-50%) u_A iso

Or u_A iso $\iff$ A inv

ccl : A inv ∎

$\Leftarrow$ A inv $\longrightarrow$ u_A iso $\longrightarrow$ u_A surj

$\longrightarrow Im(u_A) = \mathbb{K}^n$

$\downarrow$

$rg(A) = n \longleftarrow rg(u_A) = n$

∎ $\overset{\wedge}{|}$ $rg(A) = rg(u_A)$

Rq : une matrice de rang 1 : elle est détectable à l'oeil nu

Ex de matrices de rg 1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 20 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 15 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}, \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & & n \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} 1 & 2 & & n \end{matrix} \end{array}$$

<u>Prop</u> : A g CL <~> A $A = C \times L$

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ Alors :

$\mathrm{rg}(A) = 1 \implies \exists C \in M_{n,1}(\mathbb{K}), \exists L \in M_{1,n}(\mathbb{K})$:
$A = C \times L$

<u>Rq</u> : $\exists C, L : A = C \times L \implies \mathrm{rg}(A) \leq 1$

<u>D/ Rq</u> $\mathrm{rg}(C \times L) \leq \mathrm{rg}(C) \leq 1$ ■

<u>Ex</u> : $\begin{pmatrix} 1 & 10 & -2 \\ 2 & 20 & -4 \\ 3 & 30 & -6 \end{pmatrix} \longrightarrow C \times L$?

On a $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 10 & -2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 10 & -2 \\ 2 & 20 & -4 \\ 3 & 30 & -30 \end{pmatrix}$$

D/ Osq $rg(A) = 1$ Mieux : $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$

Donc $Vect(C_1(A), \dots, C_p(A))$

TBE $\hat{c}$ $(C_1(A), \dots, C_p(A))$ engendre $Vect(\dots)$

On en extrait une base

Fixons $j_0 \in [\![1,p]\!]$ tq $(C_{j_0}(A))$ base de $Vect(\dots)$

Pour $j \in [\![1,p]\!]$, $\hat{c}$ $C_j(A) \in Vect(\dots)$

fixons $\alpha_j \in \mathbb{K}$ tq

$$C_j(A) = \alpha_j C_{j_0}(A)$$

Posons $L = (\alpha_1 \dots \alpha_p) \in M_{1,n}(\mathbb{K})$

et $C := C_{j_0}(A) \in M_{n,1}(\mathbb{K})$

On a $A = C \times L$ ∎

b)!! propriétés g$^{\text{ales}}$ du rang

b) Propriétés g$^{\text{ales}}$ du rang

Soient $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, et Soit $B \in M_{p,q}(\mathbb{K})$

Prop : $rg(A \times B) \leqslant rg(A)$

$rg(A \times B) \leqslant rg(B)$

D/ On géométrise! Soit E, F, G ev^{df}

de dimension respective q, p, n

Soient $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ des bases de E, F, G.

Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$ tq

$$B = \underset{\mathcal{C}\ \mathcal{B}}{Mat}(f) \qquad A = \underset{\mathcal{D}\ \mathcal{C}}{Mat}(g)$$

On a DALC : $rg(f) = rg(B)$ et $rg(A) = rg(g)$

On a $AB = \underset{\mathcal{D}\ \mathcal{C}}{Mat}(f) \times \underset{\mathcal{C}\ \mathcal{B}}{Mat}(g)$

$$= \underset{\mathcal{D}\ \mathcal{B}}{Mat}(g \circ f)$$

Donc DALC : $rg(AB) = rg(g \circ f)$

- On a $rg(g \circ f) \leq rg(f)$; d'où $rg(AB) \leq rg(B)$

- De m̄ : $rg(AB) \leq rg(B)$ ■

D/ On a $rg(AB) = rg(u_{AB}) = rg(u_A \circ u_B)$

$$\leq rg(u_A) = rg(A)$$

DALC

- De m̄ pour $\leq rg(B)$ ■

Prop : $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

$$\begin{cases} rg(A) \leq n \\ rg(A) \leq p \end{cases}$$

D/ $rg(A) = rg(u_A) = rg(u_A : \mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^n)$

Prop : $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ $P \in GL_n(\mathbb{K})$ $Q \in GL_p(\mathbb{K})$

Alors : 1) $rg(PA) = rg(A)$

2) $rg(AQ) = rg(A)$

D/ On a

$$rg(PA) = rg(u_{PA}) = rg(u_P \circ u_A)$$

Or $u_P : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ auto de rcpq

$u_{P^{-1}} : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$

DALC : $rg(iso \circ u_A) = rg(u_A) = rg(A)$

2) De m ■

Corollaire : $A, B \in M_n(\mathbb{K})$

$$A \text{ sbbl } B \Longrightarrow rg(A) = rg(B)$$

On dit que le $rg(\cdot)$ est invariant de similitude

D/ $rg(PBP^{-1}) = rg(BP) = rg(B)$ ■

7) Effet des opélem

a) invariance du rang

Prop : Le rang d'une matrice est invariant par opélem.

