Chapitre 1 : Elements logiques

VI Demonstration : methodes et exemples

1) ∀- assertions.

On donne des canevas (des modèles) de preuve :
Pour montrer l'assertion $\forall x \in E, P(x)$, on écrira :
" Montrons que $\forall x \in E, P(x)$.

Soit $x \in E$
Montrons que $P(x)$
(...)
Ainsi, on a $P(x)$.

Ainsi on a montré que $\forall x \in E, P(x)$ "

Exemple

Montrons que $\forall x > 0, x + \frac{1}{x} \geq 2$

Soit $x > 0$
Montrons que $x + \frac{1}{x} \geq 2$

Methode Δ

On pose $\Delta := x + \frac{1}{x} - 2$

On a $\Delta = \frac{x^2 + 1 - 2x}{x}$

$= \frac{(x-1)^2}{x}$.

Or, on sait que $\forall a \in \mathbb{R}, a^2 \geq 0$. Donc $(x-1)^2 \geq 0$

Comme $x > 0$, on a $\frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$

On a montré que $x + \frac{1}{x} \geq 2$

Ainsi, on a montré que $\boxed{\forall x > 0, \ x + \frac{1}{x} \geq 2}$

2) Implications

Pour montrer $P \Rightarrow Q$, on écrira :

" Montrons que $P \Rightarrow Q$.

Supposons P

Montrons Q

(...)

Ainsi on a montré Q

Ainsi on a montré que $P \Rightarrow Q$ "

Exemple :

Colles

Montrons que $\forall n \in \mathbb{Z}$, n pair $\Rightarrow n^2$ pair

Soit $n \in \mathbb{Z}$

Montrons que n pair $\Rightarrow n^2$ pair

Supposons n pair

Montrons n^2 pair

Comme n est pair, Fixons $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$

On a $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$

Comme $2k^2 \in \mathbb{Z}$, on voit que $\exists l \in \mathbb{Z} : n^2 = 2l$

ie, n^2 est pair

On a donc montré que n pair $\Rightarrow n^2$ pair

Ainsi on a montré que $\boxed{\forall n \in \mathbb{Z}, n \text{ pair} \Rightarrow n^2 \text{ pair}}$

3) Demonstration par contraposition

Parfois pour montrer $P \Rightarrow Q$, on montre que $\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)$

Exemple :

Colles

Montrons que $\forall n \in \mathbb{Z}, n^2$ pair $\Rightarrow n$ pair

Soit $n \in \mathbb{Z}$

Montrons que n^2 pair $\Rightarrow n$ pair

Procedons par contraposition

Montrons que n impair $\Rightarrow n^2$ impair

Supposons n impair

Montrons que n^2 impair

Comme n est impair, fixons $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k+1$

On a $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2+2k)+1$

Posons $l := 2k^2 + 2k$

On a $n^2 = 2l + 1$

Donc n^2 impair

On a montré que $n \Rightarrow$ impair $\Rightarrow n^2$ impair

Ainsi par contraposition on a montré que :

$$n^2 \text{ pair} \Rightarrow n \text{ pair}$$

Conclusion : on a montré que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z},\ n^2 \text{ pair} \Rightarrow n \text{ pair}}$$

Remarque : en combinant l'ex du 2) et cet exemple, on a montré que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z},\ n \text{ pair} \Leftrightarrow n^2 \text{ pair}}$$

Remarque ⊕ Si $P \Leftrightarrow Q$, on a aussi $\text{non}(P) \Leftrightarrow \text{non}(Q)$. Ainsi ici, on a :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z},\ n \text{ impair} \Leftrightarrow n^2 \text{ impair}}$$

4) Equivalences

⚠∞ Sauf rare exceptions, les equivalences ne se demontrent ~~pas~~ par equivalence mais par **DOUBLE IMPLICATION**

Exemple :

Collez

Soit $a \in \mathbb{R}$

Montrons que $\forall \varepsilon > 0,\ |a| \leq \varepsilon \Leftrightarrow a = 0$

On procède par double-implication

- Montrons que $a = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0,\ |a| \leq \varepsilon$

  Supposons $a = 0$

  Montrons que $\forall \varepsilon > 0,\ |a| \leq \varepsilon$

  Soit $\varepsilon > 0$

Montrons que $|a| \leq \varepsilon$

On a $|a| = 0$ et $\varepsilon > 0$

Donc $|a| < \varepsilon$ et en particulier : $|a| \leq \varepsilon$

Ainsi on a montré que $\forall \varepsilon > 0, |a| \leq \varepsilon$

D'où $a = 0 \Rightarrow (\forall \varepsilon > 0, |a| \leq \varepsilon)$

- Réciproquement, montrons que $\forall \varepsilon > 0, |a| \leq \varepsilon \Rightarrow a = 0$

