

Chapitre 6 : Nombres complexes II

(I) Préliminaires

1) Deux calculs pour s'entraîner
a) un premier calcul

Posons $A := \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \right)^{30}$. Calculons A

⚡ R^* produits, puissances, multipl^c sont compatibles avec la forme exponentielle

$$\text{On a } 1+i\sqrt{3} = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\text{et } 1-i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{Donc } A = \left(\frac{2}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{3} + i\frac{\pi}{4}} \right)^{30} = \left(\sqrt{2} e^{i\frac{7\pi}{12}} \right)^{30} = 2^{15} e^{i\frac{7\pi}{2} \times 30}$$

$$= 2^{15} e^{-i\frac{\pi}{2}} \\ = -2^{15} i$$

$$\text{ccl: } \boxed{A = -32768 xi}$$

b) un deuxième calcul

$$\text{On pose } B := \frac{(1+i)^4}{(1-i)^3} + \frac{(1-i)^4}{(1+i)^3}$$

$$\text{On pose } C := \frac{(1+i)^4}{(1-i)^3} \quad \text{On a } \bar{C} = \frac{\overline{(1+i)^4}}{\overline{(1-i)^3}} = \frac{(\overline{1+i})^4}{(\overline{1-i})^3}$$

⚡ La conjugaison complexe est compatible à TOUT
c'est un automorphisme

Donc $B = C + \bar{C} \stackrel{R^*}{=} 2 \operatorname{Re}(C)$

Calculons C à des techniques multiplicatives

On a $1+i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $1-i = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Donc $C = \frac{(\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}})^4}{(\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}})^3} = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} = 1-i$

Donc $B = 2 \times \operatorname{Re}(C) = 2$

2) Congruences dans $\mathbb{C}$

Def° Soit $d \in \mathbb{C}^*$ et soient $v, w \in \mathbb{C}$

On dit que $v \equiv w[d]$ ssi $\exists k \in \mathbb{Z} : (v-w) = kd$

Rq : c'est une relation compatible à la somme

II) Inégalités triangulaires

1) $|z - z'|$ est une distance

Soient M et M' deux points du plan d'affixe resp. z et $z' \in \mathbb{C}$

On a donc $M \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(z) \\ \operatorname{Im}(z) \end{pmatrix}$ et $M' \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(z') \\ \operatorname{Im}(z') \end{pmatrix}$

La longueur MM' vaut :

$$MM' = \sqrt{[\operatorname{Re}(z') - \operatorname{Re}(z)]^2 + [\operatorname{Im}(z') - \operatorname{Im}(z)]^2}$$

(f° = AB $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$)

$$= \sqrt{\operatorname{Re}(z'-z)^2 + \operatorname{Im}(z'-z)^2} = |z' - z|$$

2) Un lemme

Lemme: Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors

$$1) \operatorname{Re}(z) \leq |z|$$

2) "cas d'égalité" : on a

$$\operatorname{Re}(z) = |z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}_+$$

D/.

$$1) \text{ On a } |z|^2 = \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2 \geq \operatorname{Re}(z)^2 \geq 0$$

$$\stackrel{\uparrow}{\text{car } \sqrt{\cdot} \text{ est croissante, on a }} \sqrt{|z|^2} \geq \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2}$$

$$\text{I.e., on a } |z| \geq |\operatorname{Re}(z)| \quad \Delta (\sqrt{\theta^2} = |\theta|)$$

$$\text{Or on a } \forall \theta \in \mathbb{R}, \theta \leq |\theta| : \text{ donc } \operatorname{Re}(z) \leq |\operatorname{Re}(z)|$$

$$\text{Ainsi : } \boxed{\operatorname{Re}(z) \leq |z|}$$

$$2) \text{ Mg } \operatorname{Re}(z) = |z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}_+$$

$$\text{Mg } \Leftarrow$$

$$\text{On suppose } z \in \mathbb{R}_+; \text{ donc } z \in \mathbb{R}; \text{ donc } \begin{cases} \operatorname{Re}(z) = z \\ \operatorname{Im}(z) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } |z| = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2} = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2} = |\operatorname{Re}(z)|$$

Or $\operatorname{Re}(z) = z \in \mathbb{R}_+$ donc $|\operatorname{Re}(z)| = \operatorname{Re}(z) \quad \text{d.l.r.}$

Mq $\Rightarrow$

On suppose que $\operatorname{Re}(z) = |z|$; on a donc $\operatorname{Re}(z)^2 = |z|^2$

$$\text{Or } |z|^2 = \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2$$

Donc $\operatorname{Im}(z)^2 = 0$ donc $\operatorname{Im}(z) = 0$

$$\text{Enfin } z = \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)$$

donc $z = \operatorname{Re}(z)$; $\operatorname{Re}(z) = |z|$; donc $\operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R}_+$

$z \in \mathbb{R}_+$

3) Inégalité triangulaire

a) énoncé

Thm: Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ Alors

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

✓ Idée: on préfère travailler avec $|z|^2$ que avec $|z|$

• $\hat{=}$ $(\cdot)^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a

$$|z+z'| \leq |z| + |z'| \Leftrightarrow |z+z'|^2 \leq (|z| + |z'|)^2 \quad (*)$$

• D'abord : on a $(|z+z'|)^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2|z||z'|$

• Et : $|z+z'|^2 = (z+z')(\overline{z+z'})$

$$= (z+z')(\bar{z} + \bar{z}') = z\bar{z} + z\bar{z}' + z'\bar{z} + z'\bar{z}'$$

$$= |z|^2 + |z'|^2 + (z\bar{z}' + z'\bar{z})$$

Rappel !

$$|u|^2 = u \cdot \bar{u}$$

! Posons $v := z\bar{z}'$

On a donc $z\bar{z}' + z'\bar{z} = v + \bar{v} = 2\operatorname{Re}(v)$

Or, $|v| = |z\bar{z}'| = |z| \cdot |\bar{z}'| = |z| \cdot |z'|$

Ainsi on a

$$|z+z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2\operatorname{Re}(v) \stackrel{\text{g'aulement}}{\leq} |z|^2 + |z'|^2 + 2|v|$$

$$|z+z'|^2 \leq |z|^2 + |z'|^2 + 2|z||z'|$$

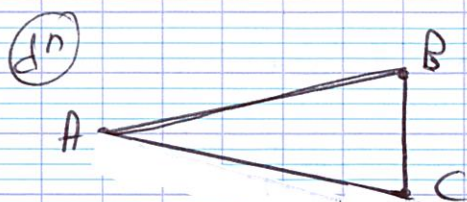
$$|z+z'|^2 \leq (|z| + |z'|)^2$$

D'après (*), on a donc $|z+z'| \leq |z| + |z'|$ ■

b) interprétation géométrique

Soient A, B, C trois points du plan d'affixes respectives

z_A, z_B et z_C



Prop $AC \leq AB + BC$

D/

On a $AC = |z_C - z_A|$ pour aller de A à C, on passe par B

$$= |z_C - z_B + z_B - z_A|$$

$$= |(z_C - z_B) + (z_B - z_A)| \stackrel{\text{généralisation}}{\leq} |z_C - z_B| + |z_B - z_A|$$

$$= AC \leq BC + AB$$

c) version négative Δ_{++}

$$\text{Prop}^{\oplus}: |z - z'| \leq |z| + |z'|$$

D/ Soient $z, z' \in \mathbb{C}$

$$\text{On a } |z - z'| = |z + (-z')| \stackrel{\text{généralisation}}{\leq} |z| + |-z'|$$

$$\leq |z| + |z'|$$

d) généralisation

Prop (R*)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$

$$\text{Alors : } \left| \sum_{i=1}^n z_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |z_i|$$

D/ (rec) ok

4) Inégalités triangulaires renversées

Prop : Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors on a

$$|z| - |z'| \leq |z - z'|$$

D/  A retenir

$$\text{On a } z = (z - z') + z'$$

$$\text{Donc } |z| = |(z - z') + z'|$$

par inégalité triangulaire

$$|z| \leq |z - z'| + |z'|$$

$$\text{Donc } |z| - |z'| \leq |z - z'|$$

Corollaire : Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. On a

$$| |z| - |z'| | \leq |z - z'|$$

D'abord on a $|z| - |z'| \leq |z - z'|$

• De même, on a $|z'| - |z| \leq |z' - z|$

⌈ $|z' - z| = |z - z'|$, on en déduit

$$|z'| - |z| \leq |z - z'|$$

• On a 2 cas

Cas 1 où $|z'| \geq |z|$; on a $| |z| - |z'| | = |z'| - |z|$

Or on a $|z'| - |z| \leq |z - z'|$ donc on a bien

$$| |z| - |z'| | \leq |z - z'|$$

Cas 2 où $|z| \geq |z'|$; on a $| |z| - |z'| | = |z| - |z'|$

Or on sait que $|z| - |z'| \leq |z - z'|$

Donc $| |z| - |z'| | \leq |z - z'|$

Corollaire ①

$$||z| - |z'|| \leq |z + z'|$$

$$\text{D/ OACBP, on a } |z + z'| = |z - (-z')| \\ \geq ||z| - |-z'||$$

$$\text{Donc } |z + z'| \geq ||z| - |z'||$$

5) Inégalité triangulaire bilatérale

Prop ①

$$||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

D/ ok

6) Cas d'inégalité dans l'inégalité triangulaire

a) positive - colinéarité

Def 0 Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. On dit que z et z' sont positivement colinéaires ssi $\exists d \in \mathbb{R}_+ : z = dz'$ ou $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+ : z' = \lambda z$

① si $z' \neq 0$ alors z et z' sont positivement colinéaires $\Leftrightarrow \exists d \in \mathbb{R}_+ : z = dz'$

Rq : Écrire " $\exists d \in \mathbb{R}_+ : z = dz'$ " ne convient pas car le seul z positivement colinéaire à 0 serait 0 .

