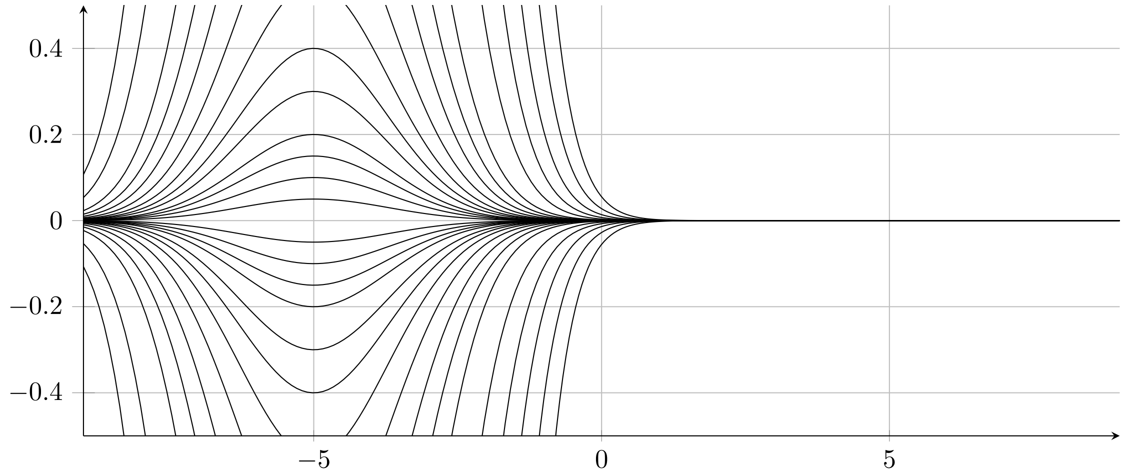
Lycée CHATEAUBRIAND
Colas Bardavid

Chapitre 28

Équations différentielles



Graphe des solutions d'une équation différentielle

Une équation différentielle *est une équation dont l'inconnue est une fonction dérivable et qui fait intervenir la dérivée de cette fonction. Par exemple*

$$y' = y$$

est une équation différentielle dont l'inconnue, notée y, est une fonction. Remarquez (cette remarque est fondamentale) que la fonction exponentielle est solution de cette équation.

L'étude des équations différentielles est une branche très active des mathématiques et dont les applications sont très nombreuses : physique, économie, biologie, etc. *Dans ce chapitre, nous nous concentrerons sur les cas les plus accessibles mais qui révèlent déjà quelques subtilités et autres phénomènes remarquables.*

Sommaire

Dans tout ce chapitre,

- on considère I un intervalle tel que $\ell(I) > 0$,
- $\mathbb{K}$ est le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,
- $n \in \mathbb{N}^*$ est un entier naturel non nul.

I. Exemples, vocabulaire, classification

1) Notion d'équation différentielle

a) définitions

Définition (informelle) EDL.**1**

1) *Une* équation fonctionnelle (définie sur I) *est une équation dont l'inconnue est une fonction définie sur I.*
2) *Une* équation différentielle (définie sur I) *est une équation dont l'inconnue est une fonction dérivable définie sur I et qui fait intervenir la dérivée de cette fonction.*
3) *Une* équation différentielle d'ordre n (définie sur I) *est une équation dont l'inconnue est une fonction dérivable n fois définie sur I et qui fait intervenir les dérivées k-ième de cette fonction pour $k \in [\![0, n]\!]$.*

b) exemples

- Voici un exemple d'équation fonctionnelle :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y), \tag{1}$$

où $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction.

Remarque

On a vu en TD le résultat suivant : les solutions continues de (1) sont les fonctions $\lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Voici, de même, d'autres exemples d'équations fonctionnelles :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, &\quad f(2x) = 2f(x) \\
\forall x \in \mathbb{R}, &\quad f(x^2) = f(x) \\
\forall x, y \in \mathbb{R}, &\quad f(x+y) = f(x) \times f(y) \\
\forall x, y \in \mathbb{R}, &\quad f(x+\mathrm{e}^y) = f(x) - y.
\end{aligned}$$

- Voici une exemple d'équation différentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(x), \tag{2}$$

où $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dérivable.

c) une convention fondamentale

L'équation différentielle (2) sera toujours notée, par convention

$$\boxed{y' = y}$$

où y est la fonction (dérivable) inconnue de l'équation.

d) des exemples

- De même, on notera

$$\boxed{y'' + 5xy = \mathrm{e}^x}$$

l'équation différentielle

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) + 5x \times f(x) = \mathrm{e}^x}$$

où $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction deux fois dérivable.

