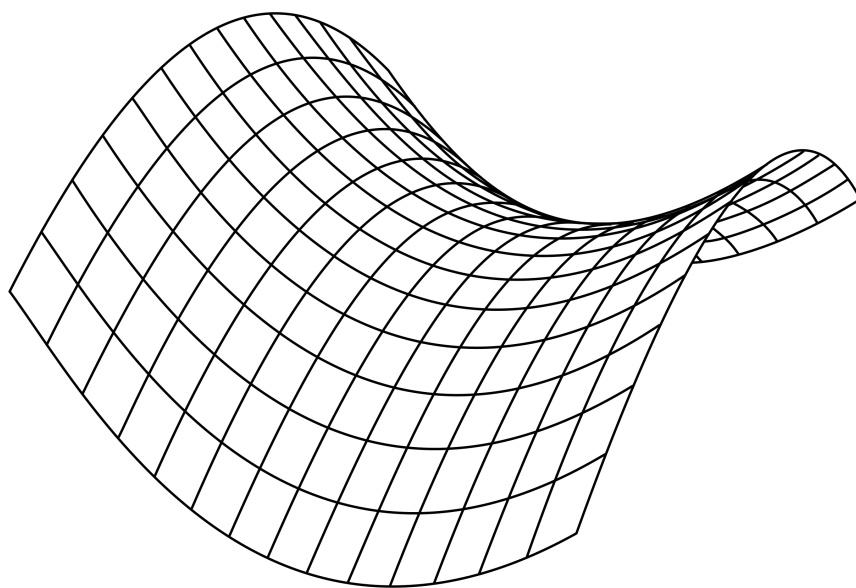


Chapitre 39

Fonctions de deux variables

Représentation d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

En analyse, on a jusqu'à présent étudié les fonctions réelles $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On a vu que la plupart des résultats se généralisaient aux fonctions complexes $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ et aux fonctions vectorielles $f : I \longrightarrow E$ où E est un espace vectoriel normé.

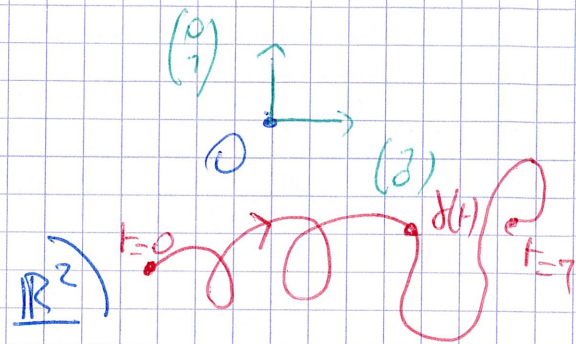
Dans ce qui précède, I est toujours un intervalle de $\mathbb{R}$.

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la généralisation en étendant l'espace de départ : les fonctions à deux variables.

①

d^n

$$I = [0, 1]$$



$$\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto \gamma(t)$$

Exemple: On a $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$t \mapsto \begin{pmatrix} \sin(t) + t^2 \\ \frac{e^t}{1+t^2} \end{pmatrix}$$

cet arc est $\mathcal{C}^1$ (mieux: $\mathcal{C}^\infty$)

et on a: $\gamma': [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) + 2t \\ \frac{e^t(1+t^2) - e(2t)}{(1+t^2)^2} \end{pmatrix}$$

subtilité:

- Si $t \in I$, alors: $\gamma(t)$ est un point du plan.
- Mais ^⑤: Si $t \in I$, alors $\gamma'(t)$ est un vecteur du plan.

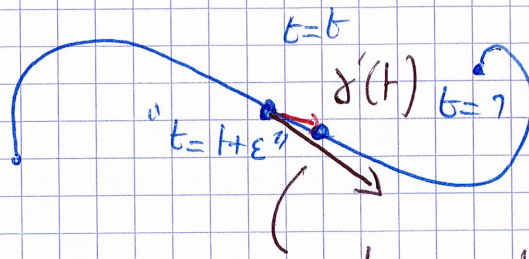
Explication:

$$A + \overrightarrow{u} = B \iff B - A = \overrightarrow{u}$$

$$\gamma'(t_0) \text{ est } \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} \frac{\gamma(t_0) - \gamma(t)}{t_0 - t}$$

$$= \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}}$$

$$= \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} \frac{\gamma(t_0) - \gamma(t)}{t_0 - t}$$

d^n $\mathbb{R}^2$ 

vecteur tangent à γ
au point de paramètre t

$$(\exists t : \frac{\gamma(t+\epsilon) - \gamma(t)}{\epsilon} = \begin{pmatrix} x(t+\epsilon) \\ y(t+\epsilon) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix})$$

$$\textcircled{\text{T}} \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{x(t+\epsilon) - x(t)}{\epsilon} \\ \frac{y(t+\epsilon) - y(t)}{\epsilon} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

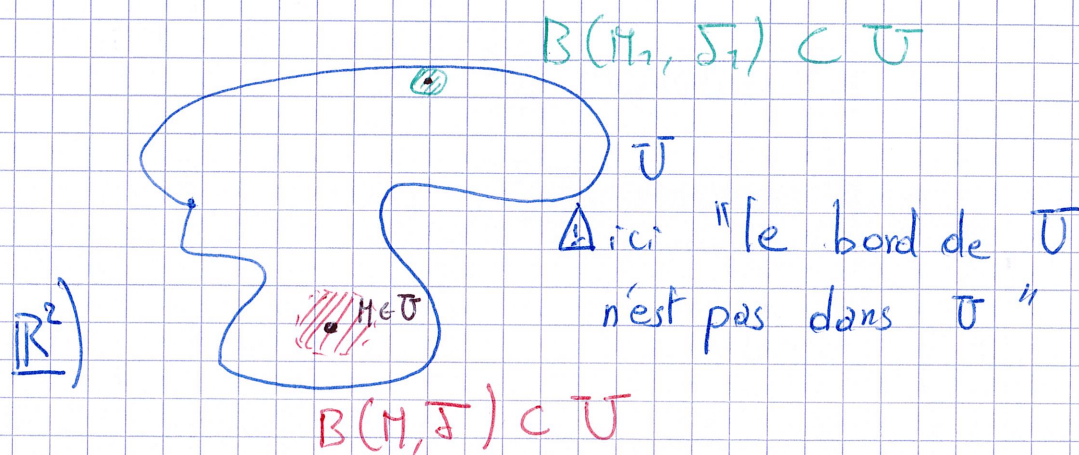
② Ouverts (de $\mathbb{R}^2$)

