Chapitre 34

Permutations

Camille JORDAN
(1838 – 1922)

Les permutations de $[\![1, n]\!]$ *forment un groupe, appelé* groupe symétrique d'indice n*, qu'on note*

$$\boxed{\mathfrak{S}_n}$$

C'est un objet assez simple à définir mais dont la structure est complexe. Le groupe des permutations intervient dans de nombreux domaines des mathématiques. C'est son étude qui a donné naissance à la théorie des groupes.

Jordan

Camille JORDAN *est un mathématicien français, connu à la fois pour son travail fondamental dans la théorie des groupes et pour son influent* Cours d'analyse*. Il fut professeur à l'École polytechnique et au Collège de France, où il avait une réputation de choix de notations excentriques.*

Il est souvent confondu avec Wilhelm JORDAN *(1842 – 1899), mathématicien allemand à qui l'on doit la méthode du pivot dite « de Gauss-Jordan ». Ce* JORDAN *se prononce* [Jordanne].

Sommaire

Dans tout ce chapitre, on fixe $n \geqslant 2$ un entier.

I. Permutations

1) Définition et premières propriétés

a) groupe symétrique

Définition PER. **1**

- *On appelle* permutation de $[\![1,n]\!]$ *toute bijection* $f : [\![1,n]\!] \longrightarrow [\![1,n]\!]$.
- *On note* $\mathfrak{S}_n$ *(ou* S_n*) l'ensemble des permutations de* $[\![1,n]\!]$.
- ▷ *Le triplet* $\left(\mathfrak{S}_n, \circ, \mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}\right)$ *est un groupe.*
  ▷ *On l'appelle* groupe symétrique d'indice n.

Remarques

- Les permutations seront souvent notées σ, τ, *etc.*
- On notera le neutre de ce groupe Id au lieu de $\mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}$ pour des raisons de concision et de clarté.

b) cardinal

Proposition PER. **2**

On a

$$\left|\mathfrak{S}_n\right| = n!$$

Démonstration. — On l'a déjà vue dans le chapitre « Dénombrement ». ■

c) une notation

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Notons $a_i := \sigma(i)$ pour $i \in [\![1,n]\!]$. On note alors

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

la permutation σ.

Exemple

- On suppose dans cet exemple que $n = 4$.
- On pose
$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$
- Alors, σ est la permutation qui envoie 1 sur 2, qui envoie 2 sur 3, qui envoie 3 sur 4 et, enfin, qui envoie 4 sur 1.

- On peut calculer σ^2. On calcule

$$\begin{aligned}\sigma^2(1) &= \sigma(\sigma(1)) = \sigma(2) = 3\\ \sigma^2(2) &= \sigma(\sigma(2)) = \sigma(3) = 4\\ \sigma^2(3) &= \sigma(\sigma(3)) = \sigma(4) = 1\\ \sigma^2(4) &= \sigma(\sigma(4)) = \sigma(1) = 2.\end{aligned}$$

On a donc

$$\sigma^2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice PER.**3**

a) Calculer σ^3 et σ^4.

b) Que remarque-t-on ?

....

....

....

....

2) Support d'une permutation

a) définition

Le *support* d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est l'ensemble des indices que σ« bouge » effectivement.
Plus préciscément :

Proposition PER.**4**
Le support σ *est la partie de* $[\![1, n]\!]$, *notée* $\mathsf{Supp}(\sigma)$, *définie par*

$$\mathsf{Supp}(\sigma) := \Big\{ i \in [\![1, n]\!] \mid \sigma(i) \neq i \Big\}.$$

Exemple

- On considère encore

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

- On a $\mathsf{Supp}(\sigma) = [\![1, 4]\!]$.

Remarque

Les éléments de $[\![1, n]\!]$ qui ne sont pas dans le support de σ sont exactement les points fixes de σ.

