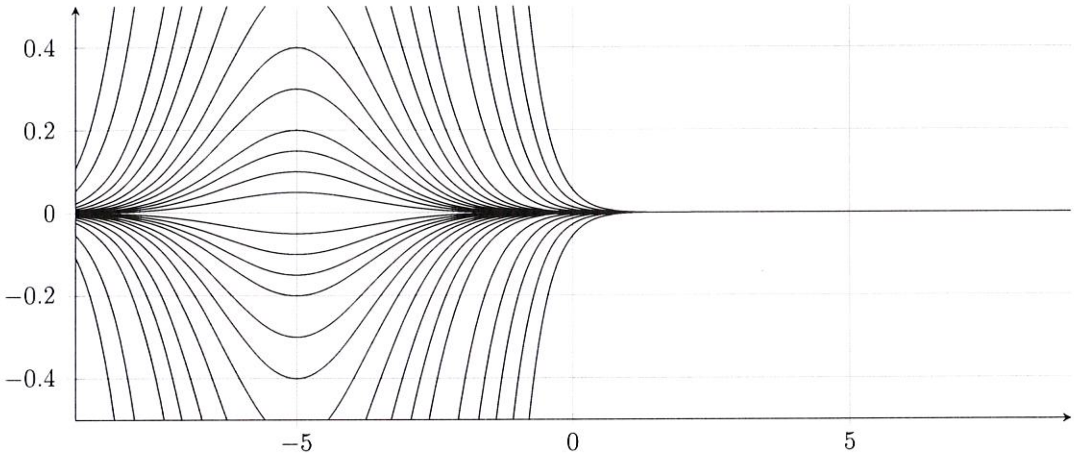
Chapitre 28

Équations différentielles



Graphe des solutions d'une équation différentielle

Une équation différentielle *est une équation dont l'inconnue est une fonction dérivable et qui fait intervenir la dérivée de cette fonction. Par exemple*

$$y' = y$$

est une équation différentielle dont l'inconnue, notée y, est une fonction. Remarquez (cette remarque est fondamentale) que la fonction exponentielle est solution de cette équation.

L'étude des équations différentielles est une branche très active des mathématiques et dont les applications sont très nombreuses : physique, économie, biologie, etc. *Dans ce chapitre, nous nous concentrerons sur les cas les plus accessibles mais qui révèlent déjà quelques subtilités et autres phénomènes remarquables.*

Lycée CHATEAUBRIAND
MPSI 3

Colas Bardavid

28
Équations différentielles

plan de cours et principaux résultats

I. Exemples, vocabulaire, classification

36.28
36.26
36.27

1) Notion d'équation différentielle

a) définitions
b) exemples
c) une convention fondamentale
d) des exemples

2) Solutions d'une équation différentielle

3) Équations différentielles linéaires (EDL)

a) définition

Définition 28.1
Une équation différentielle linéaire d'ordre n (définie sur I) *est une équation différentielle de la forme*

$$\boxed{a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t),} \qquad (E)$$

où $a_0(\cdot), \ldots, a_n(\cdot), b(\cdot) : I \longrightarrow \mathbb{K}$ *sont des fonctions continues.*

b) vocabulaire
c) exemples

4) Bilan : classification des équations différentielles

II. Généralités sur les EDL

1) Notations

2) Premiers faits

3) Solutions de l'équation homogène

Proposition 28.2 Ⓣ
L'ensemble $\mathsf{Sol}(E_0)$ *des solutions d'une EDL homogène est un espace vectoriel.*

4) Solutions de l'équation avec second membre

5) Principe de superposition

6) Régularité des solutions des équations différentielles linéaires

III. Résolution des EDL d'ordre 1

36.19
36.18
36.17

1) Résolution des EDL d'ordre 1 homogènes

a) résolution

Théorème 28.3
Soit $A(\cdot)$ une primitive de $a(\cdot)$ sur I. Alors,

$$\mathrm{Sol}\big(y' + a(t)y = 0\big) = \Big\{\lambda \mathrm{e}^{-A(\cdot)}\ ;\ \lambda \in \mathbb{R}\Big\}.$$

b) exemples
c) l'alternative pour les $\mathrm{EDL}_1^{[h]}$
d) un isomorphisme
e) un corollaire pour les EDL_1

2) Cas général : résolution des EDL d'ordre 1

a) méthode de la variation de la constante : idée
b) méthode de la variation de la constante : rédaction
c) une conséquence théorique
d) exemples

3) Problème de Cauchy

a) idée générale
b) cas des EDL_1

Proposition 28.4
Soit $t_0 \in I$ et soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
Alors, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' + a(t)y = b(t) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases}$$

possède une unique solution.