- Autres exemples :

$$\begin{aligned}
&y'' + y^2 = x && \text{(d'ordre 2)}\\
&\ln(y') - y = y' && \text{(d'ordre 1)}\\
&y'' - 8y' + 5y = 0 && \text{(d'ordre 2)}\\
&y'' - 8y' + 5y = \sin(x) && \text{(d'ordre 2)}\\
&y' = \mathrm{e}^x y + \sin(x) && \text{(d'ordre 1)}
\end{aligned}$$

2) Solutions d'une équation différentielle

Soit (E) une équation différentielle d'ordre n définie sur I.

Définition EDL. **2**

- *Soit $J \subset I$ un intervalle.*
  - ▷ *Soit $f : J \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction n fois dérivable.*
    On dit que f est solution de (E) sur J $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ *quand on remplace $y^{(i)}$ par $f^{(i)}(t)$, l'équation (E) est vérifiée pour tout $t \in J$.*
  - ▷ *On note $\mathsf{Sol}_J(E)$ l'ensemble des solutions de (E) sur J.*
- *On pose*

$$\mathsf{Sol}(E) \coloneqq \mathsf{Sol}_I(E).$$

Remarque

Si on veut préciser sur quel corps on se place, on pourra noter

$$\mathsf{Sol}^{\mathbb{R}}(E) \quad \text{et} \quad \mathsf{Sol}^{\mathbb{C}}(E)$$

et $\mathsf{Sol}_J^{\mathbb{R}}(E)$, $\mathsf{Sol}_J^{\mathbb{C}}(E)$.

3) Équations différentielles linéaires (EDL)

a) définition

Définition EDL. **3**

Une équation différentielle linéaire d'ordre n (définie sur I) *est une équation différentielle de la forme*

$$\boxed{a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t),} \qquad (E)$$

où $a_0(\cdot), \ldots, a_n(\cdot), b(\cdot) : I \longrightarrow \mathbb{K}$ sont des fonctions continues.

b) vocabulaire

- le terme $b(t)$ est appelé *second membre de (E)*;
- l'équation (E) est dite *homogène* (ou *sans second membre*) $\overset{\Delta}{\textit{ssi}}$ $b(\cdot) = \widetilde{0}$;
- l'équation (E) est dite *sous forme résolue* $\overset{\Delta}{\textit{ssi}}$ $a_n(\cdot) = \widetilde{1}$.
- l'équation (E) est dite *à coefficients constants* $\overset{\Delta}{\textit{ssi}}$ les fonctions $a_0(\cdot)$, $a_1(\cdot)$, …, $a_n(\cdot)$ sont constantes.

c) exemples

- ▷ L'équation différentielle $y' = y^2$ n'est pas linéaire.
  ▷ L'équation différentielle $y' = y + t^2$ est linéaire.
- ▷ L'équation différentielle linéaire $y' = y + t^2$ est également à coefficients constants.
  ▷ L'équation différentielle linéaire
  $$y' + t^2 y = t^2$$
  n'est pas à coefficients constants et n'est pas homogène.
  ▷ L'équation différentielle linéaire $y' + t^2 y = 0$ n'est pas à coefficients constants et est homogène.
  ▷ L'équation différentielle linéaire
  $$y'' + 8y' + 5y = 0$$
  est à coefficients constants et est homogène.
- ▷ L'équation différentielle linéaire
  $$ty'' + \frac{1}{1-t}y' + e^t y = \cos(t),$$
  peut être définie sur $]-\infty, 1[$ ou sur $]1, +\infty[$; elle n'est pas sous forme résolue.
  ▷ L'équation différentielle linéaire
  $$y'' + \frac{1}{t(1-t)}y' + \frac{e^t}{t}y = \frac{\cos(t)}{t},$$
  peut être définie sur $]0, 1[$, sur $]-\infty, 0[$ ou sur $]1, +\infty[$; elle est sous forme résolue.

Remarque

- Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction, un cas particulier d'équation différentielle d'ordre 1 (à coefficients constants) est :
  $$y' = f.$$
- Les solutions de cette équation différentielle sont les primitives de f.
- Ainsi, même le cas très simple des équations différentielles linéaire d'ordre 1 à coefficients constants inclut le problème (difficile en général) de détermination d'une primitive d'une fonction.

Exercice EDL.4

1) *L'équation différentielle $y'y = 1$ est-elle linéaire ?*
2) a) *Quels sont les coefficients de l'équation différentielle*
   $$\frac{y''}{e^t} + \frac{y'}{1+t^2} + (1 + t + t^2)y = \frac{\cos(t)}{t} \text{ ?}$$
   b) *Est-elle linéaire ?*

4) Bilan : classification des équations différentielles

On peut résumer la classification des équations différentielles par le schéma ci-dessous.