Exercice PER.**5**

Quelles sont les permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telles que $\mathsf{Supp}(\sigma) = \varnothing$?

b) permutations à support disjoint

Lemme PER. **6**
Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Alors,

1) *l'ensemble* $\mathsf{Supp}(\sigma)$ *est stable par* σ *;*
2) *autrement dit, on a*

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad i \in \mathsf{Supp}(\sigma) \implies \sigma(i) \in \mathsf{Supp}(\sigma).$$

Démonstration. — Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

- Montrons que $i \in \mathsf{Supp}(\sigma) \implies \sigma(i) \in \mathsf{Supp}(\sigma)$ en raisonnant par contraposition.
- Montrons donc que $\sigma(i) \notin \mathsf{Supp}(\sigma) \implies i \notin \mathsf{Supp}(\sigma)$.
- Supposons que $\sigma(i) \notin \mathsf{Supp}(\sigma)$. Notons $j \coloneqq \sigma(i)$. Comme $j \notin \mathsf{Supp}(\sigma)$, on a $\sigma(j) = j$. Autrement dit, on a $\sigma\big(\sigma(i)\big) = \sigma(i)$.
- Comme σ est injectif, on en déduit que $\sigma(i) = i$, ce qu'on voulait.

■

Remarque
Voici une autre façon de voir cette démonstration :

- l'ensemble des points fixes de σ est stable par σ ;
- comme σ est bijective, on a, pour tout $X \subset [\![1, n]\!]$,

$$X \text{ stable par } \sigma \iff [\![1, n]\!] \setminus X \text{ stable par } \sigma \text{ ;}$$

- d'où le résultat.

Proposition PER. **7**

- *Des permutations à supports disjoints commutent.*
- *Autrement dit,*

$$\forall \sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n, \qquad \mathsf{Supp}(\sigma) \cap \mathsf{Supp}(\tau) = \varnothing \implies \sigma\tau = \tau\sigma.$$

Démonstration. — Soient $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ telles que

$$\mathsf{Supp}(\sigma) \cap \mathsf{Supp}(\tau) = \varnothing.$$

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On distingue trois cas.

- On suppose que $i \in \mathsf{Supp}(\sigma)$.
  - ▷ Alors, d'après le lemme précédent, on a $\sigma(i) \in \mathsf{Supp}(\sigma)$. Donc, $\sigma(i) \notin \mathsf{Supp}(\tau)$. Donc,
  $$\tau\big(\sigma(i)\big) = \sigma(i).$$
  - ▷ De plus, comme $i \in \mathsf{Supp}(\sigma)$, on a $i \notin \mathsf{Supp}(\tau)$. Donc, $\tau(i) = i$.
  - ▷ Donc, on a $\sigma(i) = \sigma\big(\tau(i)\big)$.
  - ▷ Finalement, on a bien
  $$\tau\big(\sigma(i)\big) = \sigma\big(\tau(i)\big).$$
- On suppose que $i \in \mathsf{Supp}(\tau)$: on procède de même.
- On suppose que $i \notin \mathsf{Supp}(\sigma)$ et $i \notin \mathsf{Supp}(\tau)$. On a alors $\sigma(i) = i$ et $\tau(i) = i$. On en déduit que
$$\sigma\big(\tau(i)\big) = \sigma(i) = i.$$
De même, $\tau\big(\sigma(i)\big) = i$.

D'où le résultat. ■

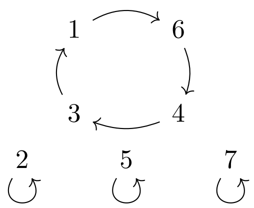
3) Cycles

a) un exemple

Considérons la permutation

$$\sigma \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 2 & 1 & 3 & 5 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

On peut la représenter de la façon suivante :



