

BONUS :

(I) Démonstration du thm de d'Alembert-Goursat

Soit $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, soit $z_0 \in \mathbb{C}$

• On dit que f est continue en z_0

$$\Delta_{ss}: \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

• On dit que f est c^0 Δ_{ss} :

$$\forall z_0 \in \mathbb{C}, f \text{ est } c^0 \text{ en } z_0.$$

Prop: Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est c^0 , elle est bornée et atteint ses bornes.

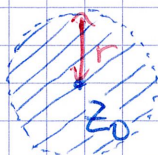
Prop: Soit $f: B_f(z_0, r)^{(*)} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction c^0

Alors : 1) f est bornée

2) f atteint ses bornes.

$$(*) B_f(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\}$$

(*)



D/ $\hat{C}$ pour $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

1) Mq f est majorée

• ORPA : Orq $\forall M \geq 0, \exists z \in B_f(a, r) : f(z) \geq M$

• On séquentialise cette assertion :

avec $M = n$, pour $n \in \mathbb{N}$.

• On obtient une suite $(z_n)_n \in B_f(a, r)^{\mathbb{N}}$

tg $\forall n, f(z_n) \geq n$

• Grâce à BW_C : fixons $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une extractrice et $w \in B_f(a, r)$ tg

$$z_{\varphi(n)} \rightarrow w$$

($\hat{C} \forall n, |z_{\varphi(n)} - a| \leq r$ car $z_{\varphi(n)} \in B_f(a, r)$)

À la limite : $|w - a| \leq r$

• $\hat{C}$ f est c^0 et $\hat{C} z_{\varphi(n)} \rightarrow w$ on a

$$f(z_{\varphi(n)}) \rightarrow f(w)$$

• C'est absurde car $\forall n, f(z_{\varphi(n)}) \geq \varphi(n) \geq n \rightarrow +\infty$

Ainsi, f est majorée.

2) Déjà, notons $s := \sup_{z \in B(a,r)} f(z)$

- Il y a $\exists w \in B_f(a,r) : f(w) = s$.

- Grâce à la "présentation" à la $\varepsilon > 0$ du sup :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists z \in B_f(a,r) : s - \varepsilon < f(z) \leq s$$

- On séquentialise cette $(\forall \varepsilon > 0, \exists)$ -assertion

avec $\varepsilon = \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

- On obtient une suite $(z_n)_{n \geq 1} \in B_f(a,r)^{\mathbb{N}}$ tq

$$\forall n \geq 1, \quad s - \frac{1}{n} < f(z_n) \leq s$$

- Avec BW_C, fixons $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ $\nearrow$

et $w \in B_f(a,r)$ tq ~~z_n~~ $z_{\varphi(n)} \rightarrow w$

$$\hat{=} \forall n, \quad s - \frac{1}{\varphi(n)} < f(z_{\varphi(n)}) \leq s$$

À la limite $f(z_{\varphi(n)}) \rightarrow s$

- Mais aussi (par continuité) : $f(z_{\varphi(n)}) \rightarrow f(w)$

Bilan :

$$\boxed{f(w) = s} \quad \blacksquare$$

Lemme : Soit $P \in \mathbb{C}[x]$
 Alors, $\widetilde{P} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est C^0
 $z \longmapsto P(z)$

D/ ok ■

Lemme : La $f^0 | \cdot | : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ est C^0 .
 $z \longmapsto |z|$

D/ En fait, elle est 1-lipschitzienne !
 $(||z| - |z'|| \leq |z - z'|)$
 $(|f(z) - f(z')| \leq 1 |z - z'|)$
 $(\text{cf } |f(z) - f(y)| \leq C |x - y|)$ ■

Th : Soit $P \in \mathbb{C}[x]$ tq $\deg(P) \geq 1$.
 Alors : $\exists w \in \mathbb{C} : P(w) = 0$.

D/ ORPA et orq $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) \neq 0$.

• Ocsd

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$z \longmapsto |P(z)|$$

• Déjà, f est C^0 ($\mathbb{C} \xrightarrow{\widetilde{P(\cdot)}} \mathbb{C} \xrightarrow{|\cdot|} \mathbb{R}$)

• Ensuite : $\forall z \in \mathbb{C}, p(z) > 0$ Grâce au ORPA

• M_q p atteint son inf.

