Lycée Chateaubriand
Colas Bardavid

Chapitre 32

Produits scalaires

$$x = \sum_{i=1}^{n} (x \mid e_i) e_i$$

Formule de la décomposition de x dans une base orthonormale $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
On peut vouloir munir E d'une structure qui permette de dire quand deux vecteurs x et y (ou $\vec{u}$ et $\vec{v}$, si l'on veut choisir des notations qui insistent sur l'aspect géométrique) « vont dans le même sens » ou, à l'opposé, « vont dans des directions orthogonales ».

Cette structure est appelée produit scalaire sur E *et cette notion sera abordée dans ce chapitre de façon rigoureuse et axiomatique.*

Les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels E munis d'un produit scalaire sont des objets très riches, beaucoup plus riches que les simples espaces vectoriels, et dont le rôle en mathématiques est fondamental. On les appelle espaces euclidiens *quand ils sont de dimension finie et, en général,* espaces préhilbertiens réels.

Lycée CHATEAUBRIAND
MPSI 3

Colas Bardavid

32
Produits scalaires

plan de cours et principaux résultats

I. Produits scalaires, normes euclidiennes

39.18
39.8
39.37

1) Applications bilinéaires

a) définition
b) attention : bilinéaire $\neq$ linéaire
c) généralisation : applications n-linéaires

2) Produits scalaires

a) définition

Définition 32.1
Un produit scalaire sur E est une application

$$\begin{aligned} E^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto p(x,y) \end{aligned}$$

qui est bilinéaire, symétrique, positive, définie.

b) un réflexe calculatoire

Réflexe 32.2
On a

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i \,\Big|\, \sum_{i=1}^{n} y_i\Big) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (x_i \,|\, y_j).$$

c) vocabulaire

3) Exemples

a) produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$
b) sur $\mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$
c) sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$

Fait 32.3
Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Alors,

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} \times b_{i,j} = \mathrm{tr}\big(A^{\mathsf{T}} B\big).$$

d) sur $\mathbb{R}[X]$

4) **Norme associée à un produit scalaire**

a) notation

b) réflexes calculatoires

Réflexe 32.4 Ⓣ

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x\,|\,y)$$

Réflexe 32.5 Ⓣ

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i\,|\,x_j)$$

c) exemples

5) **Inégalité de Cauchy-Schwarz**

a) cas général

Théorème 32.6
Soit $\big(E,(\cdot\,|\,\cdot)\big)$ epr. *Soient* $x, y \in E$. *Alors, on a*

$$\big|(x\,|\,y)\big| \leqslant \|x\| \times \|y\|$$

avec égalité si et seulement si x *et* y *sont colinéaires.*

b) Cauchy-Schwarz en situation

Proposition 32.7
Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ *et* $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$. *Alors, on a*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

Proposition 32.8
Soient $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *des fonctions continues. Alors, on a*

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t} \times \sqrt{\int_a^b g(t)^2\,\mathrm{d}t}.$$

6) **L'application $\|\cdot\|$ est une norme**

a) rappels sur les normes

b) le résultat

c) normes euclidiennes

7) **Vecteurs unitaires**

8) **Identités de polarisation**

Proposition 32.9 Ⓣ

$$(x\,|\,y) = \frac{\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2} \quad \textit{et} \quad (x\,|\,y) = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}$$

II. Orthogonalité

39.21
39.15
39.16

1) Forme linéaire associée à un vecteur

2) Définitions

a) définitions
b) premières propriétés

3) Théorème de Pythagore

4) Les familles orthogonales de vecteurs non nuls sont libres

5) Les espaces orthogonaux sont en somme directe

6) Caractérisation du vecteur nul

Proposition 32.10
On a

$$\{0_E\}^{\perp} = E \qquad \text{et} \qquad E^{\perp} = \{0_E\}.$$

7) Propriétés de l'orthogonal

a) avec des parties
b) avec des sev
c) inclusion dans le biorthogonal

8) Un contre-exemple

9) Sous-espaces admettant un supplémentaire orthogonal

a) définition

Définition 32.11 Ⓣ
Soit E un epr *et soit F* sev *E.*
On dit que F admet un supplémentaire orthogonal dans *E et on note F* adso *E* $\overset{\triangle}{\text{ssi}}$

$$\exists G \text{ sev } E : \begin{cases} E = F \oplus G \\ F \perp G. \end{cases}$$

On note alors $E = F \overset{\perp}{\oplus} G$.

b) un lemme
c) définition équivalente
d) premières propriétés

Proposition 32.12 Ⓣ

$$F \text{ adso } E \implies F = \left(F^{\perp}\right)^{\perp}.$$

e) exemples et contre-exemples

10) Bases orthonormales

a) hyperplan orthogonal
b) existence de bases orthogonormales (BON)

Théorème-Réflexe 32.13
Tout epr *de dimension finie possède (au moins) une base orthonormale.*

c) formule de décomposition dans une BON

Proposition 32.14 Ⓣ

Soit $(E, (\cdot\,|\,\cdot))$ *un espace euclidien et soit* $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ *une* BON *de* E.

1) *Soit* $x \in E$. *Alors,*

$$x = \sum_{i=1}^{n} (x\,|\,e_i) e_i.$$

Autrement dit, on a

$$\mathsf{Coords}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} (x\,|\,e_1) \\ \vdots \\ (x\,|\,e_n) \end{pmatrix}.$$

2) *Soient* $x, y \in E$, *qu'on écrit* $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ *et* $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$. *Alors, on a*

$$(x\,|\,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

3) *Enfin, avec les mêmes notations, on a*

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

d) Corollaire pour les bases orthogonales

Corollaire 32.15

Soit $(f_1, \dots, f_n)$ *une* BOG *de* E. *Alors,*

$$\forall x \in E, \quad x = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x\,|\,f_i)}{(f_i\,|\,f_i)} f_i.$$

11) Un sev de dimension finie admet toujours un supplémentaire orthogonal

Théorème 32.16

Soit $(E, (\cdot\,|\,\cdot))$ *un* epr.

Soit F *un* sev *de* E *de dimension finie. Alors,*

$$F \text{ adso } E.$$

12) Orthogonal dans les espaces euclidiens

Théorème 32.17

Soit $(E, (\cdot\,|\,\cdot))$ *un espace euclidien et soit* F sev E. *Alors,*

1) $F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp} = E$
2) $(F^{\perp})^{\perp} = F$
3) $\dim(F) + \dim(F^{\perp}) = \dim(E)$.

III. Projection orthogonale sur un adso 39.31

39.35

39.51

1) Projection orthogonale

a) définition
b) dessin
c) projecteurs orthogonaux associés

2) Expression fondamentale de p_F

Proposition 32.18
Soit $(E, (\cdot \mid \cdot))$ *un espace euclidien et soit* F sev$^{\text{df}}$ E.
Soit $(e_1, \dots, e_p)$ *une* BON *de* F.
Alors,

$$\forall x \in E, \quad \mathsf{p}_F(x) = \sum_{i=1}^{p} (x \mid e_i)\, e_i.$$

3) Cas d'une droite

4) Méthodes pour calculer $\mathsf{p}_F(x)$ quand F sev$^{\text{df}}$

a) méthode BON
b) méthode BOG
c) méthode système

5) Exemples

a) avec la méthode système
b) avec la méthode BOG

6) Distance à une partie

a) définition
b) dessin
c) exemple
d) calcul de la distance à un adso

Proposition 32.19
Soit $(E, (\cdot \mid \cdot))$ *un* epr *et soit* F adso E. *Alors,*

1) *on a*

$$\mathsf{d}(x, F) = \big\| x - \mathsf{p}_F(x) \big\|.$$

2) *De plus, la distance* $\mathsf{d}(x, F)$ *est atteinte uniquement en* $\mathsf{p}_F(x)$, ie :

$$\forall x_F \in F, \quad \mathsf{d}(x, F) = \|x - x_F\| \implies x_F = \mathsf{p}_F(x).$$

IV. Orthonormalisation de Gram-Schmidt 39.23

a) données
b) sorties
c) algorithme pour construire $(\widetilde{e_1}, \dots, \widetilde{e_n})$
d) construction de $(\widehat{e_1}, \dots, \widehat{e_n})$

ch 32 :

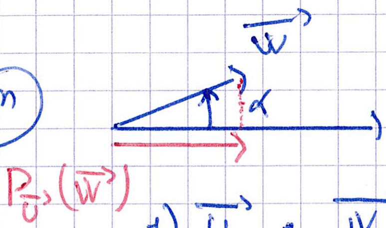
Produits scalaires

(chapitre imperial)

Intro

- $\vec{u}, \vec{v}$ vecteurs du plan

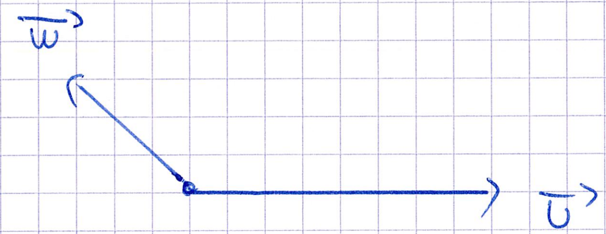
d^n



1) $\vec{u} \cdot \vec{w} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\alpha)$

2) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \pm \| P_{\vec{u}}(\vec{w}) \| \times \|\vec{u}\|$

d^n



$\vec{u} \cdot \vec{w} < 0$

3°) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = xa + yb$

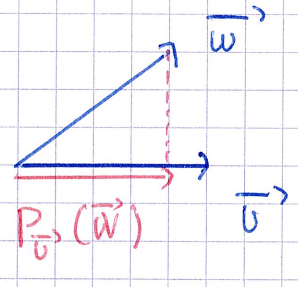
Dans $\mathbb{R}^3$: On a $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = xa + yb + zc$

Interêts du PS :

1) Savoir si $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont dans le m̄ sens

2) $\vec{u} \perp \vec{w} \overset{\Delta}{\text{ssi}} \vec{u} \cdot \vec{w} = 0$

Propriétés



$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \quad \left(= \|P_{\vec{u}}(\vec{w})\| \cdot \|\vec{u}\|\right) \leq \|\vec{w}\| \times \|\vec{u}\|$$

ie $\boxed{|\vec{u} \cdot \vec{w}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{w}\|}$

I) Produits scalaires et normes euclidiennes

1) Applications bilinéaires

a) déf°

Déf° : Soient E, F des $\mathbb{K}$-ev

Soit $b : E^2 \longrightarrow F$. On dit que $b(\cdot,\cdot)$ est bilinéaire $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ " $b(\cdot,\cdot)$ est linéaire par rapport à chaque variable "

ie $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$
$$\begin{cases} \forall x_0 \in E, & \begin{aligned} E &\longrightarrow F \\ y &\longmapsto b(x_0, y) \end{aligned} \text{ linéaire} \\ \forall y_0 \in E, & \begin{aligned} E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto b(x, y_0) \end{aligned} \text{ linéaire} \end{cases}$$

b) ⚠ linéaire $\neq^{\infty}$ bilinéaire

Soient E, F des ev

On sait que E^2 est un ev. (avec $(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y')$

• $\lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$)

Soit F ev

Soit $f : E^2 \longrightarrow F$ linéaire

Soit $b : E^2 \longrightarrow F$ bilinéaire

Soient $(x,y), (x',y') \in E^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$

a) linéarité

On a • $f(x+x', y+y') = f((x,y) + (x',y'))$

$= f(x,y) + f(x',y')$

• $f(\lambda x, \lambda y) = f(\lambda(x,y)) = \lambda f(x,y)$

b) bilinéarité

• $b(x+x', y+y') = b(x+x', y+y')$

$= b(x+x', y) + b(x+x', y')$

$= b(x,y) + b(x',y) + b(x,y') + b(x',y')$

• $b(\lambda x, \lambda y) = \lambda b(\lambda x, y) = \lambda^2 b(x,y)$

<u>Ex :</u> Ocsd $E := \{ \text{vecteurs du plan} \}$

Ocsd $p : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(\vec{u}, \vec{w}) \longmapsto \vec{u} \cdot \vec{w}$

Alors p est bilinéaire,
En effet si $\vec{v_0} \in E$, alors on a :

$$\forall \vec{v}, \vec{w} \in E, \ \forall \lambda \in \mathbb{R},$$
$$\vec{v_0} (\vec{v} + \lambda \vec{w}) = \vec{v_0} \cdot \vec{v} + \lambda \vec{v_0} \cdot \vec{w}$$

Et de m̄ " à gauche "

c) généralisation : n-linéarité (T)

Soient $E_1, \ldots, E_n$ des ev
F ev

Soit $f : E_1 \times \ldots \times E_n \longrightarrow F$

On dit que f est n-linéaire (ou multilinéaire)
$\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ "f est linéaire par rapport à chaque variable".