(d)

c)

0

z'

↑
c'est l'ensemble des $z \geq 0$ -colinéaires
à z'

b) énoncé

Prop Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. On a

$$|z+z'| = |z| + |z'| \Leftrightarrow z \text{ et } z' \text{ } \geq 0\text{-colinéaires}$$

D/ On se cas

• Cas 1: $z' = 0$

Alors on a $|z+z'| = |z| + |z'|$

Et z est ≥ 0 -colinéaire à z' car $z' = 0 \times z$

Donc si les deux assertions sont V, on a aussi:

$$|z+z'| \neq |z| + |z'| \Leftrightarrow z \text{ et } z' \text{ } \geq 0\text{-colinéaires}$$

• Cas 2: $z' \neq 0$

Ng ($\Leftarrow$): on suppose z et z' positivement colinéaires

Fixons $d \geq 0$ tq $z = dz'$

$$\text{On a } |z+z'| = |dz'+z'| = |(d+1)z'| = \underbrace{(d+1)}_{\in \mathbb{R}_{\geq 1}} \cdot |z'|$$

$$= (d+1)|z'| = d|z'| + |z'| = |dz'| + |z'| = |d|z'|$$

$$M_9 \textcircled{S} 0_9 |z| + |z'| = |z + z'|$$

$$\text{Donc } (\dots)^2 = (\dots)^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2|zz'|$$

$$= |z + z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + z\bar{z}' + \bar{z}z'$$

Posons $u := z\bar{z}'$. On a alors $2|u| = 2\operatorname{Re}(u)$

N'après le cas d'égalité du lemme, on a $\boxed{u \in \mathbb{R}_+}$

On écrit en :

$$z = \frac{z}{z'} z' = \frac{z\bar{z}'}{z'\bar{z}'} z' = \frac{u}{|z'|^2} z'$$

$$\hat{=} \frac{|z|^2}{u} \in \mathbb{R}_+$$

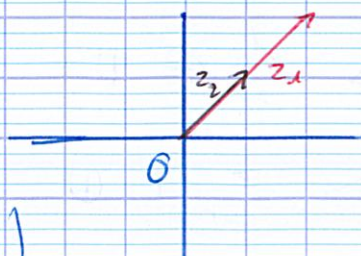
c) generalisation

Prop ①

$$\left| \sum_{i=1}^n z_i \right| = \sum_{i=1}^n |z_i| \iff \forall i, j \in [1, n], z_i \geq 0 \text{ - coévalués à } z_j$$

D/Exo

clⁿ



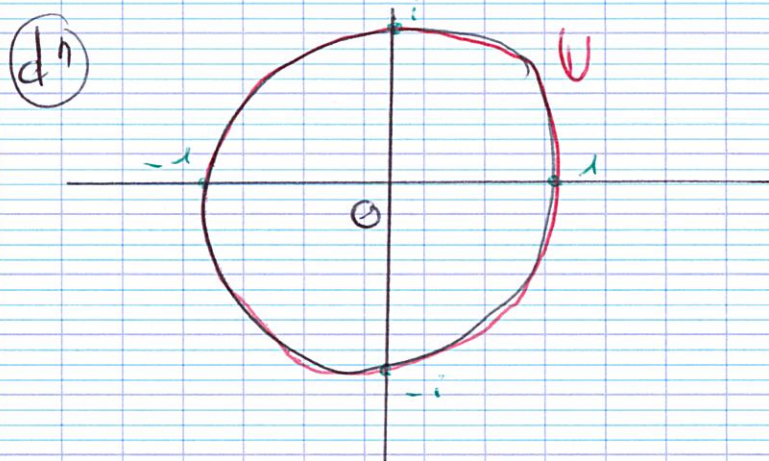
e)

III) Le cercle-unité $\mathbb{U}$

1) Définition

Def^o: On appelle cercle unité le groupe des complexes de module 1, et on note $\mathbb{U}$, la partie de $\mathbb{C}$ définie par

$$\mathbb{U} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$



2) Propriétés de $\mathbb{U}$

Prop Soient $z, z' \in \mathbb{C}^*$

$$1) z, z' \in \mathbb{U} \Rightarrow zz' \in \mathbb{U}$$

$$2) z \in \mathbb{U} \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, z^n \in \mathbb{U})$$

$$3) z \in \mathbb{U} \Rightarrow \frac{1}{z} \in \mathbb{U}$$

$$4) z, z' \in \mathbb{U} \Rightarrow \frac{z}{z'} \in \mathbb{U}$$

D/①

$$1) |zz'| = |z| \cdot |z'|$$

$$2) |z^n| = |z|^n$$

$$3) \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$$

$$4) \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

3) Expression de l'inverse dans $\mathbb{C}$

Prop : Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors $\frac{1}{z} = \bar{z}$

D/ On a

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \bar{z}$$

$$\text{Rq } z\bar{z} = |z|^2$$

Rq : mieux

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \frac{1}{z} = \bar{z} \Rightarrow z \in \mathbb{C}$$

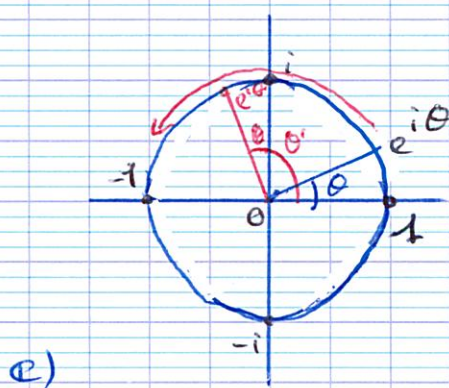
D/②

4) Symbole $e^{i\theta}$

a) Définition

Notation : Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note $e^{i\theta} := \cos(\theta) + i\sin(\theta)$

b) dessin de $e^{i\theta}$



c) Formules d'Euler

Prop : Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors

$$1. \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$2. \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Rq : Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note aussi $e^{-i\theta} = e^{i(-\theta)}$

D/ $\pm$

$$1) \text{ On a } \begin{cases} e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) & (1) \\ e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) \end{cases}$$

$$\text{Donc } e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i\sin(\theta) \quad (2)$$

En sommant (1) et (2), on a

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = \cos(\theta) + \cos(\theta)$$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

2) AF ■

Prop - R^x ①

$$\operatorname{Re}(e^{i\theta}) = \cos(\theta)$$

$$\operatorname{Im}(e^{i\theta}) = \sin(\theta)$$

d) propriétés

Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$

Fait F ^{al} : $e^{i\theta} \in \mathbb{U}$

D/ ②

$$|e^{i\theta}|^2 = \operatorname{Re}(e^{i\theta})^2 + \operatorname{Im}(e^{i\theta})^2$$

$$= \cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1 \quad \blacksquare$$

$$\text{Prop: } \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

D/ $\hat{e}^{i\theta} \in \mathbb{C}$, DACOP, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^{i\theta}} &= \overline{e^{i\theta}} = \overline{\cos(\theta) + i\sin(\theta)} \\ &= \cos(\theta) - i\sin(\theta) \\ &= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) \\ &= e^{i(-\theta)} = e^{-i\theta} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Proposition

$$e^{i\theta} \cdot e^{i\theta'} = e^{i(\theta + \theta')}$$

D/

On calcul.

$$e^{i\theta} \cdot e^{i\theta'} = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))(\cos(\theta') + i\sin(\theta'))$$

$$\begin{aligned} &= \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') + i(\cos(\theta)\sin(\theta') + \sin(\theta)\cos(\theta')) \\ &\quad \text{① } (a+ib)(x+iy) = (ax - by) + i(ax + by) \end{aligned}$$

$$\text{DAC trigo} \rightarrow = \cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')$$

$$= e^{i(\theta + \theta')} \quad \blacksquare$$

Corollaire

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

D/ 002 Cas

• Cas 1: $n \in \mathbb{N}$: (rec)

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad (e^{i\theta})^{n+1} &= (e^{i\theta})^n \times e^{i\theta} \\ &= e^{in\theta} \times e^{i\theta} = e^{in\theta + \theta} \\ &= e^{i(n+1)\theta} \end{aligned}$$

(Rq: on peut aussi écrire:

$$\begin{aligned} (e^{i\theta})^n &= \prod_{k=1}^n e^{i\theta} = e^{i \sum_{k=1}^n \theta} \\ &= e^{in\theta} \end{aligned}$$

de façon générale: $\prod_{k=1}^n e^{i\theta_k} = e^{i \sum_{k=1}^n \theta_k}$)

Cas 2: $n < 0$

Posons $n' := -n$; on a $\boxed{n' \in \mathbb{N}}$

$$\text{On a } e^{in\theta} = e^{-in'\theta} = \frac{1}{e^{in'\theta}} = \frac{1}{(e^{i\theta})^{n'}}$$

$$\stackrel{\substack{\text{par def des} \\ \text{puiss. neg.}}}{=} (e^{i\theta})^{n'} = (e^{i\theta})^n$$



⚠ La relat° $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ n'est pas vraie si n n'est pas entier en general

