Lycée Chateaubriand
Colas Bardavid

Chapitre 37

Fractions rationnelles

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{(X - \alpha_i)}$$

Une décomposition en éléments simples classique

Dans ce chapitre, on introduit un nouvel objet : le corps $\mathbb{K}(X)$ des fractions rationnelles au-dessus de $\mathbb{K}$. Ce corps contient $\mathbb{K}[X]$; il est donc possible d'y considérer des objets comme

$$\frac{1}{X(X-1)}, \quad \frac{X^2-1}{(X-3)^4}, \quad \frac{1}{X}, \quad \text{etc.}$$

Sommaire

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ est le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Remarque
Néanmoins, tout ce qui suit vaut également pour un corps K quelconque.

I. Corps des fractions rationnelles

1) Définition

Proposition-définition FRA. **1**

1) *Il existe un corps, noté* $\mathbb{K}(X)$*, tel que*
   (i) *on a* $\mathbb{K}[X] \subset \mathbb{K}(X)$ *;*
   (ii) *mieux :* $\mathbb{K}[X]$ *est un sous-anneau de* $\mathbb{K}(X)$ *;*
   (iii) *tout élément* $R \in \mathbb{K}(X)$ *s'écrit* $R = \dfrac{P}{Q}$ *avec* $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ *et* $Q \neq 0$.
2) *On fixe un tel corps qu'on appelle* corps des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Démonstration. — La construction est admise. ■

Remarques

- Cette proposition admet une généralisation : tout anneau commutatif intègre A peut être plongé dans un plus petit corps appelé *corps des fractions de* A et noté $\mathrm{Frac}(A)$.
- On a $\mathrm{Frac}\big(\mathbb{R}[X]\big) = \mathbb{R}(X)$.
- On a $\mathrm{Frac}\big(\mathbb{Z}\big) = \mathbb{Q}$.

2) Exemples

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3) Forme irréductible

Proposition-définition FRA. **2**
Soit $R \in \mathbb{K}(X)$ une fraction rationnelle non nulle.

1) a) *Il existe $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ premiers entre eux tels que*

$$R = \frac{P}{Q}.$$

   b) *Une telle écriture de R est appelée* forme irréductible de R.

2) *Considérons deux écriture de R sous forme irréductible*

$$R = \frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2}.$$

   Alors, il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que

$$\begin{cases} P_1 = \lambda P_2 \\ Q_1 = \lambda Q_2. \end{cases}$$

3) *Il existe un unique couple $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ de polynômes premiers entre eux, avec Q unitaire, tels que*

$$R = \frac{P}{Q}.$$

Démonstration. —

1) On écrit d'abord $R = \dfrac{A}{B}$. Puis, il suffit de considérer D un PGCD et A et B et d'écrire $A = D\widetilde{A}$ et $B = D\widetilde{B}$. Les polynômes $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ sont premiers entre eux et on a

$$R = \frac{D\widetilde{A}}{D\widetilde{B}} = \frac{\widetilde{A}}{\widetilde{B}}.$$

2)
   - Comme $\dfrac{P_1}{Q_1} = \dfrac{P_2}{Q_2}$, on a $P_1Q_2 = P_2Q_1$ et donc on a $P_1 \mid P_2Q_1$. Comme $P_1 \wedge P_2 = 1$, d'après le lemme de Gauss, on a $P_1 \mid P_2$.
   - De même, on a $P_2 \mid P_1$.
   - Donc, P_1 et P_2 sont associés. Fixons donc $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel $P_1 = \lambda P_2$.
   - L'égalité $P_1Q_2 = P_2Q_1$ dévient ainsi $\lambda P_2 Q_2 = P_2 Q_1$. Comme $R \neq 0$, on a $P_2 \neq 0$. Dans le corps $\mathbb{K}(X)$, on peut simplifier par P_2. On obtient $Q_1 = \lambda Q_2$.

3) Si on reprend les notations précédentes et qu'on suppose Q_1 et Q_2 unitaires, on doit avoir $\lambda = 1$.

■

Exemple
Par exemple, considérons la fraction rationnelle

$$R := \frac{X^5 - 1}{X^3 - 2X + 1}.$$

- À l'aide de l'algorithme d'Euclide, on trouve que
$$(X^5 - 1) \wedge (X^3 - 2X + 1) = X - 1.$$
- De plus, on sait grâce à la formule de Bernoulli que
$$X^5 - 1 = (X - 1)(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1).$$
- Enfin, à l'aide d'une division euclidienne, on trouve que
$$X^3 - 2X + 1 = (X - 1)(X^2 + X - 1).$$

Ainsi, une écriture sous forme irréductible de R est

$$\boxed{R = \frac{X^4 + X^3 + X^2 + X + 1}{X^2 + X - 1}.}$$

4) Zéros et pôles

a) définition

Proposition-définition FRA. **3**
Soit $R \in \mathbb{K}(X)$ une fraction rationnelle non nulle qu'on écrit sous forme irréductible

$$R = \frac{P}{Q}$$

et soit $\alpha \in \mathbb{K}$.