4) Extension à $\mathbb{C}$

IV. Résolution des EDL d'ordre 2 à coefficients constants

36.24
36.25

1) Cadre d'étude et notations

2) Fonctions polynomiales-exponentielles

3) Énoncé complexe

4) Énoncé réel

a) le théorème

Théorème 28.5

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq 0$.
On considère l'EDL$_2$ à coefficients constants

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{E_0}$$

On pose $P := aX^2 + bX + c$ et $\Delta := b^2 - 4ac$.
On a trois cas :

- ***Premier cas :** $\Delta > 0$.*
  Le polynôme P admet deux racines distinctes $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors,
  $$\mathsf{Sol}^{\mathbb{R}}(E_0) = \mathsf{Vect}\Big(t \longmapsto \mathrm{e}^{\lambda t},\ t \longmapsto \mathrm{e}^{\mu t}\Big).$$
- ***Deuxième cas :** $\Delta = 0$.*
  Le polynôme P admet une racine double $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,
  $$\mathsf{Sol}^{\mathbb{R}}(E_0) = \mathsf{Vect}\Big(t \longmapsto \mathrm{e}^{\lambda t},\ t \longmapsto t\mathrm{e}^{\lambda t}\Big).$$
- ***Troisième cas :** $\Delta < 0$.*
  Le polynôme P admet deux racines complexes conjuguées $r \pm \mathrm{i}\omega \in \mathbb{C}$. Alors,
  $$\mathsf{Sol}^{\mathbb{R}}(E_0) = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \mathrm{e}^{rt}\Big(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\Big) \end{array} \ ;\ A, B \in \mathbb{R} \right\}.$$

b) un dessin

5) Détermination des solutions par deux conditions initiales

6) Démonstration des théorèmes de résolution des EDLC$_2$

7) Problème de Cauchy

Théorème 28.6

Soit $t_0 \in I$ et soient $x_0, x_0' \in \mathbb{R}$. Alors, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = \beta(t) \\ y(t_0) = x_0 \\ y'(t_0) = x_0' \end{cases}$$

admet une unique solution.

8) Solutions particulières dans certains cas

a) cas des seconds membres exponentiels
b) cas des seconds membres polynomiaux-exponentiels
c) cas des seconds membres trigonométriques

① Regardons un exemple.

$(E) : y'' + 8y' + ty = t^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $f \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tq f sol°

Alors : $f'' = \underbrace{(\cdot)^2}_{\in \mathcal{D}^1} - \underbrace{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}}_{\in \mathcal{D}^1} \underbrace{f}_{\in \mathcal{D}^1} - 8 \underbrace{f'}_{\in \mathcal{D}^1}$ car $f \in \mathcal{D}^2$

Donc $f'' \in \mathcal{D}^1$

Donc $f \in \mathcal{D}^3$

Rq : • le $\mathrm{Sol}(F_0) = \mathrm{Vect}\left(e^{-A(\cdot)}\right)$

• Donc $\dim \mathrm{Sol}(F_0) = 1$

② Résolvons $y' = \dfrac{1}{t\ln(t)} y$ sur $]0,1[$.

On pose $a : \begin{array}{rcl}]0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{t\ln(t)} \end{array}$

Astuce Une primitive de $a(\cdot)$ est

$A : \begin{array}{rcl}]0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \ln(-\ln(t)) \end{array}$

⚠ Piège : ici

$$Sol(E_0) = \mathrm{Vect}\left(e^{+A(\cdot)}\right)$$

Soit $t \in]0,1[$ On a $e^{A(t)} = -\ln(t)$

DALC, on a $Sol(E_0) = \mathrm{Vect}(-\ln(\cdot))$

$$= \boxed{\mathrm{Vect}(\ln(\cdot))}$$

AF sur $]1, +\infty[$

AF Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$: $\ln(t) t y' = y$

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sol°

Posons $f_1 := f|_{]0,1[}$: alors $f_1 \in Sol(E_0)$

Fixons donc $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ tq $f_1 = \lambda \ln|_{]0,1[}$

De m̄ posons $f_2 = f|_{]1,+\infty[}$

On a $f_2 \in Sol(E_0')$

Fixons donc $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tq $f_2 = \lambda_2 \ln|_{]1,+\infty[}$

- On a $f_2'(t) = \frac{\lambda_2}{t} \xrightarrow[t \to 1^+]{} \lambda_2$

Donc $f'(t) \xrightarrow[t \to 1^+]{} \lambda_2$ D'après le théorème de la limite de la dérivée, on a $f'(1) = \lambda_2$