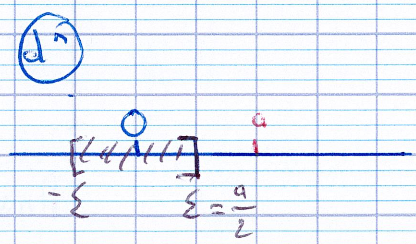
On procède par contraposition

Montrons $a \neq 0 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : |a| > \varepsilon$

Supposons $a \neq 0$

Montrons que $\exists \varepsilon > 0 : |a| > \varepsilon$

Posons $\varepsilon_0 := \frac{|a|}{2}$



Comme $a \neq 0$, on a $|a| > 0$

Donc $\varepsilon_0 > 0$

On a $\frac{1}{2} < 1$ et $|a| > 0$, donc

$\frac{1}{2} \times |a| < 1 \times |a|$ ie $\frac{|a|}{2} < |a|$ ie $|a| > \varepsilon_0$

On a montré que $\exists \varepsilon > 0 : |a| > \varepsilon$

On a montré que $a \neq 0 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : |a| > \varepsilon$

Par contraposition on a montré que : $(\forall \varepsilon > 0, |a| \leq \varepsilon) \Rightarrow a = 0$

On a montré que $\boxed{(\forall \varepsilon > 0, |a| \leq \varepsilon) \Leftrightarrow a = 0}$

Remarque : On a donc montré que

$$\forall a \in \mathbb{R}, \left((\forall \varepsilon > 0, |a| \leq \varepsilon) \Leftrightarrow a = 0 \right)$$

5) Disjonctions de cas

On écrira :

"Distinguons 2 cas :

- Cas 1 : ....

  (...)

  D'où le résultat dans ce cas

- Cas 2 : ....

  (...)

  D'où le résultat dans ce cas

Ainsi, ..."

Exemple :

Montrons que $\forall n \in \mathbb{Z}, \dfrac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{Z}$

Soit $n \in \mathbb{Z}$

Montrons que $\dfrac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{Z}$

On distingue 2 cas

- Cas 1 : n pair

Comme n est pair : fixons $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$

On a $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2k(2k+1)}{2} = k(2k+1) \in \mathbb{Z}$

Dans ce cas on a $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{Z}$

- Cas 2 : n impair

Comme n est impair, fixons $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k+1$

On a $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(2k+1)(2k+2)}{2} = (2k+1)(k+1) \in \mathbb{Z}$

Dans ce cas on a $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{Z}$

Dans tous les cas, on a $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{Z}$

Conclusion : on a montré que $\boxed{\forall n \in \mathbb{Z}, \ \frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{Z}}$

6) $\forall \Rightarrow$ - assertions

Ⓣ Pour montrer que $\forall x \in E, P(x) \Rightarrow Q(x)$, on écrira :

« Montrons que $\forall x \in E, P(x) \Rightarrow Q(x)$

Soit $x \in E$, tel que $P(x)$.

Montrons que $Q(x)$.

(...)

D'où $Q(x)$.

Ainsi on a montré que $\forall x \in E, P(x) \Rightarrow Q(x)$. »

Exemples :

· Montrons que $\forall x \geq 0, \sqrt{x} \geq 0$

Plus presisement, mq $\forall x \in \mathbb{R}_+, x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0$

Soit $x \in \mathbb{R}_+$

Montrons que $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0$

On procède par contraposition

Montrons que $\sqrt{x} \leq 0 \Rightarrow x \leq 0$

Supposons $\sqrt{x} \leq 0$

Montrons que $x \leq 0$

Par definition, on a $\sqrt{x} \geq 0$. Donc $\sqrt{x} = 0$

Or, $x = (\sqrt{x})^2$. Donc $x = 0^2 = 0$

Donc $x \leq 0$

Donc $\sqrt{x} \leq 0 \Rightarrow x \leq 0$

Donc par contraposition, on a montré que $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0$

CCl : on a montré que $\forall x \in \mathbb{R}_+, x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0$

Ie, on a montré que :

$$\boxed{\forall x \geq 0, \sqrt{x} \geq 0}$$

· Montrons que $\begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{array}$ est strictement croissante

la fonction « racine carrée »