D/ • Une Opélem sur les colonnes de A peut toujours être réalisé en faisant $A \times P$ à P :

$$\begin{cases} D_i(\alpha), \alpha \neq 0 \\ \chi_{i,j} \\ T_{i,j}(\lambda), i \neq j \end{cases}$$

qui sont toutes inversibles.

Ĉ $rg(AP) = rg(A)$; après opélem, le rg est le $\overline{m}$

• Pour les lignes : C'est pareil mais via $P \times A$ ■

On prend $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$

On a $rg(A) = rg\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ $\begin{array}{l} C_1 \longleftarrow C_1 - C_2 \\ C_2 \longleftarrow C_2 - C_3 \\ C_3 \longleftarrow C_3 - C_4 \\ C_4 \longleftarrow \frac{1}{4} C_4 \end{array}$

"en parallèle"

$= rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\begin{array}{l} C_1 \longleftarrow -C_1 \\ C_2 \longleftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \longleftarrow C_3 - C_1 \end{array}$

"en parallèle

Clairement égal à 2 !

1°) il est $\neq 0$

2°) il est $\neq 1$

3°) il est ≤ 2 car les colonnes $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ne comptent pas

<u>CCl</u> : $rg(A) = 2$

<u>Applicat° :</u> On a gratuitem^nt $\ker A$

Th^le rang $\longrightarrow$ $\dim \ker(A) = 2$

gratuit

On a $C_2(A) - C_1(A) = C_3(A) - C_2(A)$

ie $C_1(A) - 2C_2(A) + C_3(A) = 0$

ie $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker(A)$

De m̄ (...) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker(A)$

Or $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires

Posons $F := \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$; on a $\dim F = 2$

Or F sev $\ker A$. DALC (-50%) : $F = \ker A$

<u>b) opélem et noyau</u>

<u>Prop</u> : Le noyau de A est invariant par les opélem sur les lignes

D/ (T) Soit P parmi $\begin{cases} D_i(\alpha) \\ \chi_{ij} \\ T_{ij}(\lambda) \end{cases}$

Mq $\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Ker}(PA)$

- Déjà : $\operatorname{Ker}(A) \subset \operatorname{Ker}(PA)$

D/ Soit X tq $AX = 0$; donc $PAX = 0$

ie $(PA)X = 0$ ■

- Rcpt : Soit $X \in \operatorname{Ker}(PA)$ On a $(PA)X = 0$

Donc $P^{-1}PAX = P^{-1}0 = 0$ Donc $AX = 0$

Donc $X \in \operatorname{Ker} A$ ■

c) opélem et image

Prop : L'image de A est invariante par opélem sur les colonnes

D/ Soit P parmi $\begin{cases} D_i(\alpha) \\ \chi_{ij} \\ T_{ij}(\lambda) \end{cases}$

Mq $\operatorname{Im}(A) = \operatorname{Im}(AB)$

On a $\operatorname{Im}(AP) = \operatorname{Im}(u_{AP}) = \operatorname{Im}(u_A \circ u_P)$

$= (u_A \circ u_P)(\mathbb{K}^n) = u_A(u_P(\mathbb{K}^n))$

Or P inv ; donc $u_P \in GL(\mathbb{K}^n)$; donc u_P surj. donc $u_P(\mathbb{K}^n) = \mathbb{K}^n$

CCl : $\mathrm{Im}(AP) = u_A(\mathbb{K}^n) = \mathrm{Im}(u_A) = \mathrm{Im}(A)$ ■

IV Réduction en rang d'une matrice, matrice équivalente

1) Une notation

$$J_r^{[n,p]} := \begin{array}{c} \\ r \text{ lignes} \\ \\ \end{array} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & (0) \\ & & 1 & \\ (0) & & & (0) \end{pmatrix}}^{p \text{ colonnes}} \ n \text{ lignes}$$

r colonnes

2) Matrice adaptée du rang d'une AL

Prop E, F ev^{df} dim p, n

Soit $f : E \longrightarrow F$

On note $r := \mathrm{rg}(f)$

Alors il existe $\mathcal{B}$ base E et $\mathcal{C}$ base F tq

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}\,\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ (0) & & 1 & \\ & & & (0) \end{pmatrix} = J_r^{[n,p]}$$

