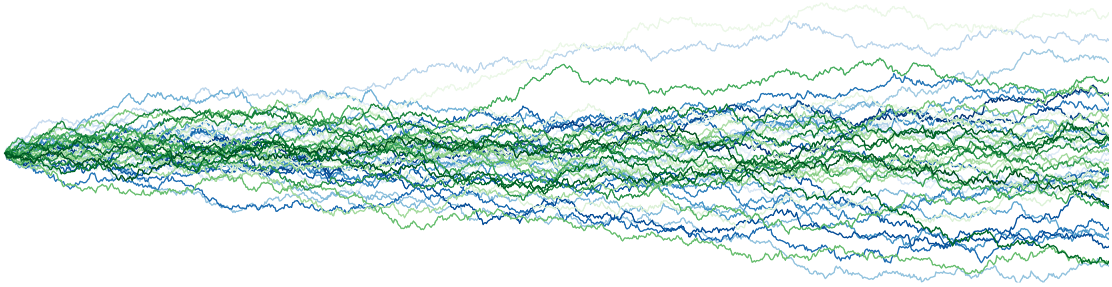
Chapitre 29

Probabilités



Trajectoires de marches aléatoires en dimension 1

Le calcul des probabilités remonte à Blaise Pascal (1623 – 1662), qui était à la fois mathématicien, physicien, philosophe et inventeur (il a créé la première machine à calculer).

Cependant, il faut attendre 1931 (!) et les travaux du mathématicien russe ***Andreï Kolmogorov*** *pour donner une axiomatique précise à la théorie des probabilités. Cette axiomatique a permis de poursuivre l'étude mathématique des phénomènes aléatoires, et notamment des marches aléatoires. Cette théorie est entre autres appliquée à l'étude de l'évolution des marchés boursiers.*

Sommaire

I. Espaces probabilisés

1) Définition

Définition PRB. **1**
Un espace probabilisé fini *est un couple* (Ω, P) *où*

- Ω *est un ensemble fini non vide, appelé* univers *ou* univers des possibles *ou* univers des situations possibles *;*
- P *est une application* $\mathrm{P} : \mathscr{P}(\Omega) \longrightarrow [0, 1]$*, appelée* probabilité *ou* mesure de probabilité*, vérifiant les axiomes suivants :*
  (i) normalisation *:*
  $$\boxed{\mathrm{P}(\Omega) = 1 \;;}$$
  (ii) additivité *: si A et B sont deux parties de Ω disjointes, on a*
  $$\boxed{\mathrm{P}(A \sqcup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B).}$$

2) Notations

Dans la suite de ce document, quand ce n'est pas précisé, Ω désigne un ensemble non vide et $\mathrm{P}(\cdot)$ une probabilité sur Ω.

3) Exemples importants

a) probabilité uniforme

Soit Ω un ensemble fini non vide.
On appelle *probabilité uniforme sur* Ω l'application $\mathrm{P} : \mathscr{P}(\Omega) \longrightarrow [0, 1]$ définie par

$$\forall X \in \mathscr{P}(\Omega), \;\; \mathrm{P}(X) = \frac{\mathsf{Card}(X)}{\mathsf{Card}(\Omega)}.$$

b) probabilité de Bernoulli

On note $\Omega := \big\{0, 1\big\}$ et on considère $p \in [0, 1]$. L'application

$$\mathrm{P} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ X & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } X = \varnothing \\ 1 & \text{si } X = \Omega \\ p & \text{si } X = \{1\} \\ 1-p & \text{si } X = \{0\} \end{cases} \end{array} \right.$$

est une probabilité, appelée *probabilité de Bernoulli de paramètre p.*

4) Propriétés fondamentales

Proposition PRB.**2**
Soit (Ω, P) *un espace probabilisé fini. On a les propriétés suivantes :*

1) $\mathrm{P}(\varnothing) = 0$.
2) *Si* A *est une partie de* Ω*, alors* $\mathrm{P}(\Omega \setminus A) = 1 - \mathrm{P}(A)$.
3) *Si* $A_1, \ldots, A_n$ *sont des parties de* Ω *deux à deux disjointes, alors on a*
$$P\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i).$$
4) *Si* $A \subset B$ *sont deux parties de* Ω*, alors* $\mathrm{P}(A) \leqslant \mathrm{P}(B)$.
5) *Si* A *et* B *sont deux parties de* Ω*, on a*
$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B).$$
6) **Formule des probabilités totales.**
Si $(A_1, \ldots, A_n)$ *est un recouvrement disjoint de* Ω *et si* B *est une partie de* Ω *alors on a*
$$\mathrm{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i \cap B).$$
(On dit que les A_i *forment un* système complet d'événements.*)*

Cette proposition est à connaître par cœur.
Sa démonstration est à maîtriser totalement.
Tous les points de la preuve doivent devenir des réflexes absolus.