(AF) Ecrire la déf° formelle

Rq : L'ens des $f : E_1 \times \dots \times E_n \longrightarrow F$ n-linéaire est un ev

2) Produits scalaires

Dans tout ce qui suit, on se place au dessus de $\mathbb{R}$

Soit E un $\mathbb{R}$-ev

a) déf°

Déf° : Soit $p : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que $p(\cdot,\cdot)$ est un produit scalaire (sur E) $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

(i) $p(\cdot,\cdot)$ est bilinéaire

(ii) $p(\cdot,\cdot)$ est symétrique : $\forall x, y \in E, \ p(x,y) = p(y,x)$

(iii) $p(\cdot,\cdot)$ est positif : $\forall x \in E, \ p(x,x) \geq 0$

(iv) $p(\cdot,\cdot)$ est défini : $\forall x \in E, \ (p(x,x) = 0) \Rightarrow x = 0_E$

Rq :

- Ainsi : un produit scalaire (p.s.) : c'est une forme bilinéaire symétrique définie positive
- On appelle quasi-produit scalaire une application $p : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant (i), (ii), (iii)

Les produits scalaires sont notés $(x|y)$, $\langle x,y\rangle$ ou $\langle x|y\rangle$

b) Réflexes calculatoire

Prop : Soit $(\cdot|\cdot)$ un p.s. Soient $(x_1,\dots,x_n)$, $(y_1,\dots,y_n)\in E^n$

Alors $\left(\sum_{i=1}^n x_i \middle| \sum_{i=1}^n y_i\right) = \sum_{1\leq i,j\leq n} (x_i|y_j)$

D/ ⚠ Piège On calcule :

$$\left(\boxed{\sum_{i=1}^n x_i} \middle| \boxed{\sum_{i=1}^n y_j}\right) = \left(\sum_{i=1}^n x_i \middle| \sum_{j=1}^n y_j\right)$$

x y

on change le mom d'un des indices

linéarité à gauche

$$= \sum_{i=1}^n \left(x_i \middle| \sum_{j=1}^n y_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i|y_j) = \sum_{1\leq i,j\leq n} (x_i|y_j) \blacksquare$$

linéarité à droite

Rq : L'applicat° : $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto xy$ est un p.s sur $\mathbb{R}$

On a donc $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} x_i y_j$ ■

c) Vocabulaire

- Un espace préhilbertien réel (un epr) est un couple $(E, (\cdot|\cdot))$ où E $\mathbb{R}$-ev et $(\cdot|\cdot)$ ps sur E
- Un espace euclidien est un epr de dimension finie

3) Exemples

a) p.s. canonique sur $\mathbb{R}^n$

C'est l'application $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

On le note $(\cdot|\cdot)_{can}$

Fait : $(\cdot|\cdot)_{can}$ est un p.s sur $\mathbb{R}^n$

D/ Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ qu'on écrit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ avec $\forall i$, $x_i \in \mathbb{R}$ et $y_i \in \mathbb{R}$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- On calcule : $(x|y)_{can} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

$$= \sum_{i=1}^{n} y_i x_i$$

$$= (y|x)_{can}$$

- Soit $z \in \mathbb{R}^n$ qu'on écrit $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ avec $\forall i, z_i \in \mathbb{R}$

On a : $(x + \lambda y \mid z)_{can} = \sum_{i=1}^{n} (x_i + \lambda y_i)\, z_i$

car $x + \lambda y = \begin{pmatrix} x_1 + \lambda y_1 \\ x_2 + \lambda y_2 \\ \vdots \\ x_n + \lambda y_n \end{pmatrix}$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \times z_i + \lambda y_i \times z_i$$

$$= (x|z) + \lambda(y|z)$$

Ainsi : On a la bilinéarité

• On a
$$(x|x)_{can} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$$

• Si on a $(x|x) = 0$ alors on a $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$

Or, On a que une Σ nulle de termes ≥ 0 est composée de termes ~~nulle~~ nuls.

Donc $\forall i, x_i = 0$

Donc $x = 0_{n,1}$

• <u>Bilan</u> : $(\cdot|\cdot)_{can}$ est une forme bilinéaire, symétrique, définie positive ■

b) Sur $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$

<u>Fait</u> : L'application :
$$(\cdot|\cdot) : \begin{array}{rcl} \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f, g) & \longmapsto & \int_a^b f(t)g(t)dt \end{array}$$

est un p.s (sur $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$)

D/ ①

- Symétrie : $(f|g) = (g|f)$
- bilinéarité : $(f+\lambda g|h) = \int_a^b (f(t)+\lambda g(t))h(t)dt$

$$= (f|h) + \lambda(g|h)$$

- positif : On a $\int_a^b f(t)^2 dt \geq 0$

- Caractère défini :

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ C^0 tq $(f|f) = 0$

On a $\int_a^b f^2(t)\, dt = 0$

Mq $f = \tilde{0}$

Soit $x_0 \in [a,b]$ $]a,b[$. Mq $f(x_0) = 0$

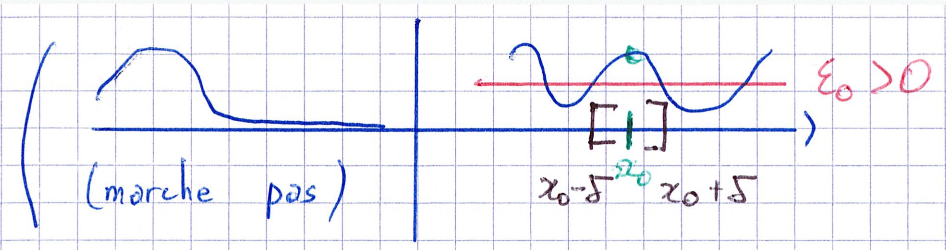
Déjà, on a $f^2(x_0) \geq 0$ ORPA et

Osq $\boxed{f^2(x_0) > 0}$

Ĉ f C^0, fixons donc $\varepsilon_0 > 0$ et $\delta > 0$ tq

1°) $[x_0-\delta, x_0+\delta] \subset [a,b]$

2°) $\forall t \in [x_0-\delta, x_0+\delta], f(t) \geq \varepsilon_0$

d^n 

Donc $\displaystyle\int_a^b f^2(t)\,dt \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \underbrace{f^2(t)}_{\geq \varepsilon_0}\,dt$

$\displaystyle \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \varepsilon_0\,dt$

$= 2\varepsilon_0\delta > 0$ Abs

Donc $f^2(x_0) = 0$ ie $\underline{f(x_0) = 0}$

Donc $\forall x_0 \in]a,b[$, $f(x_0) = 0$

• Ĉ f est C^0 : $\forall x \in [a,b]$, $f(x) = 0$

• CCl : $f = \tilde{0}$

Bilan : $(f|g) = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt$ définit bien un produit scalaire (si $a<b$)

Rq AF

$q : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ C^0, alors on pose ⓣ ! $(f|g) := \displaystyle\int_a^b f(t)\,g(t)\,q(t)\,dt$

est un p.s.

exo Donner l'analogue de $\mathbb{R}^n$

c) Sur $M_{n,p}(\mathbb{R})$

On a envie de définir :

$$\left(\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,p} \end{pmatrix} \right)$$

$$:= \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{i,j} \times b_{i,j}$$

Fait : Ça marche : c'est un p.s.

Fait - R^x

Soient $A, B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ Alors :

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{i,j} \times b_{i,j} = \text{tr}(A^T B)$$

D/ • Déjà $A^T \in M_{p,n}(\mathbb{R})$; donc $A^T B \in M_p(\mathbb{R})$

on peut donc prendre la trace

• On a

$$tr(A^T B) = \sum_{j=1}^{p} (A^T B)_{jj}$$

$$= \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} (A^T)_{ji}\, b_{ij}$$

$$= \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, b_{ij}$$

$$= \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{ij}\, b_{ij} \qquad \blacksquare$$

<u>Rq :</u> En pratique : ie ($\mathbb{R}^*$) on utilise surtout des $M_n(\mathbb{R})$

• Cependant, dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$ ie dans $\underline{\mathbb{R}^n}$, on obtient que $(X|Y)_{can} = tr(\underbrace{X^T Y}_{\in \mathbb{R}}) = X^T Y$

d) Sur $\mathbb{R}[X]$

- $$(P|Q) := \sum_{k=0}^{\max(\deg P, \deg Q)} \mathrm{coeff}_k(P) \times \mathrm{coeff}_k(Q)$$

"On copie $\mathbb{R}^n$"

C'est un p.s.

D/ ok $\blacksquare$

- $$(P|Q) = \sum_{k=0}^{\max(\deg(P), \deg(Q))} P(k)\,Q(k)$$

- Symétrique, positif : ok
- Caractère défini : Osq $(P|P) = \sum_{k=0}^{\max(\deg(P))} P(k)^2 = 0$

donc $\forall k, P(k)=0$; donc P a "bcp de racines",

donc $P = 0$

- ⚠ Ce n'est pas linéaire $\underbrace{(X^2 | X^4+X^2)}_{\sum^{4}} = \underbrace{(X^2|X^4)}_{\sum^{4}} + \underbrace{(X^2|X^2)}_{\sum^{2}}$

échec

- Débug 1 : Soit $n \geq 1$

Ocsd $E := \mathbb{R}_n[X]$

Soit $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ 2 à 2 $\neq^{ts}$

On pose $(P|Q) := \sum_{k=0}^{n} P(a_k)\,Q(a_k)$

$\boxed{\text{Fait : c'est un p.s sur } \mathbb{R}_n[X]}$

• **Plus ***

$E = \mathbb{R}[X]$ Soit $(a_0, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite injective.