Si non on aurait $1 = -1$

$$\Delta / 1 = e^{2i\pi} \text{ donc } \sqrt{1} = 1^{\frac{1}{2}} = (e^{2i\pi})^{\frac{1}{2}}$$

$$= e^{2i\pi \times \frac{1}{2}} = e^{i\pi} = -1 \quad \blacksquare$$

e) Formule de Moivre

Prop : Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

$\Delta /$ C'est une reformulation

$$\text{On a } (\cos \theta + i \sin \theta)^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) \quad \blacksquare$$

5) Factorisation par l'angle-moitié

a) les formules

Soient α et $\beta \in \mathbb{R}$

$$\text{Fact} : e^{i\alpha} + e^{i\beta} = 2e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$\Delta /$ Idee : on factorise avec l'angle-moitié ie avec $\frac{\alpha+\beta}{2}$

on factorise $e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$

④ OFAA

On a $e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \left(? + ? \right)$

(8°) On veut $e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \times ? = e^{i\alpha}$; d'où $? = \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}} = e^{i(\alpha - \frac{\alpha+\beta}{2})}$
 $= e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}$

$$= e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \left(\frac{e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}}{2} \right) \times 2$$

$$= 2e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Fait 2 :

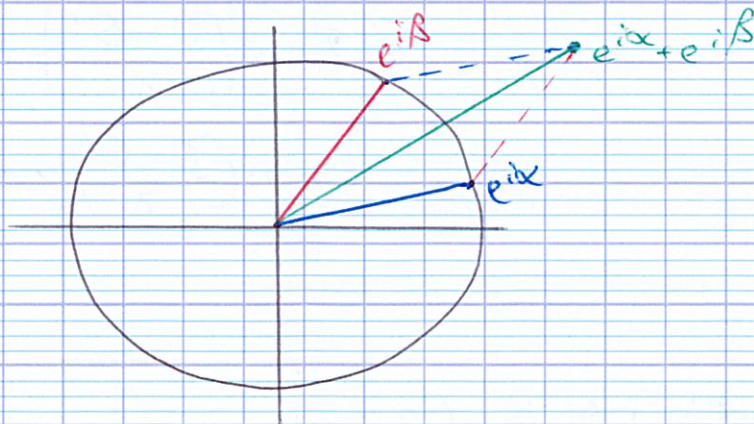
$$e^{i\alpha} - e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \times 2i \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Donc

$$e^{i\alpha} - e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \left(\frac{e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} - e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}}{2i} \right) 2i$$

$$= 2i \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

(d°)



(e°)

$$\text{Fait 3: } e^{i\alpha} + 1 = 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{\alpha}{2}}$$

$$D^{\frac{+}{-}} / e^{i\alpha} + 1 = e^{i\frac{\alpha}{2}} 2 \left(\frac{e^{i\frac{\alpha}{2}} + e^{-i\frac{\alpha}{2}}}{2} \right)$$

$$= 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{\alpha}{2}}$$

$$\text{Fait 4: } e^{i\alpha} - 1 = 2i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{\alpha}{2}}$$

$D^{\frac{+}{-}} (AF)$

Applications

Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$

On a

$$\cos(\theta) + \cos(\theta') = \operatorname{Re}(e^{i\theta}) + \operatorname{Re}(e^{i\theta'})$$

$$= \operatorname{Re}(e^{i\theta} + e^{i\theta'}) = \operatorname{Re}\left(e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} \cdot 2 \cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)\right)$$

$$= 2 \cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right) \underbrace{\operatorname{Re}\left(e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}\right)}$$

$$= 2 \cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)$$

6) "Noyau" de $\theta \mapsto e^{i\theta}$

Prop: Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a

$$e^{i\theta} = 1 \iff \theta \equiv 0 [2\pi]$$

$\Leftrightarrow 0 \leq \theta \leq 2\pi$; on a donc $\begin{cases} \cos(\theta) = \cos(0) = 1 \\ \sin(\theta) = \sin(0) = 0 \end{cases}$

Donc $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta = 1$ $\Rightarrow$

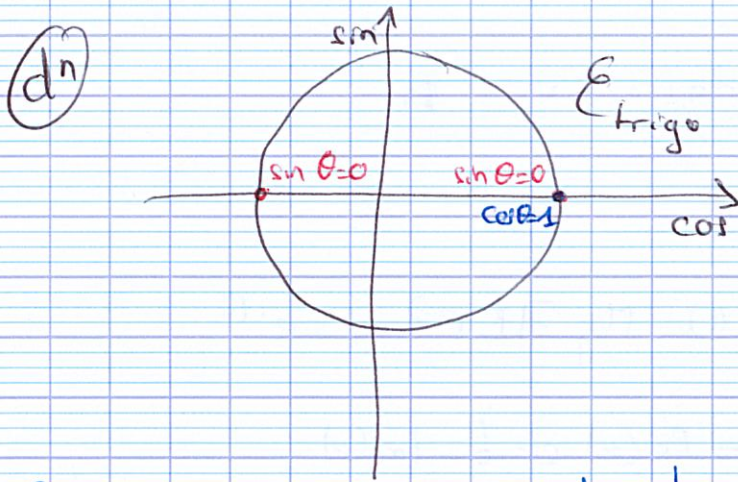
$\Rightarrow 0 \leq \theta \leq 2\pi$ $e^{i\theta} = 1$ Idée on passe à $\text{Re}(z)$

On a donc $\text{Re}(e^{i\theta}) = \text{Re}(1)$ donc $\cos \theta = 1$ (1)

On passe à $\text{Im}(z)$

On a donc $\text{Im}(e^{i\theta}) = \text{Im}(1)$

Il on a $\sin \theta = 0$



Or d'après le cours sur la trigonométrie, on a

$$\cos(\theta) = 1 \Leftrightarrow \theta \in [0, 2\pi]$$

Donc $\hat{g}$ à (1), on a $\theta \in [0, 2\pi]$ ■

7) Forme exponentielle d'un nombre complexe

a) paramétrisation de $\mathbb{U}$

$$\text{Prop : } \mathbb{U} = \{e^{i\theta}; \theta \in \mathbb{R}\}$$

D/

$$\text{Notons } E := \{e^{i\theta}; \theta \in \mathbb{R}\}$$

On procède par double-inclusion

$$\bullet \text{ } \underline{Mq \ E \subset \mathbb{U}}$$

$$\text{ie } \forall \theta \in \mathbb{R}, e^{i\theta} \in \mathbb{U}$$

On l'a déjà vu ■

$$\bullet \text{ } \underline{Mq \ \mathbb{U} \subset E}$$

$$\text{Soit } z \in \mathbb{U}. \text{ } Mq \exists \theta \in \mathbb{R} : z = e^{i\theta}$$

$$\text{Notons } a := \operatorname{Re}(z) \text{ et } b := \operatorname{Im}(z)$$

Rq de rédaction

$$\text{Soit } z \in \mathbb{C}$$

On a 3 rédactions possibles

$$\textcircled{n^{\circ}1} \text{ Notons } \underline{a := \operatorname{Re}(z)} \text{ et } \underline{b := \operatorname{Im}(z)}$$

$$\text{On a } \underline{z = a + ib}$$

(n°2) Comme $z \in \mathbb{R}$, fixons $a, b \in \mathbb{R}$ tq $z = a + ib$
(en effet, on sait que $\forall w \in \mathbb{C}, \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : w = \alpha + i\beta$)

(n°3) Ecrivons $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$

Et $|z|^2 = 1$ car $z \in \mathbb{U}$, on a $|a + ib|^2 = 1$ ie on a $a^2 + b^2 = 1$.

Considérons le point M du plan de coordonnées (a, b) . Car $a^2 + b^2 = 1$,

on a $M \in \mathbb{S}^1_{\text{trigo}}$. Notons $\theta \in \mathbb{R}$ une mesure angulaire de M : on a $M = M_\theta$.

Or : $M_\theta = (\cos \theta, \sin \theta)$, donc $\begin{cases} a = \cos \theta \\ b = \sin \theta \end{cases}$

Donc $z = a + ib = \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$ ■

8) arguments d'un nombre complexe

Théorème - Définition

Soit $z \in \mathbb{C}^*$

1) Alors : $\exists r > 0, \exists \theta \in \mathbb{R} : z = r e^{i\theta}$

2) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On dit que θ est un argument de z si

$$\exists r > 0 : z = r e^{i\theta}$$

3) On note $\text{Arg}(z)$ l'ensemble des arguments de z

a) $\forall \theta, \theta' \in \text{Arg}(z) \Rightarrow \theta \equiv \theta' [2\pi]$

b) Fixons $\theta_0 \in \mathbb{R}$ un argument de z . Alors:

$$\text{Arg}(z) = \{ \theta \in \mathbb{R} \mid \theta \equiv \theta_0 [2\pi] \}$$

c) Il existe un unique $\theta \in]-\pi, \pi]$ qui est un argument de z ;
on l'appelle argument principal de z ; on le note $\text{Arg}(z)$

D/

1) On pose $r := |z|$; $z \neq 0$, on a $r > 0$

On pose $w := \frac{z}{|z|}$; on a $|w| = \left| \frac{z}{|z|} \right| = \frac{|z|}{|z|} = 1$

Donc $w \in \mathbb{U}$

Or $\mathbb{U} = \{ e^{i\theta} ; \theta \in \mathbb{R} \}$; donc $\exists \theta \in \mathbb{R} : w = e^{i\theta}$