⬇ Idee : Soit $U \subset \mathbb{R}^2$. Alors U est un ouvert (de $\mathbb{R}^2$)

Δ_{ss} $\forall M \in U$, il y a un peu de place autour de M

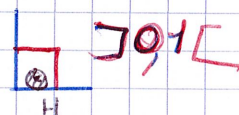
Δ_{ss} $\forall M \in U$, $\exists \delta > 0 : B(M, \delta) \subset U$

($\mathbb{R}^n$)



Exemples : (on identifie $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^2$)

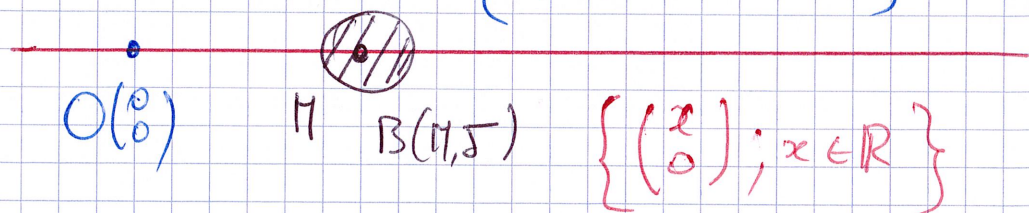
• $]0, 1[\times]0, 1[$ est un ouvert ($\mathbb{R}^n$)



• $[0, 1] \times [0, 1]$ n'est pas ouvert

• Pire : $\mathbb{R} \times \{0\}$ ie $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} ; x \in \mathbb{R} \right\}$

($\mathbb{R}^n$)



n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^2$

• $\forall M \in \mathbb{R}^2$, $\{M\}$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^2$

- $\mathbb{R}^2 \setminus \{ (0) \}$ ouvert de $\mathbb{R}^2$
- $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ ouvert $\mathbb{R}^2$

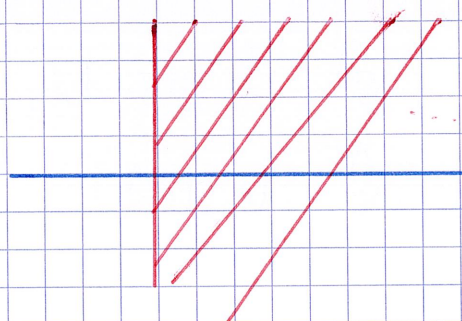
$\odot^n$

$\odot(\mathbb{R}^2)$



- $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ ie ouvert $\mathbb{R}^2$

$\odot^n$



- $\mathbb{R}^2$ ouvert $\mathbb{R}^2$

- $\emptyset$ ouvert $\mathbb{R}^2$

Prop !! $\forall A \in \mathbb{R}^2$

$\forall r > 0, B(A, r)$ ouverte dans $\mathbb{R}^2$

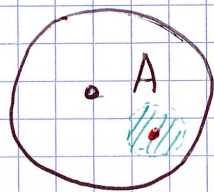
D/ Soit $A \in \mathbb{R}^2$; soit $r > 0$

Hq $B(A, r)$ ouverte dans $\mathbb{R}^2$

Soit $M \in B(A, r)$

Hq $\exists \delta > 0 : B(M, \delta) \subset B(A, r)$

D/



$B(M, \delta) \subset B(A, r)$

Notons $d := d(A, M)$. Par def^o, on a $d < r$. Posons $\delta := r - d$. On a $\delta > 0$

$$Mq \quad B(M, \delta) \subset B(A, r)$$

Lemme:



$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$$

$$\downarrow$$

$$\|\overrightarrow{AB}\|$$

$$\downarrow$$

$$\|\overrightarrow{AC}\|$$

$$\downarrow$$

$$\|\overrightarrow{CB}\|$$

$$\text{On a} \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$$

$$\text{Donc} \quad \|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\|$$

$$\textcircled{R^x} \leq \|\overrightarrow{AC}\| + \|\overrightarrow{CB}\| \quad \blacksquare$$

$$\text{Soit } P \in B(M, \delta) \quad \textcircled{R^x} \text{ ie } d(M, P) < \delta$$

$$Mq \quad P \in B(A, r)$$

$$\text{On a} \quad d(A, P) \leq \underbrace{d(A, M)}_{\text{notée } d} + \underbrace{d(M, P)}_{< \delta}$$

