Chapitre 2 : Théorie des ensembles

I - Ensembles

Remarque 1 :

On considère l'ensemble

$$E_0 := \{[0,1]; [0,1[;]0,1[;]0,1]\}$$

On a $[0,1] \in E_0$

A-t-on $[0,1] \subset E_0$?

Ie a-t-on $\forall x \in [0,1], x \in E_0$

Par exemple, on a $\frac{1}{2} \in [0,1]$.

A-t-on $\frac{1}{2} \in E_0$?

Est-ce que $\frac{1}{2}$ est un des objets regroupés dans E_0 ?

Les objets regroupés dans E_0 sont :

- $[0,1]$, $]0,1]$, $]0,1[$, $[0,1[$

Non $\frac{1}{2}$ n'est pas un de ces objets

Donc $\frac{1}{2} \notin E_0$, donc $\exists x_0 \in [0,1] : x_0 \notin E_0$

Ie on a $\text{non}(\forall x \in [0,1], x \in E_0)$

Ainsi on a :

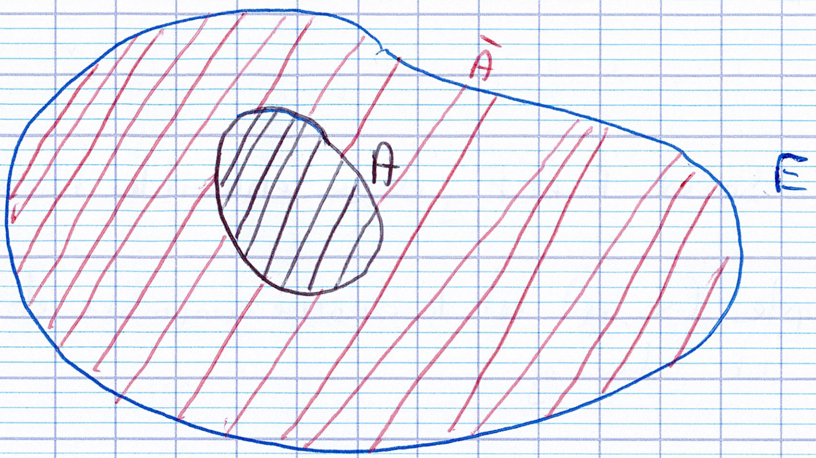
non $([0,1] \subset E_0)$

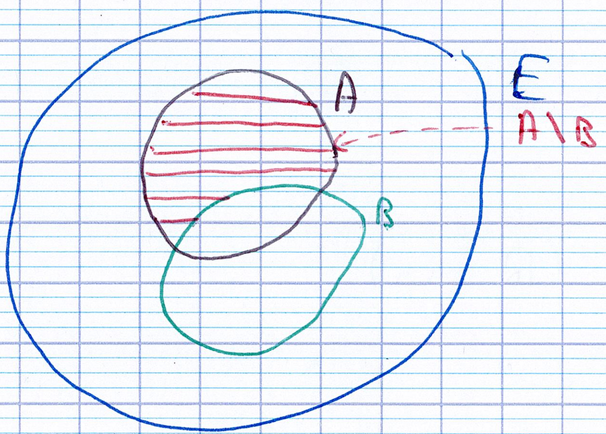
Donc $[0,1]$ n'est pas inclus dans E_0

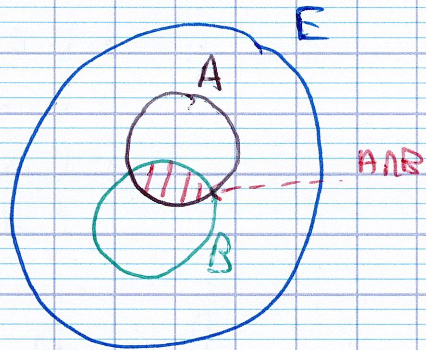
Bilan : $[0,1] \not\in E_0$ mais $[0,1] \not\subset E_0$

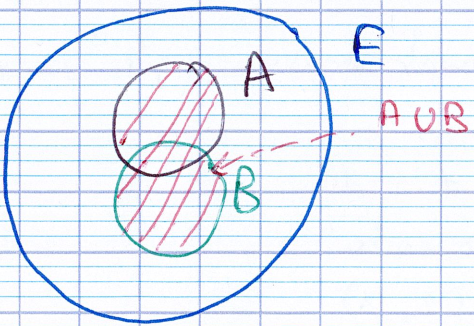
~~Bilan $[0,1] \in F_0$ mais $[0,1] \notin F_0$~~

