Chapitre 4 : Thechniques algébriques (Σ)

I. Coefficients binomiaux

1) Definition

a) definition

Def : Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $k \in \mathbb{Z}$.

Le coefficient binomial d'indices n et k, noté $\binom{n}{k}$

est defini par $\binom{n}{k} := \boxed{\left|\mathcal{P}_k(\llbracket 1, n \rrbracket)\right|}$

En fait on retiendra que $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties

à k élements d'un ensemble à n éléments

Exemples :

- Calculons $\binom{4}{2}$. On calcule avant $\mathcal{P}_2(\llbracket 1, 4 \rrbracket)$

On a

idée R* : être methodique

$$\mathcal{P}_2(\llbracket 1, 4 \rrbracket) = \left\{ \begin{array}{l} \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\} \\ \{3,4\} \end{array} \right\}$$

Ainsi $\binom{4}{2} = 6$

b) premières propriétés

Fait ①: $\binom{n}{1} = n$

D/ En effet : $\mathcal{P}_1([\![1,n]\!]) = \{\{i\} \,;\, i \in [\![1,n]\!]\}$

Donc $|\mathcal{P}_1([\![1,n]\!])| = n$: il y a n singletons dans $\mathcal{P}_1([\![1,n]\!])$

Fait ①: $\binom{n}{0} = 1$

D/ On a : $\mathcal{P}_0([\![1,n]\!]) = \{\emptyset\}$

Donc $|\mathcal{P}_0([\![1,n]\!])| = |\{\emptyset\}| = 1$

Fait ① ①

Ex :

1. $\forall k < 0, \binom{n}{k} = 0$ • $\binom{4}{-1} = 0$
2. $\forall k > n, \binom{n}{k} = 0$ • $\binom{4}{7} = 0$

D/ 1) En effet ①, si $k < 0$ alors $[\![1,n]\!]$ ne possède pas de partie de cardinal k.

2) De m̄, si $k > n$, $[\![1,n]\!]$ ne possède pas de partie à k éléments

Proposition ①

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

D/ Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $k \in \mathbb{Z}$

On distingue 3 cas

- Cas 1 : $k < 0$

  On a alors $n-k > n$

  Ainsi, on a $\binom{n}{k} = 0$ et $\binom{n}{n-k} = 0$ d'après ce qui précède

- Cas 2 : $k > n$: c'est pareil
  (On a $n-k < 0$)

- Cas 3 : $k \in [\![0, n]\!]$: c'est le cas intéressant

  Pour choisir une partie à k élément de $[\![1, n]\!]$, on choisit les éléments qui ne sont pas dans cette partie.

  Combien y a-t-il de tels éléments ? Il y en a $n-k$

  Combien y a-t-il de façon de choisir une partie à $n-k$ éléments de $[\![1, n]\!]$? Par définition il y en a $\binom{n}{n-k}$

  Donc $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

2) Formule de Pascal

a) La formule

Théorème ①

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} \quad (*)$$

D/ Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $k \in \mathbb{Z}$

• Commençons par exclure les cas peu intéressants

• Si $k+1 > n+1$, alors

$*$ $\binom{n+1}{k+1} = 0$

$*$ $\binom{n}{k+1} = 0$ car $k+1 > n$

$*$ $\binom{n}{k} = 0$ car $k > n$

Dans ce cas $(*)$ est vraie

Si $k = n$, c'est ok car $(*)$ devient alors

$$1 = 0 + 1 \qquad \left(Rq ① : \binom{n}{n} = 1\right)$$

Si $k = -1$, $(*)$ devient $\binom{n+1}{0} = \binom{n}{0} + \binom{n}{-1}$ ie $1 = 1 + 0$

• Si $k < -1$: $(*)$ devient $0=0+0$

On suppose $k \in [\![0, n-1]\!]$

On considère E un ensemble à $n+1$ éléments.

Fixons $a_0 \in E$ un element

Comptons le nombre de parties de E à $(k+1)$ élements
(Rq : on sait qu'il y en a $\binom{n+1}{k+1}$)

Il y a 2 types (disjoints) de telles parties.
1°) Les parties A de E (à $(k+1)$ élements) qui contiennent a_0. Combien y a-t-il de telles parties?

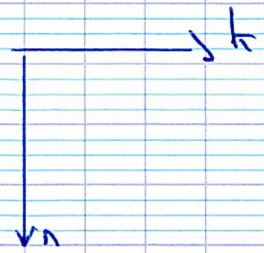
Pour construire une telle partie, on choisit une partie A' à k elements de $E \setminus \{a_0\}$: il y a $\binom{n}{k}$ choix possibles car $|E \setminus \{a_0\}| = n$ et ce procédé de construction est exhaustif et sans redondance : il y a $\binom{n}{k}$ telles parties

2°) Les parties A de E (à $(k+1)$ elements) qui ne contiennent pas a_0. Idée : c'est exactement les parties à $(k+1)$ élements de $E \setminus \{a_0\}$. Il y en a $\binom{n}{k+1}$.

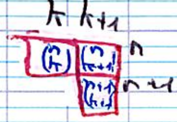
Ainsi on a $\boxed{\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}}$

b) Triangle de Pascal

On repère $\mathbb{N}^2$ par



La formule de Pascal se visualise par :



D'où :

	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

3) Expression factorielle des $\binom{n}{k}$

a) factorielles

Def° $n! := 1 \times 2 \times \dots \times n$

$0! := 1$

b) La formule

Prop : On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in [\![0, n]\!], \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Rq : a priori on ne sait que $\frac{n!}{k!(n-k)!} \in \mathbb{N}$

A priori, c'est dans $\mathbb{Q}$

D/ Idée : rec + Pascal. rec sur n

On raisonne par récurrence

- Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$: « $\forall k \in [\![0, n]\!], \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ »
- Mq $P(0)$ ie mq $\forall k \in [\![0, 0]\!], \binom{0}{k} = \frac{0!}{k!(0-k)!}$

C'est ok car $\binom{0}{0} = 1$ et $\frac{0!}{0!\,0!} = \frac{1}{1} = 1$

D'où $P(0)$

- **Hérédité**

Mq $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $P(n)$

Mq $P(n+1)$ ---> $R^{\wedge}$ C'est une $\forall$ assertion

Soit $k \in [\![0, n+1]\!]$

Mq $\binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}$

On distingue 2 cas

• Cas 1 : $k = 0$

C'est ok car $\binom{n+1}{0} = 1$

et $\frac{(n+1)!}{0!(n+1-0)!} = \frac{(n+1)!}{(n+1)!} = 1$

• Cas 2 $k \geq 1$ et $k \leq n$

D'après la f^le de pascal, on a

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Or ε $1 \leq k \leq n$, on a $0 \leq k-1 \leq n$ et $0 \leq k \leq n$

D'après $P(n)$, on a

$$\begin{cases} \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \end{cases}$$

Donc

$$\binom{n+1}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}$$

$$= \frac{n!(n-k+1)+n!k}{k!(n-k+1)!}$$

$$= \frac{n!(n-k+1+k)}{k!(n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}$$

Ce qu'on voulait

- Cas 3 : $k = n+1$

C'est ok car $\binom{n+1}{n+1} = 1$ et $\frac{(n+1)!}{(n+1)!(n+1-(n+1))!} = 1$

D'où l'hérédité

DLR

c) Forme explicite !!

En pratique, il vaut mieux retenir cette forme là :

Ⓣ $$\binom{n}{k} = \frac{\overbrace{n \times (n-1) \times \dots \times (n-?)}^{k \text{ facteurs}}}{k!}$$

Rq. C'est $\frac{(n-0)(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))}{k!}$

ie $\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$

D/ En effet $\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \dots \times (n-k) \times (n-k+1)(n-k+2)\dots n}{1 \times 2 \times 3 \dots \times (n-k)}$

Applications

- $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$
- $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$
- $\binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$
- $\frac{\binom{n}{3}}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

d/ $\frac{1}{6} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{2^n} \longrightarrow 0$ par croissance comparée $\blacksquare$

4) Formule des capitaines d'équipe

Prop :

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

(exo) Mq cette formule avec les factorielles

D/ Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $k \in [\![0,n]\!]$

On est coach. On dispose d'un « pool » (d'un ensemble) de n joueurs. Une équipe est la donnée de k joueurs dont l'un est capitaine d'équipe.

