Colas Bardavid

Chapitre 35

Déterminants

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

Formule explicite donnant le déterminant d'une matrice $A \in \mathrm{M}_n(K)$

Dans ce chapitre, on étudie l'application

$$\det : \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

qui à toute matrice carrée A associe un « nombre », noté $\det A$ *et appelé* déterminant de A.

Cette application vérifie plusieurs propriétés très puissantes qui font du déterminant un outil hors-pair. On verra entre autres :

- $\det(\mathrm{I}_n) = 1$;
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$;
- $\det(A) \neq 0 \iff A$ *inversible.*

Lycée CHATEAUBRIAND
MPSI 3

Colas Bardavid

35
Déterminants

plan de cours et principaux résultats

I. Multilinéarité et caractère alterné

1) Applications multilinéaires

a) définition

b) propriétés

2) Applications multilinéaires alternées

a) définition

b) propriétés

II. Déterminant en dimension 2 et 3

1) Déterminant en dimension 2

a) définition

b) propriétés

2) Déterminant en dimension 3

a) définition

b) formule de Sarrus

III. Déterminant : cas général

1) Définition et corollaire fondamental

a) définition

Théorème-Définition 35.1

- *Il existe une unique* $f : \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ *multilinéaire alternée telle que* $f(\mathrm{I}_n) = 1$.
- *On l'appelle* déterminant *et elle est notée* det.

b) corollaire fondamental

2) Déterminant et opérations sur les colonnes

Proposition 35.2

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

1) *Si* A *possède une colonne nulle,* $\det(A) = 0$.
2) *Si* A *possède deux colonnes identiques,* $\det(A) = 0$.
3) *Si une colonne de* A *est combinaison linéaire des autres,* $\det A = 0$.
4) *Échanger deux colonnes de* A *multiplie le déterminant par* -1.
5) *Une transvection sur les colonnes de* A *ne change pas le déterminant.*
6) *Plus généralement, ajouter à une colonne de* A *une combinaison linéaire des autres colonnes de* A *ne change pas le déterminant.*

3) Une propriété fausse

4) Propriétés multiplicatives du déterminant

a) multiplicativité du déterminant

Théorème 35.3 Ⓣ

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

b) la non-nullité du déterminant caractérise les matrices inversibles

Corollaire 35.4 Ⓣ

1) *On a* $\qquad A$ *inversible* $\iff \det(A) \neq 0.$
2) *Dans ce cas, on a*

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

5) Déterminant des matrices triangulaires supérieures

a) énoncé

Proposition 35.5 Ⓣ

1) *On a*

$$\begin{vmatrix} \boxed{A_1} & & & (*) \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \boxed{A_p} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{p} \det(A_i).$$

2) *En particulier,*

$$\begin{vmatrix} a_1 & * & \dots & * \\ & a_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ (0) & & & a_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_i.$$

b) exemple

c) démonstration

6) Déterminant de la transposée

a) un rappel

Proposition 35.6 Ⓣ

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible. Alors, A peut s'écrire

$$A = P_1 P_2 \cdots P_N$$

où les P_i sont des matrices d'opération élémentaire.

b) le résultat

Proposition 35.7 Ⓣ

$$\det(A) = \det(A^{\mathsf{T}})$$

c) corollaires importants

Proposition 35.8 Ⓣ

Tout ce qui vaut sur les colonnes concernant le déterminant de A vaut également sur les lignes.

7) Développement selon une ligne ou selon une colonne

a) notations

b) énoncé

c) démonstration

d) exemple

8) Comatrice

a) définition

b) formule de la comatrice

Proposition 35.9 Ⓣ

1) *On a*

$$A\mathsf{Com}(A)^{\mathsf{T}} = \det(A)\mathrm{I}_n \quad \textit{et} \quad \mathsf{Com}(A)^{\mathsf{T}} A = \det(A)\mathrm{I}_n.$$

2) *Si A est inversible, on a*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathsf{Com}\, A.$$

9) Déterminant des matrices de Vandermonde

a) définition

b) déterminant des matrices de Vandermonde

Proposition 35.10 Ⓣ

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & {x_1}^2 & \dots & {x_1}^{n-1} \\ 1 & x_2 & {x_2}^2 & \dots & {x_2}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & {x_n}^2 & \dots & {x_n}^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i).$$

IV. Formes n-linéaires alternées

1) Définition

a) définition

b) premières remarques

2) Premières propriétés

3) Démonstration du théorème fondamental

a) expression d'une forme n-linéaire alternée

b) théorème fondamental

Théorème 35.11

Soit E un espace vectoriel de dimension n.
Alors, l'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E est de dimension 1.

c) démonstration du théorème fondamental

4) Expression du déterminant en fonction de coefficients

a) première formule

Théorème 35.12

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Alors, on a

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}.$$

b) deuxième formule

V. Interprétation géométrique du déterminant

1) En dimension 2

2) En dimension 3

3) En dimension n

Déterminant en dimension 2, 3 et 4

En dimension 2

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

En dimension 3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

C'est la *formule de Sarrus.*
Elle est très symétrique mais elle ne se généralise pas du tout en dimension supérieure !

En dimension 4

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{gathered} a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} \\ -a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} \\ +a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} \\ -a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} \\ -a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} \end{gathered}$$

En dimension 5

La formule fait intervenir une somme de 120 termes, chacun de ces termes étant un produit de cinq coefficients de la matrice.

Formule générale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice. Alors, on a

$$\boxed{\det A = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}.}$$

où, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, l'entier $\varepsilon(\sigma)$ est la signature de σ, vérifiant

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}.$$

Lycée CHATEAUBRIAND
Colas Bardavid

Déterminant en dimension 5

Voici l'unique $f : \mathrm{M}_5(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ multilinéaire antisymétrique telle que $f(\mathrm{I}_5) = 1$.