5) Dessins









III - Deux constructions

1) Produits cartesiens

a) definitions et remarques

Def° : Soient x et y deux objets mathematiques

Le couple (x, y) est la donnée conjointe et dans cet ordre de x et de y

Ex :
- $(1, 2)$
- $(0, 0)$
- $(\sin, \cos)$
- $(\mathbb{R}, \mathbb{C})$
- $(1, \mathbb{R})$; $(\mathbb{R}, \exp)$

Remarques

- La repetition d'un element dans un couple "compte", contrairement aux ensembles

  Par exemple $(1,1) \neq (1)$
- De meme, l'ordre "compte"

  Ex : $(1, 2) \neq (2, 1)$
- Dans le couple (x, y) : x est appelé première coordonnées du couple ; y est appelé deuxieme coordonnée du couple

- ⚠ Ne pas confondre : l'ensemble $\{x, y\}$ et le couple (x, y)

- On a^{①} $(x, y) = (a, b) \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$

Def°: Soient E et F des ensembles.
Le produit cartesien de E par F noté $E \times F$, lu "E croix F" est l'ensemble des couples (x, y) pour x parcourant E et y parcourant F.
On a : $E \times F = \{(x, y) ; x \in E \text{ et } y \in F\}$

Exemples :

- $(1, 2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ car $1 \in \mathbb{N}$ et $2 \in \mathbb{N}$
- $(1, 2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ car $1 \in \mathbb{R}$ et $2 \in \mathbb{R}$
- $(1, 2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$
- $(1, 2) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{C}$ car $1 \in \mathbb{Q}$ et $2 \in \mathbb{C}$
- $(1, 2) \in \{1\} \times \{2\}$; en effet $1 \in \{1\}$ et $2 \in \{2\}$. ~~Mieux~~
  Mieux : $(1, 2)$ est l'unique élement de $\{1\} \times \{2\}$

  $\{1\} \times \{2\} = \{(1, 2)\}$

Remarques :

- A-t-on $E \times F = F \times E$? non en general
  Contre-exemple :
  On a $\{1\} \times \{2\} = \{(1, 2)\}$ et $\{2\} \times \{1\} = \{(2, 1)\}$

  et $\{(1, 2)\} \neq \{(2, 1)\}$ car $(1, 2) \neq (2, 1)$ car $1 \neq 2$

exo Soient E, F
L'équivalence $E \times F = F \times E \Leftrightarrow E = F$ est fausse. Pourquoi ?

Remarque :

Si E est un ensemble $E \times \emptyset = \emptyset \times E = \emptyset$

Notation : Si E est un ensemble, on pose $E^2 := E \times E$
C'est le carré cartésien de E.
Ex : $\mathbb{R}^2$ qui est l'ensemble des couples (x, y) dont les coordonnées sont réelles

Generalisation ⓣ

- triplet (x, y, z)
- quadruplet (x, y, z, t)
- $E \times F \times G = \{ (x, y, z) ; x \in E \text{ et } y \in F \text{ et } z \in G \}$

- $E \times F \times G \times H$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$
  Le n-uplet $(x_1, \dots, x_n)$ est la donnée conjointe et dans cet ordre des éléments $x_1, \dots, x_n$
  Si $E_1, \dots, E_n$ sont des ensembles, on notera $E_1 \times \dots \times E_n$ l'ensemble des n-uplets $(x_1, \dots, x_n)$ tels que $x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n$

Ex :

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$
  On a $(1, 2, 3, \dots, n) \in \mathbb{R}^n$

où on a noté $E^n := \underbrace{E \times \dots \times E}_{n \text{ fois}}$ pour tout ensemble E

On a $(\sqrt{1}, \sqrt{2}, \dots, \sqrt{n}) \in \mathbb{R}^n$

On a $(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n \text{ fois}}) \in \mathbb{R}^n$

- On a $(1, i, 3) \in \mathbb{C}^3$
- On a $(\sqrt{2}, \sqrt{6}, \sqrt{2}+\sqrt{3}) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^3$

- <u>Question ?</u> : a-t-on $(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})^3 = \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{Q}^3$

On a $(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})^3 \subsetneq \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{Q}^3$

On considère $x_0 := (1, 1, \sqrt{2})$

On a $x_0 \in \mathbb{R}^3$ mais $x_0 \notin \mathbb{Q}^3$ car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Donc $x_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{Q}^3$

De plus, on a x_0 $(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})^3$.