Ie mq $\forall x, y \in \mathbb{R}_+, x > y \Rightarrow \sqrt{x} > \sqrt{y}$

Soit $x, y \in \mathbb{R}_+$ tel que $x > y$

Montrons que $\sqrt{x} > \sqrt{y}$

Posons $\Delta := \sqrt{x} - \sqrt{y}$

On a $\Delta = \dfrac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$

$= \dfrac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$

On peut faire ce calcul car $\sqrt{x} + \sqrt{y} \neq$

En effet, on a $x > y$ et $y \geq 0$ donc $x > 0$

Donc, d'après ce qui precede, $\sqrt{x} > 0$; comme de plus $\sqrt{y} \geq 0$, on a $\sqrt{x} + \sqrt{y} > 0$

On a $x - y > 0$ et $\sqrt{x} + \sqrt{y} > 0$; donc $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} > 0$

Ie $\Delta > 0$

On a ainsi montré que $\sqrt{x} \geq \sqrt{y}$

ccl $\boxed{\text{la Fonction } \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{array} \text{ est strictement croissante}}$

7) Demonstrations par l'absurde

Pour montrer P par l'absurde, on ecrira:

« Montrons P.

Raisonnons par l'absurde

Supposons non P

(...)

C'est absurde

Ainsi P est vraie »

Exemple :

Colles

Montrons que $\sqrt{2}$ est irrationnel

On raisonne par l'absurde

On suppose que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

Fixons donc $p, q \in \mathbb{Z}$ tel que

$q \neq 0$, $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ et p, q premiers entre eux

On a $2 = \frac{p^2}{q^2}$ donc $p^2 = 2q^2$

Donc p^2 est pair

Or, $\forall n \in \mathbb{Z}$, n^2 pair $\Rightarrow$ n pair

Donc p est pair : Fixons donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 2k$

On a $p^2 = 4k^2 = 2q^2$, donc $q^2 = 2k^2$, donc q^2 est pair

Donc, de même, q est pair

C'est absurde : p et q sont premiers entre eux

Ainsi on a montré que $\sqrt{2}$ est irrationnel

8) $\exists$-assertions

a) explicitement

(T) Pour montrer que $\exists x \in E : P(x)$, on trouve un "x_0" explicite qui convient

Rq : on sera amené naturellement à utiliser du " := "

Exemple :

Montrons que $\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y \Rightarrow \exists a \in \mathbb{R} : x < a < y$

Soient x, y et $\mathbb{R}$ tel que $x < y$

Montronsque $\exists a \in \mathbb{R} : x < a < y$

Posons $a_0 := \dfrac{x+y}{2}$

Montrons que $x < a_0 < y$

· Pour commencer, montrons que $x < a_0$

Posons $\Delta := a_0 - x$. On a $\Delta = \dfrac{x+y}{2} - x$

On a $\Delta = \dfrac{x+y-2x}{2} = \dfrac{y-x}{2}$

Or $x < y$ donc $y - x > 0$ et $\frac{1}{2} > 0$

Donc $\dfrac{y-x}{2} > 0$ ie $\Delta > 0$

Donc : $\boxed{x < a_0}$

· Maintenant montrons que $a_0 < y$

On a $y - a_0 = y - \dfrac{x+y}{2} = \dfrac{2y - (x+y)}{2} = \dfrac{y-x}{2}$

Donc $y - a_0 > 0$ D'après ce qui precede
Ainsi, on a montré que $a_0 < y$
On a montré que $x < a_0 < y$
On a montré que $\exists a \in \mathbb{R} : x < a < y$

On a montré que $\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y \Rightarrow \exists a \in \mathbb{R} : x < a < y$

b) en invoquant une autre $\exists$-assertion

⊕ Pour montrer que $\exists x \in E : P(x)$, on utilise une autre $\exists$-assertion qu'on sait être vraie

Rq : naturellement on utilisera "Fixons"

Exemple :

Montrons que $\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y \Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{R} : x < a < b < y$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $x < y$
Montrons que $\exists a, b \in \mathbb{R} : x < a < b < y$

On sait d'après ce qui précède, $\exists a \in \mathbb{R} : x < a < y$
Fixons un tel $a_0 \in \mathbb{R}$
On a $a_0 < y$
On sait d'après ce qui precède, $\exists b \in \mathbb{R} : a_0 < b < y$
Fixons un tel $b_0 \in \mathbb{R}$
On a : $x < a_0 < b_0 < y$

$\exists a, b \in \mathbb{R} : x < a < b < y$

Ccl : on montré que $\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y \Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{R} : x < a < b < y$

c) Par analyse synthèse

cf plus loin

g) Existences uniques

① Pour montrer que $\exists ! x \in E : P(x)$, on procède comme suit.