Démonstration. —

1) On a $\varnothing = \varnothing \sqcup \varnothing$, donc la propriété d'additivité entraîne $\mathrm{P}(\varnothing) = \mathrm{P}(\varnothing) + \mathrm{P}(\varnothing)$, donc $\mathrm{P}(\varnothing) = 0$.
2) Il suffit de remarquer que $A \sqcup (\Omega \setminus A) = \Omega$.
3) Si A, B et C sont deux à deux disjointes, alors C et $A \sqcup B$ sont disjoints. On a alors
$$\mathrm{P}(A \sqcup B \sqcup C) = \mathrm{P}\Big(\big(A \sqcup B\big) \sqcup C\Big) = \mathrm{P}(A \sqcup B) + \mathrm{P}(C) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C).$$
Le cas général se démontre par récurrence, en suivant la même idée *(exercice)*.
4) On a
$$\begin{aligned} \mathrm{P}(B) &= \mathrm{P}(A \sqcup (B \setminus A)) \\ &= \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B \setminus A) \\ &\geqslant \mathrm{P}(A) \end{aligned}$$
car $\mathrm{P}(\cdot)$ est à valeurs dans $[0, 1] \subset \mathbb{R}_+$.
5) On a $(A \cap B) \sqcup (A \setminus B) \sqcup (B \setminus A) = A \cup B$, donc
$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A \cup B) &= \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(A \setminus B) + \mathrm{P}(B \setminus A) \\ &= \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(A \setminus B) + \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(B \setminus A) - \mathrm{P}(A \cap B) \\ &= \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B). \end{aligned}$$
6) Il suffit de remarquer que $\displaystyle\bigsqcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B) = B$.

■

5) Caractérisation d'une probabilité

Proposition PRB.**3** (Caractérisation d'une probabilité)

1) *Soit* (Ω, P) *un espace probabilisé fini. Alors, on a*
$$\sum_{\omega \in \Omega} \mathrm{P}\Big(\{\omega\}\Big) = 1.$$
2) *Réciproquement, si* Ω *est un ensemble fini non vide, et si* $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ *est une famille de nombres appartenant à* $[0,1]$ *telle que* $\displaystyle\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$, *alors il existe une unique probabilité* $\mathrm{P}(\cdot)$ *telle que*
$$\forall \omega \in \Omega,\ \ \mathrm{P}\Big(\{\omega\}\Big) = p_\omega.$$
3) *Autrement dit : une probabilité est caractérisée par la probabilité qu'elle donne aux singletons.*

Démonstration. —

1) Les singletons $\Big(\{\omega\}\Big)_{\omega \in \Omega}$ sont deux à deux disjoints. Donc, on a
$$\sum_{\omega \in \Omega} \mathrm{P}\Big(\{\omega\}\Big) = \mathrm{P}\left(\bigsqcup_{\omega \in \Omega} \{\omega\}\right) = \mathscr{P}(\Omega) = 1.$$
2)
- Commençons par montrer l'existence. On considère
$$\mathrm{P} : \begin{cases} \mathscr{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1] \\ \quad A \longmapsto \displaystyle\sum_{\omega \in A} p_\omega \end{cases}.$$
Montrons que $\mathrm{P}(\cdot)$ est une probabilité.
  (i) Déjà, on a $\forall \omega \in \Omega,\ p_\omega \geqslant 0$. Donc, si $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, on a
$$0 \leqslant \mathrm{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega \leqslant \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1.$$
  (ii) On a $\mathscr{P}(\Omega) = \displaystyle\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$.
  (iii) Soient A et B deux parties disjointes. On a
$$\mathrm{P}(A \sqcup B) = \sum_{\omega \in (A \sqcup B)} p_\omega = \sum_{\omega \in A} p_\omega + \sum_{\omega \in B} p_\omega = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B).$$
- Montrons maintenant l'unicité. Soient maintenant P_1 et P_2 deux probabilités telles que
$$\forall \omega \in \Omega,\ \ P_1\Big(\{\omega\}\Big) = P_2\Big(\{\omega\}\Big).$$
On a alors, quel que soit $A \in \mathscr{P}(\Omega)$,
$$P_1(A) = \sum_{\omega \in A} P_1\Big(\{\omega\}\Big) = \sum_{\omega \in A} P_2\Big(\{\omega\}\Big) = P_2(A).$$
Donc, on a bien $P_1 = P_2$.

