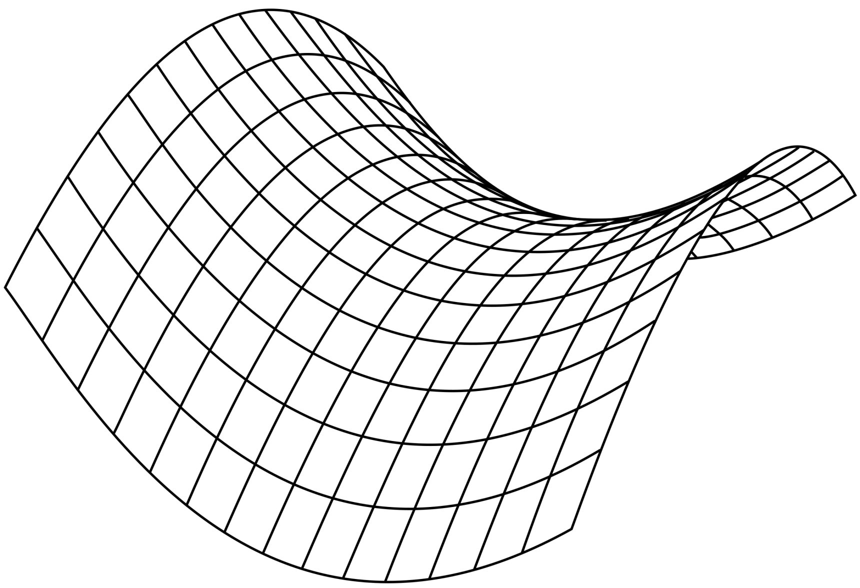
Chapitre 39

Fonctions de deux variables



Représentation d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

En analyse, on a jusqu'à présent étudié les fonctions réelles $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On a vu que la plupart des résultat se généralisaient aux fonctions complexes $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ et aux fonction vectorielle $f : I \longrightarrow E$ où E est un espace vectoriel normé.

Dans ce qui précède, I est toujours un intervalle de $\mathbb{R}$.

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la généralisation en étendant l'espace de départ : les fonctions à deux variables.

Sommaire

I. Cadre et notations

Dans tout ce chapitre, on gardera les notations et conventions suivantes.

- **Norme sur $\underline{\mathbb{R}}^2$.**
  On munit $\underline{\mathbb{R}}^2$ de son produit scalaire canonique $(\cdot\,|\,\cdot)$ et en note
  $$\left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\| \coloneqq \sqrt{x^2+y^2}$$
  si $x, y \in \mathbb{R}$.
- **Points du plan.**
  On aura souvent tendance à voir les éléments de $\underline{\mathbb{R}}^2$ comme des « points du plan » plutôt que comme des vecteurs. On les notera alors P, Q, *etc.*
  Si $\mathrm{P} \in \underline{\mathbb{R}}^2$ est ainsi un point, on notera $\mathrm{P}\begin{pmatrix} x_\mathrm{P} \\ y_\mathrm{P} \end{pmatrix}$ pour dire que $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} x_\mathrm{P} \\ y_\mathrm{P} \end{pmatrix}$.
- **Projections canoniques.**
  Si $\mathrm{P}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est un point du plan, on note $\mathsf{p}_1(\mathrm{P}) \coloneqq x$ et $\mathsf{p}_2(\mathrm{P}) \coloneqq y$. On obtient deux applications
  $$\mathsf{p}_1 : \underline{\mathbb{R}}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \mathsf{p}_2 : \underline{\mathbb{R}}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
  appelées *projections canoniques.*
- **Vecteur défini par deux points.**
  Si $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \underline{\mathbb{R}}^2$, on notera $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \coloneqq \begin{pmatrix} x_\mathrm{Q} - x_\mathrm{P} \\ y_\mathrm{Q} - y_\mathrm{P} \end{pmatrix}$.
- **Distance entre deux points.**
  Enfin, on notera Ⓣ
  $$\mathsf{d}(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \coloneqq \left\|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right\| = \sqrt{(x_\mathrm{Q} - x_\mathrm{P})^2 + (y_\mathrm{Q} - y_\mathrm{P})^2}.$$
  Cet élément de $\mathbb{R}_+$ est appelé la *distance entre* P *et* Q.