On pose $(P|Q) = \sum_{k=0}^{\infty} P(a_k)Q(a_k)$

Ça bogue

Simplifions un peu et posons :

$$(P|Q) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P(k)Q(k)}{2^k}$$

$\sim \text{coeff}_{\text{dom}}(P)\, k^{\deg(P)}$ 8

pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$

Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ $(\neq 0)$

• $\mathbb{R}^*$ on mq $\frac{P(n)\,Q(n)}{2^n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

On a
$$\frac{\frac{P(n)\,Q(n)}{2^n}}{\frac{1}{n^2}} = n^2 \frac{P(n)\,Q(n)}{2^n}$$

$$\sim \frac{\lambda\, n^{2+\deg(P)+\deg(Q)}}{2^n} \longrightarrow 0 \text{ par croiss. comparée.}$$

(où $\lambda := \text{coeff}_{\text{dom}}(P) \times \text{coeff}_{\text{dom}}(Q)$)

$\hat{C}$ $\sum_n \frac{1}{n^2} \xrightarrow{ACV}$, par domination,

on a donc $\sum_n \frac{P(n)\,Q(n)}{2^n} \xrightarrow{ACV}$

- symétrie
- bilinéarité
- positivité

$\Big\}$ <u>ok</u>

<u>Lemme</u> Soit $\sum_n a_n$ SATP $\xrightarrow{CV}$

Alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0 \Rightarrow \forall n, a_n = 0$

<u>D/</u> $\oplus$ $0 \leq a_n \leq \sum_{k=0}^{n} a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} a_k = 0$ $\blacksquare$

- Autre p.s. sur $\mathbb{R}[X]$

$$(P|Q) := \sum^{\max(\deg(P))} P^{(k)}(1)\, Q^{(k)}(1)$$

(ou : sur $\mathbb{R}_n[X]$: $(P|Q) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(1) Q^{(k)}(1)$)

est un p.s

- symetrie : ok
- Linéarité de $D(\cdot) \longrightarrow$ bilinéarité
- positivité : ok
- Défini : $(P|P) = 0 \longrightarrow \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(1)^2 = 0 \longrightarrow \forall k\ P^{(k)}(1) = 0$

$\longrightarrow$ $P = \sum^{n} P^{(k)}(1) \frac{(X-1)^k}{k!} \longrightarrow P = 0$

• Encore un

$$(P|Q) = \int_{0}^{1} P(t)\,Q(t)\,dt$$

D/ $(P|P) = 0 \longrightarrow \int_0^1 P^2(t)\,dt = 0$

$\longrightarrow \forall t \in [0,1],\ P(t) = 0$

$\longrightarrow$ CRN : $P = 0$

Rq : de $\overline{m}$

• $\int_{-1}^{1} P(t)\,Q(t)\,dt$

• $\int_{0}^{1} P(t)\,Q(t)\,e^{t}\,dt$

4) Norme associée à un ps.

Dans ce §, $(E, (\cdot|\cdot))$ epr

a) Notation

Si $x \in E$, on pose $\|x\| := \sqrt{(x|x)}$

(en effet, on a $(x|x) \geq 0$)

C'est la norme de x

b) Réflexes calculatoires

$R^x 1$ (T) $\quad \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2$

D/ (T) on calcule : $\|x+y\|^2 = (x+y|x+y)$

$$= (x|x) + \underbrace{\boxed{(x|y) + (y|x)}}_{= 2(x|y)} + (y|y)$$

$$= \|x^2\| + 2(x|y) + \|y\|^2 \quad \blacksquare$$

$\boxed{R^x 2 \quad (T)}$ $\quad \|\sum_{i=1}^{n} x_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 + 2 \sum_{1 \leq i, j \leq n} (x_i|x_j)$

D/ on a

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} x_i \right)$$

$$= \sum_{1 \leq i,j \leq n} (x_i \mid x_j)$$

$$= \underbrace{\sum_{\substack{i=j \\ (\ldots)}}^{(\ldots)} (x_i \mid x_j)}_{S_1} + \underbrace{\sum_{\substack{(\ldots) \\ i<j}} (x_i \mid x_j)}_{S_2}$$

$$+ \underbrace{\sum_{\substack{i>j \\ (\ldots)}} (x_i \mid x_j)}_{S_3}$$

Et : $S_1 = \sum_{i=1}^{n} (x_i \mid x_i)$

$$= \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$$

$$S_3 = \sum_{j'>i'} (x_{j'} \mid x_{i'}) = \sum_{i<j} (x_i \mid x_j) = S_2$$

symétrie du p. s. ■

c) Exemples

- Dans $(\mathbb{R}^n, (\cdot|\cdot)_{can})$, on a Ⓣ

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Rq : on la note en g^al $\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\|_2$

- Dans $\left(\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}) \right.$, ps classique $\left. \right)$, on a $\oplus$

$$\|f\| := \sqrt{\int_a^b f(t)^2 \, dt}$$

Rq : elle est notée $\|f\|_2$

5) !! Inégalité de Cauchy-Schwarz

(schwarz ⟶ santé !) (sans "t")

a) Cas général

Thm ♛ : Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ epr

Soient $x, y \in E$. Alors, on a :

1) $|(x|y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

2) Cas d'égalité : On a

$$(x|y) = \|x\| \cdot \|y\| \iff$$

$\iff$ x et y sont ≥ 0 - colinéaires

D/ Soient $x, y \in E$

- Déjà : si $x = 0_E$: 1) et 2) sont V

si $y = 0_E$, de $\overline{m}$

Osq $x, y \neq 0_E$

Astuce : OCsd

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \|x + ty\|^2 \end{aligned}$$

Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $\varphi(t) = \ldots$?

Lemme - R^x (T)

1) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

2) $\|\lambda x\|^2 = \lambda^2 \|x\|^2$

D/ $\|\lambda x\|^2 = (\lambda x | \lambda x) = \lambda^2 (x|x) = \lambda^2 \|x\|^2$

Reprenons. On a $\varphi(t) = \|x\|^2 + \|ty\|^2 + 2(x|ty)$

$= \|x\|^2 + t^2\|y\|^2 + 2t(x|y)$

Rq : $\varphi(\cdot)$ est une fonct° trinôme du 2^{nd} degré

Posons $a := \|y\|^2$, $b := 2(x|y)$ et $c := \|x\|^2$

On a $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = at^2 + bt + c$

- **Astuce** : on a $\varphi \geq 0$. Notons $\Delta := b^2 - 4ac$;

on a $\boxed{\Delta \leq 0}$

Or $\Delta := 4(x|y)^2 - 4\,\|x\|^2\|y\|^2$

Donc $(x|y)^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2$

Donc $|(x|y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ ∎ 1)

2) ORP double $\Leftarrow$

$\Rightarrow$ Osq $(x|y) = \|x\| \cdot \|y\|$

Donc $\Delta = 0$ Donc φ s'annule en $-\frac{b}{2a}$

On note $t_0 = -\frac{b}{2a}$. On a $\varphi(t_0) = 0$

Ie, on a $\|x + t_0 y\|^2 = 0$

Lemme R^x :

$$\|x\| = 0 \implies x = 0_E$$

D/ $\|x\| = 0 \implies \|x\|^2 \implies (x|x) = 0 \implies x = 0_E$ ∎

car un p.s est défini

Donc $x + t_0 y = 0_E$ ie $x = -t_0 y$

On a donc $(x|y) = (-t_0 y | y) = -t_0 \|y\|^2$

$\hat{c}$ $\|y\| \neq 0$ car $y \neq 0_E$, on a donc $-t_0 = \frac{\|x\|}{\|y\|} \geq 0$

<u>Bilan</u> : x et y sont ≥ 0 - colinéaire

$(\Leftarrow)$ Osq x, y ≥ 0 - colinéaires

$\hat{c}$ $y \neq 0_E$, fixons $\lambda \geq 0$ tq $x = \lambda y$

On a
$$\begin{cases} (x \mid y) = (\lambda y \mid y) = \lambda \|y\|^2 \\ \|y\| \cdot \|x\| = \|\lambda y\| \cdot \|y\| = |\lambda| \|y\|^2 \\ \qquad\qquad = \lambda \|y\|^2 \end{cases}$$
■

<u>Rq</u> : on a $\textcircled{T}$ $|(x|y)| = \|x\| \cdot \|y\| \Leftrightarrow x, y$ colinéaires

b) CS en situation

<u>Prop</u> : Soient $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

Alors on a
$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

<u>D/</u> ok ■

Prop : Soient $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ C^0

Alors on a :

$$\left| \int_a^b f(t) g(t)\, dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,dt} \times \sqrt{\int_a^b g^2(t)\,dt}$$

D/ ok ■

6) L'application $\|\cdot\|$ est une norme

a) Rappels sur les normes

Soit E $\mathbb{R}$-ev.

Def : Soit $N : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$. On dit que $N(\cdot)$ est une norme sur E $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

(i) $N(\cdot)$ est homogène : $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$

(ii) Séparation : $N(x) = 0 \iff x = 0_E$

(iii) inégalité triang : $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$

Exemples : • les $\|\cdot\|_2$ précédentes.

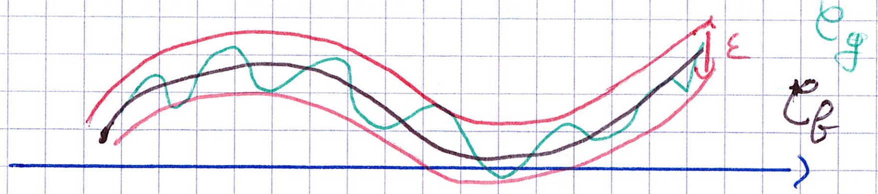
• Sur $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$

$$\|f\|_\infty := \sup_{t \in [a,b]} |f(t)|$$

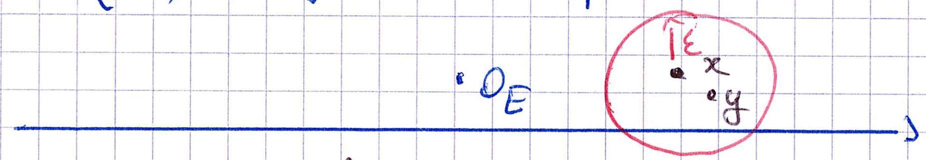
$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(t)|\,dt$$

Soient $f, g \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$

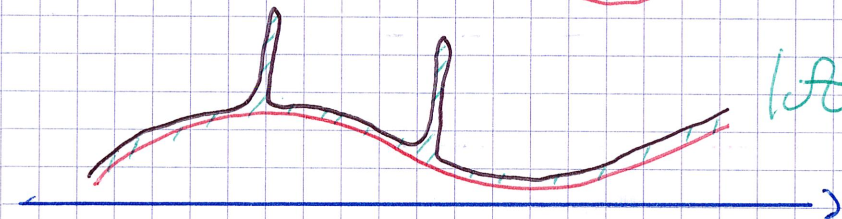
(d^n) $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$



(d^n) $(E, N(\cdot))$ evn espace vectoriel normé



(d^n)



$|\int f| \leq \varepsilon$

$\|f - g\|_1 \leq \varepsilon$

Rq : $\|f-g\|_\infty \leq \varepsilon \Rightarrow \|f-g\|_1 \leq (b-a)\varepsilon$

exo ++

b) Le résultat

$$\boxed{\text{Prop : } \|\cdot\| \text{ est une norme sur } E}$$

D/ (i), (ii) : cf Lemme - $\mathbb{R}^x$

(iii) : Soit $x, y \in E$ OALES

$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \iff \|x+y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$

car $(\cdot)^2$ est $\nearrow$

$$\iff \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2$$

<u>R° calculatoire</u>

$$\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2$$

$$\iff (x|y) \leq \|x\|\cdot\|y\|$$

Or, d'après C.S, on a $(x|y) \leq |(x|y)|$

$$\leq \|x\|\cdot\|y\|$$

Ainsi, on a bien $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ■

c) Normes euclidiennes

E : $\mathbb{R}$-ev

<u>Déf</u> : Soit $N(\cdot)$ une norme sur E

On dit que $N(\cdot)$ est euclidienne

$\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\exists\ (\cdot|\cdot)$ p.s. E : $\forall x \in E,\ N(x) = \sqrt{(x|x)}$

<u>Rq</u> :

- Sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$: $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ ne sont pas euclidiennes
- Une norme euclidienne est "+ sympa" qu'une norme qcq à manipuler

7) Vecteurs unitaires

$(E, (\cdot|\cdot))$ epr

Déf° : $x \in E$ est unitaire $\overset{A}{\text{ssi}}$ $\|x\| = 1$

Fait - R^x : $(x \neq 0_E)$ $\dfrac{x}{\|x\|}$ unitaire.