■

Exemples

- La probabilité uniforme sur Ω est caractérisée par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mathrm{P}\Big(\{\omega\}\Big) = \frac{1}{|\Omega|}.$$

- De même, la probabilité uniforme sur Ω est caractérisée par le fait qu'elle est constante sur les singletons (d'où son nom) :

$$\forall \omega, \omega' \in \Omega, \quad \mathrm{P}\Big(\{\omega\}\Big) = \mathrm{P}\Big(\{\omega'\}\Big).$$

- La probabilité de Bernoulli de paramètre p est caractérisée par le fait que $P(\{1\}) = p$ (qui implique à son tour que $\mathrm{P}(\{0\}) = 1 - p$).

6) Vocabulaire

Ce qui suit est à maîtriser impérativement et absolument.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé.

1) Un élément $\omega \in \Omega$ est appelé *issue* ou *situation (possible)*.
Une partie de Ω est appelée *événement* (sous-entendu de (Ω, P)). Si A est un événement, on dit que $\mathrm{P}(A)$ est la *probabilité de A*. Ainsi, $\mathrm{P}(\cdot)$ est une application qui associe un élément de $[0,1]$ à chaque événement.

2) La partie $\varnothing \in \mathscr{P}(\Omega)$ est appelée l'*événement impossible*.
La partie $\Omega \in \mathscr{P}(\Omega)$ est appelée l'*événement certain* (sous-entendu de (Ω, P)).

3) Soit A un événement.
Le complémentaire de A dans Ω (*ie* $\Omega \setminus A$) est appelé *événement contraire de A*. On le note $\overline{A}$.

4) Si A et B sont deux événements, on dit que *A et B sont incompatibles* $\overset{\Delta}{ssi}$ $A \cap B = \varnothing$.

5) Un *système complet d'événements* (sous-entendu de (Ω, P)) est une famille d'événements $(A_1, \dots, A_n)$ telle que

   a) les parties A_i sont disjointes *ie*

$$\boxed{\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad i \neq j \implies A_i \cap A_j = \varnothing}$$

   b) les A_i recouvrent tout Ω, *ie*

$$\boxed{\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \sqcup \dots \sqcup A_n = \Omega.}$$

6) Soit A un événement.
On dit que *A est négligeable* $\overset{\Delta}{ssi}$ $\mathrm{P}(A) = 0$.
On dit que *A est presque sûr* ou que *A est quasi certain* $\overset{\Delta}{ssi}$ $\mathrm{P}(A) = 1$.

7) On décrit la probabilité uniforme comme celle dont les issues sont *équiprobables*, ce qui signifie que les événements $\{\omega\}$ ont tous la même probabilité.

Fait PRB.**4**
Soit A un événement. Alors,

1) *la famille $(A, \overline{A})$ est un sytème complet d'événements ;*
2) *A quasi certain $\iff$ $\overline{A}$ négligeable.*

Démonstration du fait. — Laissée en exercice. ■

Remarques
On peut utiliser ce vocabulaire pour reformuler les propriétés de la section précédente.
Par exemple,

- Deux événements contraires ont des probabilités dont la somme fait 1.
- La propriété d'additivité dit que la probabilité de l'union de deux événements incompatibles est la somme de leur probabilité.
- La formule des probabilités totales parle d'un système complet d'événements.

Par ailleurs,

- L'événement $\varnothing$ est négligeable, l'événement Ω est quasi certain.
- Les réciproques sont, en général, fausses. Si l'on prend la mesure de probabilités de Bernoulli de paramètre $p = 0$, l'événement $\{1\}$ est négligeable sans être vide, et $\{0\}$ est presque sûr sans être $\Omega = \{0, 1\}$ tout entier.

Les questions de probabilité sont souvent données dans un vocabulaire intuitif, en termes *d'expériences aléatoires*. Pour transformer le problème en mathématiques, il est alors important de *modéliser* le problème, c'est-à-dire de trouver un espace probabilisé fini qui retranscrit fidèlement le problème.