Fixons un tel $\theta \in \mathbb{R}$

On a $w = \frac{z}{|z|} = \frac{z}{r} = e^{i\theta}$; donc $z = re^{i\theta}$

a) $\forall \theta, \theta' \in \text{Arg}(z)$. Fixons donc $r, r' > 0$ tq

$$z = re^{i\theta} = r'e^{i\theta'}$$

Passons au module $\hat{=} z = re^{i\theta}$, on a $|z| = |re^{i\theta}|$

$$= |r| \times \overbrace{1^{e^{i\theta}}}^{=1} = r, \text{ De m } r' = |z|$$

$$\text{Donc } e^{i\theta} = e^{i\theta'}, \text{ donc } e^{i\theta} = e^{i\theta'}$$

$$\text{Lemme } R^* \quad e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \theta \equiv \theta' [2\pi]$$

a) ok

$$\Rightarrow \text{On a } e^{i\theta} = e^{i\theta'}; \text{ donc } \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = \frac{e^{i\theta'}}{e^{i\theta'}}$$

$$\text{ie } e^{i(\theta - \theta')} = 1, \text{ D'ACQP (le "noyau")}$$

$$\text{on a } \theta - \theta' \equiv 0 [2\pi] \text{ ie } \theta \equiv \theta' [2\pi]$$

b) ok

c) voir @ hard (ok avec la partie entière)

$[R^*]$ Si $z \in \mathbb{C}^*$, on peut l'écrire

$$z = re^{i\theta}$$

avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$

c) propriétés des arguments

Soient $z, z' \in \mathbb{C}^*$

Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$

Prop :

$$1) a) \left. \begin{array}{l} \theta \in \text{Arg}(z) \\ \theta' \in \text{Arg}(z') \end{array} \right\} \Rightarrow \theta + \theta' \in \text{Arg}(zz')$$

$$b) \text{Arg}(zz') \equiv \text{Arg}(z) + \text{Arg}(z') \pmod{2\pi}$$

$$2) a) \theta \in \text{Arg}(z) \Rightarrow -\theta \in \text{Arg}\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$b) \text{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\text{Arg}(z) \pmod{2\pi}$$

$$3) a) \left. \begin{array}{l} \theta \in \text{Arg}(z) \\ \theta' \in \text{Arg}(z') \end{array} \right\} \Rightarrow \theta - \theta' \in \text{Arg}\left(\frac{z}{z'}\right)$$

$$b) \text{Arg}\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \text{Arg}(z) - \text{Arg}(z') \pmod{2\pi}$$

$$4) \theta \in \text{Arg}(z) \Rightarrow n\theta \in \text{Arg}(z^n)$$

$$5) \theta \in \text{Arg}(z) \Rightarrow -\theta \in \text{Arg}(\bar{z})$$

$$6) \theta \in \text{Arg}(z) \Rightarrow \theta + \pi \in \text{Arg}(-z)$$

D/

$$1) a) \text{Osg } \theta \in \text{Arg}(z) \text{ et } \theta' \in \text{Arg}(z')$$

Fixons donc $r, r' > 0$ tq $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$

$$\text{On a donc } zz' = rr' e^{i\theta} e^{i\theta'} = \underbrace{rr'}_{>0} e^{i(\theta+\theta')}$$

$$\text{Donc } \exists p > 0 : zz' = p e^{i(\theta+\theta')}$$

Donc par définition: $\theta + \theta'$ est un argument de zz' ie

$$\theta + \theta' \in \text{Arg}(zz')$$

$$\text{L. } \exists \theta \in \text{Arg}(z) \in \text{Arg}(z) \text{ et } \theta' \in \text{Arg}(z') \in \text{Arg}(z')$$

$$\text{on a } \theta + \theta' \in \text{Arg}(zz')$$

$$\text{Or on a } \theta \in \text{Arg}(zz') \in \text{Arg}(zz')$$

$$\text{Donc d'après thm Def: } \theta + \theta' \equiv \theta \pmod{2\pi}$$

$$\text{1) 2) 3) 4) 5) 6) (AF)}$$

(IV) Exponentielle complexe

On connaît: $\boxed{\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*}$; on veut l'étendre à $\mathbb{C}$ tout entier;

c'est très simple grâce au symbole " $e^{i\theta}$ ".

1) Def°

a) def°

Thm-Def

1) Il existe une unique fonction $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tq

$$(*) \begin{cases} \bullet \forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \exp(t) \\ \bullet \forall \theta \in \mathbb{R}, f(i\theta) = e^{i\theta} \\ \bullet \forall z, z' \in \mathbb{C}, f(z+z') = f(z)f(z') \end{cases}$$

2) On l'appelle exponentielle complexe et on la note

$$\exp_c: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

D/1) ORP (a)

• (a) Soit $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tq (*)

Soit $z \in \mathbb{C}$ qu'on écrit $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$

On a $f(z) = f(a + ib) = f(a)f(ib) = \exp(a)e^{ib}$

Ainsi sous réserve d'existence, f est unique

• (S) (AF)

N) formule

Prop: soit $z \in \mathbb{C}$, on a $\exp_c(z) = \exp(\operatorname{Re}(z)) e^{i\operatorname{Im}(z)}$

D/2) $\blacksquare$

Rq ①

Ainsi: $|\exp_{\mathbb{C}}(z)| = \exp(\operatorname{Re}(z))$

• un argument de $\exp_{\mathbb{C}}(z)$ est $\operatorname{Im}(z)$

2) Propriétés

Prop

1) $\exp_{\mathbb{C}}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ est surjective

2) Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. On a

$$\exp_{\mathbb{C}}(z) = \exp_{\mathbb{C}}(z') \Leftrightarrow z' = z + 2i\pi n$$

Δ1

a. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Il y a $\exists v \in \mathbb{C} : z = \exp_{\mathbb{C}}(v)$

Ecrivons $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Posons $a := \ln(r)$ et $u := a + i\theta$

On a alors $\exp_{\mathbb{C}}(v) = \exp(a)e^{i\theta}$

$$= \exp(\ln(r))e^{i\theta} = re^{i\theta} = z$$

Rq : si $v \in \mathbb{C}$, on a bien $\exp_{\mathbb{C}}(v) \neq 0$ i.e

$$\exp_{\mathbb{C}}(v) \in \mathbb{C}^*. \text{ En effet } \exp_{\mathbb{C}}(v) = \underbrace{\exp(\operatorname{Re}(v))}_{>0} \underbrace{e^{i\operatorname{Im}(v)}}_{\in \mathbb{C}^*}$$

Donc $\exp_e(0) \neq 0$

2) Mg $\exp_e(z) = \exp_e(z') \Leftrightarrow z = z' [2i\pi]$

($\Leftarrow$) $\Leftrightarrow \text{Osg } z = z' [2i\pi]$

Donc $\exists k \in \mathbb{Z} : z - z' = k \times 2i\pi$

Fixons un tel $k \in \mathbb{Z}$. On a $z = z' + k \times 2i\pi$

On a $\exp_e(z) = \exp_e(z') \times \exp_e(i \times 2k\pi)$

$$= \exp_e(z') \times \boxed{e^{i2k\pi}} \Rightarrow \textcircled{e^{i2k\pi}} = 1$$

$$= \exp_e(z')$$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow \text{Osg } \exp_e(z) = \exp_e(z') \text{ Mg } z = z' [2i\pi]$

Fixons $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$ tq $\begin{cases} z = a + ib \\ z' = a' + ib' \end{cases}$

On a $\exp_e(z) = \exp(a)e^{ib}$; donc $|\exp_e(z)| = \exp(a)$

De m : $|\exp_e(z')| = \exp(a')$

$\hat{C} : \exp_e(z) = \exp_e(z')$, on a $\exp(a) = \exp(a')$

Donc $\ln(\exp(a)) = \ln(\exp(a'))$; donc $\boxed{a = a'}$

On a $\exp_e(z) = \exp(a)e^{ib} = \exp_e(z') = \exp(a')e^{ib'}$

Si $\exp(a) = \exp(b)$, on a donc $e^{ib} = e^{ib'}$

DALC, on a donc $b \equiv b' [2\pi]$

Donc $ib \equiv ib' [2i\pi]$

Si $a = a'$, on a $a \equiv a' [2i\pi]$

Donc on a $a + ib \equiv a' + ib' [2i\pi]$ et $z \equiv z' [2i\pi]$

Rq : on note aussi, pour $z \in \mathbb{C}$

$$e^z := \exp_a(z)$$

On peut même noter $\exp(z)$

ⓧ Racines de l'unité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1) Définition

Def : Soit $z \in \mathbb{C}$. On dit que z est une racine n -ième de l'unité

l'unité ssi $z^n = 1$

• On note $\mathbb{U}_n$ l'ens. des racines n -ièmes de l'unité

• Ici, on pose

$$\mathbb{U}_n := \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$$

2) Exemples

• $\boxed{\mathbb{U}_1?}$

Soit $z \in \mathbb{U}_1$ On a $z^1 = 1$ i.e. $z = 1$

cc : $\mathbb{U}_1 = \{1\}$

• $\boxed{\mathbb{U}_2?}$

Soit $z \in \mathbb{C}$. OALF

$$z \in \mathbb{U}_2 \Leftrightarrow z^2 = 1 \Leftrightarrow z^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 1^2 = 0 \Leftrightarrow (z-1)(z+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = 1 \text{ ou } z = -1$$

$$\Leftrightarrow z \in \{-1, 1\}$$

cc : $\mathbb{U}_2 = \{-1, 1\}$

• U_3 ?