II. Arcs paramétrés

1) Définition

Définition F2V.**1**
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

1) *Un* arc paramétré par I de $\underline{\mathbb{R}}^2$ *est une fonction $\gamma : I \longrightarrow \underline{\mathbb{R}}^2$ telle que*
$$\begin{cases} \mathsf{p}_1 \circ \gamma \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R}) \\ \mathsf{p}_2 \circ \gamma \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R}). \end{cases}$$
2) *Soit $\gamma : I \longrightarrow \underline{\mathbb{R}}^2$ un arc paramétré.*
   a) *La fonction*
   $$\mathsf{p}_1 \circ \gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}$$
   est appelée première coordonnée de γ. *Elle est généralement notée $x(\cdot)$.*
   b) *De même, la fonction*
   $$\mathsf{p}_2 \circ \gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}$$
   est appelée deuxième coordonnée de γ. *Elle est généralement notée $y(\cdot)$.*

On pourra abréger « arc paramétré » en « arc ».
Dans la suite, on fixe I un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur > 0.

2) Arcs de classe $\mathscr{C}^1$

a) définition

Définition F2V.**2**
Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un arc paramétré, de coordonnées $x(\cdot)$ et $y(\cdot)$.
On dit que γ est de classe $\mathscr{C}^1$ $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ *ses coordonnées $x(\cdot)$ et $y(\cdot)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$.*

Exemple

- Dans cet exemple, on suppose que $I = \mathbb{R}$.
- On considère l'arc

$$\gamma : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \longmapsto \begin{pmatrix} t^2+1 \\ e^t \end{pmatrix}. \end{cases}$$

- Dans ce cas, les fonctions coordonées $x(\cdot)$ et $y(\cdot)$ de l'arc γ sont données par les expressions

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x(t) = t^2 + 1 \\ y(t) = e^t. \end{cases}$$

- Ces fonctions $x(\cdot)$ et $y(\cdot)$ sont bien de classe $\mathscr{C}^1$ (en l'occurrence, elles sont de classe $\mathscr{C}^\infty$).
- Ainsi, $\boxed{\text{l'arc } \gamma \text{ est de classe } \mathscr{C}^1.}$

b) dérivée d'un arc

Définition F2V.**3**
Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un arc $\mathscr{C}^1$, de coordonnées $x(\cdot)$ et $y(\cdot)$.
La dérivée de γ, *notée γ', est la fonction*

$$\gamma' : \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \longmapsto \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Exemple (suite)
La dérivée de l'arc γ est

$$\gamma' : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \longmapsto \begin{pmatrix} 2t \\ e^t \end{pmatrix}. \end{cases}$$

III. Continuité des fonctions de deux variables

1) Ouverts de $\mathbb{R}^2$

a) boules ouvertes

Définition F2V.**4**
Soit $\mathrm{P} \in \underline{\mathbb{R}}^2$ *et soit* $r > 0$.
La boule ouverte centrée en P et de rayon r *est la partie de* $\underline{\mathbb{R}}^2$ *définie par*

$$\mathsf{B}(\mathrm{P}, r) \coloneqq \left\{\mathrm{M} \in \underline{\mathbb{R}}^2 \;\middle|\; \mathsf{d}(\mathrm{M}, \mathrm{P}) < r\right\}.$$

b) ouverts

♛ **Définition** F2V.**5**
Soit $U \subset \underline{\mathbb{R}}^2$. *On dit que* U est un ouvert (de $\underline{\mathbb{R}}^2$) *ou que* U est ouvert (dans $\underline{\mathbb{R}}^2$) $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\forall \mathrm{M} \in U, \exists \delta > 0 : \quad \mathsf{B}(\mathrm{M}, \delta) \subset U.$$

c) stabilité par petites pertubations

Proposition F2V.**6**
Soit $U \subset \underline{\mathbb{R}}^2$ *un ouvert non vide et soit* $\mathrm{P}_0 \in U$, *qu'on écrit* $\mathrm{P}_0\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

