Chapitre 36

Intégration

Gottfried Wilhelm LEIBNIZ
(1646 – 1716)

Bernhard RIEMANN
(1826 – 1866)

Henri LEBESGUE
(1875 – 1941)

Un peu d'histoire

L'intégrale est, avant tout, une aire

À ce titre, c'est un thème des mathématiques très ancien. Ainsi, les Grecs de l'Antiquité faisaient d'une certaine façon de l'intégration — du moins, ils calculaient des aires un peu compliquées.

Néanmoins, la véritable naissance de la théorie de l'intégration a lieu au XVII^e siècle avec l'invention du calcul infinitésimal et le travail de Leibniz.

Plus tard, c'est au géant des mathématiques Riemann qu'on doit une approche plus rigoureuse des intégrales. L'histoire continua cependant et une nouvelle approche de l'intégration fut développée par le mathématicien français Lebesgue au début du XX^e siècle.

L'intégrale dite de Lebesgue, plus puissante que celle de Riemann, n'est pas au programme des classes préparatoires. Elle est enseignée généralement en L3 ou en école d'ingénieur.

Lycée CHATEAUBRIAND
MPSI 3

Colas Bardavid

36
Intégration

plan de cours et principaux résultats

I. Fonctions en escalier et fonctions continues par morceaux

44.41
44.23

1) Subdivisions

2) Fonctions en escalier

a) définition
b) propriétés

3) Fonctions continues par morceaux

a) une définition fausse
b) la bonne définition
c) propriétés

4) Approximation de $\mathscr{C}_m$ par Esc

a) rappels sur $\|\cdot\|_\infty$
b) densité de Esc dans $\mathscr{C}_m$

Théorème 36.1

L'ensemble $\mathsf{Esc}([a,b],\mathbb{R})$ *est dense dans* $\mathscr{C}_{\mathsf{pm}}([a,b],\mathbb{R})$ *pour* $\|\cdot\|_\infty$.
Ie, *on a :*

1) $\forall f \in \mathscr{C}_{\mathsf{pm}}([a,b],\mathbb{R}),\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists p \in \mathsf{Esc}([a,b],\mathbb{R}) :\ \|f-p\|_\infty \leqslant \varepsilon$;
2) $\forall f \in \mathscr{C}_{\mathsf{pm}}([a,b],\mathbb{R}),\ \exists (p_n)_n \in \mathsf{Esc}([a,b],\mathbb{R})^{\mathbb{N}} :\ \|f-p_n\|_\infty \longrightarrow 0$;

Cette dernière assertion s'écrit aussi

$$\forall f \in \mathscr{C}_{\mathsf{pm}}([a,b],\mathbb{R}),\ \exists (p_n)_n \in \mathsf{Esc}([a,b],\mathbb{R})^{\mathbb{N}} :\ p_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f.$$

II. Construction de l'intégrale

44.40

1) Intégrale des fonctions en escalier

2) Intégrale des fonctions continues par morceaux

III. Propriétés de l'intégrale

44.14

1) **Linéarité**

2) **Changer un nombre fini de valeurs ne change pas l'intégrale**

3) **Intégrale et inégalités**

a) positivité

b) croissance

c) inégalité triangulaire

Proposition 36.2 Ⓣ

$$\left| \int_{[a,b]} f \right| \leqslant \int_{[a,b]} |f|$$

d) stricte positivité

Proposition 36.3 Ⓣ

Soit $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$.

$$\left.\begin{array}{l} f \geqslant 0 \\ f \neq \widetilde{0} \end{array}\right\} \Longrightarrow \int_{[a,b]} f > 0.$$

Corollaire 36.4 Ⓣ **(Théorème aux trois hypothèses)**

$$\left.\begin{array}{l} f \textit{ continue} \\ f \geqslant 0 \\ \int_{[a,b]} f = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow f = \widetilde{0}.$$

IV. Intégrale orientée

44.20

1) **Fonctions continues par morceaux sur I**

2) **Définition de l'intégrale orientée**

3) **Relation de Chasles**

V. Théorème fondamental de l'analyse

44.9

44.27

1) **Notations**

2) **F est continue**

3) **Un exemple**

4) **De f à F : gain de régularité locale**

5) **Théorème fondamental de l'analyse**

6) **Gain de régularité global**

VI. Sommes de Riemann

44.32
44.35
44.21
44.37

1) Définition

Définition 36.5 Ⓣ
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. *Alors,* la somme de Riemann (à gauche) de f, d'ordre n, *est*

$$\mathsf{S}_n(f) := \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\Big(a + k\frac{b-a}{n}\Big).$$

2) Méthode des rectangles

a) méthode des rectangles à gauche

Proposition 36.6
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue par morceaux. Alors,*

1) *on a* $$\mathsf{S}_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f.$$

2) *Mieux, si* f *est lipschitzienne, on a*

$$\mathsf{S}_n(f) = \int_a^b f + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

b) méthode des rectangles à droite

3) Méthode des trapèzes

VII. Extension à $\mathbb{C}$

ch 36 : Intégration

- Soient $a, b \in \mathbb{R}$
- Quand on écrit $[a,b]$, osq $a<b$.

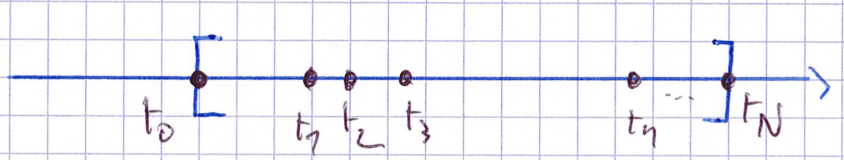
I Fonctions en escalier et fonctions continues par morceaux

1) Subdivisions

Déf° : Une subdivision de $[a,b]$ est une famille $(t_0, t_1, \dots, t_N)$ où $N \geq 1$ où $\begin{cases} t_0 = a \\ t_N = b \end{cases}$

et où $\forall i \in [\![1, N-1]\!]$, $t_i < t_{i+1}$

dⁿ



- On les note σ, τ, etc.
- Si $\sigma = (t_0, \dots, t_N)$ est une subdivision, on appelle support de σ :

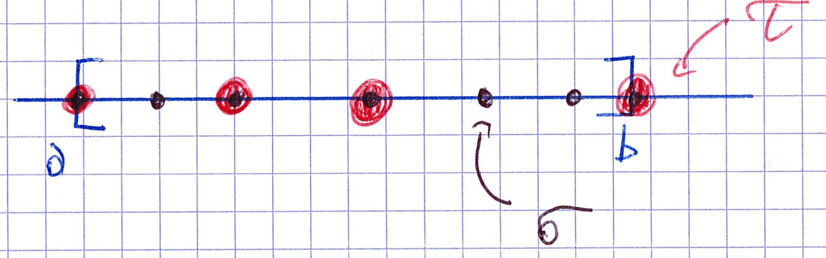
$$\mathrm{Supp}(\sigma) := \{t_0, \dots, t_N\}$$