La somme contient 120 termes.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} \end{vmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{aligned}
& a_{1,5}a_{2,4}a_{3,3}a_{4,2}a_{5,1} - a_{1,4}a_{2,5}a_{3,3}a_{4,2}a_{5,1} - a_{1,5}a_{2,3}a_{3,4}a_{4,2}a_{5,1} + a_{1,3}a_{2,5}a_{3,4}a_{4,2}a_{5,1} \\
& + a_{1,4}a_{2,3}a_{3,5}a_{4,2}a_{5,1} - a_{1,3}a_{2,4}a_{3,5}a_{4,2}a_{5,1} - a_{1,5}a_{2,4}a_{3,2}a_{4,3}a_{5,1} + a_{1,4}a_{2,5}a_{3,2}a_{4,3}a_{5,1} \\
& + a_{1,5}a_{2,2}a_{3,4}a_{4,3}a_{5,1} - a_{1,2}a_{2,5}a_{3,4}a_{4,3}a_{5,1} - a_{1,4}a_{2,2}a_{3,5}a_{4,3}a_{5,1} + a_{1,2}a_{2,4}a_{3,5}a_{4,3}a_{5,1} \\
& + a_{1,5}a_{2,3}a_{3,2}a_{4,4}a_{5,1} - a_{1,3}a_{2,5}a_{3,2}a_{4,4}a_{5,1} - a_{1,5}a_{2,2}a_{3,3}a_{4,4}a_{5,1} + a_{1,2}a_{2,5}a_{3,3}a_{4,4}a_{5,1} \\
& + a_{1,3}a_{2,2}a_{3,5}a_{4,4}a_{5,1} - a_{1,2}a_{2,3}a_{3,5}a_{4,4}a_{5,1} - a_{1,4}a_{2,3}a_{3,2}a_{4,5}a_{5,1} + a_{1,3}a_{2,4}a_{3,2}a_{4,5}a_{5,1} \\
& + a_{1,4}a_{2,2}a_{3,3}a_{4,5}a_{5,1} - a_{1,2}a_{2,4}a_{3,3}a_{4,5}a_{5,1} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,4}a_{4,5}a_{5,1} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,4}a_{4,5}a_{5,1} \\
& - a_{1,5}a_{2,4}a_{3,3}a_{4,1}a_{5,2} + a_{1,4}a_{2,5}a_{3,3}a_{4,1}a_{5,2} + a_{1,5}a_{2,3}a_{3,4}a_{4,1}a_{5,2} - a_{1,3}a_{2,5}a_{3,4}a_{4,1}a_{5,2} \\
& - a_{1,4}a_{2,3}a_{3,5}a_{4,1}a_{5,2} + a_{1,3}a_{2,4}a_{3,5}a_{4,1}a_{5,2} + a_{1,5}a_{2,4}a_{3,1}a_{4,3}a_{5,2} - a_{1,4}a_{2,5}a_{3,1}a_{4,3}a_{5,2} \\
& - a_{1,5}a_{2,1}a_{3,4}a_{4,3}a_{5,2} + a_{1,1}a_{2,5}a_{3,4}a_{4,3}a_{5,2} + a_{1,4}a_{2,1}a_{3,5}a_{4,3}a_{5,2} - a_{1,1}a_{2,4}a_{3,5}a_{4,3}a_{5,2} \\
& - a_{1,5}a_{2,3}a_{3,1}a_{4,4}a_{5,2} + a_{1,3}a_{2,5}a_{3,1}a_{4,4}a_{5,2} + a_{1,5}a_{2,1}a_{3,3}a_{4,4}a_{5,2} - a_{1,1}a_{2,5}a_{3,3}a_{4,4}a_{5,2} \\
& - a_{1,3}a_{2,1}a_{3,5}a_{4,4}a_{5,2} + a_{1,1}a_{2,3}a_{3,5}a_{4,4}a_{5,2} + a_{1,4}a_{2,3}a_{3,1}a_{4,5}a_{5,2} - a_{1,3}a_{2,4}a_{3,1}a_{4,5}a_{5,2} \\
& - a_{1,4}a_{2,1}a_{3,3}a_{4,5}a_{5,2} + a_{1,1}a_{2,4}a_{3,3}a_{4,5}a_{5,2} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,4}a_{4,5}a_{5,2} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,4}a_{4,5}a_{5,2} \\
& + a_{1,5}a_{2,4}a_{3,2}a_{4,1}a_{5,3} - a_{1,4}a_{2,5}a_{3,2}a_{4,1}a_{5,3} - a_{1,5}a_{2,2}a_{3,4}a_{4,1}a_{5,3} + a_{1,2}a_{2,5}a_{3,4}a_{4,1}a_{5,3} \\
& + a_{1,4}a_{2,2}a_{3,5}a_{4,1}a_{5,3} - a_{1,2}a_{2,4}a_{3,5}a_{4,1}a_{5,3} - a_{1,5}a_{2,4}a_{3,1}a_{4,2}a_{5,3} + a_{1,4}a_{2,5}a_{3,1}a_{4,2}a_{5,3} \\
& + a_{1,5}a_{2,1}a_{3,4}a_{4,2}a_{5,3} - a_{1,1}a_{2,5}a_{3,4}a_{4,2}a_{5,3} - a_{1,4}a_{2,1}a_{3,5}a_{4,2}a_{5,3} + a_{1,1}a_{2,4}a_{3,5}a_{4,2}a_{5,3} \\
& + a_{1,5}a_{2,2}a_{3,1}a_{4,4}a_{5,3} - a_{1,2}a_{2,5}a_{3,1}a_{4,4}a_{5,3} - a_{1,5}a_{2,1}a_{3,2}a_{4,4}a_{5,3} + a_{1,1}a_{2,5}a_{3,2}a_{4,4}a_{5,3} \\
& + a_{1,2}a_{2,1}a_{3,5}a_{4,4}a_{5,3} - a_{1,1}a_{2,2}a_{3,5}a_{4,4}a_{5,3} - a_{1,4}a_{2,2}a_{3,1}a_{4,5}a_{5,3} + a_{1,2}a_{2,4}a_{3,1}a_{4,5}a_{5,3} \\
& + a_{1,4}a_{2,1}a_{3,2}a_{4,5}a_{5,3} - a_{1,1}a_{2,4}a_{3,2}a_{4,5}a_{5,3} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,4}a_{4,5}a_{5,3} + a_{1,1}a_{2,2}a_{3,4}a_{4,5}a_{5,3} \\
& - a_{1,5}a_{2,3}a_{3,2}a_{4,1}a_{5,4} + a_{1,3}a_{2,5}a_{3,2}a_{4,1}a_{5,4} + a_{1,5}a_{2,2}a_{3,3}a_{4,1}a_{5,4} - a_{1,2}a_{2,5}a_{3,3}a_{4,1}a_{5,4} \\
& - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,5}a_{4,1}a_{5,4} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,5}a_{4,1}a_{5,4} + a_{1,5}a_{2,3}a_{3,1}a_{4,2}a_{5,4} - a_{1,3}a_{2,5}a_{3,1}a_{4,2}a_{5,4} \\
& - a_{1,5}a_{2,1}a_{3,3}a_{4,2}a_{5,4} + a_{1,1}a_{2,5}a_{3,3}a_{4,2}a_{5,4} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,5}a_{4,2}a_{5,4} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,5}a_{4,2}a_{5,4} \\
& - a_{1,5}a_{2,2}a_{3,1}a_{4,3}a_{5,4} + a_{1,2}a_{2,5}a_{3,1}a_{4,3}a_{5,4} + a_{1,5}a_{2,1}a_{3,2}a_{4,3}a_{5,4} - a_{1,1}a_{2,5}a_{3,2}a_{4,3}a_{5,4} \\
& - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,5}a_{4,3}a_{5,4} + a_{1,1}a_{2,2}a_{3,5}a_{4,3}a_{5,4} + a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}a_{4,5}a_{5,4} - a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1}a_{4,5}a_{5,4} \\
& - a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2}a_{4,5}a_{5,4} + a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2}a_{4,5}a_{5,4} + a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3}a_{4,5}a_{5,4} - a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}a_{4,5}a_{5,4} \\
& + a_{1,4}a_{2,3}a_{3,2}a_{4,1}a_{5,5} - a_{1,3}a_{2,4}a_{3,2}a_{4,1}a_{5,5} - a_{1,4}a_{2,2}a_{3,3}a_{4,1}a_{5,5} + a_{1,2}a_{2,4}a_{3,3}a_{4,1}a_{5,5} \\
& + a_{1,3}a_{2,2}a_{3,4}a_{4,1}a_{5,5} - a_{1,2}a_{2,3}a_{3,4}a_{4,1}a_{5,5} - a_{1,4}a_{2,3}a_{3,1}a_{4,2}a_{5,5} + a_{1,3}a_{2,4}a_{3,1}a_{4,2}a_{5,5} \\
& + a_{1,4}a_{2,1}a_{3,3}a_{4,2}a_{5,5} - a_{1,1}a_{2,4}a_{3,3}a_{4,2}a_{5,5} - a_{1,3}a_{2,1}a_{3,4}a_{4,2}a_{5,5} + a_{1,1}a_{2,3}a_{3,4}a_{4,2}a_{5,5} \\
& + a_{1,4}a_{2,2}a_{3,1}a_{4,3}a_{5,5} - a_{1,2}a_{2,4}a_{3,1}a_{4,3}a_{5,5} - a_{1,4}a_{2,1}a_{3,2}a_{4,3}a_{5,5} + a_{1,1}a_{2,4}a_{3,2}a_{4,3}a_{5,5} \\
& + a_{1,2}a_{2,1}a_{3,4}a_{4,3}a_{5,5} - a_{1,1}a_{2,2}a_{3,4}a_{4,3}a_{5,5} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}a_{4,4}a_{5,5} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1}a_{4,4}a_{5,5} \\
& + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2}a_{4,4}a_{5,5} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2}a_{4,4}a_{5,5} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3}a_{4,4}a_{5,5} + a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}a_{4,4}a_{5,5}
\end{aligned}$$

Ch 35
Déterminant

Intro : • On a $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

• On a $\begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ A & B & C \end{vmatrix} = a\beta C + Ab\gamma + \alpha Bc$
$- A\beta \quad - \alpha b C - aB\gamma$

⚠ Cette formule est fausse dès la dimension 4

• $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
• Tout marche sur $\mathbb{K}$ corps quelconque.

I multilinéarité et caractère alterné

1) Applications et Formes multilinéaires

a) Déf°

Déf° : Soit $f : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$. On dit que f est multilinéaire (par rapport aux colonnes) $\underset{ssi}{\Delta}$

$$\begin{aligned} (\mathbb{K}^n)^n &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (C_1, \dots, C_n) &\longmapsto f((C_1 | \cdots | C_n)) \end{aligned}$$

est multilinéaire.

Rq : On dit aussi "n linéaire"

Ex : Soit $f : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ multilinéaire. On a

$$f\left(\boxed{(C_1 + \lambda D_1 \mid C_2 \mid \cdots \mid C_n)}\right)$$

colonnes

$M_n(\mathbb{R})$

matrice carrée

$$= f\left((C_1 \mid C_2 \mid \cdots \mid C_n)\right)$$

$$+ \lambda f\left((D_1 \mid C_2 \mid \cdots \mid C_n)\right)$$

On a ici utilisé la linéarité par rapport à la 1re colonne.

De m̄ pour n'importe quelle autre colonne

b) Propriétés

Fait : L'ensemble des $f : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ multilinéaire est un $\mathbb{K}$-ev

D/ AC

Fait : Soit $f : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ multilinéaire.
Alors :

1) Si M possède une colonne nulle, on a $f(M) = 0$

2) $f(\lambda M) = \lambda^n f(M)$

D/ 1) On a $f\left(\left(C_1 | \cdots | \underset{\substack{\shortparallel \\ 0_{\mathbb{K}} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}}{0_{n,1}} | \cdots | C_n \right) \right)$

Astuce :

$= f\left(\left(C_1 | C_2 | \cdots | 0_{\mathbb{K}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} | \cdots | C_n \right) \right)$

$= 0_{\mathbb{K}}$

2) $f(\lambda M) = f\left(\left(\boxed{\lambda} C_1 | \lambda C_2 | \lambda C_3 | \cdots | \lambda C_n \right) \right)$

$= \lambda f\left(\left(C_1 | \boxed{\lambda} C_2 | \lambda C_3 | \cdots | \lambda C_n \right) \right)$

$\vdots$

$= \lambda^n f(M)$ ■

2) Formes multilinéaires alternées

a) déf

Défⁿ : Soit $f : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme multilinéaire

On dit qu'elle est alternée $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\forall M \in M_n(\mathbb{K}), \left(\exists j_0 \neq j_1 : C_{j_0}(M) = C_{j_1}(M)\right)$$

$$\Rightarrow f(M) = 0$$

Ie : dès que M a deux colonnes identiques, on a $f(M)=0$

b) Propriétés

Fait : L'ens des $f : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$, formes multilinéaires alternées est un $\mathbb{K}$-ev

D/ AC ∎

Prop : Soit $f : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ multilinéaire alternée.
Alors T

$$f\left(\left(C_1 \middle| \cdots \middle| C_{i_0} \middle| \cdots \middle| C_{j_0} \middle| \cdots \middle| C_n\right)\right)$$

on échange ces deux colonnes :

$$= -f\left(\left(C_1 \middle| \cdots \middle| C_{j_0} \middle| \cdots \middle| C_{i_0} \middle| \cdots \middle| C_n\right)\right)$$

D/ On calcule :

$$f\big((C_1|\cdots|C_{i_0}+C_{j_0}|\cdots|C_{i_0}+C_{j_0}|\cdots)\big)$$

$= 0$ car f est alternée.

$$= \underbrace{f\big((C_1|\cdots|C_{i_0}|\cdots|C_{i_0}+C_{j_0}|\cdots|C_n)\big)}_{=a}$$

$$+ \underbrace{f\big((C_1|\cdots|C_{j_0}|\cdots|C_{i_0}+C_{j_0}|\cdots|C_n)\big)}_{=b}$$