1) *Alors, il existe* $\delta > 0$ *tel que*

$$\forall (x, y) \in \left]x_0 - \delta, x_0 + \delta\right[\times \left]y_0 - \delta, y_0 + \delta\right[, \quad \mathrm{M}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in U.$$

2) a) *En particulier, pour ce* $\delta > 0$, *on a*

$$\forall x \in \left]x_0 - \delta, x_0 + \delta\right[, \quad \mathrm{M}\begin{pmatrix} x \\ y_0 \end{pmatrix} \in U.$$

b) *De même, pour ce* $\delta > 0$, *on a*

$$\forall y \in \left]y_0 - \delta, y_0 + \delta\right[, \quad \mathrm{M}\begin{pmatrix} x_0 \\ y \end{pmatrix} \in U.$$

3) *Plus généralement, si* $\vec{v} \in \underline{\mathbb{R}}^2$, *il existe* $\delta > 0$ *tel que*

$$\forall t \in \left]-\delta, \delta\right[, \quad \mathrm{P}_0 + t\vec{v} \in U.$$

d) exemples

$\longrightarrow$ Voir cours 📖

2) Convergence des suites de points

Définition F2V.**7**
Soit $(\mathrm{P}_n)_{n \geqslant 0} \in \left(\underline{\mathbb{R}}^2\right)^{\mathbb{N}}$ *une suite de points et soit* $\mathrm{Q} \in \underline{\mathbb{R}}^2$.
On dit que la suite de points $(\mathrm{P}_n)_n$ converge vers le point Q, *et on note* $\mathrm{P}_n \longrightarrow \mathrm{Q}$, $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\mathsf{d}(\mathrm{P}_n, \mathrm{Q}) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

3) Continuité en un point

Dans ce paragraphe et le suivant, on fixe $U \subset \underline{\mathbb{R}}^2$ un ouvert non vide de $\underline{\mathbb{R}}^2$.

a) définition

Définition F2V.**8**
Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *et soit* $\mathrm{P} \in U$.
On dit que f est continue en P $\overset{\triangle}{\text{ssi}}$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \ \forall \mathrm{M} \in \mathsf{B}(\mathrm{P}, \delta) \cap U, \ \left| f(\mathrm{M}) - f(\mathrm{P}) \right| \leqslant \varepsilon.$$

b) caractérisation séquentielle de la continuité en un point

Proposition F2V.**9**
Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *et soit* $\mathrm{P} \in \underline{\mathbb{R}}^2$. *Alors, on a*

$$f \text{ est continue en } \mathrm{P}$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall (\mathrm{P}_n)_n \in U^{\mathbb{N}}, \quad \mathrm{P}_n \longrightarrow \mathrm{P} \implies f(\mathrm{P}_n) \longrightarrow f(\mathrm{P}).$$

c) propriétés

Proposition Ⓣ F2V.**10**
On suppose que f *et* g *sont continues en* P. *Alors,*

1) $f + \lambda g$ *est continue en* P *;*
2) fg *est continue en* P *;*
3) *si* $g(\mathrm{P}) \neq 0$, *alors* g *est non nulle sur un ouvert non vide* $V \subset U$ *et* $\frac{f}{g}$, *qui est définie sur* V, *est continue en* P.

4) Continuité

a) définition

Définition F2V.**11**
Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$. *On dit que* f est continue (sur U) $\overset{\triangle}{\text{ssi}}$

$$\forall \mathrm{P} \in U, \ f \text{ est continue en } \mathrm{P}.$$

On note $\mathscr{C}(U, \mathbb{R})$ *l'ensemble des fonctions continues de* U *dans* $\mathbb{R}$.

b) propriétés

Proposition F2V.**12**
Soient $f, g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *continues. Alors,*

1) $f + \lambda g$ *est continue ;*
2) fg *est continue ;*
3) *si* $\forall P \in U, \ g(\mathrm{P}) \neq 0$, *alors* $\frac{f}{g}$ *est continue.*

IV. Fonctions de deux variables de classe $\mathscr{C}^1$

Dans cette partie, on fixe U un ouvert non vide de $\underline{\mathbb{R}}^2$.
On identifie $\underline{\mathbb{R}}^2$ et $\mathbb{R}^2$.