On appelle pas de σ : $\max\limits_{i \in [\![0, N-1]\!]} t_{i+1} - t_i$

• Si σ et τ sont des subdivisions :
on dit que σ est plus fine que τ,
et on note $\sigma \leq \tau$ ssi $\triangle$ $\text{Supp}(\tau) \subset \text{Supp}(\sigma)$

Rq : C'est une relat° d'ordre.

dⁿ

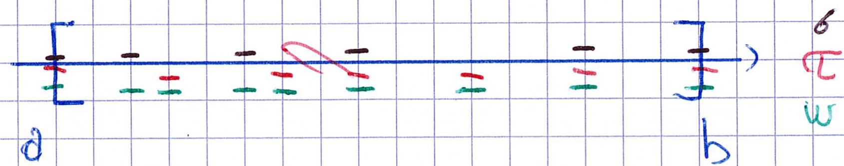


Rq : $\sigma \leq \tau \Rightarrow$ pas de $\sigma \leq$ pas de τ

Fait : Soient σ, τ subdivisions de $[a,b]$. Alors $\exists\ \omega$ subdivision de $[a,b]$: $\begin{cases} \omega \leq \sigma \\ \omega \leq \tau \end{cases}$

D/ idée Osd $\text{Supp}(\sigma) \cup \text{Supp}(\tau)$, on ordonne ses éléments et on définit ω $\blacksquare$

dⁿ

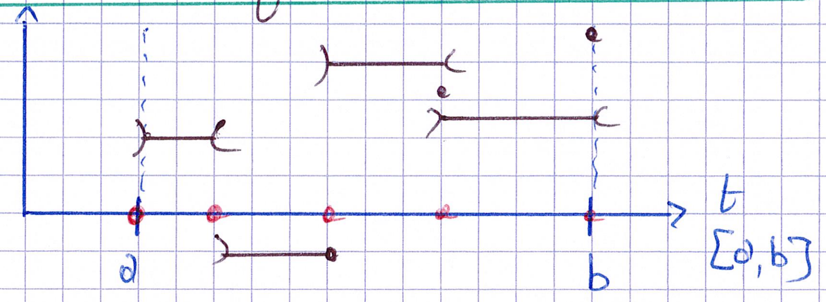


2) Fonctions en escalier

a) Déf°

Déf° : Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est une fonction en escalier ssi (Δ)

d^n



$\exists\, \sigma = (t_0, \dots, t_N)$ subdivision $[a,b]$: $\forall i \in [\![0, N-1]\!]$, $f|_{]t_i ; t_{i+1}[}$ cste

- ie ssi (Δ) $\exists\, \sigma = (t_0, \dots, t_N)$ subd $[a,b]$: $\forall i \in [\![0, N-1]\!]$, $\exists\, a_i \in \mathbb{R}$: $\forall t \in]t_i ; t_{i+1}[$, $f(t) = a_i$

- On note $Esc([a,b], \mathbb{R})$ l'ens des f° en escalier.

- Si $f \in Esc([a,b], \mathbb{R})$ et si $\sigma = (t_0, \dots, t_N)$ subd $[a,b]$, on dit que σ est adaptée à f ssi (Δ) $\forall i \in [\![0, N+1]\!]$, $f|_{]t_i, t_{i+1}[}$ cte

Fait : (T)

$$\left.\begin{array}{l}\sigma \text{ adaptée à } f \\ \tau \leq \sigma\end{array}\right\} \Rightarrow \tau \text{ adaptée à } f$$

D/ ok

b) propriétés

Prop : Si $f \in Esc([a,b], \mathbb{R})$, alors f est bornée

D/ Mieux : f ne prend qu'un nb fini de valeurs ■

Rq : Ainsi : si $f \in Esc([a,b], \mathbb{K})$, on pourra considérer $\|f\|_\infty$

Prop : (T) Soient $f, g \in Esc$ (sous-entendu $Esc([a,b], \mathbb{R})$)
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

1) $\lambda f \in Esc$
2) $f + g \in Esc$
3) $fg \in Esc$
4) $|f| \in Esc$
5) $\forall a \in \mathbb{R}$, $\tilde{a} \in Esc$

D/ 1) ok

2) 3) Soit σ adaptée à f

τ ——— g

Soit ω + fine que σ et τ

Alors ω est adaptée à f et g.

Ecrivons $\omega = (t_0, \dots, t_N)$

Soit $i \in [\![0, N-1]\!]$. Alors :

f et g sont cste sur $]t_i, t_{i+1}[$

Donc il en est de m pour $f+g$.

4) 5) ok ■

Corollaire :

1) Esc sev $\mathcal{F}([a,b], \mathbb{R})$

2) Mieux : Esc ss-$\mathbb{R}$-algèbre de $\mathcal{F}([a,b], \mathbb{R})$

3) Fonctions continues par morceaux

a) déf°

(d^n)

ex de f° c° pm

Déf° : Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est continue par morceaux $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$:

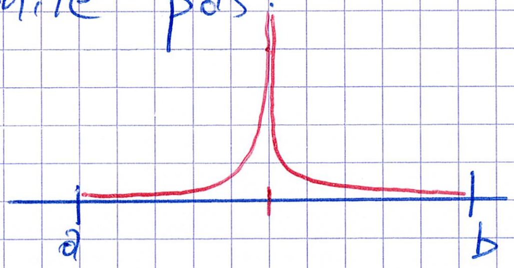
$$\exists\, \sigma = (t_0, \ldots, t_N) \text{ subd } [a,b] : \forall i \in [\![0, N-1]\!],$$

$$f|_{]t_i, t_{i+1}[} \text{ continue}$$

Cette déf° est fausse

(Rq) : Le souci de cette déf° est que une telle f peut "exploser" ce qu'on ne souhaite pas.

Ex :



(Ex : $[-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

b) Bonne déf°

<u>Déf°</u> : Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit qu'elle est C^0 pm $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\exists \sigma = (t_0, \dots, t_N) \text{ subd } [a,b] : \forall i \in [\![0, N-1]\!],$$

$$\begin{cases} f|_{]t_i, t_{i+1}[} \in \mathcal{C}(]t_i, t_{i+1}[, \mathbb{R}) \\ \lim\limits_{t \xrightarrow{>} t_i} f(t) \text{ et } \lim\limits_{t \xrightarrow{<} t_{i+1}} f(t) \text{ existent dans } \mathbb{R} \end{cases}$$

ie $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\exists \sigma = (t_0, \dots, t_N)$ subd $[a,b]$:

$\forall i \in [\![0, N-1]\!]$, $\exists \varphi_i \in \mathcal{C}([t_i, t_{i+1}], \mathbb{R})$:

$$\varphi|_{]t_i, t_{i+1}[} = \varphi_i|_{]t_i, t_{i+1}[}$$

- On dit alors que σ est adaptée à f
- On note $\mathcal{C}_{pm}([a,b], \mathbb{R})$ l'ens de ces fonctions (abrégé en $\mathcal{C}^{pm}$)

c) Propriétés

Prop : Soient $f, g \in \mathcal{C}^{pm}$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$

Alors :

1) $f+g \in \mathcal{C}^{pm}$
2) $\lambda f \in \mathcal{C}^{pm}$
3) $fg \in \mathcal{C}^{pm}$
4) $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{R})$
5) $Esc \subset \mathcal{C}^{pm}$
6) $|f| \in \mathcal{C}^{pm}$
7) f est bornée

D) 1) $\longrightarrow$ 6) ok.