D/ (1) Fixons S un supplémentaire

(2) de $\mathrm{Ker}(f)$ dans E

Fixons $(e_1, \dots, e_r)$ une base de S

(c $S \oplus \mathrm{Ker} f = E$ On a $\dim S = \dim E - \dim \mathrm{Ker}(f) \underset{\text{f}^{le} \text{ rang}}{=} r$)

$$\boxed{\dim S = r = \mathrm{rg}(f)}$$

(3) Fixons $(x_{k1}, \dots, x_{kp})$ base de $\mathrm{Ker}(f)$

(4) On pose $\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_r) \vee (x_{k1}, \dots, x_{kp})$

c $E = S \oplus \mathrm{Ker}(f)$: on a $\mathcal{B}$ base E

(5) Ocsd $f|_S : S \longrightarrow F$

Alors $\mathrm{Ker}(f|_S) \underset{\text{DALC}}{=} S \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$

Car S et $\mathrm{Ker}(f)$ sont en $\oplus$

(6) Donc DALC : $(f(e_1), \dots, f(e_r))$ libre

(7) On la complète d'après le TBI en une base F

$(f(e_1), \dots, f(e_r), y_{r+1}, \dots, y_n)$

qu'on note $\mathcal{C}$

On calcule : $f(e_1) \dots f(e_r) \; f(x_{k1}) \dots f(x_{kp})$

$$\underset{\mathcal{C}\ \mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 & \\ 0 & 1 & & \vdots & \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & (0) \\ \vdots & \vdots & & 1 & \\ \vdots & \vdots & & 0 & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & & 0 & \end{pmatrix} \begin{array}{l} f(e_1) \\ f(e_2) \\ \vdots \\ f(e_r) \\ y_{r+1} \\ \vdots \\ y_n \end{array} \qquad \blacksquare$$

3) Matrices équivalentes

a) déf°

Def : Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$

On dit que A et B sont équivalentes $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$\exists P, Q \in GL_n(\mathbb{K}) : A = PBQ$

Rq : Généralisat°

$A, B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$

$\downarrow$

$\exists P \in GL_n(\mathbb{K}), \exists Q \in GL_p(\mathbb{K}) : A = PBQ$

Rq* : Soit $P \in GL_n(\mathbb{K})$. Alors, $\exists P_1, \dots, P_N$ matrices d'opélem :

$$P = P_1 \times P_2 \times \dots \times P_N$$

Donc A équivalente $B \iff B$ peut être obtenue par opélem à partir de A

b) propriétés

Prop : La relat° "être équivalente" est une relation d'équivalence

D/ ok ■

Prop : A sbbl $B \Rightarrow A$ équiv B

D/ ok ■

Prop : A équiv $B \Rightarrow rg(A) = rg(B)$

D/ ok ■

4) Forme réduite en rang d'une matrice

Prop : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$

On pose $r := rg(A)$

Alors :

1) $\exists P, Q \in GL_n(\mathbb{K}) : A = P J_r^{[n]} Q$

2) A équiv $J_r^{[n]}$

D/ Soit E ev^{db} de dim n

Fixons $\mathcal{B}$ base E

DALC : fixons $f \in \mathcal{L}(E)$ tq $A = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(f)$

On a $r = rg(A) = rg(f)$

D'après 2) Fixons des bases $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}''$ de E

tq $\underset{\mathcal{B}''\,\mathcal{B}'}{\mathrm{Mat}}(f) = J_r^{[n]}$

On a le diagramme :

$$\text{"}\; \underset{\mathcal{B}'}{E} \xrightarrow{Id_E} \underset{\mathcal{B}}{E} \xrightarrow{f} \underset{\mathcal{B}}{E} \xrightarrow{Id_E} \underset{\mathcal{B}''}{E}$$

DALC : $\underset{\mathcal{B}''\,\mathcal{B}'}{\mathrm{Mat}}(Id_E \circ f \circ Id_E) =$

notée P

notée Q

$$\underset{\mathcal{B}''\,\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(Id_E) \times \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(f) \times \underset{\mathcal{B}\,\mathcal{B}'}{\mathrm{Mat}}(Id_E)$$

- On a donc $J_r^{[n]} = P \cdot A \cdot Q$ et (P, Q inv car Id_E iso)
- Donc $A = P^{-1} J_r^{[n]} Q^{-1}$ ■ 1)

