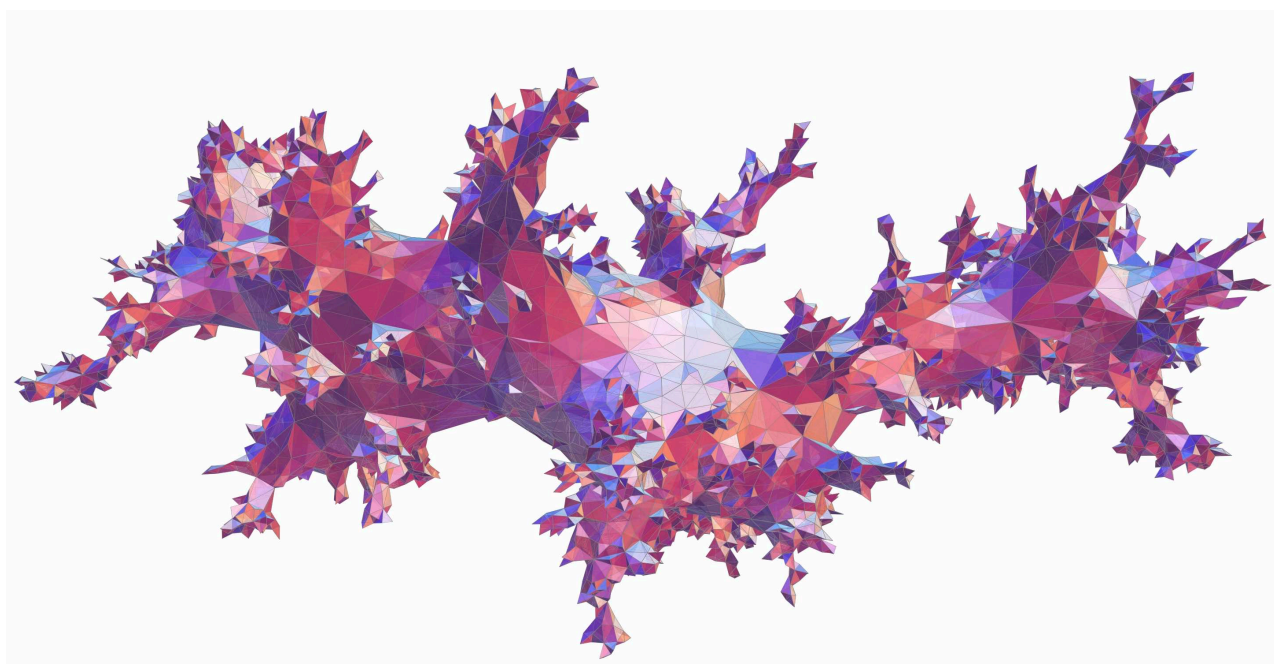


Chapitre 33

Variables aléatoires



Une surface triangulée aléatoire

Une **variable aléatoire réelle** est une application qui « à une situation associe un nombre ».

Ici, on a sous-entendu que la situation comportait des aspects aléatoires : ainsi, le résultat de la fonction est lui aussi aléatoire.

Voici quelques exemples :

- Le nombre de personnes X attendant devant un bureau de poste donné, 5 minutes avant l'ouverture, à 9 heures, le lundi matin.
- Le gain relatif (ie qui peut être positif ou négatif) G à un jeu de hasard.
- Le nombre N de descendants d'un couple de lapins après 1 an.
- La hauteur h de la tige d'une plante, 10 jours après que le début de l'expérience, quand on a planté une graine.

Dans ce chapitre, on formalise le concept de variable aléatoire et on commence leur étude.

Propriétés des événements associés à une variable aléatoire

Soit $(\Omega, \mathcal{P})$ un espace probabilisé fini.

Soit E un ensemble.

Soit $X : \Omega \rightarrow E$ une variable aléatoire.

Soient $A, B \subset E$ et soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E .

Unions

- $(X \in A \cap B) = (X \in A) \cap (X \in B)$
- $\left(X \in \bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} (X \in A_i)$

Intersections

- $(X \in A \cup B) = (X \in A) \cup (X \in B)$
- $\left(X \in \bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} (X \in A_i)$

Unions disjointes

- $(X \in A \sqcup B) = (X \in A) \sqcup (X \in B)$
- $\triangleright \left(X \in \bigsqcup_{i \in I} A_i\right) = \bigsqcup_{i \in I} (X \in A_i)$

$\triangleright$ Donc, si I est fini, on a

$$P\left(X \in \bigsqcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} P(X \in A_i).$$

Systèmes complets d'événements

- $(X \in A) = \bigsqcup_{a \in A} (X = a)$
- $\triangleright$ Si I est fini, alors

$$(A_i)_{i \in I} \text{ partition de } E \implies \left((X \in A_i)\right)_{i \in I} \text{ système complet d'événements.}$$

$\triangleright$ En particulier, $\left((X = a)\right)_{a \in \text{im } X}$ est un système complet d'événements.

Restriction à l'arrivée

- $(X \in E) = \Omega$ et $(X \in \emptyset) = \emptyset$
- $(X \notin A) = \overline{(X \in A)}$
- $(X \in \text{im } X) = \Omega$
- $\triangleright (X \in A) = (X \in A \cap \text{im } X)$
 $\triangleright$ Plus généralement, si E' contient l'image de X , ie si $\text{im } X \subset E' \subset E$, $(X \in A) = (X \in A \cap E')$

Avec la variable aléatoire image

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

On considère la variable aléatoire image $f(X) : \Omega \rightarrow F$.

Soit $B \subset F$.

- $(f(X) \in B) = (X \in f^{-1}(B))$
- Si $y \in F$, $(f(X) = y) = (X \in f^{-1}(\{y\})) = \bigsqcup_{x \in E / f(x)=y} (X = x)$

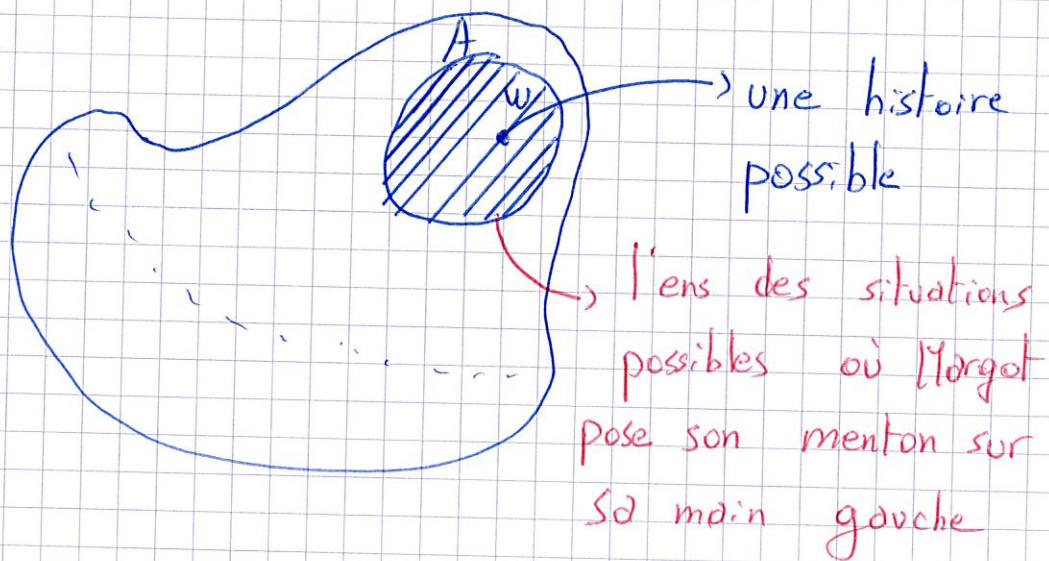
ch 33

Variables Aléatoires

Cpt de probas

- On not Ω l'univers (des possibles)
- Si $w \in \Omega$, on dit que w est une issue ou que w est une situation (possible)
- Si $A \subset \Omega$: on dit que A est un év^{nt}

(dⁿ)



- On a accès à $P(A)$ qui est en qq sorte le volume relatif de A dans Ω
- ⚠ On dit que A év^{nt} est négligeable $\sum_{s \in A} P(A) = 0$
- ⚠ On dit que A est impossible $\sum_{s \in A} P(A) = 0$
- ⚠ A impossible $\Rightarrow A$ négligeable (rppq F en gal)

Données : • $(\Omega, \mathcal{P}(\cdot))$ est un espace probabilisé fini, (donc Ω fini, $\Omega \neq \emptyset$)

• E, F ens $\neq \emptyset$ qq

I Rappels ensemblistes

Ocsd

$$f : E \rightarrow F$$

$$A, B \subset F$$

$(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de F

On a

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

$$(f^{-1}(A \cap B)) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \text{ donc :}$$

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \sqcup f^{-1}(B)$$

$$\text{Et : } f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i)$$

$$f^{-1}\left(\bigsqcup_{i \in I} A_i\right) = \bigsqcup_{i \in I} f^{-1}(A_i)$$

$$\text{Enfin : } f^{-1}(F) = E$$

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

II Variables aléatoires

1) Exemples introductifs

On lance deux dés (= l'expérience aléatoire)

On note S la somme des (n° des) faces obtenues.

M la $\oplus$ grande des faces

m la $\oplus$ petite _____

questions naturelles :

- Combien valent S , M et m en moyenne ?
($\rightarrow$ espérance)

- Je sais que S vaut en moyenne : 7
est-ce que en gén, S est proche de 7 ?
($\rightarrow$ écart type)

- Est-ce que S , M et m sont indépendantes

NON

- (*) Mieux : S et M ne sont pas indépendantes

- (*) De m : S et m ne sont pas indépendantes
(ex : $m = 6 \Rightarrow S = 12$)

- (*) Et : m et M ne sont pas indépendantes

Lesquels sont les $\oplus$ dépendants ? ($\rightarrow$ covariance)

2) Définitions

a) Variables aléatoires

Déf : • Une variable aléatoire dans E
(définie sur l'esp $(\Omega, \mathcal{P})$)
est une application de Ω dans E

On les note souvent $X, Y, Z, T, \dots$

• On note $VA(E)$ l'ens des variables aléatoires dans E .

• Si $X \in VA(E)$ ie si $X: \Omega \rightarrow E$

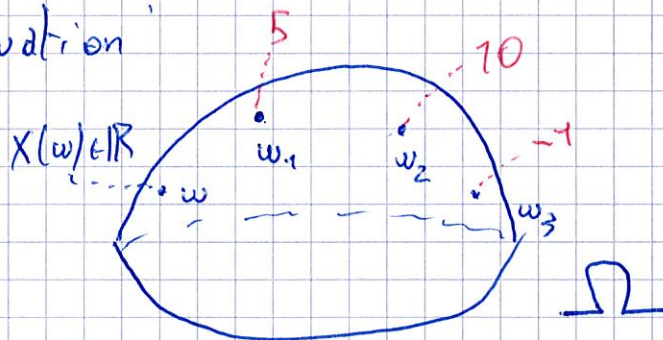
On note X VA dans E

• Quand X VA dans E et qd $E \subset \mathbb{R}$, on dit q X est une VA réelle et on note $X \text{ VAR}$ si $X \in VA(\mathbb{R})$

Exemples

• Une VAR est donc un nombre (réel) qui dépend de la situation

• (dⁿ)



- Dans l'exemple introductif (noté $\textcircled{\text{ex}}$), S , M , et m sont des VAR

- Ici on prend $\Omega := \llbracket 1, 6 \rrbracket^2$
(c'est l'ens des issues possibles)
muni de la proba uniforme P ie def par :

$$\forall w \in \Omega, P(\{w\}) = \frac{1}{|\Omega|}$$

Astuce : imaginez qu'un des dés est rouge et l'autre est vert.
Si le dé rouge "vaut x " et le vert "vaut y ", l'issue de l'exp aléatoire est (x, y)

Ou : on imagine que l'un des dés touche la table en 1^{er} forcément et on choisit ce dé pour la 1^{re} coordonnée de l'issue)

(ou : on prend $\Omega' := \underbrace{\mathcal{P}_1(\llbracket 1, 6 \rrbracket)}_{\#6} \sqcup \underbrace{\mathcal{P}_2(\llbracket 1, 6 \rrbracket)}_{\# \binom{6}{2} = 15}$)

total : $\textcircled{\#21}$

De quelle probabilité munit-on Ω ?

On veut $P(\{\{1, 2\}\}) = P(\{\{1, 6\}\})$

$\downarrow w$ Δ $P(w) \rightarrow \text{non} / P(\{w\}) \rightarrow \text{ou}$

mais $P(\{\{-1\}\}) \neq P(\{\{3, -1\}\})$

$$(P(\{\{-1\}\})) = \frac{1}{2} P(\{\{3, -1\}\})$$

Donc $P(\cdot)$ définie pour Ω' serait $\oplus$ compliquée

b) image d'une VA

Def : Soit X une VA dans E (ie soit $X: \Omega \rightarrow E$)

L'image de X est $X(\Omega) := \{X(\omega), \omega \in \Omega\}$

Rq : • On a $X(\Omega) \subset E$

• On a $X(\Omega)$ est fini

• Qd on étudie une VA X , la 1ère
q^o à se poser est qui est $X(\Omega)$?

(exi) $\textcircled{T} \quad S(\Omega) = \llbracket 2, 12 \rrbracket$

(on a $S: \llbracket 1, 6 \rrbracket^2 \longrightarrow \mathbb{N}; m: \llbracket 1, 6 \rrbracket^2 \longrightarrow \mathbb{N}$
 $(i, j) \longmapsto i+j \quad (i, j) \longmapsto \min(i, j)$)

$m(\Omega) = \llbracket 1, 6 \rrbracket$ et $M(\Omega) = \llbracket 1, 6 \rrbracket$

3) VA remarquables

a)!! VA indicatrice d'un évt.