7) Fixons $\sigma = (t_0, \dots, t_N)$ subd $[a,b]$ adaptée à f.

Soit $i \in [\![0, N-1]\!]$. Fixons $\varphi_i : [t_i, t_{i+1}] \to \mathbb{R}$ C^0

tq $\varphi_i|_{]t_i, t_{i+1}[} = f|_{]t_i, t_{i+1}[}$

- $\hat{c}$ φ_i est C^0 sur un <u>segment</u> : elle est bornée.
- Fixons donc $M \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall t, |\varphi_i(t)| \leq M$
- Ainsi : $\forall t \in]t_i, t_{i+1}[, \ |f(t)| \leq M$

- Posons $M_i := \max(M, |f(t_i)|, |f(t_{i+1})|)$

On a $\forall t \in [t_i, t_{i+1}]$, $|f(t)| \leq M_i$

On pose $\widetilde{M} := \max\limits_{0 \leq i \leq N-1} (M_i)$.

On a $\forall t \in [a,b]$, $|f(t)| \leq \widetilde{M}$ $\blacksquare$

Rq : 1) ⚠ Pour l'instant, on a défini $\mathcal{C}^{pm}$ que sur les segments.

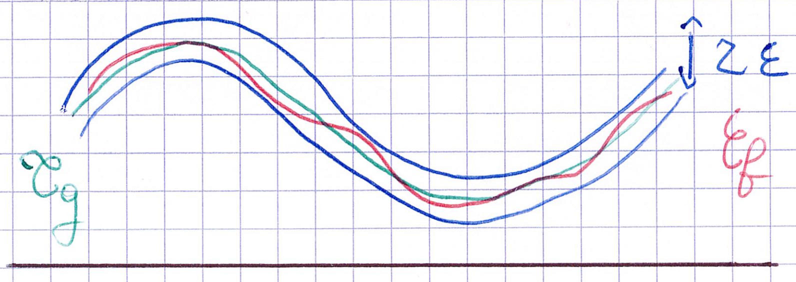
2) Si $f \in \mathcal{C}_{pm}([a,b], \mathbb{R})$, on pourra considérer $\|f\|_\infty$

4) Approximat° de $\mathcal{C}^{pm}$ par Esc

a) Rappels sur $\|\cdot\|_\infty$

- Si $f, g \in \mathcal{B}([a,b], \mathbb{R})$ et si $\varepsilon > 0$,

$\|f-g\|_\infty \leq \varepsilon$ se représente



- Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions (définies sur $[a,b]$, bornées)

On dit que $f_n \xrightarrow[n \to \infty]{\|\cdot\|_\infty} f \overset{\Delta}{\text{ssi}}$:

$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \; ; \; \forall n \geq N, \; \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$

b) densité de Esc dans $\mathcal{C}^{pm}$

Théorème

1) $Esc([a,b], \mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{R})$ pour $\|\cdot\|_\infty$.

2) Ie : $\forall f \in \mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{R}), \forall \varepsilon > 0, \exists p \in Esc([a,b],\mathbb{R})$

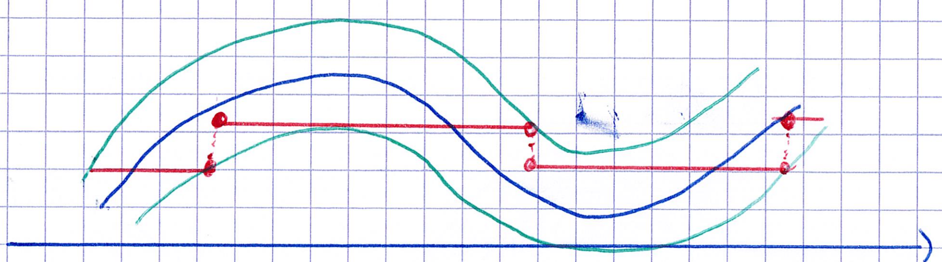
: $\|f - p\|_\infty \leq \varepsilon$

3) Ainsi :

$\forall f \in \mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{R}), \; \exists (p_n)_n \in Esc([a,b],\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$:

$$p_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$$

d^n



Lemme : c'est ok si f est C^0

D/ Le coeur de la D/ est le théorème de Heine : ~~c'est~~ comme f est C^0 sur le segment $[a,b]$: $\boxed{f \text{ y est uniformement } C^0}$

ie $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 : \forall x, y \in [a,b],$
$|x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$

Ac : $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ n'est pas unif^{nt} C^0.

Soit $\varepsilon > 0$

Fixons $\delta > 0$ tq $(*)$

$\hat{C}$ $\dfrac{b-a}{N} \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$, fixons $N \in \mathbb{N}^*$ tq

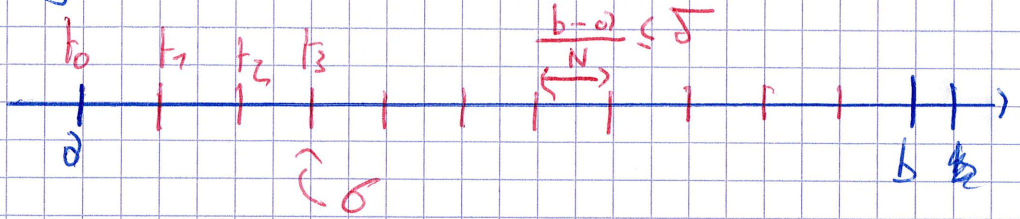
$\dfrac{b-a}{N} \leq \delta$.

Ocsd la subdivision $[a,b]$

$$\sigma_\varepsilon := \left(a, a + \frac{b-a}{N}, a + 2\frac{b-a}{N}, \dots, b = a + N\frac{b-a}{N}\right)$$

Pour $i \in [\![0, N]\!]$, on note $t_i := a + i\frac{b-a}{N}$

On dit que σ est une subdivision régulière de $[a, b]$:



On csd la f° p en escalier définie par :

$$\begin{cases} \bullet \text{ Sur } [t_i, t_{i+1}[\text{, on pose } p(t) = f(t_i) \text{ pour } i \in [\![0, N-1]\!] \\ \bullet\ p(b) = f(b) \end{cases}$$

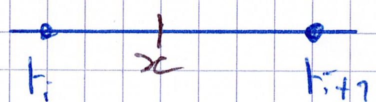
On a bien $p \in Esc([a,b), \mathbb{R})$

Mq $\|f - p\|_\infty \leq \varepsilon$

Soit $x \in [a, b[$, fixons $i_0 \in [\![0, N-1]\!]$ tq $x \in [t_{i_0}, t_{i_0+1}[$

On a $|f(x) - p(x)| = |f(x) - \underbrace{f(t_{i_0})}_{= p(x) \text{ par déf}^{\circ}}|$

Or, $\hat{c}$ $x \in [t_i, t_{i+1}[$, on a $|x - t_i| < t_{i+1} - t_i = \frac{b-a}{N} \leq \delta$



D'après $(*)$ on a $|f(x) - f(t_{i_0})| \leq \varepsilon$

__ccl__ : $|f(x) - p(x)| \leq \varepsilon$.

- Si $x = b$: on a $|f(x) - p(x)| = 0 \leq \varepsilon$

- <u>ccl</u> : $\forall x \in [a,b]$, $|f(x) - p(x)| \leq \varepsilon$

- <u>ccl</u> : $\| f - p \|_\infty \leq \varepsilon$ $\blacksquare$

<u>D $^{\text{cas gen}^{al}}$ /</u>

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a,b], \mathbb{R})$. Fixons $\sigma = (t_0, \dots, t_N)$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f.

