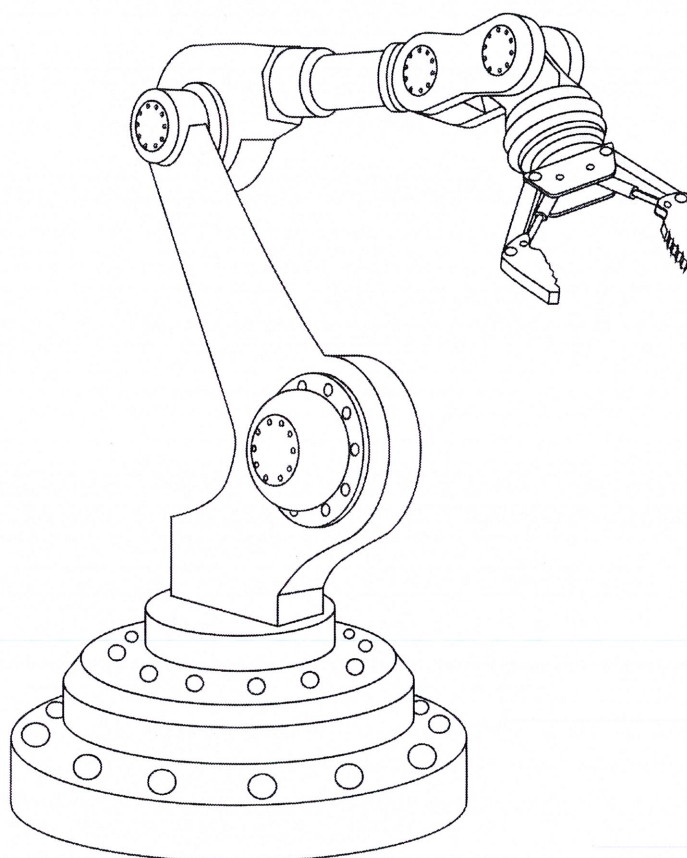


Chapitre 38

Familles sommables

Un outil ultra technologique

Dans ce chapitre, on va reprendre l'étude des séries numériques dans un cadre plus général.

- D'un part, au lieu de se limiter aux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels ou complexes, on va considérer des familles $(a_i)_{i \in I}$ indexées par un ensemble quelconque.
- D'autre part, on va s'autoriser à considérer la valeur $+\infty$ dans nos calculs en se plaçant dans l'ensemble

$$\overline{\mathbb{R}_+}.$$

Ce cadre plus général va nous permettre de démontrer des résultats très forts.

La théorie ainsi construite est très simple et très puissante. Il faut y penser comme à un outil ultra technologique.

ch 38 M

Familles sommables

But : comprendre comment travailler avec les familles sommables et à quel point elles sont puissantes.

Rq : les preuves de ce chapitre seront présentées en polycopié.

Idee : on va généraliser la notⁿ de série pour obtenir un outil ultra performant

I La demi-droite achevée

1) Définition et propriétés

- On se place sur $\mathbb{R}_+$ auquel on ajoute un élément noté $+\infty$
on note $\overline{\mathbb{R}_+} = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

- C'est la demi-droite achevée

- On étend les opérations de $\mathbb{R}_+$ à $\overline{\mathbb{R}_+}$ de façon évidente :

$$(*) \quad \forall a \in \mathbb{R}_+, \quad a + (+\infty) = +\infty$$

$$(*) \quad (+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

$$(*) \quad \forall a > 0, \quad a \times (+\infty) = +\infty$$

$$(*) \quad (+\infty) \times (+\infty) = +\infty$$

$$(*) \quad \boxed{0 \times +\infty = 0}$$

Rq : Δ ceci est complètement disjoint de la problématique des formes indéterminées de type " $0 \times (+\infty)$ "

- On étend " $\leq$ " à $\overline{\mathbb{R}_+}$ de façon évidente

$$(*) \quad \forall a \in \mathbb{R}_+, \quad a \leq +\infty$$

$$(*) \quad (+\infty) \leq (+\infty)$$

- Ces opérations se comportent parfaitement.

$$(*) \quad (\overline{\mathbb{R}_+}, +, 0) \text{ monoïde commutatif}$$

$$(*) \quad (\overline{\mathbb{R}_+}, \times, 1)$$

$$(*) \quad \forall a, b \in \overline{\mathbb{R}_+}, \quad (a+b) \times c = a \times c + b \times c$$

• Elles sont compatibles à " $\leq$ "

$$(*) \quad a \leq b \Rightarrow \begin{cases} \lambda a \leq \lambda b \\ a + \alpha \leq b + \alpha \end{cases}$$

$$(*) \quad \left. \begin{matrix} a \leq b \\ \alpha \leq \beta \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a + \alpha \leq b + \beta \\ a\alpha \leq b\beta \end{cases}$$