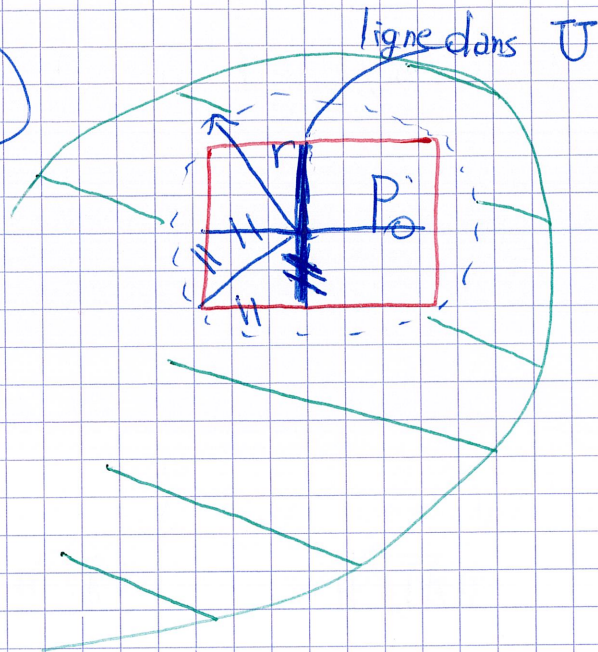
$$\text{car } P \in B(M, \delta)$$

$$< d + \delta \stackrel{Mq}{=} r$$

$$\text{Ainsi, on a } P \in B(A, r) \quad \blacksquare$$

3

d^n



$$\delta^2 + \delta^2 = r^2$$

U

$$\text{ie } \delta = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

Soit $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ avec $\begin{cases} x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta \\ y_0 - \delta \leq y \leq y_0 + \delta \end{cases}$

$M \in U$

$M \in B(P_0, r)$ on calcule

$$d(M, P_0)^2 = \|\vec{P_0 M}\|^2$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right\|^2$$

$$= \underbrace{(x - x_0)^2}_{\leq \delta^2} + \underbrace{(y - y_0)^2}_{\leq \delta^2} \leq$$

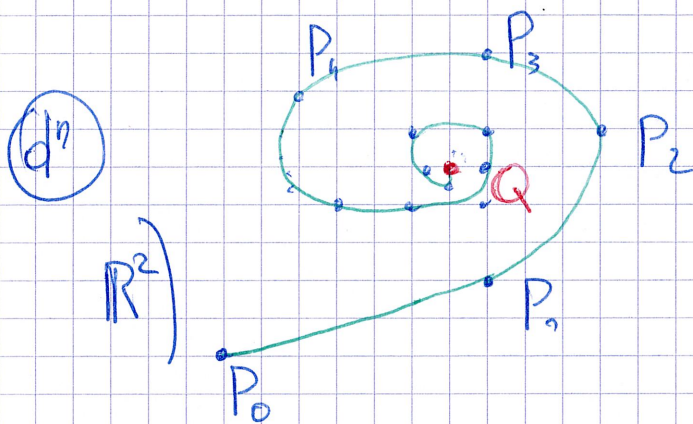
$$\leq 2\delta^2 = r^2 \quad \blacksquare$$

(h) Prop: Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \underline{\mathbb{R}^2}^{\mathbb{N}}$ où on écrit $P_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$

avec $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ pour tout n .

Soit $Q \begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \end{pmatrix} \in \underline{\mathbb{R}^2}$

Alors on a $P_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} Q \iff \begin{cases} x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x_Q \\ y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} y_Q \end{cases}$



D/ $\frac{0}{0}$

$\Rightarrow$ Orsq $d(P_n, Q) = \sqrt{(x_n - x_Q)^2 + (y_n - y_Q)^2} \rightarrow 0$

or $|x_n - x_Q| \leq \sqrt{(x_n - x_Q)^2 + (y_n - y_Q)^2}$ (Ac)

(ez)

$\Leftarrow$ Si $x_n \rightarrow x_Q$ et si $y_n \rightarrow y_Q$

par opérat^o sur les limites :

(...) $d(P_n, Q) \rightarrow 0$ ■

⑤ f est c^0 en P_0 si

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall M \in U, 0 < \delta \leq d(M, P_0) < \delta \Rightarrow |f(M) - f(P_0)| < \varepsilon$

$$d(M, P_0) < \delta \Rightarrow |f(M) - f(P_0)| < \varepsilon$$

$$= \|M - P_0\| < \delta$$

⑥ Technique importante de passage de U à $\mathbb{I}$.

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$.

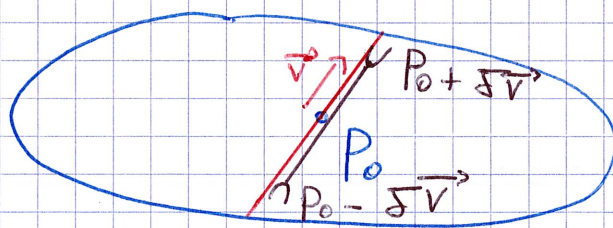
Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}$

Soit $P_0 \in U$ soit $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$

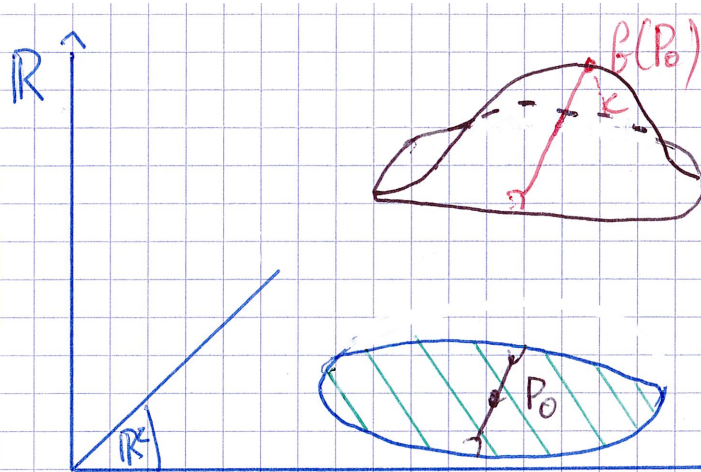
Fixons $\delta > 0$ tq $\forall t \in]-\delta, \delta[, P_0 + t\vec{v} \in U$