C'est un *cycle*. On note aussi cette permutation

$$\boxed{(1\ 6\ 4\ 3).}$$

b) définition

Définition PER. **8**

- *Soient $i_1, i_2, \ldots, i_\ell$ des éléments de $[\![1, n]\!]$ deux à deux distincts.*
  On note
  $$\boxed{\sigma \coloneqq (i_1\ i_2\ \cdots\ i_\ell)}$$
  la permutation définie par
  $$\begin{aligned} \sigma(i_1) &= i_2, \\ \sigma(i_2) &= i_3, \\ &\vdots \\ \sigma(i_{\ell-1}) &= i_\ell \\ \sigma(i_\ell) &= i_1, \end{aligned}$$
  et $\sigma(i) = i$ quand $i \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_\ell\}$.
- *On dit alors que σ est un* cycle*, de longueur ℓ.*

Remarques

- Le support de $(i_1\ i_2\ \cdots\ i_\ell)$ est l'ensemble $\{i_1, i_2, \ldots, i_\ell\}$.
- On voit ainsi que des cycles qui ont même support ne sont pas nécessairement égaux.
- On parle aussi de *permutation circulaire*.

Exemple

- On considère le cycle
  $$\sigma \coloneqq (1\ 4\ 5) \in \mathfrak{S}_6.$$
- On a alors
  $$(1\ 4\ 5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 3 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Exercice PER. **9**
Calculer $(1\ 4\ 5)(2\ 4\ 3)$.

....

....

....

4) Transpositions

Définition PER. **10**
Une transposition *est un cycle de longueur* 2.

Exemples
Les permutations

$$(1\ 5),\quad (4\ 2),\quad (1\ 3)$$

sont toutes des transpositions de $\mathfrak{S}_5$.

5) Décomposition en produit de cycles à supports disjoints

Théorème PER. **11**
1) *Toute permutation peut s'écrire comme produit de cycles à supports disjoints.*
2) *Cette écriture est unique à l'ordre près des facteurs.*

Démonstration. — ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

.... ■

Exercice PER. **12**

Donner la décomposition en cycles à supports disjoints de

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 10 & 4 & 2 & 7 & 11 & 9 & 8 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

....

....

....

....

6) Les transpositions engendrent $\mathfrak{S}_n$

Théorème PER. **13**

1) *Les transpositions engendrent* $\mathfrak{S}_n$.
2) *Autrement dit,*

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \exists \tau_1, \dots, \tau_N \text{ transpositions} :\quad \sigma = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_N.$$

Démonstration. — ....

....

....

....

....

....

.... ■

7) Permutations conjuguées

a) définition

Définition PER.**14**
Soient $x, y \in \mathfrak{S}_n$. On dit que x et *y* sont conjuguées $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\exists \sigma \in \mathfrak{S}_n : \quad x = \sigma y \sigma^{-1}.$$

Remarques

- Cette définition est en fait valable dans un groupe G quelconque.
- On retrouve également une grande similitude avec la définition des matrices semblables.
- En général, si x et y sont conjugués alors « philosophiquement » et informellement, x et y sont des objets identiques mais vus d'un point de vue différent.

b) conjugaison des cycles

Proposition PER.**15**
Soit $\ell \in [\![1, n]\!]$ et soient $i_1, \ldots, i_\ell \in [\![1, n]\!]$ deux à deux distincts.
Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Alors, on a

$$\sigma\,(i_1 \; i_2 \; \cdots \; i_\ell)\,\sigma^{-1} = \big(\sigma(i_1) \; \sigma(i_2) \; \cdots \; \sigma(i_\ell)\big).$$

Démonstration. — ....

....

....

....

....

....

....

....