Déf: Soit $A \subset \Omega$ un évt

La VA indicatrice de A , notée 1_A est la VA dans $\{0,1\}$ définie par

$$1_A : \Omega \longrightarrow \{0,1\}$$
$$w \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } w \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Rq: Si $A \neq \emptyset$ et si $A \neq \Omega$, $1_A(\Omega) = \{0,1\}$

Si $A \neq \emptyset$: $1_A(\Omega) = \{0\}$,

Si $A = \Omega$, $1_A(\Omega) = \{1\}$

Exi : OCSd

A_1 : "J'ai tiré un 3"

A_2 : "La somme des dés est ≥ 5 "

On a $1_{A_2} \left(\begin{matrix} w \\ \Omega \end{matrix} \right) = 1_{A_2} \left(\begin{matrix} (3,4) \\ \Omega \end{matrix} \right) = 1$

$\Omega = \llbracket 7, 6 \rrbracket^2$

b) VA cste

C'est une VA du type $\tilde{\sigma}_0: \Omega \rightarrow E$
 $w \mapsto \sigma_0$

où $\sigma_0 \in E$

On la note également σ_0

h) Évts associées à une VA

a) notations

Soit X une VA dans E

Notation n°1

Soit $a \in E$, on note $(X=a)$ ou $\{X=a\}$
est l'événement "la VA X vaut a "

(EXi) Qu'est ce que l'évt $(S=3)$?
⚠ On cherche une partie
de $\llbracket 1,6 \rrbracket^2$

$$\text{C'est } (S=3) = \{(1,2), (2,1)\}$$

Plus formellement :

$$(X=a) := \{w \in \Omega \mid X(w) = a\}$$

Notation n°2

Soit $A \subset E$. On note $(X \in A)$ ou $\{X \in A\}$
l'événement " $\forall \omega \in \Omega$ X a pris une valeur dans A "

(ex) $(S \in \{2, 3, 4\}) = \{(1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (2,2), (3,1)\}$

Plus formellement, on pose $(X \in A) := \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$

Rq : Ainsi, on a $(X \in A) = X^{-1}(A)$
(ie $X^{(-1)}[A]$)

$(X=0) = X^{-1}(\{0\})$

Notation 3

Si X VAR et si $a \in \mathbb{R}$, on pose

$(X \geq a)$ $:= (X \in [a; +\infty[)$

qu'on note aussi $\{X \geq a\}$

De m^{me} : $(X \leq a)$, $(X < a)$, $(X > a)$, etc

b) Soit $E_1, \dots, E_p$ un recouvrement disjoint de E .

Alors la famille $\{X \in E_1\}, \{X \in E_2\}, \dots, \{X \in E_p\}$ est un SCE.

D/2) Déjà, il faut mq si $a \neq a' \in E$, alors $(X=a)$ et $(X=a')$ sont disjoints.

ORPA et Orq $(X=a) \cap (X=a') \neq \emptyset$

On fixe $w \in (X=a) \cap (X=a')$. $\hat{c} w \in (X=a)$,

on a $X(w)=a$. De $m : X(w)=a'$. Donc $a=a'$

(Abs)

$$\text{Mq } \bigcup_{a \in X(\Omega)} (X=a) = \Omega$$

$\subseteq$: ok

$\supseteq$: Soit $w \in \Omega$.  On pose $a := X(w)$

On a $w \in (X=a)$. De ④, on a $a \in X(\Omega)$

Ainsi : $\exists a \in X(\Omega) : w \in (X=a)$

cl : on a $w \in \bigcup_{a \in X(\Omega)} (X=a)$ 

(E_{x_i})

On a $\left((m=i) \right)_{i \in [1,6]}$ forment un SCE

De $\overline{m} : \left((S_{\text{pair}}), (S_{\text{impair}}) \right)$ SCE

Corollaire

Soit X VA dans E .

Fixons $E' \subset E$ tq $\begin{cases} 1^\circ) E' \text{ fini} \\ 2^\circ) X(\Omega) \subset E' \end{cases}$

Soit A un év^t quelc. Alors.

$$1) P(A) = \sum_{x \in E'} P(A \cap (X=x))$$

$$2) P(A) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(A \cap (X=x))$$

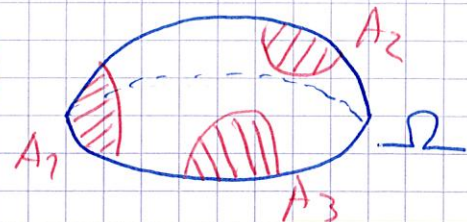
D/ 1) On a $\Omega = \bigcup_{x \in E'} (X=x)$

$$\begin{aligned} \text{Donc } A \cap \Omega &= A \cap \left(\bigcup_{x \in E'} (X=x) \right) \\ &= \bigcup_{x \in E'} A \cap (X=x) \end{aligned}$$

or, $A_1, \dots, A_p$ év^{nts} 2 à 2 disjoint

$$P\left(\bigcup_{i=1}^P A_i\right) = \sum_{i=1}^P P(A_i)$$

(dⁿ)



Donc $A = \sum_{x \in F'} P(A \cap (x=x))$ puisque E' est fini

2) 1) avec $E' = \chi(\frac{P}{2})$ ■

c) propriétés de ces évts (T)

- $(X \in A \cup B) = (X \in A) \cup (X \in B)$

D/ $(X \in A \cup B) = X^{-1}(A \cup B) = X^{-1}(A) \cup X^{-1}(B)$
 $= (X \in A) \cup (X \in B)$

- $A, B \subseteq E$ disjointes $\Rightarrow (X \in A)$ et $(X \in B)$

D/ $(X \in A) \cap (X \in B) = X^{-1}(A) \cap X^{-1}(B)$

$= X^{-1}(A \cap B) = X^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ ■

- Meux $(X \in A) \cap (X \in B) = (X \in A \cap B)$

- Ainsi : $(X \in A \cup B) = (X \in A) \cup (X \in B)$

- Tout ceci se généralise aux famille qq.

(ex : $(X \in \bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} (X \in A_i)$)

Fait

Soit x VA dans E et soit $A \subseteq E$. Alors

$$1) (x \in A) = (x \in A \cap X(\Omega))$$

$$2) \text{ Soit } E' \text{ tq } X(\Omega) \subseteq E' \subseteq E. \text{ On a } (x \in A) = (x \in A \cap E')$$

Exi

$$\begin{aligned} (S_{\text{pair}}) &= (S \in 2\mathbb{Z}) \\ &= (S \in 2\mathbb{Z} \cap S(\Omega)) \uparrow \\ &\quad \text{''} \\ &\quad [2, 12] \\ &= (S \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}) \end{aligned}$$

D/

$$2) \bullet \text{ On a } B \subseteq C \text{ alors } (x \in B) \subseteq (x \in C)$$

$$\text{Donc } (x \in A \cap E') \subseteq (x \in A).$$

$$\bullet \text{ Rqpt: Soit } w \in (x \in A); \text{ on a } \underline{X(w) \in A}$$

$$\text{or } X(w) \in X(\Omega) \text{ et } X(\Omega) \subseteq E'.$$

$$\text{Donc } X(w) \in E'$$

$$\text{Donc } X(w) \in A \cap E' \text{ ie } w \in X^{-1}(A \cap E')$$

$$\text{ie } w \in (x \in A \cap E') \quad \blacksquare$$

Rq: On a

$$A \subset B \Rightarrow (X \in A) \subset (X \in B)$$

C'est la croissance du tiré en arrière

$$(X \in E \setminus A) = \overline{(X \in A)}$$

Fait Soit X VA dans E
 $A \subset E$

Alors : 1) $(X \in A) = \bigcup_{a \in A} (X = a)$

2) si A est fini : $P(X \in A) = \sum_{a \in A} P(X = a)$

D/ 1) On a $A = \bigcup_{a \in A} \{a\}$

Donc $(X \in A) = \bigcup_{a \in A} (X \in \{a\}) = (X = a)$
 $= \bigcup_{a \in A} (X = a)$

2) On passe 1) à $P(\cdot)$ ce qui est possible
car la réunion est finie et disjointe ■

5) Structure sur les VAR

Si $X, Y \text{ VAR}(\mathbb{R})$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

a) $X + \lambda Y \text{ VAR}(\mathbb{R})$

b) $XY \text{ VAR}(\mathbb{R})$

c) $\tilde{X} \in \text{VAR}(\mathbb{R})$

Ainsi : $\text{VAR}(\mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$ -algèbre et en particulier, c'est un $\mathbb{R}$ -ev.

6) Loi d'une VA

a) Déf.

Déf.

Soit X VA dans E

La loi (de probabilité) de X , notée P_X , est l'appl^o de E dans $[0,1]$ def par

$$\begin{aligned} P_X : E &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longmapsto P(X=x) \end{aligned}$$

b) Une propriété

Fait :

Soit X VA dans E

Soit $A \subset E$ finie. Alors :

$$P(X \in A) = \sum_{x \in A} P_X(x)$$

D) On vient de voir que $P(X \in A) = \sum_{x \in A} P(X=x)$
 $\downarrow$
 $P_X(x)$

c) La loi en pratique

On représente P_X sous la forme d'un tableau.

(EX) Représentons P_m

$k \in m(\Omega)$	1	2	3	4	5	6
$P(m=k)$	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

on a $\{m=6\} = \{(6,6)\}$

et $\{m=5\} = \{(5,5), (5,6), (6,5)\}$

et $\{m=4\} = \{(4,4), (4,5), (4,6), (5,4), (6,4)\}$

$\vdots$

(AF) Loi de M ? Loi de S ?

d) Loi conditionnelle

Soit A évé tel $P(A) > 0$.

Soit X VA dans E .

La loi de X conditionnée à A , notée $\underline{P_{X|A}}$, est

def par
$$P_{X|A} : E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto P(X=x | A)$$

7) Image d'une VA par une application

a) définition

Déf : Soient E, F ens.

Soit X VA dans E

Soit $f : E \longrightarrow F$

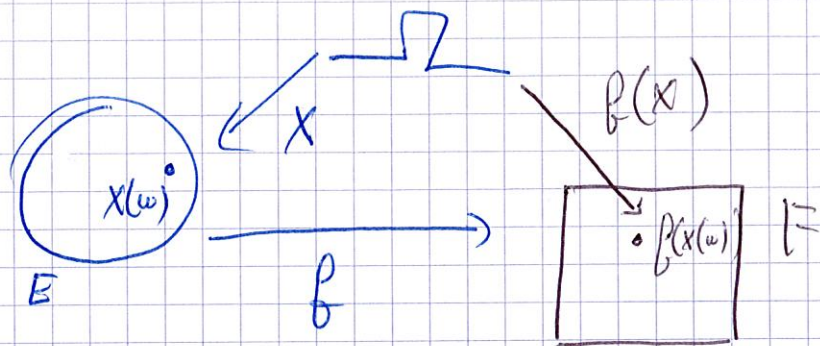
L'image de X par f , notée $f(X)$, est la

VA dans F def par

$$f(X) : \Omega \longrightarrow F$$
$$w \longmapsto f(X(w))$$

Rq : Autrement dit, on a $f(X) = f \circ X$

(dⁿ)



(Exi)

S VA dans $\mathbb{I}^2, \mathbb{I}^2$; $f = \exp$

On obtient une VA $\exp(s)$ notée également e^s

On a e^s VAR et $e^s(\Omega) = \exp(s(\Omega))$

On a $(e^s = e^h) = (s = h) = \{e^i ; i \in \mathbb{I}^2, \mathbb{I}^2\}$

car $\exp$ est injective et donc, si $w \in \Omega$,

$$w \in (e^s = e^h) \Leftrightarrow e^s(w) = e^h(w) \Leftrightarrow \exp(s(w)) = \exp(h) \\ \Leftrightarrow s(w) = h$$

D'où $(e^s = e^h) = (s = h)$

b) Propriétés de la loi image

Soit X VA dans E

Soit $f: E \rightarrow F$

On dispose de $f(X)$ VA dans F

Fait 1 : Soit $B \subset F$. On a

$$(\beta(x) \in B) = (x \in \beta^{-1}(B))$$

Fait 2 : Soit $y \in F$ Alors :

$$1) (\beta(x) = y) \Leftrightarrow (x \in \beta^{-1}(\{y\}))$$

$$2) a) (\beta(x) = y) = \bigsqcup_{\substack{x \in E' \text{ tq} \\ \beta(x) = y}} (X = x)$$

si E' est tq $X(\Omega) \subset E' \subset E$

$$b) (\beta(x) = y) = \bigsqcup_{\substack{x \in X(\Omega) \text{ tq} \\ \beta(x) = y}} (X = x)$$

D/ Fait 1 On a $(\beta(x) \in B) = \beta(x)^{-1}(B)$

$$= (\beta \circ X)^{-1}(B) = X^{-1}(\beta^{-1}(B))$$
$$= (x \in \beta^{-1}(B))$$

D/ Fait 2

$$1) \text{ ok car } (\beta(x) = y) = (\beta(x) \in \{y\})$$

$$2) a) \text{ Soit } E' \text{ tq } X(\Omega) \subset E' \subset E$$

On a vu que $(x \in A) = (x \in A \cap E')$ quel que soit $A \subset F$

Donc ici : $(X \in \beta^{-1}(\{y\})) = (X \in \beta^{-1}(\{y\}) \cap E')$

On a vu $(X \in A) = \bigsqcup_{x \in A} (X=x)$

Donc ici : $(X \in \beta^{-1}(\{y\}) \cap E')$

$$= \bigsqcup_{x \in \beta^{-1}(\{y\}) \cap E'} (X=x)$$

$$= \bigsqcup_{\substack{x \in E' \text{ tq} \\ \beta(x)=y}} (X=x) \quad \blacksquare$$

b) On prend $E' = X(\Omega) \quad \blacksquare$

Corollaire : La loi $P_{\beta(x)}$ de $P(x)$ vérifie

$$P_{\beta(x)}(y) = \sum_{\substack{x \in E' \text{ tq} \\ \beta(x)=y}} P_X(x)$$

Si E' fini tq.

$$X(\Omega) \subset E' \subset E$$

D/ ok : on pose le fait $\mathbb{Z}$ à $P(\cdot) \quad \blacksquare$

c) Exemple

Soit X VAR dont loi est

$k \in X(\Omega)$	-2	-1	0	1	2
$P(X=k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

On pose $Y := X^2$

On a) $Y(\Omega) = \{0, 1, 4\}$

et de ④ :

$$\begin{aligned} \bullet P(Y=1) &= P(X^2=1) \\ &= P(X=1) \cup P(X=-1) \\ &= \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \text{ tq} \\ x^2=1}} P(X=x) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\textcircled{*} P(Y=1) = P(X=1) + P(X=-1) = \frac{7}{12}$$

$$\textcircled{*} P(Y=0) = P(X=0) = \frac{1}{6}$$

D'où

$k \in X(\Omega)$	0	1	4
	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{4}$

8) VA ayant $\bar{m}$ loi

a) Caractère et définition

Soit $X: \Omega \rightarrow E$ VA définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$
 $Y: \Omega' \rightarrow E$ VA définie sur $(\Omega', \mathcal{P}')$

Déf^o : X et Y ont $\bar{m}$ loi ss: $P_X = P_Y$.