Bilan :

$\overline{\mathbb{R}_+}$: c'est simple

Dans la suite, on considèrera des familles à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}_+}$

Exemples :

- $(+\infty + 2) \times 3 + 5 = +\infty$

- On peut considérer $(u_n)_n \in (\overline{\mathbb{R}_+})^{\mathbb{N}}$ def par
 $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} = 2^{2n}$ et $u_{2n+1} = +\infty$

2) Borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}_+$

Prop: Soit $A \subset \overline{\mathbb{R}}_+$. Alors A possède une borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}_+$; on la note $\sup^{(\overline{\mathbb{R}}_+)}(A)$

Rq: ie l'ensemble $\text{Majo}^{(\overline{\mathbb{R}}_+)}(A) := \{x \in \overline{\mathbb{R}}_+ \mid \forall a \in A, a \leq x\}$ possède 1 $\oplus$ petit élément.

D/• Déjà, ~~on~~ remarquons que $+\infty$ majore A le monde.
Donc $\forall A \subset \overline{\mathbb{R}}_+, +\infty \in \text{Majo}^{(\overline{\mathbb{R}}_+)}(A)$

• Idee:

• Si A majoré dans $\mathbb{R}$, ie si $\exists M \in \mathbb{R}_+ : \forall a \in A, a \leq M$.

alors $\sup^{(\overline{\mathbb{R}}_+)}(A) = \sup(A)$

• En effet, on a $\text{Majo}^{(\overline{\mathbb{R}}_+)}(A) = \text{Majo}(A) \cup \{+\infty\}$

• Si $+\infty \in A$: $\sup^{(\overline{\mathbb{R}}_+)}(A) = +\infty$

Si $A \subset \mathbb{R}^+$ et si A n'est pas majoré :

$\sup^{(\overline{\mathbb{R}}_+)}(A) = +\infty$

• Si $A = \emptyset$: ok (=0)

Ex :

- $\sup_{(\overline{\mathbb{R}_+})} (\mathbb{N}) = +\infty$
- $\sup_{(\overline{\mathbb{R}_+})} ([0, 1]) = 1$
- $\sup_{(\overline{\mathbb{R}_+})} ([0, 1[) = 1$

Rq : Si $(a_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de $(\overline{\mathbb{R}_+})$, on pose

$$\sup_{i \in I}^{(\overline{\mathbb{R}_+})} a_i := \sup \{a_i; i \in I\}$$

III Somme de familles quelconques dans $\overline{\mathbb{R}_+}$

Désormais on s'intéresse aux sommes d'éléments de $\overline{\mathbb{R}_+}$.

On a envie de dire que dans $\overline{\mathbb{R}_+}$, on a

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\frac{1}{n} \right)_{>0} = +\infty$$

On va faire bcp @ général en

considérant non pas des $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \overline{\mathbb{R}_+}^{\mathbb{N}}$ mais en considérant les $(a_i)_{i \in I} \in \overline{\mathbb{R}_+}^I$ pour tout ensemble I .

Ex :

- $\left(\frac{1}{\underbrace{n^2+m^2}_{>0}} \right)_{n,m \in \mathbb{N}^*} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}^2} \subset (\overline{\mathbb{R}_+})^{\mathbb{N}^2}$
- Mieux $\left(\frac{1}{n^2+m^2+1} \right)_{n,m \in \mathbb{Z}} \in (\overline{\mathbb{R}_+})^{\mathbb{Z}^2}$
- $\left(\frac{1}{n^2+a+1} \right)_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ a \in \mathbb{R}_+}} \in \overline{\mathbb{R}_+}^{\mathbb{Z} \times \mathbb{R}_+}$

1) Définition

Soit I un ens quelconque

Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\overline{\mathbb{R}_+}$ indexée par I .

I.e: soit $(a_i)_{i \in I} \in \overline{\mathbb{R}_+}^I$

On veut faire la somme de tous les a_i

ie on veut pouvoir définir

$$\sum_{i \in I} a_i \in \overline{\mathbb{R}_+}$$

Comment faire ?

Déjà : Remarquons que si $J \subset I$ et

si J fini : alors on peut sans problème donner un sens à $\sum_{i \in J} a_i$.

Si on écrit $J = \{i_1, \dots, i_N\}$ où les

i_k sont $2 \leq 2 \neq 15$, alors on pose

$$\sum_{i \in J} = a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_N}$$

Cette déf^o est rendue possible par l'associativité et la commutativité de la loi $+$ de $\overline{\mathbb{R}_+}$.