■

Corollaire PER. 16

1) *Soit $\ell \in \llbracket 2, n\rrbracket$.*
   Tous les cycles de longueur ℓ sont conjugués (deux à deux).
2) *Toutes les transpositions sont conjuguées (deux à deux).*

Démonstration. — Elle est laissée au lecteur à titre d'exercice. ■

II. Signature d'une permutation

1) Inversions d'une permutation

a) définition

Définition PER. **17**
Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

- *Une* inversion de σ *est un couple* $(i, j) \in [\![1, n]\!]$ *tel que*
$$i < j \qquad \text{et} \qquad \sigma(i) > \sigma(j).$$
- *On note* $\mathsf{Inv}(\sigma)$ *l'ensemble des inversions de* σ.
- *On note* $\mathsf{N}(\sigma)$ *le nombre d'inversions de* σ *; autrement dit, on pose*
$$\mathsf{N}(\sigma) := \big|\mathsf{Inv}(\sigma)\big|.$$

Exemples

- Considérons la permutation
$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 4 & 5 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$
Alors, on a $\sigma(1) = 3$ et $\sigma(5) = 1$; donc, on a $1 < 5$ et $\sigma(1) > \sigma(5)$: $(1, 5)$ est une inversion de σ.
- Voyons un autre exemple et considérons
$$\sigma := (1\ 2\ 3)(4\ 5) \in \mathfrak{S}_5.$$
Alors, on a $\sigma(1) = 2$ et $\sigma(3) = 1$; donc, on a $1 < 3$ et $\sigma(1) > \sigma(3)$: $(1, 3)$ est une inversion de σ.

b) nombre d'inversions d'un produit

Proposition PER. **18**
Soient $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$. Alors,
$$\mathsf{N}(\sigma\tau) \equiv \mathsf{N}(\sigma) + \mathsf{N}(\tau)\ [2].$$

Démonstration. — La preuve de ce résultat est l'objet de la dernière partie. ∎

2) Signature d'une permutation

a) définition

♛ **Définition** PER. **19**
Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.
La signature de σ, *notée* $\varepsilon(\sigma)$, *est l'élément de* $\{-1, 1\}$ *défini par*
$$\boxed{\varepsilon(\sigma) := (-1)^{\mathsf{N}(\sigma)}.}$$

Remarques

- Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Autrement dit :
  - ▷ si σ possède un nombre pair d'inversions, on a $\varepsilon(\sigma) = 1$;
  - ▷ si σ possède un nombre impair d'inversions, on a $\varepsilon(\sigma) = -1$.
- Comme Id ne possède aucune inversion, on a $\mathrm{N}(\mathrm{Id}) = 0$; ainsi, on a déjà

$$\boxed{\varepsilon(\mathrm{Id}) = 1.}$$

b) permutations paires et impaires

Définition PER. **20**
Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On dit que

- σ est paire $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\varepsilon(\sigma) = 1$;
- σ est impaire $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\varepsilon(\sigma) = -1$.

c) la signature est un morphisme

♛ **Proposition** PER. **21**
Soient $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$. On a

$$\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau).$$

Démonstration. — Cela découle directement de la proposition PER. 18. ■

♛ **Corollaire** PER. **22**
L'application

$$\varepsilon : \begin{cases} \mathfrak{S}_n \longrightarrow \{-1, 1\} \\ \sigma \longmapsto \varepsilon(\sigma) \end{cases}$$

est un morphisme de groupes.

Remarque

- Une propriété générale des morphismes de groupes $\varphi : G \longrightarrow H$ est que $\varphi(e_G) = e_H$.
- On a donc $\varepsilon\big(\mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}\big) = 1$.

d) signature des transpositions

Proposition PER. **23**
Soit $\tau \in \mathfrak{S}_n$ une transposition. Alors, on a