On note $X \sim Y$

b) image des VA ayant $\bar{m}$ loi

Prop : Soit $f: E \rightarrow F$ Alors :

$$X \sim Y \Rightarrow f(X) \sim f(Y)$$

⚠ Attention : si $X \sim Y$ en toute rigueur, on n'a pas
 $X(\Omega) = Y(\Omega)$

Ex : $\Omega = \{0, 1\}$ muni de la proba Uniforme

$$\begin{aligned} X: \Omega &\rightarrow \Omega \\ \omega &\mapsto \omega \end{aligned}$$

$$\text{Or, } \begin{cases} X(\Omega) = \{0, 1\} \\ (X=0) = \{0\} \\ (X=1) = \{1\} \end{cases}$$

$$\text{On a } P_X(0) = \frac{1}{2}, P_X(1) = \frac{1}{2}$$

$$\forall x \neq 0, 1, P_x(x) = 0$$

• $\Omega' = \{0, 1, 2\}$ munide P' def par

$$P(\{0\}) = \frac{1}{2}$$

$$P(\{1\}) = \frac{1}{2}$$

$$P(\{2\}) = 0$$

$$\text{Ocsd } Y: \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$$

On a $P_Y = P_X$ ie $\forall x \in \mathbb{R}, P(X=x)$

$$= P(Y=x) \quad \text{Mais}$$

$$Y(\Omega) \neq \{0, 1\}$$

D On pose $E' = X(\Omega) \cup Y(\Omega)$

On a E' fini.

Soit $y \in E'$, on a

$$P(\beta(x) = y) = \sum_{\substack{x \in E' \\ \beta(x) = y}} P_x(x) = P_y(y)$$

$$\dots = P(\beta(y) = x)$$

C

$$P_{\beta(x)} = P_{\beta(y)}$$

II Couples de VA

1) Notation

Notation: Soient $X, VA \rightarrow E$ (ie $X: \Omega \rightarrow E$)
 $Y, VA \rightarrow F$ (ie $Y: \Omega \rightarrow F$)
couple

On appelle VA et on note (X, Y)

la VA dans $E \times F$ définie par

$$\forall w \in \Omega, (X, Y)(w) = (X(w), Y(w))$$

2) Image du couple

Fort Soit X, VA dans E
Soit Y, VA dans F

$$1) (X, Y)(\Omega) \subseteq X(\Omega) \times Y(\Omega)$$

2) En général, on n'a pas l'égalité

D) 1) Soit $\omega \in (X, Y)(\Omega)$ On écrit

$$\omega = (X(w), Y(w)) \text{ avec } w \in \Omega$$

$$\hat{C} \begin{matrix} X(w) \in X(\Omega) \\ Y(w) \in Y(\Omega) \end{matrix} \text{ on } \omega \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$$

exemple idiot : on prend $X=Y$. On a alors
 $(X,Y)(\Omega) = \{(X(\omega), Y(\omega)) ; \omega \in \Omega\}$

ex 2 (ex)

On a $M(\Omega) = [1,6]$ et $m(\cdot) = [1,6]$

Donc $(m,M)(\Omega) \subset [1,6]^2$

Mais : $(5,4) \notin (m,M)(\Omega)$

car $(m=5) \cap (M=4) = \emptyset$

3) Évts associés au couple

a) Notations

Si $A \in \mathcal{F}$ et si $B \in \mathcal{F}$, on pose :

$$(X \in A, Y \in B) := \{(X,Y) \in A \times B\}$$

Fact

$$(X \in A, Y \in B) = (X \in A) \cap (Y \in B)$$

D Soit $\omega \in \Omega$, On a

$$\omega \in (X \in A, Y \in B) \Leftrightarrow \omega \in \{(X,Y) \in A \times B\}$$

$$\Leftrightarrow (X,Y)(\omega) \in A \times B \Leftrightarrow (X(\omega), Y(\omega)) \in A \times B$$

$$(=\Rightarrow) X(\omega) \in A \quad \text{et} \quad X(\omega) \in B$$

$$(=\Rightarrow) \omega \in (X \in A) \quad \text{et} \quad \omega \in (Y \in B)$$

$$(=\Rightarrow) \omega \in (X \in A) \cap (Y \in B) \quad \blacksquare$$

Si $a \in E$ et si $b \in F$, on pose

$$(X=a, Y=b) := ((X, Y) = (a, b))$$

Fait : $(X=a, Y=b) = (X=a) \cap (Y=b)$.

D/ ok $\blacksquare$

b) SCE associée à un couple

Fait : $((X=z, Y=y))_{\substack{x \in E' \\ y \in F'}}$ SCE

où $X(\Omega) \subset E'$
 $Y(\Omega) \subset F'$

D/ • On a $(X, Y)(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$
 $\subset E' \times F'$

• Donc DALC : $((X, Y) = (x, y))_{(x, y) \in E' \times F'}$ SCE

c

c) qq propriétés

Fait

$$(x \in A, y \in B) = \bigcup_{\substack{a \in A \\ b \in B}} (x=a, y=b)$$

D/ $A \times B = \bigcup_{\substack{a \in A \\ b \in B}} \{(a, b)\}$

$$\begin{aligned} \text{Donc } (x, y) &\in A \times B \\ &= \bigcup_{\substack{a \in A \\ b \in B}} ((x, y) \in \{(a, b)\}) \\ &= \bigcup_{\substack{a \in A \\ b \in B}} ((x, y) = (a, b)) \end{aligned}$$

Prop : Soit X, Y VAR et soit $a \in \mathbb{R}$. Alors :

$$P(X+Y=a) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega) \\ x+y=a}} P(X=x, Y=y)$$

D/

Astuce : la VA $X+Y$ est une VA image de la VA (X, Y)

Ou so

$$s : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto x+y$$

$\hat{C}(x, y)$ est une VA dans $\mathbb{R}^2$. On peut donc considérer la VA image $S((x, y))$ qu'on note $S(X, Y)$. C'est une VAR.

On a $S(X, Y) = X + Y$

(D/ Soit $\omega \in \Omega$, on a $(S(X+Y))(\omega) = S((X, Y)(\omega))$
 $= S(X(\omega), Y(\omega))$
 $= X(\omega) + Y(\omega)$
 $= X+Y(\omega)$ $\square$ Γ

Donc $(X+Y = 0) = (S(X, Y) = 0)$

$(\beta(X)=b) = \bigcup_{\substack{x \in E' \\ \beta(x)=b}} (X=x)$ $\nearrow$ $\bigcup_{\substack{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ x+y=d}} (X=x, Y=y)$

$X(\Omega) \subset E'$

$X \rightarrow X+Y$

$\beta \rightarrow S$

$b \rightarrow 0$

$E' \rightarrow X(\Omega) \times Y(\Omega)$

$= \bigcup_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega) \\ x+y=0}} (X=x, Y=y)$

$\hat{C}$ l'union disjointe est finie : on passe à $P(\cdot)$.

D'où : $P(X+Y=0) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega) \\ x+y=0}} P(X=x, Y=y)$ $\square$

h) Loi conjointe

a) C'est la loi $P_{(X,Y)}$ du couple

$$\text{I.e c'est } P_{(X,Y)} : E \times F \longrightarrow [0,1] \\ (a,b) \longmapsto P(X=a, Y=b)$$

b) idée

- C'est un tableau à doubles-entrées
- Ce tableau décrit comment X et Y interagissent
- Si je connais la loi de (X,Y) , je peux en déduire la P_X et P_Y
- Le contraire est impossible : connaissant P_X et P_Y , on ne peut pas trouver $P_{(X,Y)}$

c) exemple

(Exi)

Calculons

$$P_{(M,H)}$$

$$\text{On a } m(\Omega) = H(\Omega) = [1,6]$$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	
1	$1/36$	$2/36$	$2/36$	$2/36$	$2/36$	$2/36$	$11/36$
2	0	$1/36$	$2/36$	$2/36$	$2/36$	$2/36$	$\frac{9}{36}$
3	0		$1/36$	$2/36$	$2/36$	$2/36$	$\frac{7}{36}$
4	0	0	0	$1/36$	$2/36$	$2/36$	$\frac{5}{36}$
5	0	0	0	0	$1/36$	$2/36$	$\frac{3}{36}$
6	0	0	0	0	0	$1/36$	$\frac{1}{36}$
	$1/36$	$3/36$	$5/36$	$7/36$	$9/36$	$11/36$	

$$P(m=1)$$

$$P(m=2)$$

$$P(M=1) \dots$$

d) Contre-exemple

On peut avoir le tableau

			$\frac{11}{36}$
		$\frac{5}{36}$	
	$\frac{3}{36}$		
$\frac{1}{36}$			

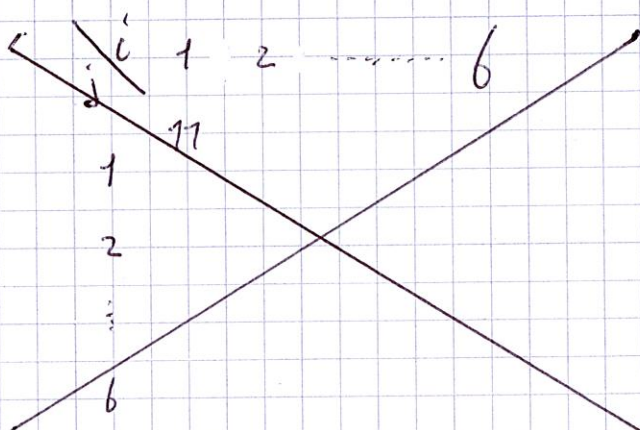
dont les sommes des lignes et celle des colonnes
sont les $\bar{m}$ que pour c)

Ce tableau est celui de $P_{(m, 7-m)}$

En effet:

$$(*) \quad i \neq j$$

Quelle est la loi $P_{(m,m)}$?



(c'est faux)

Prop: $\exists x X, Y, X', Y'$ VA tq

$$P_X = P_{X'}$$

$$P_Y = P_{Y'} \quad \text{mais} \quad P_{(X,Y)} \neq P_{(X',Y')}$$

5) Lois marginales

Déf: Les lois marginales de (X, Y) sont P_X et P_Y

Prop:

- Connaissant la loi conjointe de (X, Y) , je peux retrouver les lois de X et Y

• Soit $X \text{ VA ds } E$, $Y \text{ VA ds } F$

On a alors :

$$1) \forall x \in E, \quad P_X(x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P_{(X,Y)}(x,y)$$

$$2) \text{ de } \bar{m} : \forall y \in F, \quad P_Y(y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P_{(X,Y)}(x,y)$$

D/ 1) Soit F' fini tq $Y(\Omega) \subset F' \subset F$

$$\text{On sait que } \Omega = \bigsqcup_{y \in F'} (Y=y)$$

$$(D/ \Omega = (X \in F')) = \left(Y \in \bigsqcup_{y \in F'} \{y\} \right)$$

$$= \bigsqcup_{y \in F'} Y \in \{y\} = \bigsqcup_{y \in F'} (Y=y)$$

■)

Rq : C'est le SE associé à Y

Soit $x \in E$

$$\underline{\text{D'où}} : \underbrace{(X=x) \cap \Omega}_{=(X=x)} = (X=x) \cap \bigsqcup_{y \in F'} (Y=y)$$

$$= \bigsqcup_{y \in F'} \underbrace{(X=x) \cap (Y=y)}_{(X=x, Y=y)}$$

$\hat{C}$ l'union est finie et disjointe :

on passe à $P(\cdot)$

D'où

$$P(X=x) = \sum_{y \in F} P(X=x, Y=y)$$

$P_X(x)$

$P_{(X,Y)}(x,y)$

2) De $\bar{m}$

IV) Indépendance des VA

1) Rappels sur l'indépendance des évs ⚠

a) Cas de deux évs

Soient A, B deux évs, ie soient $A, B \subset \Omega$

Déf : On dit que A et B sont indépendants

Δ
ssi

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Rq ⚠ A et B indépendants $\neq$ A, B incompatibles

(ex) Ocsd $A_i =$ "le premier dé fait z "
 $B_i =$ "le z^e ———— h "

On a $A = \{(2,2), (2,1), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)\}$
 $B = \{(1,4), \dots, (1,6)\}$

$$\text{On a } P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = \dots = \frac{1}{6}$$

$$\text{or, } A \cap B = \{(2,4)\} \text{ donc } P(A \cap B) = \frac{1}{36}$$

cl : On a bien $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
ie A et B indépendants

(exo) Trouver des evt dans (Exi)
"qui impliquent les deux dés"

• DCsol $C :=$ "les deux dés sont impairs"

$D :=$ (5 impaire)

$$\text{On a } C = \{(1,1), (1,3), \dots\}$$

$$\text{et } D = \{(1,2), (1,4), \dots\}$$

On a $C \cap D = \emptyset$: C et D sont incompatibles

b) indépendance multiple

Soient $A_1, \dots, A_n$ des évnts

⚠ Def° : On dit que $A_1, \dots, A_n$ sont (mutuellement) indépendants. Δ_{ssi}

$$\forall I \subset [1, n] \quad P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$$

- Rq: 1) La def° n'est pas $\forall i \neq j, A_j \text{ et } A_i \text{ indépendant}$
 2) La def° n'est pas non plus.