Soit $z \in \mathbb{C}$. OALF

$$z \in U_3 \Leftrightarrow z^3 = 1 \Leftrightarrow z^3 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow z^3 - 1^3 = 0 \Leftrightarrow (z-1)(1+z+z^2) = 0$$

Bernoulli

$$\Leftrightarrow z = 1 \text{ ou } z^2 + z + 1 = 0$$

Or, DALL term on a

$$z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

ou

$$z = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{ou } \Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1$$

Te on a :

$$z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Notation: on pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Ainsi on a $z \in U_3 \Leftrightarrow z = 1 \text{ ou } z = j \text{ ou } z = \bar{j}$

$$\text{Donc } U_3 = \{1, j, \bar{j}\}$$

Rappel

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2) \\ a^n - b^n &= (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \\ a^3 - 1 &= (a-1)(a^2 + a + 1) \end{aligned}$$

• Déterminons $\mathbb{U}_3$ à l'aide de la forme exponentielle

Soit $z \in \mathbb{U}_3$

Dejà : on a $z \neq 0$ car $z^3 = 1$

Fixons donc $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tq $z = re^{i\theta}$

$$\text{On a } z^3 = (re^{i\theta})^3 = r^3(e^{i\theta})^3 = r^3 e^{i3\theta} = 1$$

En passant au module on obtient

$$|r^3 e^{i3\theta}| = |r^3| \cdot \underbrace{|e^{i3\theta}|}_{=1} = 1$$

Ainsi on a $|r|^3 = 1$, $r > 0$, on a donc $r^3 = 1$

Donc (...), cf @ l'ach $r = 1$

$$\text{Bilan: } z = e^{i\theta} \text{ et } z^3 = e^{i3\theta} = 1$$

Donc, NALC, $3\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$

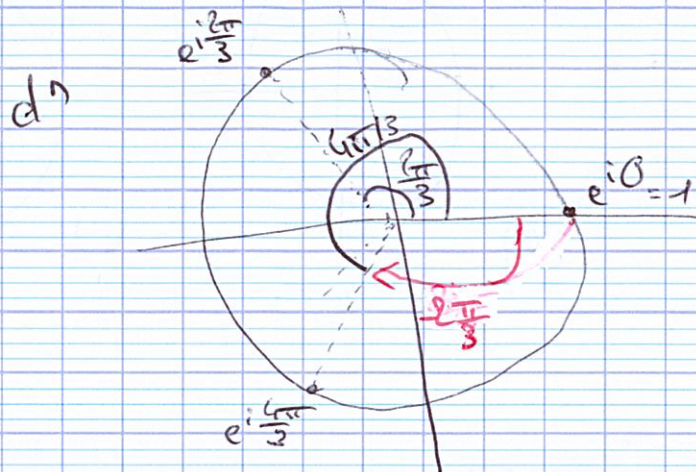
$$\text{ie } \theta \equiv 0 \pmod{\frac{2\pi}{3}}$$

Mieux on a pris $\theta \in \mathbb{R}$; mais, on aurait pu prendre $\theta \in [0, 2\pi[$

Cd: on a $\theta \equiv 0 \pmod{\frac{2\pi}{3}}$ et $\theta \in [0, 2\pi[$

$$\text{Donc } \theta = 0 \text{ ou } \theta = \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \theta = \frac{4\pi}{3}$$

Donc $z = e^{i0}$ ou $z = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ou $z = e^{i\frac{4\pi}{3}}$

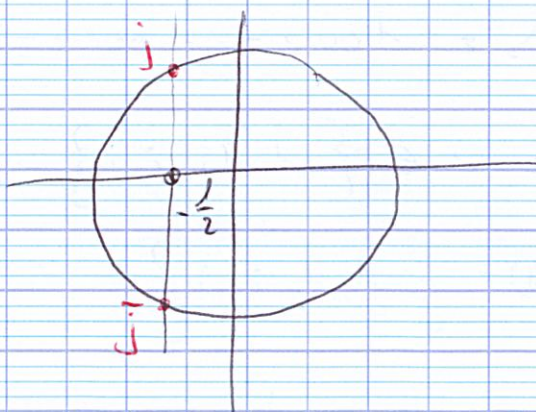


Reciproquement: $1, e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{4\pi}{3}}$ sont dans U_3

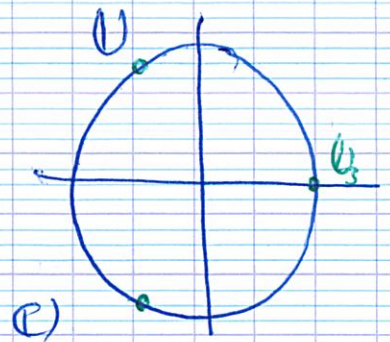
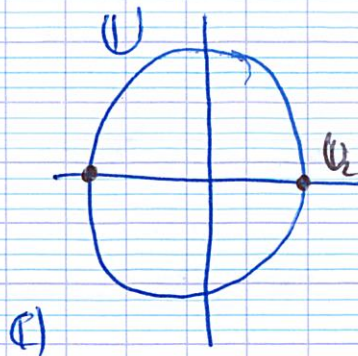
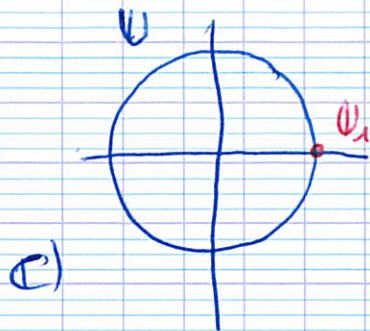
eci: $U_3 = \{ 1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}} \}$

(R₉) $e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = j$

(d_n)



On a donc ;



$\bullet U_4 ?$

Soit $z \in \mathbb{C}$. OALES

$$z \in U_4 \Leftrightarrow z^4 = 1 \Leftrightarrow (z^2)^2 - 1^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 = 1 \quad \text{ou} \quad z^2 = -1$$

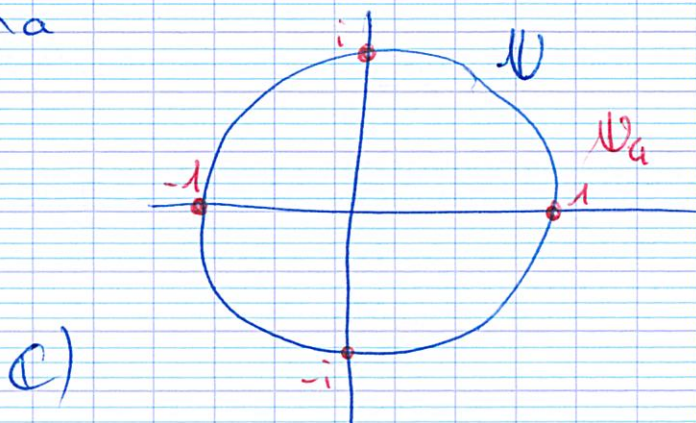
$$\Leftrightarrow z \in U_2 \quad \text{ou} \quad z^2 = i^2$$

$$\Leftrightarrow z = 1 \text{ ou } z = -1 \text{ ou } z = i \text{ ou } z = -i$$

$$\Leftrightarrow z \in \{-1, 1, -i, i\}$$

cd : $U = \{-1, 1, -i, i\}$

On a



3) Propriétés

lemme : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est
 $x \longmapsto x^n$
strictement croissante.

On Hq $\forall a, b \in \mathbb{R}_+, a < b \Rightarrow a^n < b^n$

💡 Idée : Bernoulli

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$ tq $a < b$

Hq $a^n < b^n$

Déjà : on a $b > a \geq 0$ donc $b > 0$

Donc $b^{n-1} > 0$ (si $n-1=0$: $b^{n-1}=1$)

Si $n-1 \geq 1$, $b^{n-1} > 0$ par propriété des nombres > 0)

Posons $\Delta := b^n - a^n$

$$\text{On a } \Delta = (b-a) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$$

$$= (b-a) (b^{n-1} + ab^{n-2} + a^2b^{n-3} + \dots + a^{n-1})$$

$$\hat{=} b^{n-1} > 0 \text{ et } \hat{=} ab^{n-2} + a^2b^{n-3} + \dots + a^{n-1} \geq 0$$

car $a \geq 0$ et $b > 0$, on a :

$$b^{n-1} + ab^{n-2} + \dots + a^{n-1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow b-a \geq 0$$

Donc par produit $\Delta \geq 0$ se $a^n \leq b^n$

DLR : $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est strictement croissante
 $x \mapsto x^n$

Prop : $U_n \subset U$

N soit $z \in U_n$, $\forall q \mid z = 1$

• Défin on a $z \neq 0$ sinon on aurait $z^n = 0^n = 0$ (car $n \geq 1$)

• Fixons donc $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tq $z = re^{i\theta}$

• On a $z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = 1$

• Donc $|z^n| = |r|^n |e^{in\theta}| = \boxed{r^n = 1}$
 $\underbrace{e^{in\theta}}_{=1}$

• $\forall q \quad \underline{r = 1}$

BRPA et osq $r \neq 1$

OD2 cas

Cas 1: $r \geq 1 \geq 0$

$\hat{C} : x \mapsto x^n$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on

a donc $r^n \geq 1^n$ et donc $1 \geq r$ Abs

Cas 2: $0 < r < 1$

De même on a $r^n < 1$ ie $1 < r$ Abs

Donc r = 1

$\hat{C} : r = |z|$ on a ng z ∈ U ■

Prop ⑤:

1) $z, z' \in U_n \Rightarrow z z' \in U_n$

2) $z \in U_n \Rightarrow \frac{1}{z} \in U_n$

3) $z \in U_n \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}, z^k \in U_n$

3') Réciproquement $z \in U_n \Rightarrow \forall k \in \mathbb{Z}, z^k \in U_n$

4) $z, z' \in U_n \Rightarrow \frac{z}{z'} \in U_n$

Δ/ $\nexists$ Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Or $z, z' \in U_n$

$\Rightarrow z z' \in U_n$

$= 1 \text{ car } z \in \mathbb{U}_n$

$$\text{On a } (z \cdot z')^n = \underbrace{z^n}_{=1} \cdot \underbrace{z'^n}_{=1} = 1 \times 1 = 1$$

Par définition $z \cdot z' \in \mathbb{U}_n$

2) On a $\left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{z^n} = \frac{1}{1} = 1$. Donc $\frac{1}{z} \in \mathbb{U}_n$

3) (Rec¹) $k=0$: $z^k = 1 \in \mathbb{U}_n$

$k \rightarrow k+1$: on a $z^{k+1} = \underbrace{z^k}_{\in \mathbb{U}_n \text{ par hypothèse de Rec}} \cdot \underbrace{z}_{\in \mathbb{U}_n \text{ d'après 1}}$

3) Soit $n \in \mathbb{Z}$ tq $k < 0$. On pose $k' := -k$; on $k' \in \mathbb{N}$

2) $\frac{1}{z} \in \mathbb{U}_n$ d'après 3) $\left(\frac{1}{z}\right)^{k'} \in \mathbb{U}_n$

ie $\frac{1}{k'} \in \mathbb{U}_n$ ie $z^{-k'} \in \mathbb{U}_n$ ie $z^k \in \mathbb{U}_n$

4) ok, trivial, simple, easy, facile

Corollaire 1: $1 \in \mathbb{U}_n$

Corollaire 2: $z \in \mathbb{U}_n \Rightarrow \bar{z} \in \mathbb{U}_n$

Δ/ Soit $z \in \mathbb{U}_n$. $\hat{z} \in \mathbb{U}_n$, on a $z \hat{z} = 1$

(R^x) Donc $\bar{z} = \frac{1}{z} \hat{z} \frac{1}{z} \in \mathbb{U}_n$, on a $\bar{z} \in \mathbb{U}_n$ ■

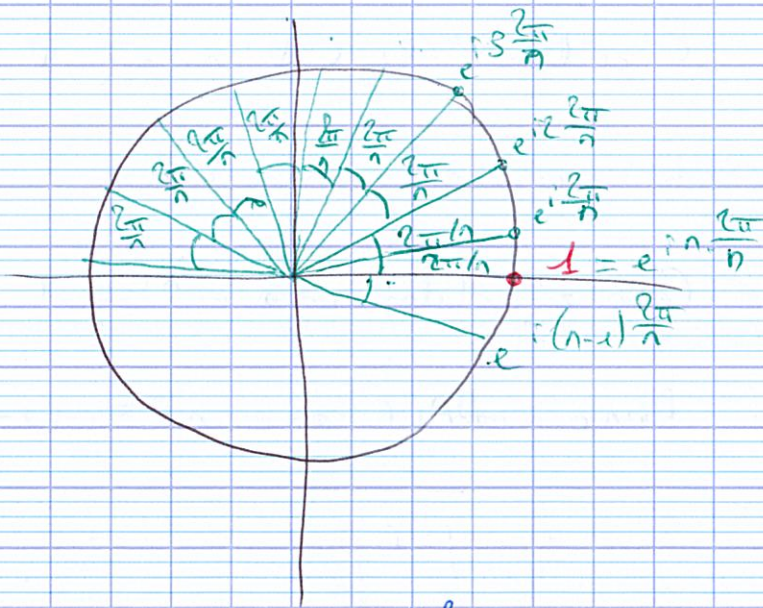
4) Description explicite de U_n .

Proposition:

$$U = \left\{ e^{ik \frac{2\pi}{n}}; k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$$

$$\underline{\text{I.e.}} : U_n = \left\{ 1, e^{i \frac{2\pi}{n}}, e^{i 2 \frac{2\pi}{n}}, e^{i 3 \frac{2\pi}{n}}, \dots, e^{i (n-1) \frac{2\pi}{n}} \right\}$$

(dⁿ)



D/ On note $E := \left\{ e^{ik \frac{2\pi}{n}}; k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$

Mq $U_n = E$ On procède par double-inclusion

• Mq $E \subset U_n$

(AC) mq $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, e^{ik \frac{2\pi}{n}} \in U_n$

Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$

$$\forall q \ e^{ik \frac{2\pi}{n}} \in U_n \text{ ie } R^n \quad (e^{ik \frac{2\pi}{n}})^n = 1$$

$$\text{On a } (e^{ik \frac{2\pi}{n}})^n = e^{ik \frac{2\pi}{n} \cdot n} = e^{i2k\pi} = 1$$

$$\forall q \ U_n \subset E$$

$$\text{Soit } z \in U_n$$

$$\forall q \ z \in E \text{ (AC) ie } \forall q \exists k \in [0, n-1] : z = e^{ik \frac{2\pi}{n}}$$

$$\hat{=} z \in U_n \text{ et } z \in U_n \subset U, \text{ on a } \underline{z \in U}$$

$$\text{Ecrivons donc } z = e^{i\theta} \text{ avec } \theta \in [0, 2\pi[$$

$$\text{On a } z^n = 1 \text{ donc on a } e^{in\theta} = 1$$

$$\text{Donc DALL on a } \boxed{n\theta \equiv 0[2\pi]}$$

$$\text{Fixons donc } \boxed{k \in \mathbb{Z} \text{ tq } n\theta = 2k\pi}$$

$$\text{On a } k = n \frac{\theta}{2\pi}$$

$$\text{Or, } \theta \in [0, 2\pi[\text{ ie } 0 \leq \theta < 2\pi$$

$$\text{Donc on a } 0 \leq \frac{\theta}{2\pi} < 1; \text{ donc } 0 \leq n \cdot \frac{\theta}{2\pi} < n$$

$$\text{Ie on a } 0 \leq k < n, \exists k \in \mathbb{Z} \text{ on a donc } k \in [0, n-1]$$

$$\text{On a donc } \underline{z} = e^{i\theta} = \underline{e^{ik \frac{2\pi}{n}}}$$

$\downarrow$
 $\downarrow$
 Donc $z \in E$
 • Donc $u_n \in E$

DLR ■

Dorenavant on aura le (R^*) suivant

Si $w \in U_n$, on pourra écrire:

"Fixons $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ & $w = e^{ik \frac{2\pi}{n}}$ "

ou "Fixons $w = e^{ik \frac{2\pi}{n}}$ avec $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ "

Rq:

• On a aussi $U_n = \left\{ e^{ik \frac{2\pi}{n}} ; k \in \llbracket 1, n \rrbracket \right\}$

• De façon $\oplus$ gal on peut remplacer $\llbracket 1, n \rrbracket$ par n'importe quel intervalle entier de cardinal n

• Ainsi: $\oplus$

$$U_{2p+1} = \left\{ e^{ik \frac{2\pi}{2p+1}} ; k \in \llbracket -p, p \rrbracket \right\}$$

Corollaire: U_n est fini et $|U_n| = n$

D/ En fait on veut montrer que les $e^{ik \frac{2\pi}{n}}$ pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ sont 2 à 2 distincts.

$$\forall k, l \in [0, n-1], k \neq l \Rightarrow e^{ik \frac{2\pi}{n}} \neq e^{il \frac{2\pi}{n}}$$

ORA Contraposition : on mg

$$\forall k, l \in [0, n-1], e^{ik \frac{2\pi}{n}} = e^{il \frac{2\pi}{n}} \Rightarrow k = l$$

$$\text{Soient } k, l \in [0, n-1] \text{ tq } e^{ik \frac{2\pi}{n}} = e^{il \frac{2\pi}{n}}$$

$$\text{Mq } k = l$$

$$e^{ik \frac{2\pi}{n}} = e^{il \frac{2\pi}{n}}, \text{ DACC, on a}$$

$$k \frac{2\pi}{n} \equiv l \frac{2\pi}{n} [2\pi]$$

$$\text{Donc on a } \frac{k}{n} \equiv \frac{l}{n} [1]$$

$$\text{Donc on a } \boxed{k \equiv l [n]}$$

$$\text{Fixons donc } m \in \mathbb{Z} \text{ tq } k - l = mn$$

$$\text{Idée : on a } k, l \in [0, n-1]$$

$$\text{Orq par } k \geq l, \text{ on a } k - l \geq 0$$

$$\text{De } 0 \leq l \geq 0 \text{ on a } k - l \leq k \leq n-1$$

$$\text{Donc : } 0 \leq k - l \leq n-1$$

$$\text{I.e. } 0 \leq k - l < n$$

$$\text{I.e. } 0 \leq mn < n \text{ donc } 0 \leq m < 1$$

$\exists m \in \mathbb{Z}$, on a $m=0$ donc $k=1$

On a $0 \leq k \leq n-1$ et $0 \leq l \leq n-1$

$$\text{donc } -(n-1) \leq k-l \leq 0$$

Donc, on a $-(n-1) \leq k-l \leq n-1$

Donc $-n < k-l < n$

Donc $-n < n-m < n$; donc $\boxed{-1 < m < 1}$

$\exists m \in \mathbb{Z}$ on a donc $m=0$

Donc $k=1$

DLR ■

5) Sommes des racines n-èmes de l'unité

Prop: Si $n \geq 2$, on a $\sum_{w \in \mathbb{U}_n} w = 0$

Rq: $\exists \mathbb{U}_1 = \{1\}$, on a $\sum_{w \in \mathbb{U}_1} w = 1$

D/ ~~P~~ on utilise la descript° explicite de $\mathbb{U}_n$

$$\text{On a } \sum_{w \in \mathbb{U}_n} w \stackrel{\text{Rx}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik \frac{2\pi}{n}} \quad \text{(AC)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{i \frac{2\pi}{n}} \right)^k$$