①

$\mathbb{R}^2$



$$\{P_0 + t\vec{v}; t \in \mathbb{R}\} \cap U$$



$$]-\delta, \delta[\longrightarrow \bar{U}$$

$$b \longmapsto P_0 + b\vec{v}$$

Plus précisément: on a un arc

$$\gamma:]-\delta, \delta[\longrightarrow \bar{U}$$

$$b \longmapsto P_0 + b\vec{v}$$

||

$$\begin{pmatrix} x_{P_0} + b x_{\vec{v}} \\ y_{P_0} + b y_{\vec{v}} \end{pmatrix}$$

On peut considérer la composition :

$$]-\delta, \delta[\xrightarrow{\gamma} \bar{U} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

c'est

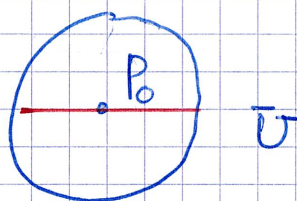
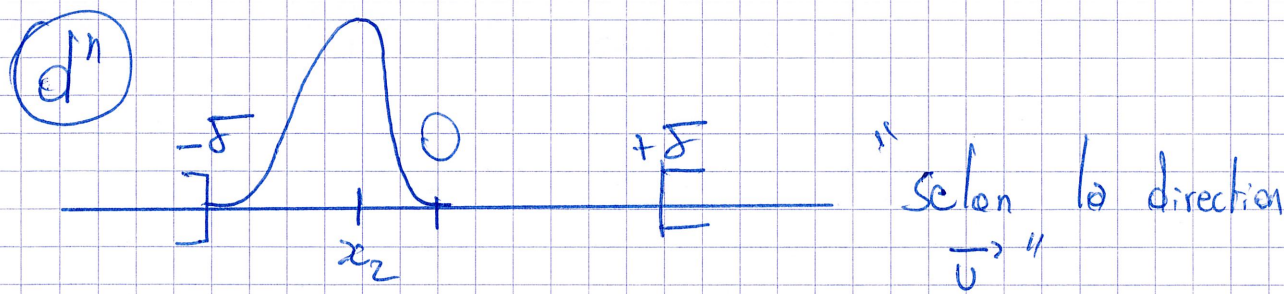
$$f \circ \gamma:]-\delta, \delta[\longrightarrow \mathbb{R}$$

Prop :

$$\left. \begin{array}{l} f: \bar{U} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ } C^0 \\ \gamma: I \longrightarrow \bar{U} \text{ arc } C^0 \end{array} \right\} \Rightarrow f \circ \gamma: I \longrightarrow \mathbb{R} \text{ } C^0$$

Contre-exemple important

Il existe des fonctions $f: U \rightarrow \mathbb{R}$
qui sont continues "selon toutes les directions"
mais qui ne sont pas continues.



cf (47.16)

1) Soit $\vec{v}$ qu'on écrit $\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
Ocsd $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ($\vec{v}$ non nul)
 $t \mapsto \begin{pmatrix} \alpha t \\ \beta t \end{pmatrix}$

On regarde $f \circ \gamma$ qu'on note φ

Soit $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\varphi(t) = \frac{(\alpha t)(\beta t)^2}{(\alpha t)^2 + (\beta t)^4} = \frac{\alpha \beta^2 t^3}{\alpha^2 t^2 + \beta^4 t^4}$$

$$= \frac{\alpha \beta^2 t}{\alpha^2 + \beta^4 t^2} \quad \begin{matrix} (\text{si } \alpha \neq 0) \\ (\text{variable si } t=0) \end{matrix}$$

Dans ce cas : γ est C^0

• si $\alpha = 0$: $\gamma(t) = 0$: γ est C^0

2) Ilq f n'est pas C^0 en $(0,0)$

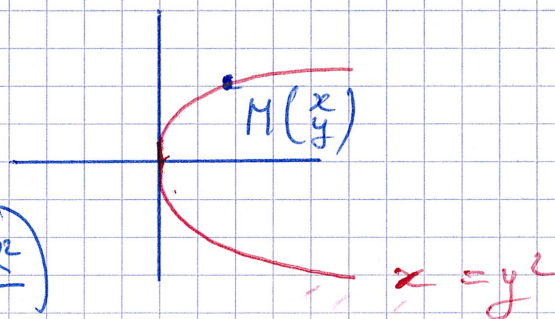
(B^0)

$$\frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

Je veux $xy^2 = y^4 \dots x = y^2$

Idée :

$\bar{U} = \mathbb{R}^2$



Soient $y \neq 0$. On pose $x := y^2$.

On note $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\text{On a } f(M) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4} = \frac{y^4}{y^4 + y^4} = \frac{1}{2}$$

On a

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}$$

$$M \longmapsto f(M)$$

2) On a : $\forall t \neq 0, \varphi(t) = \frac{1}{t}$; et $\varphi(0) = 0$

Donc φ n'est pas C^0 .

or φ C^0 . Donc f n'est pas C^0 en 0

(ou) On prend $P_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n^2} \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix}$. On a $P_n \rightarrow 0$

mais (AC)/(AF) $\forall n, f(P_n) = \frac{1}{2}$

concl: f n'est pas C^0 en 0. ■

cf animation géogebra

(7) Exemples

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto (e^x + y)^2 - \sin(x) \sin(y)$$

(f est C^0 :

Soit $Q \begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Soient $x_n, y_n \in \mathbb{R}^N$. On note $P_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$

Orsq $P_n \rightarrow Q$ on a $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_Q$.