Équations différentielles (ED)

ED non linéaires
$y' = y^2 + t$

ED linéaires (EDL)
$y' + ty = e^t$

EDL à coefficients constants ($\text{EDLC}_{\mathbb{R}/\mathbb{C}}$)
$y''' - 3y'' + 6y' + 5y = \sin(t)$

EDL d'ordre 1 (EDL_1)
$y' + e^t y = \sin(t)$

$\text{EDLC}_{\mathbb{R}/\mathbb{C}}$ d'ordre 2 ($\text{EDLC}_{\mathbb{R}/\mathbb{C},\,2}$)
$y'' - 3y' + 5y = \sin(t)$

EDL_1 homogènes ($\text{EDL}_1^{[h]}$)
$y' + e^t y = 0$

Dans ce chapitre, on étudiera surtout :

- les EDL_1 (y compris homogènes) ;
- les EDLC_2 (*ie* à coefficients constants, d'ordre 2).

L'année prochaine, vous étudierez les EDL en toute généralité.

> **Remarque**
> L'étude des équations différentielles non linéaires se fait souvent au cas par cas, de façon qualitative. C'est un sujet dur mais très intéressant.

II. Généralités sur les EDL

1) Notations

- Dans toute la suite de ce chapitre,
  - ▷ on considère $a_0(\cdot), \ldots, a_n(\cdot) : I \longrightarrow \mathbb{K}$ des fonctions continues,
  - ▷ $b(\cdot) : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue.
- On va étudier l'équation différentielle linéaire

$$\boxed{a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t)} \qquad (E_b)$$

  qu'on note (E_b) ou (E).
- De même, on note (E_0) l'équation différentielle linéaire homogène

$$\boxed{a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0.} \qquad (E_0)$$

  On dit que (E_0) *est l'équation homogène associée à* (E).
- Enfin, on note

$$\varphi_{(E)} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{D}^n(I, \mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{F}(I, \mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i(t) f^{(i)}(t). \end{array} \end{array} \right.$$

2) Premiers faits

Fait EDL. **5**
L'application $\varphi_{(E)}$ est linéaire.

Démonstration. — Il suffit de vérifier que

$$\forall f, g \in \mathscr{D}^n(I, \mathbb{K}),\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \ \varphi_{(E)}(f + \lambda g) = \varphi_{(E)}(f) + \lambda \varphi_{(E)}(g),$$

ce qu'on laisse au lecteur le soin de faire. ∎

Fait EDL. **6**
1) *On a* $\mathsf{Ker}\big(\varphi_{(E)}\big) = \mathsf{Sol}(E_0)$.
2) *On a* $\mathsf{Sol}(E_b) = \varphi_{(E)}{}^{\langle -1 \rangle}\Big[\big\{b(\cdot)\big\}\Big]$.

Démonstration. — Elle est laissée au lecteur à titre d'entraînement. ∎

3) Solutions de l'équation homogène

Proposition Ⓣ EDL. **7**
- *L'ensemble $\mathsf{Sol}(E_0)$ des solutions de l'équation homogène est un espace vectoriel.*
- *Autrement dit,*

$$\left.\begin{array}{r} f \in \mathsf{Sol}(E_0) \\ g \in \mathsf{Sol}(E_0) \end{array}\right\} \implies f + \lambda g \in \mathsf{Sol}(E_0).$$

Démonstration. — Comme $\mathsf{Ker}\big(\varphi_{(E)}\big) = \mathsf{Sol}(E_0)$, on a bien le résultat voulu. ∎

4) Solutions de l'équation avec second membre

Proposition Ⓣ EDL. **8**
Soit $f_p \in \mathsf{Sol}(E_b)$. *Alors,*

$$\mathsf{Sol}(E_b) = f_p + \mathsf{Sol}(E_0).$$

Remarques

- On dit que f_p est une « solution particulière » de (E_b).
- Ce résultat est un cas particulier d'un résultat plus général.
  Soit $\varphi : E \longrightarrow F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels E et F, soit $b \in F$ et soit $x_p \in E$ tel que $\varphi(x_p) = b$. Alors, on a

$$\left\{ x \in E \mid \varphi(x) = b \right\} = x_p + \mathsf{Ker}(\varphi).$$

Démonstration. — On a va démontrer le résultat plus général. On garde les mêmes notations que dans la remarque ci-dessus. Soit $x \in E$. On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} \varphi(x) = b &\iff \varphi(x) = \varphi(x_p) \\ &\iff \varphi(x - x_p) = 0_F \\ &\iff x - x_p = \mathsf{Ker}(\varphi) \\ &\iff x = x_p + \mathsf{Ker}(\varphi). \end{aligned}$$

■

Remarque
Ainsi, pour résoudre une équation différentielle linéaire (E_b), on procèdera toujours de la façon suivante :

- on résout (E_0) ;
- on cherche une solution particulière f_p de (E_b) :
  - ▷ ou bien on la cherche parmi des classes particulières de solution (les fonctions constantes, les fonctions polynomiales, *etc.*) ;
  - ▷ ou bien on applique la méthode dite de la « variation de la constante », qu'on expliquera plus loin.