Comptons le nombre d'équipe

__1ère façon__

Pour construire une équipe, on procède c̄ suit

1°) on choisit k joueurs : on a $\binom{n}{k}$ choix possibles

2°) On choisit un capitaine parmi ces k joueurs : il y a k choix possibles

Ce procédé de construction étant exhaustif et sans redondance il y a $k\binom{n}{k}$ équipes

2ème façon

Pour construire une équipe, on procède ĉ suit :

1°) On désigne un capitaine : il y a n choix possibles
2°) Le capitaine choisit les $(k-1)$ autres joueurs de l'équipe parmis les $(n-1)$ joueurs restants. il y a $\binom{n-1}{k-1}$ choix possibles

Ce procédé de construction étant exhaustif et sans redondance il y a $n\binom{n-1}{k-1}$ ~~choix~~ ~~po~~ équipes possibles

5) F^le d'absorption !!

$$\boxed{\text{Prop} \quad \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}}$$

D/ D'après ce qui précède en remplaçant k par $k+1$ et n par $n+1$ on a

$$(k+1)\binom{n+1}{k+1} = (n+1)\binom{n}{k} \quad \text{DLR} \ \blacksquare$$

II) Sommes, Σ

1) Notation

a) Somme entre deux indices entiers

Soient $p, q \in \mathbb{Z}$ tels que $p \leq q$.
Soient $a_p, a_{p+1}, \dots, a_q \in \mathbb{C}$

Notation

On note $\displaystyle\sum_{i=p}^{q} a_i := a_p + a_{p+1} + \dots + a_q$

Rq : ici, i est muette. On a donc

$$\sum_{i=p}^{q} a_i = \sum_{j=p}^{q} a_j = \sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{l=p}^{q} a_l = \dots$$

Fait :

Dans $\displaystyle\sum_{i=p}^{q} a_i$, il y a $(q-p+1)$ thermes

D/ ⊕ loin ▨

Applications ⊕ (R*)

- dans $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i$: il y a $(n+1)$ termes
- dans $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$: il y a n termes

Ex :

- $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\dots+n$
- $\sum_{k=0}^{n} a^k = 1+a+a^2+\dots+a^n$

b) Sommes indexées par un ensemble fini

Soit I un ensemble fini

Soit $(a_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$: une famille de nb complexe indexée par I

Notons $m := |I|$ et écrivons $I = \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$

Def° : La somme de la famille $(a_i)_{i\in I}$ notée $\sum_{i\in I} a_i$ est le nombre complexe défini par :

$$\boxed{\sum_{i\in I} a_i := a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_m}}$$

Rq : • L'écriture $a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_m}$ est acceptable car $+$ est associative ie car on a $\forall a,b,c \in \mathbb{C},\ a+(b+c) = (a+b)+c$.

Cela entraine que le parenthesage dans $a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_m}$ n'est pas necessaire

• Si on considère une autre numerotation $I = \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$ de I

le resultat sera le même : on a

$a_{i_1}+a_{i_2}+\dots+a_{i_n}=a_{j_1}+a_{j_2}+\dots+a_{j_n}$. Cela fonctionne car

$+$ est commutative ie car $\forall a,b\in\mathbb{C}$, $a+b=b+a$

Exemples

- On considère $I := MPSI_3$

On considère la famille $(a_i)_{i\in I}$ définie par :

$$a_i := \text{âge de } i \quad \text{pour } i\in I$$

On a :

$$\sum_{i\in MPSI_3} a_i = a_{Hyacinthe}+a_{Alexis}+a_{Yanis, i}+\dots+a_{Zoran}$$

$\hat{C}$ $\forall x\in MPSI_3$, $16\leq a_x\leq 19$

$$\sum_{i\in MPSI_3} 16 \leq \sum_{i\in MPSI_3} a_i \leq \sum_{i\in MPSI_3} 19$$

Ie on a $\boxed{47\times 16 \leq \sum_{i\in MPSI_3} a_i \leq 47\times 19}$

- $\sum_{i\in[\![1,115]\!]} (1+2i)^2$

- $\sum_{A\in\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))} \mathrm{card}(A) = |\emptyset| + |\{\emptyset\}| = 1$

(Rq : on a $|\emptyset|=0$; DALC : $|\mathcal{P}(\emptyset)|=2^0=1$ Donc, DALC $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))|=2$)

(rq : $\mathcal{P}(\emptyset)=\{\emptyset\}$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))=\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$)

• Soit $n \in \mathbb{N}$

Pour $A \subset [\![0,n]\!]$, notons

$$S_A := \sum_{k \in A} k$$

(ex : $S_{\{1,2\}} = 1+2$, $S_{[\![0,n]\!]} = 0+1+\dots+n$, etc)

AC On dispose donc de

$$(S_A)_{A \in \mathcal{P}([\![0,n]\!])} \in \mathbb{R}^{\mathcal{P}([\![0,n]\!])}$$

qu'on note aussi $(S_A)_{A \subset [\![0,n]\!]} \in \mathbb{R}^{\mathcal{P}([\![0,n]\!])}$

Ĉ $\mathcal{P}([\![0,n]\!])$ est fini (il est de cardinal 2^{n+1})

on peut poser

$$T_n := \sum_{A \in \mathcal{P}([\![0,n]\!])} S_A$$

qu'on note aussi $\sum_{A \subset [\![0,n]\!]} S_A$

Remarques

(T) Dans $\sum_{i \in I} a_i$, la variable i est muette. On a :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in I} a_j = \dots$$

• (T) Ainsi $T_n = \sum_{B \subset [\![0,n]\!]} S_B = \sum_{C \subset [\![0,n]\!]} S_C$

• On dispose ainsi de $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

• Par convention, une somme vide est nulle

Ie ① $\boxed{\sum_{i\in\emptyset} a_i = 0}$

• Ainsi : $T_1 = \underbrace{\sum_{A\subset[\![0,1]\!]}}_{\text{il y a 4 elements}} S_A = \underbrace{S_\emptyset}_{=0 \text{ par convention}} + \underbrace{S_{\{0\}}}_{=0} + \underbrace{S_{\{1\}}}_{=1} + \underbrace{S_{\{0,1\}}}_{=1} = 2$

• Et

$T_2 = S_\emptyset + S_{\{0\}} + S_{\{1\}} + S_{\{2\}} + S_{\{0,1\}} + S_{\{0,2\}} + S_{\{1,2\}} + S_{\{0,1,2\}}$

$= 0 + 0 + 1 + 2 + 1 + 2 + 3 + 3 = 12$

⚠ T_2 est somme de 2^3 termes car $|\mathcal{P}([\![0,2]\!])| = 2^3 = 8$

• On a ①

$$T_n = \sum_{A\subset[\![0,n]\!]} S_A = \sum_{A\subset[\![0,n]\!]} \left(\sum_{k\in A} k\right)$$

2) Propriétés ①

a) linéarité

Prop : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} (a_i + \lambda b_i) = \sum_{i=0}^{n} a_i + \lambda \sum_{i=0}^{n} b_i$

D/ 1°) C'est un regroupement : les a_i d'un coté, les λb_i de l'autre

On a $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} (a_i + \lambda b_i) = (a_0 + \lambda b_0) + (a_1 + \lambda b_1) + \dots + (a_n + \lambda b_n)$

$= (a_0 + a_1 + \dots + a_n) + (\lambda b_0 + \dots + \lambda b_n)$

Puis on factorise la 2nd somme

On a $(\lambda b_0 + \dots + \lambda b_n) = \lambda (b_0 + \dots + b_n)$

DCR ■

__Fait__ : • $\sum_{i=1}^{n} 1 = n$

• $\sum_{i=0}^{n} 1 = n+1$

Dvt ■

__Rq__ $\left\{ \begin{array}{l} \boxed{\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i \in [\![0,n]\!]} a_i} \\ \boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i \in [\![1,n]\!]} a_i} \end{array} \right.$

__Rq__ : si $q \geq p$ on a $\sum_{i=p}^{q} 1 = q-p+1$

b) croissance et positivité

__Prop__ : on suppose que $\forall i \in [\![0, n]\!], a_i \geq 0$

Alors $\sum_{i=0}^{n} a_i \geq 0$

D/

On raisonne par réc.