En effet, on a $1 \notin \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

<u>Ccl</u> : $\exists\, x_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{Q}^3 : x_0 \notin (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})^3$

ie on a non$\left(\forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{Q}^3, x \in (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})^3\right)$

ie on a non$\left(\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{Q}^3 \subset (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})^3\right)$

Ie on a $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{Q}^3 \not\subset (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})^3$

Mq $(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})^3 \subset \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{Q}^3$

| Soit $(x, y, z) \in (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})^3$. On a $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, on a

$y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Donc $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

De plus on a $(x, y, z) \notin \mathbb{Q}^3$ car $x \notin \mathbb{Q}$

Donc $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{Q}^3$

D'où l'inclusion

• Ccl On a $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^3 \subset \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{Q}^3$; on a $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{Q}^3 \not\subset (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^3$.

Donc on a $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{Q}^3 \neq (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^3$. D'où

$$\boxed{(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^3 \subsetneq \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{Q}^3}$$

b) cardinal

Prop : Soient E, F ensembles. Alors :

1) $\left.\begin{array}{l} E \text{ fini} \\ F \text{ fini} \end{array}\right\} \Rightarrow E \times F$ fini

2) Dans ce cas, on a $|E \times F| = |E| \cdot |F|$

Demonstration

1) cf chapitre denombrement ▲

2) On suppose E et F fini. Posons $n := |E|$ et $m := |F|$

Ecrivons $E = \{a_1, \dots, a_n\}$ et $F = \{b_1, \dots, b_m\}$

Pour construire un element de $E \times F$, on procede comme suit :

- on choisit la premiere coordonnée de cet élément dans l'ensemble E : on a n choix possibles
- on choisit la 2^e coordonnée dans F : on a m choix possibles

Ces choix étant independants et le processus de construction étant exhaustif et sans redondance, on a :

$$|E \times F| = n \times m = |E| \times |F|$$

2) Ensemble des parties

a) Definition et exemples

Def° : soit E un ensemble. L'ensemble des parties de E, notée $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble dont les éléments sont les parties de E

Exemples :

On a $\mathcal{P}(\{1,2\}) = ?$

Quelles sont les parties de $\{1,2\}$? ie quels sont les ensembles X tq $X \subset \{1,2\}$?

Ce sont : $\{1\}$, $\{2\}$, $\emptyset$, $\{1,2\}$

Donc $\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

Rq ! :

• On sait que pour tout ensemble E, on a $\boxed{\emptyset \subset E}$

• Ici, on a $\emptyset$ est une partie $\{1,2\}$; ie on a

$$\boxed{\emptyset \in \mathcal{P}(\{1,2\})}$$

• De façon generale, pour tout ensemble E, ĉ on a $\emptyset \subset E$, on a : "$\emptyset$ est une partie de E" et donc

$$\boxed{\emptyset \in \mathcal{P}(E)}$$

R+

• Il faut bien comprendre que $\boxed{A \subset E \text{ et } A \in \mathcal{P}(E)}$ sont des assertions "exactement synonymes"

En revanche, on n'a pas $\emptyset \in E$ pour tout ensemble

Contre-exemple

• $\emptyset \notin \{1,2\}$

• $\emptyset \notin \emptyset$: en effet, quelque soit l'objet mathematique x, on a $x \notin \emptyset$. En particulier $\emptyset \notin \emptyset$

• On a $\boxed{\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}}$

~~Demonstration :~~

Demonstration

On procède par double inclusion

- Mq $\{\emptyset\} \subset \mathcal{P}(\emptyset)$

Ie mq $\forall x \in \{\emptyset\}, x \in \mathcal{P}(\emptyset)$

Ie mq $\boxed{\emptyset \in \mathcal{P}(\emptyset)}$ ie mq $\emptyset \subset \emptyset$