1) *On dit que α* est un zéro de $R \overset{\triangle}{\text{ssi}}$ $P(\alpha) = 0$.
2) *On dit que α* est un pôle de $R \overset{\triangle}{\text{ssi}}$ $Q(\alpha) = 0$.

Remarque
- Pour que cette définition ait un sens, il faut qu'elle ne dépende pas de l'écriture irréductible $R = P/Q$ choisie.
- On laisse le lecteur le vérifier à l'aide de la proposition FRA. 2.

Exemple
Par exemple, considérons la fraction rationnelle

$$R := \frac{X(X - 1)^2(X + 2)}{(X + 5)^3(X - 5)}.$$

Elle est déjà écrite sous forme irréductible. Alors,
- les zéros de R sont 0, 1 et -2 ;
- les pôles de R sont -5, 5.

b) multiplicité

Comme on l'a fait pour les racines des polynômes, on peut parler de *multiplicité* pour les zéros et les pôles d'une fraction rationnelle.

Exemple

Par exemple, considérons la fraction rationnelle

$$R := \frac{X(X-1)^2(X+2)}{(X+5)^3(X-5)}.$$

Elle est déjà écrite sous forme irréductible. Alors,

- les zéros de R sont 0, 1 et -2, de multiplicités respectives 1, 2 et 1 ;
- les pôles de R sont -5 et 5 ; -5 est un pôle de multiplicité 3 ; 5 est un pôle simple.

5) Degré

a) définition

Définition FRA. **4**

- *Soit R une fraction rationnelle non nulle qu'on écrit $R = \dfrac{A}{B}$ avec $A, B \in \mathbb{K}[X] \setminus \left\{0_{\mathbb{K}[X]}\right\}$.*
  Le degré de R, noté $\deg(R)$, est l'entier relatif défini par

$$\deg(R) := \deg(A) - \deg(B)$$

- *Le degré de la fraction rationnelle nulle est $-\infty$.*

Remarque

- Soit $R \in \mathbb{K}(X)$ non nulle.
- Pour que la définition soit acceptable, il faut vérifier que si R s'écrit

$$R = \frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

  alors on a bien $\deg(A) - \deg(B) = \deg(C) - \deg(D)$.
- C'est bien le cas car comme $\dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{D}$, on a $AD = BC$. Donc, en passant au degré, on a $\deg(A) + \deg(D) = \deg(B) + \deg(C)$.

Exemples

....

....

....

....

....

....

b) degré du produit

Proposition FRA. **5**
On a

$$\forall R, T \in \mathbb{K}(X), \quad \mathrm{deg}(RT) = \mathrm{deg}(R) + \mathrm{deg}(T).$$

Démonstration. — On écrit

$$R = \frac{A}{B} \qquad \text{et} \qquad T = \frac{C}{D},$$

avec $A, B, C, D \in \mathbb{K}[X]$ et $B, D \neq 0$. On a $R = \dfrac{AC}{BD}$. Donc,

$$\begin{aligned} \mathrm{deg}(RT) &= \mathrm{deg}(AC) - \mathrm{deg}(BD) \\ &= \big(\mathrm{deg}(A) - \mathrm{deg}(B)\big) + \big(\mathrm{deg}(C) - \mathrm{deg}(D)\big) \\ &= \mathrm{deg}(R) + \mathrm{deg}(T). \end{aligned}$$

■

c) degré de la somme

Proposition FRA. **6**
On a

$$\forall R, T \in \mathbb{K}(X), \quad \mathrm{deg}(R+T) \leqslant \max\big(\mathrm{deg}(R), \mathrm{deg}(T)\big).$$

Démonstration. — Elle est laissée au lecteur à titre d'exercice. ■

Remarque
Soit $n \in \mathbb{Z}$. Ainsi, l'ensemble

$$\mathbb{K}_n(X) = \Big\{ R \in \mathbb{K}(X) \;\Big|\; \mathrm{deg}(R) \leqslant n \Big\}$$

est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

6) Partie entière d'une fraction rationnelle

a) idée

- On a vu dans le chapitre d'arithmétique que $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{Z}$ sont objets analogues. De ce point de vue, $\mathbb{K}(X)$ est l'analogue pour $\mathbb{K}[X]$ de $\mathbb{Q}$: on a l'analogie.