Donc $e^{x_n} \rightarrow e^{x_Q}$

$$\sin(x_n) \rightarrow \sin(x_Q)$$

$$\sin(y_n) \rightarrow \sin(y_Q) \quad \text{etc ...}$$

par opérations sur les limites.

$$(e^{x_n} + y_n)^2 - \sin(x_n) \sin(y_n) \longrightarrow (e^{x_0} + y_0)^2 - \sin(x_0) \sin(y_0)$$

$$\text{Ic} \quad f(P_n) \longrightarrow f(Q)$$

$$\text{cd} : f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ est } C^0.$$

Calculons les dérivées partielles: c'est $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$

• Déjà : $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2(e^x + y)e^x - \sin(y)\cos(x)$

et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2(e^x + y) - \cos(y)\sin(x)$

• Bilan : on a ainsi $\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto 2(e^x + y)e^x - \sin(y)\cos(x)$

et $\frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto 2(e^x + y) - \sin(x)\cos(y)$

Bilan : Ici, partant de $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, on a défini deux nouvelles fonctions :

$$(*) \quad \frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(*) \quad \frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

⑧ Ocsd $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x,y) \mapsto x^2 e^{xy}$

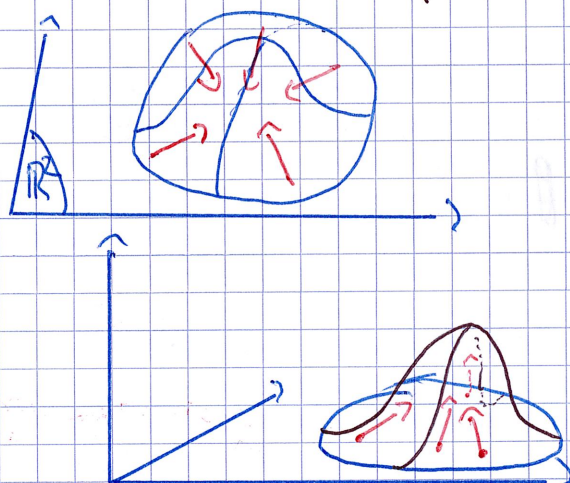
Pour $x, y \in \mathbb{R}$ On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x e^{xy} + x^2 y e^{xy}$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^3 e^{xy}$$

Ainsi,

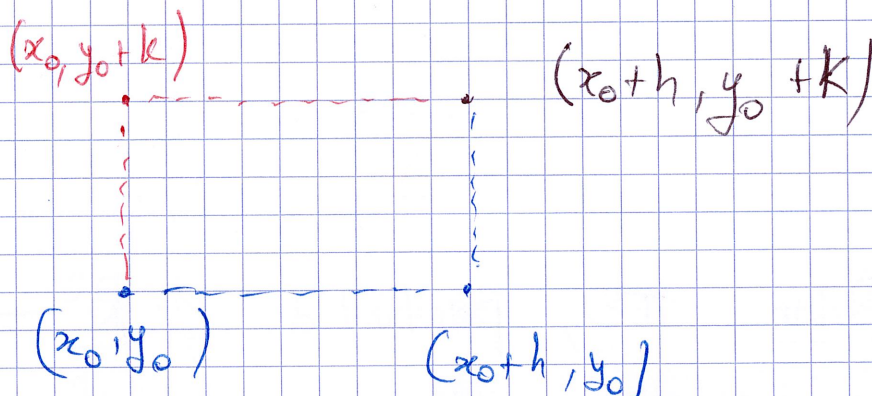
$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} (2+xy) x e^{xy} \\ x^3 e^{xy} \end{pmatrix}$$

⑨ d^n



⑨

d^n

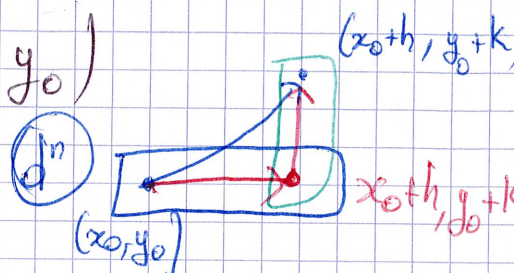


$$\text{Pq } f(x_0+h, y_0+k) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + \dots$$

Notons $\partial_1 f := \frac{\partial f}{\partial x}$; $\partial_2 f := \frac{\partial f}{\partial y}$

Déjà :

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)$$



$$= f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0)$$

On a $f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)$

$$= \int_{x_0}^{x_0+h} \partial_1 f(x, y_0) dx$$

(AC)

Rq: $\tilde{c} f$ est $\mathcal{C}^1$, on a $\partial_1 f: U \rightarrow \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^0$

Donc : $\partial_1 f(\cdot, y_0) :]x_0-\delta, x_0+\delta[\rightarrow \mathbb{R}$
 $z \mapsto \partial_1 f(z, y_0)$

est continue. Donc je peux l'intégrer

• Donc

$$\left| f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) h \right|$$

$$\leq \int_{x_0}^{x_0+h} \left| \partial_1 f(x, y_0) - \partial_1 f(x_0, y_0) \right| dx$$

(osq $h > 0$)



homogénéiser

Ainsi (--)

$$|f(x_0+h, y_0+k) - DL_{\gamma}(x_0, y_0)(b)|$$
$$\downarrow$$
$$f(x_0, y_0) + h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$$\leq \int_{x_0}^{x_0+h} |\partial_1 f(x, y_0) - \partial_1 f(x_0, y_0)| dx$$
$$+ \int_{y_0}^{y_0+k} |\partial_2 f(x_0+h, y) - \partial_2 f(x_0+h, y_0)| dy$$

Soit $\varepsilon > 0$.