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \prod_{i=1}^n P(A_i) \quad \text{?}$$

Ex: A, B, C indépendants $\Rightarrow$

$$\begin{cases} A, B \text{ ind} \\ B, C \text{ ind} \\ B, A, C \text{ ind} \\ P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \end{cases}$$

Ex: OCSol $X \sim VA$ qui prend de façon équiprobable les valeurs 1, 2, 3, 4

$Y \sim \overline{m}$

(ie on pose $\Omega = [1, 4]^2$)

On pose

$$\begin{aligned} A &:= (X=1) \\ B &:= (Y=1) \\ C &:= (X+Y \text{ pair}) \end{aligned}$$

Déjà, initialement, on n'a pas $(A, B, C) \text{ ind}$

D/ On a $A \cap B \cap C = \{(1, 1)\}$

Donc $P(A \cap B \cap C) = 1/16$

De ④, $A = \{(1,1), (1,2), \dots, (1,4)\}$

Donc $P(A) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ De $\overline{m}$ pour B

Enfin, on a $C = \{(1,1), (1,3), (2,2), (2,4), (3,1), (3,3), (4,2), (4,4)\}$

D'où $P(C) = \frac{1}{2}$

Bilan, on a $P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \neq P(A \cap B \cap C)$

Mais :

① A, B indépendants

On a $A \cap B = \{(1,1)\}$

Donc $P(A \cap B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16} = P(A) \cdot P(B)$

On a

② A, C indépendants

On a $A \cap C = \{(1,1), (1,3)\}$

Donc $P(A \cap C) = \frac{1}{8}$, Ainsi $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$

③ B, C indépendants

De $\overline{m}$

De $\overline{m}$

c) Une remarque

si $P(B) > 0$, on pose $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

On a alors A, B indépendants $\Leftrightarrow P(A) = P(A|B)$

2) Indépendance de 2 VA

a) déf°

Déf°: Soit X VA ds E

Soit Y VA ds F

On dit que X et Y sont indépendants et

on note $X \perp\!\!\!\perp Y \overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\forall x \in E, \forall y \in F, P(X=x, Y=y) = P(X=x)P(Y=y)$$

Rq: • Ainsi, si $X \perp\!\!\!\perp Y$: connaissant P_X et P_Y ,
je peux retrouver la loi conjointe de $P_{(X,Y)}$

• Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, on a :

$P(x,y)$		$X =$					
		x_1	x_2	x_3	...		x_n
$Y =$	y_1	$P(Y=y_1) \times P(X=x_1)$	$P(Y=y_1) \times P(X=x_2)$	$P(Y=y_1) \times P(X=x_3)$	...		$P(Y=y_1) \times P(X=x_n)$
	y_2	$P(Y=y_2) \times P(X=x_1)$	$P(Y=y_2) \times P(X=x_2)$	...	...		$P(Y=y_2) \times P(X=x_n)$
	y_3	...	...	...	...		$P(Y=y_3) \times P(X=x_n)$
	.	.	.	.	.		.
	.	.	.	.	.		.
	y_n	$P(Y=y_n) \times P(X=x_1)$	$P(Y=y_n) \times P(X=x_2)$	$P(Y=y_n) \times P(X=x_3)$	...		$P(Y=y_n) \times P(X=x_n)$

b) Théorème 6.1

Th : Soit X VA ds E , Y VA ds F

Osq $X \perp\!\!\!\perp Y$

Alors

$$\forall A \subseteq E, \forall B \subseteq F, P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) P(Y \in B)$$

$D/\cdot D_{\text{éj}}'$: fixons E', F' finis tq

$$X(\Omega) \subset E'$$

$$Y(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$$

Ⓡ^x Avant de raisonner sur les probabilités,
on raisonne sur les évts

$$* \text{ On } \mathcal{D} \quad (X, Y) \in \mathcal{D} \subset X \times Y \quad \text{and} \quad (X, Y) \in \mathcal{D} \subset X \times Y$$

• On $\Rightarrow (x \in A, y \in B) \Rightarrow (x \in A) \cap (y \in B)$

$$\cdot \hat{C} \quad \chi(\Omega) \in E', \quad \text{on } \partial\Omega$$

$$(x \in A) = (x \in A \cap E')$$

Notions $A' = A \cap E'$ $B' := B \cap E'$

$$O_n \quad a) \quad (X \in A') = \bigcup_{a \in A'} (X = a)$$

• Done $(x \in A') \cap (y \in B') = \bigsqcup_{a \in A'} (x=a) \cap (y \in B')$

• Mais de m : $(Y \in B') = \bigcup_{b \in B} (Y = b)$

$$(x \in A') \cap (y \in B') = \bigcup_{\substack{a \in A' \\ b \in B'}} (x=a)(y=b)$$

- $\hat{C}$ l'union est finie et disjointe, on passe à P.

D'où $P(X \in A, Y \in B) = \sum_{\substack{a \in A \\ b \in B}} P(X=a, Y=b)$

$\underbrace{\quad}_{\text{or } X \perp\!\!\!\perp Y} \quad \underbrace{\quad}_{\text{or } X \perp\!\!\!\perp Y}$

$$= \sum_{a \in A'} P(X=a) \times \sum_{b \in B'} P(Y=b)$$

car c'est une $\sum$ à variables séparées.

En fin :

$$\sum_{a \in A'} P(X=a) = P\left(\bigcup_{a \in A'} (X=a)\right)$$

$$= P(X \in A') = P(X \in A)$$

c) reformulation

Prop : (T) $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow (X \in A) \text{ et } (Y \in B) \text{ sont indépendants}$

D/ ok ■

3!!) Transfert d'indépendance

Th : Soit X VA dans E
Soit Y VA dans F

Soient $f: E \rightarrow E'$ et $g: F \rightarrow F'$

Alors $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$

D/ Qsq $X \perp\!\!\!\perp Y$

Soient $x' \in E'$ et $y' \in F'$ Mg

$$P(f(X) = x', g(Y) = y')$$

$$= P(f(X) = x') \times P(g(Y) = y')$$



On regarde les év^{nts}

$$\text{On a } (f(X) = x', g(Y) = y')$$

$$= (f(X) = x') \cap (g(Y) = y')$$

$$\text{De } \textcircled{+} \quad (f(X) = x') = (X \in \overset{\text{noté } A}{f^{-1}(\{x'\})})$$

$$\text{et } (g(Y) = y') = (\underset{\text{noté } B}{Y \in g^{-1}(\{y'\})})$$

• $\hat{C}$ $X \perp\!\!\!\perp Y$, on a $P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) \times P(Y \in B)$

~~10~~

Rq: Dédurre de X qqch sur $f(X)$: c'est faire du transfert.

h) VA (mutuellement) indépendantes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

a) Déf

Def: Soient $X_1, \dots, X_n$ des VA dans $E_1, \dots, E_n$

On dit que $X_1, \dots, X_n$ sont (mutuellement) indépendantes et on note

$$\underline{X_1, \dots, X_n \perp\!\!\!\perp \prod_{i=1}^n E_i}$$

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n,$$

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i)$$

Rq: Ne pas confondre avec $X_1, \dots, X_n$ 2 à 2 deux indépendantes.

b) indépendance des sous-familles

Soient $X_1, \dots, X_n$ VA $\perp\!\!\!\perp$ dans $E_1, \dots, E_n$

Lemme 1 : $X_1, \dots, X_{n-1}$ sont indépendantes

D/ I Idée : On utilise le SCE associé à X_n

Où E'_n fini tq $X_n(\Omega) \subset E'_n \subset E_n$

On a $(\mathbb{R}^X)$ $(X_n = x_n)_{x_n \in E'_n}$ SCE

Soient $(d_1, \dots, d_{n-1}) \in E_1 \times \dots \times E_{n-1}$.

$$\begin{aligned} \text{Mq} \quad & P(X_1 = d_1, \dots, X_{n-1} = d_{n-1}) \\ &= \prod_{i=1}^{n-1} P(X_i = d_i) \end{aligned}$$



On bosse d'abord avec les évts

$$\begin{aligned} \text{On a} \quad & (X_1 = d_1, \dots, X_{n-1} = d_{n-1}) \\ &= \bigcap_{i=1}^{n-1} (X_i = d_i) \end{aligned}$$

Qu'on intersecte avec $\Omega = \bigcup_{x_n \in E'_n} (X_n = x_n)$

On obtient

$$(X_1 = a_1, \dots, X_{n-1} = a_{n-1})$$

$$= \left(\bigsqcup_{x_n \in E'_n} (X_n = x_n) \right) \cap \bigcap_{i=1}^{n-1} (X_i = a_i)$$

$$= \bigsqcup_{x_n \in E'_n} \left((X_n = x_n) \cap \bigcap_{i=1}^{n-1} (X_i = a_i) \right)$$

Comme l'union est finie et disjointe, on obtient:

$$P(X_1 = a_1, \dots, X_{n-1} = a_{n-1}) = \sum_{x_n \in E'_n} P(\dots)$$

$$= \sum_{x_n \in E'_n} P(X_n = a_n) \cdot P(X_1 = a_1) \cdot \dots \cdot P(X_{n-1} = a_{n-1})$$

$$= \prod_{i=1}^{n-1} P(X_i = a_i) \cdot \sum_{x_n \in E'_n} P(X_n = x_n)$$

→ vaut 1 car $E'_n = \bigsqcup_{x_n \in E'_n} \{x_n\}$

Lemme 2

$$\forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad X_1, \dots, X_p \text{ II}$$

D/ (rec) on suppose

Prop : Si $X_1, \dots, X_n \perp\!\!\!\perp$, alors
toute sous-famille de $(X_1, \dots, X_n)$
est formée de VA $\perp\!\!\!\perp$

Rq : Ainsi, on a mg

$$X_1, \dots, X_{n-1} \perp\!\!\!\perp \Rightarrow X_1, \dots, X_n \text{ 2 à 2 indep.}$$

c) Lemme de condition.

1) Premier lemme

Lemme

Où les deux VA $(X_1, \dots, X_p)$
ont valeurs dans $E_1 \times \dots \times E_p$ et $(X_{p+1}, \dots, X_n)$

ont valeurs dans $E_{p+1} \times \dots \times E_n$.

Où $X_1, \dots, X_n \perp\!\!\!\perp$

Alors : $\forall (a_1, \dots, a_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$,

$$\begin{aligned} P((X_1, \dots, X_p) = (a_1, \dots, a_p)) &\times P((X_{p+1}, \dots, X_n) = (a_{p+1}, \dots, a_n)) \\ &= P(X_1 = a_1, X_2 = a_2, \dots, X_n = a_n) \end{aligned}$$

D/ $\oplus$ $\otimes$ $\text{Osq}(-)$

$$\text{Hg } \forall (a_1, \dots, a_n) \in E_1 \times \dots \times E_n,$$

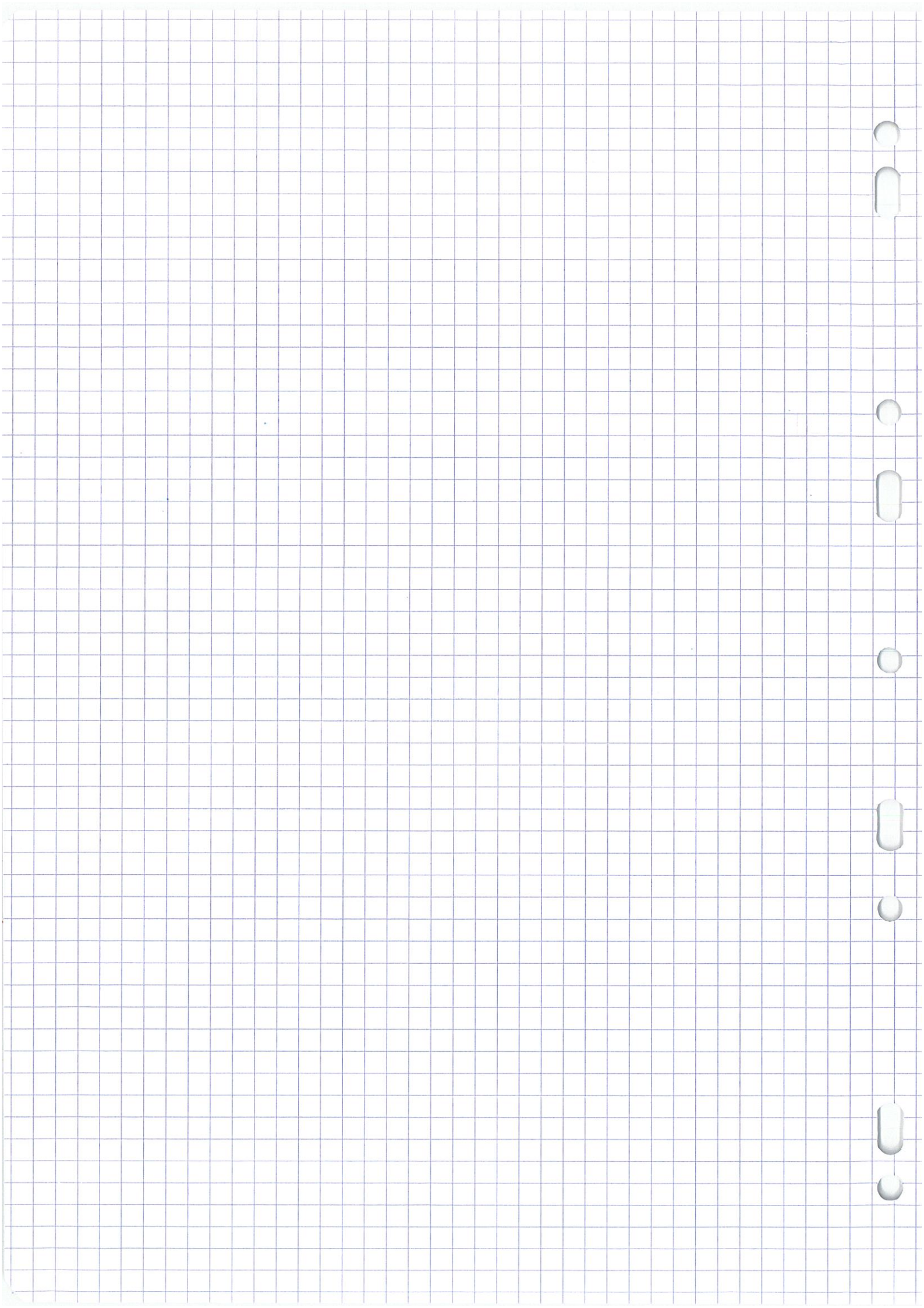
$$P((X_1, \dots, X_p) = (a_1, \dots, a_p)) \times P((X_{p+1}, \dots, X_n) = (a_{p+1}, \dots, a_n)) \\ = \prod_{i=1}^n P(X_i = a_i) = P(X_1 = a_1, \dots, X_n = a_n)$$