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\longleftrightarrow \mathbb{K}[X] \\ \mathbb{Q} &\longleftrightarrow \mathbb{K}(X) \end{aligned}$$

- On dispose sur $\mathbb{Q}$ (et en fait sur $\mathbb{R}$) d'une partie entière qui à tout x associe un entier $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ qui est le plus proche de x : il vérifie
$$\Big| x - \lfloor x \rfloor \Big| < 1.$$
- On a vu que dans $\mathbb{K}[X]$, l'analogue de la valeur absolue est le degré.
- Ainsi, un analogue de la partie entière d'une fraction rationnelle R, serait un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\mathrm{deg}(R - P)$ soit « petit ».

b) définition

Proposition-définition FRA. **7**
Soit $R \in \mathbb{K}(X)$.

1) *Il existe un unique polynôme* $P \in \mathbb{K}[X]$ *tel que* $\operatorname{deg}(R-P) < 0$.
2) *On l'appelle* partie entière de R.

Démonstration. —

- **Unicité.**
Soient $P_1, P_2 \in \mathbb{K}[X]$ tels que $\operatorname{deg}(R-P_1) < 0$ et $\operatorname{deg}(R-P_2) < 0$. Autrement dit, on a $R-P_1 \in \mathbb{K}_{-1}(X)$ et $R-P_2 \in \mathbb{K}_{-1}(X)$. Donc, on a $(R-P_1)-(R-P_2) \in \mathbb{K}_{-1}(X)$, puisque $\mathbb{K}_{-1}(X)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Donc $P_1 - P_2 \in \mathbb{K}_{-1}(X)$: autrement dit $\operatorname{deg}(P_1-P_2) < 0$. Donc, comme $P_1 - P_2 \in \mathbb{K}[X]$, on a $\operatorname{deg}(P_1-P_2) < 0$, *ie* $P_1 = P_2$.
- **Existence.**
Écrivons $R = \dfrac{A}{B}$ avec $A, B \in \mathbb{K}[X]$ et $B \neq 0$. Faisons la division euclienne de A par B et écrivons $A = BQ + R$ avec $B, R \in \mathbb{K}[X]$ et $\operatorname{deg}(R) < \operatorname{deg}(B)$. On a alors,
$$R = \frac{A}{B} = \frac{BQ+R}{B} = Q + \frac{R}{B}.$$
Comme $\operatorname{deg}\left(\dfrac{R}{B}\right) < 0$, le polynôme Q satisfait les conditions voulues.

■

Remarques

- On retiendra que la partie entière d'une fraction rationnelle $R = \dfrac{A}{B}$ est le quotient de la division euclidienne de A par B.
- Soit $R \in \mathbb{K}(X)$ dont la partie entière est $E \in \mathbb{K}[X]$. Alors, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, la partie entière de $R + P$ est $E + P$.

Exemple

Par exemple, la partie entière de $\dfrac{4X^4 + 3X^3 - 2X^2 + X - 100}{X^2 + X + 1}$ est $4X^2 - X - 5$.

Exercice FRA. **8**
Vérifier le résultat ci-dessus.

7) Dérivation

a) définition

Définition FRA. **9**
Soit R une fraction rationnelle qu'on écrit $R = \dfrac{A}{B}$ *avec* $A, B \in \mathbb{K}[X]$ *et* $B \neq 0$.
La dérivée de R, noté R', est la fraction rationnelle définie par
$$R' := \frac{A'B - B'A}{B^2}.$$

Exercice FRA. **10**
Soient $A, B, C, D \in \mathbb{K}[X]$ *tels que* $C, D \neq 0$ *et tels que*

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}.$$

Montrer que

$$\frac{A'B - B'A}{B^2} = \frac{C'D - D'C}{D^2}.$$

b) propriétés

Fait FRA. **11**
La dérivation

$$\begin{aligned} \mathbb{K}(X) &\longrightarrow \mathbb{K}(X) \\ R &\longmapsto R' \end{aligned}$$

est une application linéaire.

Démonstration. — Elle est laissée au lecteur à titre d'entraînement. ■

Proposition FRA. **12**
Soient $R, T \in \mathbb{K}(X)$. *Alors, on a*

1) $(RT)' = R'T + RT'$.
2) *Si* $R \neq 0$, *on a*
   a) $\left(\frac{1}{T}\right)' = -\frac{1}{T^2}$;
   b) $\left(\frac{R}{T}\right)' = \frac{R'T - RT'}{T^2}$.

Démonstration. — Elle est laissée au lecteur à titre d'entraînement. ■

c) non-propriétés

⚠ Attention

- Si $R \in \mathbb{K}(X)$, la formule
$$\deg(R') = \deg(R) - 1$$
est fausse en général !
- Par exemple, considérons la fraction rationnelle
$$\mathrm{R} := \frac{X+1}{X}.$$
C'est une fraction rationnelle de degré 0. De plus, on a $\mathrm{R} = 1 + \frac{1}{X}$ et donc $\mathrm{R}' = -\frac{1}{X^2}$. Ainsi, on a $\deg(\mathrm{R}) = -2$.