5) Principe de superposition

Proposition Ⓣ EDL. **9**
Soient $b_1(\cdot), b_2(\cdot) \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$ *et soit* $\lambda \in \mathbb{K}$. *Alors,*

$$\left. \begin{array}{r} f \in \mathsf{Sol}(E_{b_1}) \\ g \in \mathsf{Sol}(E_{b_2}) \end{array} \right\} \implies f + \lambda g \in \mathsf{Sol}(E_{b_1 + \lambda b_2})$$

Démonstration. — Elle est laissée au lecteur à titre d'entraînement. ■

Exemple
Ainsi, on a

$$\left.\begin{array}{l} f \ \text{ solution de } \ y' + ty = \sin(t) \\ g \ \text{ solution de } \ y' + ty = \mathrm{e}^t \end{array}\right\} \implies (f+g) \ \text{ solution de } \ y' + ty = \sin(t) + \mathrm{e}^t.$$

6) Régularité des solutions des équations différentielles linéaires

Les solutions d'équations différentielles linéaires sous forme résolue et à coefficients $\mathscr{C}^\infty$ sont nécessairement de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Proposition EDL.**10**
On suppose que (E) *est à coefficients* $\mathscr{C}^\infty$ *et sous forme résolue,* ie *on suppose que*

$$\begin{cases} a_n(\cdot) = \widetilde{1} \\ a_0(\cdot), \ldots, a_{n-1}(\cdot), b(\cdot) \in \mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{K}). \end{cases}$$

Soit $f \in \mathscr{D}^n(I, \mathbb{K})$*. Alors,*

$$f \in \mathsf{Sol}(E) \implies f \in \mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{K}).$$

Démonstration. — On suppose que $f \in \mathsf{Sol}(E)$. On note, pour $p \geqslant n$,

$$\mathscr{P}(p) : « \ f \in \mathscr{D}^p(I, \mathbb{K}) \ ».$$

- Déjà, par hypothèse, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
- Montrons maintenant l'hérédité. Soit $p \geqslant n$ tel que $\mathscr{P}(p)$. Montrons $\mathscr{P}(p+1)$. On a

$$f^{(n)} = b - \sum_{i=0}^{n-1} a_i f^{(i)}.$$

  Comme la fonction f est p fois dérivable, si $i \in [\![0, n-1]\!]$, la fonction $f^{(i)}$ est $p - (n-1)$ fois dérivable, *ie* est $(p+1) - n$ fois dérivable. Comme les fonctions a_i et la fonction b le sont aussi, on en déduit que la fonction

$$b - \sum_{i=0}^{n-1} a_i f^{(i)}$$

  est $(p+1) - n$ fois dérivable. Donc, $f^{(n)}$ est $(p+1) - n$ fois dérivable. Donc, f est $(p+1)$ fois dérivable, *ie* $\mathscr{P}(p+1)$ est vraie.
- Ainsi, par récurrence, on a montré que

$$f \in \bigcap_{p \geqslant n} \mathscr{D}^p(I, \mathbb{K}) = \mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{K}).$$

■

III. Résolution des EDL d'ordre 1

Soient $a(\cdot), b(\cdot) \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$.
On note

$$\begin{aligned} (E_b) \text{ ou } (E) : \quad & y' + a(t)y = b(t) \\ (E_0) : \quad & y' + a(t)y = 0. \end{aligned}$$

les équations différentielles qu'on étudie dans cette partie.

Remarque
Ces EDL sont sous forme résolue.

Exemples
Voici des exemples de telles EDL d'ordre 1 :

- $y' = y$, qui est homogène et qui en plus est à coefficients constants
- $y' = t^2 y$
- $y' = t^2 y + \sin(t)$
- $y' - \dfrac{y}{t} = e^t$, qui est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ ou sur $\mathbb{R}_-^*$

1) Résolution des EDL d'ordre 1 homogènes

a) résolution

Théorème EDL.11
Soit $A(\cdot)$ une primitive de $a(\cdot)$ sur I. Alors,

$$\mathrm{Sol}(E_0) = \left\{ \lambda e^{-A(\cdot)} \ ; \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Démonstration. — ....