$\hat{C}$ $\partial_1 f, \partial_2 f$ sont $\mathcal{C}^1$. Fixons $\delta > 0$ tq

$$\|P - \pi_0\| \leq \delta \Rightarrow \begin{cases} |\partial_1 f(P) - \partial_1 f(\pi_0)| \leq \varepsilon \\ |\partial_2 f(P) - \partial_2 f(\pi_0)| \leq \varepsilon \end{cases}$$

$$|f(x_0+h, y_0+k) - DL_{f(x_0, y_0)}(f)|$$

$$= |f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) + f(x_0+h, y_0) - DL_{f(x_0, y_0)}(f)|$$

$$= |f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) + f(x_0+h, y_0) - [f(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)]|$$

$$= |f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) + f(x_0+h, y_0) - [f(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)]|$$

$$= | \int_{y_0}^{y_0+k} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h, y) dy - k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) - k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0) dx - h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) |$$

$$\bullet |②| \leq k | \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h, y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) |$$

• Soit $\varepsilon > 0$

or, $\frac{\partial f}{\partial y} : U \rightarrow \mathbb{R}$ est C^0 .

car $f \in C^n(U, \mathbb{R})$

$$M_0 := \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

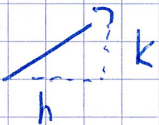
Fixons donc $\delta > 0$ tq $⑦$

$$d(M_0, p) \leq \delta \Rightarrow | \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(p) | \leq \varepsilon$$

• Ainsi : si $\| \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \| \leq \delta$, on a

$$d\left(\begin{pmatrix} x_0 + h \\ y_0 + k \end{pmatrix}, M_0\right) \leq \delta_2 \quad (\text{en eff. } \overrightarrow{M_0 P} = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix})$$

$$\begin{aligned} \text{On a alors } |②| &\leq \|k\| \varepsilon \\ &\leq \varepsilon \| \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \| \end{aligned}$$

Rq:  $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \quad |h| \leq \| \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \|^2$

• Pour ③

Fixons $\delta_1 > 0$ tq ①

$$d(P, M_0) \leq \delta_1 \Rightarrow |\partial_1 f(P) - \partial_1 f(M_0)| \leq \varepsilon$$

Car $\partial_1 f: U \rightarrow \mathbb{R}$ est c.

Rq: on n'utilise que la continuité en M_0

$$\text{Osq } \| \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \| \leq \delta_1$$

$$\begin{aligned} \text{On a } |③| &\leq \int_{x_0}^{x_0+h} |\partial_1 f(x, y_0) - \partial_1 f(x_0, y_0)| dx \\ &\quad (k \geq 0) \leq \varepsilon \end{aligned}$$

$$\text{Or } |x - x_0| \leq h \Rightarrow \| \overrightarrow{P_0 M} \| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \\ = |x-x_0| \leq |h|$$

$$\text{Donc } |\textcircled{3}| \leq \varepsilon \cdot |h| \leq \varepsilon \| \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \|$$

Pour $\textcircled{1}$

$$\text{On pose } \delta := \min(\delta_1, \delta_2)$$

$$\text{Or } d(P, M_0) \leq \delta. \text{ Donc } \begin{cases} |h| \leq \delta \leq \delta_1 \\ |k| \leq \delta \leq \delta_2 \end{cases}$$

On a

$$\textcircled{4} = \int_{y_0}^{y_0+k} \left[\partial_2 f(x_0+h, y) - \partial_2 f(x_0, y_0) + \left[\partial_2 f(x_0, y_0) - \partial_2 f(x_0+h, y_0) \right] \right] dy$$

$$\text{Donc } |\textcircled{4}| \leq |k| \int_{y_0}^{y_0+k} \underbrace{\left| \partial_2 f(x_0+h, y) - \partial_2 f(x_0, y_0) \right|}_{\leq \varepsilon} dy \\ + |k| \underbrace{\left| \partial_2 f(x_0, y_0) - \partial_2 f(x_0+h, y_0) \right|}_{\leq \varepsilon} \\ \leq 2\varepsilon \| \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \|$$

Bildn: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \bar{U}, d\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\right) < \delta$

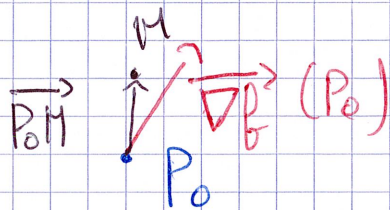
$$\Rightarrow \left| f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) + h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right|$$

$$\leq \varepsilon \left\| \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\|$$



(10)

(dⁿ)



$$f(M) = f(P_0) + \left(\vec{\nabla f}(P_0) \mid \overrightarrow{P_0M} \right) + o(\|\overrightarrow{P_0M}\|)$$

WPLS

$$o(\|\overrightarrow{P_0M}\|) = \varepsilon(M) \cdot \|\overrightarrow{P_0M}\|$$

$$\text{où } \varepsilon(\cdot) : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{matrix} \text{t.q.} & \varepsilon(p) & \longrightarrow & 0 \\ & p \longrightarrow & P_0 \end{matrix}$$

D/ si on écrit $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

$$M = \begin{pmatrix} x_0 + h \\ y_0 + k \end{pmatrix}$$

$$\text{alors : } \overrightarrow{P_0M} = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix};$$

$$\hat{\nabla f}(P_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) \end{pmatrix}$$

Par déf^o de $(\cdot | \cdot) : (\overrightarrow{P_0 M} | \overrightarrow{\nabla f}(P_0))$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) k$$

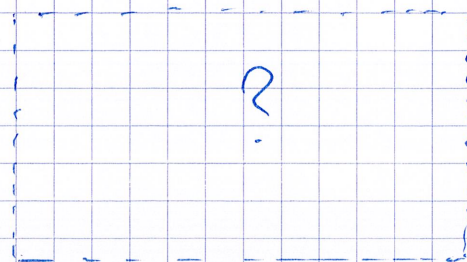
On a $f(M) = f(P_0) + (\overrightarrow{\nabla f}(P_0) | \overrightarrow{P_0 M}) + o(\|\overrightarrow{P_0 M}\|)$