7) Un exemple avec des cartes

On considère un paquet de cartes posé devant nous, faces contre la table. On fait l'expérience aléatoire où l'on tire la première carte du paquet mélangé.
On peut modéliser mathématiquement cette expérience aléatoire de plusieurs façons. À chaque fois, il s'agit de trouver un univers Ω et une mesure de probabilité $\mathrm{P}(\cdot)$ qui « corresponde » à notre expérience. Dans cet exemple, il y a au moins deux modélisations raisonnables, qu'on présente ici.

a) Une première modélisation

Dans le premier cas, on note

$$\begin{aligned}\Omega_1 := \Big\{&\mathrm{As}^{\spadesuit}, \mathrm{Roi}^{\spadesuit}, \dots, 3^{\spadesuit}, 2^{\spadesuit},\\ &\mathrm{As}^{\clubsuit}, \mathrm{Roi}^{\clubsuit}, \dots, 3^{\clubsuit}, 2^{\clubsuit},\\ &\mathrm{As}^{\diamondsuit}, \mathrm{Roi}^{\diamondsuit}, \dots, 3^{\diamondsuit}, 2^{\diamondsuit},\\ &\mathrm{As}^{\heartsuit}, \mathrm{Roi}^{\heartsuit}, \dots, 3^{\heartsuit}, 2^{\heartsuit}\Big\}.\end{aligned}$$

C'est l'univers qu'on considère. Il possède 52 issues qui représentent les possibilités. On le munit de la probabilité uniforme $\mathrm{P}_1(\cdot)$. L'événement (au sens intuitif) « tirer un cœur » est alors représenté par l'événement (au sens mathématique)

$$A = \Big\{\mathrm{As}^{\heartsuit}, \mathrm{Roi}^{\heartsuit}, \dots, 3^{\heartsuit}, 2^{\heartsuit}\Big\},$$

qui a 13 éléments. On a donc

$$\mathrm{P}_1(\text{« tirer un cœur »}) = \mathrm{P}_1(A) = \frac{\mathsf{Card}(A)}{\mathsf{Card}(\Omega_1)} = \frac{13}{52} = \boxed{\frac{1}{4}}.$$

b) Une autre modélisation

Dans le deuxième cas, on va prendre un univers beaucoup plus grand, plus complexe.

On considère Ω_2 l'ensemble des façons d'ordonner notre paquet de 52 cartes, c'est-à-dire de toutes les façons dont on peut le mélanger. Cet ensemble possède $52\,!$ éléments :

- on a 52 choix pour la première carte,
- on a 51 choix pour la deuxième carte,
- $\cdots$
- on a 2 choix pour l'avant-dernière carte,
- enfin, on a un seul choix pour la dernière carte.

On peut écrire

$$\Omega_2 \coloneqq \Big\{ \big(\text{As}^{\spadesuit}, \text{Roi}^{\spadesuit}, \ldots, 3^{\heartsuit}, 2^{\heartsuit}\big), \big(\text{As}^{\spadesuit}, \text{Roi}^{\spadesuit}, \ldots, 2^{\heartsuit}, 3^{\heartsuit}, \big), \ldots, \big(2^{\heartsuit}, 3^{\heartsuit}, \ldots, \text{Roi}^{\spadesuit}, \text{As}^{\spadesuit}\big) \Big\}.$$

Plus formellement, on peut écrire

$$\Omega_2 = \Big\{ (c_1, c_2, \ldots, c_{52}) \in (\Omega_1)^{52} \;\Big|\; \forall i, j \in [\![1, 52]\!],\ i \neq j \implies c_i \neq c_j \Big\}.$$

On munit Ω_2 de la probabilité uniforme P_2.

Avec cette modélisation, l'événement (au sens intuitif) « tirer un cœur » est alors représenté par l'événement (au sens mathématique) B formé de toutes les permutations des 52 cartes dont la première est un cœur. Il y a $13 \times 51!$ telles permutations. En effet, il y a 13 manières de choisir le cœur qui est la première carte, puis $51!$ façons de ranger les cartes restantes. Dans cette modélisation, on a

$$P_2(\text{« tirer un cœur »}) = P_2(B) = \frac{\mathsf{Card}\, B}{\mathsf{Card}\, \Omega_2} = \frac{13 \times 51!}{52!} = \boxed{\frac{1}{4}.}$$

c) Bilan

Ces deux modélisations sont raisonnables. Tous les événements concernant la première carte auront en fait la même probabilité dans les deux modélisations. Chacune a ses avantages : si l'on décide finalement d'étudier les deux premières cartes plutôt que la seule première, le deuxième modèle ne nécessite aucune modification.