Lemme : • Un polynôme complexe
"tend vers $+\infty$ " en $+\infty$ "

• I.e. " $|p(z)| \xrightarrow{|z| \rightarrow +\infty} +\infty$ "

• $\forall A > 0, \exists r_0 > 0 : \forall z \in \mathbb{C}, |z| \geq r_0 \Rightarrow |p(z)| \geq A$

D^{lemme} / On écrit $p(z) = \sum_{k=0}^n c_k X^k$ où $n := \deg(p)$
et avec $\forall k, c_k \in \mathbb{C}$

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $|p(z)| = |c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_0|$

$$\geq |c_n z^n| - |c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_0|$$

inégalité
triang renv

or $|c_0 + c_1 z + \dots + c_{n-1} z^{n-1}| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |c_i| |z|^i$

(ineq triang).

D'où (1) et (2) :

$$|P(z)| \geq |C_n| |z|^n - |C_{n-1}| |z|^{n-1} - \dots - |C_0|$$

exp^o de |z| (polynomiale)

• Notons $Q := |C_n|X^n - |C_{n-1}|X^{n-1} - |C_{n-2}|X^{n-2} - \dots + |C_1|X - C_0 \in \mathbb{R}[X]$

• On a $Q(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$

• Soit $A > 0$. Fixons donc $r > 0$ tq $\forall x \geq r, Q(x) > A$

si $z \in \mathbb{C}$ et si $|z| \geq r$, on a :

$$|P(z)| \geq Q(|z|) > A \quad \blacksquare$$

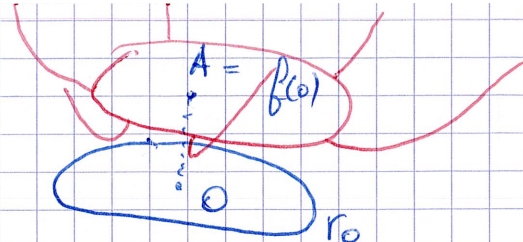
Revenons à la preuve.

On a $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$

Astuce : Notons $A := f(0) > 0$.

Comme " $f(z) \xrightarrow{|z| \rightarrow +\infty} +\infty$ ", fixons $r_0 \in \mathbb{R}_+$

$$\text{tq } \forall z \in \mathbb{C}, |z| \geq r_0 \Rightarrow f(z) > A$$



Ocsd $f|_{B_f(0, r_0)} : B_f(0, r_0) \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ Elle est c⁰.

Donc elle est bornée et elle atteint son inf

Fixons alors $z_0 \in B_f(0, r_0)$ où $f|_{B_f(0, r_0)}$

atteint son inf.

• Fait : $f(z_0) = \inf_{z \in \mathbb{C}} f(z)$

DL On distingue deux cas :

• si $|z| \leq r_0$, on a bien $f(z_0) \leq f(z)$

• si $|z| > r_0$, on a $f(z) \geq A = f(0) > \inf_{z \in B(0, r_0)} f(z)$

||
 $f(z_0)$



Bilan : • On a fait un ORPA avec P

• On a trouvé $z_0 \in \mathbb{C}$ où $P(\cdot)$ atteint son minimum en module.

Le point z_0 est maintenant au centre de notre intérêt.

Décomposons P dans la base $((x - z_0)^k)_{k \in \mathbb{N}}$
en écrivant
$$P = \sum_{k=0}^n c_k (x - z_0)^k$$

Où $n = \deg(P)$ et avec $\forall k, c_k \in \mathbb{C}$.

Déjà, $\boxed{c_0 \neq 0}$

Sinon, on a $P(z_0) = c_0 = 0$



Idee : On regarde z très proche de

z_0 i.e. $z = z_0 + \text{qqch}$ de telle

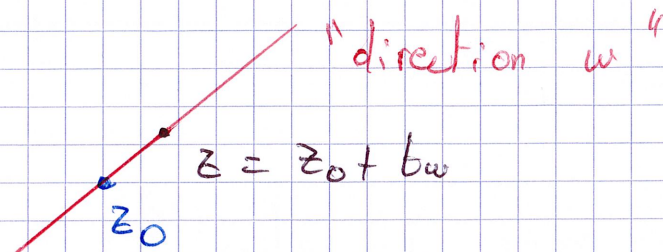
sorte que $|P(z)| = |P(z_0 + \text{qqch})| < |P(z_0)|$