II. Décomposition en éléments simples

1) Introduction

a) une identité remarquable

Une identité qui est bien connue et qui est très utile est

$$\boxed{\frac{1}{X(X+1)} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X+1}.}$$

b) premières généralisations

Cette inégalité se généralise un peu. On a par exemple

$$\frac{1}{X(X+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{X} - \frac{1}{X+2}\right).$$

Mieux, on a

$$\forall a \in \mathbb{K}^*, \qquad \frac{1}{X(X+a)} = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{X} - \frac{1}{X+a}\right).$$

2) Notion d'élément simple

Définition FRA. **13**
Un élément simple dans $\mathbb{K}(X)$ *est une fraction rationnelle du type* $\dfrac{A}{P^n}$ *où* P *est un polynôme irréductible, où* $A \in \mathbb{K}[X]$ *et où* $\mathsf{deg}(A) < \mathsf{deg}(P)$.

3) Décomposition en éléments simples générale

En fait, les décompositions précédentes se généralisent beaucoup plus.
C'est l'objet du théorème suivant.

Théorème FRA. **14**
Soit $R \in \mathbb{K}(X)$ *qu'on écrit*

$$R = \frac{A}{\displaystyle\prod_{i=1}^{r} P_i^{m_i}}$$

avec $A \in \mathbb{K}[X]$, *où les* $P_i \in \mathbb{K}[X]$ *sont des polynômes irréductibles deux à deux premiers entre eux et où les* $m_i \in \mathbb{N}^*$ *sont des entiers non nuls.*
Alors,

1) *il existe* $E \in \mathbb{K}[X]$ *et il existe une famille* $\left(A_k^{[i]}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\ 1\leqslant k\leqslant m_i}}$ *de polynômes tels que*

$$R = E + \left(\frac{A_1^{[1]}}{P_1} + \frac{A_2^{[1]}}{P_1^2} + \cdots + \frac{A_{m_1}^{[1]}}{P_1^{m_1}}\right) + \cdots + \left(\frac{A_1^{[r]}}{P_r} + \frac{A_2^{[r]}}{P_r^2} + \cdots + \frac{A_{m_r}^{[r]}}{P_r^{m_r}}\right) \qquad (*)$$

et qui vérifient

$$\forall i \in [\![1, r]\!],\ \forall k \in [\![1, m_i]\!],\ \mathsf{deg}\left(A_k^{[i]}\right) < \mathsf{deg}(P_i).$$

2) *Une telle famille est unique.*

Remarque

- Le polynôme « E » de $(*)$ est la partie entière de R.
- Pour le trouver, il suffit de faire la division euclidienne de A par $\prod_{i=1}^{r} P_i^{m_i}$.
- En pratique, on a souvent $\deg(A) < \deg\left(\prod_{i=1}^{r} P_i^{m_i}\right)$ et donc $E = 0$.
- Ainsi, en pratique, il faut juste penser à vérifier que $\deg(A) < \deg\left(\prod_{i=1}^{r} P_i^{m_i}\right)$ et ne pas oublier de faire la division euclidienne dans le cas contraire.

4) Exemples

a) explicitation du théorème

- Sous cette forme, le théorème peut paraître compliqué alors qu'en fait il ne l'est pas.
- Voyons un exemple en prenant pour dénominateur

$$Q := (X-1)^2(X^2+X+1)^2.$$

Déjà, remarquons que les polynômes $(X-1)$ et (X^2+X+1) sont bien irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

- Dans ce cas, que dit le théorème ?
Il dit que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on peut écrire

$$\frac{P}{(X-1)^2(X^2+X+1)^2}$$
$$=$$
$$E + \frac{a}{(X-1)} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{\alpha X+\beta}{(X^2+X+1)} + \frac{\gamma X+\delta}{(X^2+X+1)^2},$$

avec $E \in \mathbb{R}[X]$ et $a, b, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

b) quelques exemples concrets

- On peut s'intéresser en particulier à la décomposition en éléments simples de

$$\boxed{\frac{1}{(X-1)^2(X^2+X+1)^2}.}$$

On peut montrer que

$$\boxed{\frac{1}{(X-1)^2(X^2+X+1)^2} = \frac{-\frac{2}{9}}{X-1} + \frac{\frac{1}{9}}{(X-1)^2} + \frac{\frac{1}{3}+\frac{2}{9}X}{1+X+X^2} + \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}X}{(1+X+X^2)^2}.}$$

- Autre exemple, on peut s'intéresser à

$$\frac{2X^5+3X^4+6X^3-X^2+7X+1}{(X-1)^2(X^2+X+1)^2}.$$

On peut montrer que

$$\frac{2X^5+3X^4+6X^3-X^2+7X+1}{(X-1)^2(X^2+X+1)^2} = \frac{1}{X-1} + \frac{2}{(X-1)^2} + \frac{X+1}{X^2+X+1} + \frac{2X-1}{(X^2+X+1)^2}.$$