Déf^o:

La somme de $(a_i)_{i \in I}$, notée $\# \sum_{i \in I} a_i$, c'est

l'élément de $\overline{\mathbb{R}_+}$ défini par

$$\sum_{i \in I} a_i := \sup^{(\overline{\mathbb{R}_+})} \left\{ \sum_{i \in J} a_i ; J \subset I \text{ et } J \text{ fini} \right\}$$

Le on pose :

$$\sum_{i \in I} a_i := \sup_{\substack{J \subset I \\ J \text{ fini}}} \sum_{i \in J} a_i$$

Ex: On considère $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*} \in (\overline{\mathbb{R}_+})^{\mathbb{N}^*}$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On considère l'ensemble fini

$$[1, N]$$

$$\begin{aligned} \text{On a } \sum_{i \in [1, N]} \frac{1}{i} &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \geq \int_1^N \frac{1}{t} dt + \frac{1}{N} \\ &\geq \int_1^N \frac{1}{t} dt = \ln(N) \end{aligned}$$

$$\text{Notons } \mathcal{A} := \left\{ \sum_{i \in I} \frac{1}{i} ; I \subset \mathbb{N}^* \text{ et } I \text{ fini} \right\}$$

Donc $\mathcal{A}$ n'est pas majoré dans $\mathbb{R}_+$

ORPA et csg A majoré dans $\mathbb{R}_+$ et on fixe $M \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall a \in \mathcal{A}, a \leq M$

$$\text{On a donc } \forall N \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \leq M$$

$$\text{et donc } \forall N \in \mathbb{N}^*, \ln(N) \leq M$$

C'est absurde car $\ln(N) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} +\infty$



$$\text{cdl : } \text{Majo}(A) \neq \emptyset \quad \text{et donc } \text{Majo}^{(\overline{\mathbb{R}_+})}(\mathcal{A}) = \{+\infty\}$$

al: Ainsi $\sup_{(\mathbb{R}^+)} (\mathcal{L}) = +\infty$

$$\text{ie } \sup \left\{ \sum_{j \in I} \frac{1}{j} ; J \subset \mathbb{N}^* \text{ et } J \text{ fini} \right\} = +\infty$$

$$\text{ie } \sum_{i \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{i} = +\infty$$

• De $\overline{m}$: $\sum_{i \in \mathbb{N}} 1 = +\infty$

• De $\overline{m}$: pour toute SATP divergente

Fait: Soit $\sum_{n \geq 0} a_n$ SATP convergente

Alors:

Somme en tant
que série convergente

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$$

Somme en
tant que famille
g.c.q dans $\overline{\mathbb{R}}_+$

2) Premières propriétés

a) Croissance

(*)^(*) Soit $(a_i)_{i \in I} \in \overline{\mathbb{R}_+}^I$

$$\text{Alors } J \subset I \Rightarrow \overline{\sum_{i \in J} a_i} \leq \overline{\sum_{i \in I} a_i}$$

D/exo ■

(*) Soit $(b_i)_{i \in I} \in \overline{\mathbb{R}_+}^I$. Alors :

$$(\forall i \in I, a_i \leq b_i) \Rightarrow \overline{\sum_{i \in I} a_i} \leq \overline{\sum_{i \in I} b_i}$$

D/exo ■

b) Changements d'indices et réordonnement.

Prop : Soit J un autre ensemble

Soit $\varphi: J \rightarrow I$ bijection

$$\text{Alors } \overline{\sum_{j \in J} a_{\varphi(j)}} = \overline{\sum_{i \in I} a_i}$$

Prop : Soit $\sigma: I \rightarrow I$ bij et soit $\sigma \in \mathcal{S}_I$

Alors

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I} a_{\sigma(i)}$$

D/exo

c) Linéarité

Prop : Soient $(a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I} \in \overline{\mathbb{R}}_+^I$

Soit $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}_+$

Alors

$$\sum_{i \in I} (a_i + \lambda b_i) = \sum_{i \in I} a_i + \lambda \sum_{i \in I} b_i$$

3!!) Somme par paquets

a) Version gale

Théorème M :

Soit I un ensemble

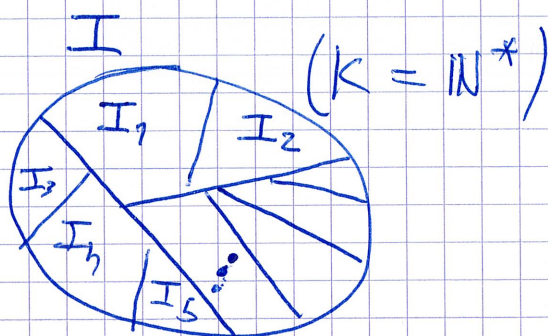
Soit $(I_k)_{k \in K}$ un recouvrement disjoint de I