D/ $\left\| \dfrac{x}{\|x\|} \right\| = \left| \dfrac{1}{\|x\|} \right| \cdot \|x\|$

$= 1$ ■

8) Identités de polarisation

Idée : Si je connais $\|\cdot\|$, je peux retrouver $(\cdot|\cdot)$ (uniquement pour les normes euclidiennes)

Prop : $(E, (\cdot|\cdot))$ epr

Soient $x, y \in E$. Alors :

a) $(x|y) = \dfrac{\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2}$

b) $(x|y) = \dfrac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}$

II Orthogonalité

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ epr

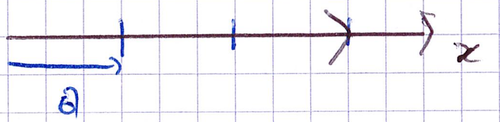
1) !! Forme linéaire associée à un vecteur.

<u>Rq :</u> C'est très interessant car on ne peut pas le faire dans un ev

<u>Notation :</u> Si $a \in E$, on note

$$q_a : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (a|x) \end{array}$$

<u>Ex :</u>



$q_a(x) = 3$

<u>Fait :</u> $\forall a \in E, \quad q_a \in E^*$

<u>D/</u> ok ■

<u>Fait :</u> $\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E^* \\ a & \longmapsto & q_a \end{array}$ est linéaire

<u>D/</u> AF

2) Déf°

Soient $x, y \in E$

F, G sev E

$A \subset E$ partie de E

$(e_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs.

a) déf°

- On dit que x est orthogonal à y $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $(x|y) = 0$

  On note $x \perp y$

- On dit que F est orthogonal à G $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

  $\forall x_F \in F, \quad \forall x_G \in G \qquad x_F \perp x_G$

  ie $(x_F | x_G) = 0$

  On note $F \perp G$

- L'orthogonal de A, noté $A^{\perp}$, est le sev E déf par

  $$A^{\perp} = \left\{ x \in E \mid \forall a \in A ; x \perp a \right\}$$

- On dit que $(e_i)_{i \in I}$ est orthogonale $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\forall i \neq j$, $e_i \perp e_j$

On dit que $(e_i)_{i\in I}$ est orthogonale $\underset{ssi}{\Delta}$

$$\begin{cases} \forall i \neq j, \ e_i \perp e_j \\ \forall i, \ \|e_i\| = 1 \end{cases}$$

Rq : $(e_i)_i$ orthonormale $\Longleftrightarrow \forall i, j, \ (e_i | e_j) = \delta_{i,j}$

b) Premières propriétés

Fait : $A^\perp$ sev E

D/¹ $\underset{\Downarrow}{\text{♀}}$ (...) ∎

D²/ $A^\perp = \bigcap_{a \in A} \operatorname{Ker}(q_a)$; ainsi on voit donc que $A^\perp$ est une intersection de sev E. ∎

AC $\ominus$

3) Théorème de Pythagore

Prop :

1) Soient $x, y \in E$. Alors

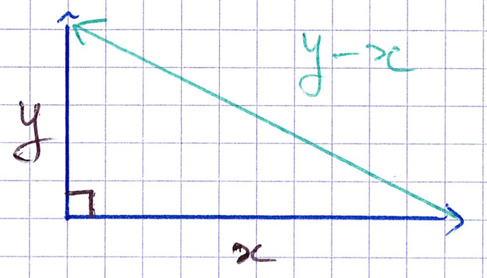
$$x \perp y \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

2) Soient $x_1, \dots, x_N \in E$

Alors : $(x_1, \dots, x_N)$ famille orthogonale

$$\Rightarrow \quad \left\| \sum_{i=1}^{N} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{N} \|x_i\|^2$$

d^n



D/ 2) C'est un R^x calculatoire ; on a en

g^{al} :

$$\left\| \sum_{i=1}^{N} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{N} \|x_i\|^2 + 2 \underbrace{\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant N} (x_i | x_j)}_{\substack{\parallel \\ 0}}$$

4) Les FOG de vecteurs $\neq 0_E$ sont libres.

Prop : Soit $(x_1, \dots, x_N) \in E^N$ une FOG (famille orthogonale). Tq $\forall i,\ x_i \neq 0_E$

Alors $(x_1, \dots, x_N)$ libre.

Corollaire

$(x_1, \dots, x_N)$ FON $\Rightarrow (x_1, \dots, x_N)$ libre

famille orthonormale

D/ Prop Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ tq $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i \overset{(*)}{=} 0_E$

On va scalairiser $(*)$

Soit $i_0 \in [\![1, N]\!]$. On a

$$\left(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i \,\middle|\, x_{i_0} \right) = \left(0_E \,\middle|\, x_{i_0} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left(\lambda_i \left(x_i \middle| x_i \right) \right)$$

$$= \lambda_{i_0} \| x_{i_0} \|^2$$

tous les termes sont $= 0$ si $i \neq i_0$

• Ainsi : $\lambda_{i_0} \|x_{i_0}\|^2 = 0$

Ĉ $\|x_{i_0}\|^2 \neq 0$ car $x_{i_0} \neq 0_E$, on a $\lambda_{i_0} = 0$

• **CCl** : $\forall i,\ \lambda_i = 0$: la famille est libre ∎

5) Les espaces orthogonaux sont en $\oplus$

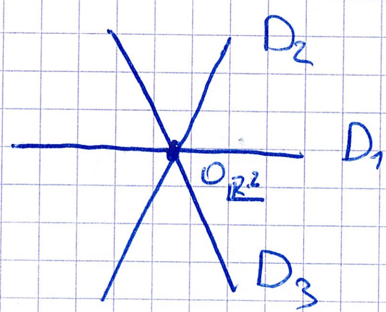
Prop : Soient $F_1, \dots, F_N$ sev E tq
$\forall i \neq j,\ F_i \perp F_j$
Alors les F_i sont en somme directe

D/ R^x $F_1, \dots, F_N$ sont en somme directe

~~Δ ssi $\forall i \neq j$, F_i et F_j sont en somme directe (i.e $F_i \cap F_j = \{0_E\}$)~~ F

Ctrex

$\mathbb{R}^2$)



À retenir : $F_1, \dots, F_N$ en somme directe

$$\Leftrightarrow \forall (x_{F_1}, \dots, x_{F_N}) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_{F_i} = 0_E \Rightarrow \forall i,\ x_{F_i} = 0_E$$

Soient $x_{F_1} \in F_1, x_{F_2} \in F_2, \dots, x_{F_n} \in F_N$ tq

$$x_{F_1} + \dots + x_{F_n} = 0_E \quad (*)$$

Soit $i_0 \in [\![1, N]\!]$. On a

$$\left(\sum_{i=1}^{N} x_{F_i} \middle| x_{F_{i0}} \right) = (0_F | x_{i0}) = 0$$

Donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} (x_{F_i} | x_{i0}) = 0$

Soit $i \neq i_0$. On a $F_i \perp F_{i0}$. Ie

$$\forall x \in F_i, \quad \forall y \in F_{i0}, \quad (x|y) = 0$$

Ĉ $x_{F_i} \in F_i$ et $x_{i0} \in F_{i0}$ $\quad (x_{F_i} | x_{F_{i0}}) = 0$

Donc $\| x_{F_{i0}} \|^2 = 0$ ie $\underline{x_{F_{i0}} = 0_E}$

■

6) Caractérisation du vecteur nul

__Prop :__ On a :

1) $\{0_E\}^{\perp} = E$

2) $E^{\perp} = \{0_E\}$

D/ 1) • On a $\{0_E\}^\perp \subset E$

• Rcpt : Soit $x \in E$, on a $x \perp 0_E$

Donc on a bien $\forall a \in \{0_E\}$, $x \perp a$

Ie on a bien $x \in \{0_E\}^\perp$

2) • On a $\{0_E\} \subset E^\perp$

• Rcpt : $\boxed{\text{Soit } x \in E^\perp \text{ Mq } x = 0_E}$

À retenir

On a donc $\forall y \in E$, $x \perp y$

En particulier : $x \perp x$ ie $(x|x) = 0$

Donc $\|x\|^2 = 0$. Donc $x = 0_E$ ■

7) Propriétés de l'orthogonal

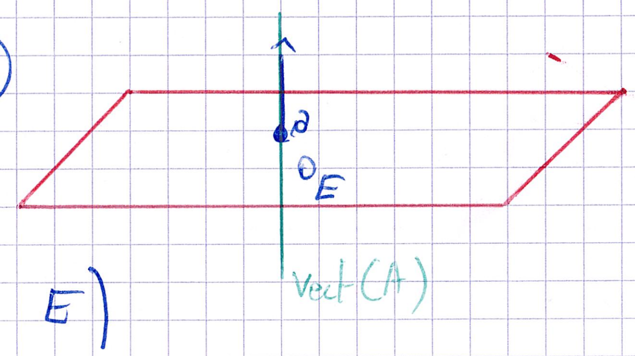
a) avec des parties

Fait : Soient $A, B \subset E$. Alors :

1) $A \subset B \Rightarrow B^\perp$ sev $A^\perp$

2) $A^\perp = [\mathrm{Vect}(A)]^\perp$

d^n



$\{a\}^\perp = \{x \in E \mid x \perp a\}$

D/ 1) Osq $A \subset B$

Soit $x \in B^\perp$: on a $\forall b \in B$, $x \perp b$

$\hat{C}$ $A \subset B$, on a en particulier : $\forall a \in A, x \perp a$

ie $x \in A^\perp$

AF utiliser $A^\perp = \bigcap_{a \in A} \ker(q_a)$

2) On a une inclusion gratuite.

On a $A \subset \mathrm{Vect}(A)$; donc $(\mathrm{Vect}\, A)^\perp \subset A^\perp$

Rcpt : Soit $x \in A^\perp$. Mq $x \in (\mathrm{Vect}(A))^\perp$

Ie mq $\forall y \in$ ~~...~~ $\mathrm{Vect}(A)$, $x \perp y$

Soit $y \in \mathrm{Vect}(A)$

$\mathbb{R}^*$ indispensable pour bosser avec vect

Qu'on écrit $y = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i$ avec $p \in \mathbb{N}$, $\forall i, a_i \in A$, $\forall i, \lambda_i \in \mathbb{R}$

On a $(x|y) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i (x|a_i)$

Or $x \in A^\perp$, donc $\forall i$, $x \perp a_i$

Donc $(x|y) = 0$

<u>ccl</u> : on a mq $\forall y \in \mathrm{Vect}(A)$, $x \perp y$

ie : on a mq $\underline{x \in \mathrm{Vect}(A)^\perp}$ ∎

b) Avec des sev

<u>Fait</u> : Soient F, G sev E. Alors :

1) $F \perp F^\perp$

2) $F \perp G \iff G \subset F^\perp \iff F \subset G^\perp$

D/ $\perp$; ~~θ~~

1) Mq $\forall x_F \in F, \forall x_{F^\perp} \in F^\perp, (x_F | x_{F^\perp}) = 0$

Soit $x_{F^\perp} \in F^\perp$: On a donc : $\forall x_F \in F$,

$x_{F^\perp} \perp x_F$

D'où le resultat

2) Mq $F \perp G \iff G \subset F^\perp$

• Mq $F \perp G \Rightarrow G \subset F^\perp$

Osq $F \perp G$. Mq $G \subset F^\perp$. Soit $x_G \in G$.

Mq $x_G \in F^\perp$; ie mq $\forall x_F \in F, x_G \perp x_F$

C'est vrai car $F \perp G$ $\blacksquare$ $\Rightarrow$

Mq $G \subset F^\perp \Rightarrow F \perp G$

Osq $G \subset F^\perp$ Mq $F \perp G$ ie mq

$\forall x_F \in F, \forall x_G \in G, x_F \perp x_G$.