- On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: « $\forall a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+$, $\sum_{i=0}^{n} a_i \geq 0$ »

- Montrons $P(0)$ ⚠ $\mathbb{R}^+$ c'est une $\forall$-assertion

  Soit $a_0 \in \mathbb{R}_+$

  On a $\sum_{i=0}^{0} a_i = a_0 \geq 0$

D'où $P(0)$

- Hérédité

Mq $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

  Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$

  Mq $P(n+1)$ $\mathbb{R}^+$ c'est une $\forall$ assertion

    Soit $a_0, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{R}_+$

    Mq $\sum_{i=0}^{n+1} a_i \geq 0$

OFAA

      On a $\boxed{\sum_{i=0}^{n+1} a_i = \sum_{i=0}^{n} a_i + a_{n+1}}$

      Ĉ $P(n)$ est vrai et Ĉ $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $a_i \geq 0$, on a $\sum_{i=0}^{n} a_i \geq 0$

      Ĉ $a_{n+1} \geq$, on a $\sum_{i=0}^{n} a_i + a_{n+1} \geq 0$

    ALR

D'où $P(n+1)$

D'où l'hérédité

DLR $\blacksquare$

Prop

On suppose que $\forall i \in [\![0,n]\!],\ a_i \leq b_i$

Alors on a $\sum_{i=0}^{n} a_i \leq \sum_{i=0}^{n} b_i$

D/ Linéarité et positivité

- Déjà, posons pour $i \in [\![0,n]\!]$, $\Delta_i := b_i - a_i$
- On a : $\forall i \in [\![0,n]\!],\ \Delta_i \geq 0$
- DACQP, on a $\sum_{i=0}^{n} \Delta_i \geq 0$, ie on a $\sum_{i=0}^{n} b_i - a_i \geq 0$
- Or d'après 1), on a :

$$\sum_{i=0}^{n} b_i - a_i = \sum_{i=0}^{n} b_i + (-1)a_i = \sum_{i=0}^{n} b_i + (-1)\sum_{i=0}^{n} a_i$$

$$= \sum_{i=0}^{n} b_i - \sum_{i=0}^{n} a_i$$

Ainsi on a $\sum_{i=0}^{n} b_i - \sum_{i=0}^{n} a_i \geq 0$, d'où $\sum_{i=0}^{n} a_i \leq \sum_{i=0}^{n} b_i$ $\blacksquare$

d'une somme nulle de termes ≥ 0 a tous ses termes nulles.

$$\boxed{\begin{array}{l}\underline{\text{Prop}} \\ \text{Soient } a_0, \dots, a_n \geqslant 0. \text{ Alors} \\ \sum_{i=0}^{n} a_i = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![0,n]\!], a_i = 0\end{array}}$$

D/ 1

On suppose $\sum_{i=0}^{n} a_i = 0$

Mq $\forall i \in [\![0,n]\!], a_i = 0$

! Attention aux conflits de notations

Soit $i_0 \in [\![0,n]\!]$

Mq $a_{i_0} = 0$

On a $\boxed{a_{i_0} \leq \sum_{i=0}^{n} a_i}$

(d/ On est la famille $(\tilde{a_i})_{i \in [\![0,n]\!]}$ definie par $\tilde{a_{i_0}} = a_{i_0}$

et $\forall j \in [\![0,n]\!], j \neq i_0 \Rightarrow \tilde{a_j} = 0$

On a $\forall i \in [\![0,n]\!], \tilde{a_i} \leq a_i$

Donc par croissance, on a

$$\sum_{i=0}^{n} \tilde{a_i} \leq \sum_{i=0}^{n} a_i$$

Or $\boxed{\sum_{i=0}^{n} \tilde{i} = a_{i_0}}$ (A)) ☒

(d²)

On pose $\Delta := \sum_{i=0}^{n} a_i - a_{i_0}$

On a $\Delta = a_0 + \dots + a_{i_0} + \dots + a_n - a_{i_0}$

$= a_0 + a_1 + \dots + a_{i_0-1} + a_{i_0+1} + \dots + a_n \geq 0$) ☒

Ainsi on a :

$0 \leq a_{i_0} \leq \sum_{i=0}^{n} a_i = 0$

$0 \leq a_{i_0} \leq 0$

Donc $a_{i_0} = 0$

Donc $\forall i \in [\![0,n]\!],\ a_i = 0$

DLR

d/ Propriétés Fausses

Faux ⊖ : $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ est F$^\infty$ en general

Rq :

- $(a+b)^2 = a^2 + b^2$
- $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^3 = \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{Q}^3$
- $(fg)' = f'g'$
- non $(P \Rightarrow Q) \equiv P \Rightarrow$ non Q

- $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$
- $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

D/ On prend $n \geq 2$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $a_i = b_i = 1$

On a $\sum_{i=1}^{n} a_i = n$ et $\sum_{i=1}^{n} b_i = n$ et $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = n$

Or $n \times n \neq n$ car $n \geq 2$ (d/ ORPA $n^2 = n \underset{n \neq 0}{\Rightarrow} n = 1$)

Faux

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \text{ est F en general}$$

D/ Si c'était vrai pour $n = 2$, on aurait $(a+b)^2 = a^2 + b^2$

e) generalisations

- On peut remplacer $\sum_{i=0}^{n}$ par $\sum_{i=p}^{q}$ (en supposant $p \leq q$) dans ce qui precede)
- De façon generale, tout ce qui precede est vrai avec $\sum_{i \in I}$ où I est finie

Ainsi :

Soit I un ensemble fini
Soient $(a_i)_{i \in I}$, $(b_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^I$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$
Alors on a

1) $\sum_{i \in I} a_i + \lambda b_i = \sum_{i \in I} a_i + \lambda \sum_{i \in I} b_i$

2) $(\forall i \in I, a_i \geq 0) \Rightarrow \sum_{i \in I} a_i \geq 0$

3) $(\forall i \in I,\ a_i \leq b_i) \Rightarrow \sum_{i\in I} a_i \leq \sum_{i \in I} b_i$

4) $(\forall i \in I,\ a_i \geq 0) \Rightarrow \left(\sum_{i\in I} a_i = 0 \Rightarrow (\forall i \in I,\ a_i = 0)\right)$

$\boxed{\textbf{Prop} \ ① \quad \sum_{i\in I} 1 = |I|}$

3)* Sommation par paquet

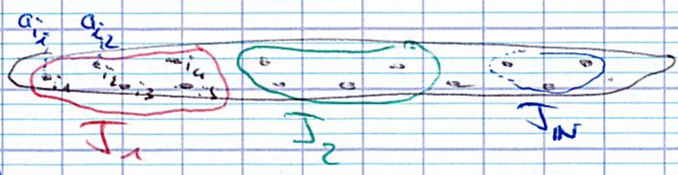
a) le resultat

Soit I un ensemble fini et soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres indexée par I

On s'interesse $\sum_{i\in I} a_i$

Idée : si on "decoupe" I en plusieurs sous ensembles alors pour trouver $\sum_{i\in I} a_i$, il suffit de sommer sur chacun de ces sous ensembles puis de sommer toutes ces sommes

d^n



Formalisation :

Theorème

Soit K un ensemble fini et soit $(J_k)_{k\in K}$ un recouvrement disjoint de I

Alors on a $\boxed{\sum_{i\in I} a_i = \sum_{k\in K} \sum_{i\in J_k} a_i}$ D/ non ☺ (rec sur $|K|$)

b) somme vides

Fait : une somme vide est nulle

D/ C'est une convention necessaire pour que la formule de sommations par paquet soit vraie en toute generalites.

