Chapitre 7 : Théorie des ensembles II, Applications

Soient E, F, G, H des ensembles

I) Généralités

1) Applications

Déf° : • Une application f de E dans F est la donnée pour tout élément $x \in E$ d'un élément de F noté $f(x)$

• On note alors $f : \begin{array}{l} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x) \end{array}$

• L'ensemble des applications de $E \longrightarrow F$ est noté :

$$\mathcal{F}(E, F)$$

• On note $f : E \longrightarrow F$ pour signifier $f \in \mathcal{F}(E,F)$

Remarques

• Les ensembles E et F sont inclus dans la donnée de $f : E \longrightarrow F$.
Ainsi les applications :

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto x^2 \end{array}$$

sont distinctes.

- La question du domaine de définition d'une application $f : E \longrightarrow F$ ne se pose pas. Par définition, dans ce cas, $f(x)$ est défini pour tout $x \in E$.

• Si $f : E \times F \longrightarrow G$ et si $(x,y) \in E \times F$, on notera $f(x,y)$ au lieu de $f((x,y))$

• De même si $n \in \mathbb{N}^*$, si $E_1, E_2, \dots, E_n$ ensembles et si

$$f : E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n \longrightarrow F$$

Notation : si $f : E \longrightarrow F$, on notera $f(\cdot)$ l'application f

b) vocabulaire

Soit $f : E \longrightarrow F$.
Soit $x \in E$ et $y \in F$

Alors, on dit que :

- E est l'ensemble de départ de f
- E est le domaine de f
- F est l'ensemble d'arrivée de f
- F est le codomaine de f

Définition

On dit que y est atteint par f $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\exists a \in E : y = f(a)$

Definition

On dit que y est l'image de x par f et on dit que x est un antecedent de y par f $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $y = f(x)$

• Dans ce cours, une fonction sera une application $f : E \to F$ tq $F \subset \mathbb{R}$ (ou $F \subset \mathbb{C}$)

• En g^{al} une fonction $f : E \to F$, c'est une applicat° $f : E \to F$

c) cardinal

Proposition

On suppose E, F finis

Alors :

1) $\mathcal{F}(E,F)$ est fini

2) $|\mathcal{F}(E,F)| = |F|^{|E|}$

D/ On pose $n := |E|$
On écrit $E = \{x_1, \dots, x_n\}$
Pour construire $f : E \to F$ on procède ê suit :

1°) on determine $f(x_1)$: on a $|F|$ choix possibles

2°) on détermine $f(x_2)$: on a $|F|$ choix possibles

⋮

$n°)$ ——— (f_{x_n}) : ———

Ce procédé de construction étant exhaustif et sans redondance, on a :

$$|\mathcal{F}(E,F)| = \underbrace{|F| \times |F| \times \dots \times |F|}_{n \text{ fois}}$$

$$= |F|^n = |F|^n \quad \blacksquare$$

d) représentations graphiques

Définition Soit $f : E \to F$

- Le graphe de f, noté Γ_f est la partie de $E \times F$ défini par $\Gamma_f := \{(x,y) \in E \times F \mid y = f(x)\}$

- Quand E et $F \subset \mathbb{R}$, on note aussi

$$\mathcal{C}_f := \Gamma_f$$

et on l'appelle courbe représentative de f

Exemple

Ocsd $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, qu'on note aussi $(\cdot)^2$
$x \longmapsto x^2$

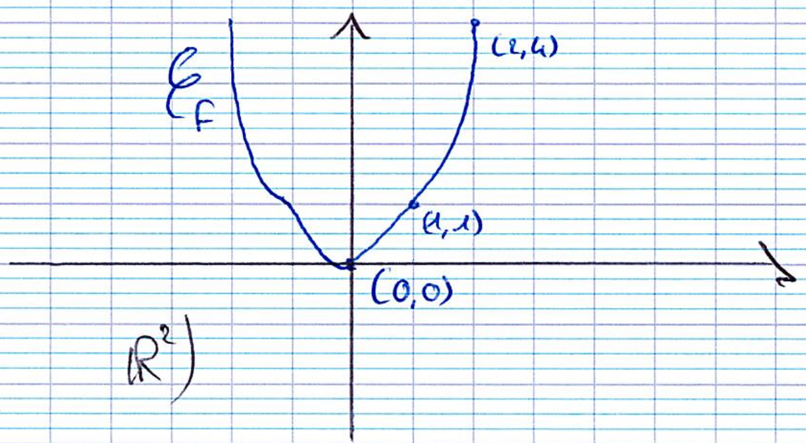
Par définition, on a $\mathcal{C}_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=f(x)\}$