- on montre que $\exists x \in E : P(x)$
- on montre que si on considère deux éléments $x, y \in E$ telque $P(x)$ et $P(y)$ alors $x = y$

Exemple :

Soit $b \in \mathbb{N}^*$

dividende diviseur

Montrons que $\forall a \in \mathbb{Z}, \exists ! (q, r) \in \mathbb{Z}^2 : \begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < b \end{cases}$ ← reste

quotient

Rq ! : il s'agit de la division euclidienne (DE) entière

Soit $a \in \mathbb{Z}$

Montrons $\exists ! (q, r) \in \mathbb{Z}^2 : \begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < b \end{cases}$

- **Existence** : cf ⊕ loin

- **Unicité** :

Soient $(q_1, r_1), (q_2, r_2) \in \mathbb{Z}^2$

$\begin{cases} a = bq_1 + r_1 \\ 0 \leq r_1 < b \end{cases}$ et $\begin{cases} a = bq_2 + r_2 \\ 0 \leq r_2 < b \end{cases}$

Montrons que $(q_1, r_1) = (q_2, r_2)$

On distingue deux cas

Cas 1 : $r_1 \leq r_2$

On a $r_2 - r_1 \geq 0$

De plus, on a $\begin{cases} r_2 = a - bq_2 \\ r_1 = a - bq_1 \end{cases}$

donc $r_2 - r_1 = b(q_1 - q_2)$

Comme $r_2 < b$ et comme $r_1 \geq 0$, on a $r_2 - r_1 < b$

Donc on a $0 \leq r_2 - r_1 < b$

Ie, on a $0 \leq b(q_1 - q_2) < b$

Comme $b \in \mathbb{N}^*$, on a donc

$$0 \leq q_1 - q_2 < 1$$

Or $q_1 - q_2 \in \mathbb{Z}$ car $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$

Donc $q_1 - q_2 = 0$ ie $q_1 = q_2$

Comme $r_2 - r_1 = b(q_1 - q_2)$, on a aussi $r_2 - r_1 = 0$

ie $r_2 = r_1$

Dans ce cas $(q_1, r_1) = (q_2, r_2)$

• Cas 2 : $r_2 \leq r_1$

On procède de même

Ok pour cas 2

Dans tous les cas on a $(q_1, r_1) = (q_2, r_2)$

D'où l'unicité

DLR

10) Démonstration par analyse synthèse (!!)

On utilise les démonstrations par analyse synthèse dans deux cas :

- pour résoudre des équations pour lesquelles on ne dispose pas de méthode
- pour montrer des assertions du type $\exists x \in E : P(x)$ pour lesquelles il y a une unicité ou pour lesquelles l'ensemble des $x \in E$ tels que $P(x)$ n'est pas "trop gros"

C'est une méthode fondamentale, dont la rédaction, subtile, est à maîtriser. C'est aussi une méthode de recherche de solution

Plan d'une analyse synthèse : Ⓣ

But : on cherche les $x \in E$ tel que $P(x)$

Analyse : on écrit : « Soit $x \in E$ tel que $P(x)$ »

Et, on essaie d'en déduire le plus de choses possibles

On peut faire une « litanie de donc »

(Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\sqrt{x^2+2} = 3x+5$

On a donc $x^2+2 = (3x+5)^2$

Donc $x^2+2 = 9x^2+30x+25$

Donc $8x^2+30x+23 = 0$

ok ++ au niveau redaction

$\boxed{\text{Posons } \Delta = 30^2 - 4 \times 23 \times 8}$. On a $\Delta = 4 \times (15^2 - 23 \times 8)$
$= 4(225-184) > 0$

Donc $x = \dfrac{-30-\sqrt{\Delta}}{16}$ ou $x = \dfrac{-30+\sqrt{\Delta}}{16}$)

À la fin de cette étape, on obtient une liste de x possibles, qu'on souhaite la ⊕ restreinte possible

Remarque(!!) : Si à la fin de l'analyse, on obtient qu'un seul x possible alors on a montré l'unicité !

On écrira :
« Sous reserve d'existence, on a montré l'unicité »

Synthèse : c'est la reciproque

On prend chacune des valeurs de la liste et on teste lesquelles satisfont P.