• Fixons $w \in \mathbb{U}$: C'est un peu comme une direction

• Fixons $t \in \mathbb{R}_+$ (on va ensuite faire $t \rightarrow 0$)

• Considérons $z = z_0 + wt$

d^n



On cherche

la direction pour diminuer $|P(z)|$

$$P(z) = P(z_0 + tw) = \sum_{k=0}^n c_k w^k t^k$$

$$(\text{car } P = \sum_{k=0}^n c_k (x - z_0)^k)$$

$$= c_0 + c_1 w t + c_2 w^2 t^2 + \dots + c_n w^n t^n$$

Notons $m \geq 1$ le plus petit $k \geq 1$ tq $c_k \neq 0$

$$\text{On a } P(z) = c_0 + c_m w^m t^m + \dots + c_n w^n t^n$$

$$= c_0 + c_m w^m t^m \left(1 + \frac{c_{m+1}}{c_m} w t + \dots + \frac{c_n}{c_m} w^{n-m} t^{n-m} \right)$$

Rq : On a $|c_0| = |P(z_0)| = \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|$

$$= c_0 \left[1 + \frac{c_m w^m}{c_0} t^m \left(1 + b_1 t + \dots + b_p t^p \right) \right]$$

où $p := n - m$ et où $b_k := (-)$

Choisissons la direct^o:

Fixons $w \in \mathbb{C}$ tq $\frac{c_m w^m}{c_0} = -1$

On écrit $\frac{c_m}{c_0} = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$

On prend $w := \frac{1}{\sqrt[m]{\rho}} e^{i(\frac{\pi}{m} - \frac{\theta}{m})}$

$$\begin{aligned} \text{On a } \frac{c_m}{c_0} w^m &= \rho e^{i\theta} \cdot \frac{1}{\rho} \left[e^{i(\frac{\pi}{m} - \frac{\theta}{m})} \right]^m \\ &= e^{i\theta} e^{i(\pi - \theta)} = e^{i\pi} = -1 \end{aligned}$$

On a donc

$$P(z) = P(z_0 + wt) = c_0 \left[1 - t^m (1 + b_1 t + \dots + b_p t^p) \right]$$

$$\text{Donc } \frac{|P(z)|}{|c_0|} = \left| 1 - t^m (1 + b_1 t + \dots + b_p t^p) \right|$$

Lemme : Soit $\varphi(t)$ une fonct^o complexe tq

$$\varphi(t) = 1 - t^m + o(t^m)$$

Alors $|\varphi(t)| < 1$ pour $t \neq 0$ petit

D/ On écrit $\varphi(t) = 1 - t^m + t^m \varepsilon(t)$

$$= 1 - t^m + t^m a(t) + it^m b(t)$$

avec $\varepsilon(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$ et $a(t), b(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$

complexe
réelles

On a

$$\begin{aligned}
 |\varphi(t)|^2 &= \operatorname{Re}(\varphi(t)^*)^2 + \operatorname{Im}(\varphi(t))^2 \\
 &= (1 - t^m + t^m a(t))^2 + (t^m b(t))^2 \\
 &= 1 + \underbrace{t^{2m}} + \underbrace{t^{2m} a(t)} - 2t^m + \underbrace{2t^m a(t)} \\
 &\quad - \underbrace{2t^{2m} a(t)} + \underbrace{t^{2m} b(t)^2}_{= o(t^m)} \\
 &= 1 - 2t^m + o(t^m)
 \end{aligned}$$

On a $|\varphi(t)|^2 - 1 \sim -2t^m$.

Pour t petit, on a $|\varphi(t)|^2 - 1$ qui est du signe de $-2t^m$.

Donc $\exists \delta > 0 : \forall t \in]0, \delta[, |\varphi(t)|^2 - 1 < 0$

ce : $\exists \delta > 0 : \forall t \in]0, \delta[, |\varphi(t)| < 1$



Retour à D'Alembert - Gauss.

Ainsi :

$$\frac{P(z_0 + wt)}{P(z_0)} = 1 + t^m (1 + b_1 t + \dots + b_p t^p) \\ = 1 - t^m + o(t^m)$$

Il existe donc $\delta > 0$ tq

$$\forall t \in]0, \delta[, \left| \frac{P(z_0 + wt)}{P(z_0)} \right| < 1$$

$$\text{ie } \exists \delta > 0 : \forall t \in]0, \delta[, |P(z_0 + wt)| < |P(z_0)|$$

(Abs)

■