Soient $x_F \in F$ et $x_G \in G$.

Ĉ $x_G \in G$ et Ĉ $G \subset F^\perp$, on a $\underline{x_G \in F^\perp}$

Ie on a $\forall y \in F, x_G \perp y$.

Ĉ $x_F \in F$, on a $x_G \perp x_F$ $\blacksquare$ $\Leftarrow$

Enfin, on a $F \perp G \iff G \perp F$

Donc $F \perp G \iff F \subset G^{\perp}$ ■

c) inclusion dans le biorthogonal

> **Prop :** Soit F sev E. Alors $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$

D/on a $F \perp F^{\perp}$; donc $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$ ■

8) Un contre-exemple

Principe : je cherche F un sev E "très gros"

- tq $F^{\perp} = \{0_E\}$
- on aura donc $(F^{\perp})^{\perp} = \{0_E\}^{\perp} = E$

On aura donc $F \not\subset (F^{\perp})^{\perp}$

On pose $E := \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de

$$(f \mid g) = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt$$

On prend $F := \{ f \in E \mid f(0) = 0 \}$

C'est le noyau de $\varphi : \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \longmapsto f(0) \end{array}$

c'est un hyperplan de E

Mq $F^{\perp} = \{ 0_E \}$

Soit $g \in F^{\perp}$. On a donc

$$\forall f \in F, \quad \int f(t) g(t) = 0$$

(i.e. "$\forall f$ C^0 tq $f(0) = 0$")

Soit $x_0 \in]0, 1[$. Mq $g(x_0) = 0$.

ORPA et Osq $g(x_0) \neq 0$

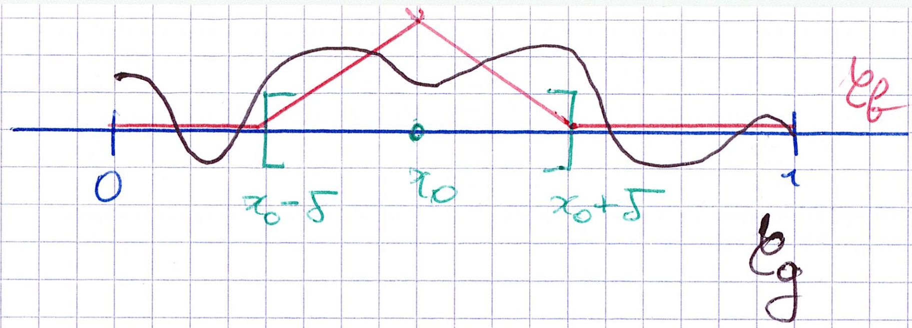
- <u>Premier cas</u> : Osq $g(x_0) > 0$

Fixons donc $\delta > 0$ tq 1°) $[x_0 - \delta ; x_0 + \delta] \subset [0;1]$

2°) $\forall x \in [x_0 - \delta ; x_0 + \delta]$, $g(x) \geq 0$

En effet : g est C^0 en x_0

d^n



Ocsd f affine par morceaux ; nulle sur

$$[0, x_0-\delta] \cup [x_0+\delta, 1]$$

et définie par $f(x_0)=1$, tq dessinée ci-dessus.

On a $(f|g) = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,dt = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(t)g(t)\,dt = 0$

Or, $\forall t \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$, $f(t) \geq 0$ et $g(t) \geq 0$

& $t \longmapsto f(t)g(t)$ est C^0, ≥ 0 et d'intégrale nulle, on a :

$$\forall t \in [x_0-\delta, x_0+\delta],\ f(t)g(t) = 0$$

Donc $f(x_0)g(x_0)=0$. Donc $g(x_0)=0$: Abs

• Si $g(x_0) < 0$: on a $-g \in F^\perp$ et $(-g)(x_0) > 0$

donc : $-g(x_0) = 0$ i.e $\underline{g(x_0)=0}$

• Bilan : $\forall x_0 \in]0,1[,\ g(x_0)=0$.

• $\tilde{C}$ g est C^0, on a $\forall x \in [0,1],\ g(x)=0$ i.e $g=0_E$

• CCl : $\boxed{F^{\perp} = \{0_E\}}$

g) Sous-espaces admettant un supplementaire orthogonal

a) def°

Def : Soit $(E,(\cdot|\cdot))$ epr

Soit F sev E

On dit que F admet un supplementaire orthogonal dans E ⚠ ssi

$$\exists G \text{ sev } E : \begin{cases} F \oplus G = E \\ F \perp E \end{cases}$$

Dans ce cas, on ecrira $F \overset{\perp}{\oplus} G = E$

On dira F adso E

b) lemme

$$\boxed{\text{Lemme : } \quad F \overset{\perp}{\oplus} G = E \Rightarrow G = F^{\perp}}$$

Rq : • Déjà, on a toujours F et $F^{\perp}$ en somme directe

• Seul le caractère plein a de la valeur.

D/ • Osq $F \overset{\perp}{\oplus} G = E$

• On a déjà, c̄ $F \perp G$, que $G \subset F^{\perp}$

• Mq $F^{\perp} \subset G$. Soit $x \in F^{\perp}$

R* On utilise le fait que $F + G = E$

• Ecrivons $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$
$x_G \in G$

• On a $x \in F^{\perp}$. Donc en particulier,

$(x | x_F) = 0$

Ie $\|x_F\|^2 + (x_F | x_G) = 0$

Or, on a supposé que $F \perp G$, donc

$(x_F | x_G) = 0$

Donc $\|x_F\| = 0$, ie $x_F = 0_E$

Donc $x = x_G \in G$ ∎

c) déf° équivalente

Prop :

1) F adso $E \iff F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp} = E$

2) En gal, on a $F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$ sev E

d) Premières propriétés

$$\boxed{\text{Prop : } F \text{ adso } E \implies F^{\perp} \text{ adso } E}$$

D/ Osq F adso E. On a donc $F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp} = E$

Donc $F^{\perp}$ possède un supplémentaire orthogonal

ie $F^{\perp}$ adso E ■

$$\boxed{\text{Prop : } F \text{ adso } E \implies (F^{\perp})^{\perp} = F}$$

D1/ " À la main " avec la somme pleine : AF$^{\infty}$ ■

D2/ F adso $E \longrightarrow F^{\perp} \overset{\perp}{\oplus} F = E$

$\swarrow$ AC

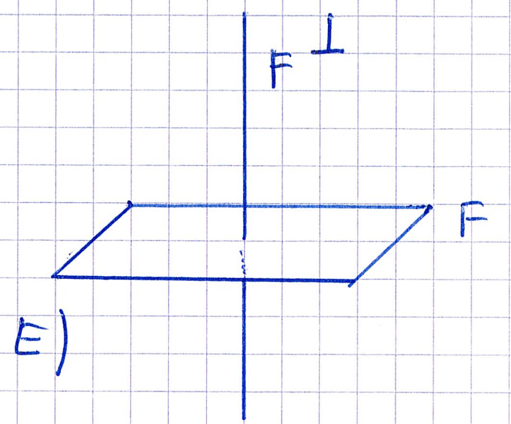
$F = (F^{\perp})^{\perp}$ ■

<u>Rq :</u> la rcpq est F

e) Exemples et ctrex

- E adso E
- $\{0_E\}$ adso E

d^n



exo On cherche F tq $F = (F^{\perp})^{\perp}$

mais tq F adso E

On prend $E := \mathcal{C}([0,3], \mathbb{R})$

$F := \{ f \in E \mid \forall x \in [1,2], f(x) = 0 \}$

1) Calculers $F^{\perp}$
2) A-t-on $F^{\perp} \oplus F = E$?
3) Calculer $(F^{\perp})^{\perp}$
4) Conclure

10) Bases orthonormales (BON)

a) hyperplan orthogonal

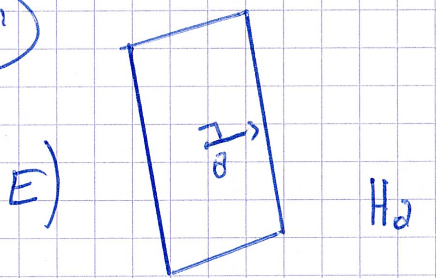
Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ epr

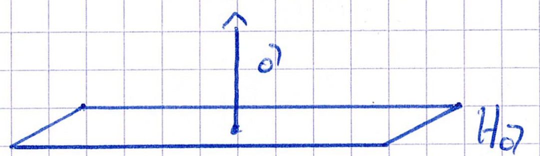
Soit $a \in E \setminus \{0_E\}$

Notons $\boxed{H_a := \{a\}^{\perp} \quad \text{ie} \quad H_a := \mathrm{Ker}(q_a)}$

On a vu que $H_a = \mathrm{Vect}(a)^{\perp}$

dⁿ





Exemple : On pose $a := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^3$.

Calculons H_a

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

On a $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in H_a \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$\iff \quad z = 0$

Bilan : $H_a = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} ; \; x, y \in \mathbb{R} \right\}$

$= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

$\boxed{\text{Fait : } H_a \text{ hyperplan de } E}$

D/ $\hat{c}$ $H_a = \ker(q_a)$, il suffit de mq

$$q_a \neq 0_{E^*}$$

C'est ok car $q_a(a) = \|a\|^2 \neq 0$ ■

exo

Soit $\varphi \in E^*$

Soit x_0 tq $\varphi(x_0) \neq 0$

Alors $E = \mathrm{Vect}(x_0) \oplus \ker \varphi$

Application : $E = \mathrm{Vect}(a) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Vect}(a)^{\perp}$

Donc Vect(a) adso E et

vect(a)$^{\perp}$ adso E.

exo

Soit H hyperplan E

Mq $\exists a \in E : H = \{a\}^{\perp}$

(c'est F en fait)

Rq : Ocsd

$$\varphi : E \longrightarrow E^*$$
$$a \longmapsto \varphi_a$$

Calculons $\ker(\varphi)$

Soit $x \in E$ tq $\varphi_x = 0_{E^*}$

On a donc : $\forall z \in E,\ (a|z) = 0$ Osq E evdf

Donc $a \in E^\perp$. Donc $a = 0_E$

Donc $\boxed{\varphi : E \longrightarrow E^* \text{ injective}}$

• On se place sur $(M_n(\mathbb{R}), \text{"}tr(A^T B)\text{"})$

Osq E evdf On a $\dim E = \dim E^*$

DALC ($\pm 50\%$), on a φ iso

• On se place sur $(M_n(\mathbb{R}), \text{"}tr(A^T B)\text{"})$

Soit $\varphi \in M_n(\mathbb{R})^*$

$\hat{C}$ $q : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})^*$ iso

Fixons donc $A \in M_n(\mathbb{R})$ tq $\varphi = q_A$

On a donc : $\forall M \in M_n(\mathbb{R}),\ \varphi(M) = tr(A^T M)$ ■

b) Existence de BON

Thm - R^x :

Tout epr de dim finie (ie H espace euclidien) possède des BON

D/ rec sur dim E

dim $E = 0$: ok

dim $E = 1$: • Soit $x_0 \in E \setminus \{0_E\}$: R^x (x_0) base E

• $\left(\frac{x_0}{\|x_0\|}\right)$ bon E.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. Osq le résultat est vrai en dimension n.

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ epr de dim $n+1$

Soit $x_0 \in E \setminus \{0_E\}$. On pose $e_1 := \frac{x_0}{\|x_0\|}$

Ocsd $F := \{e_1\}^\perp$: c'est un hyperplan de E.