Rq ! : Au niveau rédaction :
- ~~soit~~ l'analyse c'est : « Soit $x \in E$ tel que ... »
- la synthèse c'est : « Posons $x := ....$ Mq $P(x)$ »

Exemples :

- Résolvons l'équation $\sqrt{x+3} = x+2$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

On raisonne par analyse synthèse

- Analyse :

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\sqrt{x+3} = x+2$

Donc $\left(\sqrt{x+3}^2\right) = (x+2)^2$

Donc $x+3 = x^2+4x+4$

Donc $x^2+3x+1=0$

(On a $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 1 = 5$ -1 : qui est Δ ?) AC

Donc $x = \dfrac{-3-\sqrt{\Delta}}{2}$ ou $x = \dfrac{-3+\sqrt{\Delta}}{2}$,

où $\Delta := 3^2 - 4.1.1$ Comme $\Delta = 9-4=5$

On a, $x = \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$ ou $x = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$

- Synthèse

Posons $x_0 := \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$. On a $x_0 + 3 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

Donc $\sqrt{x_0+3} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$. On a $x_0 + 2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Or $1 < 5$ et la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est strictement

croissante. Donc $\sqrt{1} < \sqrt{5}$. Donc $x_0 + 2 < 0$. Donc $x_0 + 2 \neq \sqrt{x_0+3}$

(rq : ici, on a une solution potentielle qui est à exclure

Maintenant, posons $x_1 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$

Montrons que $\sqrt{x_1+3} = x_1 + 2$

(oubli : On a $5 \leq 9$. Or $x \longmapsto \sqrt{x}$ est croissante. Donc $\sqrt{5} \leq \sqrt{9}$, donc $3 - \sqrt{5} \leq 0$ donc $x_0 + 3 \geq 0$. Donc on peut considérer $\sqrt{x_0+3}$)

On a $x_1 + 2 \geq 0$. En effet, on a $x_1 + 2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Donc $x_1 + 3 \geq 0$. Donc $\sqrt{x_1+3}$ est bien défini

On a $(x_1+2)^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

Donc $(x_1+2)^2 = x_1 + 3$

Donc $\sqrt{(x_1+2)^2} = \sqrt{x_1+3}$

⚠ $\forall x \geq 0, \sqrt{x}^2 = x$

mais

$\forall a \in \mathbb{R}, \sqrt{a^2} = |a|$

I.e $|x_1 + 2| = \sqrt{x_1+3}$

Or $x_1 + 2 \geq 0$ donc $|x_1+2| = x_1 + 2$ et $x_1 + 2 = \sqrt{x_1+3}$

Ainsi x_1 est solution

Donc, L'ensemble des solutions de l'equation considérée est $\left\{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right\}$

OU

Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'equation considérée. On a $\mathcal{S}=\left\{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right\}$

OU Ainsi on a $\left\{x\in\mathbb{R} \,\middle|\, \sqrt{x+3} \text{ est défini et } \sqrt{x+3}=x+2\right\}=\left\{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right\}$

OU Ainsi on a : $\forall x\in\mathbb{R}, \left(\sqrt{x+3} \text{ est defini et } \sqrt{x+3}=x+2\right) \Leftrightarrow x=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$

OU Ainsi on a $\left\{x\in[-3;+\infty[\,\middle|\, \sqrt{x+3}=x+2\right\}=\left\{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right\}$

Colles

• Montrons que toute fonction s'ecrit sous la forme d'une fonction paire et d'une fonction paire

Ie, mq $\forall f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \exists g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R} : \begin{cases} f=g+h \\ g \text{ pair} \\ h \text{ impair}\end{cases}$

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Montrons que $\exists g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R} : \begin{cases} f=g+h \\ g \text{ paire et } h \text{ impaire}\end{cases}$

On procède par analyse synthèse

Analyse:

Soient g et $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} f=g+h \\ g \text{ pair} \\ h \text{ impaire}\end{cases}$

(But : trouver g et h)

Soit $x \in \mathbb{R}$

On a : $\begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) & (1) \\ f(-x) = g(-x) + h(-x) \end{cases}$

Or, $g(-x) = g(x)$ car g pair et $h(-x) = -h(x)$ car

h est impaire.

Donc $f(-x) = g(x) - h(x)$

En sommant (1) et (2), on obtient

$$f(x) + f(-x) = 2g(x) \text{ ie } g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$$

(rq : dans ce cas, si j'ai l'un, j'ai l'autre.