De m̄ $(t \to 1^-)$: $f'(1) = \lambda_1$

<u>CCl</u> : $\lambda_1 = \lambda_2$

Rq : Si on était parti de $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ sol°, on aurait pu conclure ⊕ rapidement.

ccl : $\text{sol}\left(t\ln(t)\,y' - y = 0\right) = \text{Vect}\left(\ln(\cdot)\right)$

Deuxième exemple :

Resolvons $y' = \tan(t)\,y$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

B° $\tan = \frac{\sin}{\cos} = -\frac{\cos'}{\cos}$

On a $\tan = -\frac{\cos'}{\cos}$

Donc $\int^x \tan(\theta)\,d\theta = -\ln(|\cos\theta|)$

$= -\ln(\cos\theta)$ (sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$)

ĉ $e^{-\ln(\cos\theta)} = \frac{1}{\cos\theta}$ si $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,

On a DALG

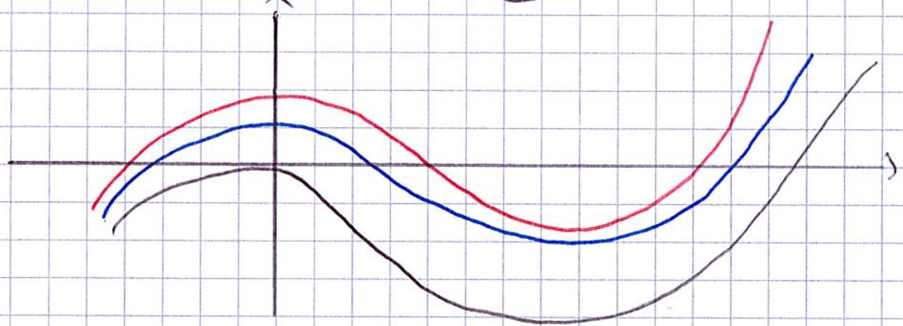
$\text{Sol}\left(y' = \tan(t)\,y\right) = \text{Vect}\left(\frac{1}{\cos}\right)$

③ Rq : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$

Alors f est sol° de $y' = f'(t)$

Donc f est sol° d'une EDL_1 résolue

④ On a donc le $\widehat{d^n}$ des sol° d'une EDL_1.



⑤

• Resolvons $\boxed{ty' - 2y = t^3 \sin(t) \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$ (E)

qui est équivalente à $y' - \frac{2}{t} y = t^2 \sin(t)$ (E')

On note (E_0) : $y' - \frac{2}{t} y = 0$

(*) Une primitive de $t \longmapsto \frac{-2}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

est $t \longmapsto -2\ln(t)$

(*) De ④, $\forall t > 0$, $e^{(-2\ln t))} = t^2$

(*) Donc, DALC, $Sol(E_0) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \lambda t^2 \end{array} ; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

Ie $Sol(E_0) = Vect\left((\cdot)^2 \big|_{\mathbb{R}_+^*} \right)$

(*) Soit $\lambda(\cdot) : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$

On pose $f_p : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \lambda(t) \end{array}$

Soit $t>0$, on a :

1°) $f_p'(t) = \lambda'(t)t^2 + 2t\lambda(t)$

$f_p'(t) - \frac{2}{t} f_p(t)$

$= \lambda'(t)t^2 + 2\lambda(t) - \frac{2}{t} \lambda(t)t^2$

Ainsi : $f_p \in Sol(E') \Longleftrightarrow \forall t>0, \ \lambda'(t)t^2 = t^2 \sin(t)$

$\Longleftrightarrow \forall t>0, \ \sin(t) = \lambda'(t)$

c. $(-\cos)' = \sin$, on en déduit que :

$t \longmapsto \boxed{-\cos(t)}t^2$

ccl :

$Sol(E') = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto -\cos(t)t^2 + \lambda t^2 \end{array} , \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

- Notons $(E'') : y' - \frac{2}{t}y = t^2 \sin(t)$ sur $\mathbb{R}_+^*$

et $(E_0') : y' - \frac{2}{t}y = 0$

$\hat{c}$ une primitive $\begin{array}{l} \mathbb{R}_-^* \longrightarrow \mathbb{R}^* \\ t \longmapsto \frac{-2}{t} \end{array}$ est $\begin{array}{l} \mathbb{R}_-^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto -2\ln(|t|) \end{array}$

ie $\begin{array}{l} \mathbb{R}_-^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto -2\ln(-t) \end{array}$

$\hat{c}$ $\forall t<0$, $e^{-A(t)} = e^{2\ln(t)} = (-t)^2 = t^2$

Ainsi : $Sol(E_0'') = \text{vect}\left((\cdot)^2|_{\mathbb{R}_-^*}\right)$

(*) Ocsd

$g : \begin{array}{l} \mathbb{R}_-^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto -t^2\cos(t) \end{array}$