Alors :

$$\sum_{k \in K} \left(\sum_{i \in I_k} a_i \right) = \sum_{i \in I} a_i$$

(*) i.e. $\forall k \neq l, I_k \cap I_l = \emptyset$ et $I = \bigcup_{k \in K} I_k$

(dⁿ)



DI of poly

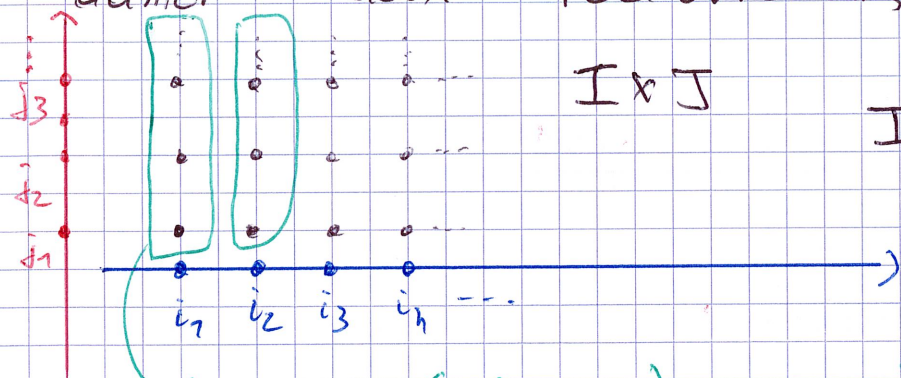
Ex: of exo

b) Théorème de Fubini

Soient I, J intervalles deux ensembles.

Alors $I \times J$ ("le rectangle de côtés I et J ")

admet deux recouvrements disjoints remarquables.



$$I \times J = \bigcup_{i \in I} C_i$$

$$C_{i_1} = \{(i_1, j) ; j \in J\}$$

où $C_i := \{(i, j) ; j \in J\}$ pour tout $i \in I$

(i.e. $C_i := \{i\} \times J$ (AC) abstrait)

$$\text{et de m} \quad I \times J = \bigcup_{j \in J} I \times \{j\}$$

MTh (Fubini):

Soient $(a_{ij})_{(i,j) \in I \times J} \in \overline{\mathbb{R}_+}^{I \times J}$

Alors

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_{ij} = \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} a_{ij} \right) = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} a_{ij} \right)$$

a) Cas des familles à variables séparées

Prop

Soient $(a_i)_{i \in I} \in \overline{\mathbb{R}_+}^I$ et $(b_j)_{j \in J} \in \overline{\mathbb{R}_+}^J$

$$\text{Alors } \sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j = \left(\sum_{i \in I} a_i \right) \times \left(\sum_{j \in J} b_j \right)$$

D/ (AF) avec b) ■

III Familles sommables de nombres réels

Problématique: on veut faire la même chose avec les familles $(a_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^I$

On n'est pas obligé de garder l'astuce " $+\infty$ "

Idee: la somme " $\sum_{i \in I}$ " sera au final vue $\hat{=}$ une astuce intermédiaire.

On va forcément avoir à se restreindre à cause $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ ou $\sum_{n \geq 0} (-1)^n = 1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots$

1) U_n contre-exemple à la sommation par paquets.

Exo) $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ def par :

$$(U_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \dots \right)$$

$$\text{I.e. on a } \forall n \in \mathbb{N}, \left(U_{2n} = \frac{1}{n+1}, U_{2n+1} = -\frac{1}{n+1} \right)$$

Fait: 1) La série $\sum_n U_n \xrightarrow{CV}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} U_n = 0$

2) la série n'est pas ACV,

3) Vocabulaire:

On dit q $\sum_n U_n$ est semi-convergente

D/ (AF) ~~III~~

Tentons une sommation par paquets

• On pose $A_k := \{4k, 4k+2\}$

$$B_k := \{2k+1\}$$

$$C_k := A_k \cup B_k \text{ pour } k \in \mathbb{N}$$

• Fait $(C_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est un recouvrement disjoint de $\mathbb{N}$

D/ (AC)

• Soit $k \in \mathbb{N}$.

