Intermede

Trigo et $\mathbb{C}$
(Complements de trigo)

I) Techniques utilisant les nombres complexes

1) Linearisation

① On part de $\boxed{\sin^n(x)}$; on veut l'exprimer sans puissances à l'aide de $\sin(x)$, $\sin(2x)$, $\sin(3x)$, ..., $\sin(nx)$ et si nécessaire $\cos(x)$, $\cos(2x)$, ..., $\cos(nx)$

De m̄ pour $\boxed{\cos^n(x)}$

Idée : jouer avec Newton, Euler, Moivre

Ex : Soit $t \in \mathbb{R}$

On a :

$$\cos^3(t) \overset{\text{Euler}}{=} \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^3$$

$$\overset{\text{Newton}}{=} \frac{e^{3it}+3e^{it}+3e^{-it}+e^{-3it}}{8}$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{e^{3it}+e^{-3it}}{2} + 3\,\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right]$$

$$\overset{\text{Euler}^{-1}}{=} \frac{1}{4}\left(\cos(3t) + 3\cos(t)\right)$$

Ex ①

$$\sin(t)^4 \overset{\text{Euler}}{=} \left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^4 \overset{i\in\mathbb{Q}_4}{=} \frac{e^{4it}-4e^{2it}+6-4e^{-2it}+e^{-4it}}{16}$$

$$\underset{\text{Euler}^{-1}}{=} \frac{1}{8}\left[\cos(4t)-4\cos(2t)+3\right]$$

(AF)

$$\cos^2(t)\sin^2(t) = \sin^2(t)-\sin^4(t)$$

$$= -\frac{e^{2it}-2+e^{i2t}}{4} - \frac{1}{8}\left[\cos(4t)-4\cos(2t)+3\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\cos(2t)-2\right]-\frac{1}{8}\left[\cos(4t)-4\cos(2t)+3\right]$$

Applications

① Cela permet de définir des polynomes de Tchébychev

② Posons $I := \int_0^{\pi/2} \cos^3(t)\,dt$

On a $I = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\cos(3t)\,dt + \frac{3}{4}\int_0^{\pi/2}\cos(t)\,dt$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{\sin(3t)}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{4}\left[\sin(t)\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}-\frac{0}{3}\right)+\frac{3}{4}(1-0) = \frac{3}{4}-\frac{1}{12} = \frac{2}{3}$$

merci bébou ♡

2) Défactorisation

Prop ⓣ $\cos(a)\sin(b) = ?$

D/ $\cos(a)\sin(b) = \dfrac{e^{ia}+e^{-ia}}{2} \cdot \dfrac{e^{ib}-e^{-ib}}{2i}$

$$= \frac{e^{i(a+b)} - e^{i(a-b)} + e^{-i(a-b)} - e^{-i(a+b)}}{4i}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{i(a+b)} - e^{-i(a+b)}}{2i} - \frac{e^{i(a-b)} - e^{-i(a-b)}}{2i}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) - \sin(a-b)\right)$$

3) Technique de l'angle moitié (= factorisation)

 ∞ $e^{ia}+e^{ib}$, $e^{ia}-e^{ib}$; $e^{ia}+1$; $e^{ia}-1$

4) Formules de factorisation

Prop ⓣ $\cos(a) + \cos(b) = ?$

D/ D 3 Idée !! : c'est une technique de l'angle moitié déguisée

On a R^* $\boxed{e^{ia}+e^{ib} = e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}\, 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}$

On fait $Re(\cdot)$

$$\text{On a } \cos(a)+\cos(b) = \mathrm{Re}(e^{ia}+e^{ib}) = \mathrm{Re}\Big(e^{i\frac{a+b}{2}}\underbrace{\boxed{2\cos\left(\tfrac{a-b}{2}\right)}}_{\in\mathbb{R}}\Big)$$

$$= 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\mathrm{Re}\left(e^{i\frac{a+b}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

5) Delinearisation

Applications : polynomes de Tchebychev

C'est le contraire de 1)

$\boxed{\cos(nx)}$: je l'exprime en f^o des $\cos(x)^k$

Ex :

$$\cos(3x) \overset{R^x\,\mathrm{Re}(\cdot)}{=} \mathrm{Re}(e^{i3x})$$

$$= \mathrm{Re}((e^{ix})^3) \overset{\text{def } f^o \text{ de } e^{ix}}{=} \mathrm{Re}((\cos(x)+i\sin(x))^3)$$

$$\overset{\text{Newton}}{=} \mathrm{Re}(\cos^3 x + 3\cos^2 x\, i\sin x - 3\cos(x)\sin^2(x) - i\sin^3(x))$$

i^2

$$= \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x)$$

$$= \cos^3(x) - 3\cos(x)(1-\cos^2(x))$$

$$= 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$$

On pose $T_3 := 4X^3 - 3X$

$\boxed{\text{Fait : } \forall x\in\mathbb{R},\ \cos(3x) = T_3(\cos(x))}$

6) Sommation ⓣ

Posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$

On a $S_n \overset{R^* Re(\cdot)}{=} Re\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right)$