On a • $a = \boxed{f\big((C_1|\cdots|C_{i_0}|\cdots|C_{i_0}|\cdots)\big)}_{=0}$

$+ f\big((C_1|\cdots|C_{i_0}|\cdots|C_{j_0}|\cdots)\big)$

• de m̄ $b = f\big((C_1|\cdots|C_{j_0}|\cdots|C_{i_0}|\cdots)\big)$ ■

II Déterminant en dimension 2 et 3

1) En dim 2

a) Déf°

Théorème - définition

1) Il existe une unique $f : M_2(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ multilinéaire alternée tq $f(I_2) = 1$

2) Elle vérifie (T) $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

3) On l'appelle déterminant et on la note det

4) Si $A \in M_2(\mathbb{K})$, on note aussi : $|A| := \det(A)$

Plus précisément : on note $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} := \det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)$

D/ • DRP (AS)

(*) Analyse : Soit $f : M_2(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ multilinéaire alternée tq $f(I_2) = 1$

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{K}$. $\boxed{\text{On calcule :}}$

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = f\left(\left(a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\right)\right)$$

$$= a \underbrace{\boxed{f\left(\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\right)}}_{=\alpha} + c \underbrace{\boxed{f\left(\begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{pmatrix}\right)}}_{=\beta}$$

(par linéarité par rapport à la 1re colonne)

Et on a

• $\alpha = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$$= b \underbrace{\boxed{f\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)}}_{\substack{=0 \\ \text{car } f \text{ alternée}}} + d \underbrace{\boxed{f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)}}_{\substack{= \\ 1 \text{ par hypothèse}}} = d$$

• $\beta = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$$= b \underbrace{\boxed{f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)}}_{= -f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ par échange de colonne}} + d \underbrace{\boxed{f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)}}_{=0}$$

ccl : $B = -b$

- **Ainsi** : $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = ad - bc$

D'où l'unicité.

- **Synthèse** : On vérifie q c'est ok ■

b) Propriétés

Prop : $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

D/ **Astuce très sympa** : on écrit $A = (C_1 | C_2)$

$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Déjà, on a

$$A \cdot B = \left(aC_1 + cC_2 \;\middle|\; bC_1 + dC_2 \right)$$

Donc $\det(AB) = (ad)\boxed{\det(C_1 | C_2)} +$ $= \det A$

AC $(cb)\boxed{\det(C_2 | C_1)}$ $= -\det A$

car $\det(aC_1 | bC_1) = ab \det(C_1 | C_1) = 0$

$$= \det(A) \cdot \underbrace{(ad - bc)}_{\det(B)}$$

■

$$\boxed{\text{Prop : } \quad A \text{ inversible} \iff \det(A) \neq 0}$$

D/ Faisons le cas gal

($\Leftarrow$) par la contraposée.

Mq A non inv $\Rightarrow$ $\det(A) = 0$

Osq A non inv. Donc on a une RL$_{\neq 0}$ entre les colonnes de A

Fixons donc $j_0 \in [\![1,n]\!]$ et $(\lambda_i)_{i \neq i_0}$ une famille de scalaires tq

$$C_{j_0}(A) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^{n} \lambda_j C_j(A)$$

Notons (T) C_j au lieu de $C_j(A)$ les colonnes de A.

On calcule :

$$\det(A) = \det\left(\left(C_1 \mid C_2 \mid \cdots \mid C_{j_0-1} \middle| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^{n} \lambda_j C_j \middle| \cdots \mid C_n \right) \right)$$

$$= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^{n} \lambda_j \underbrace{\det\left(\left(C_1 \mid \cdots \mid C_{j_0-1} \mid C_j \mid C_{j_0+1} \mid \cdots \mid C_n \right) \right)}_{\text{ce déterminant est nul car la matrice en question possède la } \bar{m} \text{ colonne aux indices } j \text{ et } j_0 \neq j}$$

$= 0$ ∎

(⇐) Osq A inv. On a $AA^{-1} = I_n$

Osq $\forall A, B,\ \det(A,B) = \det(A) \cdot \det(B)$

On a $\det(AA^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(I_n) = 1$

Donc $\det(A) \neq 0$ ■

<u>Fait :</u> $\begin{vmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2$

<u>D/</u> ok ■

<u>Fait :</u> $\det(A) = \det(A^T)$

D/ On écrit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ... ■

2) Determinant en dim 3

<u>Th-Déf° :</u> 1) Il existe une unique $f : M_3(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ multilinéaire alternée tq $f(I_3) = 1$

2) C'est le <u>déterminant</u>

D/ 1) ORP AS

Ocsd $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ A & B & C \end{pmatrix}$

On calcule : • $f(M) = \overset{A}{a\, f\begin{pmatrix} 1 & \boxed{\cdots} \\ 0 & \\ 0 & \end{pmatrix}} + \alpha\, f\begin{pmatrix} 0 & \boxed{\cdots} \\ 1 & \\ 0 & \end{pmatrix}$

$+ A\, f\begin{pmatrix} 0 & \boxed{\cdots} \\ 0 & \\ 1 & \end{pmatrix}$

• Et $f\begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 0 & \beta & \gamma \\ 0 & B & C \end{pmatrix} = \boxed{b\, f\begin{pmatrix} 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}}$ $= 0$

$+ \overset{a}{\beta\, f\begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}} + B\, f\begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 1 & C \end{pmatrix}$

• Et $\overset{a}{f}\begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} = C\, f\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\overset{AC}{=}$ C

• Et $\overset{b}{f}\begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 1 & C \end{pmatrix} = \gamma\, f\begin{pmatrix} 1 & \boxed{\begin{matrix}0\\0\\1\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}0\\1\\0\end{matrix}} \\ 0 & & \\ 0 & & \end{pmatrix}$

$= -\gamma$

<u>Bilan :</u> $\overset{A}{f}\begin{pmatrix} 1 & \boxed{\cdots} \\ 0 & \\ 0 & \end{pmatrix} = \beta C - B\gamma$

etc ...

On trouve une formule.

<u>Synthèse</u> : Ça marche

Prop (F^{le} de Sarrus)

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ A & B & C \end{vmatrix} = a\beta C + Ab\gamma + \alpha Bc - A\beta c - \alpha b C - aB\gamma$$

III Déterminant : Cas général

1) Définition :

Th - déf°

1) Il existe une unique $f : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ forme multilinéaire alternée tq $f(I_n) = 1$

2) On l'appelle déterminant et on le note

$\det : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$

3) Si $(a_{i,j})_{i,j} \in M_n(\mathbb{K})$, on note

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} := \det\left((a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \right)$$

D/ $\approx$ ok ; ⊕ hard ■

2) Corollaire fondamental

Corollaire :

Soit $g : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ multilinéaire alternée.

Alors $\forall M \in M_n(\mathbb{K}),\ g(M) = \det(M)\, g(I_n)$

D/ OCsd $h := g$

- 1er Cas : $g(I_n) = 0$. Mq $g = \tilde{0}$

OCsd $\boxed{h = g + \det(\cdot)}$: h est multilinéaire alternée. et $h(I_n) = 1$.

D'après le Th precedent : $h = \det(\cdot)$

Donc $g = \tilde{0}$. Ainsi, $(*)$ est vraie ■

- 2e Cas : $g(I_n) \neq 0$

 T

$\boxed{h := \dfrac{g}{g(I_n)}} \longrightarrow h$ multilinéaire alternée

et $h(I_n) = 1 \longrightarrow$ ok ■

3) Det et opélem sur les colonnes.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

- Si A possède une colonne nulle : $\det(A) = 0$
- ————— deux colonnes identiques : $\det(A) = 0$.
- Si j'échange 2 colonnes de A : je change le signe du déterminant.

  (On dit que $\det(\cdot)$ est antisymétriq.)
- Si j'effectue une transvect° sur les colonnes de A : je ne change pas le déterminant.

R^x Pour calculer $\det(A)$: je peux "creuser A" à l'aide de transvections.

Ex :

On a :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \\ C_4 \leftarrow C_4 - C_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \times -2 \times -2 \times -2 = -8$$

Prop : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et soit $j_0 \in [\![1,n]\!]$

1) Si j'ajoute à $C_{j_0}(A)$ une CL des autres colonnes de A, je ne change pas le determinant.

2) Soit $(\lambda_j)_{j \neq j_0}$ une famille de scalaires.

Alors $\det\left(\left(C_1 \mid C_2 \mid \cdots \mid C_{j_0} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^{n} \lambda_j C_j \mid \cdots \mid C_n\right)\right)$

$= \det(A)$, où pour i, on a posé $C_i := C_i(A)$

D/ J'utilise la linéarité par rapport à la j_0-ième colonne.

On a $\det\left(\left(\cdots \mid C_{j_0} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^{n} \lambda_j C_j \mid \cdots\right)\right)$

$= \det\left(\left(\cdots \mid C_{j_0} \mid \cdots\right)\right) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^{n} \lambda_j \underbrace{\det(C_1 \mid \cdots \mid C_j \mid C_n \mid C_n)}_{= 0 \text{ car 2 collones identiques}}$

4) Une propriété fausse

$$\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$$

c'est Faux en g^al^ !

<u>Ctrex</u> :

$$\begin{vmatrix} 0 & & (0) \\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ & 0 & \\ (0) & & & 0 \end{vmatrix} = 0$$

mais $\det\left(\begin{pmatrix} 0 & & (0) \\ & 1 & \\ (0) & & \ddots \; 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & 0 & \\ (0) & & \ddots \; 0 \end{pmatrix} \right) = \det(I_n) = 1$ ■

5) Propriété multiplicatives du det(·)

Prop ①

$$\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B)$$

D/ Super Astuce

Ocsd $f : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$
$\qquad M \longmapsto \det(A \cdot M)$

Alors f est multilinéaire alternée

Allons-y :

- Mq f alternée. Soit M avec 2 colonnes identiques.