On note $S_k := \sum_{l \in C_k} u_l$

Schéma :

$$\text{On a : } S_k = u_{4k} + u_{4k+2} + u_{2k+1}$$

$$= u_{2(2k)} + u_{2(k+1)} + u_{2k+1}$$

$$= \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)+1} - \frac{1}{k+1}$$

$$= \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}$$

$$= \frac{(-1)^{2k}}{2k+1} + \frac{(-1)^{2k+1}}{2k+2} \quad \leftarrow (N+1) \text{ termes.}$$

Ainsi :
$$S_k = \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^{2k}}{2k+1} + \frac{(-1)^{2k+1}}{2k+2}$$

$$= \sum_{p=1}^{2N+2} \frac{(-1)^{p+1}}{p} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{DALC AR}} \ln(z)$$

2N+2 termes

Bilan :

On calcule par paquets la somme de la suite :

$$\left(\underbrace{\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right)}_0, \underbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right)}_1, \underbrace{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right)}_2, \underbrace{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right)}_3, \dots \right)$$

A B A B A B A B A B A B A B A B A B A B

1) On trouve :
$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i \in C_k} u_i \right) = \ln(z)$$

Alors que
$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i \in \{k, k+1\}} u_i \right) = 0$$

= 0

2) On en déduit :

qu'il existe $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijection tq

la série $\sum_{n \geq 0} u_{\sigma(n)} \xrightarrow{CV}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)} = \ln(z)$

$$\text{ie : } \textcircled{1} \sum_{n=0}^{\infty} u_n = 0 \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)} = \ln(z)$$

$$\textcircled{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i \in C_k} u_i \right) = \ln(z) \text{ et } \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i \in \{2k, 2k+1\}} u_i \right) = \ln(z)$$

Bilan : en gal : ça ne marche pas.

Bilan : On a trouvé une série des $\sum_n u_n$ convergente mais tq

1°) $\exists (C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ partition de $\mathbb{N}$ tq

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k \in C_n} u_k \right) + \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

2°) $\exists \sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ biject° : $\sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)} \neq \sum_{n=0}^{\infty} u_n$

exo

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ une série semi-divergente

Alors : 1°) $\forall p \in \mathbb{R}, \exists \sigma \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$:

$$\left(\sum_n u_{\sigma(n)} \xrightarrow{cv} \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)} = p \right)$$

2°) $\exists \gamma \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$: $\sum_{k=0}^n u_{\gamma(k)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$

3) De $\bar{m}$ avec $-\infty$

2) Définition

a) Familles sommables dans $\mathbb{R}_+$

Def°: Soit $(a_i)_{i \in I} \in (\mathbb{R}_+)^I$. On dit que $(a_i)_{i \in I}$ est sommable Δ ss:
$$\sum_{i \in I} a_i < +\infty$$

Prop: (Sommabilité dans $(\mathbb{R}_+)^I$ par majoration)

Soit $(a_i)_{i \in I} \leq (A_i)_{i \in I}$, $\in \mathbb{R}_+^I$.

Alors

$$\left. \begin{array}{l} \forall i \in I, a_i \leq A_i \\ (A_i)_{i \in I} \text{ sommable} \end{array} \right\} \Rightarrow (a_i)_{i \in I} \text{ sommable}$$

D/⊕ Par croissance, on a

$$\sum_{i \in I} a_i \leq \sum_{i \in I} A_i < +\infty \quad \blacksquare$$

b) partie positive et partie négative d'un nb réel

Def°: Soit $x \in \mathbb{R}$

• La partie positive de x , notée x_+ , est le nombre ≥ 0 déf par

$$x_+ := \max(x, 0)$$

• La partie négative de x , notée x_- , est un nombre ≥ 0 déf par $x_- = \max(0, -x)$

Fait: $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x = x_+ + (-x_-) = x_+ - x_-$

Fait: $\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq x_+ \leq |x|$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq x_- \leq |x|$

c) $\square$ Définition des familles sommables réelles

Def°: Soit $(a_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^I$. On dit que

$(a_i)_{i \in I}$ est sommable Δ_{ss}

$(|a_i|)_{i \in I}$ sommable ie Δ_{ss}

$$\sum_{i \in I} |a_i| < +\infty$$

- On note $P^1(I, \mathbb{R})$ l'ens des familles $(a_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^I$ qui sont sommables.

Oubli: qd $(\alpha_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}_+^I$ est sommable, ie quand $\overline{\sum_{i \in I} \alpha_i} < +\infty$, on note

$$\sum_{i \in I} \alpha_i := \overline{\sum_{i \in I} \alpha_i}$$

d) Somme d'une famille sommable

Soit $(a_i)_{i \in I} \in P^1(I, \mathbb{R})$ une famille sommable.