5) Décomposition en éléments simples dans le cas de $\mathbb{C}$

Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, le théorème devient :

Théorème FRA. **15**
Soit $R \in \mathbb{C}(X)$ qu'on écrit

$$R = \frac{A}{\prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{m_i}}$$

avec $A \in \mathbb{C}[X]$, où les $\alpha_i \in \mathbb{C}$ sont deux à deux distincts et où les $m_i \in \mathbb{N}^*$ sont des entiers non nuls. Alors,

1) *il existe $E \in \mathbb{C}[X]$ et il existe une famille $\left(a_k^{[i]}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant r \\ 1 \leqslant k \leqslant m_i}}$ de nombres complexes tels que*

$$R = E + \left(\frac{a_1^{[1]}}{X - \alpha_1} + \frac{a_2^{[1]}}{(X - \alpha_1)^2} + \cdots + \frac{a_{m_1}^{[1]}}{(X - \alpha_1)^{m_1}} \right) + \cdots + \left(\frac{a_1^{[r]}}{X - \alpha_r} + \cdots + \frac{A_{m_r}^{[r]}}{(a - \alpha_r)^{m_r}} \right).$$

2) *Une telle famille est unique.*

Exercice FRA. **16**
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ qu'on écrit

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{k_i}$$

avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$, avec $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $k_i \in \mathbb{N}^*$ et où les α_i sont des complexes deux à deux distincts.
Donner la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$.

6) Décomposition en éléments simples dans le cas de $\mathbb{R}$

On laisse le lecteur imaginer quelle forme pourrait prendre dans ce cas le théorème FRA. 14.

III. Techniques de calcul des décompositions en éléments simples

Soit $R \in \mathbb{K}(X)$ dont on veut calculer la décomposition en éléments simples.

1) Calculer la partie entière

- Avant toute chose, on calcule la partie entière de R, qu'on note E.
- Rappelons que pour la calculer, il suffit de faire une division euclidienne.
- Alors, en considérant $R - E$, on est ramené au cas où la fraction rationnelle est de degré < 0.

2) Par identification

La première méthode possible pour calculer la décomposition en éléments simples de R consiste à écrire les éléments simples cherchés avec des coefficients inconnus, à mettre la somme des éléments simples sous même dénominateur et à identifier les coefficients des numérateurs.

On obtient alors un système, qu'on résout.

Exemple

On considère

$$R = \frac{X^2+1}{(X-1)^2(X-2)}.$$

On écrit la décomposition en éléments simples de R :

$$R = \frac{a}{(X-1)^2} + \frac{b}{(X-1)} + \frac{c}{(X-2)}.$$

On a donc

$$\frac{X^2+1}{(X-1)^2(X-2)} = \frac{a(X-2)+b(X-1)(X-2)+c(X-1)^2}{(X-1)^2(X-2)}$$

Donc, on a

$$\begin{aligned} X^2+1 &= a(X-2)+b(X-1)(X-2)+c(X-1)^2 \\ &= (b+c)X^2 + (a-3b-2c)X + (-2a+2b+c). \end{aligned}$$

Donc, on a

$$\begin{cases} b + c = 1 \\ a - 3b - 2c = 0 \\ -2a + 2b + c = 1. \end{cases}$$

Après calcul, on trouve

$$\boxed{a = -2, \quad b = -4 \quad \text{et} \quad c = 5.}$$

Quand utiliser cette méthode ? Jamais.

3) En évaluant la fraction rationnelle en un point

Exemple

- On considère
$$R = \frac{X^2+1}{(X-1)^2(X-2)}.$$
On écrit la décomposition en éléments simples de R :
$$R = \frac{a}{(X-1)^2} + \frac{b}{(X-1)} + \frac{c}{(X-2)}.$$
Si on l'évalue en -1 (par exemple), on obtient d'une part
$$R(-1) = \frac{(-1)^2+1}{(-1-1)^2(-1-2)} = -\frac{2}{12} = -\frac{1}{6}$$
et d'autre part
$$\frac{a}{(-1-1)^2} + \frac{b}{(-1-1)} + \frac{c}{(-1-2)} = \frac{a}{4} - \frac{b}{2} - \frac{c}{3}.$$
On a donc
$$-\frac{1}{6} = \frac{a}{4} - \frac{b}{2} - \frac{c}{3} \qquad \textit{ie} \qquad 2 = -3a + 6b + 4c.$$
- En évaluant en deux autres points, on trouverait deux autres équations qui *a priori* permettraient de déterminer a, b et c.

Quand utiliser cette méthode ? Jamais (ou presque).

4) En allant voir en $+\infty$

Cette méthode est simple : si R est un fraction rationnelle sans partie entière, *ie* si $\deg(R) < 0$, on multiplie par X et on va chercher la limite en $+\infty$. C'est une sorte d'évaluation en $+\infty$ mais elle est très rapide à mettre en œuvre.