II. Indépendance et conditionnement

1) Événements indépendants

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini

♛ Définition PRB. **5**

Soient $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$ deux événements. On dit que A et B sont indépendants $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\boxed{\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(B).}$$

Fait PRB. **6**

Les événements négligeables (resp. quasi certains) sont indépendants de n'importe quel événement :

1) *Soit $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ tel que $\mathrm{P}(A) = 0$.*
   Alors, pour tout événement B, A et B sont indépendants.
2) *Soit $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ tel que $\mathrm{P}(A) = 1$.*
   Alors, pour tout événement B, A et B sont indépendants.

Démonstration du fait. — On a deux cas à traiter.

- Premier cas : on suppose que $\mathrm{P}(A) = 0$.
  Dans ce cas, l'inclusion $A \cap B \subset A$ montre que $\mathrm{P}(A \cap B) \leqslant \mathrm{P}(A)$, donc $\mathrm{P}(A \cap B) = 0$.
  Donc, on a bien
  $$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\ \mathrm{P}(B) = 0.$$
- Deuxième cas : on suppose que $\mathrm{P}(A) = 1$. On va se ramener au cas précédent. Déjà, on remarque que
  $$(A, \overline{A}) \text{ est un système complet d'événements.}$$
  D'après la formule des probabilités totales, on a
  $$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(\overline{A} \cap B).$$
  Or, $\overline{A}$ est négligeable. D'après le cas traité précédemment, on a donc $\mathrm{P}(\overline{A} \cap B) = 0$. Donc, on a $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A \cap B)$. Or, $\mathrm{P}(A) = 1$ par hypothèse. Donc, on a bien
  $$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(B)\,\mathrm{P}(A).$$

■

2) Un exemple

Dans l'expérience où l'on tire une carte d'un jeu de 52 cartes, les événements « tirer un cœur » et « tirer un huit » sont indépendants.

- Si on note $A =$ « tirer un cœur », alors on a

$$A = \left\{\text{As}^{\heartsuit}, \text{Roi}^{\heartsuit}, \dots, 3^{\heartsuit}, 2^{\heartsuit}\right\} \quad \text{et} \quad \mathrm{P}(A) = \frac{13}{52} = \boxed{\frac{1}{4}.}$$

- Si on note $B =$ « tirer un huit », alors on a

$$B = \left\{8^{\spadesuit}, 8^{\clubsuit}, 8^{\diamondsuit}, 8^{\heartsuit}\right\} \quad \text{et} \quad \mathrm{P}(B) = \frac{4}{52} = \boxed{\frac{1}{13}.}$$

- Enfin, on a

$$\text{« tirer un cœur »} \cap \text{« tirer un huit »} = A \cap B = \left\{8^{\heartsuit}\right\} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{52}.}$$

- On a $\dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{13} = \dfrac{1}{52}$. Ainsi, on a bien $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(B)$: $\boxed{A \text{ et } B \text{ sont indépendants.}}$

3) Un autre exemple

Considérons

$$\Omega := \left\{(x, y) \in [\![1, 10]\!]^2 \mid x \neq y\right\},$$

muni de la probabilité uniforme.

- Déjà, on remarque que $\mathsf{Card}(\Omega) = 90$: on a 10 choix pour le premier élément du couple et 9 choix pour le second.
- Considérons les événements I_1 et I_2 constitués des couples dont la première (respectivement la seconde) coordonnée est impaire. On vérifie directement que

$$\boxed{\mathrm{P}(I_1) = \mathrm{P}(I_2) = \frac{1}{2}.}$$

  En effet, les éléments de I_1 sont construits en choisissant d'abord un premier numéro impair (5 possibilités) puis en choisissant n'importe quel nombre différent pour la deuxième coordonnée (ce qui fait 9 possibilités), donc

$$\mathsf{Card}\, I_1 = 45 \quad \text{et} \quad \mathrm{P}(I_1) = \frac{45}{90} = \frac{1}{2}.$$

- En revanche, $I_1 \cap I_2$ est constitué des couples d'éléments distincts de nombres impairs. On a donc $\mathsf{Card}(I_1 \cap I_2) = 5 \times 4 = 20$. Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{P}(I_1 \cap I_2) = \frac{20}{90} = \frac{2}{9}.}$$