Lemme: Les familles $(a_i)_+_{i \in I}$ et $(a_i)_-_{i \in I}$ sont sommables (en tant que familles de $\mathbb{R}_+^I$)

D/ Déjà: $\hat{C} \ (a_i)_{i \in I} \in P^1(I, \mathbb{R})$, on a par def^o :

$$\overline{\sum |a_i|} < +\infty$$

- Or, on a $\forall i, 0 \leq (a_i)_+ \leq |a_i|$

- Donc: grâce au critère de sommabilité dans $\mathbb{R}_+^I$

par majoration : on a $(a_i)_+_{i \in I}$ sommable

• De $\bar{m}$ pour $(a_i)_-_{i \in I}$ ■

Def° : Soit $(a_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^I$ une famille sommable.

La somme de $(a_i)_{i \in I}$, notée $\sum_{i \in I} a_i$, est le nombre réel défini par :

$$\sum_{i \in I} a_i := \sum_{i \in I} (a_i)_+ - \sum_{i \in I} (a_i)_-$$

e) Les séries

Prop : Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Alors :

$(u_n)_n$ sommable $\Leftrightarrow \sum_n u_n \xrightarrow{ACV}$

ie $(u_n)_n \in \mathcal{P}^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$

D/ Il suffit de traiter le cas ≥ 0

Soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$. Mg

$$\sum_n \alpha_n \xrightarrow{CV} \Leftrightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n < +\infty$$

$$\Leftrightarrow \text{Osq } \sum_n a_n \xrightarrow{\text{cv}} \text{Notons } S := \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

$$\text{Hg } \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n < +\infty$$

Soit J une partie de $\mathbb{N}$. On pose
 $N := \max(J)$

On a donc $J \subset [0; N]$

$$\text{Donc } \sum_{n \in J} a_n \leq \sum_{n=0}^N a_n \leq S$$

Ainsi : on a $\forall J \text{ finie } \subset \mathbb{N}, \sum_{n \in J} a_n \leq S$

Ainsi, S majore $\left\{ \sum_{n \in J} a_n ; J \subset \mathbb{N} \text{ finie} \right\}$

Donc $\sup^{(\mathbb{R}_+)} \{ \dots \} \leq S$ ie

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \leq S$$

En particulier $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n < +\infty$

$\Leftarrow$ Osq $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n < +\infty$. Notons

$$M := \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \in \mathbb{R}$$

Soit $N \in \mathbb{N}$; on a $[0; N]$ est finie

$$\text{On a } \sum_{m \in [0; N]} a_m \leq M \quad \text{ie } \sum_{n=0}^N a_n \leq M$$

La suite des sommes partielles de

$\sum_n u_n$ est majorée.

$\hat{c}$ c'est une SATP : elle converge ■

Rq : On a prouvé aussi que dans ce cas :

$$\overline{\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \blacksquare$$

3) Premières propriétés :

a) Sommabilité par majoration.

Prop : Soient $(a_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^I$ et
 $(A_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}_+^I$.

Alors : $\left. \begin{array}{l} \forall i \in I, |a_i| \leq A_i \\ (A_i)_{i \in I} \text{ sommable} \end{array} \right\} \Rightarrow (a_i)_{i \in I} \text{ sommable}$

D/ok

b) Sommeabilité des sous-familles

$$\underline{\text{Prop}}^{\textcircled{+}}: \left. \begin{array}{l} (a_i)_{i \in I} \text{ sommable} \\ J \subset I \end{array} \right\} \Rightarrow (a_i)_{i \in J} \text{ sommable}$$

D/ ok

c) Changement d'indice et réordonnement

Prop: Soit $(a_i)_{i \in I}$ sommable.

1) Soit J un ens et $\varphi: J \rightarrow I$ bijection.

Alors: $(a_{\varphi(j)})_{j \in J} \in \mathbb{R}^J$ sommable.

$$\text{Et: } \sum_{j \in J} a_{\varphi(j)} = \sum_{i \in I} a_i$$

2) Soit $\sigma: I \rightarrow I$ biject^o. Alors:

$$\sum_{i \in I} a_{\sigma(i)} = \sum_{i \in I} a_i$$

D/ ok ■ Découle aisément de $\overline{\mathbb{R}}_+^I$

d) Inégalité triangulaire

Prop: Soit $(a_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^I$ sommable.

Alors :

$$\left| \sum_{i \in I} a_i \right| \leq \sum_{i \in I} |a_i|$$

h) Linéarité

Prop: Soient $(a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^I$ sommables.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors :

1) la famille $(a_i + \lambda b_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^I$ est sommable.

2) On a

$$\sum_{i \in I} a_i + \lambda b_i = \sum_{i \in I} a_i + \lambda \sum_{i \in I} b_i$$

5) Sommation par paquets

a) le théorème.