La famille $(\emptyset, \emptyset)$ est un recouvrement disjoint de $\emptyset$

- $\emptyset \cup \emptyset = \emptyset$: elle est couvrante
- $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$: elle est disjointe

Donc $\boxed{\sum_{i\in\emptyset} a_i + \sum_{i\in\emptyset} a_i = \sum_{i\in\emptyset} a_i}$ par sommat° par paquets

En soustrayant : $\sum_{i\in\emptyset} = 0$

c) Relation de Chasles

C'est un cas particulier

Prop : Soient I et J deux ensembles disjoints et finis

Soit $(a_i)_{i\in I\cup J}$ une famille de nombres

Alors $$\sum_{i\in I\cup J} a_i = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in J} a_j$$

D/ ok

Application

On a ① $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{p} a_k + \sum_{k=p+1}^{n} a_k$

D/ On a

$$\sum_{k=1}^{p} a_k + \sum_{k=p+1}^{n} a_k = \sum_{k\in[\![1,p]\!]} a_k + \sum_{k\in[\![p+1,n]\!]} a_k$$

$$\underset{\text{DACQP}}{=} \sum_{\underbrace{k\in[\![1,p]\!]\sqcup[\![p+1,n]\!]}} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k\in[\![1,n]\!]} a_k$$

et car $[\![1,p]\!]\cap[\![p+1,n]\!] = \emptyset$

$\boxtimes$

4) Changement de variable $l = k+1$

Quand on a $\sum_{k=p}^{q} a_k$, faire le cdv "$l=k+1$" c'est faire ceci

1°) remarquer que « $k = l-1$ »

2°) remplacer dans a_k, k par $l-1$

3°) Pour les bornes, se poser les questions suivantes

- « quand $k=p$, combien vaut l ? »
- « quand $k=q$, combien vaut l ? »

Théorème

Soit n un entier et soient $a,b \in \mathbb{C}$.

Alors $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

D/ ORP (réc) sur n

On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: « $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ »

Mq $P(0)$

On a $(a+b)^0 = 1$

et

R* il y a 1 seul terme dans cet Σ

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^{0-0} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

D'où $P(0)$

• Hérédité

Mq $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$

Mq $P(n+1)$

On a $(a+b)^{n+1} = \boxed{(a+b)^n} \cdot (a+b)$

$$\underset{\text{d'à } P(n)}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right) \times (a+b)$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k}}_{\text{notée } S} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}}_{\text{notée } T}$$

Par changement de variable "$l = k+1$", on a

$$S = \sum_{l=1}^{n+1} \binom{n}{l-1} a^l b^{n-(l-1)}$$

$$= \sum_{l=1}^{n+1} \binom{n}{l-1} a^l b^{n+1-l} \underset{\text{on renomme l en k}}{=} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k}$$

idée : on a S $(k=1) \longrightarrow (k=n+1)$

T : $(k=0) \longrightarrow (k=n)$

OFAA l'intervalle commun de sommation qui est $[\![1, n]\!]$

On a $S = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{n+1-1} a^{n+1} b^{n+1-(n+1)}$

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + a^{n+1}$$

On a $T = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + \underbrace{\binom{n}{0} a^0 b^{n+1-0}}_{=b^{n+1}}$

Donc $(a+b)^{n+1} = S + T$

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + b^{n+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k} \right) + a^{n+1} + b^{n+1}$$

$\binom{n+1}{k}$ ⇐ formule de Pascal

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^{n+1-n+1} + \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

D'où $P(n+1)$

D'où l'hérédité

DLR

D/ Quand on développe $(a+b)^n = (a+b)(a+b)\dots(a+b)$

on obtient une somme de termes de la forme $a^k b^{n-k}$ où

k est « le nombre de paranthèses où l'on a choisi a » ; en effet

si l'on choisit a dans k paranthèses, on choisit b dans les $n-k$ restantes.

Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Combien de fois le terme $a^k b^{n-k}$ va-t-il

apparaître dans cette somme ? Il va apparaître autant

de fois qu'il y a de façon de choisir k

paranthèses parmi n ; il va donc apparaître $\binom{n}{k}$ fois.

ccl. $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

<u>Exemples</u>

• $(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-2} a^2 b^{n-2} + \binom{n}{n-1} ab^{n-1}$

$+ b^n$

• $(a+b)^2 = a^2 + \binom{2}{1} ab + b^2$

$= a^2 + 2ab + b^2$

• $(a+b)^2 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$

Or on a "
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
"

Ie $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

• De m : $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Applications

$$\boxed{\text{Prop : } \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n}$$

D1/ On sait que $\forall a, b \in \mathbb{C}$ $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Pour $a := 1$ et $b := 1$, on obtient

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k}$$

donc $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ ■

D2/ : *

On a $\mathcal{P}([\![1,n]\!]) = \bigsqcup_{k=0}^{n} \mathcal{P}_k([\![1,n]\!])$

(réunion disjointe)

(c) Déjà, on a $\forall k \in [\![0,n]\!], \mathcal{P}_k([\![1,n]\!]) \subset \mathcal{P}([\![1,n]\!])$

• Donc, on a $\bigcup_{k=0}^{n} \mathcal{P}_k([\![1,n]\!]) \subset \mathcal{P}([\![1,n]\!])$

• Réciproquement, mq $\mathcal{P}([\![1,n]\!]) \subset \bigcup_{k=0}^{n} \mathcal{P}_k([\![1,n]\!])$

R* canevas de preuve de $\subset$

Soit $A \in \mathcal{P}([\![1,n$

Mq $A \in \bigcup_{k=0}^{n} \mathcal{P}_k([\![1,n]\!])$

R^x reformulat°

Ie mq $\exists k_0 \in [\![0,n]\!] : A \in \mathcal{P}_{k_0}([\![1,n]\!])$

Posons $k_0 := |A|$; on a bien $\boxed{0 \leq k_0 \leq n}$

On a $A \in \mathcal{P}_{k_0}([\![1,n]\!])$ AC

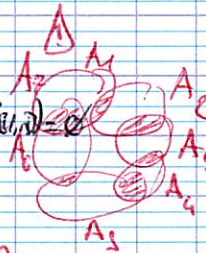
DLR

D'où l'inclusion

CCl : on a mq $\mathcal{P}([\![1,n]\!]) = \bigcup_{k=0}^{n} \mathcal{P}_k([\![1,n]\!])$

• Mq la reunion est disjointe

Ie mq $\forall k,l \in [\![0,n]\!], k \neq l \Rightarrow \mathcal{P}_k([\![1,n]\!]) \cap \mathcal{P}_l([\![1,n]\!]) = \emptyset$



Ici l'union n'est pas disjointe MAIS $\bigcap_{i=1}^{5} A_i = \emptyset$

Astuce : ORP Contraposition

Soient $k, l \in [\![0,n]\!]$

Mq $\mathcal{P}_k([\![1,n]\!]) \cap \mathcal{P}_l([\![1,n]\!]) \neq \emptyset \Rightarrow k = l$

Osq $\mathcal{P}_k([\![1,n]\!]) \cap \mathcal{P}_l([\![1,n]\!]) \neq \emptyset$

Mq $k = l$

$\hat{C}$ $\mathcal{P}_k([\![1,n]\!]) \cap \mathcal{P}_\ell([\![1,n]\!]) \neq \emptyset$, fixons A_0 un elmt de cette intersection

On a $A_0 \in \mathcal{P}_k([\![1,n]\!])$; donc $|A_0| = k$

De m̃ : $|A_0| = \ell$

Donc $k = \ell$

DCR

CCl : $\mathcal{P}([\![1,n]\!]) = \bigsqcup_{k=0}^{n} \mathcal{P}_k([\![1,n]\!])$

Lemme : Soit $N \in \mathbb{N}$ et soient $A_0, \dots, A_n$ des ensembles finis et 2 à 2 disjoints

Alors $\boxed{\left|\bigsqcup_{k=0}^{N} A_k\right| = \sum_{k=0}^{N} |A_k|}$

D/ Par somations par paquets !

En effet

$$\left|\bigsqcup_{k=0}^{N} A_k\right| = \sum_{i \in \bigsqcup_{k=0}^{N} A_k} 1 = \sum_{k=0}^{N} \underbrace{\sum_{i \in A_k} 1}_{|A_k|} = \sum_{k=0}^{N} |A_k| \blacksquare$$

Ainsi on a $\underbrace{\left|\mathcal{P}([\![1,n]\!])\right|}_{2^n} = \sum_{k=0}^{n} \overbrace{\left|\mathcal{P}_k([\![1,n]\!])\right|}^{\binom{k}{n}}$

Ie $\quad 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

$$\boxed{\underline{\text{Prop}}^{①} \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0} \quad n \geq 1$$

D/

On a $\quad (1-1)^n = \left((-1)+1\right)^n$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \underbrace{1^{n-k}}_{=1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0^n$$

$= 0$ car $n \geq 1$ ■

5) cdv "$l = n - k$"

Cela revient à sommer les termes à rebours.