- On a $\dfrac{2}{9} < \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2}$; on dit que les événements I_1 et I_2 sont *négativement corrélés* : le fait que I_1 arrive rend moins probable le fait que I_2 arrive (ou réciproquement). C'est ici facile à comprendre intuitivement, mais ce ne sera pas forcément toujours le cas.
- On peut voir cet exemple comme un tirage <u>sans remise</u> de jetons numérotés de 1 à 10. En effet, si l'on remettait le jeton tiré, on serait plutôt dans l'univers $\Omega' = [\![1, 10]\!]^2$, et les deux événements correspondants seraient alors indépendants.

4) Indépendance et événements contraires

Proposition PRB. **7**
Soit (Ω, P) *un espace probabilisé fini.*
Soient $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$ *des événements. Alors,*

$$A \text{ et } B \text{ indépendants} \quad \Longrightarrow \quad A \text{ et } \overline{B} \text{ indépendants.}$$

Démonstration. — On sait que la famille $(B, \overline{B})$ est un sytème complet d'événements.
Donc, d'après la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A) &= \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(A \cap \overline{B}) \\ &= \mathrm{P}(A)\ \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(A \cap \overline{B}) \qquad \text{car } A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \\ \text{donc} \quad \mathrm{P}(A \cap \overline{B}) &= \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A)\ \mathrm{P}(B) \\ &= \mathrm{P}(A)\big(1 - \mathrm{P}(B)\big) = \mathrm{P}(A)\ \mathrm{P}(\overline{B}), \end{aligned}$$

ce qui prouve l'indépendance de A et $\overline{B}$. ■

Remarques

- En appliquant deux fois la proposition, on voit que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont également indépendants.
- On avait déjà suivi ce raisonnement quand on a montré qu'un événement presque sûr est indépendant de tout événement. On invite le lecteur à le vérifier.

5) Indépendance de plusieurs événements

♛ **Définition** PRB. **8**
Soit (Ω, P) *un espace probabilisé fini.*
Soient $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{P}(\Omega)$ *des événements.*

1) *On dit que* $A_1, \dots, A_n$ sont deux à deux indépendants $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad i \neq j \implies A_i \text{ et } A_j \text{ sont indépendants.}$$

2) *On dit que* $A_1, \dots, A_n$ sont indépendants $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\forall I \subset [\![1, n]\!], \quad \mathrm{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathrm{P}(A_i).$$

Remarques

Soient $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{P}(\Omega)$ des événements.

- On a
$$A_1, \dots, A_n \text{ indépendants} \implies A_1, \dots, A_n \text{ deux à deux indépendants.}$$
La démonstration est laissée à faire en exercice.
- La réciproque est fausse.

Contre-exemple

On considère $\Omega := \{0,1\}^2$, muni de la probabilité uniforme.

- Cet univers correspond à l'expérience aléatoire suivante : on tire un nombre au hasard, 0 ou 1, puis on retire une seconde fois un nombre au hasard, 0 ou 1.
- On définit les événements

$$I_1 = \Big\{(1,0),(1,1)\Big\}, \qquad I_2 = \Big\{(0,1),(1,1)\Big\} \qquad \text{et} \qquad I_+ = \Big\{(0,1),(1,0)\Big\}.$$

- Intuitivement, *ie* en termes de l'expérience aléatoire, on a

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{« le premier nombre tiré est impair »} \\ I_2 &= \text{« le second nombre tiré est impair »} \\ I_+ &= \text{« la somme des deux nombres tirés est impaire »}. \end{aligned}$$

- Il s'agit clairement de trois événements de probabilité $\frac{1}{2}$. Par ailleurs, on vérifie directement qu'ils sont deux à deux indépendants car les intersections

$$I_1 \cap I_2 = \big\{(1,1)\big\}, \qquad I_1 \cap I_+ = \big\{(1,0)\big\} \qquad \text{et} \qquad I_2 \cap I_+ = \big\{(0,1)\big\}$$

sont de probabilité $\frac{1}{4}$.

- En revanche, $I_1 \cap I_2 \cap I_+ = \varnothing$, donc $\mathrm{P}(I_1 \cap I_2 \cap I_+) = 0 \neq \dfrac{1}{8}$: les trois événements ne sont pas indépendants.