$$\varepsilon(\tau) = -1.$$

Démonstration. —

- Déjà, on a vu que toutes les transpositions étaient conjuguées entre elles. Fixons donc $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que
$$\tau = \sigma\ (1\ 2)\ \sigma^{-1}.$$
- On a donc
$$\begin{aligned}\varepsilon(\tau) &= \varepsilon(\sigma)\ \varepsilon\big((1\ 2)\big)\ \varepsilon(\sigma^{-1})\\ &= \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma^{-1})\ \varepsilon\big((1\ 2)\big)\\ &= \varepsilon(\sigma\sigma^{-1})\ \varepsilon\big((1\ 2)\big)\\ &= \varepsilon\big(\mathsf{Id}_{[\![1,n]\!]}\big)\ \varepsilon\big((1\ 2)\big)\\ &= \varepsilon\big((1\ 2)\big).\end{aligned}$$
- Il suffit donc de montrer que $\varepsilon\big((1\ 2)\big) = -1$.
- Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i < j$. On va compter les inversions de $\tau_0 := (1\ 2)$ en distinguant des cas.
  - ▷ Si $i = 1$ et $j = 2$: alors, $(i, j) \in \mathsf{Inv}(\tau_0)$.
  - ▷ Si $i = 1$ et $j \geqslant 3$: comme $\tau_0(j) = j$, $(i, j) \notin \mathsf{Inv}(\tau_0)$.
  - ▷ Si $i = 2$ et $j \geqslant 3$: comme $\tau_0(j) = j$, $(i, j) \notin \mathsf{Inv}(\tau_0)$.
  - ▷ Si $i \geqslant 3$: $(i, j) \notin \mathsf{Inv}(\tau_0)$.
- Ainsi, on a $\mathsf{N}(\tau_0) = 1$ et donc $\varepsilon(\tau) = \varepsilon(\tau_0) = -1$.

■

Exercice PER. **24**
Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ un cycle. Trouver une formule donnant $\varepsilon(\sigma)$ en fonction de la longueur de σ.

e) caractérisation de la signature

Proposition PER. **25**
Il existe un unique morphisme de groupes $\varphi : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \{-1, 1\}$ envoyant toute transposition sur -1.

Démonstration. —

- La signature vérifie ces conditions, ce qui prouve l'existence.
- Pour l'unicité, il suffit de remarquer que les transpositions engendrent $\mathfrak{S}_n$. Si deux morphismes prennent les mêmes valeurs sur l'ensemble des transpositions, il seront donc égaux partout.

■

Exercice PER. **26**
Montrer qu'il existe exactement deux morphismes de groupes $\varphi : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \{-1, 1\}$.

3) Une autre expression de la signature d'une permutation

Proposition PER.**27**
Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Alors, on a

$$\boxed{\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.}$$

Démonstration. —

- Notons $\mathsf{P} := \mathscr{P}_2([\![1, n]\!])$ l'ensemble des parties à deux éléments de $[1, n]$.
- ▷ Si $\{i, j\} \in \mathsf{P}$, on a
$$\frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} = \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}.$$
  ▷ On peut donc définir
$$A := \prod_{\{i,j\} \in \mathsf{P}} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$
- De même, les produits
$$\prod_{\{i,j\} \in \mathsf{P}} |i - j| \qquad \text{et} \qquad \prod_{\{i,j\} \in \mathsf{P}} |\sigma(j) - \sigma(i)|$$
  sont bien définis.
- On peut ainsi écrire
$$|A| = \frac{\displaystyle\prod_{\{i,j\} \in \mathsf{P}} |\sigma(j) - \sigma(i)|}{\displaystyle\prod_{\{i,j\} \in \mathsf{P}} |i - j|}.$$
- Or, l'application
$$\begin{aligned} \mathsf{P} &\longrightarrow \mathsf{P} \\ \{i, j\} &\longmapsto \{\sigma(i), \sigma(j)\} \end{aligned}$$
  est une bijection. Donc, on a
$$\prod_{\{i,j\} \in \mathsf{P}} |i - j| = \prod_{\{i,j\} \in \mathsf{P}} |\sigma(j) - \sigma(i)|.$$
  Donc $|A| = 1$ et donc $A = \pm 1$.
- Maintenant, considérons l'application
$$\mathsf{sgn} : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{Q}^* & \longrightarrow & \{-1, 1\} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array} \right.$$
  On a
$$\forall x, y \in \mathbb{Q}^*, \quad \begin{cases} \mathsf{sgn}(xy) = \mathsf{sgn}(x)\,\mathsf{sgn}(y) \\ \mathsf{sgn}\left(\dfrac{x}{y}\right) = \dfrac{\mathsf{sgn}(x)}{\mathsf{sgn}(y)}. \end{cases}$$
- Comme $A = \pm 1$, on a $A = \mathsf{sgn}(A)$.
- Or, comme tout $c \in \mathsf{P}$ s'écrit d'une unique manière $\{i, j\}$ avec $i < j$, on a
$$A = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