On a si $t<0$:

$g'(t) - \frac{2}{t} g(t) = g'(t) + 2t\cos(t) =$

$-2t\cancel{\cos}(t) + t^2\sin(t) + 2t\cancel{\cos}(t)$

Ainsi : $g(\cdot) \in Sol(E_0'')$

ccl : $Sol(E'') = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_-^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto -t^2\cos(t) + \lambda t^2 \end{array} ; \lambda \in \mathbb{R} \right.$

Recollons les sol°

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sol° de F

Alors : $f|_{\mathbb{R}_+^*} \in Sol(E')$

Fixons donc $\lambda^+ \in \mathbb{R}$ tq $\forall t > 0, \; f(t) = -t^2\cos(t) + \lambda^+ t^2$

De $\overline{m}$, $\hat{c}$ $f|_{\mathbb{R}_-^*} \in Sol(E'')$, fixons $\lambda^- \in \mathbb{R}$ tq

$\forall t < 0, \quad f(t) = -t^2\cos(t) + \lambda^- t^2$

Le recollement impose-t-il que $\lambda^+ = \lambda^-$?

<u>Synthèse</u> : Posons pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$g_{\lambda,\mu} : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} -t^2\cos(t) + \lambda t^2 & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ -t^2\cos(t) + \mu t^2 & \text{si } t > 0 \end{cases} \end{array}$$

Fixons $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

- Déjà : $g_{\lambda,\mu}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

D/ • Elle est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$

• Soit $t>0$. On a

But : mq $g_{\lambda,\mu}$ est d^1 en 0

$g'_{\lambda,\mu}(t) = \frac{2}{t} g_{\lambda,\mu} + t^2 \sin(t)$

car $g_{\lambda,\mu} \in Sol(E')$

Idée : Thm de la limite de la dérivée

ou

$\tau_{g_{\lambda,\mu},0}(t)$ pour $t>0$ et $t<0$

$$= -2t\cos(t) + 2\lambda t + t^2 \sin(t) \xrightarrow[t \to 0^+]{} 0$$

• De m̂ qd $t \to 0^-$

• Donc d'après le thm de la limite de la dérivée, on a $g_{\lambda,\mu}$ dérivable en 0 et

$$g'_{\lambda,\mu}(t) \xrightarrow[t \to 0]{} g'_{\lambda,\mu}(0)$$

CCl : $\boxed{g_{\lambda,\mu} \text{ est } d^1 \text{ et mieux est } \mathcal{C}^1}$

• Mq $g_{\lambda,\mu} \in Sol(E)$

ie mq $\forall t \in \mathbb{R}, \ t g'_{\lambda,\mu}(t) - 2 g_{\lambda,\mu}(t) = t^3 \sin(t)$

soit $t \in \mathbb{R}$:

(*) si $t > 0$: ok (AC)

si $t < 0$: ok (AC)

(*) si $t = 0$: ok

■

Rq : De $\overline{m}$ on peut prouver que

$$\mathrm{Sol}\,(ty' - 2y = 0) = \mathrm{Vect}(f^+ ; f^-)$$

c'est un ev

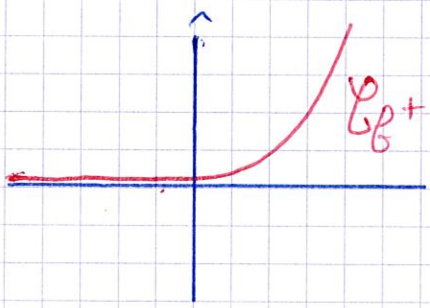
où $f_+ : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

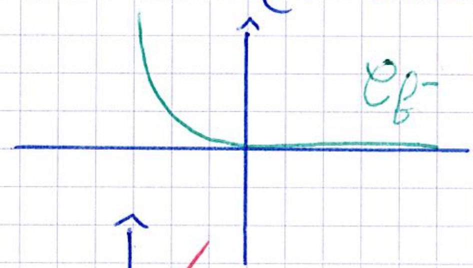
$$t \longmapsto \begin{cases} t^2 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$f_- : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$t \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \geq 0 \\ t^2 & \text{sino} \end{cases}$$

d^n





rq : on a $f'_+ =$  ;

Ainsi f'_+ n'est pas d^1, donc f_+ n'est pas d^2.