Le contenu intuitif est clair : quand on tire deux nombres (soit 0 soit 1, mais cela marcherait avec les nombres entre 1 et $2N$, pour tout $N \in \mathbb{N}$), la parité du premier, la parité du second et la parité de la somme ne peuvent pas être indépendantes, car, au contraire, deux de ces informations déterminent la troisième.

6) Probabilités conditionnelles

Définition PRB.**9**
Soit (Ω, P) *un espace probabilisé fini et soit* $B \in \mathscr{P}(\Omega)$ *un événement tel que* $\mathrm{P}(B) > 0$.
Soit $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ *un événement.*
La probabilité conditionnelle de A sachant B*, notée* $\mathrm{P}(A|B)$ *ou* $\mathrm{P}_B(A)$ *est définie par*

$$\mathrm{P}(A|B) \coloneqq \mathrm{P}_B(A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}.$$

Proposition PRB.**10**
Soit (Ω, P) *un espace probabilisé fini et* $B \in \mathscr{P}(\Omega)$ *un événement tel que* $P(B) > 0$.
Alors, l'application

$$\mathrm{P}(\,\cdot\,|B) = \mathrm{P}_B : \begin{cases} \mathscr{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1] \\ X \longmapsto \mathrm{P}_B(X) \end{cases}$$

est une probabilité sur Ω.
Pour cette probabilité, B *est presque sûr : on a* $\mathrm{P}(B|B) = 1$.

Démonstration. —

- Soit $A \in \mathscr{P}(\Omega)$.
  On a déjà clairement $\mathrm{P}(A|B) \geqslant 0$.
  La croissance de P montre que $\mathrm{P}(A \cap B) \leqslant \mathrm{P}(B)$, et donc que $\mathrm{P}(A|B) \leqslant 1$.
  La fonction $\mathrm{P}(\cdot|B)$ est donc bien à valeurs dans $[0,1]$.
- On a $\mathrm{P}(\Omega|B) = \dfrac{\mathrm{P}(\Omega \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \dfrac{\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(B)} = 1$. De même, $\mathrm{P}(B|B) = \dfrac{\mathrm{P}(B \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \dfrac{\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(B)} = 1$.
- Soient A et $A' \in \mathscr{P}(\Omega)$ deux événements incompatibles. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A \sqcup A'|B) &= \frac{\mathrm{P}((A \sqcup A') \cap B)}{\mathrm{P}(B)} \\
&= \frac{\mathrm{P}((A \cap B) \sqcup (A' \cap B))}{\mathrm{P}(B)} \\
&= \frac{\mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(A' \cap B)}{\mathrm{P}(B)} \\
&= \mathrm{P}(A|B) + \mathrm{P}(A'|B).
\end{aligned}$$

■

7) Formule des probabilités composées

Proposition PRB. **11**
Soient $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{P}(\Omega)$ *des événements tels que*

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) > 0.$$

Alors, on a

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathrm{P}(A_1) \times \mathrm{P}(A_2|A_1) \times \mathrm{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \times \cdots \times \mathrm{P}\left(A_n \middle| \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right).$$

Démonstration. — Tous les événements par lesquels on conditionne contiennent $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$, donc il sont tous de probabilité > 0 : ainsi, les termes de la formule ont un sens. On a alors

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(A_1) \times \mathrm{P}(A_2|A_1) \times \mathrm{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \times \cdots \times \mathrm{P}\left(A_n \middle| \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \\
&\qquad = \mathrm{P}(A_1) \times \frac{\mathrm{P}(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \times \frac{\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{\mathrm{P}(A_1 \cap A_2)} \times \cdots \times \frac{\mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)}{\mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} \mathrm{P}(A_i)\right)} \\
&\qquad = \mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right).
\end{aligned}$$

■

8) Formule des probabilités totales *bis*

Proposition PRB. **12**
Soient $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{P}(\Omega)$ *des événements tels que* $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *forme un système complet d'événements et tels que* $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \mathrm{P}(A_i) > 0$.
Soient $B \in \mathscr{P}(\Omega)$ *un événement.*
Alors,

$$\mathrm{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i).$$

Démonstration. — Il suffit de remarquer que pour tout i, $\mathrm{P}(A_i \cap B) = \mathrm{P}(B|A_i)\,\mathrm{P}(A_i)$. ■

Corollaire PRB. **13**
Soit $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ *un événement tel que* $\mathrm{P}(A) \in]0, 1[$.
Alors, pour tout événement $B \in \mathscr{P}(\Omega)$, *on a*

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B|A)\,\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B|\overline{A})\,\mathrm{P}(\overline{A}).$$

9) Exemple

a) Énoncé

On dispose de cinquante boules blanches et de cinquante boules noires, ainsi que de deux urnes. On met cinquante boules dans chaque urne, n'importe comment.