On a : $\cdot\,(0,0)\in\mathcal{E}_f$ car $f(0)=0^2=0$

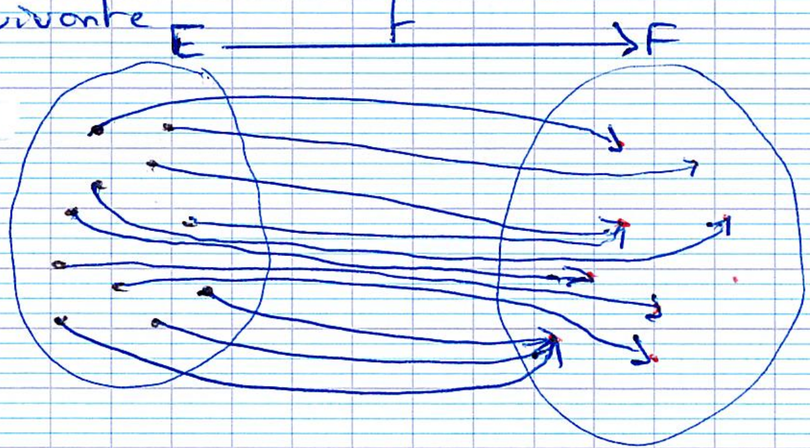
$\cdot\,(1,1)\in \mathcal{E}_f$ car $1=f(1)=1^2$

$\cdot\,(2,4)\in\mathcal{E}_f$, $(5,25)\in\mathcal{E}_f$, $(13,169)\in\mathcal{E}_f$, ect.

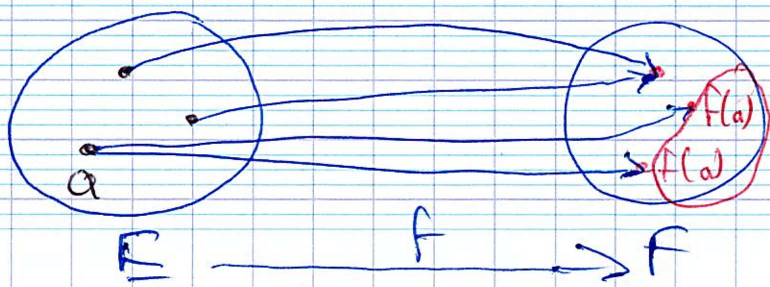
Dessinons $\mathcal{E}_f$.



On peut représenter les applications $f: E\to F$ de la façon suivante



ou



$\boxed{\text{BUG ++}}$

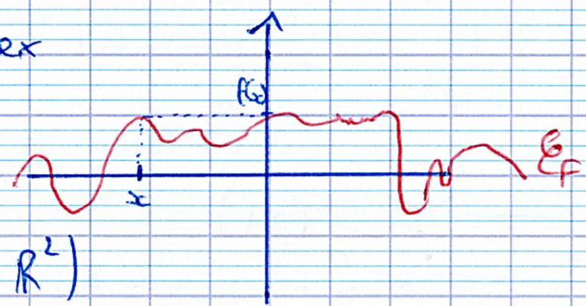
Ça n'a pas de sens

Rq : on note aussi $E \xrightarrow{f} F$ au lieu de $f : E \to F$

⚠ Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas forcement definie par une formule. Il faut imaginer qu'il existe des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui associe à tout $x \in \mathbb{R}$ un élement $f(x) \in \mathbb{R}$ de façon anarchique