MTh :

Soit $(I_k)_{k \in K}$ un recouvrement disjoint de I

Soit $(a_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^I$ une famille sommable

Alors : 1) $\forall k \in K$, $(a_i)_{i \in I_k}$ sommable

2) la famille $(\sum_{i \in I_k} a_i)_{k \in K} \in \mathbb{R}^K$ est sommable

3) On a $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{k \in K} (\sum_{i \in I_k} a_i)$

b) en pratique !!

Soit $(a_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^I$. Pour déterminer si $(a_i)_{i \in I}$ est sommable : on considère la famille $(|a_i|)_{i \in I} \in \mathbb{R}_+^I$

Avec $(|a_i|)_{i \in I}$: toutes les opérations sont possibles.

En particulier, on a $\sum_{i \in I} |a_i| = \sum_{k \in K} (\sum_{i \in I_k} |a_i|)$

Rq : Dans une copie, on n'utilisera pas la notation #

$\sum_{i \in I} a_i$; " on écrira " dans $\mathbb{R}_+$, on a

$$\sum_{i \in I} (|a_i|) = \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} |a_i|$$

Si on trouve après calcul que $\sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} |a_i| < +\infty$,
C'est que $\sum_{i \in I} |a_i| < +\infty$ et donc $(a_i)_{i \in I}$ est sommable.

On peut alors refaire tout les calculs sans les valeurs absolues.

6) Théorème de Fubini

Th M : Soit $(a_{ij})_{(i,j) \in I \times J} \in \mathbb{R}^{I \times J}$ sommable

Alors : 1) Pour tout $j_0 \in J$, $(a_{i,j_0})_{i \in I} \in \mathbb{R}^I$ sommable
2) Et la famille $(\sum_{i \in I} a_{i,j_0})_{j_0 \in J}$ est sommable.

$$3) \text{ Et } \sum_{(i,j) \in I \times J} a_{i,j} = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} a_{i,j} \right)$$

$$h) \text{ De } \overline{m} : \sum_{(i,j) \in I \times J} a_{i,j} = \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} a_{i,j} \right)$$

Dl ok.

Rq : En pratique : de $\overline{m}$

7) Cas des variables séparées

Prop : Soient $(\alpha_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^I$ et $(\beta_j)_{j \in J} \in \mathbb{R}^J$

Alors : 1) $(\alpha_i \beta_j)_{\substack{i \in I \\ j \in J}} \text{ sommable}$
(ie $(i,j) \in I \times J$)

$$= \begin{cases} (\alpha_i)_{i \in I} \text{ sommable} \\ (\beta_j)_{j \in J} \text{ sommable} \end{cases}$$

2) Dans ce cas :

$$\sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} \alpha_i \beta_j = \left(\sum_{i \in I} \alpha_i \right) \times \left(\sum_{j \in J} \beta_j \right)$$

D/ ok

8) Utilisation "à la $\varepsilon > 0$ " de la somme

Prop : Soit I ensemble.

Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille sommable

Alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists J_0 \text{ finie } \subset I, \quad \sum_{i \in J_0} a_i \approx \sum_{i \in I} a_i, \quad \forall \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists J_0 \text{ finie } \subset I : \forall J \text{ finie } \subset I, \quad \sum_{i \in J_0} a_i \approx \sum_{i \in J} a_i, \quad \forall \varepsilon$$

$$J_0 \subset J \Rightarrow \left| \sum_{j \in J} a_j - \sum_{i \in I} a_i \right| \leq \varepsilon$$

D/ (exo)

IV Familles sommables dans $\mathbb{C}^I$

1) Déf.

Déf.

• Soit $(a_i)_{i \in I} \in \mathbb{C}^I$

On dit que $(a_i)_{i \in I}$ est sommable $\sum_{i \in I} a_i$

$(|a_i|)_{i \in I} \in \mathbb{R}_+^I$ sommable $\sum_{i \in I} |a_i|$

$$\sum_{i \in I} |a_i| < +\infty$$

• Si $(a_i)_{i \in I} \in \mathbb{C}^I$ sommable :

alors $(\text{Re}(a_i))_{i \in I}$ et $(\text{Im}(a_i))_{i \in I}$

$\in \mathbb{R}^I$ sont sommables.

On pose alors :

$$\sum_{i \in I} a_i := \sum_{i \in I} \text{Re}(a_i) + i \sum_{i \in I} \text{Im}(a_i)$$

C'est la somme de $(a_i)_{i \in I} \in \mathbb{C}^I$

• On note $\ell^1(I, \mathbb{C})$ ou $\ell^1(I)$ l'ens des $(a_i)_{i \in I} \in \mathbb{C}^I$ sommables.