Donc c'est un espace pr de dim n

Fixons donc $(e_2, e_3, \dots, e_{n+1})$ BON de F

On a alors $(e_1, \dots, e_{n+1})$ BON

10° C'est une base ok car $\mathrm{Vect}(e_1) \oplus F = G$

<u>Lemme</u> : $\mathrm{Vect}(a) \oplus H_a = E$

<u>D/</u> • caractère $\oplus$: c'est ok car $\mathrm{Vect}(a) \perp H_a$

• Caractère plein : Soit $x \in E$

On a $x = x_a + x_h$

avec $x_a \in \mathrm{Vect}(a)$

ORPAS : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $x_H \in H_a$ tq

<u>Analyse :</u> $x = \lambda a + x_H$

On a $(x|a) = \lambda \|a\|^2 + \underbrace{(x_H|a)}_{=0}$

Donc $\lambda = \dfrac{(x|a)}{\|a\|^2}$

Synthese : On pose $\lambda := \dfrac{(x|a)}{\|a^2\|}$,

$x_H := x - \lambda a$

On a : $x = \lambda a + x_H$ et $\lambda a \in \mathrm{Vect}(a)$

Mq $x_H \in H_a$ $(= \{a\}^\perp)$

On calcule $(x_H | a) = (x - \lambda a | a)$

$= (x|a) - \lambda (a|a)$

$= (x|a) - \dfrac{(x|a)}{\|a\|^2}(a|a) = 0$

② Mq $(e_1, \dots, e_{n+1})$ BON

- Si $i \geq 2$, on a $e_i \in F = \mathrm{Vect}(e_1)^{\perp}$:

donc $e_i \perp e_1$

- si $i, j \geq 2$, on a $i \neq j \Rightarrow e_i \perp e_j$ car

par HR_n, $(e_2, \dots, e_{n+1})$ BON F

- Enfin, on a bien : $\forall i$, $\|e_i\| = 1$ ■

c) formules dans une BON

<u>Prop</u> Dans une BON, les calculs sont très simples. Tout se passe comme si on était dans $(\mathbb{R}^n, (\cdot|\cdot)_{can})$

<u>Prop :</u> Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ euclidien de dimension n.

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ BON de E, notée $\mathcal{B}$

Soient $x, y \in E$

1) Coordonnées de x dans $\mathcal{B}$

On a $x = \sum_{i=0}^{n} (x|e_i)\, e_i$

Ie : $\mathrm{Coords}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} (x|e_1) \\ \vdots \\ (x|e_n) \end{pmatrix}$

2) Produit scalaire entre x et y.

Si x et y s'écrivent

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \quad \text{et} \quad y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i ,$$

alors $$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

3) <u>Norme de x</u>

On a aussi : $$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \left(= \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)^2 \right)$$

<u>D/</u> 1) Mq $$x = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i) e_i$$

<u>Astuces</u> : 1° Posons $a := x - \sum_{i=1}^{n} (x|e_i) e_i$

Mq $a = 0_E$

2° On va mq $\forall i,\ a \perp e_i$

Soit $i_0 \in [\![1,n]\!]$

On calcule : $$(a|e_{i_0}) = (x|e_{i_0}) - \left(\sum_{i=1}^{n} (x|e_{i}) e_i \middle| e_{i_0} \right)$$

$$= (x|e_{i_0}) - \sum_{i=1}^{n} (x|e_i) \underbrace{(e_i|e_{i_0})}_{= \delta_{i,i_0}}$$

car $(e_i)_i$ BON

$$= (x|e_{i_0}) - (x|e_{i_0})(e_{i_0}|e_{i_0})$$

$$= 0$$

- Donc $\forall i,\ a \perp e_i$
- Donc $a \in \{e_1, \dots, e_n\}^\perp$
- Donc $a \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)^\perp$
- Donc $a \in E^\perp = \{0_E\}$
- Donc $a = 0_E$ ■ 1)

2) C'est un R^x calculatoire

On a $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \middle| \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right)$

$$= \sum_{1 \leq i,j \leq n} (x_i e_i | y_j e_j) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} x_i y_j \underbrace{\boxed{(e_i | e_j)}}_{= \delta_{i,j}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad ■\ 2)$$

3) découle de 2) AC ■

d) Corollaire dans les BOG

<u>Prop</u>: Soit $(b_1, \dots, b_n)$ base orthogonale de E

Alors $$x = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x | b_i)}{(b_i | b_i)} b_i$$

D/ • On a $\left(\frac{b_i}{\|b_i\|}\right)_{1\leq i\leq n}$ BON E.

• Donc $x = \sum_{i=1}^{n} \left(x \,\middle|\, \frac{b_i}{\|b_i\|}\right) \cdot \frac{b_i}{\|b_i\|}$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{(x|b_i)}{\|b_i\|^2}\, b_i$$

■

11) ! Tout sev df est adsa E

Théorème : Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ epr
Soit F sev E de dimension finie.
Alors F adsa E

D/ • Mq $F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp} = E$: c'est le caractère plein qu'il nous faut.

• Astuce : $\hat{C}$ F epr df : firons $(e_1, \dots, e_p)$ BON de F

• Soit $x \in E$. ORP AS

Analyse : Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$
Soit $x_{F^\perp} \in F^\perp$ tq

$$x = \sum^{n} \lambda_i e_i + x_{F^\perp}$$

Soit $i_0 \in [\![1, p]\!]$, on a donc

$$(x|e_{i_0}) = \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i \,\Big|\, e_{i_0}\right) + (x_{F^\perp}|e_{i_0})$$

Déjà, $\hat{c}$ $\underline{x_{F^\perp} \in F^\perp}$: on a $\forall y \in F$,

$$(x_{F^\perp}|y_F) = 0$$

Or $\underline{e_{i_0} \in F}$: donc $(x_{F^\perp}|e_{i_0}) = 0$

Puis (R$^\times$) $\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i \,\Big|\, e_{i_0}\right) = \lambda_{i_0}$

car $(e_i)_i$ BON

Bilan : $\boxed{\lambda_{i_0} = (x|e_{i_0})}$

Synthèse : (on a fixé $(e_1, \dots, e_p)$ BON F)

On pose $x_F = \sum_{i=1}^{p} (x|e_i) e_i$

$$x_{F^\perp} := x - x_F$$

On a $x = x_F + x_{F^\perp}$, $x_F \in F$ (AC)

Mq $\boxed{x_{F^\perp} \in F^\perp}$

(R$^\times$) $\boxed{y \in F^\perp \iff \forall i \in [\![1,p]\!],\ y \perp e_i}$

$F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$

Soit $i_0 \in [\![1,p]\!]$. On a

$$(x_{F^\perp}|e_{i_0}) = (x - x_F|e_{i_0})$$

$$= (x|e_{i_0}) - (x_F|e_{i_0})$$

Or, $(x_F|e_{i_0}) = \left(\sum_{i=1}^{p} (x|e_i)e_i \,\Big|\, e_{i_0}\right) \underset{\text{(R}^\times\text{) (AF)}}{=} (x|e_{i_0})$

car $(e_i)_i$ BON

• Ainsi : $\forall i$, $(x_{F^\perp} | e_i) = 0$. On a bien

$x_F \in F^\perp$ ■

12) Orthogonal dans les euclidiens.

Th : Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ euclidien (ie epr ^{df})

Soit F sev E. Alors :

1) $F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp = E$

2) $F = (F^\perp)^\perp$

3) $\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E)$

D/ 1) ĉ F sev ^{df} E : F adso E d'après 11)

2) ĉ F adso E, on a $(F^\perp)^\perp = F$

3) On passe 1) à $\dim(\cdot)$ ■

III Projectᵒ orthogonale sur un adso

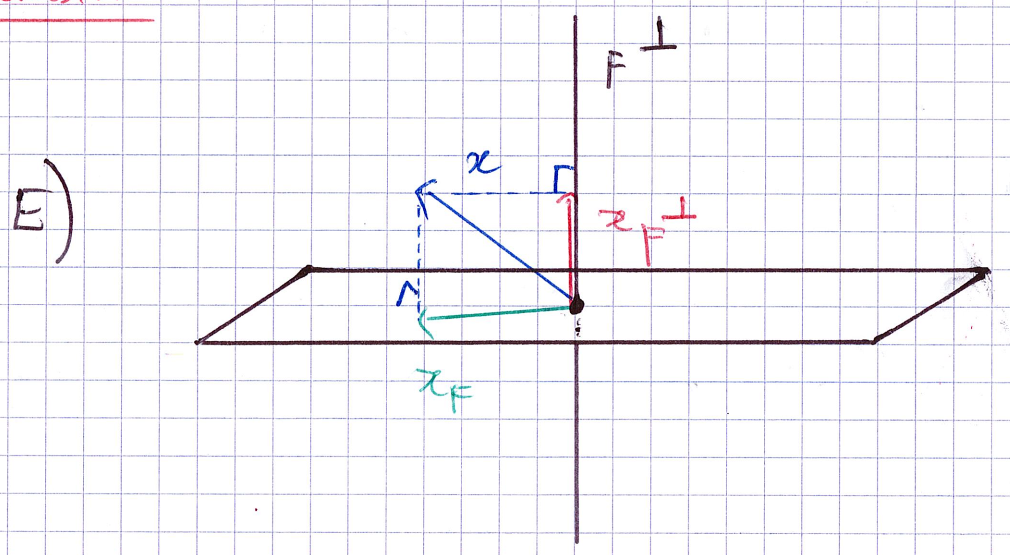
Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ Epr

1) Projection orthogonale

a) defᵒ

Defᵒ : Soit F adso E. Alors la projection orthogonale sur F, notée P_F est le projecteur de E sur F parallèlement à $F^{\perp}$

b) dessin



c) projecteurs orthogonaux associés

$\hat{C}$ F adso E, on a $F^{\perp}$ adso E

On a $P_F + P_{F^{\perp}} = Id_E$

2) Expression f^{ale} de p_F

Prop : Soit F un sev de E (on a F dolso E)
Soit $(e_1, \dots, e_p)$ BON de F
Alors :

$$\forall x \in E, \quad p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} (x|e_i) e_i$$

D/ On vient de le faire puisque si

$$x_F := \sum_{i=1}^{p} (x|e_i) e_i$$

$$x_{F^\perp} := x - x_F$$

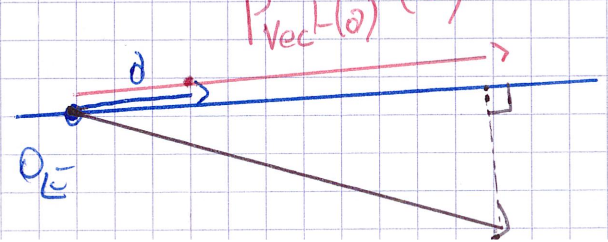
On a bien le resultat ∎

3) Cas d'une droite

Prop : Soit $a \in E \setminus \{0_E\}$. On a

$$\forall x \in E, \quad p_{Vect(a)}(x) = \frac{(x|a)}{(a|a)} a$$

d^n



D/ Déjà, $Vect(a)$ sev $\overset{df}{=}$ E donc est ados E

De (†), $\frac{(a|a)}{\|a\|^2}$ $\left(\frac{a}{\|a\|}\right)$ BON de $Vect(a)$

• **Bilan** : $P_{Vect(a)} = \left(x \mid \frac{a}{\|a\|}\right)\frac{a}{\|a\|}$

$$\overset{AC}{=} (\dots) \frac{(x|a)}{(a|a)}\, a$$

$\blacksquare$

4) Methodes pour calculer $P_F(x)$!! (S)

a) Méthode BON

Si on dispose de $(e_1, \dots, e_p)$ BON de F, c'est ultra facile !
Pour trouver $P_F(x)$, il suffit de calculer les produits scalaires $(x|e_1), \dots, (x|e_p)$