Soit $i_0 \in [\![0, N-1]\!]$. Fixons

$\varphi : [t_i, t_{i+1}] \longrightarrow \mathbb{R}$ C^0 tq $\varphi|_{]t_{i_0}, t_{i_0+1}[}$

$= f|_{]t_{i_0}, t_{i_0+1}[}$

Ĉ φ est C^0, d'après le lemme :

fixons $p_{i_0} \in Esc([t_{i_0}, t_{i_0+1}], \mathbb{R})$ tq

$\| \varphi - p_{i_0} \|_\infty \leq \varepsilon$

On définit $\widetilde{p_{i_0}} : [t_{i_0}, t_{i_0+1}] \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} \widetilde{p_{i_0}}(t_{i_0}) = f(t_{i_0}) \\ \widetilde{p_{i_0}}(t_{i_0+1}) = f(t_{i_0+1}) \end{cases}$$

et $\forall x \in]t_{i_0}, t_{i_0+1}[$, $\widetilde{p_{i_0}}(x) = p_{i_0}(x)$

On a encore $\widetilde{p_{i_0}} \in Esc$.

Enfin : On "juxtapose" les p_i en posant $p : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tq $\forall i \in [\![0, N-1]\!]$,

$$p|_{[t_i, t_{i+1}]} = \widetilde{p_i}$$

(On peut le faire car les $\widetilde{p_i}$ "coincident aux points de jonction".)

On a bien $p \in Esc$ et $\|f - p\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

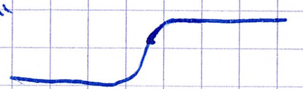
3) On sequentialise la $(\forall \varepsilon > 0, \exists p)$-assertion en "remplaçant ε par $\frac{1}{n}$")

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on fixe $p_n \in Esc$ tq

$$\|f - p_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{n}$$

On a bien $p_n \xrightarrow[n \to \infty]{\|\cdot\|_\infty} f$ ■

<u>Rq</u> : À l'aide d'un f° $\mathcal{C}^\infty$ du type

"  " et de ce théorème, on comprend qu'on pourrait mq $\mathcal{C}^\infty([a,b], \mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{C}_{pm}([a,b], \mathbb{R})$

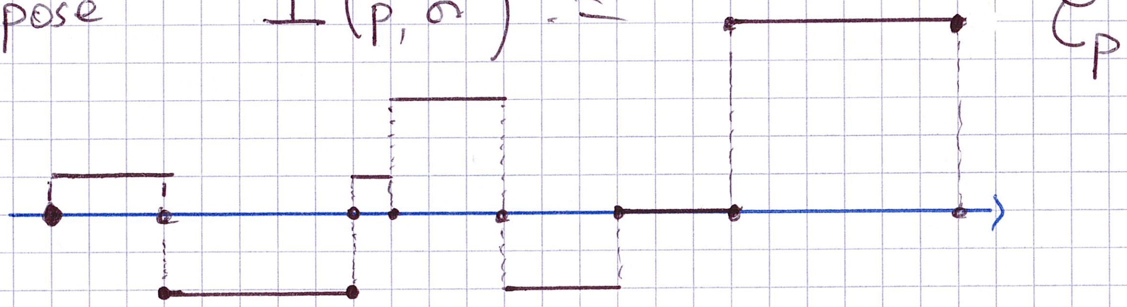
II Construct° de l'intégrale

1) Intégrale des f° en escaliers

Soit $p : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une f° en escalier et soit $\sigma = (t_0, \dots, t_N)$ une subd adaptée à p.

On pose $I(p,\sigma) :=$

dⁿ



$$I(p,\sigma) := \sum_{i=0}^{N-1} (t_{i+1} - t_i)\, p\left(\frac{t_i + t_{i+1}}{2}\right)$$

Lemme : Si σ, τ adaptée à p, alors

$$I(p,\sigma) = I(p,\tau)$$

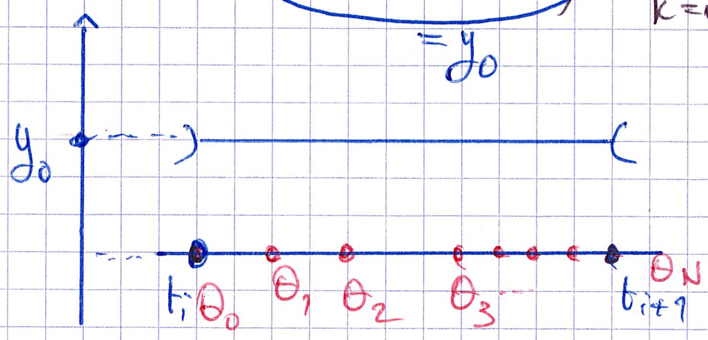
D/ Fixons ω subd tq $\begin{cases} \omega \leq \sigma \\ \omega \leq \tau \end{cases}$

Mq $I(p,\omega) = I(p,\sigma)$

On écrit $\sigma = (t_0, \dots, t_N)$ et $\omega = \big(\theta_0^{[0]}, \theta_1^{[0]}, \dots, \theta_{N_0}^{[0]} = \theta_0^{[1]}, \dots, \theta_{N_1}^{[1]} = \theta_0^{[2]}, \dots, \theta_{N_2}^{[2]}, \dots, \theta_0^{[p]}, \dots, \theta_{N_p}^{[p]}\big)$ tq $\forall i,\ \theta_0^{[i]} = t_i$ et $p := N-1$

Mq $(t_{i+1}-t_i)\, \underbrace{p\left(\frac{t_{i+1}+t_i}{2}\right)}_{=y_0} = \sum_{k=0}^{N_i-1} \left(\theta_{k+1}^{[i]}-\theta_k^{[i]}\right) \underbrace{\boxed{p\left(\frac{\theta_{k+1}^{[i]}+\theta_k^{[i]}}{2}\right)}}_{= y_0}$

d^n



Donc $= y_0 \underbrace{\sum_{k=0}^{N_i-1} \left(\theta_{k+1}^{[i]}-\theta_k^{[i]}\right)}_{= \theta_{N_i}^{[i]} - \theta_0^{[i]}}$

$= y_0 (t_{i+1}-t_i)$ ■

Notation : on note $I(p)$ la valeur commune à toutes les $I(p,\sigma)$. C'est l'intégrale de p.