R* Trouver l'un des deux est suffisant

En effet, on a $h = f - g$: donc $h(x) = f(x) - \frac{f(x)+f(-x)}{2}$

ie $h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$)

Rq : ainsi, sous réserve d'$\exists$, on a montré l'unicité

Synthèse :

Considérons $g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2} \end{array}$

et considérons $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Montrons que $f = g + h$, g paire et h impaire

$R^{\times}$: c'est une $\forall$-assertion

Soit $x \in \mathbb{R}$

Montrons que $f(x) = g(x) + h(x)$ et $\begin{cases} h(-x) = -h(x) \\ g(-x) = g(x) \end{cases}$

On a :

- $g(x) + h(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} + \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$
$$= \frac{2 f(x)}{2} = f(x)$$

- $g(-x) = \dfrac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$

- $h(-x) = \dfrac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = \dfrac{f(-x) - f(x)}{2}$
$$= -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -h(x)$$

Ce qu'on voulait

D'où le resultat

On a bien montré que $\exists g, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : \begin{cases} f = g + h \\ g \text{ paire et } h \text{ impaire} \end{cases}$

Ainsi on a montré que $\boxed{\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \exists g, h\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \begin{cases} f = g + h \\ g \text{ paire} \\ h \text{ impaire} \end{cases}}$

VII Principes de récurrence

1) Recurrence simple

Theorème:

Soit $P(n)$ un predicat de $n \in \mathbb{N}$,
On a:
$$\left(P(0) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1) \right) \Rightarrow \left(\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \right)$$

OU

Soit $P(n)$ un predicat de $n \in \mathbb{N}$ tel que :

- $P(0)$ est V
- $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Alors, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$

Demonstration:

On raisonne par l'absurde

On suppose ainsi :

$$\text{non} \left(\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \right)$$

I.e on suppose : $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \text{non}(P_0)$

Fixons un tel $n_0 \in \mathbb{N}$

Mieux : Fixons $n_1 \in \mathbb{N}$ le plus petit $n \in \mathbb{N}$ tel que non$(P(n))$

On a $n_1 \geq 1$ car $P(0)$ est vrai

On a donc $n_1 - 1 \in \mathbb{N}$ et on peut considerer $P(n_1 - 1)$

On a $P(n_1 - 1)$ vraie : en effet n_1 est le plus petit $n \in \mathbb{N}$ tel que non$(P(n))$

Or, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Donc on a $P(n_1 - 1) \Rightarrow P(n_1)$. Comme $P(n_1 - 1)$ est vraie

on a $P(n_1)$ vraie. C'est absurde.

CCl : on a montré que $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ ☒

Exemple : Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $a \neq 1$

Montrons que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}}$

Procédons par recurrence

• On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: « $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$

• Montrons $P(0)$.

C'est ok car $\sum_{k=0}^{0} = a^0 = 1$

et car $\frac{a^{0+1} - 1}{a - 1} = 1$

R^* :
• $\forall a \in \mathbb{R}, a^0 = 1$
• d'où $0^0 = 1$

• Montrons l'hérédité

I.e mq $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$

Montrons que $P(n+1)$

On a $\sum_{k=0}^{n+1} a^k = \sum_{k=0}^{n} a^k + a^{n+1}$

Or, d'après $P(n)$, on a $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$

Donc $\sum_{k=0}^{n+1} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} + a^{n+1}$

$= \frac{a^{n+1}-1}{a-1} + \frac{(a-1)a^{n+1}}{a-1} = \frac{a^{n+1}-1+a^{n+2}-a^{n+1}}{a-1}$

$= \frac{a^{n+2}-1}{a-1}$

D'où $P(n+1)$

D'où l'hérédité

D'où le resultat par recurrence

2) Recurrence doubles

Theorème : Soit $P(n)$ un predicat de $n \in \mathbb{N}$ tel que :

- $P(0)$ et $P(1)$
- $\forall n \in \mathbb{N}, (P(n) \text{ et } P(n+1)) \Rightarrow P(n+2)$

Alors on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$.

<u>Demonstration :</u> Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $Q(n)$: " $P(n)$ et $P(n+1)$ "

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, Q(n)$

On procède par récurrence simple

- Montrons $Q(0)$

C'est évident par hypothèse : on a supposé $P(0)$ et $P(1)$ vrai

- Montrons l'hérédité

Ie mq $\forall n \in \mathbb{N}, Q(n) \Rightarrow Q(n+1)$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $Q(n)$

Montrons que $Q(n+1)$

Ie mq $P(n+1)$ et $P(n+2)$

On a $Q(n)$ ie on a $P(n)$ et $P(n+1)$

Ainsi on a déjà $P(n+1)$

On sait par hypothèse que $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, P(k) \text{ et } P(k+1) \Rightarrow P(k+2)}$