$\text{Hg } X_1, \dots, X_p \perp$

$$\text{Donc } P(X_1 = a_1, \dots, X_p = a_p) = \prod_{i=1}^p P(X_i = a_i) \\ = P((X_1, \dots, X_p) = (a_1, \dots, a_p))$$

$$\text{De } \overline{m} : P((X_{p+1}, \dots, X_n) = (a_{p+1}, \dots, a_n)) \\ = \prod_{i=p+1}^n P(X_i = a_i)$$

$$\text{al } P((X_1, \dots, X_p) = (a_1, \dots, a_p)) \\ \times P((X_{p+1}, \dots, X_n) = (a_{p+1}, \dots, a_n)) \\ = \prod_{i=1}^n (P(X_i = a_i)) = P(X_1 = a_1, \dots, X_n = a_n)$$



(ii) généralisation

Lemme : Soient $I_1, \dots, I_p \subset \llbracket 1, n \rrbracket$ non vides
et deux à deux disjoints

Pour $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on pose $Y_k := (X_i)_{i \in I_k}$;
(c'est une VA dans $\prod_{i \in I_k} E_i$)

Alors : $Y_1, \dots, Y_p$ sont indépendants

D/ $\S$ ok ■ $\ominus$

Rq ^(crit) : $\boxed{X, Y}, \textcircled{Z}, \boxed{U, V, W}, \boxed{T} \perp\!\!\!\perp$
 $\Downarrow$

$(X, Y, T), (U, W), Z \perp\!\!\!\perp$

d) thm fol

Th : Soient $X_1, \dots, X_n$ VA $\perp\!\!\!\perp$ ds $E_1, \dots, E_n$

Soient $A_1 \subset E_1, \dots, A_n \subset E_n$

Alors : $P(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i \in A_i)$

D/ rec

$n=2$: ok

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Osq le résultat vrai au rang n .

Montrons le au rang $(n+1)$

Soient $X_1, \dots, X_{n+1}$ VA II

Soient $A_1 \subset E_1, \dots, A_{n+1} \subset E_{n+1}$

Astuce : On a $(X_1, \dots, X_n)$ et X_{n+1} qui sont II

Donc, grâce au cas $n=2$, on a :

$$P\left((X_1, \dots, X_n) \in A_1 \times \dots \times A_n, X_{n+1} \in A_{n+1}\right)$$

$$= P\left((X_1, \dots, X_n) \in A_1 \times \dots \times A_n\right) \times P(X_{n+1} \in A_{n+1})$$

- De ④ $\left((X_1, \dots, X_n) \in A_1 \times \dots \times A_n\right) = (X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n)$

- Grâce au HR_n, on a $P(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i \in A_i)$

- Enfin

$$\begin{aligned} & \left((X_1, \dots, X_n) \in A_1 \times \dots \times A_n\right) \cdot X_{n+1} \in A_{n+1} \\ &= (X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n, X_{n+1} \in A_{n+1}) \end{aligned}$$

Corollaire : $X_1, \dots, X_n$ VA

$$A_1 \subset E_1, \dots, A_n \subset E_n$$

$X_1, \dots, X_n \perp\!\!\!\perp \Rightarrow$ les évs $(X_1 \in A_1), \dots, (X_n \in A_n)$
sont mutuellement indépendants

D/ Soit $I \subset \llbracket 1, n \rrbracket$

On sait que $(X_i)_{i \in I}$ est une famille de
VA $\perp\!\!\!\perp$ car c'est une sous-famille de
 $(X_1, \dots, X_n)$

D'après le thm fol, on a

$$P\left(\bigcap_{i \in I} (X_i \in A_i)\right) = \prod_{i \in I} P(X_i \in A_i)$$

qd $\forall i \in I, A_i \subset E_i$

a) transfert d'indépendance

Prop : $X_1, \dots, X_n$ VA ds $E_1, \dots, E_n$

Soient $f_1: E_1 \rightarrow F_1, \dots, f_n: E_n \rightarrow F_n$

$X_1, \dots, X_n \perp\!\!\!\perp \Rightarrow f_1(X_1), \dots, f_n(X_n) \perp\!\!\!\perp$

D/ ~~pp~~ ~~tt~~ ~~⊗~~

Soient $y_1 \in F_1, \dots, y_n \in F_n$.

$$\text{Hg } P(b_1(x_1) = y_1, \dots, b_n(x_n) = y_n) \\ = P(b_1(x_1) = y_1) \times \dots \times P(b_n(x_n) = y_n)$$

• Or, $(b_i(x_i) = y_i) = (x_i \in b_i^{-1}(\{y_i\}))$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Et } (b_1(x_1) = y_1, \dots, b_n(x_n) = y_n) &= \bigcap_{i=1}^n (b_i(x_i) = y_i) \\ &= \bigcap_{i=1}^n (x_i \in b_i^{-1}(\{y_i\})) \end{aligned}$$

$\hat{C}$ $X_1, \dots, X_n$ $\perp$, d'après le thm β^{al} ,

on a donc :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n (X_i \in A_i)\right) = \prod_{i=1}^n P(X_i \in A_i)$$

où $A_i := b_i^{-1}(\{y_i\})$ pour tout i ■

6) Lemme de coalition

Prop : Soient $X_1, \dots, X_n$ VA ds $E_1, \dots, E_n$.

Soient $I_1, \dots, I_p \subset \llbracket 1, n \rrbracket$ non vides et
2 à 2 disjointes

Soient $\beta_1 : \prod_{i \in I_1} E_i \rightarrow F_1, \dots, \beta_p : \prod_{i \in I_p} E_i \rightarrow F_p$.

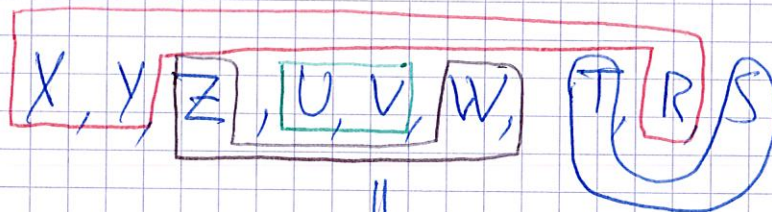
Pour $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on note

$$Y_k := \beta_k \left((X_i)_{i \in I_k} \right)$$

Alors : $X_1, \dots, X_n \perp\!\!\!\perp \Rightarrow Y_1, \dots, Y_p \perp\!\!\!\perp$

D/ ok ■

(crt)



VAR $\perp\!\!\!\perp$

$$\perp\!\!\!\perp \quad \frac{X^2 R}{1 + e^Y}, \quad \sqrt{Z^2 + W^2} \quad |U - V| \max(T, S)$$

IV Esperance des VAR (ou $\mathbb{C}$)

Dans ce qui suit : $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On fera le cas qui se généralise automatiquement à $\mathbb{C}$.

1) Définition

Déf : Soit X VAR. L'esperance de X , notée $E(X)$, est le nombre réel défini par

$$\underline{E(X)} := \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) X(\omega)$$

(ex)

$$\text{On a } E(m) = \sum_{(i,j) \in [1,6]^2} P(\{(i,j)\}) \min(i,j)$$

$$= \frac{1}{36} \sum_{1 \leq i,j \leq 6} \min(i,j)$$

$$= \frac{1}{36} \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^i \min(i,j) + \sum_{j=i+1}^6 \min(i,j)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{i(i+1)/2} \qquad \qquad \qquad i(b-i)$

$$= \frac{1}{36} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 [i^2 + i + 12i - 2i^2]$$

$$= \frac{1}{36 \times 2} \left[\sum_{i=1}^6 13i - \sum_{i=1}^6 i^2 \right]$$

$$= \frac{1}{36 \times 2} \left[13 \cdot \frac{3 \cdot 6 \cdot 7}{2} - \frac{6 \times 7 \times 13}{6} \right]$$

$$= \frac{1}{36 \times 2} \cdot 7 (13 \cdot 3 - 13)$$

$$= \frac{7 \cdot 13}{36 \cdot 2} - 2 = \frac{7 \cdot 13}{36} = \approx 2,5277 \dots$$

2) !! Réécriture $\int$ de l'esperance

Th^{!!} Soit X VAR

1) Soit E un ens fini tq $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$

Alors
$$E(X) = \sum_{x \in E} x P(X=x)$$

2) En particulier :

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X=x)$$

D/ i) Faisons de la sommation par paquets.

On a en effet $\Omega = \bigsqcup_{x \in E} (X=x)$

(C'est le S.E. associée à x)

$$\text{Donc } \sum_{\omega \in \Omega} (\dots) = \sum_{\omega \in \bigsqcup_{x \in E} (X=x)} (\dots) = \sum_{x \in E} \sum_{\omega \in (X=x)} (\dots)$$

Prenons $(\dots) = P(\{\omega\}) X(\omega)$. On obtient

$$E(X) = \sum_{x \in E} \sum_{\omega \in (X=x)} P(\{\omega\}) X(\omega)$$

$$\text{Fixons } x \in E. \text{ On a } \sum_{\omega \in (X=x)} P(\{\omega\}) \times \boxed{X(\omega)} = x$$

$$= x \sum_{\omega \in (X=x)} P(\{\omega\})$$

$$\text{Or : } (X=x) = \bigsqcup_{\omega \in (X=x)} \{\omega\}$$

Donc (l'union étant finie et disjointe), on a :

$$P(X=x) = \sum_{\omega \in (X=x)} P(\{\omega\}) \quad \blacksquare$$

(exi)

$$\text{On a } E(m) = \sum_{k=1}^6 k P(m=k)$$

$$\text{Or } P(m=1) = \frac{11}{36}, P(m=2) = \frac{9}{36}, P(m=3) = \frac{7}{36} \\ P(m=4) = \frac{5}{36}, P(m=6) = \frac{1}{36}, P(m=5) = \frac{3}{36}$$

$$\text{Donc } E(m) = \frac{6 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + 2 \cdot 9 + 1 \cdot 1}{36} \\ = \frac{135}{36} \quad (\text{calculé par Siri}) \\ = \frac{27 \cdot 5}{36} \approx 3,75$$

C'est plus logique que le 1^{er} résultat

En fait Siri s'est trompé, on a plutôt

$$= \frac{97}{36} = \boxed{\frac{13 \cdot 7}{36}} \quad \text{ce qui est } (+) \text{ logique}$$

3) L'esperance ne dépend q. de la loi

Corollaire :

$$X \sim Y \Rightarrow E(X) = E(Y)$$

DI Osg $X \sim Y$

Posons $E := X(\Omega) \cup Y(\Omega)$: c'est fini

On a $E(X) = \sum_{x \in E} x \underbrace{P(X=x)}_{\text{c'est la loi de } X}$

$$= \sum_{x \in E} x \underbrace{P_X(x)}_{= P_Y(x)}$$

$$= \sum_{x \in E} x P(Y=x) = E(Y) \quad \square$$

h) Premiers exemples

a) avec une VA cte

<u>Fait</u>	$E(a) = a$	si $a \in \mathbb{R}$
	(ie $E(\tilde{a}) = a$)	

DI $E(\tilde{a}) = \sum P(\{w\}) a = a \underbrace{\sum_{w \in \Omega} P(\{w\})}_{=1} \quad \square$

b) avec les VA indicatrices

Prop !! - $(\mathbb{R}^n)$

Soit A un évé (ie soit $A \subset \Omega$)
(Alors, on dispose de la VA dans $\{0,1\}$: 1_A)

On a $E(1_A) = P(A)$

Rq: cela permet de mg des choses
sur $P(A)$ à l'aide de l'outil espérance.