💡 idée :

$I \rightarrow \mathbb{R}$
$f \in C^0$ f' $(DL_1) \quad f(a+h) = f(a) + h f'(a) + o(h)$

$U \rightarrow \mathbb{R}$
$f \in C^0$ $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ $f(x_0+h, y_0+k) =$ $f(x_0, y_0) + h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o(\ (h, k)\)$

$$(g \circ f)' = g' \circ f \times f'$$



(11) D/ (27)

$$\text{On a } f(M) = f(P_0) + (\overrightarrow{P_0 M} | \overrightarrow{\nabla f}(P_0)) + o(\|\overrightarrow{P_0 M}\|)$$

On remplace dans (*) M par $P_0 + t\vec{v}$

$$\bullet \text{ D'abord : } \overrightarrow{P_0 M} = t\vec{v}$$

$$\text{D'où : } f(P_0 + t\vec{v}) = f(P_0) + (\vec{v} | \overrightarrow{\nabla f}(P_0)) \cdot t + o(t)$$

Ainsi $t \mapsto f(P_0 + t\vec{v})$ est dérivable en 0 et sa dérivée est $(\vec{v} | \overrightarrow{\nabla f}(P_0))$ ■

(12) On veut dériver la composée.

Il y a 2 situations possibles.

$$\text{a) } I \xrightarrow[\text{arc}]{\gamma} \mathbb{R}^2 \quad U \xrightarrow[f^\circ \text{ de deux var}]{f} \mathbb{R}$$

$$\text{On compose : } f \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{On aura la formule : } \left(\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right)$$

$$\frac{f \circ \gamma(t+dt) - f \circ \gamma(t)}{dt} = \frac{f\left(\begin{pmatrix} x(t+dt) \\ y(t+dt) \end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}\right)}{dt}$$

$$\Delta x(t+dt) = x(t) + x'(t)dt + o(dt)$$

$$y(t+dt) = y(t) + y'(t)dt + o(dt)$$

$$= \frac{f\left(\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} dt + o(dt)\right) - f\left(\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}\right)}{dt}$$

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot x'(t) dt + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot y'(t) dt + o(dt) \right] \frac{1}{dt}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) y'(t) + o(1)$$

qd $dt \rightarrow 0$ ■

D plus rigoureuse / avec "un vrai DL" ■

Ex: Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ supposée $\mathcal{C}^1$

Ocsel a) $\gamma_1: t \mapsto f(t^2, -2e^t)$

b) $\gamma_2: t \mapsto f(t, -t)$

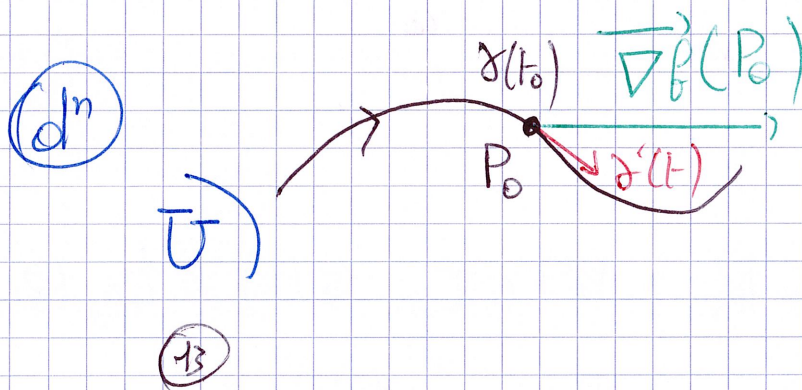
c) $\gamma_3: t \mapsto f(\cos(t), \sin(t))$

Alors, on a $\odot^T$: (AF)

$$\varphi_1'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t^2, -2e^t) 2t - 2e^t \frac{\partial f}{\partial y}(t^2, -2e^t)$$

$$\varphi_2'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, -t) - \frac{\partial f}{\partial y}(t, -t)$$

$$\varphi_3'(t) = -\sin(t) \frac{\partial f}{\partial x}(\cos(t), \sin(t)) + \cos(t) \frac{\partial f}{\partial y}(\dots)$$