De m̂, on pourra se satisfaire pour definir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ d'un dessin de son graphe $\mathcal{E}_f$

P. ex



e) exemples

- $$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ z &\longmapsto (\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)) \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \mathcal{P}(MPSI_3) &\longrightarrow \mathbb{N} \\ A &\longmapsto |A| \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbb{R} \to \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto 42 \end{aligned}$$

C'est une application constante

$$\textcircled{T}\ f : \mathcal{P}(\mathbb{U}_n) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$A \longmapsto \sum_{\omega \in A} \omega$$

On a $f(\emptyset) = 0$ et $f(\mathbb{U}_n) = 0$ (si $n \geq 1$) et $f(\{1\}) = 1$

- $$\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
  $$F \longmapsto \mathcal{C}_F$$

- $$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$$
  $$A \longmapsto A \cup \{0\}$$

- $$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$$
  $$A \longmapsto \mathbb{N}^*$$

Rq : on a vu q $E \subset F \Rightarrow \mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$
Donc $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*) \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ie $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$

- $$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$$
  $$A \longmapsto \{k^2 ; k \in A\}$$

- $$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$$
  $$A \longmapsto \{[\![a, b]\!] ; (a, b) \in A^2\}$$

- $$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$$
  $$A \longmapsto \mathbb{N} \setminus A$$

- $$\mathbb{C}^3 \xrightarrow{\Phi} \mathcal{F}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$$
  $$(a, b, c) \longmapsto \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & a \times (z - b) + c \end{array}$$

Pour $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, $\Phi(a, b, c) \in \mathcal{F}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$

On a $\Phi(1,0,1) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$
$$z \longmapsto z+1$$

Donc $\Phi(1,0,1)(-1) = 0$

Autres exemples

• Soit E un ensemble

Ocsd $\mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$
$$A \longmapsto \bar{A}$$

Et : $\mathcal{P}^2(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ ce sont des applications
$$(A,B) \longmapsto A \cap B$$

• Soient E, F ensembles ; osq $E \neq \emptyset$
Fixons $a \in E$
Ocsd $\mathcal{F}(E,F) \longrightarrow F$
$$f \longmapsto f(a)$$

C'est l'evaluation en a. On la note $\bar{e}v_a$

On a $\bar{e}v_a : \mathcal{F}(E,F) \longrightarrow F$

($\underline{ex}$: $\bar{e}v_0(\exp) = 1$ et $ev_0(\cos) = 1$)

Ie, on a $\bar{e}v_a \in \mathcal{F}(\mathcal{F}(E,F), F)$

Ocsd $E \longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{F}(E,F), F)$
$$a \longmapsto \bar{e}v_a$$

On peut noter cette application $\bar{e}v$.

Ie on a

$$\text{év}_a : E \longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{F}(E,F),F)$$
$$a \longmapsto \begin{pmatrix} \mathcal{F}(E,F) \longrightarrow F \\ f \longmapsto f(a) \end{pmatrix}$$

On a

$$\text{év}_a \in \mathcal{F}(E, \mathcal{F}(\mathcal{F}(E,F),F))$$

- Soient E, F, G des ensembles

Ocsd $\mathcal{F}(E, \mathcal{F}(F,G)) \longrightarrow \mathcal{F}(E\times F, G)$
$$\Phi \longmapsto \begin{pmatrix} E\times F \longrightarrow G \\ (x,y) \longmapsto \Phi(x)(y) \end{pmatrix}$$

et $\mathcal{F}(E\times F, G) \longrightarrow \mathcal{F}(E, \mathcal{F}(F,G))$

Par moi

2) Applications remarquables

a) identité

Def° : l'application identité de E, notée Id_E est l'applicat° de E dans E definie par

$$Id_E : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$

b) applications constantes

Def° : Soient E, F ensembles tq $F \neq \emptyset$
Soit $b \in F$
L'application constante de E dans F egale à b notée $\tilde{b}$ est definie par :

$$\tilde{b} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & b \end{array}$$

Rq : En toute rigueur on aurait du garder la trace de E et F dans la notation de cette applicat°. En general le contexte est suffisant.
Sinon on noterait $\tilde{b}^{[E,F]} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & b \end{array}$

Ex : on dispose donc de $\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathcal{F}(E,F) \\ b & \longmapsto & \tilde{b} \end{array}$

- Ocsd $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x+1 \end{array}$

La fonction f est derivable et on a $f' = \tilde{2}$

c) fonctions indicatrices !!!