1) Dérivées partielles

a) dérivées partielles en un point

Définition F2V.**13**
Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et soit $(x_0, y_0) \in U$.

1) a) *On dit que f* admet une dérivée partielle selon x en (x_0, y_0) $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ *la fonction*

$$x \longmapsto f(x, y_0)$$

(qui est définie sur un voisinage de x_0) est dérivable en x_0.

b) *On note alors*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

la dérivée de cette fonction. On l'appelle dérivée partielle de f selon x en (x_0, y_0).

2) *De même on définit la* dérivée partielle de f selon y en (x_0, y_0), *qu'on note*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

b) Opérations sur les dérivées partielles

$\longrightarrow$ Voir cours

c) fonctions dérivées partielles

Définition F2V.**14**
Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1) *On suppose que f admet des dérivées partielles selon x en tout point $M \in U$.*
La (fonction) dérivée partielle de f selon x *est alors la fonction*

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \left\{ \begin{array}{rcl} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_0, y_0) & \longmapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0). \end{array} \right.$$

2) *De même, on définit* $\dfrac{\partial f}{\partial y} : U \longrightarrow \mathbb{R}$, la (fonction) dérivée partielle de f selon y.

d) plan tangent

Définition F2V.**15**
Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $(x_0, y_0) \in U$.
On suppose que f admet des dérivées partielles selon x et y en (x_0, y_0).
Le plan tangent au graphe de f *est le plan d'équation*

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

2) Admettre des dérivées partielles sans être continue

Une fonction peut admettre des dérivées partielles sans être continue !

$\longrightarrow$ Voir cours

3) Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

a) définition

Définition F2V.**16**
Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$.
On dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ $\overset{\triangle}{\text{ssi}}$

$$\begin{cases} f \text{ admet des dérivées partielles selon } x \text{ et } y \text{ en tout point } M \in U \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} \in \mathscr{C}\big(U, \mathbb{R}\big) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \in \mathscr{C}\big(U, \mathbb{R}\big). \end{cases}$$

On note $\mathscr{C}^1(U, \mathbb{R})$ l'ensemble de ces fonctions.

b) propriétés

Comme pour $\mathscr{C}(U, \mathbb{R})$, l'ensemble $\mathscr{C}^1(U, \mathbb{R})$ est stable par combinaison linéaire et par produit.
Si $f \in \mathscr{C}^1(U, \mathbb{R})$ est toujours non nulle, alors $1/f$ est aussi de classe $\mathscr{C}^1$.

4) Gradient

Définition F2V.**17**
Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$.
Le gradient de f, noté ∇f ou $\vec{\nabla} f$, est une fonction de U dans $\underline{\mathbb{R}}^2$, définie par

$$\nabla f : \begin{cases} U \longrightarrow \underline{\mathbb{R}}^2 \\ (x_0, y_0) \longmapsto \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}. \end{cases}$$

5) Développements limités à l'ordre 1 d'une fonction de deux variables

a) l'énoncé

Proposition F2V.**18**
Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction de classe* $\mathscr{C}^1$ *et soit* $(x_0, y_0) \in U$*. Alors, on a*

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + \mathrm{o}\big(\|(h, k)\|\big)$$

quand $(h, k) \to (0, 0)$.

Démonstration. — Elle est explicitement hors programme. ■

b) reformulation avec le gradient

Proposition F2V.**19**
Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction de classe* $\mathscr{C}^1$ *et soit* $\mathrm{P}_0 \in U$*. Alors, on a*

$$f(\mathrm{M}) = f(\mathrm{P}_0) + \left(\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{M}} \,\middle|\, \nabla f(\mathrm{P}_0)\right) + \mathrm{o}\big(\|\overrightarrow{\mathrm{P}_0 M}\|\big)$$

quand $\mathrm{M} \to \mathrm{P}_0$.