Exemple

- On considère
$$R = \frac{X^2+1}{(X-1)^2(X-2)}$$
dont on écrit la décomposition en éléments simples de R :
$$R = \frac{a}{(X-1)^2} + \frac{b}{(X-1)} + \frac{c}{(X-2)}.$$
- En multipliant par X, en évaluant en $t \in \mathbb{R}$ suffisamment grand, on obtient Si on l'évalue en -1 (par exemple), on obtient d'une part
$$\frac{t^3+t}{(t-1)^2(t-2)} = \frac{at}{(t-1)^2} + \frac{bt}{(t-1)} + \frac{c}{(t-2)}.$$
- En faisant tendre t vers $+\infty$, on obtient $\boxed{1 = b + c.}$
- On obtient ainsi très facilement une relation entre b et c qui est très simple.

Quand utiliser cette méthode ? Toujours.

5) En prenant la valeur au pôle

Considérons notre fraction rationnelle R et considérons a un pôle de R, de multiplicité n. On peut donc écrire

$$R = \frac{A}{(X-a)^n Q} \qquad \text{avec} \quad Q(a) \neq 0.$$

Faisons la décomposition en éléments simples de R et écrivant

$$R = \frac{\alpha}{(X-a)^n} \quad + \quad \text{autres éléments simples.} \tag{$*$}$$

On va expliquer ici comme calculer α.

a) présentation de la méthode

On multiplie $(*)$ par $(X-a)^n$. On obtient

$$\frac{A}{Q} = \alpha + (X-a)\widetilde{R}$$

où $\widetilde{R}$ est une fraction rationnelle dont a n'est pas un pôle.
En évaluant en a, on trouve

$$\boxed{\alpha = \frac{A(a)}{Q(a)}.}$$

Exemple

Considérons

$$R = \frac{1+X}{(X-1)^2(X-2)}$$

qu'on écrit

$$R = \frac{a}{(X-1)^2} + \frac{b}{(X-1)} + \frac{c}{(X-2)}$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.
Alors, on a :

- pour le pôle 1 : ....
- pour le pôle 2 : ....

b) une variante à connaître

Imaginons que le pôle a soit simple de R. On écrit ainsi

$$R = \frac{A}{B} = \frac{A}{(X-a)Q} \qquad \text{avec} \quad Q(a) \neq 0.$$

La décomposition en éléments simples de R s'écrit

$$R = \frac{\alpha}{X-a} \quad + \quad \text{autres éléments simples.}$$

On vient de voir que $\boxed{\alpha = \frac{A(a)}{Q(a)}.}$

On a $B = (X-a)Q$ donc $B' = Q + (X-a)Q'$. Donc, $B'(a) = Q(a)$.
Ainsi, on a

$$\boxed{\alpha = \frac{A(a)}{B'(a)}.}$$

c) généralisation

Exercice FRA. **17**
Généraliser cette méthode dans le cas où a est un pôle d'ordre n, pour déterminer le coefficient α de l'élément simple $\dfrac{\alpha}{(X-a)^n}$.

d) Application

Voici une formule très classique.

Fait FRA. **18**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, on a

$$\frac{1}{X^n - 1} = \frac{1}{n} \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{\omega}{X - \omega}.$$

Démonstration. — ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

.... ■

Exercice FRA. **19**
Calculer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{X}{X^n - 1}$.

6) Pour les éléments simples de degré non maximal

a) notations

Considérons $R \in \mathbb{K}(X)$ et a un pôle de R, de multiplicité $n \geqslant 2$.

On écrit la décomposition en éléments simples de R :

$$R = \frac{\alpha}{(X-a)^n} + \frac{\beta}{(X-a)^{n-1}} \quad + \quad \text{autres éléments simples.} \tag{$*$}$$

On a expliqué ci-dessus comme calculer α.

b) calcul de β

Pour calculer β, il suffit de considérer la fraction rationnelle $R - \dfrac{\alpha}{(X-a)^n}$. Grâce à l'écriture ci-dessus, on saura qu'elle admet a comme pôle de multiplicité $n-1$.

Exemple

Considérons

$$R = \frac{X^2+1}{(X-1)^2(X-2)}$$

qu'on écrit

$$R = \frac{a}{(X-1)^2} + \frac{b}{(X-1)} + \frac{c}{(X-2)}$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Calculons d'abord a.

....

....

Calculons maintenant b.

....

....

....

....

Enfin, pour c, allons voir en $+\infty$.

....

....

....

7) Pour les irréductibles de degré 2 de $\mathbb{R}[X]$

Pour les irréductibles de degré 2 de $\mathbb{R}[X]$, comme par exemple X^2+1 ou X^2+X+1, on a deux façons de faire.