Donc on a $(P(n) \text{ et } P(n+1)) \Rightarrow P(n+2)$

Or on a $P(n)$ et $P(n+1)$. Donc l'on a $P(n+2)$

On a montré $Q(n+1)$

D'où l'hérédité

DLR, on a montré que $\forall n \in \mathbb{N}, Q(n)$ — $P(n)$ et $P(n+1)$

En particulier, on a montré que $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ ∎

Exemple :

On considère $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_1 = 3$ et

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n + 1$

On raisonne par récurrence double

- On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: " $u_n = 2^n + 1$ "

⚠ Écrire $P(n)$: « $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n + 1$ » est F $^{\infty}$

En effet, que serait alors $P(42)$? Ce serait :

$\forall 42 \in \mathbb{N}, u_{42} = 2^{42} + 1$: ce qui n'a $\emptyset$ sens

- D'abord $P(0)$ est vraie ; en effet, $2^0 + 1 = 2$
- De plus $P(1)$ est vraie ; en effet $2^1 + 1 = 3$
- Montrons l'hérédité double i.e. montrons que

$\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ et $P(n+1) \Rightarrow P(n+2)$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ et $P(n+1)$

Montrons que $P(n+2)$

On a :

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$$

$$= 3(\overbrace{2^{n+1}+1}^{P(n+1)}) - 2(\overbrace{2^n+1}^{P(n)})$$

$$= 2 \times 2^{n+1} + 1$$

$$= 2^{n+2} + 1$$

Donc $P(n+2)$ est vraie

• D'où l'hérédité double

Ainsi par récurrence double on a montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n + 1}$$

3) Principe de récurrence Forte

L'idée est que dans le principe de récurrence simple, on doit montrer $P(n+1)$ à l'aide $P(n)$.

• Dans le principe de récurrence double, pour montrer $P(n+1)$ on dispose d'une hypothèse supplémentaire : on suppose que $P(n)$ et $P(n-1)$

• Dans le principe de récurrence forte pour montrer que $P(n+1)$ est vrai, on suppose $P(0), P(1), P(2), \dots, P(n)$ ie on suppose que $\forall k \in \{0, ..., n\}, P(k)$. C'est donc simple.

Ainsi le principe de recurrence forte est plus puissant que le principe de recurrence simple.

Notation :

Pour $a, b \in \mathbb{Z}$, on note $[\![a, b]\!] := [a, b] \cap \mathbb{Z}$

De même on note $]\!]-\infty, b]\!]$, $[\![\,, +\infty[\![$, ect...

Exemple : $[\![1, 200]\!] = \{1, 2, 3, 4, 5, ..., 197, 198, 199, 200\}$

Théorème : Soit $P(n)$ un predicat de $n \in \mathbb{N}$ tel que

- $P(0)$ est vraie.
- $\forall n \in \mathbb{N}, \left(\forall k \in [\![0, n]\!], P(k)\right) \Rightarrow P(n+1)$

Alors, on a $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$

Demonstration :

On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $Q(n)$: « $\forall k \in [\![0, n]\!], P(k)$ »

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, Q(n)$ par recorrence simple

- Montrons $Q(0)$ ie montrons que $\forall k \in [\![0, 0]\!], P(k)$

Soit $k \in [\![0,0]\!]$. On a $k=0$. Or $P(0)$ est vraie

Donc $P(k)$ est vraie

Donc $Q(0)$ est vraie

• Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $Q(n) \Rightarrow Q(n+1)$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $Q(n)$

Montrons que $Q(n+1)$ → R* : $Q(n+1)$ est une assertion

Ie montrons que $\forall k \in [\![0, n+1]\!]$, $P(k)$

Soit $k \in [\![0, n+1]\!]$

Montrons que $P(k)$

On distingue deux cas

• Cas 1 : $k \in [\![0, n]\!]$

Comme on a supposé $Q(n)$, on a $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $P(k)$

DLR dans ce cas

• Cas 2 : on suppose que $k = n+1$

On sait que $Q(n)$ est vraie ie soit que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, P(k) vraie

Or ~~de~~ d'après les hypothèses du théorème, on a

$(\forall k \in [\![0, n]\!], P(k)) \Rightarrow P(n+1)$

Donc $P(n+1)$ est vraie

Dans tous les cas, on a $P(k)$

On a montré que $\forall k \in [\![0, n+1]\!], P(k)$

D'où l'hérédité

Ainsi, par récurrence, on a montré que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, Q(n)}$

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que $Q(n)$ est vraie on a

$$\forall k \in [\![0, n]\!], P(k)$$

Or $n \in [\![0, n]\!]$. Donc $P(n)$ est vraie

On a bien montré que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, P(n)}$

Exemple :