On tire ensuite une urne au hasard, puis une boule dans l'urne choisie.

Quelle est la probabilité que cette boule soit noire ?

b) Solution

Notons b le nombre de boules blanches mises dans la première urne. Il y a donc b boules blanches et $50 - b$ boules noires dans la première urne, et b boules noires et $50 - b$ boules blanches dans le seconde.

Notons alors U_1 l'événement « on tire au sort la première urne » et N « on tire une boule noire ». On a alors

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(N) &= \mathrm{P}(N|U_1)\,\mathrm{P}(U_1) + \mathrm{P}(N|\overline{U_1})\,\mathrm{P}(\overline{U}_1) \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{50-b}{50} + \frac{1}{2}\,\frac{b}{50} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Remarquons qu'ici, nous avons juste utilisé la description du problème pour en déduire les valeurs de $\mathrm{P}(U_1)$, $\mathrm{P}(N|U_1)$ et $\mathrm{P}(N|\overline{U_1})$ sans décrire l'univers.

En pratique, dans les exercices de probabilités,
ce sera très souvent le cas.

L'univers existe mais on ne le connaît pas totalement, pas exhaustivement.

10) Retour sur la définition

La proposition suivante justifie le terme « indépendant ».

En effet, si deux éléments A et B sont indépendants, le fait que B soit survenu ou non n'a aucune influence sur le fait que A survienne ou ne survienne pas.

Proposition PRB.**14**
Soient A et $B \in \mathscr{P}(\Omega)$ deux événements, avec $\mathrm{P}(B) > 0$.
Alors, A et B sont indépendants si et seulement si $\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A)$.

Démonstration. — On a

$$\begin{aligned} A \text{ et } B \text{ indépendants} &\iff \mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B) \\ &\iff \mathrm{P}(A|B)\,\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B) \\ &\iff \mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A). \end{aligned}$$

■

11) Formules de Bayes

Thomas Bayes (1702 – 1761) est un mathématicien britannique ; son nom se prononce [beɪz].

Proposition PRB.**15**

1) *Soient* $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$ *deux événements tels que* $\mathrm{P}(A) > 0$ *et* $\mathrm{P}(B) > 0$. *Alors*

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(B|A)\,\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B)}.$$

2) *Soient* $A_1, \ldots, A_n, B$ *des événements tous de probabilité* > 0 *tels que* $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *est un système complet d'événements. Alors*

$$\mathrm{P}(A_j|B) = \frac{\mathrm{P}(B|A_j)\,\mathrm{P}(A_j)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(B|A_i)\,\mathrm{P}(A_i)}.$$

Démonstration. —

1) Il suffit de remarquer que $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A|B)\,\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B|A)\,\mathrm{P}(A)$.
2) C'est le point précédent, plus la formule des probabilités totales.

■

12) Une application classique et importante

a) Question

Un test médical est appliqué à l'ensemble de la population, pour détecter une maladie dont la *prévalence* est 1% (autrement dit, 1% de la population a la maladie).

Quand un patient est malade, le test est positif avec probabilité 80%. Quand il ne l'est pas, le test est positif avec une probabilité de 10%.

Quelle est la probabilité d'être malade sachant que votre test était positif ?

b) Solution

On note M l'événement « être malade » et T^+ l'événement « le test est positif ».

L'énoncé donne les probabilités $\mathrm{P}(T^+|M) = 8/10$ et $\mathrm{P}(T^+|\overline{M}) = 1/10$. On a alors

$$\mathrm{P}(T^+) = \mathrm{P}(T^+|M)\,\mathrm{P}(M) + \mathrm{P}(T^+|\overline{M})\,\mathrm{P}(\overline{M}) = \frac{4}{5}\frac{1}{100} + \frac{1}{10}\frac{99}{100} = \frac{107}{1000}$$

et

$$\mathrm{P}(M|T^+) = \frac{\mathrm{P}(T^+|M)\,\mathrm{P}(M)}{\mathrm{P}(T^+)} = \frac{4/500}{107/1000} = \frac{8}{107} \approx 7{,}48\%.$$