  Mq $f(M) = 0$. Fixons $j_0 \neq j_1$ tq $C_{j_0}(M) = C_{j_1}(M)$

  Or $C_{j_0}(AM) = A\,C_{j_0}(M) = \dots = C_{j_1}(AM)$

  Donc AM possède 2 colonnes identiques :

  $\det(AM) = 0$ ie $f(M) = 0$ ■

- Mq f est multilinéaire.

  Soit $j_0 \in [\![1, n]\!]$

  Soient $C_1, \dots, C_{j_0-1}, \dots, C_n \in M_{n,1}(\mathbb{K})$

  Notons $\varphi : M_{n,1}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$
  $\qquad X \longmapsto f((C_1|\dots|X|\dots|C_n))$

(AC) : **But :** On veut mq φ est une **AL**.

Soit $X, Y \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a

$$\varphi(X + \lambda Y) = \det\left(A\,(C_1 | \cdots | X + \lambda Y | \cdots | C_n)\right)$$

$$= \det\left((AC_1 | AC_2 | \cdots | AX + \lambda AY | \cdots | AC_n)\right)$$

technique calcul en colonnes

$$= \det\left((AC_1 | \cdots | AX | \cdots | C_n)\right)$$

$$+ \lambda \det\left((AC_1 | \cdots | AY | \cdots | AC_n)\right)$$

$$= \det\left(A\,(C_1 | \cdots | X | \cdots | C_n)\right)$$

$$+ \det\left(A\,(C_1 | \cdots | Y | \cdots | C_n)\right)$$

$$= \varphi(X) + \lambda \varphi(Y) \quad \blacksquare$$

Coeur Ĉ f est mult. lin. alt., d'après le corollaire f^{a^1}, on a

$$\forall M,\ f(M) = \det(M)\, f(I_n)$$

Mais $f(I_n) = \det(A I_n) = \det(A)$

et $f(M) = \det(AM)$

ccl : $\forall M,\ \det(AM) = \det(A)\det(M)$ $\blacksquare$

Corollaire (T) : $\det(A^p) = \det(A)^p$

D/ ok $\blacksquare$

Prop : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1) On a A inv $\iff \det(A) \neq 0$

2) Qd A inv, on a $\boxed{\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}}$

D/ AR $\blacksquare$

6) Déterminant des matrices triang. sup

a) énoncé

On fait bcp + gd

Prop : (T)

1) $$\det\begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \boxed{A_3} & \\ & & & \ddots \\ & & & & \boxed{A_p} \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{p} \det(A_i)$$

2) En particulier :
$$\det\begin{pmatrix} \lambda_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

b) exemple

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}^{1\cdot 4 - 3\cdot 2} \overbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}}^{1 \times 2 \times 3}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \Big|$$

$$= -12$$

D/ Idée :

1) de $\overline{m}$

2) rec sur p le nb de blocs diagonaux.

- Allons-y
- Déjà : pour $p=1$, il n'y a rien à prouver : ok
- Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose le résultat vrai pour les matrices triang. sup par blocs à p blocs diagonaux.

Soit M une matrice triang. sup par blocs qui s'écrit :

$$M = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & (*) \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \boxed{A_{p+1}} \end{pmatrix} \quad \text{avec } \forall i,\ A_i \in M_{n_i}(\mathbb{K}) \text{ et } \forall i,\ n_i \in \mathbb{N}^*$$

Ocsd $f : M_{n_1}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$

$$A \longmapsto \det \begin{pmatrix} \boxed{A} & & & (*) \\ & \boxed{A_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A_{p+1}} \end{pmatrix}$$

même étoiles

C'est une forme multilinéaire alternée (AC)

Donc, $\forall A,\ f(A) = \det(A)\, f(I_{n_1})$

- Calculons $f(I_{n_1})$

C'est $\det \begin{pmatrix} \boxed{I_{n_1}} & & (*) \\ & \boxed{A_1} & * \\ (0) & & \boxed{A_p} \end{pmatrix}$

À l'aide de transvections sur les colonnes, et des blocs "I_{n_1}", on peut voir (AC) :

$$\det \begin{pmatrix} \boxed{I_{n_1}} & \cancel{(*)} & \\ & \boxed{A_2} & (*) \\ (0) & & \boxed{A_{p+1}} \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} \boxed{I_{n_1}} & (0) \\ (0) & \boxed{\begin{matrix} \boxed{A_1} & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \boxed{A_{p+1}} \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\underline{\text{Lemme :}} \quad \det \begin{pmatrix} \boxed{I_{n_1}} & (0) \\ (0) & \boxed{B} \end{pmatrix} = \det(B)}$$

$\underline{D/}^{\text{lemme}}$ Ocsd

$$g : M_m(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$B \longmapsto \det \begin{pmatrix} \boxed{I_{n_1}} & (0) \\ (0) & \boxed{B} \end{pmatrix}$$

C'est une forme multilinéaire alternée.

Donc $\forall B$, $g(B) = \det(B)\, g(I_m)$

Or, $g(I_m) = \det \begin{pmatrix} \boxed{I_{m_1}} & (0) \\ (0) & \boxed{I_m} \end{pmatrix} = 1$

$\blacksquare$ lemme

Bilan :

$$\det \begin{pmatrix} \overset{I_{n_1}}{\boxed{}} & (*) \\ (0) & \boxed{\begin{matrix} \boxed{A_2} & & (*) \\ & \ddots & \\ & & \boxed{A_{p+1}} \end{matrix}} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} I_{n_1} & (0) \\ (0) & \boxed{\begin{matrix} \boxed{A_2} & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \boxed{A_{p+1}} \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{Lemme}}{=} \det \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & (*) \\ & \ddots & \\ & & \boxed{A_{p+1}} \end{pmatrix}$$

7) Déterminant de la transposée

$$\boxed{\text{Prop : } \det(A) = \det(A^T)}$$

D/ • 1er Cas : Si A non inv : ok car

$$\det A = \det A^T = 0 \quad \text{car } A \text{ non inv.}$$

• 2e Cas : Osq A inv.

On utilise la prop. suivante :

> **Prop :** Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ inv.
>
> Alors $\exists\, P_1, \dots, P_N$ matrices d'opélem :
>
> $$A = P_1 \dots P_N$$

D/ • Déjà • Rappel les matrices d'opélem :

$$- \; X_{i,j} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ j \\ i \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} \quad & \quad & j & i & \quad & \quad \end{array} & \end{array}$$

rq : • $X_{i,j}{}^T = X_{i,j}$

• $\det\left(X_{i,j}{}^T\right) = \det\left(X_{i,j}\right)$

- $D_i(\lambda)$ $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$

- Transvections : $T_{i,j}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & & \alpha \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow i$ $(i \neq j)$, j

On a $\det(T_{i,j}(\alpha)) = 1$ en tuant le α par transvection

Rq : $\det(T_{i,j}(\alpha)) = \det(T_{i,j}(\alpha)^T)$

Démo :

Soit A inv, Déjà : $L_1(A)$ est non nulle. Car sinon on aurait A non inv. Fixons donc $j_0 \in [\![1, n]\!]$ tq $a_{1 j_0} \neq 0$ et échangeons $C_1(A)$ et $C_{j_0}(A)$. On a

$$A_1 \quad A\, \chi_{j_0 1} = \begin{pmatrix} \boxed{a_{1 j_0}} & \boxed{} \\ \vdots & \end{pmatrix}$$

On fait des opelem sur les lignes et sur les colonnes de A : on fait des transvections basées sur le pivot $\boxed{a_{1 j_0}}$

On obtient :

$$P_1 \cdots P_N A_1 Q_1 \cdots Q_M = \begin{pmatrix} \boxed{a_{1j_0}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Donc

$$\underbrace{D_1\left(\frac{1}{a_{1j_0}}\right) P_1 \cdots P_N A_1 Q_1 \cdots Q_N}_{A_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Ĉ A_2 est inv : la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ l'est,

or, son determinant c'est <u>det B</u>.

Donc $\det(B) \neq 0$.

Donc B inv. Donc rec : B est un produit de matrice d'opélem. etc ■

Prop :

1) Toute matrice inversible peut s'écrire comme produit de matrices d'opélem.

2) Ie : les matrices d'opélem engendrent (en tant que groupe) $GL_n(\mathbb{K})$

Rq : On peut se passer des X_{ij} car on peut les écrire avec des autres matrices d'opélem

D/ rec

$n=1$: ok

Hérédité : ⓣ Soit $A \in M_{n+1}(\mathbb{K})$ inv

À l'aide d'opélem, je transforme $A = A_0$

en $A_1 = \begin{pmatrix} a_{1j_0} & * & \cdots & * \\ * & & & \\ \vdots & & * & \\ * & & & \end{pmatrix}$ (échange)

puis en $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ * & & & \\ \vdots & & * & \\ * & & & \end{pmatrix}$ (dilatation)

puis en $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & * & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ (transv° sur les lignes puis en $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{\ast} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ (trans v° sur les colonnes)

indé B

· On a $\underline{B \text{ inv}}$

D/ Sinon, on aurait une relat° entre les

$C_j(B)$

qui donnerait une relat° ($\neq 0$) sur les $C_j(A_n)$

$\hat{C}$ A_n est inv : c'est impossible ■

Par HR_n, je peux transformer B en I_n par

opélem .

Ainsi, on a transformé A en I_{n+1} à l'aide

d'opélem

Interpretation des opélems :

Fixons donc $P_1, \dots, P_m, Q_1, \dots, Q_p$ des

matrices d'opélem tq

$$P_m \cdots P_2 P_1 \, A \, Q_1 Q_2 \cdots Q_p = I_{n+1}$$

• D'où
$$A = P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_{m-1}^{-1} P_m^{-1} Q_p^{-1} Q_{p-1}^{-1} \cdots Q_1^{-1} \blacksquare$$

Retour à D/ $\det A = \det A^T$

On ecrit $A = R_1 \cdots R_N$ où les R_i sont des matrices d'opélem.