Soit $b \in \mathbb{N}^*$

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, \exists q, r \in \mathbb{Z} : \begin{cases} n = bq + r \\ 0 \leq r < b \end{cases}$

On procède par récurrence forte

• On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: " $\exists\, q, r \in \mathbb{Z} : \begin{cases} n = bq + r \\ 0 \leq r < b \end{cases}$

• Initialisation : montrons que $P(0), P(1), \dots, P(b-1)$

Soit $n \in [\![0, b-1]\!]$ ① : n est son propre reste

On pose $q := 0$ et $r := n$

On a $q, r \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq r < b$ et $n = bq + r$

• Hérédité forte

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, \left[(\forall k \in [\![0, n]\!], P(k)) \right] \Rightarrow P(n+1)$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $P(k)$

Montrons que $P(n+1)$

On distingue deux cas

• Cas 1 : $n+1 \in [\![0, b-1]\!]$

On vient de voir que dans ce cas, $P(n+1)$ est vrai

• Cas 2 : $n+1 \geq b$

On pose $k := (n+1) - b$

On a $k \geq 0$; de on a $b \geq 1$

Donc $-b \leq -1$ et donc $(n+1)-b \leq (n+1)-1$

ie $(n+1)-b \leq n$. Ainsi, on a, $k \in [\![0, n]\!]$

Donc par hypothèse, $P(k)$ est vraie

R^* : c'est une $\exists$-assertion

Fixons donc $q, r \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\begin{cases} k = bq + r \\ 0 \leq r < b \end{cases}$$

On a donc $n+1-b = bq + r$

Donc $n+1 = b(q+1) + r$

Donc, on a montré que $\exists Q, R \in \mathbb{Z} : \begin{cases} n+1 = bQ + R \\ 0 \leq R < b \end{cases}$

Ie on a montré que $P(n+1)$

Dans tous les cas on a montré que $P(n+1)$

On a montré $P(n+1)$

D'où l'hérédité forte

D'où le résultat par récurrence forte

Application

Théorème : soit $b \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$\forall a \in \mathbb{Z}, \exists! (q,r) \in \mathbb{Z}^2 : \begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < b \end{cases}$$

Démonstration.

- L'unicité a déjà été montrée
- Soit $a \in \mathbb{Z}$. On distingue 2 cas

  - Cas 1 : $a \geq 0$

    On vient de montrer que $\exists q, r \in \mathbb{Z} : \begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < b \end{cases}$

  - Cas 2 : on suppose que $a < 0$

    On pose $a' = a + b|a|$

    On a. $a' = a - ba = -(ba - a)$

    $= -a(b-1)$

    $= |a|(b-1)$

    Comme $b \in \mathbb{N}^*$, on a $b \geq 1$ et donc $b - 1 \geq 0$; comme $|a| \geq 0$, On a $a' \geqslant 0$, et $a' \in \mathbb{Z}$.

D'après le cas 1, fixons $q, r \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\begin{cases} a' = bq + r \\ 0 \leqslant r < b \end{cases}$$

On a donc $a + b|a| = bq + r$ ie $a = b(q - |a|) + r$

DLR

Corollaire

Soit $b \in \mathbb{N}^*$ Alors,

$$\forall a \in \mathbb{N}, \exists ! (q, r) \in \mathbb{N}^2 : \begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leqslant r < b \end{cases}$$

Demonstration

- L'unicité découle de l'unicité précédente AC

- Existence :

Soit $a \in \mathbb{N}$, d'après le résultat précédent, fixons $q, r \in \mathbb{Z}$

tq $a = bq + r$ et $0 \leqslant r < b$

- Déjà on a $r \in \mathbb{N}$

· Mq $q \geq 0$

On raisonne par l'absurde et on suppose que $q < 0$ ie osq $q \leq -1$

Ĉ $b \geq 0$, on a $bq \leq -b$

Donc on a $bq + r \leq -b + r$; comme $r \leq b-1$, on a

donc $bq + r \leq -b + b - 1 = -1$; donc $a \leq -1$

c'est absurde donc $q \geq 0$

DLR

exo Soit $b \in \mathbb{Z}$ non nul

Montrons que $\forall a \in \mathbb{Z}, \exists! (q, r) \mathbb{Z}^2 : \begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < |b| \end{cases}$

⚠ On n'écrit pas $\mathbb{Z}^*$; on écrit $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$

4) Autres types de récurrence

· Au lieu de commencer à 0, on peut commencer à 1, 2 ect...

· On peut faire des récurrences finies.

· On peut faire des recurrences descendantes ; finies descendantes (cas le + fréquent)

· cf TD.