- Ainsi, on peut écrire

$$\begin{aligned} A = \mathsf{sgn}(A) &= \mathsf{sgn}\left(\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}\right) \\ &= \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{\mathsf{sgn}\big(\sigma(j)-\sigma(i)\big)}{\mathsf{sgn}(j-i)} \\ &= \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathsf{sgn}\big(\sigma(j)-\sigma(i)\big). \end{aligned}$$

  En effet, dans ce produit, on a toujours $j>i$ et donc $\mathsf{sgn}(j-i)=1$.
- Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$.
  - ▷ Si $(i,j)\in\mathsf{Inv}(\sigma)$, on a $\mathsf{sgn}\big(\sigma(j)-\sigma(i)\big)=-1$.
  - ▷ Sinon, on a $\mathsf{sgn}\big(\sigma(j)-\sigma(i)\big)=1$.
- Donc, on a

$$A = \prod_{\substack{1\leqslant i<j\leqslant n \\ (i,j)\in\mathsf{Inv}(\sigma)}} -1 = (-1)^{\mathsf{N}(\sigma)},$$

  ce qu'on voulait démontrer.

■

Remarque

- L'application

$$\mathsf{sgn} : \mathbb{Q}^* \longrightarrow \{-1,1\}$$

  est un morphisme de groupes.
- Plus précisément, c'est un morphisme de groupes de $(\mathbb{Q}^*,\times)$ dans $\big(\{-1,1\},\times\big)$.

III. Ensemble des inversions du produit de deux permutations

1) Semi-anneau des parties d'un ensemble

Soit E un ensemble.

a) somme et conjonction

On va travailler dans $\mathscr{P}(E)$, qu'on note X.

Si $x, y \in X$, on note

$$\boxed{\begin{aligned} x + y &\coloneqq x \cup y \\ x \bullet y &\coloneqq x \cap y. \end{aligned}}$$

Par convention, l'opération « $\bullet$ » est prioritaire sur « $+$ », comme on en a l'habitude.

On note aussi $1 \coloneqq E$ et $0 \coloneqq \varnothing$.

On peut montrer que $(X, +, 0)$ et $(X, \bullet, 1)$ sont des monoïdes commutatifs et que

$$\forall x, y, z \in X, \ \ (x + y) \bullet z = x \bullet z + y \bullet z.$$

b) somme disjointe

Si $x, y \in X$ sont disjoints, on note $x \oplus y$ au lieu $x + y$. On a encore

$$\forall x, y, z \in X, \ \ (x \oplus y) \bullet z = x \bullet z \oplus y \bullet z.$$

c) soustraction

Si $y \subset x$, on note $\boxed{x - y \coloneqq x \setminus y.}$ On a encore

$$\forall x \in X, \forall y \subset x, \forall z \in X, \quad (x - y) \bullet z = x \bullet z - y \bullet z.$$

d) action des bijections

Si $f : E \longrightarrow E$ est bijective, et si $x \in X$, on note

$$f(x) \coloneqq \big\{ f(a) \ ; \ a \in x \big\}.$$

On a alors,

$$\begin{aligned} \forall x, y \in X, \quad & f(x + y) = f(x) + f(y) \\ \forall x, y \in X, \quad & f(xy) = f(x) f(y) \\ \forall x \in X, \forall y \subset x, \quad & f(x - y) = f(x) - f(y) \\ & f(1) = 1. \end{aligned}$$