On a $\det(A) = \prod_{i=1}^{N} \det(R_i)$

On a $A^T = R_N^T R_{N-1}^T \cdots R_1^T$

Donc $\det(A^T) = \prod_{i=0}^{N-1} \det(R_{N-i}^T)$

$\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \shortparallel$

$\qquad \qquad \qquad \qquad \det(R_{N-i})$ car ce sont des matrices d'opélem.

$$= \prod_{i=1}^{N} \det(R_i)$$

$$= \det(A) \blacksquare$$

Corollaire :

Toute les propriétés du det relatives aux colonnes valent également pour les lignes

D/ ok $\blacksquare$

Ex : • Si on inverse deux colonnes : on change le signe de det (A)

C'est pareil pour les lignes

• On peut faire des tranvection sur les lignes

• det(·) est une forme multilinéaire alternée par rapport aux lignes

Corollaire (T) : $\det \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & (0) \\ & \boxed{A_2} & & \\ (*) & & \ddots & \\ & & & \boxed{A_p} \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{p} \det(A_i)$

8) !! Developpement du déterminant par rapport à une ligne ou à une colonne

a) Notations

- $A \in M_n(\mathbb{K})$
- Pour $i, j \in [\![1, n]\!]$, on note $A_{i,j} \in M_{n-1}(\mathbb{K})$ la matrice extraite de A en supprimant la i-ième ligne de A et la j-ième colonne de A.

Ex : Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, alors

$A_{1,3} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ $\quad$ $A_{2,2} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$

b) Énoncé

Prop : 1) Developpement par rapport à une ligne.

Soit $i_0 \in [\![1, n]\!]$ Alors :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i_0+j} a_{i_0 j} \det(A_{i_0, j})$$

2) Dv^t selon une colonne

Soit $j_0 \in [\![1, n]\!]$, Alors on a

$$\det(A) = \sum (-1)^{i+j_0} a_{i\, j_0} \det(A_{i, j_0})$$

c) En pratique

Déjà : les $(-1)^{i+j}$ correspondent aux entrées de

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & + & \cdots & \\ - & + & - & + & \cdots & & \\ + & - & + & \cdots & & & \\ - & + & \cdots & & & & \\ + & \cdots & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ & & & & & & + \end{pmatrix}$$

C'est $\left((-1)^{i+j}\right)_{1\leq i,j\leq n}$

On pose

$$\Delta := \begin{vmatrix} +1 & 2 & 3 & 4 \\ -0 & 5 & 0 & 6 \\ +7 & 0 & 8 & 9 \\ -0 & 0 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 2 \times \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 7 & 0 & 8 \end{vmatrix}}_{A_{4,4}} - 7 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix}}_{A_{4,3}}$$

et $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 7 & 0 & 8 \end{vmatrix} = -65$

et $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix} = -11$

Ex : On note (T)

$$\Delta_n := \begin{vmatrix} a & & (b) \\ & \ddots & \\ (b) & & a \end{vmatrix} \qquad (\text{taille} : n)$$

Astuce : la somme des lignes est très interessante

On a $$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & & & (b) \\ & \ddots & & \\ (b) & & \ddots & \\ & & & a \\ K & K & \cdots & K \end{vmatrix}$$

$L_n \leftarrow L_n + \sum_{i=1}^{n-1} L_i$

où $K := (n-1)b + a$

(Si $K = 0$: $\Delta_n = 0$)

inutile

Sinon, on

Donc. $$\Delta_n = K \begin{vmatrix} a & & (b) & b \\ & \ddots & & \vdots \\ (b) & & a & b \\ 1 & \cdots & & 1 \end{vmatrix}$$

"$C_1 \leftarrow C_1 - C_2$

$C_2 \leftarrow C_2 - C_3$

$C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - C_n$"

$$= \begin{vmatrix} (a-b) & 0 & \cdots & 0 & b \\ (b-a) & (a-b) & (0) & \vdots & \vdots \\ 0 & (b-a) & \ddots & 0 & b \\ \vdots & 0 & \ddots & (a-b) & a \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= K \begin{vmatrix} (a-b) & & (0) \\ (b-a) & \ddots & \\ (0) & (b-a) & (a-b) \end{vmatrix} = \big(a + (n-1)b\big)(a-b)^{n-1}$$

"dvt selon L_n"

Bilan : 1) On creuse via des transvections.

2) On dvt selon ligne / colonne.

Rq : Autre solution :

$$A_n = \begin{vmatrix} a & & (b) & \\ & \ddots & & \\ (b) & & a & \\ 1 & \cdots & & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a-b) & & (0) & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ (0) & & (a-b) & 0 \\ 1 & \cdots & & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^{n-1} K$$

$L_i \leftarrow L_i - b L_n \quad (1 \leq i \leq n-1)$

Troisième sol° : ⊕ subtile

Utiliser la multilinéarité et le caractère alterné à fond.

"Mettre" la m̄ colonne partout

Notons $C_0 := \begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ b \end{pmatrix}$

On a $\Delta_n = \Big(C_0 + \cancel{(a-b)}\varepsilon_1, C_0 + (a-b)\varepsilon_2, \dots, C_0 + (a-\dots) $

$\det\left(C_0 + (a-b)\varepsilon_1, C_0 + (a-b)\varepsilon_2, \dots, C_0 + (a-b)\varepsilon_n \right)$

Rq : où on note $\det(c_1, \dots, c_n)$ le det de la matrice $(c_1 | \dots | c_n)$)

$$= \underbrace{\det(c_0, c_0, \dots, c_0) + \det((a-b)\varepsilon_1, c_0, \dots, c_0) + \dots}$$

AC ++ : cb de termes ds cette Σ ?

$$\boxed{2^n}$$

$$\underset{\text{abs}}{=} \sum_{I \subset [\![1,n]\!]} \det\Big(\mathbb{1}_I(1)\, c_0 + \mathbb{1}_{\bar{I}}(1)\,(a-b)\,\varepsilon_1, \dots, \mathbb{1}_I(j)\, c_0 + \mathbb{1}_{\bar{I}}(j)\,(a-b)\,\varepsilon_j, \dots, \mathbb{1}_I(n)\, c_0 + \mathbb{1}_{\bar{I}}(n)\,(a-b)\,\varepsilon_n$$

(Mathieu)

$$= \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \{0,1\}^n} \det\left(c_{i_1}^{[1]}, c_{i_2}^{[2]}, \dots, c_{i_n}^{[n]} \right)$$

où $c_1^{[i]} := \varepsilon_i (a-b)$

$c_0^{[i]} := c_0$

(Nowar) ♛

$$= \sum_{\substack{c_1 \in \{c_0, (a-b)\varepsilon_1\} \\ c_2 \in \{c_0, (a-b)\varepsilon_2\} \\ \vdots}} \det(c_1, \dots, c_n)$$

(Babar)

$$= \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\det\Big((a-b)\,\varepsilon_1, \dots, \underset{\text{colonne } j}{C_0}, \dots, (a-b)\,\varepsilon_n \Big)}_{D_j}$$

$$+ \det\big((a-b)\,\varepsilon_1, \dots, (a-b)\,\varepsilon_n \big)$$

$$\left| \begin{matrix} (a-b) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & (a-b) \end{matrix} \right|$$

$$= (a-b)^n$$

$$\text{et } D_j = \left| \begin{matrix} (a-b) & & & b & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & & b & & & \\ & & & \vdots & (a-b) & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & b & & & (a-b) \end{matrix} \right|$$

$$= b\,(a-b)^{n-1} \left| \begin{matrix} 1 & & & 1 & & \\ & \ddots & & \vdots & & \\ & & 1 & \vdots & & \\ & & & \vdots & 1 & \\ & & & \vdots & & \ddots \\ & & & \underset{(\dots)}{} & & & 1 \end{matrix} \right|$$

$$= b\,(a-b)^{n-1} \det(I_n) \quad \blacksquare$$

Rq : Astuce d'Antoine : AC

On calcule D_j en dvp^{ant} selon la ligne d'indice j

d) démonstration

1) sur les colonnes :

- On note $\det(C_1, \dots, C_n)$ le déterminant de $(C_1 | \cdots | C_n)$ pour $C_1, \dots, C_n \in M_{n,1}(\mathbb{K})$

- Pour $j \in [\![1,n]\!]$, on note $C_j := C_j(A)$

On a
$$\det(A) = \det(C_1, \dots, C_n)$$
$$= \det\left(C_1, \dots, C_{j_0-1}, \sum_{i=1}^{n} a_{i j_0} . \mathcal{E}_i, C_{j_0+1}, \dots, C_n\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{i_0,j} \det(C_1, \dots, C_{j_0-1}, \mathcal{E}_i, C_{j_0+1}, \dots, C_n)$$

Soit $i \in [\![1,n]\!]$.