On a vu que pour tout ensemble E on a $\emptyset \subset E$

En particulier $\emptyset \subset \emptyset$

On a bien montré que $\{\emptyset\} \subset \mathcal{P}(\emptyset)$

- Mq $\mathcal{P}(\emptyset) \subset \{\emptyset\}$

Ie mq $\forall A \in \mathcal{P}(\emptyset), A \in \{\emptyset\}$

Ie mq $\forall A \in \mathcal{P}(\emptyset), A = \emptyset$

Soit $A \in \mathcal{P}(\emptyset)$

On a donc $\boxed{A \subset \emptyset}$

Or on a (toujours) : $\boxed{\emptyset \subset A}$

Ainsi par double inclusion, c $\emptyset \subset A$ et $A \subset \emptyset$, on a $A = \emptyset$

D'où $\mathcal{P}(\emptyset) \subset \{\emptyset\}$

CCl : on a mq $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

• Si a est un objet mathématique, on a :

$$\mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$$

• Donc on a $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

• On a $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

Si a et b sont deux objets mathématiques différents, on a

$$\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\})$$

Definition

Soit E un ensemble et soit $k \in \mathbb{Z}$

On note $\mathcal{P}_k(E)$ l'ensemble des parties finies de E de cardinal k

Exemples:

• Pour tout ensemble E, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a :

$$k < 0 \Rightarrow \mathcal{P}_k(E) = \emptyset$$

• On a $\mathcal{P}_2(\{1, 2\}) = \{\{1, 2\}\}$

• On a $\mathcal{P}_1(\{1, 2\}) = \{\{1\}, \{2\}\}$

. Pour tt ensemble E, on a $\mathcal{P}_0(E) = \{\emptyset\}$

b) cardinal

Prop : Soit E un ensemble. Alors :

1) E fini $\Rightarrow \mathcal{P}(E)$ fini
2) Dans ce cas, on a : $|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}$

D/

1) Voir ch «denombrement»

2) On pose $n := |E|$ et on ecrit $E = \{a_1, \dots, a_n\}$

Pour construire une partie X de E, on procède c suit.

1°) On repond à la question : "a-t-on $a_1 \in X$?"
On a 2 reponses possibles.
2°) On repond à la question "a-t-on $a_2 \in X$?" ; on a deux reponses possibles

⋮

n°) De même pour a_n

Le procede de construction étant exhaustif et sans redondance ~~...~~ on a :

$$|\mathcal{P}(E)| = \underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_{n \text{ fois}} = 2^n = 2^{|E|}$$

IV Familles de parties

1) Familles

a) définition

Def : Soit E un ensemble et soit I un ensemble non vide. Une famille d'éléments de E indexée par I est la donnée, pour tout $i \in I$, d'un élément x_i de E.

On note $(x_i)_{i \in I}$ cette famille

Exemple

- $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ $(I = \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R})$
- $(\exp(n))_{n \in \mathbb{N}}$ $(I = \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{R})$
- $\left(\frac{1}{x}\right)_{x \in \mathbb{R}^*}$ $(I = \mathbb{R}^*$ et $E = \mathbb{R})$
- $\left(\frac{1}{z}\right)_{z \in \mathbb{C}^*}$ $(I = \mathbb{C}^*$ et $E = \mathbb{C})$
- $\left(e^{i\frac{\pi}{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ $(I = \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{C})$
- $(5)_{n \in \mathbb{N}}$: c'est une famille constante
- $((n, n+1))_{n \in \mathbb{N}}$ $(I = \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{N}^2)$
- $([0, n[)_{n \in \mathbb{N}}$ ici $I = \mathbb{N}$ et $E = \mathcal{P}(\mathbb{R})$
- * $(\mathcal{P}_k(\mathbb{N}))_{k \in \mathbb{N}^*}$ ici $I = \mathbb{N}^*$ et $E = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$

Notations

L'ensemble des familles d'élements de E indexées par I est noté $\underline{E^I}$

Vocabulaire

Quand $I = \mathbb{N}$, on parle de suite d'élements de E

Plus precisement : $E^{\mathbb{N}}$ est l'ensemble des suites d'élements de E,
ie des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telque $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in E$