Mais : f'_+ est c^0 ; Donc $\boxed{f_+ \text{ est } \mathcal{C}^1}$

⑥ Soit $t_0 \in I$

Prop : Ocsd

$$\Phi_{t_0} : Sol(E_0) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \ \mathbb{K}^2$$
$$f \longmapsto \begin{pmatrix} f(t_0) \\ f'(t_0) \end{pmatrix}$$

Alors : 1) Φ_{t_0} AL

2) Elle est inj

D/ 1) ok

2) Soit $f \in Ker(\Phi_{t_0})$ ie soit $f \in Sol(E_0)$

tq $f(t_0) = f'(t_0) = 0$

On a $f \in \mathcal{D}^2(I, \mathbb{K})$

Idée : On se ramène aux EDL_1 en écrivant (E_0) c "composée de 2 EDL_1"

Idée : On factorise P :

Fixons $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ tq $P = a(X_1 - x_1)(X - x_2)$

Rq : Notons $D : f \longmapsto f'$

On a $P = aX^2 + bX + c$

On a $\quad P(D) : f \longmapsto af'' + bf' + cf$

(On a $\quad P(D) = aD^2 + bD + c\,Id$

$P(D)(f) = af'' + bf' + cf$)

$\hat{C}$ $\quad P = a(X - x_1)(X - x_2)$, on a

$$P(D) = a(D - x_1 Id) \circ (D - r_2 Id)$$

$$y' - x_1 y = 0$$

Posons $\quad g := f' - x_2 f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ qui est d

On a $\quad g' - x_1 g = (f'' - x_2 f') - x_1 (f' - x_2 f)$

$$= f'' - (x_1 + x_2) f' + x_1 x_2 f$$

R^x <u>Relations coeff-racines</u>

$$aX^2 + bX + c = a(X - r_1)(X - r_2)$$

On a $\quad X^2 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} = (X - r_1)(X - r_2)$

$$\begin{cases} \frac{c}{a} = r_1 r_2 \\ \frac{b}{a} = -(r_1 + r_2) \end{cases} \qquad = X^2 - (r_1 + r_2) + r_1 r_2$$

Donc $\quad g'' - x_1 g = \frac{1}{a}\left(af'' + bf' + \overset{c}{\cancel{b}}f\right)$

$$= \tilde{0} \quad \text{car } f \in Sol(E_0)$$

ccl : $\boxed{g' - r_1 g = 0}$ • De plus $g(t_0) = f'(t_0) - x_2 f(t_0)$
$= 0$

Donc, d'après (EDL 12), on a

$g = \tilde{0}$

Donc $f' - x_2 f = \tilde{0}$, De ④ $f(t_0) = 0$

Donc (EDL.12) : $f = \tilde{0}$ ■

⑦ $\boxed{1^{er} \text{ Cas} \quad (\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})}$

$\boxed{\text{Osq } P \text{ possède } 2 \text{ racines } \neq^{tes} \lambda, \mu \in \mathbb{K}}$

Fait : $P(\lambda) = 0 \implies e_\lambda \in Sol(E_0)$

D/ On a $\begin{cases} (e_\lambda)' = \lambda e_\lambda \\ (e_\lambda)'' = \lambda^2 e_\lambda \end{cases}$

Donc : $\varphi_{(E)}(e_\lambda) = a e_\lambda'' + b e_\lambda' + c e_\lambda$

$= a\lambda^2 e_\lambda + b\lambda e_\lambda + c e_\lambda$

$= (a\lambda^2 + b\lambda + c) e_\lambda$

$= P(\lambda) e_\lambda$ ■

Fait : $\lambda \neq \mu \Rightarrow (e_\lambda, e_\mu)$ libre

D/ AF^{++} ■

Fait : $P(\lambda) = 0 \Longrightarrow e_\lambda \in Sol(E_0)$

Ainsi : ĉ (e_λ, e_μ) libre et ĉ $Vect(e_\lambda, e_\mu)$ sev $Sol(E_0)$

On a $\boxed{\dim Sol(E_0) \geq 2}$

- De ⊕ $\underline{\Phi}_{t_0} : Sol(E_0) \longrightarrow \underline{\mathbb{R}^2}$ est inj

donc $Sol(E_0)$ ev^{df} et $\dim Sol(E_0) \leq 0$

- Bilan : $\dim Sol(E_0) = 2$
- Donc (e_λ, e_μ) est une famille libre

de solutions de bonne taille : c'est une base.