- On peut faire les calculs dans $\mathbb{C}$ puis réunir les résultats dans $\mathbb{R}$.
  Pour cette technique, on pourra remarquer que pour $R \in \mathbb{R}(X)$, les éléments simples associés à des racines conjuguées sont conjugués. Cela est une conséquence de $\overline{R} = R$ et de l'unicité de la décomposition en éléments simples.
- On peut utiliser la technique de « la valeur au pôle » en une racine formelle.

Exemple

Considérons
$$R = \frac{3X+8}{(X^2+1)(X^2+X+1)}$$
qu'on écrit
$$R = \frac{aX+b}{(X^2+1)} + \frac{cX+d}{(X^2+X+1)}$$
avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Commençons par déterminer a et b.

....

....

....

....

....

....

....

Déterminons maintenant c et d.

....

....

....

....

....

....

....

IV. Démonstration du théorème de décomposition en éléments simples

1) Un lemme de décomposition en base P

Lemme FRA. **20**
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non-nul de degré $d \geqslant 1$. Alors,

$$\forall A \in \mathbb{K}[X],\ \exists N \in \mathbb{N},\ \exists (A_0, \ldots, A_N) \in \mathbb{K}_{d-1}[X]^{N+1} :\ \ A = \sum_{j=0}^{N} A_j\, P^j.$$

Remarque

- Ce lemme est l'analogue du théorème de décomposition des entiers en base b.
- Rappelons que si $b \geqslant 2$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \exists (a_0, \ldots, a_N) \in [\![0, b-1]\!]^{N+1} :\ \ n = \sum_{j=0}^{N} a_j\, b^j.$$

Démonstration. — Ce lemme peut se démontrer par récurrence sur le degré de A.

- Si $\deg(A) \leqslant d-1$: c'est bon.
- On suppose que $\deg(A) \geqslant d$ et que le résultat est vrai pour tout polynôme de degré $< \deg(A)$. On fait la division euclidienne de A par P qu'on écrit

$$A = PQ + R,$$

avec $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $R \in \mathbb{K}_{d-1}[X]$.

  ▷ Comme $\deg(A) > \deg(R)$, on a $\deg(PQ) = \deg(A) = \deg(P) + \deg(Q)$.

  ▷ Donc, on a $\deg(Q) = \deg(A) - \deg(P) < \deg(A)$.

  ▷ On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à Q et l'écrire

$$Q = \sum_{j=0}^{N} Q_j\, P^j$$

avec $N \in \mathbb{N}$ et $(Q_0, \ldots, Q_N) \in \mathbb{K}_{d-1}[X]^{N+1}$.

  ▷ On a donc, finalement,

$$A = PQ + R = P\Big(\sum_{j=0}^{N} Q_j\, P^j\Big) + R = \Big(\sum_{j=0}^{N} Q_j\, P^{j+1}\Big) + R\, P^0.$$

■

2) Notations pour la démonstration

- Soit $r \in \mathbb{N}^*$.
- Soient $P_1, \ldots, P_r \in \mathbb{K}[X]$ des polynômes irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$) deux à deux premiers entre eux.
- Pour $i \in [\![1, r]\!]$, on note $d_i := \mathsf{deg}(P_i)$.
- Soient $m_1, m_2, \ldots, m_r \in \mathbb{N}^*$
- On pose $P := \prod_{i=1} P_i^{m_i}$.
- On note $N := \mathsf{deg}(P)$. Remarquons que

$$N = \sum_{i=1}^{r} m_i \, \mathsf{deg}(P_i) = \sum_{i=1}^{r} m_i d_i.$$

- On considère l'ensemble

$$E := \left\{ \frac{A}{P} \ ; \ A \in \mathbb{K}_{N-1}[X] \right\}.$$

Fait FRA. **21**
L'ensemble E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension N.

Démonstration. — Elle est laissée au lecteur à titre d'exercice. ■

3) L'application linéaire Φ

On considère l'application

$$\Phi : \begin{cases} \displaystyle\prod_{i=1}^{r} \mathbb{K}_{d_i-1}[X]^{m_i} \longrightarrow E \\ \Big((A_1^{[i]}, A_2^{[i]}, \ldots, A_{m_i}^{[i]}) \Big)_{1 \leqslant i \leqslant r} \longmapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \Big(\sum_{j=1}^{m_i} \frac{A_j^{[i]}}{P_i^j} \Big). \end{cases}$$

a) elle est bien définie

Soit $\Big((A_1^{[i]}, A_2^{[i]}, \ldots, A_{m_i}^{[i]}) \Big)_{1 \leqslant i \leqslant r} \in \prod_{i=1}^{r} \mathbb{K}_{d_i-1}[X]^{m_i}$. On note