D/ On a
$$E(1_A) = \sum x P(1_A = x)$$
$$= 0 P(1_A = 0) + 1 P(1_A = 1)$$

Or l'evt $(1_A = 0) = \bar{A}$
 $(1_A = 1) = A$ (AC)+++

Ainsi $E(1_A) = P(A)$ ■

5) Propriétés de l'espérance

X, Y VA dans $\mathbb{K}$ (idée: VAR)

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$

a) Linéarité

Prop R^X $E(X + \lambda Y) = E(X) + \lambda E(Y)$

D/ idée: utiliser $E(\cdot) = \sum_{\omega \in \Omega} (\cdot)$ ■

b) $E(aX + b)$

Prop $E(aX + b) = a E(X) + b$

D/ utiliser a) ■

c) L'espérance est positive

$$\text{Prop: } \left. \begin{array}{l} X \text{ VAR} \\ X \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow E(X) \geq 0$$

D/  avec $E(\cdot) = \sum_{\omega \in \Omega} (\cdot)$ ■

d) L'espérance est croissante

(R^x)

$$\text{Prop: } X, Y \text{ VAR}$$

$$X \leq Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y)$$

D/ $X \leq Y \rightarrow Y - X \geq 0 \rightarrow E(Y - X) \geq 0$
 $\rightarrow E(Y) - E(X) \geq 0$ ■

e) inégalité triangulaire

$$\text{Prop: } E(|X|) \geq |E(X)|$$

 Idée: L'espérance (cf $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X=x)$)

est à imaginer comme une intégrale

$$cf : \bullet \left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

si DLBS

$$\bullet \left| \sum_{i=1}^n d_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |d_i|$$

D/ • si X VAR : on a $-|x| \leq X \leq |x|$

donc $-E(|x|) \leq E(X) \leq E(|x|)$

ie $|E(X)| \leq E(|x|) \quad \blacksquare_{\mathbb{R}}$

• si X est une VA dans $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \text{On a } |E(X)| &= \left| \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\}) \right| \\ &\leq \sum_{\omega \in \Omega} |X(\omega)| P(\{\omega\}) \quad \left. \vphantom{\sum_{\omega \in \Omega}} \right\} = P(\{\omega\}) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} |X(\omega)| P(\{\omega\}) = E(|x|) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

P) inégalité de CS pour $E(\cdot)$

Prop: X, Y VAR

$$|E(X, Y)| \leq \sqrt{E(X^2)} \sqrt{E(Y^2)}$$

Rq: En fait, si $b: E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme symétrique bilinéaire positive, ie si b est un quasi-p.s., alors on a encore

$$\forall X, Y \in E, |b(X, Y)| \leq \sqrt{b(X, X)} \sqrt{b(Y, Y)}$$

D/ On se place sur $E := VA(\mathbb{R})$ et on déf

$$\begin{aligned} b: E^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\longmapsto E(X, Y) \end{aligned}$$

C'est un quasi-p.s. ■

Cf rex

Osq $\exists A \subset \Omega : (A \neq \emptyset \text{ et } P(A) = 0)$

On fixe un tel A .

Ocd $X := 1_A$, On a $X \geq 0$ et $E(X) = 0$
 $= E(1_A) = P(A)$
 $= 0$

cd: $X \geq 0$
 $E(X) = 0$

mais $X \neq 0$

À comparer à:

① $f \geq 0$

② $f \in C^0$

③ $\int_a^b f = 0$

} $\Rightarrow f = 0$

C'est le Hm aux 3 hypothèses

Crex: X VAR à valeurs dans $\{0,1\}$

$R^X 1 : X^2 = X$

D/ Soit $\omega \in \Omega$, on a $X(\omega)^2 = X(\omega)$

Rq: $\forall \omega \in \Omega \quad (X^2 = X) \Rightarrow X(\omega) \in \{0,1\}$



Astuce R^X 1) X est une VA indicatrice.

2) i.e $\exists A \subset \Omega : X = 1_A$

D/ 1 Prendre $A = \{X=1\}$

Bilan :

$$b(x, x) = E(x^2) = E(x) = 0 \quad \text{mais} \quad x \neq 0$$

(exo) Si Ω ne possède aucun évnt
négligeable $\neq \emptyset$.

Alors : $b(\cdot, \cdot)$ est un ps.

6) Théorème de transfert

a) Énoncé

Thm :

Soit X VA dans E

Soit $f: E \rightarrow \mathbb{K}$

(Ainsi : $f(x)$ est une VA dans $\mathbb{K}$)

Alors : 1) Si E' fini tq $X(\Omega) \subseteq E' \subseteq E$

$$E(f(x)) = \sum_{x \in E'} f(x) P(X=x)$$

$$\left(\text{cf si } X \text{ VAR : } E(X) = \sum_{x \in E'} x P(X=x) \right)$$

2) En particulier :

$$E(f(x)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) P(X=x)$$

D/



On copie-colle la démo de la réécriture
pale

Allons-y, On a

$$E(f(x)) = \sum_{\omega \in \Omega} f(x(\omega)) P(\{\omega\})$$

De $\mathbb{A}$, $\hat{c} \left(f(x) = x \right)_{x \in E'} \subseteq E$

$$\text{Donc } \Omega = \bigsqcup_{x \in E'} \underbrace{(f(x) = x)}_{x \in f^{-1}(\{x\})}$$

$$\text{Donc } E(f(x)) = \sum_{\omega \in \bigsqcup_{x \in E'} (f(x) = x)} f(x(\omega)) P(\{\omega\})$$

$$= \sum_{x \in E'} \sum_{\omega \in (f(x) = x)} \underbrace{f(x(\omega))}_{\leftarrow} P(\{\omega\})$$

$$= \sum_{x \in E'} f(x) \sum_{\omega \in (f(x) = x)} P(\{\omega\})$$

Faux (inhomogène)

D1 : $\hat{c} \ X(\Omega) \subset E'$, and $f(X(\Omega)) \subset f(E')$

ie $f(X)(\Omega) \subset f(E')$; $\hat{c} \ f(E')$ fini.

grâce à la réécriture $\frac{1}{f}$ de l'espérance,
on a :

$$E(f(X)) = \sum_{y \in f(E')} y \cdot P(f(X) = y)$$

• Posons $S = \sum_{x \in E'} f(x) P(X=x)$

Idee : • les $f(x)$ pour $x \in E'$ peuvent
prendre la m valeur.

• Je les regroupe

• Plus précisément : les valeurs possibles
des $f(x)$ sont $y_1, \dots, y_p$.

• Notons par exemple, $x_1, \dots, x_m$ tous
les $x \in E'$ qui sont envoyés sur y_1
(on a $f(x_1) = \dots = f(x_m) = y_1$)

• Dans le $\sum_{x \in E'}$, on aura le "

"sous- $\sum$ " : $f(x_1) P(X=x_1) + \dots + f(x_m) P(X=x_m)$
qui vaut $y_1 \cdot (P(X=x_1) + \dots + P(X=x_m))$

$$\begin{aligned} \rightarrow \sum_{\substack{x \in E' \\ f(x) = y_1}} P(X=x) &= P(X \in f^{-1}(\{y_1\})) \\ &= P(f(X) = y_1) \end{aligned}$$

• On a $f(x) (\Omega) < \underbrace{f(E')}_{\text{noté } F'}$

• On a $E' = \bigsqcup_{y \in F'} f^{-1}(\{y\})$

$$(f: E' \longrightarrow F')$$

• Donc

$$\sum_{x \in E'} f(x) P(X=x) = \sum_{y \in F'} \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} f(x) P(X=x)$$

$$= \sum_{y \in F'} y \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} P(X=x) \quad \text{or, } \sum_{a \in F} P(X=a) = P(X \in F)$$

$$= \sum_{y \in F'} y P(X \in f^{-1}(\{y\}))$$

$$= \sum_{y \in F'} y P(f(X)=y) = E(f(X)) \text{ d'après}$$

la reécriture f de f appliquée à $f(X)$ avec F'

b) Exemples

Soit X VAR dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. Alors :

$$a) E(X^2) = \sum_{k=1}^n k^2 P(X=k)$$

$\sum_{x \in E'}$ car ici $X(\Omega) \subset \llbracket 1, n \rrbracket$,

on prend $E' = \llbracket 1, n \rrbracket$

$$b) E(e^X) = \sum_{k=1}^n e^k P(X=k)$$

$$\text{Rq: si } \forall k, P(X=k) = \frac{1}{n}$$

$$\text{On voit apparaître } \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^k = \frac{1}{n} e$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^k = \frac{1}{n} e \frac{e^n - 1}{e - 1}$$

c) application

Soient X, Y VAR. Soient E', F' tq

$$\begin{cases} X(\Omega) \subset E' \\ Y(\Omega) \subset F' \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y(\Omega) \subset F' \end{cases}$$

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{Ex : } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \sin(e^y - \arctan(x^2 - 60xy))$$

Ocsd la VA $f(X, Y)$

On peut appliquer le théorème de transfert

avec :

$$X \longleftarrow (X, Y)$$

$$f \longleftarrow f$$

$$E' \longleftarrow E' \times F' \text{ car } (X, Y)(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$$

$$E(f(X)) = \sum_{x \in E'} f(x) P(X=x)$$

$$\subset E' \times F' f \text{ in.}$$

$$\text{On obtient } E(f(X, Y)) = \sum_{* \in E' \times F'} f(*) P((X, Y) = *)$$

$$\text{ie } E(f(X, Y)) = \sum_{\substack{x \in E' \\ y \in F'}} f(x, y) P(X=x, Y=y)$$

Application :

$$\text{Je prend } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto xy$$

On obtient

$$E(XY) = \sum_{\substack{x \in E' \\ y \in F'}} xy P(X=x, Y=y)$$

7) Esperance du produit dans le cas indépendant

Thm ①

1) Soient X, Y VAR $\perp\!\!\!\perp$. Alors

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

2) Soient $X_1, \dots, X_n$ VAR $\perp\!\!\!\perp$. Alors

$$E(X_1, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^n E(X_i)$$

D/1) On a $E(XY) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} xy P(X=x, Y=y)$

$$= \sum x P(X=x) \cdot y P(Y=y)$$

(RX) $\sum$ VAR. séparées

$$= \left[\sum x P(X=x) \right] \left[\sum y P(Y=y) \right]$$

$$= E(X)E(Y)$$

2) (rec) sur n

$n=2$: c'est 1)

$n \rightarrow n+1$ ① Osg $X_1, \dots, X_{n+1}$ sont $\perp\!\!\!\perp$

⚡ Lemme de coalition : $X_1 X_2 \dots X_n \perp\!\!\!\perp X_{n+1}$

Donc d'après 1) , $E((X_1 \dots X_n) X_{n+1})$
 $= E(X_1 \dots X_n) E(X_{n+1})$

Par HR_n : on a $E(X_1 \dots X_{n+1}) = E(X_1) \dots E(X_{n+1})$

Ex : Soit X une VA telle que :

- $X(\Omega) = \{-1, 1\}$

- $P(X = -1) = P(X = 1)$

On dit que X suit la loi de Rademacher

On a $E(X) = \sum_{\substack{x \in \Omega(X) \\ x \in X(\Omega)}} x P(X=x) = (-1) \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2}$
 $= 0$

On a $X^2 = 1$ (la VA constante)

Donc $E(X^2) = 1$

On a

$$E(X^2) \neq E(X) E(X)$$

8) Variables centrées

a) def

Def°: On dit que X (VA dans $\mathbb{K}$)
est centrée $\triangleq$ $E(X) = 0$

b) un R^X

Fait - R^X : Soit X VA dans $\mathbb{K}$.

1) On pose $m := E(X)$. Alors $X - m$
est centrée

2) $\forall e$, la VA $X - E(X)$ est centrée.

D/ 1) On a $E(X - m) = E(X) - m$
 $= E(X) - E(X) = 0$ ■

Variance et covariance

1) Variance et écart-type

a) Idée

On considère les notes $y_1, \dots, y_n$ obtenues à un DS

La moyenne est $m := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$

Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $\delta_i := y_i - m$,

C'est l'écart à la moyenne.

On souhaite connaître l'écart moyen à la moyenne : ie la moyenne des δ_i

$$\begin{aligned} (*) \text{ Si on calcule } & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - m) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m \quad \text{avec } m = m \\ &= m - m = 0 \end{aligned}$$

(*) Idée : On remplace δ_i par $|\delta_i|$:

on peut mesurer si les notes sont très dispersées ou au contraire resserrées autour de m . On obtient $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_i - m|$

C'est pas mal mais c'est assez peu pratique,
à cause des $| \cdot |$

(*) Autre idée : OCSd les écarts quadratiques,
ie en $(\cdot)^2$.

On pose $\Delta_i := (y_i - m)^2$ et ocsd

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta_i$$

Cette quantité n'est pas homogène à une note.

On pose

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta_i}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - m)^2}$$

ie on pose

$$\sigma := \sqrt{\frac{1}{n} \sum \left(y_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_j \right)^2}$$

C'est l'écart type des notes.

b) Defo

Idee: on remplace " $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n$ " par $E(X)$

Def: Soit X VAR

1) La variance de X , notée $V(X)$, est le nb ≥ 0 déf par

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$$

2) l'écart type de X , noté $\sigma(X)$, est:

$$\sigma(X) := \sqrt{V(X)}$$

(exo)

1) Comprendre dans l'idée, on a

$$V(X) = 0 \Rightarrow X \stackrel{p.s.}{=} c \quad (*)$$

2) Si: $\forall \omega \in \Omega, P(\{\omega\}) > 0$, alors (*) est V.

3) En gdl: on a $V(X) = 0 \Rightarrow$

" X est presque sûrement cte"

$$\text{i.e. } \exists a \in \mathbb{R} : P(X = a) = 1$$

Rq: autres exemples d'assertion "presque sûres"

(*)

$$X^{ps} = 2$$

Δ
ss:

$$P(X=2) = 1$$

(*)

$$X^{ps} \geq 0$$

Δ
ss:

$$P(X \geq 0) = 1$$

$$(*) \text{ (exo) } \text{Hg} \quad \left. \begin{array}{l} X \geq 0 \\ E(X) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow X^{ps} = 0$$

$$(*) \text{ (exo) } \text{Hg} \quad X \stackrel{ps}{\leq} Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y)$$

2) Fl de König - Huggens

Prop-R^x:

Soit X VAR, Alors

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

💡 Pour se rappeler de la formule :
penser au cas où $E(X) = 0$

D/ 💡 On pose $m := E(X)$

On calcule :

$$\begin{aligned} V(X) &= E\left((X - E(X))^2\right) = E\left((X - m)^2\right) \\ &= E\left(X^2 - 2mX + m^2\right) \\ &= E(X^2) - E(2mX) + E(m^2) \\ &= E(X^2) - 2mE(X) + m^2 \\ &= E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2 \\ &= E(X^2) - E(X)^2 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

(CAF) M D/ sans la notat^o m

3) Propriétés de la variance (⊖)

a) Premières propriétés

Prop : ⊕

$$1) V(aX + b) = a^2 V(X)$$

$$2) V(X + b) = V(X)$$

$$3) V(aX) = a^2 V(X)$$

D/ 2) Posons $Y := aX + b$

$$\text{On a } E(Y) = E(X) + b$$

$$\text{Donc } Y - E(Y) = (X + b) - (E(X) + b)$$

$$\text{Donc } (Y - E(Y))^2 = (X - E(X))^2$$

$$\text{Donc } E([Y - E(Y)]^2) = E((X - E(X))^2) \quad \blacksquare_2)$$

3) Avec $k \cdot H$

$$V(aX) = E((aX)^2) - [E(aX)]^2$$

$$= E(a^2 X^2) - [a E(X)]^2$$

$$= a^2 (E(X^2) - [E(X)]^2) \quad \blacksquare_3)$$

1) C'est 2) et 3)

Ex : On a X tq $X(\Omega) = \{-1, 1\}$
 $P(X = -1) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$

On a $E(X) = 0$.