Exemple

- $([0, n])_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$
- $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est l'ensemble des suites réelles
- $(2^n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
- $(4^{n-2})_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
- On a aussi $(2n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$
- $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ est l'ensemble des suites d'entiers naturels
- $([\![0, n]\!])_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$
- Pour $a \in \mathbb{R}$, notons $a^{\bullet} := (a^n)_{n\in\mathbb{N}}$

On a donc $\forall a \in \mathbb{R}$, $a^{\bullet} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (ex : $2^{\bullet} = (1, 2, 4, 8, 16 \ldots)$)

On peut considérer $(a^\bullet)_{a\in\mathbb{R}}$

On a $(a^\bullet)_{a\in\mathbb{R}} \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{R}}$

- $([a,b])_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})^{\mathbb{R}^2}$

b) cardinal

Prop : ⊕

1) E, I finie $\Rightarrow E^I$ finie
2) Dans ce cas, on a $|E^I| = |E|^{|I|}$

Demonstration

1) cf ⊕ loin
2) Notons ~~(x := $|E|$)~~ et $p := |I|$

Ecrivons $I = \{i_1, \dots, i_p\}$

Pour construire une famille $(x_i)_{i\in I} \in E^I$, on procède comme suit :

1°) On choisit ~~une~~ un element de E à associer à l'indice i_1
On a $|E|$ choix possibles

2°) On choisit un element à associer à l'indice i_2 : on a $|E|$ choix possibles
(...)
p°) De même pour i_p

Ce procédé de construction étant exhaustif et sans redondance, on a :

$$|E^I| = \underbrace{|E| \times |E| \times \dots \times |E|}_{p \text{ fois}}$$

$$= |E|^p = |E|^{|I|}$$

2) Intersections et unions de familles de parties

a) cadre

Soit E un ensemble.
Soit I un ensemble non vide
On se donne une famille de partie de E indexée par I

Ie soit $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{P}(E)^I$

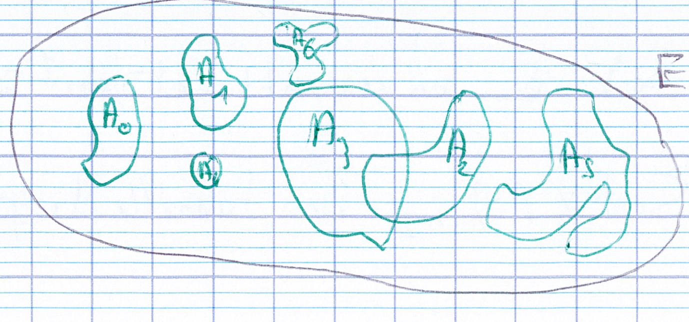
b) union

Def° : L'union des elements de la famille $(A_i)_{i \in I}$, notée $\bigcup_{i \in I} A_i$,

est la partie de E définie par :

$$\boxed{\bigcup_{i \in I} A_i := \left\{ x \in E \;\middle|\; \exists i \in I : x \in A_i \right\}}$$

d° ($I = \mathbb{N}$)



c) intersection

Def : l'intersection des éléments de $(A_i)_{i\in I}$, notée $\bigcap_{i\in I} A_i$, est la partie de E définie par :

$$\boxed{\bigcap_{i\in A_i} A_i = \{x\in E \mid \forall i\in I, x\in A_i\}}$$

Rq : si $I = \mathbb{N}$ et si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}(E)^{\mathbb{N}}$, on note

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \text{ et } \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

d) exemples

- $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [0,n] = \mathbb{R}_+$ rq : $([0,n])_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de partie de $\mathbb{R}$ pour l'inclusions
- $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [n;+\infty[= \mathbb{R}_+$ rq : car c'est une suite decroissant pour l'inclusion
- $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [n;+\infty[= \emptyset$
- $\bigcup_{a\in]0,1]} [a,1] =]0,1]$

3) Partitions et recouvrements disjoints

C'est du vocabulaire

Soit E un ensemble et soit I un ensemble non vide

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de partie de E ie soit $(A_i)_{i\in I} \in \mathcal{P}(E)^I$

Déf :

1) On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est un recouvrement disjoint de E

$\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\bigcup_{i\in I} A_i = E$ et $\forall i, j \in I,\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$

2) On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de E

$\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\begin{cases} (A_i)_{i\in I} \text{ est un recouvrement disjoint de } E \\ \forall i \in I,\ A_i \neq \emptyset \end{cases}$