② On applique SG. On doit vérifier que $e^{i\frac{2\pi}{n}} \neq 1$

Car $n \geq 2$ on a $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$ et donc $0 < \frac{2\pi}{n} \leq \pi$

Or la fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0, \pi]$

Donc $\cos(0) > \cos \frac{2\pi}{n}$ donc $\cos(\frac{2\pi}{n}) < 1$

Donc $\operatorname{Re}(e^{i\frac{2\pi}{n}}) < \operatorname{Re}(1)$ donc $e^{i\frac{2\pi}{n}} \neq 1$

(d/2 ORPA et on a $e^{i\frac{2\pi}{n}} = 1$

DACC $\frac{2\pi}{n} \equiv 0[2\pi]$; donc $\frac{1}{n} \equiv 0[1]$

Donc $1 \equiv 0[n]$ donc $n|1$

donc $n = 1$ ou $n = -1$: (Abs)

Bref on peut appliquer SG; on a

$$\begin{aligned} \sum_{w \in \psi_n} w &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k = \frac{\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^n - 1}{e^{i\frac{2\pi}{n}} - 1} \\ &= \frac{e^{i\frac{2\pi}{n} \cdot n} - 1}{e^{i\frac{2\pi}{n}} - 1} = \frac{e^{i2\pi} - 1}{e^{i\frac{2\pi}{n}} - 1} = \frac{0}{1} = 0 \end{aligned}$$

VI Equations polynomiales dans $\mathbb{C}$

1) $z^2 = a$ (à retenir : il y a une astuce)

Soit $a \in \mathbb{C}^*$

a) existence et structure

Fact : $\exists z \in \mathbb{C} : z^2 = a$

D/ Idée : on passe par la forme exponentielle

Ecrivons $a = r e^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$

Posons $z = \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}} = \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}$

$$\begin{aligned} \text{On a } z^2 &= \left(\sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}} \right)^2 = \sqrt{r}^2 \left(e^{i\frac{\theta}{2}} \right)^2 \\ &= r e^{i\theta} = a \end{aligned}$$

Fact : Fixons $z_0 \in \mathbb{C}$ tq $z_0^2 = a$

$$\text{On a } \{z \in \mathbb{C} \mid z^2 = a\} = \{z_0, -z_0\}$$

D/ Soit $z \in \mathbb{C}$

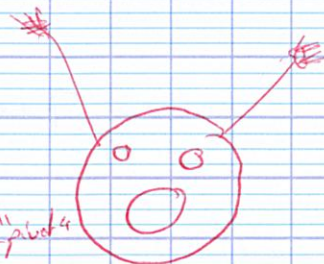
OALÉS $z^2 = a$



~~$z^2 = \sqrt{a}^2$~~

on utilise z_0 comme "pivot"

$z^2 = z_0^2$



OH!!

Le symbole $\sqrt{\cdot}$ est interdit ∞ dans $\mathbb{C}$

$$\Leftrightarrow z^2 - z_0^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (z - z_0)(z + z_0) = 0 \Leftrightarrow z = z_0 \text{ ou } z = -z_0$$

b) $\mathbb{C}$ -racines carrées

Def°, Soit $z \in \mathbb{C}$. On dit que z est une $\mathbb{C}$ racine carrée de a ssi $z^2 = a$

Rq: interdit^o d'utiliser $\sqrt{}$

Ex:

- 2 est une $\mathbb{C}$ racine carrée de 4
- -2 est une $\mathbb{C}$ racine carrée de 4
- i est une $\mathbb{C}$ racine carrée de -1

Rq: on a montré que tout nombre complexe $a \in \mathbb{C}^*$ possède exactement deux $\mathbb{C}$ racines carrées, opposées l'une à l'autre

c) calcul pratique

Traitons un exemple

Cherons une $\mathbb{C}$ racine carrée de $1+i$

Rq: la forme exponentielle de $1+i$ ne peut pas être

trouvée explicitement facilement

On raisonne par analyse/synthèse

• Analyse

Soit $z \in \mathbb{C}$ tq $z^2 = 1 + 2i$

On écrit $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$

On a donc $\boxed{a^2 - b^2 + 2iab = 1 + 2i}$

On a donc (1) $a^2 - b^2 = 1$ et (2) $2ab = 2$

En particulier on a $ab \neq 0$ donc $ab > 0$

Donc (2') a et b sont de même signe

 Astuce $\mathbb{R}^+$: on regarde le module

$$\hat{=} z^2 = 1 + 2i, \text{ on a } |z|^2 = |1 + 2i|$$

$$\text{I.e. on a } \underline{a^2 + b^2 = \sqrt{1 + 2^2} = \sqrt{5}} \quad (3)$$

En additionnant (1) et (3) on obtient,

$$2a^2 = 1 + \sqrt{5}$$

$$\text{Donc } a^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{donc } \boxed{a = \pm \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}}$$

En faisant $^R(s) = a$ on obtient: $16^2 = \sqrt{5} - 1$

Donc $b = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$

Et a et b sont de même signe on a:

$$z = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

ou

$$z = -\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)$$

Synthèse: DACC

$1+2i$ possèdent exactement 2 C-racines carrées

Et on a trouvé deux possibilités lors de l'analyse elle sont
Forcément solution.

$$\text{CDI: } \{z \in \mathbb{C} / z^2 = 1+2i\} = \left\{ \pm \left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \right) \right\}$$

(AF)

avec $2+5i$

2) $z^n = a$ ($n \geq 2$)

Soit $a \in \mathbb{C}^*$

Fak: $\exists z \in \mathbb{C} : z^n = a$

D/ Ecrivons $a = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$

P Posons $z := \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta}{n}}$

On a $z^n = (\sqrt[n]{r})^n (e^{i\frac{\theta}{n}})^n = re^{i\theta} = a$

(Autre)

(B) $\ln(r^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n} \ln(r)$

Posons $z := \exp\left(\frac{\ln(r)}{n}\right) e^{i\frac{\theta}{n}}$ $r^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n} \ln(r)\right)$

On a $z^n = \left(e^{\frac{\ln(r)}{n}}\right)^n \left(e^{i\frac{\theta}{n}}\right)^n = e^{\ln(r)} \cdot e^{i\theta} = re^{i\theta} = a$

Prop Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tq $z_0^n = a$

Alors, on a

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z^n = a\} = \{w \cdot z_0; w \in \mathbb{U}_n\}$$

I.e on a

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z^n = a\} = \left\{z_0, e^{i\frac{2\pi}{n}} z_0, e^{i\frac{4\pi}{n}} z_0, \dots, e^{i(n-1)\frac{2\pi}{n}} z_0\right\}$$

Donc on note $E := \{wz_0; w \in U_n\}$

$M_q \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = a\} = E$ par double inclusion

$$\supseteq: M_q \forall w \in U_n, (wz_0)^n = a \quad (AC)^{++}$$

Soit $w \in U_n$. On a

$$(wz_0)^n = \underbrace{w^n}_{1 \text{ car } w \in U_n} \cdot z_0^n = z_0^n = a$$

■ $\supseteq$

$$\subseteq: M_q \forall z \in \mathbb{C}, z^n = a \Rightarrow \exists w \in U_n: z = wz_0$$

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^n = a$

$$M_q \exists w \in U_n: z = wz_0$$

On a $z_0 \neq 0$ car $z_0^n = a$ et $a \neq 0$

$$\text{Posons } w := \frac{z}{z_0}$$

$$\text{On a } w^n = \left(\frac{z}{z_0}\right)^n = \frac{z^n}{z_0^n} = \frac{a}{a} = 1$$

Donc $w \in U_n$; de $\textcircled{+}$, on a $z = wz_0$

DLR



$$z^n = z_0^n$$



$z = z_0$ C'est Fongal

Exemple

Resolvons l'eq^e $z^n = -1$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

(R*) On trouve d'abord une solution particulière.