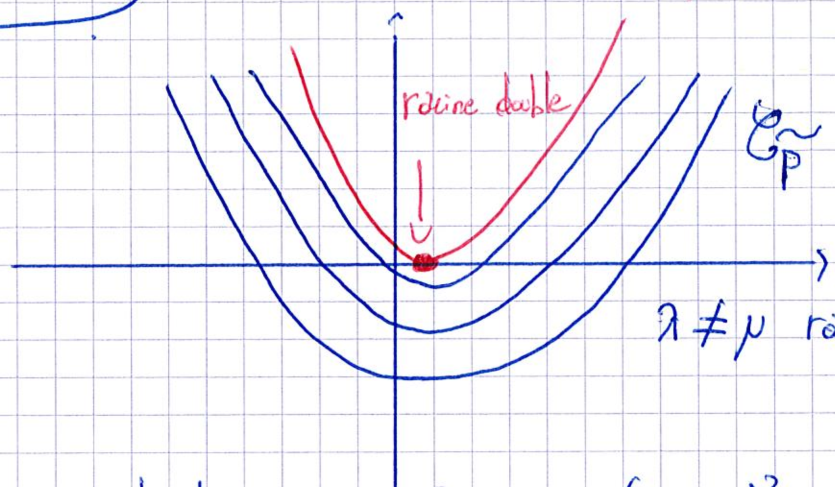
ccl : $Sol(E_0) = \left\{ \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{K} \\ t \longmapsto Ae^{\lambda t} + Be^{\mu t} \end{array}, (A,B) \in \mathbb{K}^2 \right\}$

2^e Cas

Fait : $\lambda \in \mathbb{K}$

λ racine double de $P \Rightarrow P(\lambda) = P'(\lambda) = 0$

d^n dans $\mathbb{R}$



λ racine double $\Rightarrow$ $P = a(X-\lambda)^2$

D/ Osq λ racine double de P

On a donc $P = a(X-\lambda)^2$

Donc $P' = 2a(X-\lambda)$

On a bien $\underline{P'(\lambda) = 0}$ ■

Rq : • Osq $\Delta = 0$ ie $b^2 = 4ac$

• Mq $P = a\left(X - \frac{-b}{2a}\right)^2$

On calcule :

$$a\left(X + \frac{b}{2a}\right)^2 = a\left(X^2 + \frac{b}{a}X + \frac{b^2}{4a^2}\right)$$

$$= aX^2 + bX + \frac{b^{2 \, {}^{\shortparallel} 4ac}}{4a}$$

$$= aX^2 + bX + c$$ ■

Rq : Ocsd $P = a(X-\lambda)^2 = aX^2 - 2\lambda a X + a\lambda^2$

On calcule $\Delta := (-2\lambda a)^2 - 4 a a \lambda^2 = 0$ ■

Fait : La famille (e_λ, f_λ) libre.

D/ Fixons $t_0 \in I$

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tq $\alpha e_\lambda + \beta f_\lambda = \tilde{0}$ $(*)$

Donc pour $t = t_0$: $\boxed{\alpha e^{\lambda t_0} + \beta t_0 e^{\lambda t_0} = 0}$

On dérive $(*)$: $\alpha \lambda e_\lambda + \beta(e_\lambda + \lambda f_\lambda) = \tilde{0}$

Donc $\lambda(\alpha e^{\lambda t_0} + \beta t_0 e^{\lambda t_0}) + \beta e^{\lambda t_0} = 0$

Donc AF $\alpha = \beta = 0$ ■

Osq λ racine double de P

Fait : On a $P(\lambda) = 0$ donc $e_\lambda \in Sol(E_0)$

D/ ok ■

Fait : Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$

Alors, on a :

1) $Q(D)(e_\lambda) = Q(\lambda) e_\lambda$

2) T $Q(D)(f_\lambda) = \sum_{i=0}^{n} a_i f_\lambda^{(i)}(\cdot)$

D/ 1) AF

2) On écrit $Q = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k X^k$ avec $d \in \mathbb{N}$ et $\forall k, \alpha_k \in \mathbb{K}$

On a $Q(D)(f_\lambda) = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k f_\lambda^{(k)}(\cdot)$

M^d petit n

B°

$$f_\lambda' = e_\lambda + \lambda f_\lambda$$

$$f_\lambda'' = e_\lambda' + \lambda f_\lambda' = \lambda e_\lambda + \lambda(e_\lambda + \lambda f_\lambda)$$

$$= 2\lambda e_\lambda + \lambda^2 f_\lambda$$

$$f_\lambda''' = 2\lambda e_\lambda' + \lambda^2 f_\lambda'$$

$$= 2\lambda^2 e_\lambda + \lambda^2(e_\lambda + \lambda f_\lambda)$$

Mq $\forall k$, $f_\lambda^{(k)} = k\lambda^{k-1} e_\lambda + \lambda^k f_\lambda$