Prop : 1) $p \geq 0 \Rightarrow I(p) \geq 0$

2) Si p est nulle sur un nb fini de pts,

3) $I(\lambda p) = \lambda I(p)$

4) $I(p+q) = I(p) + I(q)$

D/ ok ■

Rq : On note aussi $\int_{[a,b]} p := I(p)$

2) Intégrale de f° $\mathcal{C}^{pm}$

Idée :

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a,b], \mathbb{R})$. Fixons $(p_n)_n \in Esc([a,b], \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ tq $p_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$

(A) Mq $\left(I(p_n) \xrightarrow{CV}\right)$

(B) Si $(q_n)_n \in Esc^{\mathbb{N}}$ est une autre approximat° de f en escalier, ie si $q_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$ alors $\lim\limits_{n \to \infty} I(q_n) = \lim\limits_{n \to \infty} I(p_n)$

(C) Cette limite commune est appelée intégrale de f sur $[a,b]$

et est notée $\displaystyle\int_{[a,b]} f$

Rq*: Si $p \in Esc([a,b], \mathbb{R})$, on a $I(p) = \int_{[a,b]} p$ en tant que f° C^0 pm car on a

$$p_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_\infty} p.$$

III Propriétés de l'intégrale

1) Linéarité.

Prop: $$\int_{[a,b]} f + \lambda g = \int_{[a,b]} f + \lambda \int_{[a,b]} g$$

D/ Fixons $(p_n)_n, (q_n) \in Esc^{\mathbb{N}}$ tq $\begin{cases} p_n \to f \\ q_n \to g \end{cases}$

(sous-entendu pour $\|\cdot\|_\infty$)

Lemme: $p_n + \lambda q_n \longrightarrow f + \lambda g$

D/ $\|f + \lambda g - (p_n + \lambda q_n)\|_\infty$

$= \|(f - p_n) + \lambda(g - q_n)\|_\infty \leq \underbrace{\underbrace{\|f - p_n\|_\infty}_{\to 0} + |\lambda| \underbrace{\|g - q_n\|}_{\to 0}}_{\to 0}$ ■

· Donc d'après (B):

$$I(p_n + \lambda q_n) \longrightarrow \int_{[a,b]} (f + \lambda g)$$

$$\int_{[a,b]} f \longleftarrow I(p_n) + \lambda I(q_n) \longrightarrow \lambda \int_{[a,b]} g$$

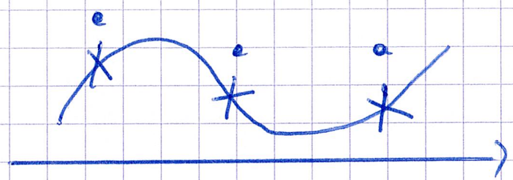
- Par unicité de la limite, on conclut ■

2) Changer la fonction en un nb fini de points ne change pas l'intégrale

Prop : Soient $f, g \in \mathcal{C}^{pm}$ tq $f = g$ sauf en un nb fini de pts (ie tq $\{x \in [a,b] \mid f(x) \neq g(x)\}$ est fini)

Alors $$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} g$$

dessin



D/ On a $f-g$ nulle sauf en un nb fini de points.

Donc $f-g \in Esc$. Donc cf-ci-dessus :

$$I(f-g) = 0$$

Donc $\displaystyle\int_{[a,b]} f-g = 0$ donc $\displaystyle\int_{[a,b]} f - \int_{[a,b]} g = 0$ ■

3) Intégrale et inégalités

a) Positivité

Prop : $f \geq 0 \Longrightarrow \int_{[a,b]} f \geq 0$

D/ Soit $(p_n)_n \in Esc^{\mathbb{N}}$ tq $p_n \longrightarrow f$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\widetilde{p_n} := \max(p_n, \tilde{0})$

(Rq : $\varphi, \psi \in Esc \Longrightarrow \max(\varphi, \psi) \in Esc$)

Donc (†) $\widetilde{p_n} \in Esc$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in [a,b]$.

(1) Si $p_n(x) \geq 0$: on a $|\widetilde{p_n}(x) - f(x)| \leq |p_n(x) - f(x)|$

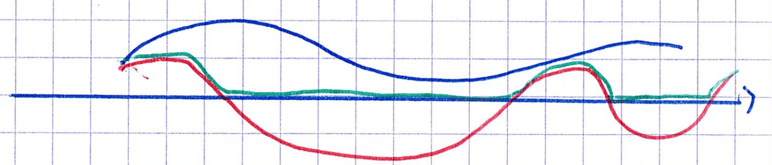
(*) si $p_n(x) < 0$: alors, on a :

$$|\underbrace{f(x)}_{\geq 0} \underbrace{- p_n(x)}_{>0}| = f(x) \underbrace{- p_n(x)}_{>0}$$

$$> f(x) = |f(x) - \underbrace{\widetilde{p_n}(x)}_{=0}|$$

(ccl) : $\forall x, \; |f(x) - \widetilde{p_n}(x)| \leq |f(x) - p_n(x)|$

d^n



Bilan : $\|f - \widetilde{p_n}\|_\infty \leq \|f - p_n\|_\infty \longrightarrow 0$

Ainsi : $(\widetilde{p_n}) \in Esc^{\mathbb{N}}$

$\widetilde{p_n} \longrightarrow f$

$\forall n, \widetilde{p_n} \geq 0$

· Or $\forall n, I(\widetilde{p_n}) \geq 0$

· Donc $\lim_{n \to \infty} I(\widetilde{p_n}) \geq 0$ ie $\int_{[a,b]} f \geq 0$ ■

Rq : Autre démo : csd $p_n + \varepsilon \longrightarrow f + \varepsilon$ etc (exo)*

b) Croissance

Prop : $f \geq g \implies \int_{[a,b]} f \geq \int_{[a,b]} g$

D/ Ocsd $f - g \geq 0$ + Linéarité ■

c) inégalité triangulaire

Prop : Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^{pm}$. Alors :

$$\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f|$$

D/ on a $-|f| \leq f \leq |f|$

Donc $-\int_{[a,b]} |f| \leq \int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} |f|$

On a $\quad -A \leq x \leq A \iff |x| \leq A$ ■

d) Stricte positivité

<u>Prop</u>: Soit $f \in \boxed{\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})}$ Alors :

$$\left.\begin{array}{l} f \geq 0 \\ f \neq \tilde{0} \end{array}\right\} \implies \int_{[a,b]} f > 0$$

<u>D/</u> $\hat{c}$ $f \neq \tilde{0}$, fixons $x_0 \in [a,b]$ tq $f(x_0) > 0$

$\hat{c}$ f est C^0 : On sait que f est > 0 au voisinage de x_0.