Or $\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} (e^{ix})^k}_{\text{noté } Z_n}$

- Si $e^{ix} = 1$ $\left(R^* \Leftrightarrow x \equiv 0[2\pi]\right)$: ça fait $n+1$

- Sinon SG s'applique ; on a

$$Z_n = \frac{(e^{ix})^{n+1} - 1}{e^{ix} - 1} = \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1}$$ $\boxed{R^*}\ \boxed{FAM}$

Or $e^{i(n+1)x} - 1 = e^{i\frac{n+1}{2}x}\, 2i\left(\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\right)$

De m̄ $e^{ix} - 1 = e^{i\frac{x}{2}}\, 2i\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)$

Donc $Z_n = \dfrac{e^{i\left(\frac{n+1}{2}\right)x}}{e^{i\frac{x}{2}}} \dfrac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = e^{i\frac{nx}{2}} \dfrac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$

CCl : $S_n = \cos(nx) \dfrac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$

II Techniques utilisant ou non les nombres complexes

1) Formules d'addition

Prop ① $\cos(a+b) = \ldots$

D/ $e^{i(a+b)} = e^{ia} e^{ib} = (\cos(a) + i\sin(a))(\cos(b) + i\sin(b))$

$= [\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)] + i\,[\cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos$

- $Re(e^{i(a+b)}) \to \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $Im(\ldots) \to \sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\sin(b)$

2) Formule pour tangente

$\boxed{\text{cf cours trigo}}$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$$

3) Formules de duplication

On a ①

$(e^{ia})^2 = e^{i2a} = (\cos a + i\sin a)^2 = \cos^2(a) + 2i\cos(a)\sin(a) - \sin$

- $Re(\ldots) \to \cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$

$= \cos^2 a - (1 - \cancel{\cos}^2 a)$

$= 2\cos^2 a - 1$

III Techniques sur les complexes

1) Valeurs remarquables

$\boxed{R^*}$ Cercle trigo

2) Angles associés

Idem ; $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$; etc...

3) Phase et amplitude

Idée : une combinaison linéaire de sinusoïdes (de même période) en est une

Prop : Soient $A, B \geq 0$ et soient $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$

On considère

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto A\cos(t+\varphi)$$

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto B\cos(t+\psi)$$

Alors $\exists C \geq 0$, $\exists \alpha \in \mathbb{R}$:

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) + g(t) = C\cos(t+\alpha)$$

D/ Soit $x \in \mathbb{R}$ Astuce : on factorise par $\sqrt{A^2+B^2}$ Ce sera C

On a $f(t) + g(t) = \sqrt{A^2+B^2}\left(\underbrace{\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}}_{\text{noté } a}\cos(t+\varphi) + \underbrace{\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}}_{\text{noté } b}\cos(t+\psi)\right)$

On a $\boxed{a^2+b^2=1}$

Fixons donc $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tq

$$a = \cos(\theta_0) \text{ et } b = \sin(\theta_0)$$

Posons $C := \sqrt{A^2+B^2}$

Donc

$$f(t)+g(t) = C\left[\cos(\theta_0)\cos(t+\varphi)+\sin(\theta_0)\cos(t+\varphi)\right]$$

Or $\cos(t+\cancel{\varphi}\varphi) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-(t+\varphi)\right)$

$$= -\sin\left(t+\varphi-\frac{\pi}{2}\right)$$

Donc .

$$f(t)+g(t) = C\left[\cos(\theta_0)\cos(t+\varphi)-\sin(\theta_0)\sin\left(t+\varphi-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

(...)

Prop : (cas simple)

Soient $A, B > 0$

Il existe $C \geq 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ tq

$\forall t \in \mathbb{R}$, $A\cos(t) + B\sin(t) = C\cos(t+\varphi)$

D/ On pose $C := \sqrt{A^2+B^2}$ et on fixe $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tq

$$\cos(\theta_0) = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad \text{et} \quad \sin(\theta_0) = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

On a $\forall t$

$$A\cos(t) + B\sin(t) = C\left[\cos(\theta_0)\cos(t) + \sin(\theta_0)\sin(t)\right]$$

$$= C\cos(t-\theta_0)$$

■

Retour à la preuve

$f(t) + g(t)$

$$= C\left[\cos(\theta_0)\cos\varphi + \sin(\theta_0)\cos(\psi)\right]\cos(t)$$

$$- C\left[\cos(\theta_0)\sin(\varphi) + \sin(\theta_0)\sin(\psi)\right]\sin(t)$$

C'est une CL de $\cos(t)$ et $\sin(t)$.

On applique le cas simple

DLR ■