D/ (rec) $k = 0, 1, 2, 3$: ok

$k \longrightarrow k+1$: T

$$\left(k\lambda^{k-1} e_\lambda + \lambda^k f_\lambda\right)' = k\lambda^k e_\lambda + \lambda^k(e_\lambda + \lambda f_\lambda)$$

$$= (k+1)\lambda^k e_\lambda + \lambda^{k+1} f_\lambda$$

Donc : $\sum_{k=0}^{d} \alpha_k (f_\lambda)^{(k)}$

$= \sum_{k=0}^{d} (k\alpha_k \lambda^{k-1} e_\lambda + \lambda^k f_\lambda)$

$= \left(\sum_{k=0}^{d} k\alpha_k \lambda^{k-1}\right) e_\lambda + \left(\sum_{k=0} \alpha_k \lambda^k\right) f_\lambda$

$= Q'(\lambda) e_\lambda + P(\lambda) f_\lambda$ ■

Rq : On pose $e_{\lambda,k} : I \longrightarrow \mathbb{K}$
$t \longmapsto t^k e^{\lambda t}$

Fait : $(e_{\lambda,0}, e_{\lambda,1}, \dots, e_{\lambda,N})$ libre

D/ AF ■

Fait : $Q(D)(e_{\lambda,i}) = Q(\lambda) e_{\lambda,i} + Q'(D) e_{\lambda,i-1} + \dots + Q^{(i)}(\lambda) e_{\lambda,0}$

D/ AF

Prop : Osq λ racine double de P.
Alors $Sol(E_0) = Vect(e_\lambda, f_\lambda)$

D/ • ĉ $\Phi_{E_0} : Sol(E_0) \longrightarrow \mathbb{K}^2$ inj : on a
$Sol(E_0)$ ev^{df} et $\dim Sol(E_0) \leq 2$

• $\hat{C}$ λ racine double de P. On a $P(\lambda)=P'(\lambda)=0$

• $\hat{C}$ $P(\lambda)=0$, on a $\varphi_{(E)}(e_\lambda) = P(D)(e_\lambda)$

$= P(\lambda)\, e_\lambda = \tilde{0}$

Donc $e_\lambda \in Sol(E_0)$

• Comme $P'(\lambda)=0$, on a $\varphi(E)(f_\lambda) = P(D)(f_\lambda)$

$= \underbrace{P(\lambda)}_{=0} f_\lambda + \underbrace{P'(\lambda)}_{=0} e_\lambda = \tilde{0}$

donc $f_\lambda \in Sol(E_0)$

• Donc $Vect(e_\lambda, f_\lambda) \subset Sol(E_0)$

• $\hat{C}$ (e_λ, f_λ) libre, on a $\dim Vect(e_\lambda, f_\lambda) = 2$

• Donc $\dim Sol(E_0) \geqslant 2$

• Donc $\dim Sol(E_0) = 2$

• Ainsi $Vect(e_\lambda, f_\lambda)$ est un sev de $Sol(E_0)$

de dimension pleine :

il est DALC plein ; on a $\boxed{Sol(E_0) = Vect(e_\lambda, f_\lambda)}$

$\blacksquare$

Cas réel

Prop : Soit (E) EDL à coefficients constants réels

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une solut° de E

Alors $Re(f)$ et $Im(f)$ sont sol° de E

D/ Ⓣ On a

$$\forall t \in I, \quad \sum_{i=0}^{n} \underbrace{a_i(t)}_{\in \mathbb{R}} \, f^{(i)}(t) = \underbrace{b(t)}_{\in \mathbb{R}}$$

$\in \mathbb{C}$

$f = \mathrm{Re}(f) + i\,\mathrm{Im}(f)$

$\mathrm{Re}(\cdot)$

ok ■

Cas réel

Osq $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $\Delta < 0$

on écrit $r + i\omega$ et $r - i\omega$ les racines de P

avec $r \in \mathbb{R}$ et $\omega > 0$

Mq $\mathrm{Sol}(E_0) = \left\{ t \longmapsto e^{rt}\left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right);\ A, B \in \mathbb{R} \right\}$

Notons $\mathrm{Sol}^{\mathbb{C}}(E_0) = \left\{ f : I \longrightarrow \mathbb{C} \;\middle|\; f \text{ sol° de } (E_0) \right\}$

On a $\underline{2}$ racines distinctes dans $\mathbb{C}$

Donc on a $\mathrm{Sol}^{\mathbb{C}}(E_0) = \mathrm{Vect}\left(e_{r+i\omega}\,;\ e_{r-i\omega}\right)$

Soit $f \in \mathrm{Sol}^{\mathbb{R}}(E_0)$. On a donc $f \in \mathrm{Sol}^{\mathbb{C}}(E_0)$