Fixons donc $x_1 \in]a,b[$ tq $f(x_1) > 0$

$\hat{c}$ f est C^0 : fixons $\delta > 0$ tq

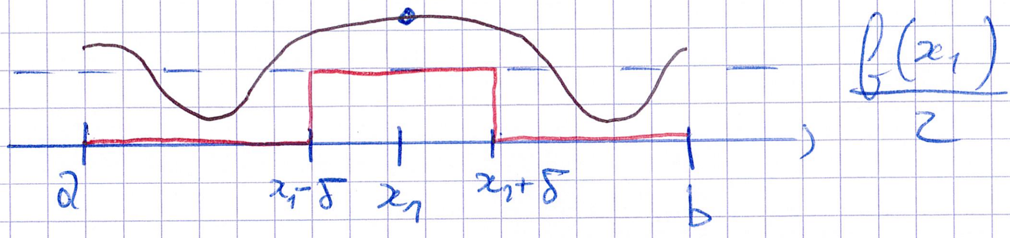
1°/ $[x_1 - \delta, x_1 + \delta] \subset [a,b]$

2°/ $\forall t \in [x_1 - \delta, x_1 + \delta]$, $f(t) \geq \frac{f(x_1)}{2}$

On a $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \geq \frac{f(x_1)}{2} \cdot 1\!\!1_{[x_1-\delta, x_1+\delta]}$

" à la markov

d^n



ĉ l'intégrale est croissante, on a :

$$\int_{[a,b]} f \geqslant \int_{[a,b]} \frac{f(x_1)}{2} \mathbb{1}_{[x_1-\delta,\, x_1+\delta]}$$

$$= \frac{f(x_1)}{2} \int_{[a,b]} \mathbb{1}_{[x_1-\delta,\, x_1+\delta]}$$

c'est un f° en escalier :

c'est $\underline{I}\left(\mathbb{1}_{[x_1-\delta,\, x_1+\delta]}\right)$

$= 2\delta$

<u>Bilan :</u> $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geqslant 2\delta \, \frac{f(x_1)}{2} > 0$ ■

<u>Rq :</u> $\left.\begin{array}{l} f \geqslant 0 \\ f \neq \tilde{0} \\ f \in \mathcal{C}^{pm} \end{array}\right\} \not\Longrightarrow \displaystyle\int_{[a,b]} f > 0$

F en g^al

<u>ctrex :</u> $\mathbb{1}_{\{0\}}$ sur $[0,1]$

Corollaire (Thm aux 3 hypothèses)

$$\left.\begin{array}{l} (1)\ f\ C^0 \\ (2)\ f \geq 0 \\ (3)\ \int_{[a,b]} f = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f = \tilde{0}$$

D/ ok ∎

IV Intégrale orienté

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$

1) Fonctions $\mathcal{C}^{pm}$ sur I

Ex : • $I = \mathbb{R}$: qu'est ce que $\mathcal{C}^{pm}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

• $I =]0,1]$: ______ ?

Déf° : Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est C^0 par morceaux sur I $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

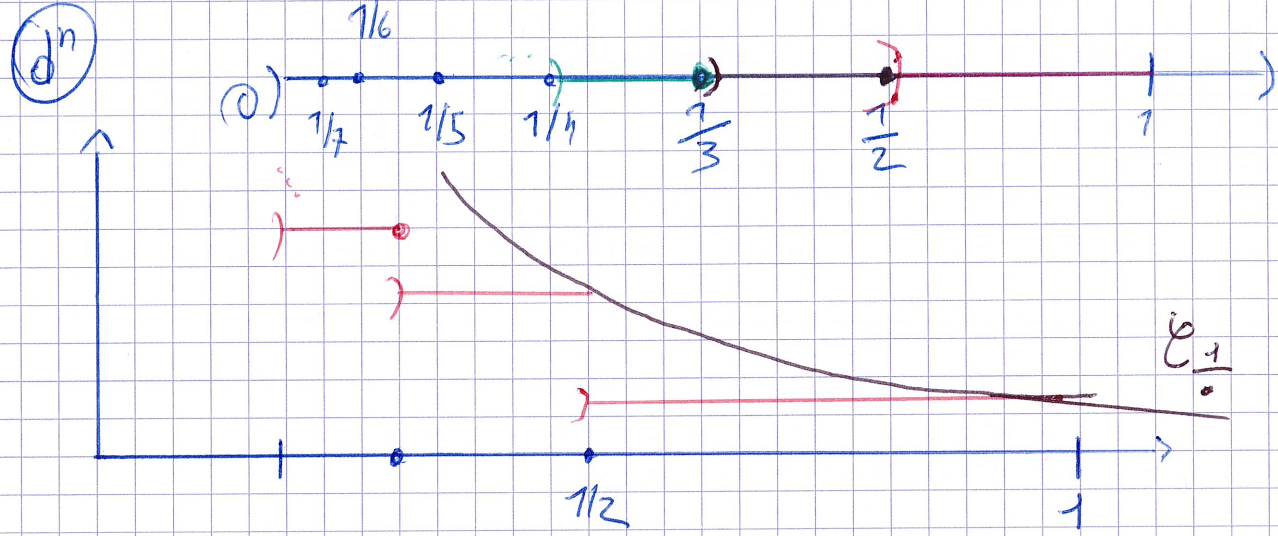
$$\forall a, b \in I, \quad a < b \Rightarrow f|_{[a,b]} \in \mathcal{C}_{pm}([a,b], \mathbb{R})$$

• On note $\mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$ l'~~ens~~ ens des telles f°.

Ex : Ocsd $f :]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto$

On a $]0,1] = \bigcup_{n=1}^{\infty}]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$



2) Déf^o de l'intégrale orientée

Déf : Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$

Soient $a, b \in I$

- Si $a = b$: On pose $\int_a^b f := 0$

- Si $a < b$ On a $[a,b] \subset I$,

  donc $f|_{[a,b]} \in \mathcal{C}_{pm}([a,b], \mathbb{R})$

  Donc $\int_{[a,b]} f|_{[a,b]}$ existe.

On pose $\int_a^b f := \int_{[a,b]}^b$

• Si $b < a$: On pose

$$\int_a^b f := - \int_{[b,a]} f|_{[b,a]}$$

Rq : On notera également $\int_a^b f$ lorsque

x est une variable non encore utilisée

3) Relation de Chasles

Prop : Soient $a, b \in I$ et soit $f \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$

Alors :

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$$

D/ Si $a < b < c$: c'est le cas favorable

Si on n'est pas dans ce cas :

p. ex : Si $a < c < b$

OALES :

$$\int_a^b f + \int_a^c f = \int_a^c f$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b f = \int_a^c f - \int_b^c f$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

• Donc : osq $a<b<c$

Soit $(p_n)_n \in Esc([a,b],\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ tq $p_n \longrightarrow f_{[a,b]}$

—— $(q_n)_n \in Esc([b,c],\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ tq $q_n \longrightarrow f|_{[b,c]}$

Pour $n\in\mathbb{N}$, fixons $s_n : [a,c] \longrightarrow \mathbb{R}$ tq

$$s_n|_{[a,b[} = p_n|_{[a,b[} \;,\; s_n|_{[b,c]} = q_{n\,[b,c]}$$

ie s_n est la juxtapositᵒ de p_n et q_n

On a $s_n \in Esc([a,c],\mathbb{R})$

On a $I(s_n) = I(p_n) + I(q_n)$ pour tout n.

$$I(s_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^c f \qquad I(p_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f \qquad I(q_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_b^c f$$

puisque $s_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f|_{[a,c]}$ $\blacksquare$

V Théorème fondamental de l'analyse

1) Notations

- I intervalle.
- Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux
- Soit $x_0 \in I$
- Ocsd $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$
  $x \longmapsto \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$

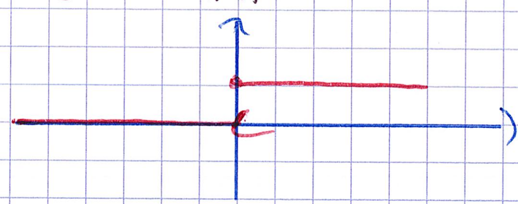
⚠ F n'est pas toujours dérivable et F' n'a pas toujours de sens.