V. Dérivées partielles et composition

1) Dérivée selon un vecteur

a) définition

Définition F2V.**20**
Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$*, soit* $(x_0, y_0) \in U$ *et soit* $\vec{v} \in \underline{\mathbb{R}}^2$.
On dit que la fonction f est dérivable en (x_0, y_0) selon le vecteur $\vec{v}$ $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$t \longmapsto f\big((x_0, y_0) + t\vec{v}\big)$$

est dérivable en 0*. Sa dérivée est alors notée :* $\mathsf{D}_{\vec{v}} f(x_0, y_0)$.

b) lien avec le gradient

Proposition F2V.**21**
Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *de classe* $\mathscr{C}^1$ *et soit* $\vec{v} \in \underline{\mathbb{R}}^2$.
Alors, pour tout $(x_0, y_0) \in U$*,* f *est dérivable en* (x_0, y_0) *selon le vecteur* $\vec{v}$ *et*

$$\mathsf{D}_{\vec{v}} f(x_0, y_0) = \big(\nabla f(x_0, y_0) \,\big|\, \vec{v}\big).$$

2) Règle de la chaîne

a) règle de la chaîne

Proposition F2V.**22**
Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *de classe* $\mathscr{C}^1$.
Soit I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et soient* $x(\cdot), y(\cdot) \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$ *telles que*

$$\forall t \in I, \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \in U.$$

Alors, la fonction $t \longmapsto f\big(x(t), y(t)\big)$ *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *et*

$$\forall t \in I, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(f\big(x(t), y(t)\big)\Big) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \times x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \times y'(t).$$

b) interprétation avec les arcs

Proposition F2V.**23**
Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *de classe* $\mathscr{C}^1$.
Soit $\gamma : I \longrightarrow \underline{\mathbb{R}}^2$ *un arc de classe* $\mathscr{C}^1$ *à valeurs dans* U.
Alors, la fonction $f \circ \gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *et*

$$\forall t \in I, \quad (f \circ \gamma)'(t) = \big(\nabla f\big(\gamma(t)\big) \,\big|\, \gamma'(t)\big).$$

c) lignes de niveau

$\longrightarrow$ Voir cours

3) Généralisation

Proposition F2V.**24**
Sous les hypothèses appropriées, on a

$$\frac{\partial}{\partial u} f\big(\varphi(u,v), \psi(u,v)\big) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(\varphi(u,v), \psi(u,v)\big) \times \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\varphi(u,v), \psi(u,v)\big) \times \frac{\partial \psi}{\partial u}(u,v).$$

VI. Extrema

Dans cette partie, on fixe U un ouvert non vide de $\underline{\mathbb{R}}^2$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$.

1) Maxima, minima, locaux et globaux

Définition F2V.**25**
Soit $\mathrm{P}_0 \in U$.

1) a) *On dit que* P_0 est un minimum global de f $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\forall M \in U, \ \ f(\mathrm{P}_0) \leqslant f(M).$$

   b) *On dit que* P_0 est un minimum local de f $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\exists \delta > 0 : \ \ \forall M \in \mathsf{B}(\mathrm{P}_0, \delta), \ \ f(\mathrm{P}_0) \leqslant f(M).$$

2) *On définit de même* maximum de f *(global et local).*
3) *Un* extremum de f *(global ou local) est un point* P_0 *qui est minimum de* f *ou maximum de* f *(global ou local).*

Un extremum global est en particulier un extremum local.

2) Points critiques

Définition F2V.**26**
Soit $\mathrm{P}_0\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in U$. *On dit que* P_0 est un point critique de f $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \textit{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

3) Les extrema locaux sont des points critiques

Proposition Ⓣ F2V.**27**

$$\mathrm{P}_0 \textit{ extremum local} \implies \mathrm{P}_0 \textit{ point critique.}$$