Enfin, si $g : E \longrightarrow E$ est une autre bijection, on a $\forall x \in X, \ (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$.

e) compatibilité au cardinal

Si E est fini, on a, pour tous $x, y \in X$,

$$\begin{aligned} |x \oplus y| &= |x| + |y| \\ |x - y| &= |x| - |y| \qquad \text{si } y \subset x \\ |f(x)| &= |x| \qquad \text{si } f \text{ est bijective} \end{aligned}$$

2) Cas où E est l'ensemble des couples d'entiers distincts

a) cadre

On se place maintenant sur l'ensemble E des couples d'éléments distincts : on pose

$$\mathsf{E} \coloneqq \big\{ (i, j) \in [\![1, n]\!]^2 \ \big| \ i \neq j \big\} \qquad \text{et} \qquad \mathsf{X} \coloneqq \mathscr{P}(\mathsf{E}).$$

On pose aussi

$$p \coloneqq \big\{ (i, j) \in \mathsf{E} \ \big| \ i < y \big\} \qquad \text{et} \qquad n \coloneqq \big\{ (i, j) \in \mathsf{E} \ \big| \ i > y \big\}.$$

On a $1 = n \oplus p$.

b) échange des éléments

On note

$$\Theta : \begin{cases} \mathsf{E} \longrightarrow \mathsf{E} \\ (i,j) \longmapsto (j,i). \end{cases}$$

On pose, si $x \in X$, $\boxed{\overline{x} \coloneqq \Theta(x).}$ Comme Θ est bijective, on a

$$\forall x, y \in \mathsf{X}, \quad \begin{cases} \overline{x \bullet y} = \overline{x} \bullet \overline{y} \\ \overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y} \\ |\overline{x}| = |x|. \end{cases}$$

On a $\overline{p} = n$.

c) action des permutations

Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et si $x \in \mathsf{X}$, on pose

$$\sigma(x) \coloneqq \big\{ \big(\sigma(i), \sigma(j)\big) \ ; \ (i,j) \in x \big\}.$$

Si $x, y \in \mathsf{X}$ et si $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$, on a (comme précédemment)

$$\begin{gathered} \sigma(x+y) = \sigma(x) + \sigma(y) \\ \sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y) \\ \sigma(x-y) = \sigma(x) - \sigma(y) \\ (\sigma\tau)(x) = \sigma\big(\tau(x)\big) \\ \sigma(1) = 1. \end{gathered}$$

Enfin, on peut vérifier que $\forall x \in \mathsf{X}$, $\overline{\sigma(x)} = \sigma(\overline{x})$.

3) Inversions d'un produit de deux permutations

a) inversions d'un produit

Proposition PER.**28**

Soient $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$. Alors,

$$\mathsf{Inv}(\sigma\tau) = \Big(\tau^{-1}\big(\mathsf{Inv}(\sigma)\big) - C\Big) \oplus \Big(\mathsf{Inv}(\tau) - \overline{C}\Big),$$

où $C \coloneqq n \bullet (\sigma\tau)^{-1}(n) \bullet \tau^{-1}(p)$.