Idée : F est un cran de plus regulière q f.

2) Un exemple

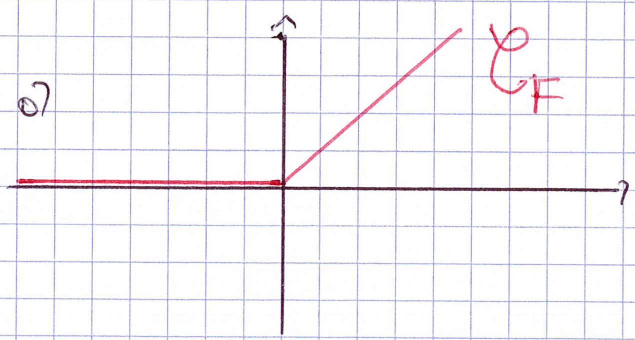
On prend $I = \mathbb{R}$; $f = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$

et $x_0 := 0$.



$\boxed{\text{Qui est } F ?}$

Fait : On a



I_e :

1) $\forall x<0, \quad F(x)=0$

2) $F(0)=0$

3) $\forall x>0, \quad F(x)=x$

D/ $x<0$: $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$

$$= -\int_x^0 \underbrace{f(t)}_{=0}\,dt = 0$$

$x=0$: ok

$x>0$: $\displaystyle F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x 1\,dt$

$$= 1(x-0) = x \quad \blacksquare$$

Rq : ici • $f \ \mathcal{C}^{pm} \xrightarrow{\text{gain}} F \ \mathcal{C}^0$

• mais F n'est pas dérivable

3) $F(\cdot)$ est tjrs continue

Prop : Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$. Alors
$$F \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$$

Rq* : f est $\mathcal{C}_{pm}$; donc f est localement bornée ; F est localement lipschitzienne ; F est local^{nt} C^0 ; F est C^0 $\blacksquare$

D/ Soit $x_1 \in I$. Mq F est C^0 en x_1.

- On suppose que x_1 n'est pas une borne de I : ie osq $x_1 \in \mathring{I}$

Fixons donc $\delta > 0$ tq $[x_1 - \delta, x_1 + \delta] \subset I$

DALC : On sait que $f|_{[x_1-\delta, x_1+\delta]}$ est bornée.

Fixons donc $M \geq 0$ tq

$$\forall t \in [x_1 - \delta, x_1 + \delta] ; |f(t)| \leq M$$

Soit $x \in [x_1-\delta ; x_1+\delta]$

On calcule

$$F(x)-F(x_1) = \int_{x_0}^{x} f - \int_{x_0}^{x_1} f = \int_{x_1}^{x} f \quad \text{(Chasles)}$$

(*) Osq $x_1 \leq x$: On a $\left|F(x)-F(x_1)\right| \leq \left|\int_{x_1}^{x} f\right|$
$\leq \int_{x_1}^{x} |f|$

Or, $\hat{c}$ $x_1, x \in [x_1-\delta, x_1+\delta]$, par convexité :

$[x_1, x] \subset [x_1-\delta, x_1+\delta]$ AF d^n

Sur cet intervalle, on a $|f| \leq M$.

Donc $\left|F(x)-F(x_1)\right| \leq M|x-x_1|$

(*) Osq $x \leq x_1$: de $\bar{m}$.

ccl On a mq $F|_{[x_1-\delta, x_1+\delta]} : [x_1-\delta, x_1+\delta] \to \mathbb{R}$

est M-lipschitzienne.

Or : φ lipschitzienne $\Rightarrow$ φ continue

Donc $F|_{[x_1-\delta, x_1+\delta]}$ est $\mathcal{C}^0$. Donc

F est $\mathcal{C}^0$ en x_1

• Si x_1 est la borne à gauche de I : pareil

1) De f à F : gain de regularité locale

Prop : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{C}_{pm}$

Soit $a \in I$

Mq : f est C^0 en $a \Longrightarrow F$ est d^1 en a

$(\text{et } F'(a) = f(a))$

D/ • Osq f continue en a

• Mq f d^1 en a $\quad$ $\mathbb{R}^x$ $\tau_{f,a}$

T $\quad \tau_{F,a}(x) = \dfrac{F(x) - F(a)}{x-a}$

$$= \frac{\displaystyle\int_{x_0}^{x} f - \int_{x_0}^{a} f}{x-a}$$

$$= \frac{\displaystyle\int_{a}^{x} f}{x-a}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Mq $\exists\, \delta > 0$: $\left.\begin{array}{l}|x-a| \leq \delta \\ (x \neq a)\end{array}\right\} \Longrightarrow$ $\tau_{F,a}(x)$

$$\left.\begin{array}{l}|x-a| \leq \delta \\ (x \neq a)\end{array}\right\} \Longrightarrow \left|\tau_{F,a}(x) - f(a)\right| \leq \varepsilon$$

ie $\quad \tau_{F,a}(x) \xrightarrow[x \neq a]{x \to a} f(a)$

• Fixons $\delta > 0$ tq $|x-a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$

(f est C^0 en a)

• Alors

$$|\tau_{F,a}(x) - f(a)| = \left| \frac{1}{x-a} \int_a^x f - \frac{1}{x-a} \int_a^x f(a) \right|$$

$$= \frac{1}{|x-a|} \left| \int_a^x (f - f(a)) \right| \leq \frac{1}{x-a} \int_a^x |f(t) - f(a)|\, dt$$

Osq $a \leq x$

on intègre DLBS

• Osq $|x-a| \leq \delta$

$\forall t \in [a, x],\quad |a-t| \leq \delta$

Donc $\quad |\tau_{F,a}(x) - f(a)| \leq \frac{1}{x-a} \int_a^x \varepsilon = \varepsilon$

etc ∎

5) Thm fal de l'analyse

Th : • Osq f C^0. Alors F est d^1 et $F' = f$

• Ainsi : $\forall$e f^0 continue sur I admet une primitive sur I.