2) Propriétés

$$(\text{Ctrl} + C) + (\text{Ctrl} + V)$$

Rq : la seule propriété vraie
uniquement pour $\mathbb{R}$ est la croissance,
 $\forall i \in I, a_i \leq b_i$ alors $\sum_{i \in I} a_i \leq \sum_{i \in I} b_i$
si $(a_i)_i, (b_i)_i \in \mathbb{R}^I$ sont sommables.

3) Application au produit de Cauchy :

Ce sera un modèle d'application, de
démarche et de rédaction pour les raisonnements
liés aux familles sommables.

Données et Notations :

• Soient $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n$ des
series à valeurs dans $\mathbb{C}$.

• Pour $n \in \mathbb{N}$, je pose $c_n := \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$

On considère la série $\sum_{n \geq 0} c_n$ appelée
produit de Cauchy de $\sum_n a_n$ et $\sum_n b_n$

Prop - (R^*)

$$1) \left. \begin{array}{l} \sum_n a_n \xrightarrow{ACV} \\ \sum_n b_n \xrightarrow{ACV} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_n c_n \xrightarrow{ACV}$$

2) Dans ce cas ; on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right)$$

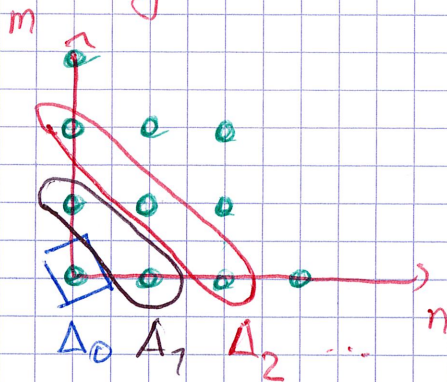
D/ 1°) Déjà, comme $\sum_n a_n \xrightarrow{ACV}$: DALC,
la famille des $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable.

De m : la famille des $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$
est sommable.

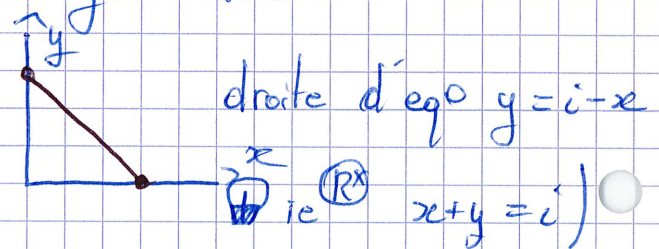
Donc, DALC, $(a_n \times b_m)_{(n,m) \in \mathbb{N}^2}$ sommable

2) Faisons donc une sommation par paquets.

Idee: On découpe $\mathbb{N}^2$ diagonale par diagonale.



(Astuce: Δ_i est l'analogue discret de $\mathbb{R}^2$



Plus précisément, on pose:

$$\Delta_i := \left\{ (n, m) \in \mathbb{N}^2 \mid n + m = i \right\}$$

$$\text{On a } \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} \Delta_i = \mathbb{N}^2$$

$$(D) \bullet (n, m) \in \Delta_i \cap \Delta_j \Rightarrow i = j = n + m$$

Donc les Δ_i sont 2 à 2 disjoints
 $\bullet (n, m) \in \Delta_{n+m} : \text{ donc } \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Delta_i = \mathbb{N}^2$

$$\text{Donc: } \sum_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} a_n b_m = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{(n,m) \in \Delta_i} a_n b_m$$

Soit $i \in \mathbb{N}$. L'ensemble Δ_i est fini

$$\text{et on a } \Delta_i = \left\{ (n, i-n) ; n \in \llbracket 0, i \rrbracket \right\}$$

$$\begin{aligned} \underline{\text{Donc}} : \sum_{(n,m) \in \Delta_i} a_n \times b_m &= \sum_{n=0}^i a_n \times b_{i-n} \\ &= c_i \end{aligned}$$

$$\text{Donc: } \sum_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} a_n \times b_m = \sum_{i \in \mathbb{N}} c_i$$

DALC : la famille $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est sommable.

$$\text{ie } \boxed{\sum_{n \geq 0} c_n \xrightarrow{\text{ACV}}}$$

$$\begin{aligned} \text{Or DALC: } \sum_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} a_n b_m &= \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \right) \cdot \underbrace{\left(\sum_{m \in \mathbb{N}} b_m \right)}_{\text{DALC}} \\ &\stackrel{\text{DALC}}{=} \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \cdot \sum_{m \in \mathbb{N}} b_m \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{m=0}^{\infty} b_m \end{aligned}$$