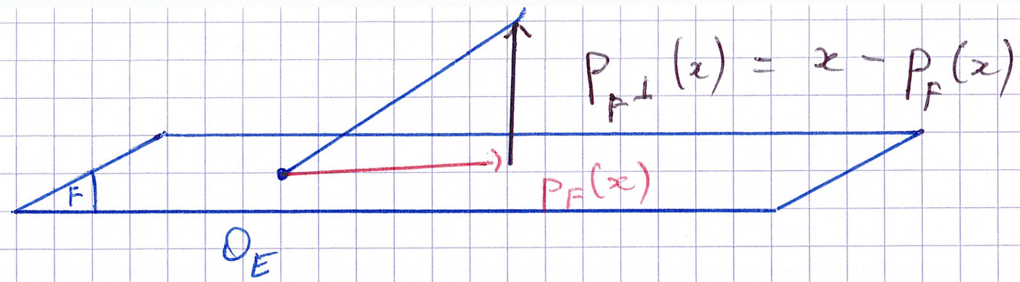
b) Methode BOG

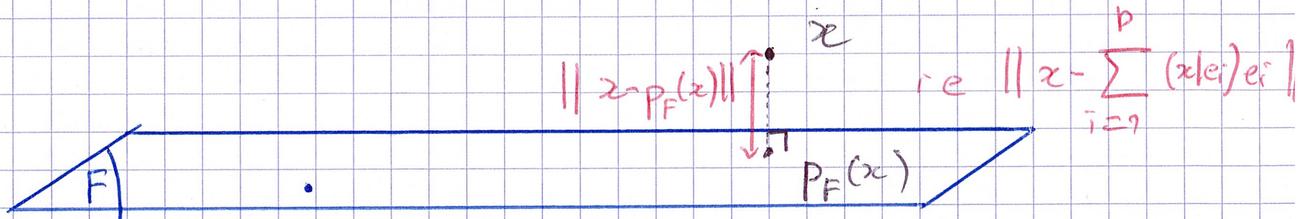
De $\overline{m}$, si $(f_1, \dots, f_p)$ BOG de F alors on a

$$\boxed{P_F(x) = \sum_{i=0}^{p} \frac{(x|f_i)}{(f_i|f_i)} f_i}$$

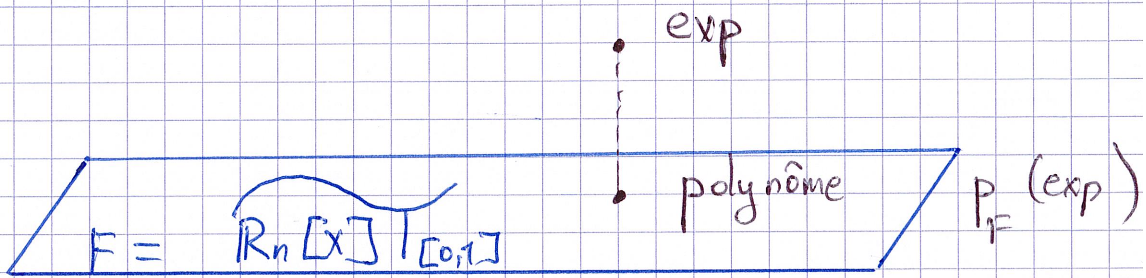
d^n

E)





$E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$



c) Méthode système

Cette fois-ci on ne dispose que d'une base $(x_1, \dots, x_p)$ de F qui n'est ni BOG ni BON.

On cherche $p_F(x)$. on l'écrit

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \quad \text{avec } \forall i, \lambda_i \in \mathbb{R}$$

on cherche $\lambda_1, \dots, \lambda_p$

On a $\quad p_{F^\perp}(x) = x - p_F(x) = x - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$

On a $\quad \forall i \in [\![1,p]\!], \left(x - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \,|\, x_k \right) = 0$

Donc on a : $\forall k \in [\![1,p]\!], \sum_{i=1}^{p} \lambda_i (x_i | x_k) = (x|x_k)$

Ainsi : $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ est solut° du système

$$\begin{cases} (k=1) & (x_1|x_1)\underline{\lambda_1} + (x_2|x_1)\underline{\lambda_2} + \dots + (x_p|x_1)\underline{\lambda_p} \\ & = (x|x_1) \\ (k=2) & \underline{\lambda_1}(x_2|x_1) + \underline{\lambda_2}(x_2|x_2) + \dots + \underline{\lambda_p}(x_2|x_p) \\ & = (x|x_2) \\ \vdots & \\ (k=p) & (x_p|x_1)\lambda_1 + (x_p|x_2)\lambda_2 + \dots + (x_p|x_p)\lambda_p \\ & = (x_p|x) \end{cases}$$

On résout ce système. On trouve ainsi les λ_i

5) Distance à une partie

a) définition

Soit $(E, \|\cdot\|)$ evn (ie E - $\mathbb{R}$ - ev ; $\|\cdot\|$ norme sur E)

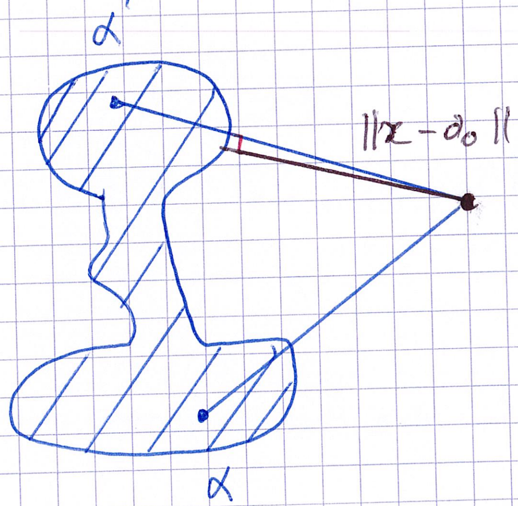
Soit $A \subset E$, non vide. Soit $x \in E$

Déf : La distance de x à A, notée $d(x, A)$, est le nombre ≥ 0 déf par :

$$d(x,A) := \inf_{a \in A} \|x - a\|$$

d^n - Exemple

$\mathbb{R}^2$)



Dl $\{\|x-a\| \, ; \, a \in A\}$ est $\neq \emptyset$ (car $A \neq \emptyset$)

et est minoré. Donc possède un inf

b) dessin

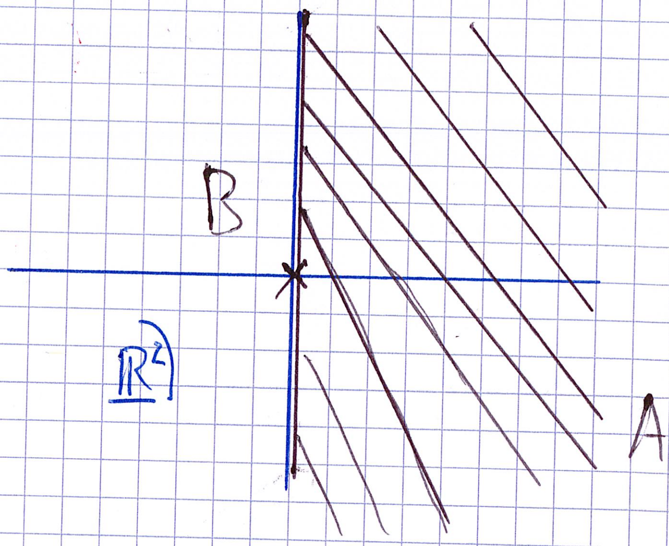
c) Exemples

- $E := \mathbb{R}^2$

  $A := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$

  $B := A \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

  $x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$



On a $d(x, B) = 0$

Mais $\nexists b \in B : \|x - b\| = 0$

(sinon on aurait $x = b$ et donc $\underline{x \in B}$ (Abs))

$Y = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

De m̄ $d(Y, B) = 1$: elle n'est pas atteinte

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $d(x, \mathbb{Q}) = \inf_{r \in \mathbb{Q}} |x - r|$

  $= 0$

- exo (X 2022) Mq $d\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n, \mathbb{Z} \right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

AF Louison

d) !! Calcul de la distance à un adso

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un epr

Soit F sev E. On s'interesse à $d(x, F)$ pour $x \in E$

d^n

Proposition

Osq F adso E

Soit $x \in E$ Alors :

1) $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$

2) C'est le seul point où elle est atteinte ; ie

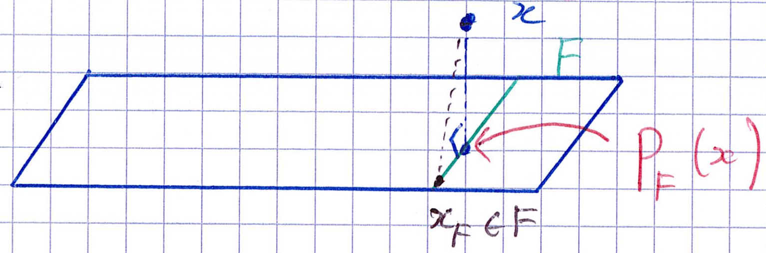
$$\forall x_F \in F, \ d(x, F) = (\|x - x_F\|) \iff x_F = p_F(x)$$

D/ On procède par double inégalité

- $\hat{C}$ $p_F(x) \in F$, on a $\inf_{x_F \in F} \|x - x_F\| \leq \|x - p_F(x)\|$

• Dans l'autre sens. Pythagore bien dessiné

d^n



Soit $x_F \in F$. On a $x_F - P_F(x) \in F$

et on a $x - P_F(x) \in F^\perp$ → $P_{F^\perp}(x)$

Donc $-x_F + P_F(x) \perp x - P_F(x)$

D'où : $\| (P_F(x) - x_F) + (x - P_F(x)) \|^2$

$$= \| P_F(x) - x_F \|^2 + \| x - P_F(x) \|^2$$

Ie : $$\boxed{\| x - x_F \|^2 = \| P_F(x) - x_F \|^2 + \| x - P_F(x) \|^2}$$

$$\geq \| x - P_F(x) \|^2$$

Donc $\| x - P_F(x) \|$ minore la famille $\left(\| x - x_F \| \right)_{x_F \in F}$

Donc $\inf\limits_{x_F \in F} \| x - x_F \| \geq \| x - P_F(x) \|$

c'est le + grand des minorants.

cd : $d(x,F) \geq \|x - x_F\|$ ■ 1)

2) Donc $(*)$ s'écrit : $\|x - x_F\|^2 = \|p_F(x) - x_F\|^2 + d(x,F)$ $(**)$

si $x_F \in F$

$\Leftarrow$ on vient de le voir.

$\Rightarrow$ Osq $\|x - x_F\| = d(x,F)$.

Donc grâce à $(**)$

on a $\|p_F(x) - x_F\|^2 = 0$;

donc $x_F = p_F(x)$

6) Exemples

a) avec la méthode système

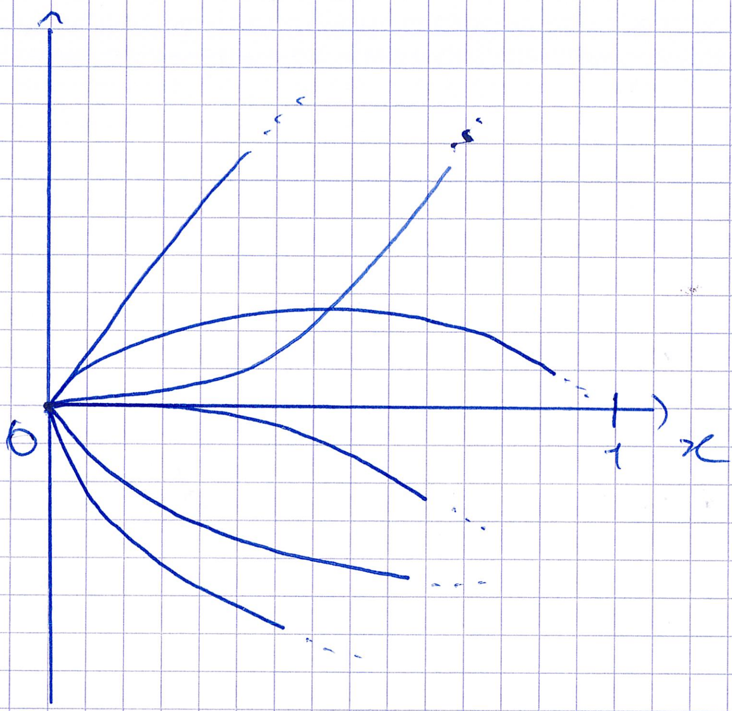
$E := \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ $\quad (f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$

$f_1 : x \longmapsto x$

$f_2 : x \longmapsto x^2$

$F := \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$

On cherche $p_F(\exp)$



Allons-y.