....

....

....

....

....

....

....

....

.... ■

b) exemples

Résolvons :

- $y' = \dfrac{1}{t\ln(t)}\, y$ sur $]0,1[$: $\longrightarrow$ Voir cours
- $y' = \tan(t)\, y$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$: $\longrightarrow$ Voir cours
- $y' + \dfrac{y}{1+\mathrm{e}^x} = 0$ sur $\mathbb{R}$: à faire pour s'entraîner

c) l'alternative pour les $\mathrm{EDL}_1^{[h]}$

Proposition EDL.**12**
Soit $f \in \mathsf{Sol}(E_0)$. Alors, on a

- *ou bien $f = \widetilde{0}$*
- *ou bien $\forall t \in I,\ f(t) \neq 0$.*

Remarque
En fait, on a mieux, puisque f est continue :

- ou bien $f = \tilde{0}$
- ou bien $f > 0$
- ou bien $f < 0$.

Démonstration. — ....

....

.... ■

d) un isomorphisme

Proposition EDL.**13**
Soit $t_0 \in I$. On considère

$$\Psi_{t_0} : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathsf{Sol}(E_0) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(t_0). \end{array} \right.$$

Alors,

1) *l'application Ψ_{t_0} est linéaire ;*
2) *c'est un isomorphisme.*

Démonstration. — ....

....

....

.... ■

e) un corollaire pour les EDL_1

> **Corollaire** EDL.**14**
> *Soient* $f, g \in \mathsf{Sol}(E_b)$*. Alors,*
> $$\Big(\exists t_0 \in I : f(t_0) = g(t_0)\Big) \quad \Longrightarrow \quad f = g.$$

Démonstration. — ....

....

....

.... ■

2) Cas général : résolution des EDL d'ordre 1

On veut résoudre $y' + a(t)y = b(t)$.

On fixe $A(\cdot)$ une primitive de $a(\cdot)$ sur I.

a) méthode de la variation de la constante : idée

> On sait que les solutions de l'équation différentielle homogène (E_0) sont de la forme $\lambda \mathrm{e}^{-A(\cdot)}$.
> La méthode de la variation de la constante consiste à remplacer la constante λ par une fonction $\lambda(\cdot)$ et à chercher une solution de l'équation différentielle générale (E_b) sous la forme
> $$\lambda(\cdot)\mathrm{e}^{-A(\cdot)}.$$

b) méthode de la variation de la constante : rédaction

On rédigera la recherche d'une solution particulière de la façon suivante :

- On commence par déterminer $A(\cdot)$ une primitive de $a(\cdot)$ pour connaître $\mathsf{Sol}(E_0)$.
- Soit $\lambda(\cdot) \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.
- On pose $f_p := \lambda(\cdot)\mathrm{e}^{-A(\cdot)}$.
- On a
$$f_p' = \big(\lambda'(\cdot) - a(\cdot)\lambda(\cdot)\big)\mathrm{e}^{-A(\cdot)}$$
- Donc, on a
$$f_p' + a(\cdot)f_p = \lambda'(\cdot)\mathrm{e}^{-A(\cdot)}$$
- Donc, on a
$$\begin{aligned} f_p \in \mathsf{Sol}(E_b) &\iff f_p' + a(\cdot)f_p = b(\cdot) \\ &\iff \lambda'(\cdot)\mathrm{e}^{-A(\cdot)} = b(\cdot) \\ &\iff \lambda'(\cdot) = b(\cdot)\mathrm{e}^{A(\cdot)}. \end{aligned}$$
- Ainsi, si $\lambda(\cdot)$ est une primitive de $b(\cdot)\mathrm{e}^{A(\cdot)}$, alors on a $f_p \in \mathsf{Sol}(E_b)$.

c) une conséquence théorique

Soit $t_0 \in I$. Comme la fonction $b(\cdot)\mathrm{e}^{A(\cdot)}$, en tant que fonction continue, admet des primitives sur I, comme par exemple la fonction

$$t \longmapsto \int_{t_0}^{t} b(\theta)\mathrm{e}^{A(\theta)}\,\mathrm{d}\theta,$$

on dispose donc d'une solution particulière pour (E_b).

Théorème EDL. **15**

On a $\mathsf{Sol}(E_b) \neq \varnothing$.

Autrement dit, tout équation différentielle d'ordre 1 résolue admet des solutions.