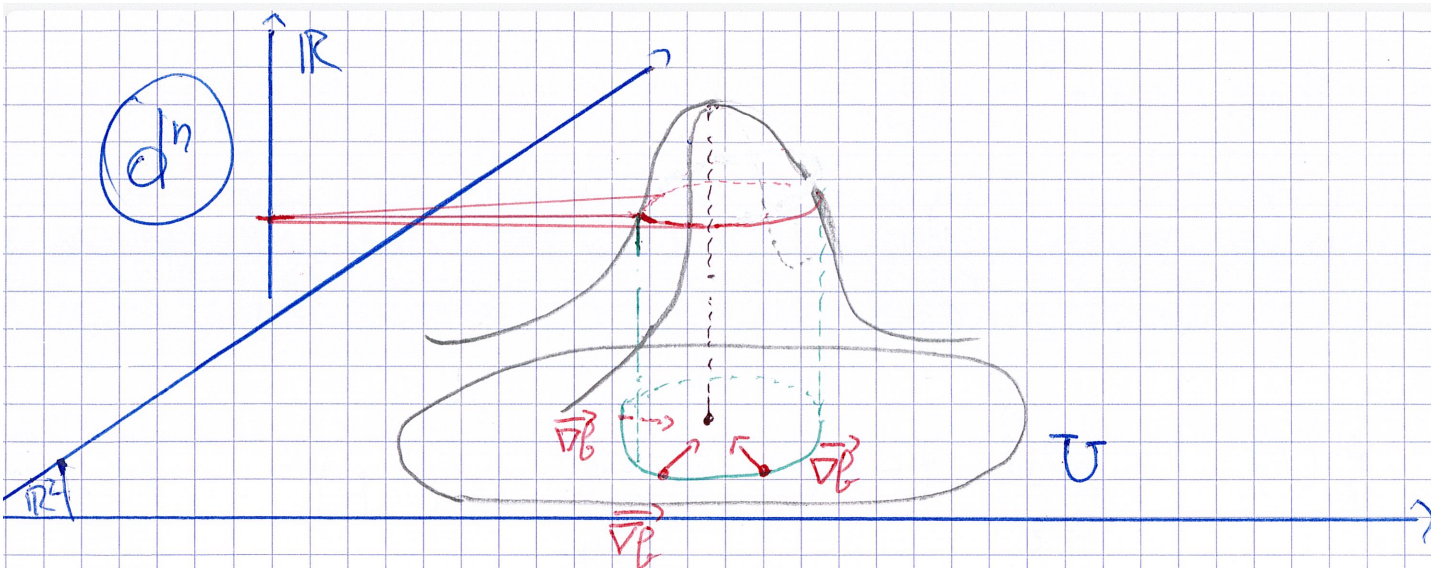
c) lignes de niveau

Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}$

Soit $a \in \mathbb{R}$ fixée.

La ligne de niveau de a pour f : c'est

$$\{m \in U \mid f(m) = a\}$$



Prop: Soit $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$

Soit $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}$ un arc "qui parcourt une ligne de niveau" (*)

(*) ie $\exists a \in \mathbb{R} : \forall t \in I, \gamma(t) \in L_a(\phi)$

$$\text{où } L_a(\phi) := \{p \in U \mid \phi(p) = a\}$$

$$= \phi^{-1}(\{a\})$$

alors $\forall t, \gamma'(t) \perp \vec{\nabla} \phi \circ \gamma(t)$

D/ Fixons un tel $a \in \mathbb{R}$

$$\text{On a } \forall t, \phi(\gamma(t)) = a$$

$$\text{Notons } \begin{aligned} \varphi: I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \phi \circ \gamma \end{aligned}$$

$$\text{On a } \forall t, \varphi'(t) = (\gamma'(t) \mid \vec{\nabla} \phi(\gamma(t)))$$

De $\textcircled{E}$ φ_{cte} , donc $\varphi' = \tilde{0}$ ~~■~~

(14) Deuxième situation

$$\begin{array}{ccc} \overset{\text{ouvert}}{\mathbb{R}^2} & \xrightarrow{\quad} & \overset{\text{ouvert}}{\mathbb{R}^2} \\ \text{---} & & \text{---} \end{array} \xrightarrow{\quad} \mathbb{R}$$

$$(u,v) \longmapsto \begin{pmatrix} \varphi(u,v) \\ \psi(u,v) \end{pmatrix}$$

On obtient $\overline{U} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$

$$(u,v) \longmapsto g(\varphi(u,v), \psi(u,v))$$

Prop : 1) $\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) =$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(\varphi(u,v), \psi(u,v))$$

$$+ \frac{\partial \psi}{\partial u}(u,v) \frac{\partial g}{\partial y}(\varphi(u,v), \psi(u,v))$$

(AF) exemple : $g:(u,v) \longmapsto g(u^2+v^2, u^2-v^2)$

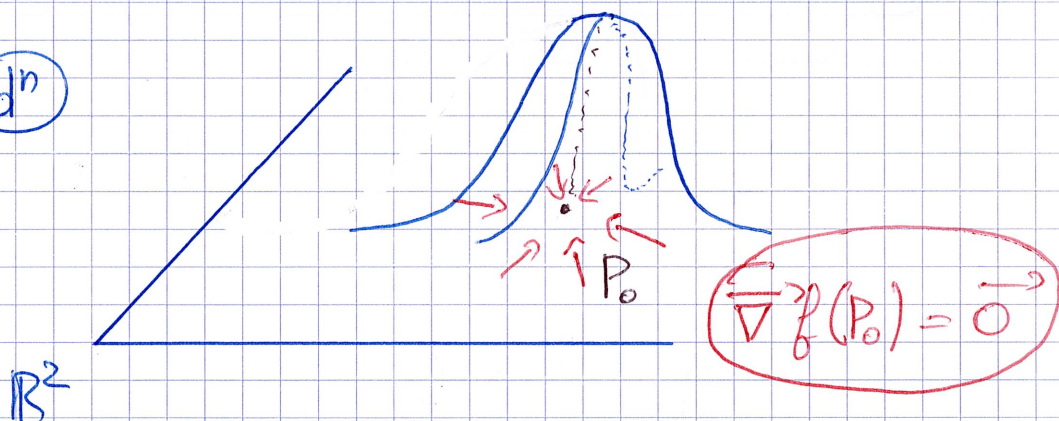
On a $\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial g}{\partial x}(u^2+v^2, u^2-v^2) 2u$

$$+ \frac{\partial g}{\partial y}(u^2+v^2, u^2-v^2) 2v$$

$$\text{et } \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(u^2+v^2, u^2-v^2)2v \\ - \frac{\partial f}{\partial y}(u^2+v^2, u^2-v^2)2v$$

(15)

(dⁿ)



D/

$$]-\delta; \delta[\xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$$

$t \mapsto f(x_0+t, y_0)$ admet un max_{en}

Donc d'après le lemme de l'extrémum local :

$$\underline{\varphi'(0) = 0}$$

$$\text{Or, } \varphi'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \blacksquare$$