Notons (T) $f_n : t \longmapsto t^n$

On a $(f_n|\exp) = \int_0^1 t^n e^t dt = \left[t^n e^t\right]_0^1 - n\int t^{n-1} e^t$

$= e - n(f_{n-1}|\exp)$

De (T) : $(f_0|\exp) = \int_0^1 e^t dt = \left[e^t\right]_0^1 = e-1$

ccl : $(f_1|\exp) = e-(e-1) = 1$

$(f_2|\exp) = e-2$

Ocsd $p_F(\exp)$ q' on écrit

$$p_F(\exp) = \lambda b_1 + \mu b_2$$

On a $\exp - p_F(\exp) = p_{F^\perp}(\exp) \longrightarrow \perp b_1$
$\searrow \perp b_2$

Donc $\big((\exp - \lambda b_1 - \mu b_2) \,|\, b_1 \big) = 0$

ie $(\exp | b_1) = \lambda (b_1|b_1) + \mu (b_2|b_1)$

• $(b_n | b_m) = \displaystyle\int_0^1 t^{n+m}\,dt \underset{\mathbb{R}^x}{=} \frac{1}{n+m+1}$

$(b_1|b_1) = \frac{1}{3}$

$(b_1|b_2) = \frac{1}{4}$

D'où : $\boxed{1 = \frac{1}{3}\lambda + \frac{1}{4}\mu}$ L_1

Et : $(\exp - \lambda b_1 - \mu b_2 \,|\, b_2) = 0$

ie $(\exp | b_2) = \lambda (b_1|b_2) + \mu (b_2|b_2)$

ie $\boxed{e - 2 = \frac{1}{4}\lambda + \frac{1}{5}\mu}$ L_2

On a
$$\begin{cases} 4\lambda + 3\mu = 12 \\ 5\lambda + 4\mu = 20e - 40 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 4\cdot 12 - 3\cdot 4(5e-10) \leftarrow 4L_1 - 3L_2 \\ \quad = (\dots) = 12(14-5e) \\ \mu = (\dots) = 20(4e-11) \end{cases}$$

ccl $P_F(\exp) = 12(14-5e) f_1 + 20(4e-11) f_2$

b) avec la methode BOG !!

$E = \mathcal{C}([0,\pi], \mathbb{R})$ ⊕ $(f|g) = \int_0^\pi f(t)g(t)dt$

$f_1 := \sin$

$f_2 := \cos$

$F := \mathrm{Vect}(\sin, \cos) = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$

On cherche $P_F(\exp)$

Miracle

$(\sin, \cos)$ est une FOG

D/ $(\sin | \cos) = \int_0^{\pi} \sin(t)\cos(t)\,dt$

(1°) $= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \boxed{2\cos(t)\sin(t)\,dt}$

$\sin(2t) \longrightarrow$ on a linéarisé

$= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(2t)}{2}\right]_0^{\pi} = 0$

2° IPP (?)

3° $I = \int_{\pi}^{0} \sin(\pi-\theta)\cos(\pi-\theta) \times (-d\theta)$

cdv $t = \pi - \theta$

ie $\theta = \pi - t$

$= -\int_0^{\pi} \sin(\theta)\cos(\theta)\,d\theta$

$= -I$ donc $I = 0$

h^o $\quad I = \left[\dfrac{\sin^2(t)}{2} \right]_0^\pi = \dfrac{(0^2 - 0^2)}{2} = 0$

D'où : $\quad P_F(\exp) = \dfrac{(\exp | \cos)}{(\cos | \cos)} \cos + \dfrac{(\exp | \sin)}{(\sin | \sin)} \sin$

Calculs :

- $\displaystyle\int_0^\pi \cos^2 t \, dt \underset{\text{cdv}}{=} - \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) d\theta$

$t = \frac{\pi}{2} - \theta$

$\left(\theta = \frac{\pi}{2} - t\right)$

$= \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \quad d\theta \qquad \boxed{\text{échec}}$

Astuce !! La f^o $\cos^2(\cdot)$ est π-périodique

En effet, $\forall \theta$, $\cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta)$

D'ailleurs, de $\bar{m}$ $\sin^2(\cdot)$ est π-périodiq

À retenir, $\quad \displaystyle\int_0^\pi \cos^2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2$

Et : $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \cos^2(t)\,dt = -\int_{\pi}^{0} \cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)d\theta$$

cdv

$$t = \frac{\pi}{2}-\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \sin^2(\theta)\,d\theta$$

Bilan : on a $(\cos|\cos) = (\sin|\sin)$

• $$(\cos|\cos) + (\sin|\sin) = \int_0^{\pi} \cos^2 + \sin^2 = \int_0^{\pi} 1 = \pi$$

• Bilan :

$$(\cos|\cos) = (\sin|\sin) = \frac{\pi}{2}$$

Astuce : $\boxed{e^{i\theta}}$

On pose $$I := \int_0^{\pi} e^t e^{it}\,dt$$

On a $$I = \left[\frac{e^{(1+i)t}}{1+i}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{1+i}\left(e^{\pi}e^{i\pi} - 1\right) = -\frac{1}{1+i}\left(e^{\pi}+1\right)$$

$$= -\frac{1}{1+i}\left(e^{\pi}+1\right)$$

$$= -\frac{(1-i)}{1^2+1^2}\left(e^{\pi}+1\right)$$

- $Re(I) = (\cos|\exp) =$
- $Im(I) = (\sin|\exp)$

ccl

- $$\frac{(\cos|\exp)}{(\cos|\cos)} = -\frac{1+e^{\pi}}{\pi}$$
- $$\frac{(\sin|\exp)}{(\sin|\sin)} = \frac{1+e^{\pi}}{\pi}$$

$$\boxed{P_F(\exp) = \frac{1+e^{\pi}}{\pi}\sin - \frac{1+e^{\pi}}{\pi}\cos}$$

IV Orthonormalisation de Gram-Schmidt

c'est un algo.

$(E, (\cdot|\cdot))$ epr

a) Entrée

$(e_1, \dots, e_p)$ lil famille libre

b) Sorties

- $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_p)$ famille orthogonale $(\neq 0_E)$

liée à $(e_1, \dots, e_p)$ tq $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k) =$

$\mathrm{Vect}(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_k)$ pour tout $k \leq p$

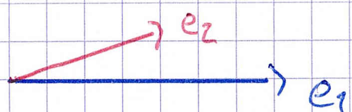
- En particulier : $\boxed{(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_p) \text{ BOG de } \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)}$

- Puis, on fait $\tilde{e}_i := \dfrac{\hat{e}_i}{\|\hat{e}_i\|}$: on obtient une BON

c) Algo pour construire les $\hat{e}_i$

On procède "par rec"

- $\hat{e}_1$? Très simple : $\hat{e}_1 := e_1$
- $\hat{e}_2$? d^n



On veut $\hat{e}_1 \perp \hat{e}_2$

On prend $\hat{e}_2 := P_{F^\perp}(e_2) = e_2 - P_{F_1}(e_2)$

où $F_1 := \mathrm{Vect}(\hat{e}_1)$

On a une BOG de F_1 : c'est $(\hat{e}_1)$

Donc $P_{F_1}(e_2) = \dfrac{(e_2 | \hat{e}_1)}{(\hat{e}_1 | \hat{e}_1)} \hat{e}_1$

ccl : $\hat{e_2} := e_2 - \dfrac{(e_2 | \hat{e_1})}{(\hat{e_1} | \hat{e_1})} \hat{e_1}$

Fait : $\mathrm{Vect}(e_1, e_2) = \mathrm{Vect}(\hat{e_1}, \hat{e_2})$

- Déjà, $\hat{e_1} \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$, $\hat{e_2} \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ donc $\mathrm{Vect}(\hat{e_1}, \hat{e_2})$ sev $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$

- Puis : $\hat{e_2} \neq 0_E$

En effet, OALES : $\hat{e_2} = 0_E \iff P_{F_1^\perp}(e_2) = 0_E$

$\iff e_2 \in \mathrm{Ker}(P_{F_1^\perp})$

R^x $\mathrm{Ker}(P_F) = F^\perp$ $\iff e_2 \in F_1$

Or $e_2 \notin F_1$, car $(e_1, \dots, e_p)$ libre.

Bilan $\hat{e_2} \neq 0_E$

Donc $(\hat{e_1}, \hat{e_2})$ est une FO $\neq 0_E$: elle est libre :

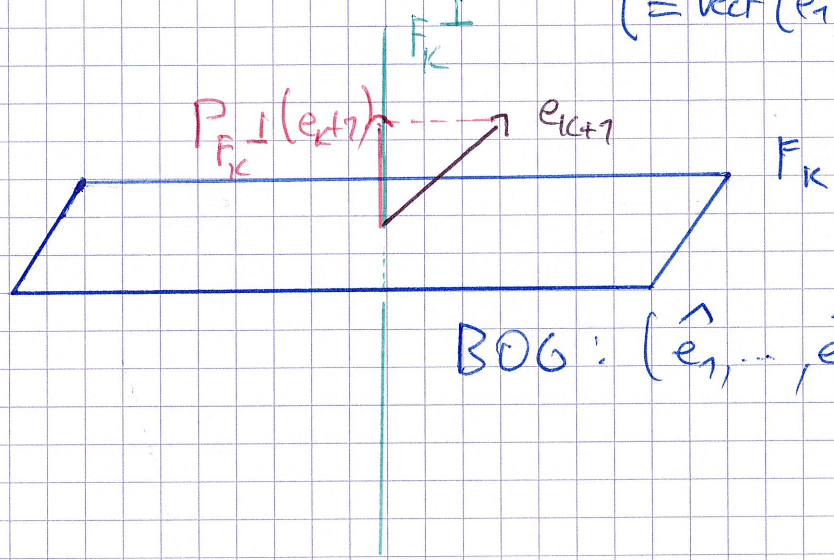
Donc $\dim \mathrm{Vect}(\hat{e_1}, \hat{e_2}) = 2 = \dim \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$

D'où l'égalité.

• <u>Hérédité :</u> Soit $k \leq p-1$. Qsq on a construit $(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_k)$

Construisons $\widehat{e_{k+1}}$. On note $F_k := \mathrm{Vect}(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_k)$
$(= \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k))$

d^n



BOG : $(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_k)$

On pose $\widehat{e_{k+1}} := P_{F_k^\perp}(e_{k+1})$

$$= e_{k+1} - P_{F_k}(e_{k+1})$$

<u>j'ai une BOG</u>

ie on pose

$$\boxed{\widehat{e_{k+1}} := e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{(e_{k+1} \mid \hat{e}_i)}{(\hat{e}_i \mid \hat{e}_i)} \hat{e}_i}$$