2) OK ■

5) Rang de la transposée

$$\boxed{\text{Prop : } rg(A) = rg(A^T)}$$

D/ On écrit $r := $ rang $rg(A)$

et on ecrit $\boxed{A = PJ_rQ}$ echec ou $J_r = PAQ$

Donc on a $J_r^T = Q^T A^T P^T = J_r$

Donc $rg(J_r) = rg(Q^T A^T P^T)$

$= rg(A^T) = r$ ■

6) Le rang des lignes = le rang des colonnes

Prop : Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$

Alors $rg(A) = rg(C_1(A), C_2(A), \dots, C_p(A))$

$= rg(L_1(A), L_2(A), \dots, L_n(A))$

D/ c'est ok car $rg(A) = rg\, A^T$ ■

Rq : Tout ceci est ok pour les matrices rectangulaires

7) Calcul pratique du rang

On fait des opélem sur la matrice A jusqu'à obtenir une matrice dont le rang est aisé à calculer.

Rq : • On peut aller jusqu'à J_r

• On peut s'arrêter qd la matrice est echelonnée"

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & * & * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & * & * & * \end{pmatrix}$$

le rang est le nb de "pivots" les premiers coeffs $\neq 0$

8) rang et matrice extraite

a) matrices extraites

Déf : Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et Soit $B \in M_{n',p'}(\mathbb{K})$ avec $n' \leq n$ et $p' \leq p$.

On dit que B est extraite de A

ssi on obtient B en gardant certaines lignes et colonnes de A.

Ex : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{pmatrix} \in M_{3,5}(\mathbb{R})$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 11 & 13 & 15 \end{pmatrix}$ extraite A

b) lien avec le rang

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$

Prop : Soit $A' \in M_{n'}(\mathbb{K})$ extraite de A tq A' inversible. Alors $rg(A) \geq n'$

Lemme Soient $X_1, \dots, X_p \in \mathbb{K}^n$

Soient $X'_1, \dots, X'_p \in \mathbb{K}^{n'}$ extraits de $X_1, \dots, X_n$ (par les $\overline{m}$ extractions)

Alors $(X'_1, \dots, X'_p)$ libre $\Rightarrow (X_1, \dots, X_p)$ libre

D/ par contraposée : ok ∎

D/ prop :

Notons $j_1 < \dots < j_{n'}$ les indices de colonne par lesquels A' a été extraite de A.

Mq $(C_{j_1}(A), \dots, C_{j_{r'}}(A))$ est libre

On a (AC) $C_1(A'), \dots, C_{r'}(A')$

sont extraits de $(C_{j_1}(A), \dots, C_{j_{r'}}(A))$

Or A' inv. Donc $(C_1(A'), \dots, C_{r'}(A'))$ libre

Donc $(C_{j_1}(A), \dots, C_{j_{r'}}(A))$ libre

Donc $\dim(\mathrm{Vect}(C_1(A), \dots, C_p(A)) \geq r'$ ■

Prop : $\mathrm{rg}(A) = r \implies \exists A' \in M_r(\mathbb{R}) : \begin{cases} A' \text{ extraite } A \\ A' \text{ inversible} \end{cases}$

D/ • On sait que $\dim(\mathrm{Vect}(C_1(A), \dots, C_p(A))) = r$

D'après le TBE, fixons $j_1 < \dots < j_r \in [\![1, p]\!]$ tq

$(C_{j_1}(A), \dots, C_{j_r}(A))$ base $\mathrm{Im}(A)$

• Notons $A' = (C_{j_1}(A), \dots, C_{j_r}(A)) \in M_{n,r}(\mathbb{K})$

On a $\mathrm{rg}(A') = r$

Donc $(A')^T$ est de rang r

On écrit $(A')^T = (L_1(A')^T \; L_2(A')^T \dots L_n(A')^T)$

$\in M_{r,n}(\mathbb{K})$

On sait que $\dim \mathrm{Vect}\left(C_1\left((A')^T\right), \dots, C_n\left((A')^T\right)\right) = r$

Grâce au TBE, fixons $i_1 < \dots < i_r \in [\![1, n]\!]$ tq

$C_{i_1}\left((A')^T\right), \dots, C_{i_r}\left((A')^T\right)$ base $\mathrm{Im}(A'^T)$

On note $B' := \left(C_{i_1}(A')^T \mid \dots \mid C_{i_r}(A')^T \right)$

On a B' inv car les colonnes de B forment une famille libre de bonne taille.

On pose $A'' := (B')^T$.

On a A'' extraite A

$\blacksquare$