En effet, pour $\begin{cases} \underline{l=0}, \text{ on a } k=n \\ \underline{l=n}, \text{ on a } k=0 \end{cases}$

On a $\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_n$

$\sum_{l=0}^{n} a_{n-l} = a_n + a_{n-1} + \dots + a_0$

Comment faire on tel cdv ? ①

1°) On remarque " $k = n - l$ "

2°) On remplace k par $n-l$ dans a_k

3°) On pose les questions « quand $k=0$, combien vaut l ? »
De m̃ pour $k=n$

4°) ⚠ On echange les bornes

Application

Soit $n \in \mathbb{N}$ alors $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

⚠ Methode notat° : on pose $S := \sum_{k=0}^{n} k$

- En faisant le cdv " $l = n-k$ ", on a

$$S = \sum_{l=0}^{n} n - l = \sum_{k=0}^{n} n - k$$

- Donc $S + S = \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} n-k$

$$= \sum_{k=0}^{n} n + (n-k) = \sum_{k=0}^{n} n = n \sum_{k=0}^{n} 1$$

$$= n(n+1)$$

Donc $S = \frac{n(n+1)}{2}$ ∎

6) Somme telescopiques !!!!

Prop :

$$\sum_{k=p}^{q} a_{k+1} - a_k = a_{q+1} - a_p$$

Idée : ($p=0$ et $q=n$)

On a

Méthode Σ "..."

$$\sum_{k=0}^{n} a_{k+1} - a_k = \underbrace{(\cancel{a_1} - a_0)}_{k=0} + \underbrace{(\cancel{a_2} - \cancel{a_1})}_{k=1} + \underbrace{(\cancel{a_3} - \cancel{a_2})}_{k=2} + \cancel{\dots} + \underbrace{(a_{n+1} - \cancel{a_n})}_{k=n}$$

$$= a_{n+1} - a_0$$

D/1 rec sur q : AF

D/2 cdv

On a
$$\sum_{k=p}^{q} a_{k+1} \overset{\text{cdv } l=k+1}{=} \sum_{l=p+1}^{q+1} a_l = \sum_{k=p+1}^{q+1} a_k$$

Donc
$$\sum_{k=p}^{q} a_{k+1} - a_k = \sum_{k=q} a_{k+1} - \sum_{k=p} a_k$$

$$= \sum_{k=p+1}^{q+1} a_k - \sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{k=p+1}^{q} a_k + a_{q+1} - \sum_{k=p+1}^{q} a_k - a_p$$

⚠ GRDA $\sum_{k=p+1}^{q}$

$$= a_{n+1} - a_p$$

Exemple

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Posons $S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

Calculons S_n

ASTUCE (T)

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$\left(\text{cf/ } \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)} \right)$$

exo (T) quid de $\frac{1}{k(k+2)}$? De $\frac{1}{k(k+3)}$? De $\frac{1}{k(k+p)}$

Ainsi :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

7) Somme classiques

a) sommes de géométriques

Prop : soit $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, soient $p, q \in \mathbb{N}$ tq $p \leq q$

$$\boxed{\text{Alors } \sum_{k=p}^{q} a^k = a^p \cdot \frac{a^{q-p+1}-1}{a-1}}$$

Rq : on retiendra $\sum_{k=p}^{q} a^k = a^{\text{premiers terme}} \frac{a^{\text{nbre de termes}}-1}{a-1}$

D/ "Arnaque"

Notons $S = \sum_{k=p}^{q} a^k$

On a $S(a-1) = \sum_{k=p}^{q} a^k (a-1)$

$= \sum_{k=p}^{q} a^{k+1} - a^k = a^{q+1} - a^p$ par telescopage

$= a^p (a^{q+1-p} - 1)$

Donc $S = a^p \frac{a^{q+1-p}-1}{a-1}$ ■

b) Sommes arithmetiques

Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite arithmetique

$$\boxed{\text{Prop} : \sum_{k=p}^{q} u_k = \frac{u_p + u_q}{2} \times (q-p+1)}$$

$\sum_{k=p}^{q} u_k =$ Moyenne des termes extremaux $\times$ nb de termes

D/ Notons $S := \sum_{k=p}^{q} u_k$

On a $S \underset{\uparrow}{=} \sum_{l=0}^{q-p} u_{l+p}$

cdv $l = k-p$ OFAA "$l=0$"

Fixons $a \in \mathbb{R}$ la raison de $(u_n)_n$. On sait que

$$\boxed{\forall l \in \mathbb{N},\ u_{p+l} = u_p + la} \quad (*)$$

$$\boxed{(*) : \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Donc $S = \sum_{l=0}^{q-p} u_p + la = \sum_{l=0}^{q-p} u_p + a \boxed{\sum_{l=0}^{q-p} l}$

$= (q-p+1)u_p + a\frac{(q-p)(q-p+1)}{2}$

$= (q-p+1)\left[\frac{2u_p + a(q-p)}{2}\right]$

(Je sais déjà que il va falloir forcer à apparaître u_q)

$= (q-p+1)\left[\frac{u_p + [u_p + (q-p)a]}{2}\right]$

$= (q-p+1)\frac{u_p + u_q}{2}$

$\hat{g}$ à $(*)$ pour $l \underset{\uparrow}{=} q-p$

OFAA; $p+l = q$ d'où $l = q-p$

e) Sommes de puissances

Prop 1) $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

2) $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3) $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Rq • 3) est une coïncidence

• À retenir : il n'y a pas de formule simple pour $\sum_{k=0}^{n} k^p$

• Mais on peut mq " $\sum_{k=0}^{n} k^p = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \cdots$ "

• À retenir pas de f^le pour $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$

Demonstration :

1) ok

2) ORP rec

• On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ = " $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ "

• $P(0)$ est V car $\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0$ et $\frac{0(0+1)(2\times0+1)}{6} = 0$

• Hérédité

C'est une preuve uniquement calculatoire

Mq $\forall n \geq 0, P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $P(n)$

Mq $P(n+1)$

On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2$

$\underset{\hat{g} \text{ à } P(n)}{=} \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$

d¹ $= \dfrac{(n^2+n)(2n+1)+6n^2+6+12n}{6}$

$= \dfrac{2n^3+n^2+2n^2+n+6n^2+6+12n}{6} = \dfrac{2n^3+9n^2+13n+6}{6}$

Or, $\dfrac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6} = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

$= \dfrac{(2n+3)(n^2+3n+2)}{6} = \dfrac{2n^3+6n^2+4n+3n^2+9n+6}{6}$

$= \dfrac{2n^3+9n^2+13n+6}{6}$

D'où $P(n+1)$

D'où l'hérédité

d² En reprenant les calcules on a

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$

$$= \frac{(n+1)}{6}\left[n(2n+1)+6(n+1)\right] = \frac{(n+1)}{6}\cdot\left[2n^2+7n+6\right]$$

③ $\Delta = 7^2 - 6 \cdot 2 \cdot 8 = 49 - 48 = 1$

$$\frac{-7 \pm 1}{4} \quad \text{ie} \quad \frac{-8}{4} = -2 \quad \text{et} \quad \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

Or, on a, après calcul, $2X^2 + 7X + 6 = 2(X+2)\left(X+\frac{3}{2}\right)$

$$= (X+2)(2X+3)$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{n+1}{6}\left[(n+2)(2n+3)\right] = \frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6}$ ☒

D'où $P(n+1)$

D'où l'hérédité

3) De m rec : $\boxed{AF}$ (calculatoire)

d) Formule de Bernoulli !!