$$R := \sum_{i=1}^{r} \Big(\sum_{j=1}^{m_i} \frac{A_j^{[i]}}{P_i^j} \Big).$$

- On veut montrer que $R \in E$.
- Déjà, remarquons que R peut s'écrire $R = \frac{B}{P}$. En effet, en mettant toutes les fractions $\frac{A_j^{[i]}}{P_i^j}$ sous le même dénominateur, on obtiendra bien une fraction $\frac{B}{P}$.
- Ensuite, remarquons que tous les termes $\frac{A_j^{[i]}}{P_i^j}$ dans l'expression de R sont de degré < 0, puisque tous les $A_j^{[i]}$ sont de degré $< \mathsf{deg}(P_i)$.
- Ainsi, comme $\mathbb{K}_{-1}(X)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on a $R \in \mathbb{K}_{-1}(X)$. Donc, on a $\mathsf{deg}(B) < \mathsf{deg}(P)$.
- Autrement dit, on a bien $R \in E$.

b) elle est linéaire

Ce point est facile est vérifier. On laisse le lecteur s'en convaincre.

c) ses espaces de départ et d'arrivée ont même dimension

- En effet, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, on a $\mathsf{dim}(\mathbb{K}_{d_i-1}[X]) = d_i$ et donc on a $\mathsf{dim}(\mathbb{K}_{d_i-1}[X]^{m_i}) = m_i d_i$.
- Donc, on a $\mathsf{dim}\Big(\prod_{i=1}^{r} \mathbb{K}_{d_i-1}[X]^{m_i}\Big) = \sum_{i=1}^{r} m_i d_i$.
- Or, on a $\mathsf{dim}(E) = N = \sum_{i=1}^{r} m_i d_i$.

d) elle est surjective

- Pour $i \in [\![1, r]\!]$, on note
$$Q_i \coloneqq \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} P_j^{m_j}.$$
- Remarquons que
$$\forall i \in [\![1, r]\!], \;\; \frac{P}{Q_i} = P_i^{m_i}$$
- Comme les P_i sont deux à deux premiers entre eux, les Q_i sont premiers entre eux dans leur ensemble. Fixons donc $U_1, \ldots, U_r \in \mathbb{K}[X]$ tels que
$$U_1 Q_1 + \cdots + U_r Q_r = 1.$$
- Maintenant, soit $A \in \mathbb{K}_{N-1}[X]$. On pose $R \coloneqq \dfrac{A}{P}$; on a $R \in E$. On écrit :
$$R = \frac{(U_1 Q_1 + \cdots + U_r Q_r) A}{P} = \sum_{i=1}^{r} \frac{U_i Q_i A}{P} = \sum_{i=1}^{r} \frac{A U_i}{P_i^{m_i}}.$$
- Soit $i \in [\![1, r]\!]$.
  - ▷ Grâce au lemme $\mathsf{FRA}.20$, en décomposant AU_i selon les puissances de P_i, on écrit
  $$AU_i = \sum_{\ell=0}^{N_i} B_\ell^{[i]} P_i^\ell$$
  avec $N_j \in \mathbb{N}$ et $\forall \ell$, $B_\ell^{[i]} \in \mathbb{K}_{d_i - 1[X]}$.
  - ▷ On peut donc écrire
  $$\frac{AU_i}{P_i^{m_i}} = C_i + \sum_{j=0}^{m_i} \frac{B_{m_i-j}^{[i]}}{P_i^j}$$
  avec $C_i \in \mathbb{K}[X]$.
- Ainsi, on a
$$R = \Big(\sum_{i=1}^{r} C_i\Big) + \sum_{i=1}^{r} \Big(\sum_{j=0}^{m_i} \frac{B_{m_i-j}^{[i]}}{P_i^j}\Big).$$
- Or, $\mathsf{deg}(R) < 0$. Donc, la partie entière de R est nulle. Comme on a aussi
$$\mathsf{deg}\Big(\sum_{i=1}^{r} \Big(\sum_{j=0}^{m_i} \frac{B_{m_i-j}^{[i]}}{P_i^j}\Big)\Big) < 0,$$
la partie de R est $\sum_{i=1}^{r} C_i$. Ainsi, on a $\sum_{i=1}^{r} C_i = 0$ et donc
$$R = \sum_{i=1}^{r} \Big(\sum_{j=0}^{m_i} \frac{B_{m_i-j}^{[i]}}{P_i^j}\Big).$$
- Ainsi, Φ est surjective.

e) c'est un isomorphisme

Ainsi, Φ est un isomorphisme.

4) Conclusion

- Pour le théorème général, pour l'existence, on commence par dire que E est la partie entière de R. Puis, on considère $R - E$; on peut alors utiliser l'application Φ.
- Pour l'unicité, on considère deux écritures. Les « E » sont égaux car ils sont égaux à la partie entière de R. On peut les simplifier et on est ramené au cas où $\mathsf{deg}(R) < 0$. Dans ce cas, l'application Φ permet de conclure.