Donc (KH) : $V(X) = E(X^2) = \hat{C} X^2 = 1$,

On a $V(X) = 1$

• A-t-on : $\forall X, Y \text{ VAR}, V(X+Y) = V(X) + V(Y)$?

Non

Chex : • On a $V(X-X) = V(0) = 0$

• $V(X) + V(-X) = 2V(X) = 2$
dans cet exemple.

• Ainsi $V(X + (-X)) \neq V(X) + V(-X)$

Rq : Si on avait $\forall X, Y, V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

On aurait $V(X+X) = V(X) + V(X)$

Ie on aurait : $V(2X) = 2V(X)$

Or on vient de voir q $V(2X) = 2^2 V(X)$

b) Variance et indépendance

Prop - R^x

Soient X, Y VAR. Alors

$$X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

D/  avec K.H

$$V(X+Y) = E((X+Y)^2) - E(X+Y)^2$$

$$= E(X^2 + 2XY + Y^2) - (E(X) + E(Y))^2$$

$$= E(X^2) + \underbrace{2E(XY)}_{= 2E(X)E(Y)} + E(Y^2) - [E(X)^2 + E(Y)^2 - 2E(X)E(Y)]$$

= ... ok

Corollaire

Soient $X_1, \dots, X_n$ VAR. Alors :

$$X_1, \dots, X_n \perp\!\!\!\perp \Rightarrow V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i)$$

D / (rec) sur n

$n \geq 2$ ~~est~~ on vient de le faire.

$n \rightarrow n+1$

Soient $X_1, \dots, X_{n+1}$ VAR II

On note $S := X_1 + \dots + X_n$

D'après le lemme des coalitions, on a

$$S \perp\!\!\!\perp X_{n+1}$$

Donc $V(S + X_{n+1}) = V(S) + V(X_{n+1})$.

Or, d'après HR_n,

$$V(S) = \sum_{i=1}^n V(X_i) \quad \blacksquare$$

h) Covariance

a) déf^o

Def : Soient X, Y VAR. la covariance de X et Y , notée $\text{cov}(X, Y)$, est le nb réel défini par

$$\text{cov}(X, Y) := E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

b) ρ^{le} de König - Huygens

$$\left| \text{Prop}^{(T)} \quad \text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) \right.$$

D/ On calcule

$$\text{On pose } m_X := E(X) \quad m_Y := E(Y)$$

$$\text{On a } \text{cov}(X, Y) = E((X - m_X)(Y - m_Y))$$

$$= E(XY) - m_Y E(X) - m_X (E(Y)) + m_X m_Y$$

$$= E(XY) - E(X)E(Y)$$

c) Covariance des VA indépendantes

$$\boxed{\text{Prop : } X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow \text{cov}(X, Y) = 0}$$

D/ On a $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

et $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow E(X)E(Y) = E(XY)$ ■

Remarque :

La covariance de X et de Y peut être ainsi

considérée comme un nb réel qui caractérise

(presque) la dépendance de X et de Y .

• On a $\text{cov}(X, Y) \neq 0 \Rightarrow X \not\perp Y$

• La rcpq est F : ie

$\exists X, Y \text{ VAR} : \text{cov}(X, Y) \neq 0 \text{ et } X \perp Y$

• Ctr exemple :

Ocsd $X, Y \text{ VAR}$ tq 1) $X(\Omega) = Y(\Omega) = [1, 6]$

2) $\forall k \in [1, 6], P(X=k) = P(Y=k) = \frac{1}{6}$

3) $X \perp Y$

Ces données formalisent le lancer de 2 dés.

On pose $S := X + Y$ et $D := X - Y$.

On a $\text{cov}(S, D)$

$$= E(SD) - E(S)E(D)$$

(R*) l'hypothèse 2) dit exactement que $P_X = P_Y$:

X et Y ont la m loi. Donc $E(X) = E(Y)$

$$\text{Donc } E(D) = E(X - Y) = E(X) - E(Y) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \text{cov}(S, D) &= E(SD) = E((X+Y)(X-Y)) \\ &= E(X^2 - Y^2) = E(X^2) - E(Y^2) \end{aligned}$$

or, $\hat{C} X \sim Y$, on a DALC : $X^2 \sim Y^2$.

Donc DALC : $E(X^2) = E(Y^2)$.

al :

$$\boxed{\text{cov}(S, D) = 0}$$

Fait : $S \not\perp D$

D/ Idee: $\forall n, m \in \mathbb{Z}, n+m \equiv n-m \pmod{2}$

Donc S et D ont même parité

Mq $S \perp D$

On a $(S=2) \cap (D=5) = \emptyset$

D'après (*).

Donc $P(S=2, D=5) = 0$

or $P(S=2) \neq 0$ et $P(D=5) \neq 0$

Donc $P(S=2)P(D=5) > 0$

Donc $S \not\perp D$ ■

d) Propriétés de la covariance

Prop: $\text{cov}(\cdot | \cdot)$ est un quasi-produit scalaire sur $\text{VA}(\mathbb{R})$

D/

- Symétrie ok ■
- bilinéarité : ⊕

$$\begin{aligned}\text{cov}(X_1 + \lambda X_2, Y) &= E((X_1 + \lambda X_2)Y) - E(X_1 + \lambda X_2)E(Y) \\&= E(X_1 Y) + E(\lambda X_2 Y) - E(X_1)E(Y) - \lambda E(X_2)E(Y) \\&= \text{cov}(X_1, Y) + \lambda \text{cov}(X_2, Y)\end{aligned}$$

• positivité :

$(\mathbb{R}^n)$

$$\text{cov}(X, X) = V(X)$$

Donc $\text{cov}(X, X) \geq 0$

• caractère défini : il est F !!

On a $\text{cov}(X, X) = 0 \Rightarrow X$ presque-sûrement cste

Corollaire : $\oplus$

$$1) \text{cov} \left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^n Y_j \right) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \text{cov}(X_i, Y_j)$$

$$2) V \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (X_i | X_j) \\ = \text{cov} \left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^n X_j \right)$$

Rq : cf $\left\| \sum_{i=1}^n X_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|X_i\|^2 + 2 \sum_{i=1}^n (X_i | X_j)$

DI ok

Rq :

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y) &\longleftrightarrow (X | Y) \\ V(X) &\longleftrightarrow (X | X) \text{ ie } \|X\|^2 \\ \sigma(X) &\longleftrightarrow \|X\| \end{aligned}$$

Inégalité de C-S covariante

Prop : Soient X, Y VAR. On a
 $| \text{cov}(X, Y) | \leq \sigma(X) + \sigma(Y)$

D/ok ■
(AC)

Exemple :

Soient $A, B \subset \Omega$ ds évnts

Onsd $X := 1_A$ et $Y := 1_B$

• On a $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

Or, on a (AC) $X^2 = X$. Donc

$$V(X) = E(X) - E(X)^2$$

$$= E(X) (1 - E(X))$$

$$\text{cl : } V(X) = P(A) (1 - P(A))$$

• De m : $V(Y) = P(B) (1 - P(B))$

• Calculons : $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - \underbrace{E(X)}_{P(A)} \underbrace{E(Y)}_{P(B)}$

(WRX) On a $XY = 1_A 1_B = 1_{A \cap B}$

Ainsi : $\text{cov}(X, Y) = P(A \cap B) - P(A)P(B)$

• Ainsi, d'après CS :

$$|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq \sqrt{P(A)P(\bar{A})} \sqrt{P(B)P(\bar{B})}$$

Lemme : $\forall x \in [0,1], 0 \leq x(1-x) \leq \frac{1}{4}$

D/ En effet, $x \mapsto (1-x)x$ est un polynôme de degré 2 du type " $ax^2 + bx + c$ "

avec $a < 0$. On sait qu'elle s'annule en 0 et en 1.

On sait qu'elle atteint son maximum au milieu des racines.

De ④, entre ses racines, elle est ≥ 0 .

cd : $0 \leq x(1-x) \leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

D^{2/} • ~~W~~ OFAA un $(\cdot)^2$: on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} - x(1-x) &= x^2 - x + \frac{1}{4} \\ &= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

• $\forall x \in [0,1]$, on a $\begin{cases} x \geq 0 \end{cases}$ ■

cd : $|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq \sqrt{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$ ■

b) Corrélation entre VAR

Soient X, Y VAR tq $\begin{cases} \sigma(X) > 0 \\ \sigma(Y) > 0 \end{cases}$

Déf: Le coeff de corrélat^o entre X et Y est

$$\rho(X, Y) := \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X) \sigma(Y)}$$

Prop:

- $|\rho(X, Y)| \in [0, 1]$
- ie $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$
- $X \perp Y \Rightarrow \rho(X, Y) = 0$

D/ ok ■

Rq: On dira que X et Y son décorrélées
 Δ ssi $\text{cov}(X, Y) = 0$

Rq: On a $X \sim Y \Rightarrow V(X) = V(Y)$

D/ On sait que $X \sim Y \Rightarrow f(X) \sim f(Y)$
pour toute $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

En particulier, $X \sim Y \Rightarrow X^2 \sim Y^2 \Rightarrow E(X^2) = E(Y^2)$
 $\Downarrow$
 $E(X) = E(Y) \Rightarrow E(X)^2 = E(Y)^2$

$$\Delta \quad \left. \begin{array}{l} X \sim X' \\ Y \sim Y' \end{array} \right\} \Rightarrow \text{cov}(X, Y) = \text{cov}(X', Y') ?$$

Non

VI Inégalités probabilistes

Idee: Soit X VAR

Connaissant $E(X)$ (et évt $V(X)$)
quel type d'info puis-je avoir sur X ?

Ex: La moyenne m du DS est 10.

Que puis-je dire sur la proportion p
d'élèves ayant eu ≥ 16 ?

(*) Déjà, $p < 1$ (sinon on aurait $m \geq 16$)

(*) Ensuite: peut-on avoir $p \geq 0,9$?

Non, car sinon on aurait

$$m \geq 0,9 \cdot 16 + 0,1 \cdot 0 = 14,4 \quad (\text{abs})$$

Ainsi, on peut majorer p .

Bilan: Connaissant $E(X)$, on a retrouvé une info
sur P_X

1) Inégalité de Markov !!

Prop !!

Soit X VAR ≥ 0 (hypothèse $f \geq 0$)

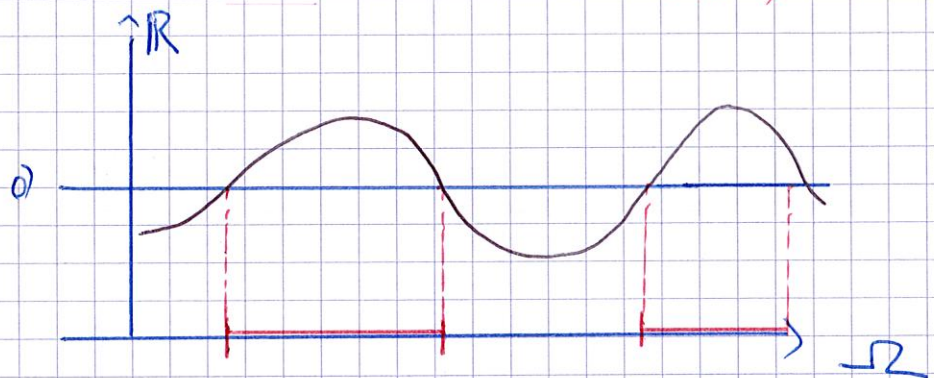
Soit $a > 0$

Alors $P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$

D !! / À connaître : technique classique

• On a $X \geq a \cdot 1_{(X \geq a)}$

Idee :



Soit $\omega \in \Omega$. On distingue 2 cas :

• 1^{er} cas : $X(\omega) \geq a$; donc $\omega \in (X \geq a)$

Donc $(a \cdot 1_{(X \geq a)})(\omega) = a \cdot 1 = a$

Donc on a bien $X(\omega) \geq a = (a \cdot 1_{(X \geq a)})(\omega)$

• 2^e cas : $X(\omega) < a$; donc $\omega \notin (X \geq a)$

Donc $(a \cdot 1_{(X \geq a)})(\omega) = 0$

$$E[X(\omega) \mathbb{1}_{X \geq a}] = (a \mathbb{1}_{X \geq a})(\omega)$$

Bilan: on a mg $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \geq (a \mathbb{1}_{X \geq a})(\omega)$

ie $X \geq a \mathbb{1}_{X \geq a}$

On passe à $E(\cdot)$: $E(X) \geq a E(\mathbb{1}_{X \geq a})$
 $= a P(X \geq a)$

Bilan:
$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

2) Inégalité de Bienaymé - Tchebychev

Lemme: Soient X, Y VAR

Soit $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Alors:

$$1) \varphi \uparrow \Rightarrow (X \leq Y) \subset (\varphi(X) \leq \varphi(Y))$$

$$\Rightarrow P(X \leq Y) \leq P(\varphi(X) \leq \varphi(Y))$$

$$2) \varphi \uparrow \uparrow \Rightarrow (X \leq Y) = (\varphi(X) \leq \varphi(Y))$$

$$\Rightarrow P(X \leq Y) = P(\varphi(X) \leq \varphi(Y))$$

$$1) \text{ Orsq } \varphi \uparrow. \text{ Mg } (X \leq Y) \subset (\varphi(X) \leq \varphi(Y))$$

Soit $\omega \in (X \leq Y)$: on a $X(\omega) \leq Y(\omega)$,

$$\text{et } \varphi \uparrow, \text{ on a } \varphi(X(\omega)) \leq \varphi(Y(\omega))$$

$$\text{ie } \varphi(X)(\omega) \leq \varphi(Y)(\omega)$$

$$\text{ie } \omega \in (\varphi(X) \leq \varphi(Y))$$

$$2) \text{ Soit } \omega \text{ tel } \varphi(X(\omega)) \geq \varphi(Y(\omega))$$

$$\hat{C} \quad \varphi/\hat{P} : \text{DALC, on a } X(\omega) \leq Y(\omega) \\ \text{ie } \omega \in (X \leq Y) \quad \blacksquare$$

Prop !! : Soit X VAR. Soit $a > 0$.

$$\text{Alors on a } P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

D/ Déjà : $\hat{C} \quad (\cdot)^2/\hat{P}$ sur $\mathbb{R}_+$ et

$|X - E(X)|$ sont à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, on a :

$$(|X - E(X)| \geq a) = ((X - E(X))^2 \geq a^2)$$

• On applique Markov à la VAR ≥ 0 :

$$(X - E(X))^2 \text{ notée } Y$$

$$\text{On a } P(Y \geq a^2) \leq \frac{E(Y)}{a^2}$$

$$\text{or } E(Y) = E((X - E(X))^2) = V(X)$$

$$\text{• Bilan : } P(|X - E(X)| \geq a) = P((X - E(X))^2 \geq a^2) \\ \leq \frac{V(X)}{a^2} \quad \blacksquare$$

VII Fonctions génératrices

⚠ Dans cette partie: X, Y, Z , etc sont des VA dans $\mathbb{N}$.