Remarques

- Fixons $t_0 \in I$.
- On peut ainsi écrire

$$\mathsf{Sol}(E_b) = \left\{ \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \displaystyle\int_{t_0}^{t} b(\theta)\mathrm{e}^{A(\theta)-A(t)}\,\mathrm{d}\theta + \lambda \mathrm{e}^{-A(t)} \end{array} \; ; \; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

- Pour résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1, vous pouvez faire comme on a expliqué ci-dessus. Vous pouvez aussi apprendre cette formule par cœur, quitte à bien énoncer le résultat général quand vous l'utilisez.

d) exemples

Résolvons :

- $ty' - 2y = t^3 \sin(t)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ $\longrightarrow$ Voir cours
- $ty' - 2y = t^3 \sin(t)$ sur $\mathbb{R}$ $\longrightarrow$ Voir cours

3) Problème de Cauchy

a) idée générale

Un problème de Cauchy est la donnée d'une équation différentielle d'ordre n et de n conditions initiales.

Exemples

- Voici un problème de Cauchy d'ordre 2, issu de la physique.

$$\begin{cases} m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F} \\ M(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{v}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

En effet, comme vous le verrez l'année prochaine, $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}$ est bien une équation différentielle d'ordre 2.

- Voici un problème de Cauchy d'ordre 1.

$$\begin{cases} y' + t'y = \sin(t) \\ y(0) = 5. \end{cases}$$

- Voici un problème de Cauchy d'ordre 2.

$$\begin{cases} y'' - 8y' + 50y = \sin(t) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1. \end{cases}$$

L'idée directrice est qu'un problème de Cauchy, en général, possède une unique solution. On va démontrer ce principe pour :

- les équations différentielles linéaires d'ordre 1 ;
- les équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 2.

b) cas des EDL_1

Proposition EDL. **16**
Soit $t_0 \in I$ et soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
Alors, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' + a(t)y = b(t) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases}$$

possède une unique solution.

Démonstration. — ....

....

....

....

....

....

....

.... ■

4) Extension à $\mathbb{C}$

Tout ce qui précède aurait en fait pu être fait pour $\mathbb{C}$. On l'a fait au-dessus de $\mathbb{R}$ pour que cela semble plus intuitif et abordable au lecteur.

IV. Résolution des EDL d'ordre 2 à coefficients constants

1) Cadre d'étude et notations

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que $a \neq 0$.
Soit $\beta(\cdot) : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue.
On considère les EDLC d'ordre 2 suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{lcl} (E_\beta) \text{ ou } (E) & : & ay'' + by' + cy = \beta(t) \\ (E_0) & : & ay'' + by' + cy = 0. \end{array}}$$

On pose

$$\boxed{P := aX^2 + bX + c.}$$

C'est *le polynôme caractéristique de* (E).
Dans la suite, on va étudier le lien entre :

- $\mathsf{Z}_{\mathbb{C}}(P)$, l'ensemble des racines complexes de P,
- et $\mathsf{Sol}(E_0)$.

2) Fonctions polynomiales-exponentielles

- Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on note

$$\mathsf{e}_\lambda : \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{C} \\ t \longmapsto \mathrm{e}^{\lambda t} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \mathsf{f}_\lambda : \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{C} \\ t \longmapsto t\mathrm{e}^{\lambda t}. \end{cases}$$

- Si $\lambda \in \mathbb{R}$, on note

$$\mathsf{e}_\lambda^{\mathbb{R}} : \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \mathrm{e}^{\lambda t} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \mathsf{f}_\lambda^{\mathbb{R}} : \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto t\mathrm{e}^{\lambda t}. \end{cases}$$

3) Énoncé complexe

Théorème EDL. **17**
On a deux cas :

- ***Premier cas.***
Le polynôme P admet deux racines distinctes $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Alors,

$$\mathsf{Sol}^{\mathbb{C}}(E_0) = \left\{ \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{C} \\ t \longmapsto A\mathrm{e}^{\lambda t} + B\mathrm{e}^{\mu t} \end{cases} ;\ A, B \in \mathbb{C} \right\}.$$

Autrement dit,

$$\mathsf{Sol}^{\mathbb{C}}(E_0) = \mathsf{Vect}(\mathsf{e}_\lambda, \mathsf{e}_\mu).$$

- ***Deuxième cas.***
Le polynôme P admet une racine double $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors,

$$\mathsf{Sol}^{\mathbb{C}}(E_0) = \left\{ \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{C} \\ t \longmapsto A\mathrm{e}^{\lambda t} + Bt\mathrm{e}^{\lambda t} \end{cases} ;\ A, B \in \mathbb{C} \right\}.$$

Autrement dit,

$$\mathsf{Sol}^{\mathbb{C}}(E_0) = \mathsf{Vect}(\mathsf{e}_\lambda, \mathsf{f}_\lambda).$$

4) Énoncé réel

Vous avez sûrement déjà vu cet énoncé en physique.