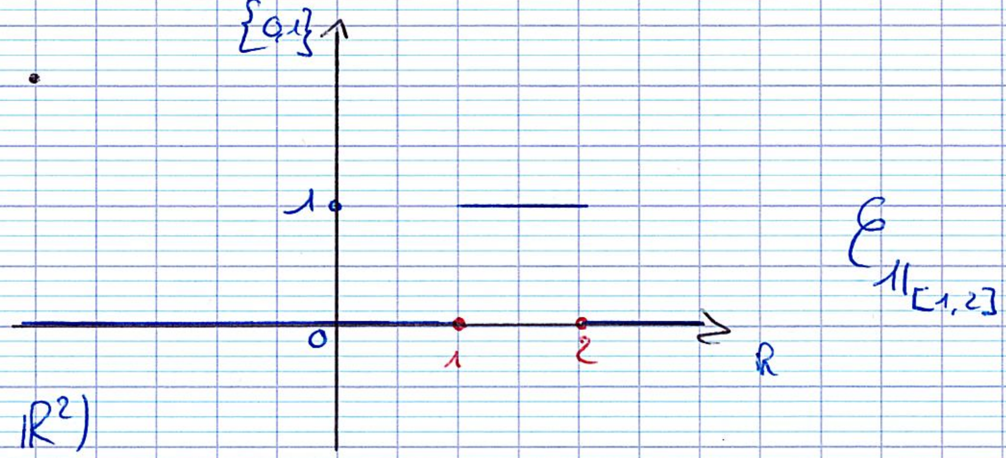
Def° Soit $A \subset E$

L'application indicatrice de A (fonction caractéristique de A) notée $\mathbb{1}_A : E \longrightarrow \{0,1\}$ est l'application définie par

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathbb{1}_A : E & \longrightarrow & \{0,1\} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}}$$

Rq : en toute rigueur $\mathbb{1}_A^{[E]} : E \longrightarrow \{0,1\}$

Ex •



• Plus subtil : dessinons $\mathcal{C}_{\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}}$

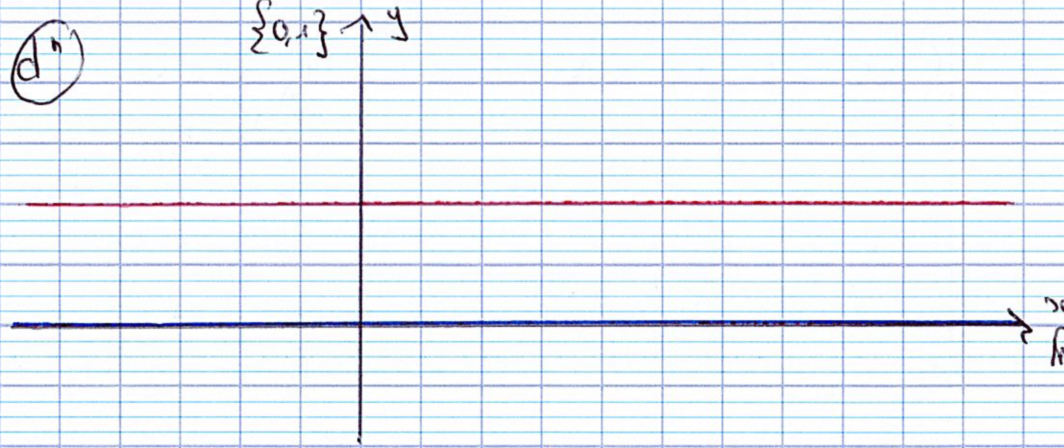
On a $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \longrightarrow \{0,1\}$

$$x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(1) = 1$ et $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(2) = 1$