Notons $D_i := \det(C_1, \dots, C_{j_0-1}, \mathcal{E}_i, C_{j_0+1}, \dots, C_n)$

place j_0

On a $D_i = (-1)^{j_0-1} \det\left(\varepsilon_i, C_1, C_2, \dots, C_{j_0-1}, C_{j_0+1}, \dots, C_n\right)$

Or $\det\left(\varepsilon_i, C_1, \dots, \check{C}_{j_0}, \dots, C_n\right)$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \boxed{\quad\quad\quad\quad\quad\quad} \\ \vdots & \\ 0 & \\ 1 & C_1 \; C_2 \; \cdots \; \check{C}_{j_0} \; \cdots \; C_n \\ 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \end{vmatrix} \begin{matrix} \tilde{L}_i \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

ε_i

Notons pour $k \in [\![1,n]\!]$:

$$\tilde{L}_k := \left(a_{k1}, \dots a_{kj_0-1}, a_{kj_0+1}, \dots a_{kn}\right) \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{C})$$

On a $D_i = \begin{vmatrix} 0 & \tilde{L}_1 \\ \vdots & \tilde{L}_2 \\ 0 & \vdots \\ 1 & \vdots \\ 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \tilde{L}_n \end{vmatrix}$

$$\underset{\text{transvection}}{=} \begin{vmatrix} 0 & \tilde{L}_1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \\ 1 & 0 \; \cdots \; 0 \\ 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \tilde{L}_n \end{vmatrix} \quad \text{ligne } i$$

$$\underset{\substack{(i-1) \text{ échanges} \\ \text{successifs de lignes}}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 \; \cdots \; 0 \\ 0 & \tilde{L}_1 \\ \vdots & \vdots \\ & \tilde{L}_{i-1} \\ & \tilde{L}_{i+1} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \tilde{L}_n \end{vmatrix} (-1)^{i-1}$$

$$= (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} \widetilde{L_i} \\ \vdots \\ \widetilde{L_{i-1}} \\ \widetilde{L_{i+1}} \\ \vdots \\ \widetilde{L_n} \end{vmatrix} = (-1)^{i-1} \det(A_{i,j_0})$$

e) Comatrice

Déf° : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. La comatrice de A notée $Com(A)$, est

la matrice carrée de taille n dont le coeff d'indice (i,j) est

$$(-1)^{i+j} \det(A_{i,j})$$

ie on pose $Com(A) := \left((-1)^{i+j} \det(A_{i,j}) \right)$

Rq : elle est longue à calculer.

Prop : 1) $A \, Com(A)^T = \det(A) I_n$

$Com(A)^T A = \det(A) I_n$

2) Ainsi, si A inv, on a $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Com(A)^T$

D/ 1) Soient $i_0, j_0 \in [\![1,n]\!]$, on a :

$$\left(A \cdot Com^T(A)\right)_{i_0,j_0} = \sum_{k=1}^{n} a_{i_0,k} \left(Com(A)^T\right)_{k,j_0}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{i_0,k}\, Com(A)_{j_0,k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{i_0,k}\, (-1)^{j_0+k} \det\left(A_{j_0,k}\right)$$

Déjà : Si $i_0 = j_0$

$$\hat{C} \quad \sum_{k=1}^{n} a_{i_0,k} (-1)^{i_0+k} \det(A_{i_0,k}) = \det(A)$$

(dvt selon la ligne i_0)

On a $\left(A \cdot Com(A)^T\right)_{i_0 i_0} = \det(A)$

Puis : si $\boxed{i_0 \neq j_0}$ (Arnaque) : Considérons

$\tilde{A}$ la matrice def par

$$\tilde{a}_{i,j} = a_{i,j} \quad si \quad i \neq j_0$$

$$\widetilde{a_{j_0,k}} = a_{i_0,k} \quad\quad i = j_0$$

On a $L_{i_0}(\tilde{A}) = L_{j_0}(\tilde{A})$: donc $\underline{\det(\tilde{A}) = 0}$

Developpons $\det(\tilde{A})$ par rapport à la ligne L_{j_0}.

On a $\det(\widetilde{A}) = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{a_{j_0,k}} (-1)^{j_0+k} \det(\widetilde{A_{j_0,k}})$

Or : $\forall k,\ \widetilde{A_{j_0,k}} = A_{j_0,k}$ $= \sum_{k=1}^{n} a_{j_0,k} (-1)^{j_0+k} \det(A_{j_0,k}) = \ldots$

■ 1) a)

1) b) Dem

2) ok ■

9) Déterminant de Vandermonde

Ce sont des déterminants classiques qui interviennent dans de nombreuses situations.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$.

a) déf

On pose

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$$

C'est la matrice de Vandermonde de $(x_1, \ldots, x_n)$

b) inversibilité de $V(x_1, \dots, x_n)$

Prop :

$V(x_1, \dots, x_n)$ inv $\iff$ les x_i sont 2 à 2 $\neq^{ts}$.

D/ ($\Longrightarrow$) par la contraposée.

Osq les x_i non 2 à 2 distincts :

ie Osq $\exists\, i \neq j : x_i = x_j$

Dans ce cas, $V(x_1, \dots, x_n)$ possède deux lignes identiques : elle n'est pas inv $\blacksquare$ ($\Longrightarrow$)

($\Longleftarrow$) Osq les x_i 2 à 2 $\neq^{ts}$.

Mq $V(x_1, \dots, x_n)$ inv.

ORPA et osq $\operatorname{Ker} V(x_1, \dots, x_n) \neq \{0_{n,1}\}$

et on fixe $\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tq

1°/ $\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} \neq 0_{n,1}$

2°/ $V(x_1, \dots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

On calcule :

$$V(x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_{n-1} x_1^{n-1} \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n^1 + a_2 x_n^2 + \dots + a_{n-1} x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

On pose $P := \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$. On a : $\forall i$, $P(x_i) = 0$

Donc P possède au moins n racines $\neq^{tes}$.

Ĉ $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, DALC, on a $P = 0$

ie on a $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$

ccl : Le noyau est nul : la matrice est inversible ∎

c) déterminant des $V(x_1, \dots, x_n)$

Méthode à connaître

Prop :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} x_j - x_i$$

AF $^{R^X}$: cb de termes dans ce produit ?

D/ • Grâce à b), On sait que le resultat est V si les x_i ne sont pas 2 à 2 $\neq^{ts}$.

On se place dans le cas contraire dorénavant.

• rec $\underline{n=1}$: ok car $|1|=1$ et $\prod_{1\leq i<j\leq 1} x_j - x_i$ est un produit vide.

$\underline{n=2}$ $\begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$: ok.

• $\underline{\text{Hérédité}}$: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Osq le résultat est vrai pour n.

Soient $x_1, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{K}$ 2 à 2 $\neq^{ts}$.

$\underline{\text{Astuce :}}$ on remplace dans la dernière ligne de $V(x_1, \dots, x_{n+1})$ x_{n+1} par X. Ie on csd :

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n, X) \in M_{n+1}(\mathbb{K}[X])$$

et ocsd son déterminant. C'est

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & & & & x_n^n \\ 1 & X & X^2 & \cdots & X^n \end{vmatrix}$$

En developpant ce determinant par rapport à la dernière ligne, on voit que c'est un polynôme à coeff dans $\mathbb{K}$ de degré au plus n.

Notons $P := \cancel{\text{Vect}}\ \det\left(V_1(x_1, \dots, x_n, X)\right) \in \mathbb{K}_n[X]$

- Cb vaut le coeff$_{\text{dom}}$ de P ?

Le coefficient du terme en X^n de P est :

$$(-1)^{n+m} \cdot \det\left(V(x_1, \dots, x_n)\right)$$

qui est non nul. C'est son coeff dominant.

Ainsi : $\deg(P) = n$

- Quelles sont les racines de P ?

On a $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $P(x_i) = 0$ (car on obtient des matrices avec 2 lignes identiques)

Comme $\deg(P) = n$, ce sont toutes les racines.

- **Bilan** :

$$P = \underbrace{\det\left(V(x_1, \dots, x_n)\right)}_{\substack{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \\ \text{par } (HR_n)}} \prod_{i=1}^{n} (X - x_i)$$

• Or : $\det V(x_1, \dots, x_{n+1}) = P(x_{n+1})$.

• <u>Donc</u> : $\det V(x_1, \dots, x_{n+1}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \prod_{i=1}^{n} (x_{n+1} - x_i)$

AC $\quad = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i)$ ■

IV Déterminant des endomorphismes des ev^{df}

cf ce qu'on a fait pour la trace de

$f : E \longrightarrow E$

Soit E ev^{df} de dimension n.

Rq* : Si $n = 0$, on pose $\det(f) := 1$ si $f \in L(E)$
(on a $f^2 = f$, $\det(f)^2 = \det(f)$; de + $\det(f) \neq 0$ car f inv)

1) Définition

Lemme (T) : A, B semblables $\Rightarrow \det(A) = \det(B)$

D/ $A = PBP^{-1} \longrightarrow \det(A) = \det(P) \det(B) \det(P^{-1})$
$= \det(PP^{-1}) \det(B)$
$= \det(B)$ ■

Rq! : Le déterminant définit un morphisme :

$$(GL_n(\mathbb{K}), \times, I_n) \longrightarrow (\mathbb{K}^*, \times, 1)$$

Rq* : Si on a $\varphi : G \longrightarrow A$ un morphisme de gp avec A abélien et si $x, y \in G$ sont conjugués :

Alors $\varphi(x) = \varphi(y)$

Corollaire :

$$\left.\begin{array}{l} f \in L(E) \\ \mathcal{B}, \mathcal{C} \text{ bases } E \end{array}\right\} \Rightarrow \det\left(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\right) = \det\left(\operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(f)\right)$$

D/ ok ■

Déf° : Soit $f \in L(E)$. On appelle déterminant de f et on note $\det(f)$ l'élément de $\mathbb{K}$ défini par

$$\det(f) := \det\left(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\right)$$

où $\mathcal{B}$ est une base qcq de E.

Ex : Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $a \in \mathbb{K}$.