Posons $z_0 := e^{i\frac{\pi}{n}}$ (rappel :  $-1 = e^{i\pi}$)

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$

On a donc les equivalences suivantes.

$$z^n = -1 \Leftrightarrow z^n = \left(e^{i\frac{\pi}{n}}\right)^n$$

$$z \Leftrightarrow \left(\frac{z}{e^{i\frac{\pi}{n}}}\right)^n = 1 \Leftrightarrow \frac{z}{e^{i\frac{\pi}{n}}} \in \mathbb{U}_n$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket : \frac{z}{e^{i\frac{\pi}{n}}} = e^{ik\frac{2\pi}{n}}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket : z = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{n}}$$

3) $az^2 + bz + c = 0$ dans $\mathbb{C}$

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ Orq $a \neq 0$

a) formule

Th : Posons $\Delta = b^2 - 4ac$ ($\in \mathbb{C}$)

Fixons $\delta \in \mathbb{C}$ tq $\delta^2 = \Delta$

les solutions de l'equation $az^2 + bz + c = 0$ sont

$$\frac{-b - \delta}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{-b + \delta}{2a}$$

01

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a

$$az^2 + bz + c = a\left(z^2 + \frac{b}{a}z\right) + c$$

$\textcircled{1}$ **OPPA** $\rightarrow$ une identité remarquable

$$= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c$$

$$= a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$= a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right]$$

$$= a\left[\left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a}\right)\right]$$

$$= a\left(z + \frac{b-\delta}{2a}\right)\left(z + \frac{b+\delta}{2a}\right)$$

$$= a\left(z - \frac{-b+\delta}{2a}\right)\left(z - \frac{-b-\delta}{2a}\right)$$

Donc on a $az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow a\left(z - \frac{-b-\delta}{2a}\right)\left(z - \frac{-b+\delta}{2a}\right)$

$$\Leftrightarrow \left(z - \frac{-b-\delta}{2a}\right)\left(z - \frac{-b+\delta}{2a}\right)$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-b-\delta}{2a} \quad \text{ou} \quad z = \frac{-b+\delta}{2a}$$

$\textcircled{\text{AF}}$ F2.2

b) relat° coefficients-racines !!

Prop^① : Soient α et β les racines du polynôme ax^2+bx+c

Alors $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ et $\alpha \times \beta = \frac{c}{a}$

DI & Idée on utilise les Δ

Notons $\Delta = b^2 - 4ac$ et fixons δ et ϵ tq $\Delta = \delta^2$

On a $\frac{-b-\delta}{2a} + \frac{-b+\delta}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$

On a $\frac{(-b-\delta)(-b+\delta)}{2a \times 2a} = \frac{b^2 - \delta^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$

c) résolution de systèmes "somme-produits"

Prop

Soient $S, P \in \mathbb{C}$

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tq $\begin{cases} \alpha + \beta = S \\ \alpha \times \beta = P \end{cases}$

Alors (R^*) α et β sont les solutions de l'éq° $z^2 - Sz + P = 0$

(Cq: ce qui permet en pratique de trouver α et β)

D/ Soit $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\text{On a } (z-\alpha)(z-\beta) &= z^2 - z\beta - \alpha z + \alpha\beta \\ &= z^2 - (\alpha+\beta)z + \alpha\beta = z^2 - Sz + P\end{aligned}$$

On a donc $z^2 - Sz + P = 0 \Leftrightarrow (z-\alpha)(z-\beta) = 0 \Leftrightarrow z=\alpha \text{ et } z=\beta$

(VII) $\mathbb{C}$ et géométrie

Soient A, B, C des points du plan d'affixes respectives $z_A, z_B, z_C \in \mathbb{C}$.

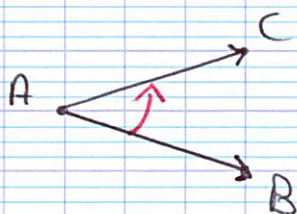
On suppose A, B, C deux à deux distincts

1) Angle entre vecteurs

a) une formule

$$\text{Prop : } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \text{Arg} \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) [2\pi]$$

(dⁿ)

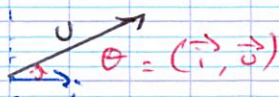


"D1"

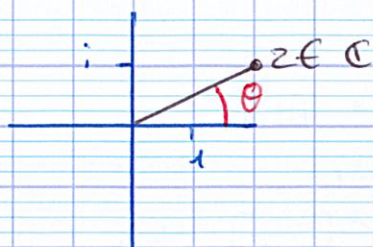
Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan non nul d'affixe $z \in \mathbb{C}$

Notons $\vec{i}$ dont l'affixe est 1

Alors (dⁿ)



plan)



c)

On a $(\vec{i}, \vec{v}) \equiv \text{Arg}(z) [2\pi]$

L'affixe de $\vec{AB}$ est $z_B - z_A$

Donc $(\vec{i}, \vec{AB}) \equiv \text{Arg}(z_B - z_A) [2\pi]$

De m $(\vec{i}, \vec{AC}) \equiv \text{Arg}(z_C - z_A) [2\pi]$

$$\begin{aligned} \text{Or: } (\vec{AB}, \vec{AC}) &\equiv (\vec{AB}, \vec{i}) + (\vec{i}, \vec{AC}) [2\pi] \\ &\equiv -(\vec{i}, \vec{AB}) + (\vec{i}, \vec{AC}) [2\pi] \\ &\equiv \text{Arg}(z_C - z_A) - \text{Arg}(z_B - z_A) [2\pi] \\ &\equiv \text{Arg}\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) [2\pi] \end{aligned}$$

b) alignement

On a A, B, C alignés $\Leftrightarrow (\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv 0 [2\pi]$

ou $(\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv \pi [2\pi]$

$$\Leftrightarrow \text{Arg}\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv 0 [2\pi]$$

ou

$$\text{Arg}\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$$

Lemme : Soit $z \in \mathbb{C}^*$ Alors

$$1) \operatorname{Arg}(z) \equiv 0[2\pi] \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}_+^*$$

$$2) \operatorname{Arg}(z) \equiv \pi[2\pi] \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}_-^*$$

D/ À l'oral ■

CCI : A, B, C alignés $\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$

Orthogonalité

$$\text{On a } \vec{AB} \perp \vec{AC} \Leftrightarrow \underset{\text{ou}}{(\vec{AB}, \vec{AC})} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$
$$\operatorname{Arg}(\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$$

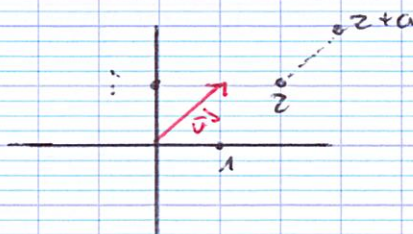
2) Exemple de transformation du plan

a) $z \mapsto z + a$ ($a \in \mathbb{C}$)

Cette application correspond à une translation de vecteur $\vec{u}$, où $\vec{u}$ est le vecteur d'affixe a .

(dⁿ) $a = 1 + i$

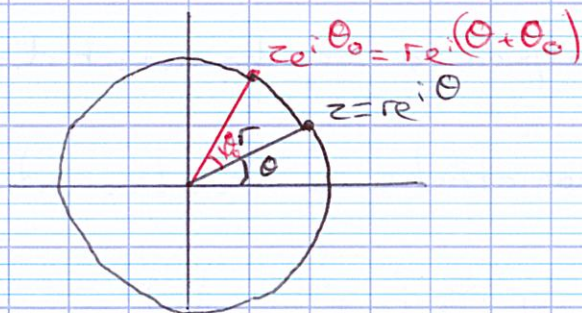
(f)



b) $z \mapsto e^{i\theta_0} z$ ($\theta_0 \in \mathbb{R}$)

ça correspond à une rotation d'angle θ_0 et de centre 0

(d')

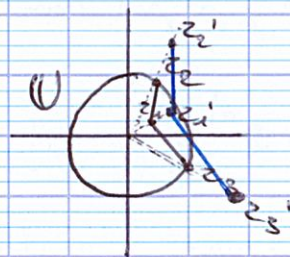


Ainsi $z \mapsto iz$ correspond à une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ (et de centre 0);
en effet $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

c) $z \mapsto \lambda z$ (avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$)

Si $\lambda > 0$, cette application correspond à un "agrandissement" (si $\lambda \geq 1$) ou à un "rapetissement" (si $\lambda \leq 1$) de facteur λ .
On dit que c'est une homothétie de facteur λ .

(d')



(c)

Si $\lambda < 0$, c'est pareil, avec une symétrie de centre 0 en plus.

d) $z \mapsto az$ ($a \in \mathbb{C}^*$)

On écrit $a = d e^{i\theta}$ avec $d > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$

Cette applicati^o correspond à :

$$\begin{aligned} z &\longmapsto e^{i\theta_0} z \\ z' &\longmapsto \lambda z' \end{aligned}$$

donc correspond à l'enchaînement d'une rotat^o d'angle θ_0
et d'une homothétie de facteur λ

R_g : $\hat{\mathbb{C}}^{\oplus} \ni \lambda(e^{i\theta_0} z) = e^{i\theta_0} (\lambda z)$, on peut aussi dire que

$z \mapsto \lambda z$ correspond à l'homothétie suivie de la rotat^o. Ici

il y a commutativité.

e) $z \mapsto az + b$ ($a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$)

Déjà : c'est la composée d'une rotation, d'une homothétie et
d'une translation. Ici il n'y a pas commut^o car $\oplus$

$$az + b \neq a(z + b) \text{ en gen}$$

O_{sg} $a \neq 1$ (si $a=1$: c'est une translat^o)

② Astuce : on considère un point fixe de la transformati^o

Ici Fixons $w \in \mathbb{C}$ tg $aw + b = w$ (ok car $a \neq 1$)

ce posons $w := \frac{b}{1-a}$

Soit $z \in \mathbb{C}$. Notons $f(z) := az + b$.

$$\text{On a } f(z) - w = az + b - w$$

$$= az + b - aw + b$$

$$= a(z - w)$$

Si π est le point d'affixe z .

$$\begin{array}{ccc} \pi' & \xrightarrow{\quad} & z' \\ \Omega & \xrightarrow{\quad} & w \end{array}$$

alors $\overrightarrow{\Omega\pi'}$ est déduit de $\overrightarrow{\Omega\pi}$ en faisant une homothétie rotation.

(d')

plan)