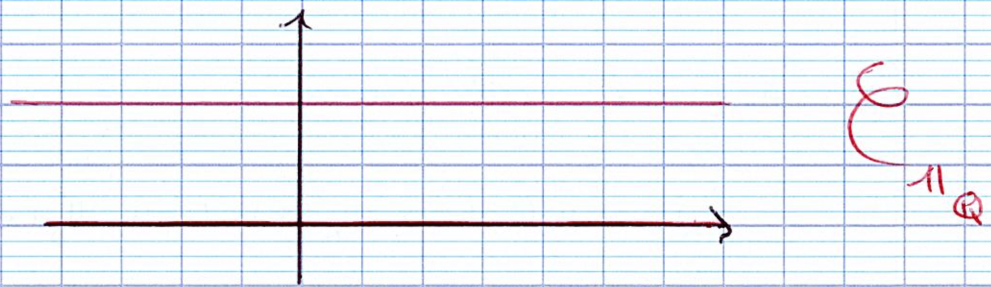
On a $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(\sqrt{2})=0$, $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(\sqrt{6})=0$ et $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(\sqrt{2}\cdot\sqrt{3})=0$

(d')



(Exo) (T) $x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \Rightarrow x+y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

Fe



Remarque :

Soient $A, B \subset E$

On peut exprimer $\mathbb{1}_{A\cap B}$ et $\mathbb{1}_{A\cup B}$ et $\mathbb{1}_{\bar{A}}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et de $\mathbb{1}_B$

Fait : On a $\mathbb{1}_{\bar{A}} = \tilde{1} - \mathbb{1}_A$

DI (Q) R× une égalité d'applications est une $\forall$-assertion ! (T)

$$f = g \iff \forall x \in E, f(x) = g(x)$$

pour $f, g : E \longrightarrow F$

Soit $x \in A$. OD2 Cas

Cas 1 : $x \in A$: on a $\begin{cases} \mathbb{1}_{\bar{A}}(x) = 0 \\ (\tilde{1} - \mathbb{1}_A)(x) = 1 - \mathbb{1}_A(x) = 1 - 1 = 0 \end{cases}$

Cas 2 : ect

Fait : On a $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$

D/ Soit $x \in E$ OD2 Cas

Cas 1 : $x \in A$ OD2 sous cas

cas a) : $x \in B$. On a $\mathbb{1}_A(x) = 1$ et $\mathbb{1}_B(x) = 1$

Donc $\mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) = 1$; on a $x \in A \cap B$ donc $\mathbb{1}_{A \cap B}(x) = 1$

cas b) $x \notin B$. On a $\mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) = 1 \times 0 = 0$

Ĉ $x \notin B$, on a $x \notin A \cap B$ et donc $\mathbb{1}_{A \cap B}(x) = 0$

Cas 2 : $x \notin A$, on a de m̄ : $\mathbb{1}_{A \cap B} = 0 = \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) = 0 \times \mathbb{1}_B(x) = ($

Fait : On a $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A \cap B}$

D/ On a $\mathbb{1}_{\overline{A \cup B}} = \tilde{1} - \mathbb{1}_{A \cup B}$

$= \mathbb{1}_{\bar{A} \cap \bar{B}} = \mathbb{1}_{\bar{A}} \times \mathbb{1}_{\bar{B}} = (\tilde{1} - \mathbb{1}_A)(\tilde{1} - \mathbb{1}_B)$

DACQA

$$= \tilde{1} - 1\!\!1_A - 1\!\!1_B + 1\!\!1_{A\cap B}$$

DLR ☒

3) Restriction et corestriction

Def° Soit $f : E \to F$ et soit $A \subset E$

La restriction de f à A, notée $f|_A$, est l'application de A dans F définie par
$$f|_A : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Def° : Soit $f : E \to F$ et soit $B \subset F$ tq $\forall x \in E, f(x) \in B$

La corestriction de f à B, notée $f|^B$, est l'application de E dans B définie par
$$f|^B : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