Ocsd $f_a : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$

$\qquad\qquad P \longmapsto P(X+a)$

(f est bien définie et $f_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$)

Calculons $\det(f_a)$

Posons $A := \underset{(1, \dots, X^n)}{\mathrm{Mat}} (f_a)$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & X+a & (X+a)^2 & \cdots & (X+a)^k & \cdots & (X+a)^n \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^k & \cdots & a^n \\ 0 & 1 & 2a & & \binom{k}{1} a^{k-1} & \cdots & \binom{n}{1} a^{n-1} \\ \vdots & 0 & 1 & & \vdots & & \vdots \\ & \vdots & 0 & \ddots & \binom{k}{k-1} a & & \vdots \\ & & \vdots & & 1 & & \vdots \\ & & & & 0 & & n a^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ X \\ X^2 \\ \vdots \\ \\ \\ X^n \end{array}$$

car $(X+a)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i a^{k-i}$

Rq : $A \in T_n^+(\mathbb{K})$ car $\forall k$ f_a stabilise $\mathbb{K}_k[X]$

Bilan : $\hat{C}$ $A \in T_n^+(\mathbb{K})$ et $\hat{C}$ $\forall i$, $a_{ii} = 1$, on a

$\det A = 1$

cl : $\boxed{\det(f_a) = 1}$

2) Propriétés

Prop : Soient $f, g \in L(E)$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$

Alors :

1) $\det(Id_E) = 1$

2) $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$

3) ⚠ $\det(f+g) \neq \det(f) + \det(g)$ est F^{++}

4) $\det(g \circ f) = \det(g) \times \det(f)$

5) $\forall p \in \mathbb{N}$, ~~def~~ $\det(f^p) = \det(f)^p$

6) $\det(f) \neq 0 \iff f \in GL(E)$

7) Dans ce cas, on a $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$

8) Le déterminant définit un morphisme de groupes :

$$\det : (GL(E), \circ, Id_E) \longrightarrow (\mathbb{K}^*, \times, 1)$$

D/ ⚓ + $\textcircled{R}^{x}$ prosopagnosique : ok ∎

3) Déterminant d'une famille de vecteurs. (de bonne taille)

Déf : Soit $\mathcal{B}$ base de E

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ (une famille de bonne taille)

Le déterminant de $(x_1, \dots, x_n)$ dans la bas $\mathcal{B}$ est $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) := \det\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)\right)$

> **Prop** $^{\textcircled{T}}$
>
> $(x_1, \dots, x_n)$ base E $\iff \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \neq 0$

Exemple $^{++}$

Soient $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ 2 à 2 $\neq^{ts}$.

Mq $\left((X-a_0)^n, \dots, (X-a_n)^n\right)$ base $\mathbb{R}_n[X]$

Rq ⚠ : Ça n'a rien à voir avec

$(1, (X-a), (X-a)^2, \dots, (X-a)^n)$ base $\mathbb{K}_n[X]$

Notons $A := \mathrm{Mat}_{(1, \dots, X^n)}\left((X-a_0)^n, \dots, (X-a_n)^n\right) \in M_{n+1}(\mathbb{K})$

On a, en notant $^{\textcircled{T}}$ $\alpha_i := -a_i$

V Formes linéaires alternées.

1) Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Def : Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Une forme n-linéaire alternée est une application

$$f : E^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

tq 1) f est linéaire par rapport à chacune de ses variables

ie tq $\forall i_0 \in [\![1, n]\!]$, $\forall (x_1, \dots, \check{x}_{i_0}, \dots, x_n) \in E^{n-1}$

$$\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & f(x_1, \dots, x_{i_0-1}, x, x_{i_0+1}, \dots, x_n) \end{array}$$

est linéaire.

2) f est alternée.

ie $\forall$ $\left.\begin{array}{l} x_{i_0} = x_{i_1} \\ i_0 \neq i_1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_1, \dots, x_n) = 0$

- On note $\mathcal{A}_n(E, \mathbb{K})$ l'ens de ces applications

Exemples:

- l'application nulle $E^n \to \mathbb{K}$ est n-linéaire alternée
- Si $f : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ est n-linéaire alternée par rapport à ses colonnes : alors : $[M_{n,1}(\mathbb{K})]^n \longrightarrow \mathbb{K}$

$(C_1 | C_2 | \dots | C_n)$

Si $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ est multilinéaire alternée par rapport à ses colonnes, alors l'application

$$\begin{aligned} \left[\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\right]^n &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (C_1|C_2|\cdots, C_n) &\longmapsto f\left(\left(C_1|C_2|\cdots|C_n\right)\right) \end{aligned}$$

est une forme n-linéaire alternée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

- <u>Rqt</u> : si $g \in \mathcal{A}_n(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \mathbb{K})$ alors l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ M &\longmapsto g\left(C_1(M), C_2(M), \cdots, C_n(M)\right) \end{aligned}$$

est multilinéaire alternée par rapport aux colonnes.

2) Premières propriétés

Soit E un $\mathbb{K}$-ev

On suppose E ev^{df} et que $\underline{\dim E = n}$

Fixons $(e_1, \dots, e_n)$ base E. Soit $f \in \mathcal{A}_n(E, \mathbb{K})$

Fait : Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$

Soit τ une permutation

$\tau \in \mathfrak{S}_n$ une transposition

Alors : $f(x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, \dots, x_{\tau(n)})$

$$= f(x_1, \dots, x_n)$$

D/ : cf : on change le signe de $\det(\cdot)$ quand on échange deux lignes.

- Idem : AC/AF ■

Prop : Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ qcq. Alors :

$$f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \dots, x_n)$$

D / rec

T $\mathcal{P}(N) =$ " $f\left(x_{\tau_1\tau_2\cdots\tau_N(1)}, x_{\tau_1\tau_2\cdots\tau_N(2)}, \dots, x_{\tau_1\tau_2\cdots\tau_N(n)}\right)$

$= (-1)^N f(x_1, \dots, x_N)$ " pour $N \in \mathbb{N}$

si $\tau_1, \dots, \tau_N$ transposition

$N = 0$: Le produit vide de zéro transposit° : c'est l'identité : ok

$N \longrightarrow N+1$

Posons $y_i = x_{\tau_1 \cdots \tau_N(i)}$

On a $f\left(y_{\tau_{N+1}(1)}, \dots, y_{\tau_{N+1}(n)}\right)$

$= -f(y_1, \dots, y_n)$

$\blacksquare$ rec

- Or : les transpositions engendrent $\mathfrak{S}_n$
- Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ qu'on écrit $\sigma = \tau_N \tau_{N-1} \cdots \tau_1$

  où $\forall i$, τ_i transposition.
- R* On a $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\tau_N \cdots \tau_1)$

$$= \underbrace{\varepsilon(\tau_N)}_{=-1} \cdots \underbrace{\varepsilon(\tau_1)}_{=-1} = (-1)^N$$

Ainsi :

$$f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = f(x_{\tau_N \dots \tau_1(1)}, \dots, x_{\tau_N \dots \tau_1(n)})$$
$$= (-1)^N f(x_1, \dots, x_n) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \dots, x_n)$$

■

Fait : Soit $\theta : [\![1, n]\!] \longrightarrow [\![1, n]\!]$

Alors

$$\theta \text{ non inj} \Longrightarrow f(x_{\theta(1)}, \dots, x_{\theta(n)}) = 0$$

$f \in \mathcal{A}_n(E, \mathbb{K})$

D/ ok ■

3) Théorème f^{al}

a) Expression d'une forme n-linéaire alternée.

Soit E ev $\mathrm{d}f$ de dim n.
Soit $(e_1, \dots, e_n)$ base E.
Soit $f \in \mathcal{A}_n(E, \mathbb{K})$

Soient $x_1, \dots, x_n \in E$

But : calculer $f(x_1, \dots, x_n)$ en fonction de $f(e_1, \dots, e_n)$

Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on écrit

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_j^{[i]} e_j$$

avec $\forall i, j, \ a_j^{[i]} \in \mathbb{K}$.

On a : $f(x_1, \dots, x_n) = f\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^{[1]} e_j, \sum_{j=1}^{n} a_j^{[2]} e_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} a_j^{[n]} e_j\right)$

$$= \sum_{\theta : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]} f\left(a_{\theta(1)}^{[1]} e_{\theta(1)}, a_{\theta(2)}^{[2]} e_{\theta(2)}, \dots, a_{\theta(n)}^{[n]} e_{\theta(n)}\right)$$

(rq : n^n termes)

AC pour chacune des variables, on choisit un des termes.

$$= \sum_{\theta : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]} a_{\theta(1)}^{[1]} a_{\theta(2)}^{[2]} \cdots a_{\theta(n)}^{[n]} \underbrace{f\left(e_{\theta(1)}, \dots, e_{\theta(n)}\right)}$$

AC

"variable de $f(\cdot, \cdot, \cdot)$" "terme de $\sum_{j=1}^{n} (\dots)$"

$= 0$ qd $\theta(\cdot)$ n'est pas inj
ie n'est pas bij

$$\underbrace{\text{variable} \longrightarrow \text{je choisis le terme } \theta(i) \text{ de la } \Sigma}$$

ocsd ts les choix possibles

$$\boxed{= \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)}^{[i]} \right) f(e_1, \dots, e_n)}$$

<u>Rcpt</u> : Fixons $A \in \mathbb{K}$. Alors l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)}^{[i]} \right) A \end{array}$$

où $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = \sum_{j=1}^{n} a_j^{[i]} e_j$

est dans $\mathcal{A}_n(E, \mathbb{K})$

<u>D/</u> ok ∎

b) Théorème fondamental

<u>Th :</u> Soit E ev^{df} de dim n. Alors

1) $\mathcal{A}_n(E, \mathbb{K})$ est une droite vectorielle.
2) ie $\dim(\mathcal{A}_n(E, \mathbb{K})) = 1$

<u>D/</u> • Soit E evdf dim n.

• Ramenons-nous à $\mathbb{K}^n$.

<u>Lemme</u> : $E \simeq F \implies \mathcal{A}_n(E, \mathbb{K}) \simeq \mathcal{A}_n(F, \mathbb{K})$

<u>D/</u> ⚓ AF ∎

• Ainsi mq $\mathcal{A}_n(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$ est de dim 1

Notons $f_0 : (\mathbb{K}^n)^n \longrightarrow \mathbb{K}$

$$\left(\begin{pmatrix} a_1^{[1]} \\ \vdots \\ a_n^{[1]} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1^{[2]} \\ \vdots \\ a_n^{[2]} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_1^{[n]} \\ \vdots \\ a_n^{[n]} \end{pmatrix}\right) \longmapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)}^{[i]}$$

1°) déjà, f_0 est n-linéaire.

Soit $i_0 \in [\![1, n]\!]$. Soient $C_1, \dots, \check{C}_{i_0}, \dots, C_n \in \mathbb{K}^n$

qu'on écrit ⓣ $C_i = \begin{pmatrix} a_1^{[i]} \\ \vdots \\ a_n^{[i]} \end{pmatrix}$

Mq f_0 est linéaire par rapport à la i_0-ième coordonnée.