1) Définition

Def: Soit X VA dans $\mathbb{N}$

La fonction génératrice de X , notée

$$\underline{G_X}, \text{ est } G_X: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \sum_{k \in X(\Omega)} P(X=k) t^k$$

Rq: • Si $t \in \mathbb{R}$, $G_X(t)$ est bien défini car $X(\Omega)$ est une partie finie de $\mathbb{N}$

• Plus précisément: Si on pose $N := \max X(\Omega)$

$$\text{On a } \forall t \in \mathbb{R} \quad G_X(t) = \sum_{k=0}^N P(X=k) t^k$$

(Si $k \notin X(\Omega)$, on a • $(X=k) = \emptyset$
• $P(X=k) = 0$

• Ainsi: G_X est une fonction polynomiale

(exi) Ocsd m

On a donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_m(t) = \frac{11}{36}t + \frac{9}{36}t^2 + \frac{7}{36}t^3 \\ + \frac{5}{36}t^4 + \frac{3}{36}t^5 + \frac{1}{36}t^6$$

2) Propriétés

Fait 1 : $X \sim Y \implies G_X = G_Y$
VA ds IN

Prop : $G_X = G_Y \implies X \sim Y$

D/ Orsq $G_X = G_Y$

On a donc $\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = G_Y(t)$

Notons $P := G_X(\cdot)$

Lemme : Soit $N \in \mathbb{N}$ et soit $(a_0, \dots, a_N) \in \mathbb{R}^N$

On pose $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $t \longmapsto a_0 + a_1 t + \dots + a_N t^N$

Alors : $\forall k \in \llbracket 0, N \rrbracket, a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$

D/ On note $P := \sum_{k=0}^n a_k x^k$

On a, d'après la formule de Taylor polynomiale,

$$P = \sum_{k=0}^N \frac{P^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Comme la famille $(1, x, \dots, x^N)$ est libre,

on a $\forall k \in \llbracket 0, N \rrbracket$

$$a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$$

De $\textcircled{4}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $P^{(k)}(t) = f^{(k)}(t)$ ■

Ainsi, $\hat{G}_X = G_Y$, on a $\forall k$, $G_X^{(k)}(0) = G_Y^{(k)}(0)$

Donc : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\frac{P(X=k)}{k!} = \frac{P(Y=k)}{k!}$ ■



Idee :

Si X VA ds $\mathbb{N}$, G_X est une version "technologique" de P_X

Proposition :

1) $G_X(1) = 1$

2) $G'_X(1) = E(X)$

3) $G_X \uparrow$ sur $\mathbb{R}_+$

D/ • $G_X(1) = \sum_{k=0}^N P(X=k) = \sum_{k \in X(\Omega)} P_X(k) = 1$

• On a $\forall t \in \mathbb{R}, G'_X(t) = \sum_{k=0}^N k P(X=k) t^{k-1}$
(k=1)

Donc $G'_X(1) = \sum_{k=0}^N k P(X=k) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X=x)$

C'est la réécriture gale de : $E(X)$



3) ^⑤ Réécriture gale de G_X

Soit $t \in \mathbb{R}$, on a $\underline{\Phi} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$
 $k \mapsto t^k$

Ex : $\underline{\Phi}_6(8) = t^8$ et $\underline{\Phi}_6(0) = t^0 = 1$

et $\underline{\Phi}_7(4) = t^4$

$\hat{X}$ est une VA ds $\mathbb{N}$ et $\hat{\Phi}_t: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$,
on peut considérer la VAR $\Phi_t(X)$

Fait : On a :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \Phi_t(X)(\omega) = t^{X(\omega)}$$

Dorénavant, si $t \in \mathbb{R}$, on notera $t^X := \Phi_t(X)$

C'est une VAR qui dépend.

Plus précisément* : c'est une famille de VAR :

$$\text{On a } (t^X)_{t \in \mathbb{R}} \in \text{VA}(\mathbb{R})$$

Calculons $E(t^X)$

$$\text{On a } E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k P(X=k)$$

$$\text{et } E(t^X) = E(\Phi_t(X))$$

Fait - $f^{\otimes 1} \oplus$

$$G_X(t) = E(t^X)$$

h) Fonction génératrice et indépendance

Prop: Soient X, Y VA ds $\mathbb{N}$ indépendantes

$$\text{Alors } G_{X+Y} = G_X \cdot G_Y$$

D/ Soit $t \in \mathbb{R} \cdot \mathbb{M}_q$ $G_{X+Y}(t) = G_X(t) \cdot G_Y(t)$

• Déjà: On a $t^{X+Y} = t^X \cdot t^Y$

• $\hat{C}$ $X \perp\!\!\!\perp Y$, par transfert d'indépendance,
on a $\Phi_t(X) \perp\!\!\!\perp \Phi_t(Y)$ ie $t^X \perp\!\!\!\perp t^Y$

cel :

$$\begin{aligned} E(t^{X+Y}) &= E(t^X t^Y) \stackrel{\text{par indépendance}}{=} E(t^X) E(t^Y) \\ &\stackrel{\text{}}{=} G_{X+Y}(t) = G_X(t) \cdot G_Y(t) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Corollaire :

$$\begin{array}{c} X_1, \dots, X_N \\ \text{VA ds } \mathbb{N} \end{array} \perp \Rightarrow G_{X_1 + \dots + X_n} = G_{X_1} \cdot G_{X_2} \cdot \dots \cdot G_{X_n}$$

D/ (AF) ■

VIII) Lois usuelles

1) Loi de Bernoulli

Def^o : Soit X VAR. Soit $p \in [0, 1]$.
On dit X suit la loi de Bernoulli
de paramètre p et on note
 $X \sim \mathcal{B}(p)$

Δ
ss :

- $X(\Omega) \subset \{0, 1\}$
- $P(X=1) = p$

Rq : On a alors nécessairement : $P(X=0) = 1-p$
Car $X(\Omega) = \{1, 0\}$, on a $P(X=0) + P(X=1) = 1$

Rq : ⑤ Soit $p \in [0, 1]$. Si X VA et si on a :

$$P(X=1) = p \text{ et } P(X=0) = 1-p$$

(Mais qu'on n'a pas nécessairement $X(\Omega) \subset \{0, 1\}$)

On dira quand même que $X \sim \mathcal{B}(p)$.

• Dans ce cas, on peut mg $\exists X' \forall A$ dans $\{0,1\}$:

$$X \stackrel{ps}{=} X'$$

Prop- R^X

Soit A év^t ie Soit $A \subset \Omega$

Alors $1_A \sim B(P(A))$

D/ Déjà : on a bien $1_A(\Omega) \subset \{0,1\}$

• Et on a $(1_A = 1) = A$

• Donc $P(1_A) = P(A)$ (AC)

b) $E(\cdot)$ et $V(\cdot)$

Prop ⁽¹⁾ : Soit X tq $X \sim B(p)$

$$1) E(X) = p$$

$$2) V(X) = pq \quad \text{où } q = 1-p$$

D/ 1) (R^X)

Reécriture f^{ale}

$$\text{On a } E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X=x) = \sum_{x \in \{0,1\}} x P(X=x)$$

$$= 0P(X=0) + 1P(X=1) = P(X=1) = p$$

■ 1)

$$2) \text{ On a } V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

or $\textcircled{1} X^2 = X$

$$\text{Donc } V(X) = E(X) - E(X)^2$$

$$= p - p^2 = p(1-p) = pq \blacksquare$$

Rq: L'idée de Bernoulli, c'est : on regarde une VA qui nous dit "échec" ou "succès"

2) Lois Binomiale

a) définition

Def°: Soit $p \in [0,1]$ et soit $n \in \mathbb{N}$

Soit X VA

On dit que X suit la loi binomiale de paramètre

(n, p) et on note $X \sim B(n, p)$ si :

- $X(\Omega) \subset [0, n]$

- $\forall k \in [0, n], P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Rq: Considérons une expérience aléatoire ξ qui peut se conclure par un succès (avec probab) ou un échec $(1-p)$.

Repetons n fois cette exp. ξ .

(Evidemment, osq les résultats de ces exp
sont ind les uns des autres)

Notons X le nb de succès : X VA dans $[0, n]$

b) formalisation de l'idée

Prop: Soit $p \in [0, 1]$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Soient $X_1, \dots, X_n$ VAR tq $\forall i, X_i \sim \mathcal{B}(p)$
et qui sont indépendantes.

Alors : $X_1 + \dots + X_n \sim \mathcal{B}(n, p)$

D/  Astuce : on utilise les fonctions génératrices

Déjà : c $X_1, \dots, X_n$ II, on a $G_S = G_{X_1} = \dots = G_{X_n}$

en notant $S := X_1 + \dots + X_n$

• Lemme :

$$X \sim \mathcal{B}(p) \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = (1-p) + pt$$

D/ AF/AL

• Donc, si $t \in \mathbb{R}$: $G_S(t) = ((1-p) + pt)^n$

• On cherche la loi de S ie "les coeffs de S "

Soit $t \in \mathbb{R}$. D'après Newton : on a

$$\begin{aligned} \left(\underbrace{(1-p)}_{\substack{\text{puissance} \\ n-k}} + \underbrace{pt}_{\substack{\text{puissance} \\ k}} \right)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1-p)^{n-k} (pt)^k \\ &= \sum_{k=0}^n P(S=k) t^k \end{aligned}$$

Donc : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(S=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

• De ④ : $S(\omega) \in \llbracket 0, n \rrbracket$ car $\forall i, X_i \in \{0, 1\}$

• Bilan : $X_1 + \dots + X_n \sim B(n, p)$ ■

c) Espérance et variance

Prop : ⑦

$$X \sim B(n, p) \Rightarrow \begin{aligned} 1) & E(X) = np \\ 2) & V(X) = npq \text{ où } q = 1-p \end{aligned}$$

D/ • On a $X_1, \dots, X_n$ VA II lq $\forall i, X_i \sim B(p)$

• On a $X_1 + \dots + X_n \sim X$

• Donc $E(X) = E(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = np$

et $V(X) = V(X_1 + \dots + X_n) \underset{\substack{\text{car les } X_i \text{ II}}}{=} \sum_{i=1}^n V(X_i)$

$$= npq$$

et

3) Loi uniforme

Rq: Ce ne sont pas forcément des VAR.

a) Définition

Def Soit E un ens fini
Soit X VA dans E .

On dit que X suit la loi uniforme sur E et

on note $X \sim \mathcal{U}(E)$ Δ_{ssi}

$$\forall x \in E, \quad P(X=x) = \frac{1}{\#E}$$

Ex: Si $X \sim \mathcal{U}(\{\text{pierre, feuille, ciseau}\})$, on a

$$P(X=\text{pierre}) = P(X=\text{feuille}) = P(X=\text{ciseau}) = \frac{1}{3}$$

• Si on lance un dé et que X est le n° de la face obtenue, alors :

$$X \sim \mathcal{U}([1,6])$$

b) Espérance et variance.

Prop [⊕]: Soit X VAR t_q $X \sim \mathcal{U}([1, n])$

Alors :

$$1) E(X) = \frac{1+n}{2}$$

$$2) V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

D/ 1) Réécriture ^{ale}

$$\text{On a } E(X) = \sum_{k=1}^n k P(X=k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{n} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)$$

$$2) \text{ Déjà : (K-H) } V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

• $\textcircled{R^n}$ F.le de transfert :

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^n k^2 P(X=k)$$

$$= \frac{1}{n} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\text{Puis } V(X) = \frac{(n+1)}{2} \left[\frac{2n+1}{3} - \frac{n+1}{2} \right]$$

$$= \frac{n+1}{2} \cdot \frac{4n+2-3n-3}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(n-1)}{12}$$

(exo)

$$\text{osq } X \sim \mathcal{U}([a, b])$$

$$(a < b)$$

$$1) \text{ Mg } E(X) = \frac{b+a}{2}$$

💡 Astuce : $Y := X - (a-1)$ Alors, on a
 $Y \sim \mathcal{U}([1, b-a+1])$

💡 Donc $E(X) = E(Y) + (a-1)$

$$= \frac{1 + (b-a) + 1}{2} = \frac{b-a}{2} + a$$

$$= \frac{b+a}{2} \quad \blacksquare$$

$$2) V(X) = ? \quad (\text{AF})$$