Prop ① $$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

Rq

- pour $n=2$ $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
- pour $n=3$ $a^3 - b^3 = (a-b)(b^2+ab+a^2)$
  $= (a-b)(a^2+ab+b^2)$
- pour $n=4$ $a^4 - b^4 = (a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$

• Le terme « $a^n - b^n$ » est de "degré" $\boxed{n}$

• $(a-b)$ est de "degré" $\boxed{1}$

• pour tout k, le terme $a^k . b^{n-1-k}$ est de "degré" $\boxed{n-1}$;

de m̃ pour $\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$

C'est cohérent avec $a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$

D/¹ m̃ astuce que pour SG

① $(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n} a^{k+1} b^{n-(k+1)} - a^k b^{n-k}$

$= \sum_{k=0}^{n-1} v_{k+1} - v_k$ où on a posé, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $v_k := a^k b^{n-k}$

① Télescopage

$= v_n - v_0 = a^n - b^n$

D/² cas $b \neq 0$ et $a \neq b$

On écrit $a^n - b^n = b^n\left(\frac{a^n}{b^n} - 1\right) = b^n\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1\right)$

Et $\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = b^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{-k} = b^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^k$

$\underset{\text{SG } \frac{a}{b} \text{ car } \frac{a}{b} \neq 1 \text{ car } a \neq b}{=} b^{n-1}\frac{\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1\right)b}{\left(\left(\frac{a}{b}\right) - 1\right)b} = \frac{b^n\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1\right)}{a-b}$

D'où $b^n\left[\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1\right] = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$ $\boxed{\text{DLR}}$

Applications

• $\boxed{b=1}$ $(a^n - 1) = (a-1)(1+a+a^2+\dots+a^{n+1})$

ie $(a^n-1) = (a-1)\sum_{k=0}^{n-1} a^k$

• Osq a impair
Avec "$-b$" on obtient

$$a^n - (-b)^n = (a-(-b))\sum_{k=0}^{n-1} a^k(-b)^{n-1-k}$$

Ie $a^n + b^n = a+b \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a^k b^{n-1-k}}_{\text{Somme alternée}}$

car $(-b)^n = (-1)^n b^n = -1b^n$

B°
$(-1)^{n-1-k}$
$(-1)^{n-1} \cdot (-1)^{-k}$
$1 \cdot (-1)^k$

Ie : $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - ba^{n-2} + b^2a^{n-3} - \dots + b^{n-1}$

Ex : $(a^3+b^3) = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

• "pour $a = X$" et $b=1$

$$X^n - 1 = (X-1)(1+X+\dots+X^{n-1}$$

$$= (X-1)\sum_{k=0}^{n-1} X^k$$

Application (gobe)

B°
$v^3 - 1 = (v-1)(1+v+v^2)$

On a $(30 = 2\times3\times5)$

$(X^{30}-1) = (X^{15})^2 - 1 = (X^{15}+1)(X^{15}-1) = (X^{15}+1)((X^5)^3-1)$

$= (X^{15}+1)(X^5-1)(1+X^5+(X^5)^2$

$$= (X^{15}+1)(1+X^5+X^{10})(X^5-1)$$

$$= \underline{(X^{15}+1)}(1+X^5+X^{10})(X-1)(1+X+X^2+X^3+X^4)$$

$$= (X+1)(1-X+X^2-X^3+\dots+X^{13})(1+X^5+X^{10})(X-1)(1+X+X^2+X^3+X^4)$$

(rq : verifications avec les degrés : $1+14+10+1+4=30$)

De m̄

$$X^{30}-1 = (X^6)^5 - 1 = (X^6-1)(1+(X^6)^2+(X^6)^3+(X^6)^4+X^6)$$

$$= (X^6-1)(1+X+X^6+X^{12}+X^{18}+X^{24})$$

$$= ((X^2)^3-1)(\dots) = (X^2-1)(1+X^2+(X^2)^2)(\dots)$$

$$= (X-1)(X+1)(1+X^2+X^4)(1+X^6+X^{12}+X^{18}+X^{24})$$

IV Produits

1) Définition

Déf° 6

- $\prod_{k=0}^{n} a_k := a_0 \times a_1 \times \dots \times a_n$

- Si I est un ensemble fini, qu'on écrit $I = \{i_1, \dots, i_n\}$ et que $(a_i)_{i \in I}$ est une famille de nombre indexée par I, on pose $\prod_{i \in I} a_i := a_{i_1} \times a_{i_2} \times \dots \times a_{i_n}$

Exemples

- $\prod_{k=1}^{n} k$ $\boxed{\text{c'est } n!}$

- $\prod_{k=1}^{n} a = a^n$

2) Propriétés

Prop 1 : 1) $\prod_{i=1}^{n} a_i b_i = \prod_{i=1}^{n} a_i \times \prod_{i=1}^{n} b_i$

2) $\prod_{i=1}^{n} \lambda a_i = \lambda^n \prod_{i=1}^{n} a_i$

Rq*

On a $\prod_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{X \subset [\![1,n]\!]} \prod_{i \in X} a_i \prod_{i \in [\![1,n]\!] \setminus X} b_i$

3) Produit vide

De m̄ que une Σ vide vaut 0, un produit vide vaut par convention 1

Applicat°

$a^0 = \prod_{i \in [\![1,0]\!]} a = \prod_{i \in \emptyset} a = 1$

$\left(\text{où } a^n := \prod_{i \in [\![1,n]\!]} a \right)$

Donc $0^0 = 1$

- $0! = \prod_{k \in [\![1,0]\!]} k = \prod_{k \in \emptyset} k = 1$

$\left(\text{à } m! = \prod_{k \in [\![1,n]\!]} k \right)$

IV !! ∞ Sommes doubles

1) Familles doubles

a) définitions et notations

Soient I, J ensembles

Déf° : Une famille double indexée par I et J c'est une famille indexée par $I \times J$

On la note $(x_{(i,j)})_{(i,j) \in I \times J}$

Mais la notat° la plus courante est $(x_{i,j})_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$

Rq

- Au lieu de noter $(x_{i,j})_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ j \in [\![1,p]\!]}}$, on note $(x_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$
- Si $I = J$, on note aussi $(x_{i,j})_{i,j \in I}$
- Si $I = J = [\![1,n]\!]$, on note $(x_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$

Exemples

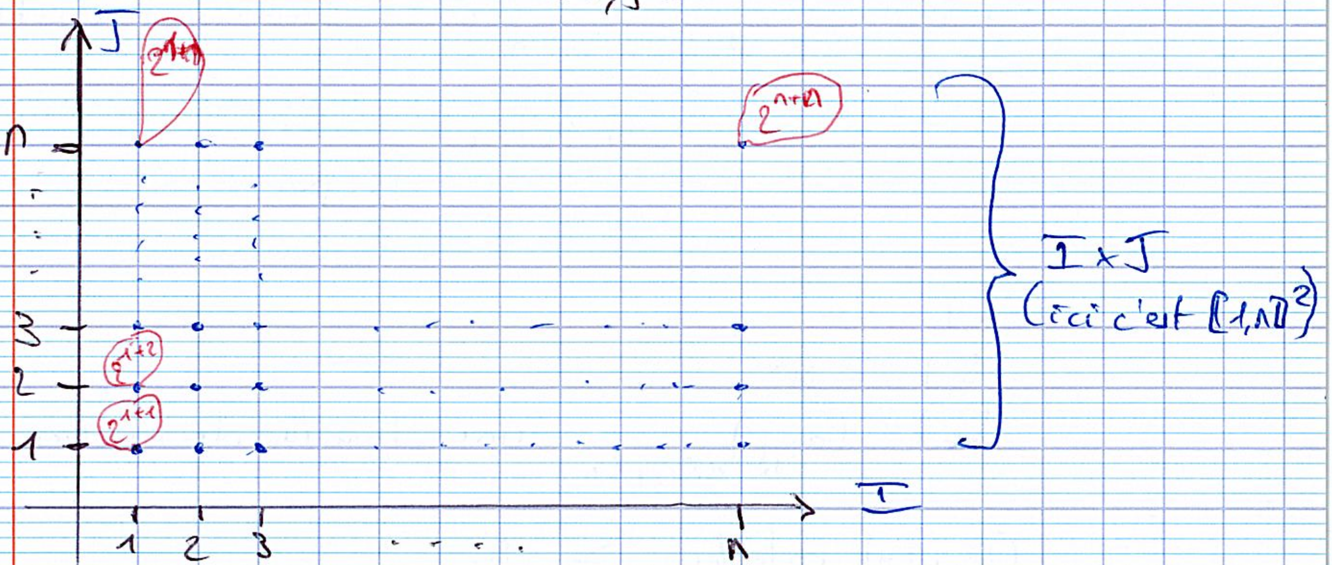
Soit $n \in \mathbb{N}^*$

- On csd $(2^{i+j})_{1 \leq i,j \leq n}$: c'est une famille double

• Ocsd $\left(\frac{i}{j}\right)_{1\leq i,j\leq n}$

b) dessin

Representons $\left(2^{i+j}\right)_{1\leq i,j\leq n}$



2) Sommes doubles

a) definitions et notations

Def° : Soient I, J deux ensembles finis

Soit $(a_{i,j})_{\substack{i\in I\\ j\in J}}$ une famille double de nombres

La somme de cette famille est notée $\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j}$; cet objet est bien defini car $I\times J$ fini

On la note $\sum_{\substack{i\in I\\ j\in J}} a_{i,j}$; on dit que c'est une somme double

Exemples

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$

- Oesd $(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$. La somme est aussi notée $\sum\limits_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}} a_{i,j}$

- Oesd $(c_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une famille double.