Soit $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

On a $f_0\left(C_1, \dots, C_{i_0-1}, \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}, C_{i_0+1}, \dots, C_n\right)$

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{n} a_{\sigma(i)}^{[i]} \left(\alpha_{\sigma(i)} + \lambda \beta_{\sigma(i)}\right)$$

$$= \dots = f_0\left(C_1, \dots, C_{i_0-1}, \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, C_{i_0+1}, \dots, C_n\right)$$

$$+ \lambda f_0\left(C_1, \dots, C_{i_0-1}, \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}, C_{i_0+1}, \dots, C_n\right)$$

2°) Caractère alterné.

Soient $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{K}^n$

Soit $\tau \in \mathfrak{S}_n$ une transposition

Mq $f_0(C_{\tau(1)}, \dots, C_{\tau(n)}) = - f_0(C_1, \dots, C_n)$

Lemme : Soit G un groupe.
Soit $x_0 \in G$.
Alors
$$\lambda_{x_0} : \begin{array}{rcl} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & x_0 x \end{array}$$
est une bijectio

(D/ introduire $\lambda_{x_0^{-1}}$)

On fait un cdv dans $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \lambda_\sigma$.

On a si $\sigma_0 \in \mathfrak{S}_n$

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \lambda_\sigma = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}} \lambda_{\sigma_0 \sigma}$$

On calcule τ $f_0(C_{\tau(1)}, \dots, C_{\tau(n)})$

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)}^{[\tau(i)]}$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \underbrace{\prod_{i \in [\![1,n]\!]} a_{\sigma(i)}^{[\tau(i)]}}$$

- je remplace i par $\tau^{-1}(i)$

car $\tau^{-1} : [\![1,n]\!] \longrightarrow [\![1,n]\!]$ bij

$$\boxed{\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I} a_{\varphi(i)} \text{ si } \varphi : I \to I \text{ bij}}$$

AC $(I$ fini$)$

idem produit.

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma\tau^{-1}(i)}^{[i]}$$

cdv $\sigma \longrightarrow \sigma\tau$

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \underbrace{\varepsilon(\sigma\tau)}_{= \varepsilon(\sigma)\underbrace{\varepsilon(\tau)}_{=-1}} \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)}^{[i]}$$

$$= -f_0(c_1, \dots, c_n)$$

- **Bilan :** On a mq f_0 est antisymétrique.

Mq f_0 est alternée

(T) Fixons $i_0 \neq i_1$ tq $C_{i_0} = C_{i_1}$

On a $f_0(C_1, \dots, C_n)$

$= - f_0(C_{\tau(1)}, \dots, C_{\tau(n)})$ avec $\tau := (i_0 i_1)$

or

$(C_1, \dots, C_n) = (C_{\tau(1)}, \dots, C_{\tau(n)})$

puisque $C_{i_0} = C_{i_1}$

<u>Bilan :</u> $f_0(C_1, \dots, C_n) = -f(C_1, \dots, C_n)$

Donc $2 f_0(C_1, \dots, C_n) = 0$

$\boxed{\text{Osq } 2 \neq 0}$ Donc $f_0(C_1, \dots, C_n) = 0$ ■

Ainsi : $f_0 \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$

• <u>Mq $f_0 \neq 0$</u>

On calcule : $f_0(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$

$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (\varepsilon_i)_{\sigma(i)}$ or $(\varepsilon_i)_j = \delta_{ij}$

Le terme $\prod_{i=1}^{n} (\varepsilon_i)_{\sigma(i)}$ est $\neq 0 \iff \forall i, (\varepsilon_i)_{\sigma(i)} \neq 0$

$\iff \forall i, \sigma(i) = i$

$\iff \sigma = Id$

$$= \varepsilon(Id) \prod_{i=1}^{n} (\varepsilon_i)_{Id(i)} = 1$$

ccl : $\boxed{f_0 \neq 0}$

- Soit $f \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$

On a vu que (T)

$$f(c_1, \dots, c_n) = \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)}^{[i]} \right) f(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$$

$$= \lambda \cdot f_0(c_1, \dots, c_n)$$

avec (T) $\quad c_i = \begin{pmatrix} a_1^{[i]} \\ \vdots \\ a_n^{[i]} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_j^{[i]} \varepsilon_j$

où $\lambda := f(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$

On a $f = \lambda f_0(\cdot)$

- Bilan : $\mathcal{A}_n(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}) = \mathrm{Vect}(f_0)$

- Comme $f_0 \neq 0$: on a bien $\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}) = 1$

■

D/ th-def

Mq $\exists! f : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ multilinéaire alternée : $f(I_n)=1$

Existence : Ocsd $f : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$

$M \longmapsto f_0(C_1(M), \dots, C_n(M))$

où f_0 est définie dans la preuve ci-dessus.

Unicité :

Soit $f : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ tq $(\dots)$

Ocsd $g : (\mathbb{K}^n)^n \longrightarrow \mathbb{K}$

$(C_1, \dots, C_n) \longmapsto f\left((C_1 | \dots | C_n) \right)$

On a $g \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$. Donc $g = g(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) f_0$

Or $g(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = f(I_n) = 1$

Donc $g = f_0$. Donc f est unique ■

h) Expression du determinant en f° des coefficients

Théorème : $\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$

b) Seconde formule

Th :
$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

D/[1] ok car $\det(A) = \det(A^T)$ ■

D/[2] Avec des cdv " $\sigma \longrightarrow \sigma^{-1}$ " sur $\sum_{\sigma}$;

puis cdv $i \longmapsto \sigma(i)$ dans $\prod_{i}$ ■

VI Interprétation géo. du déterminant

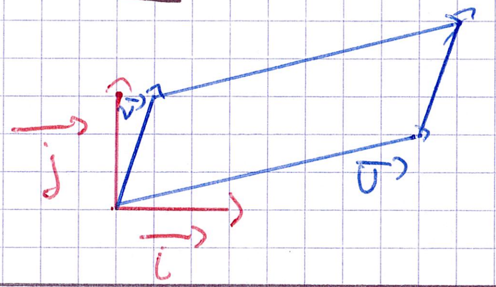
1) En dimension 2

On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni de la base $(\vec{i}, \vec{j})$

où $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$

d^n $\mathbb{R}^2$)



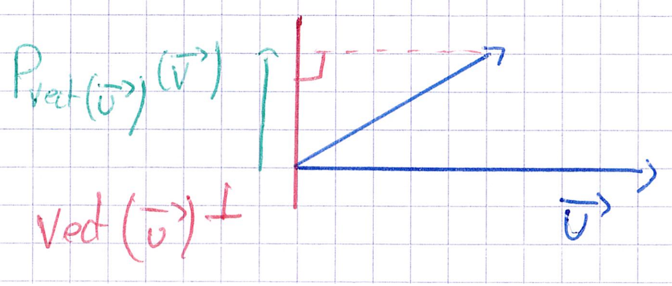
Prop : Le déterminant (en valeur absolue) $\left| \det_{(\vec{i}, \vec{j})} (\vec{u}, \vec{v}) \right|$ est l'aire du parallélogramme de côtés $\vec{u}$ et $\vec{v}$

D1/ Idée : mq l'aire est bilinéaire alternée.

D2/ Par le calcul. On écrit $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$; $\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

On note $\mathcal{A}$ l'aire (en valeur absolue) du parallélogramme de côtés $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

(osq $\vec{u} \neq \vec{0}$)



On a

$$\mathcal{A} = \|\vec{u}\| \cdot \| P_{\mathrm{Vect}(\vec{u})^\perp}(\vec{v}) \|$$

or $P_{\mathrm{Vect}(\vec{u})^\perp}(\vec{v}) = \vec{v} - P_{\mathrm{Vect}(\vec{u})}(\vec{v})$

$$= \vec{v} - \frac{(\vec{u}|\vec{v})}{(\vec{u}|\vec{u})}\vec{u}$$

$$= \frac{1}{\|\vec{u}\|}\left(\|\vec{u}\|^2 \vec{v} - \frac{(\vec{u}|\vec{v})\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right)$$

Donc $\mathcal{A}^2 = \left\| \|\vec{u}\| \cdot \vec{v} - \frac{(\vec{u}|\vec{v})}{\|\vec{u}\|}\vec{u} \right\|^2$

$$= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 + \frac{(\vec{u}|\vec{v})^2}{\cancel{\|\vec{u}\|^2}} \cancel{\|\vec{u}\|^2}$$

$$- 2 \frac{\cancel{\|\vec{u}\|}}{\cancel{\|\vec{u}\|}} (\vec{u}|\vec{v})(\vec{u}|\vec{v})$$

$$= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u}|\vec{v})^2$$

$$= (a^2+b^2)(\alpha^2+\beta^2) - (a\alpha + b\beta)^2$$

$$= (a\alpha)^2 + (a\beta)^2 + (b\alpha)^2 + (b\beta)^2 - (a\alpha)^2 - (b\beta)^2 - 2a\alpha b\beta$$

$$= (a\beta)^2 + (b\alpha)^2 - 2a\alpha\beta b$$

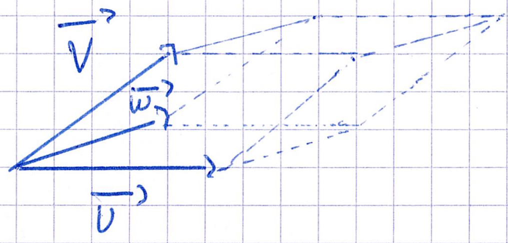
$$= (a\beta - b\alpha)^2 = \left[\det\begin{pmatrix} a & \alpha \\ b & \beta \end{pmatrix}\right]^2$$

$$= \det_{(\vec{i},\vec{j})}(\vec{u},\vec{v})^2$$

2) En dimension 3

On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$



d^n

Prop : Volume (parallélépipède de côtés $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$) $= \left| \det_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})} (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \right|$

D/ ok ■

3) En dim n

ok.