Rq : Soit $(I_{a,b})_{(a,b) \in \mathbb{R}^2}$ une famille d'opérateurs :

$$I_{a,b} : \mathcal{C}_{pm}([a,b], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \underline{AL}$$

tq (T) $I_{a,c}(f) = I_{a,b}(f|_{[a,b]}) + I_{b,c}(f|_{[b,c]})$

(T) $f \geq 0$, $I_{a,b}(f) \geq 0$ qd $b \geq a$

(T) $I_{a,b}(\tilde{\lambda}) = \lambda(b-a)$

Mq (?) $I_{a,b}(f) = \int_a^b f$

D/ ok ■

6) Gain de Régularité globale

Prop : (T) 1) $f \in \mathcal{C}^k \Rightarrow F \in \mathcal{C}^{k+1}$

2) $f \in \mathcal{C}^\infty \Rightarrow F \in \mathcal{C}^\infty$

D (T) / 1) Osq $f \in \mathcal{C}^k$ $(k \geq 0)$. Donc f est $\mathcal{C}^0$, Donc F est d^1 et : $F' = f$. Donc F' est $\mathcal{C}^k$. Donc par déf° :

$F \in \mathcal{C}^{k+1}$.

2) Osq $f \in \mathcal{C}^\infty$. Mq F est $\mathcal{C}^\infty$.

je mq $\forall k \in \mathbb{N}$, $F \in \mathcal{C}^k$

(AC)

Soit $k \in \mathbb{N}$

Cᐱ $f \in \mathcal{C}^\infty$, on a $f \in \mathcal{C}^k$. Donc F est $\mathcal{C}^{k+1}$

or $\mathcal{C}^{k+1} \subset \mathcal{C}^k$. Donc F est $\mathcal{C}^k$ ∎

VI Sommes de Riemann

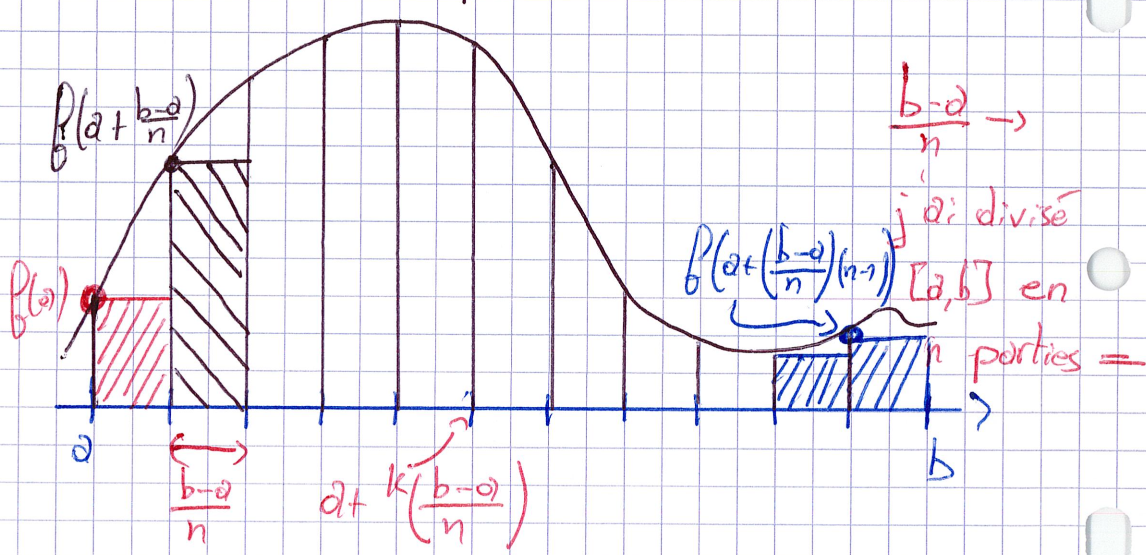
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

1) Définition

Déf° : La somme de Riemann (à gauche) de f d'ordre n est :

$$S_n(f) := \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right)$$

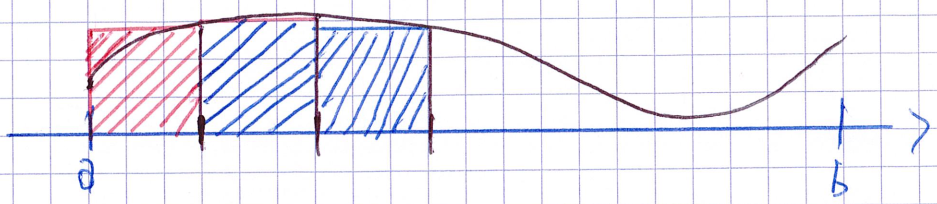
d^n



Rq :
- $S_n(f)$ est l'aire des rectangles du dessin ci-dessus.
- On peut aussi définir $S_n^{[\text{droite}]}(f) =$

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

d^n



2) Méthode des rectangles

a) À gauche

Proposition : Osq $f \in \mathcal{C}_{pm}$. Alors

1) $S_n(f) \longrightarrow \int_a^b f(t)\,dt$

2) Osq f lipschitzienne. Alors :

$$S_n(f) = \int_a^b f(t)\,dt + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

Rque : le 2) signifie : $\exists C : \left| S_n(f) - \int_a^b f(t)\,dt \right| \leq \frac{C}{n}$

D/ 1) $\approx$ ok. C'est une csq de la construct° de l'intégrat°

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

(Soit $C \geq 0$ tq $\forall x, y \in [a,b]$, $|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|$)

$$\left| S_n - \int_a^b f(t)\,dt \right| \qquad t_k := a + k\,\frac{b-a}{n}$$

$$= \left| \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k) - \int_a^b f \right|$$

$$= \left| \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k) - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f \right|$$

on homogénéise

$$= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left(f(t_k)\,\frac{b-a}{n} - \int_{t_k}^{t_{k+1}} f \right) \right|$$

Ici, on a $\displaystyle \frac{b-a}{n} f(t_k) - \int_{t_k}^{t_{k+1}} f = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t_k) - \int_{t_k}^{t_{k+1}} f$

on homogeneise

$$= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[f(t_k) - f(t) \right] dt$$

$$\ldots = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(f(t_k) - f(t) \right) dt \right|$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int \underbrace{\left| f(t_k) - f(t) \right|}_{\leqslant C(t_k - t)} dt$$

(...)

$(\ldots)$ qd $t \in [t_k, t_{k+1}] : |t_k - t| \leq P([t_k, t_{k+1}])$
$= t_{k+1} - t_k$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{k+1} - t_k)\, dt = \sum_{k=0}^{n-1} (\underbrace{t_{k+1} - t_k}_{\frac{b-a}{n}})^2$$

$$= C\, n \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 = \frac{C(b-a)^2}{n} \quad \blacksquare$$

b) méthode des rectangles à droite

On a $\quad S_n^{[\text{droite}]}(f) - S_n(f)$

$$= \frac{b-a}{n} f(b) - \frac{b-a}{n} f(a)$$

$$= (b-a) \frac{(f(b) - f(a))}{n}$$

i.e. $$\boxed{S_n^{[\text{droite}]}(f) = S_n(f) + O\left(\frac{1}{n}\right)}$$

Le thm a) est encore valable pour $S_n^{[\text{droite}]}(f)$

VII Extension à $\mathbb{C}$

1) $$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \mathrm{Re}(f) + i \int_{[a,b]} \mathrm{Im}(f)$$

2) $\overline{\text{M}}$ définitio pour $Esc([a,b],\mathbb{C})$, $\mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{C})$