  La somme est notée $\sum\limits_{1\leq i,j\leq n} c_{i,j}$

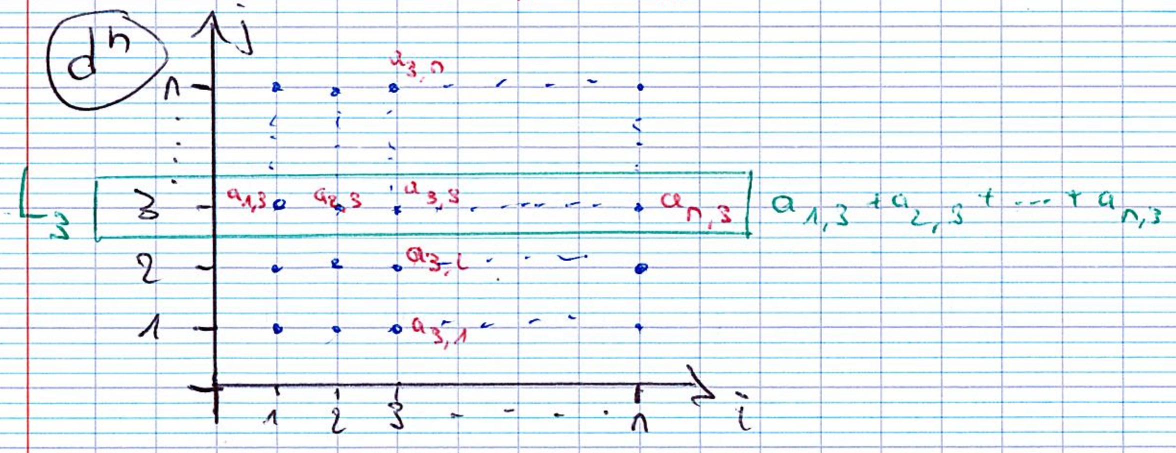
b) somme ligne par ligne

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Soit $(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une famille de nombres

On veut calculer $\sum\limits_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}$

On somme ligne par ligne



Pour $j \in [\![1, n]\!]$, on note

$$L_j := a_{1,j} + a_{2,j} + \dots + a_{n,j}$$

ie on pose $L_j := \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}$

Fait :

Notons $S := \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}$, la somme double

On a $S = L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_n$

Ie $S = \sum_{1 \leq j \leq n} L_j = \sum_{j=1}^{n} L_j$

D1/ ok ■

D2/ C'est un reordonnement de la somme

D3/ On fait une sommat° par paquets

On a $[\![1,n]\!]^2 = \bigsqcup_{j=1}^{n} [\![1,n]\!] \times \{j\}$

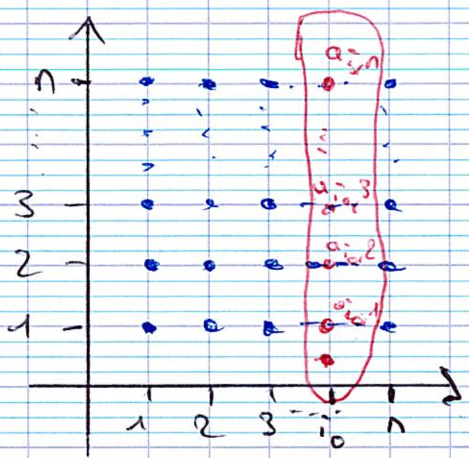
Donc

$$\sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} a_{i,j} = \sum_{(i,j) \in \bigsqcup_{j_0=1}^{n} [\![1,n]\!] \times \{j_0\}} a_{i,j}$$

$$= \sum_{j_0=1}^{n} \sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times \{j_0\}} a_{i,j} = \sum_{j_0=1}^{n} \overset{= L_{j_0}}{\boxed{\sum_{i \in [\![1,n]\!]} a_{i,j_0}}}$$

■

2) Colonne par colonne



On pose, pour $i \in [\![1,n]\!]$

$$C_i := a_{i,1} + a_{i,2} + a_{i,3} + \dots + a_{i,n}$$

ie on pose $C_i := \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$

Fait

On a $S = C_1 + C_2 + \dots + C_n$

ie on a $S = \sum_{i=1}^{n} C_i$

D/ Idem ▨

d) Théorème d'interversion des sommes rectangulaires

On a donc $S = \sum_{j=1}^{n} L_j = \sum_{i=1}^{n} C_i$

I.e., on a $\boxed{\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}}$

Plus généralement :

Théorème : Soient $(a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ une famille de nombre

Alors on a $\sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} a_{i,j} = \boxed{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}}$

Ex

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Posons $S := \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (1-2^i) 2^{ij}}_{\text{notée } S_j}$ à j fixé : combien vaut cette somme ?

Soit $j \in [\![1, n]\!]$

On a $S_j = \sum_{i=1}^{n} (1-2^i) 2^{ij}$

$= \underbrace{\boxed{\sum_{i=1}^{n} 2^{ij}}}_{T} - \underbrace{\boxed{\sum_{i=1}^{n} 2^{i(j+1)}}}_{U}$

Calculons T

Notons $a := 2^j$

On a $T = \sum_{i=1}^{n} 2^{ij} = \sum_{i=1}^{n} (2^j)^i = \sum_{i=1}^{n} a^i$

idée

$$= a\frac{a^n - 1}{a-1} = 2^j \frac{2^{nj}-1}{2^j-1}$$

De même : $U = 2^{j+1} \dfrac{2^{n(j+1)}-1}{2^{j+1}-1}$

Ccl : on a $S = \sum_{j=1}^{n} 2^j \dfrac{2^{nj}-1}{2^j-1} - 2^{j+1}\dfrac{2^{n(j+1)}-1}{2^{j+1}-1}$

$2^j - 1$ rend le calcul compliqué voir impossible

R : calculons S en intervertissant les sommes

ne dépend pas de j

On a $S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \boxed{(1-2^i)} 2^{ij}$

$\sum_{i=1}^{n} \lambda a_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i$ si λ ne dépend pas de i

$$= \sum_{i=1}^{n} (1-2^i) \sum_{j=1}^{n} (2^i)^j$$

SG car $2^i \neq 1$ car $i \geq 1$

$$= \sum_{i=1}^{n} (1-2^i) 2^i \frac{2^{in}-1}{2^i-1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} 2^i (1-2^{in})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} 2^i - \sum_{i=1}^{n} 2^{i(n+1)}$$

$$= 2\frac{2^n-1}{2-1} - 2^{n+1}\frac{2^{(n+1)n}-1}{2^{n+1}-1}$$

$$= \boxed{2^{n+1} - 2^{n+1}\,\frac{2^{n(n+1)}-1}{2^{n+1}-1} - 2}$$

<u>Rq</u> : de façon ⊕ g$^{\text{ale}}$, si I, J finis et si $(a_{i,j})_{\substack{i \in I \\ j \in J}} \in \mathbb{C}^{I \times J}$

alors, on a

$$\sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} a_{i,j} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{i,j} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} a_{i,j}$$

~~4) Sommes doubles à deuxième borne variable~~

3) Familles à variables separées

a) definition

Def° Soient $(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ une famille de nombres

ie Soit $(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} \in \mathbb{C}^{[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$

On dit quelle est à variable separées ssi

$$\exists (\alpha_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{C}^n,\ \exists (\beta_j)_{1\leq j\leq p} \in \mathbb{C}^p$$

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!],\ \boxed{a_{i,j} = \alpha_i \times \beta_j}$$

Ex

- $(2^{i+j})_{1\leq i,j\leq n}$ est à variables separées
- $\left(\frac{1}{i+j}\right)_{1\leq i,j\leq n}$ ne l'est pas

b) theorème fondamentale

Theorème Oesd la famille $(\alpha_i, \beta_j)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$

Alors $$\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} \alpha_i \times \beta_j = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \times \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j\right)$$

⚠ On rappelle que (!)