a) le théorème

Théorème EDL. 18
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq 0$.
On considère l'EDL_2 à coefficients constants

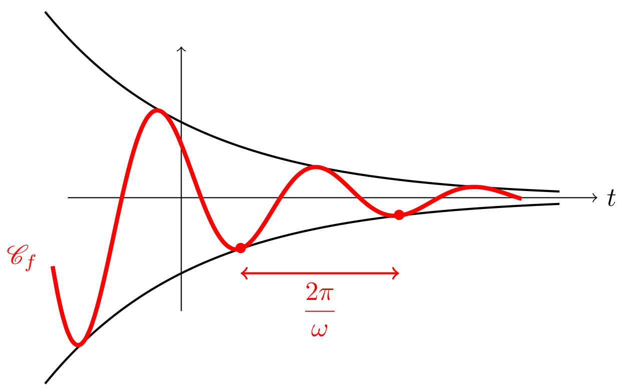
$$ay'' + by' + cy = 0. \qquad (E_0)$$

On pose $P := aX^2 + bX + c$ et $\Delta := b^2 - 4ac$.
On a trois cas :

- ***Premier cas :** $\Delta > 0$.*
  Le polynôme P admet deux racines distinctes $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors,
  $$\mathsf{Sol}^{\mathbb{R}}(E_0) = \mathsf{Vect}\Big(t \longmapsto \mathrm{e}^{\lambda t},\ t \longmapsto \mathrm{e}^{\mu t}\Big).$$
- ***Deuxième cas :** $\Delta = 0$.*
  Le polynôme P admet une racine double $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,
  $$\mathsf{Sol}^{\mathbb{R}}(E_0) = \mathsf{Vect}\Big(t \longmapsto \mathrm{e}^{\lambda t},\ t \longmapsto t\mathrm{e}^{\lambda t}\Big).$$
- ***Troisième cas :** $\Delta < 0$.*
  Le polynôme P admet deux racines complexes conjuguées $r \pm \mathrm{i}\omega \in \mathbb{C}$. Alors,
  $$\mathsf{Sol}^{\mathbb{R}}(E_0) = \left\{ \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \mathrm{e}^{rt}\Big(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\Big) \end{cases} ;\ A, B \in \mathbb{R} \right\}.$$

b) un dessin

Voilà un dessin d'une solution f dans le cas où $\Delta < 0$. Ici, on a $r < 0$.



5) Détermination des solutions par deux conditions initiales

Proposition EDL. **19**
Soit $t_0 \in I$. On considère l'application

$$\Phi_{t_0} : \begin{cases} \mathsf{Sol}(E_0) \longrightarrow \underline{\mathbb{K}}^2 \\ \quad f \longmapsto \begin{pmatrix} f(t_0) \\ f'(t_0) \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Alors,

1) Φ_{t_0} *est linéaire ;*
2) Φ_{t_0} *est injective.*

Démonstration. — La preuve est à la fois astucieuse et technique. Comme d'habitude, ce qui apparaît comme astucieux ici est en fait naturel. $\longrightarrow$ Voir cours ■

Corollaire EDL. **20**
Soit $t_0 \in I$ et soient $f, g \in \mathsf{Sol}(E)$ telles que

$$f(t_0) = g(t_0) \quad \textit{et} \quad f'(t_0) = g'(t_0)$$

Alors, $f = g$.

Démonstration. — ....

....

.... ■

6) Démonstration des théorèmes de résolution des EDLC$_2$

$\longrightarrow$ Voir cours

7) Problème de Cauchy

On considère encore $a, b, c \in \mathbb{K}$ tels que $a \neq 0$.
On se donne aussi $\beta(\cdot) : I \longrightarrow \mathbb{K}$ continue.

Théorème EDL. 21
Soit $t_0 \in I$ et soient $x_0, x_0' \in \mathbb{R}$. Alors, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = \beta(t) \\ y(t_0) = x_0 \\ y'(t_0) = x_0' \end{cases}$$

admet une unique solution.

Idée de la démonstration. —

- L'unicité découle de la proposition EDL. 19.
- L'existence utilise les mêmes techniques que celles utilisées dans la démonstration de la proposition EDL. 19. En factorisant P et en écrivant $P = a(X - r_1)(X - r_2)$, la recherche d'une solution de l'équation $ay'' + by' + cy = \beta(t)$ revient à la résolution successive de deux EDL_1.

■

Corollaire EDL. 22
Toute équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 admet des solutions. Autrement dit, $\mathsf{Sol}(E_\beta) \neq \varnothing$.

Remarque
Les méthodes et résultats montrés ici se généralisent comme on s'y attend à toute EDLC d'ordre quelconque.