Démonstration. —

- Déjà, remarquons que $\mathsf{Inv}(\sigma) = p \bullet \sigma^{-1}(n)$.
- On a donc
$$\mathsf{Inv}(\sigma\tau) = p \bullet \tau^{-1}\big(\sigma^{-1}(n)\big) = \tau^{-1}\Big(\tau(p) \bullet \sigma^{-1}(n)\Big).$$
- De plus, on a
$$\tau(p) \bullet \sigma^{-1}(n) = \tau(p) \bullet \sigma^{-1}(n) \bullet (p \oplus n) = \underbrace{\tau(p) \bullet \sigma^{-1}(n) \bullet p}_{A} \ \oplus \ \underbrace{\tau(p) \bullet \sigma^{-1}(n) \bullet n}_{B}.$$
- On a ainsi $\mathsf{Inv}(\sigma\tau) = \tau^{-1}(A) \oplus \tau^{-1}(B)$.
- Réexprimons A puis $\tau^{-1}(A)$.
  - ▷ On a
$$\begin{aligned} A = \tau(p) \bullet \sigma^{-1}(n) \bullet p &= \tau(1-n) \bullet \sigma^{-1}(n) \bullet p \\ &= \tau(1) \bullet \sigma^{-1}(n) \bullet p \ - \ \tau(n) \bullet \sigma^{-1}(n) \bullet p \\ &= \sigma^{-1}(n) \bullet p \ - \ \tau(n) \bullet \sigma^{-1}(n) \bullet p \\ &= \mathsf{Inv}(\sigma) \ - \ \tau(n) \bullet \sigma^{-1}(n) \bullet p. \end{aligned}$$

▷ Donc,
$$\tau^{-1}(A) = \tau^{-1}\big(\mathsf{Inv}(\sigma)\big) \; - \; n \bullet (\sigma\tau)^{-1}(n) \bullet \tau^{-1}(p).$$

▷ Si on pose $C \coloneqq n \bullet (\sigma\tau)^{-1}(n) \bullet \tau^{-1}(p)$, on a ainsi
$$\tau^{-1}(A) = \tau^{-1}\big(\mathsf{Inv}(\sigma)\big) - C.$$

- Venons-en maintenant à B.

▷ On a
$$\begin{aligned} B = \tau(p) \bullet \sigma^{-1}(n) \bullet n &= \tau(p) \bullet \sigma^{-1}(1-p) \bullet n \\ &= \tau(p) \bullet \sigma^{-1}(1) \bullet n \; - \; \tau(p) \bullet \sigma^{-1}(p) \bullet n \\ &= \tau(p) \bullet n \; - \; \tau(p) \bullet \sigma^{-1}(p) \bullet n. \end{aligned}$$

▷ Donc,
$$\begin{aligned} \tau^{-1}(B) &= p \bullet \tau^{-1}(n) \; - \; p \bullet (\sigma\tau)^{-1}(p) \bullet \tau^{-1}(n) \\ &= \mathsf{Inv}(\tau) \; - \; p \bullet (\sigma\tau)^{-1}(p) \bullet \tau^{-1}(n). \end{aligned}$$

▷ On remarque que le dernier terme est exactement égal à $\overline{C}$. On a donc
$$\tau^{-1}(B) = \mathsf{Inv}(\tau) - \overline{C}.$$

- Cela conclut.

■

b) nombre d'inversions d'un produit

Corollaire PER. **29**
Soient $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$. Alors,
$$\mathsf{N}(\sigma\tau) \equiv \mathsf{N}(\sigma) + \mathsf{N}(\tau) \; [2].$$

Démonstration. — En utilisant les propriétés générales dégagées plus haut, c'est une conséquence immédiate de la proposition précédente. En effet, on a
$$\begin{aligned} \big|\mathsf{Inv}(\sigma\tau)\big| &= \Big|\Big(\tau^{-1}\big(\mathsf{Inv}(\sigma)\big) - C\Big) \oplus \Big(\mathsf{Inv}(\tau) - \overline{C}\Big)\Big| \\ &= \Big|\tau^{-1}\big(\mathsf{Inv}(\sigma)\big) - C\Big| + \Big|\mathsf{Inv}(\tau) - \overline{C}\Big| \\ &= \Big(\Big|\tau^{-1}\big(\mathsf{Inv}(\sigma)\big)\Big| - |C|\Big) + \Big(\big|\mathsf{Inv}(\tau)\big| - |\overline{C}|\Big) \\ &= \big|\mathsf{Inv}(\sigma)\big| + \big|\mathsf{Inv}(\tau)\big| - 2|C|. \end{aligned}$$

■