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}} a_i b_i \neq \sum_{i=1}^{n} a_i \times \sum_{i=1}^{n} b_i$$

n terme

C'est f^{++} en g^{al}

n² termes

Rq on a $\sum_{i=1}^{n} a_i \times \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \times \sum_{j=1}^{n} b_j = \boxed{\sum_{1\leq i,j\leq n}} a_i b_j$

Or On a

ne depend pas de j

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} \alpha_i \times \beta_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} \boxed{\alpha_i} \times \beta_j$$

Notons $S := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ et $T := \sum_{j=1}^{p} \beta_j$ (⚠ nd notation)

ne depend pas de i

Donc $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \times \beta_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i \times \boxed{\sum_{j=1}^{p} \beta_j} \right)$

$$= T \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \right) \times \left(\sum_{j=1}^{p} \beta_j \right)$$

Ex on a (!)

R^x de separation des Σ

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} 2^{i+j} = \sum_{1\leq i,j\leq n} 2^i \cdot 2^j = \sum_{i=1}^{n} 2^i \times \sum_{j=1}^{n} 2^j$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} 2^i \right)^2 = \left(2 \frac{2^{n} - 1}{2-1} \right)^2$$

$$= \boxed{4(2^n - 1)^2}$$

4) Sommes doubles à deuxième borne variable

⚠ Ce sont des sommes "triangulaires", c'est $\oplus$ subtil

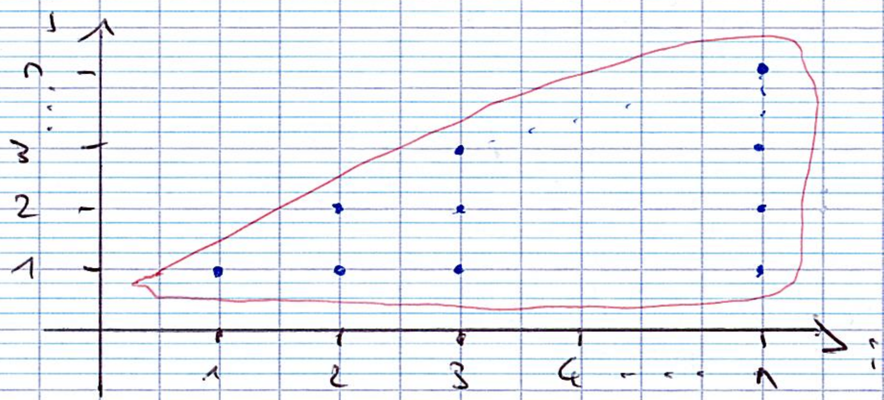
a) cadre

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une famille de n^2 nombres

On pose $S := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} a_{i,j}$

⚠ Ecrire $\boxed{\sum_{i=1}^{n}}\boxed{\sum_{j=1}^{i}} a_{i,j} = \boxed{\sum_{j=1}^{i}}\boxed{\sum_{i=1}^{n}} a_{i,j}$ n'a $\emptyset$ de sens

(d) Dessinons l'ensemble des indices considérés !!



b) interversion des ordres de sommation

Grâce au dessin, on constate

- pour $j=1$ on somme pour i allant de 1 à n
- pour $j=2$ on somme pour i allant de 2 à n
- pour $j=3$ on somme pour i allant de 3 à n

etc...

<u>Prop</u> : on a $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} a_{i,j}$

b) Par sommation par paquets (exo)

c) methode

1°) on part de la Σ triangulaire par $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i}$

2°) A où (B)° : on synthétise les bornes de i, j en une seule double inégalité

3°) on peut écrire sur la copie $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} = \sum_{1 \leq j \leq i \leq n} (\dots)$

4°) on retransforme la double inégalité en double somme en "changeant l'ordre de lecture"

Ici : d'abord j $1 \leq j \leq n$
puis : $j \leq i \leq n$

Ici : $\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} (\dots)$

5°) on peut écrire directement.

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} (\dots) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} (\dots)$$

«$1 \leq j \leq i \leq n$»

d) exemple

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

i termes

Notons $S := \sum_{i=1}^{n} \boxed{\sum_{j=1}^{i}} 2^i$ c'est une sommes constante

$\underbrace{\text{"}2^i + 2^i + \dots + 2^i\text{"}}_{i \text{ fois}}$

On a $S = \sum_{i=1}^{n} i 2^i$

(R) On reconnait une Σ qu'on est capable de calculer par derivation

On a egalement
cf W et J

$$S = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} 2^i = \sum_{j=1}^{n} 2^j \frac{2^{n-j+1}-1}{2-1}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} 2^{n+1} - 2^j = \sum_{j=1}^{n} 2^{n+1} - \sum_{j=1}^{n} 2^j = n 2^{n+1} - 2\frac{2^n-1}{2-1}$$

$$= n 2^{n+1} - 2^{n+1} + 2 = (n-1)2^{n+1} + 2$$

CCl $\sum_{i=1}^{n} i 2^i = (n-1)2^{n+1} + 2$

V Resolution de petits systèmes

On resoud toujours les systèmes en utilisant la methode de pivot de Gauss

Ex 1 (c'est un modèle de (R))

Resolvons le systeme $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ -2x - 3y + 3z = -2 \\ x + y - 2z = 1 \end{cases}$ d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$
On a les equivalences suivantes:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ -2\cancel{x} - 3y + 3z = -2 \\ \cancel{x} + y - 2z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ -7y + 5z = 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ 3y - 3z = 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 3y - 3z = 0 \\ -7y + 5z = 0 \end{cases} \qquad L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ y - z = 0 \\ -7y + 5z = 0 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow \frac{L_2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ y - z = 0 \\ -2z = 0 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3 + 7L_2$$

(rq : on a triangularisé le système)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - z + 2y = 1 \\ y = z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Ainsi :

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ -2x - 3y + 3z = -2 \\ x + 2y - 2z = 1 \end{cases} \right\} = \{(1,0,0)\}$$

2e exemple :

Résolvons : (S) : $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 5x + 6y + 7z = 0 \\ 9x + 10y + 11z = 0 \end{cases}$ d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$

On a les équivalences suivantes

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ -4y - 8z = 0 \\ -8y - 16z = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 9L_1 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ y + 2z = 0 & L_2 \leftarrow -\frac{L_2}{4} \\ y + 2z = 0 & L_3 \leftarrow -\frac{L_3}{8} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

On entoure les 1ères variables/inconnues de chaque lignes
→ ce sont les inconnues principales
Les inconnues restantes sont les inconnues secondaires ou paramètres

On exprime les inconnues principales en f° des paramètres

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3z - 2y = z \\ y = -2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -2z \\ z = z \end{cases}$$

Ccl : On a mq

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, (S) \right\} = \left\{ (z ; -2z ; z) ; z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\left(\text{ou } E = \left\{ (t ; -2t ; t) ; t \in \mathbb{R} \right\} \right)$$

Ex n°3

Résolvons (T) : $\begin{cases} x+y+z+t=2 \\ 2x+y+z+t=1 \\ x+2y+2z=2 \end{cases}$

Soient $x, y, z, t \in \mathbb{R}$

$$(T) \iff \begin{cases} x+y+z+t=2 \\ -y-z-t=-3 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ y+z-t=0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y+z+t=2 \\ y+z-t=0 & L_2 \leftrightarrow L_3 \\ -y-z-t=-3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y+z+t=2 \\ y+z-t=0 \\ -2t=-3 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 2-(\frac{3}{2}-z)-z-\frac{3}{2} = -1 \\ y = \frac{3}{2}-z \\ t = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Ainsi

$$\left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; (T) \right\} = \left\{ \left(-1, \frac{3}{2}-\alpha, \alpha, \frac{3}{2}\right) ; \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$