8) Solutions particulières dans certains cas

- Dans le cas des EDL_1, voici ce qu'on a fait :
  - ▷ on a expliqué comment résoudre les EDL_1 homogènes, à l'aide d'une primitivation ;
  - ▷ on a expliqué comment trouver une solution particulière d'une EDL_1 quelconque grâce à la méthode de la variation de la consatnte ;
  - ▷ on a montré que tout problème de Cauchy possédait une unique solution.
- Pour les EDLC_2,
  - ▷ on a expliqué comment résoudre les EDLC_2 homogènes, en donnant des formules explicites faisant intervenir les racines du polynôme caractéristique associé ;
  - ▷ on a montré que tout problème de Cauchy possédait une unique solution ;
  - ▷ en revanche, on n'a pas expliqué comment trouver une solution particulière dans le cas non homogène.

  Il est possible de faire la méthode de la variation de la constante pour les EDL_2 mais nous ne l'expliquerons pas dans ce cours.

  On va en revanche expliquer comment trouver des solutions particulières pour certains seconds membres particuliers.

a) cas des seconds membres exponentiels

Soient $\gamma, \alpha \in \mathbb{C}$. On considère l'équation différentielle

$$ay'' + by' + cy = \gamma \mathrm{e}^{\alpha t}. \tag{E}$$

On note encore $P \coloneqq aX^2 + bX + c$.

Proposition EDL. **23**

- *Si $P(\alpha) \neq 0$, l'équation (E) possède une solution de la forme $t \longmapsto \lambda \mathrm{e}^{\alpha t}$ où $\lambda \in \mathbb{K}$ est à déterminer.*
- *Si α est racine simple de P, l'équation (E) possède une solution de la forme $t \longmapsto \lambda t \mathrm{e}^{\alpha t}$ où $\lambda \in \mathbb{K}$ est à déterminer.*
- *Si α est racine double de P, l'équation (E) possède une solution de la forme $t \longmapsto \lambda t^2 \mathrm{e}^{\alpha t}$ où $\lambda \in \mathbb{K}$ est à déterminer.*

Démonstration. — On laisse le lecteur déduire cette proposition de la proposition EDL. 25. ■

Exercice EDL. **24**

1) *Trouver une solution particulière de $y'' + 2y' - y = 42\mathrm{e}^t$.*
2) *Déterminer l'ensemble des solutions de $y'' + 2y' - y = 0$.*
3) *Déterminer l'ensemble des solutions de $y'' + 2y' - y = 42\mathrm{e}^t$.*

b) cas des seconds membres polynomiaux-exponentiels

Maintenant, on fixe $Q \in \mathbb{K}[X]$ et on considère l'équation différentielle

$$ay'' + by' + cy = Q(t)\mathrm{e}^{\alpha t}. \tag{E}$$

On note encore $P \coloneqq aX^2 + bX + c$.

On note $N \coloneqq \deg(Q)$.

Proposition EDL. **25**

L'équation (E) possède une solution de la forme

$$t \longmapsto R(t)\mathrm{e}^{\alpha t} \text{ avec}$$

- *$R \in \mathbb{K}_N[X]$ si $P(\alpha) \neq 0$;*
- *$R \in \mathbb{K}_{N+1}[X]$ si α est racine simple de P ;*
- *$R \in \mathbb{K}_{N+2}[X]$ si α est racine double de P.*

Démonstration. — $\longrightarrow$ Voir cours 📖 ■

Remarque

Un cas particulier important de cette proposition est le cas où $\alpha = 0$. Dans ce cas, la proposition permet de trouver des solutions particulières d'EDLC_2 dont le second membre est un polynôme.

Exercice EDL. **26**

Trouver une solution particulière de $y'' + 2y' - y = 1 + 2t + 3t^2$.

c) cas des seconds membres trigonométriques

Lemme Ⓣ EDL. **27**
Soit (E) une équation différentielle linéaire à coefficients réels. Alors,

$$f \in \mathsf{Sol}\big(E_{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\big) \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \mathsf{Re}(f) \in \mathsf{Sol}\big(E_{\cos(t)}\big) \\ \mathsf{Im}(f) \in \mathsf{Sol}\big(E_{\sin(t)}\big). \end{cases}$$

Démonstration. — Elle est laissée au lecteur à titre d'entraînement. ■

Ainsi, pour trouver une solution particulière de $y'' + 2y' - y = 24\sin(t)$, on cherchera d'abord une solution particulière de $y'' + 2y' - y = 24\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ puis on prendra sa partie imaginaire.

Exercice EDL. **28**
Trouver une solution particulière de $y'' + 2y' - y = 1 + 2t + 3t^2$.