Ecrivons $f = \alpha\, e_{r+i\omega} + \beta\, e_{r-i\omega}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

Or, $f = \mathrm{Re}(f)$

Soit $t \in I$. On a donc

$$f(t) = \mathrm{Re}\left(\alpha \underbrace{e^{rt}}_{\in \mathbb{R}} e^{i\omega t} + \beta \underbrace{e^{rt}}_{\in \mathbb{R}} e^{-i\omega t}\right.$$

$$= e^{rt}\, \mathrm{Re}\left(\alpha e^{i\omega t} + \beta e^{-i\omega t}\right)$$

$$= e^{rt}\Big[\mathrm{Re}(\alpha)\cos(\omega t) - \mathrm{Im}(\alpha)\sin(\omega t) + \mathrm{Re}(\beta)\cos(-\omega t) - \mathrm{Im}(\beta)\underbrace{\sin(-\omega t)}_{=-\sin(\omega t)}\Big]$$

ccl : $\mathrm{Sol}(E_0) \subset \{t \longmapsto (\dots),\ (A,B) \in \mathbb{R}\}$

• $\supset$ On a $e_{r+i\omega} \in \mathrm{Sol}^{\mathbb{C}}(E_0)$ car $P(r+i\omega)=0$

Donc $\underbrace{\mathrm{Re}(e_{r+i\omega})}_{t \longmapsto e^{rt}\cos(\omega t)}$, $\underbrace{\mathrm{Im}(e_{r+i\omega})}_{t \longmapsto e^{rt}\sin(\omega t)} \in \mathrm{Sol}(E_0)$

■

Deuxième demo :

On note $e_r^{[\cos]} : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto e^{rt}\cos(\omega t) \end{array}$

$e_r^{[\sin]} : t \longrightarrow e^{rt}\sin(\omega t)$

On a $(e_r^{[\cos]}, e_r^{[\sin]})$ libre D/ AF ■

• On a vu que $e_r^{[\cos]}, e_r^{[\sin]} \in \mathrm{Sol}(E_0)$

• Avec les $\overline{m}$ techniques d'algèbre linéaire :

on conclut ■

Corollaire :

$$\Phi_{E_0} : \mathrm{Sol}(E_0) \longrightarrow \mathbb{K}^2 \quad \text{iso}$$
$$f \longmapsto \begin{pmatrix} f(t_0) \\ f'(t_0) \end{pmatrix}$$

D/ On a mq c'est inj
On a mq on a tjrs dim $\mathrm{Sol}(E_0) = 2$ ■

(8) D/ (T) 1) $\varphi_{(E)}(e_\alpha) = P(\alpha) e_\alpha$

Donc $\varphi(E)(\lambda e_\alpha) = \lambda P(\alpha) e_\alpha$

Donc $\lambda e_\alpha \in \mathrm{Sol}(E) \iff \lambda P(\alpha) e_\alpha = \mu e_\alpha$

$\iff \lambda = \dfrac{\mu}{P(\alpha)}$

CCl : $\dfrac{\mu}{P(\alpha)} \in \mathrm{Sol}(ay'' + by' + cy = \gamma e_\alpha)$

2) $\varphi_{(E)}(\lambda f_\alpha) = \lambda \varphi_{(E)}(f_\alpha)$

$= \lambda \left[\underbrace{P(\alpha)}_{0} f_\alpha + \underbrace{P'(\alpha)}_{\neq 0} e_\alpha \right]$ (H F)

$= \lambda P'(\alpha) e_\alpha$

$\lambda f_\alpha \in \mathrm{Sol}(E) \iff \lambda P'(\alpha) e_\alpha = \gamma e_\alpha$

$\iff \lambda \dfrac{\gamma}{P'(\alpha)}$

ccl : $\frac{\gamma}{P'(\alpha)} f_\alpha \in Sol(E)$

2) De m : $\frac{\gamma}{P''(\alpha)} g_\alpha \in Sol(E_0)$ $P' = 2aX + b$

$P'' = 2a$

9 Ex : Resolvons $y'' + y' + y = \sin(t)$

$$P := X^2 + X + 1 \quad Z_{\mathbb{C}}(P) = \{j, j^2\}$$

$$(X-1)(1 + X + X^2) = X^3 - 1 \longrightarrow \mathbb{U}_3$$

$$Sol(E_0) = \left\{ t \longmapsto e^{-\frac{1}{2}t}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) \right\}$$

On trouve une sol° part. de $y'' + y' + y = e^{it}$

c'est $\frac{1}{i^2 + i + 1} e^{it} = \frac{1}{i} e^{it} = -ie^{it}$

Donc $Im(t \longmapsto -ie^{it})$ Sol° de

y'' ,