4) Composée de deux applications

a) définition

Def° : Soient E, F, G ensembles
Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$
La composée de f par g, notée $g \circ f$, est l'application de E dans G définie par :

$$\boxed{g \circ f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}}$$

4^n
$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & F \arrow[r, "g"] & G \end{tikzcd}$$

Remarque

Si $f : E \longrightarrow F_1$ et $g : F_2 \longrightarrow G$

et si $F_1 \subset F_2$, on pourra aussi composer f et g et on notera

encore $g \circ f : E \longrightarrow G$
$x \longmapsto g(f(x))$

Exemples

• Ocsd $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x+1$
et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^2$

Dans ce cas, on peut considérer $g \circ f$ et $f \circ g$

Soit $x \in \mathbb{R}$

On a $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+1)$

$= (x+1)^2$

et $f \circ g = f(g(x)) = f(x^2)$

$= x^2 + 1$

Ainsi on a $(g \circ f)(1) = 4$ et $(f \circ g)(1) = 2$

Ainsi : $(g \circ f)(1) \neq (f \circ g)(1)$

Donc $\exists x_0 \in \mathbb{R} : (g \circ f)(x_0) \neq (f \circ g)(x_0$

Donc $\boxed{g\circ f \neq f\circ g}$

En general : la composition n'est pas commutative

- Ocsd

$$A : \mathcal{F}(E\times F, G) \longrightarrow \mathcal{F}(E, \mathcal{F}(F,G))$$

$$\Phi \longmapsto \overbrace{\begin{pmatrix} E \longrightarrow \mathcal{F}(F,G) \\ x \longmapsto \underbrace{\begin{matrix} F \longrightarrow G \\ y \longmapsto \Phi(x,y)\end{matrix}}_{A(\Phi)(x)} \end{pmatrix}}^{A(\Phi)}$$

et $B : \mathcal{F}(E, \mathcal{F}(F,G)) \longrightarrow \mathcal{F}(E\times F, G)$

$$\Psi : \longmapsto \begin{matrix} E\times F \longrightarrow G \\ (x,y) \longmapsto \Psi(x)(y)\end{matrix}$$

Ici A,B sont composables dans les deux sens

Calculons $B\circ A$
Soit $\Phi : E\times F \longrightarrow G$ Calculons $(B\circ A)(\Phi)$

d^n On a $\mathcal{F}(E\times F, G) \xrightarrow{A} \mathcal{F}(E, \mathcal{F}(F,G)) \xrightarrow{B} \mathcal{F}(E\times F, G)$

Ψ

Φ

On a $(B\circ A)(\Phi \in \mathcal{F}(E\times F, G)$

Soit $(x,y) \in E \times F$. On calcule

$\boxed{B}$ $\forall \varphi$: $B(\varphi)(x,y) = \varphi(x)(y)$

$$(B \circ A)(\Phi)(x,y) = B(A(\Phi))(x,y)$$

$$= \underbrace{\left(A(\Phi)(x)\right)}_{AC \ \in \mathcal{F}(F,G)}(y) = \Phi(x,y)$$

Ainsi : on a mq

$$\forall x,y \in E\times F, \ \underbrace{(B\circ A)(\Phi)}_{\in \mathcal{F}(E\times F, G)}(x,y) = \underbrace{\Phi}_{E\times F \to G}(x,y)$$

AC Donc $(B\circ A)(\Phi) = \Phi$

Ainsi on a montré que :

$$\forall \Phi \in \mathcal{F}(E\times F, G), (B\circ A)(\Phi) = \Phi$$

Ie on a
$$B\circ A : \mathcal{F}(E\times F, G) \longrightarrow \mathcal{F}(E\times F, G)$$
$$\Phi \longmapsto \Phi$$

CCl $B\circ A = Id_{\mathcal{F}(E\times F, G)}$

exo Calculer $A\circ B$

b) associativités

Ocsd $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$

$$\boxed{\underline{\text{Prop}} : \text{On a } \quad h\circ(g\circ f) = (g\circ h)\circ f}$$

dⁿ

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] \arrow[rrr, bend right=50, "h\circ(g\circ f)"'] & F \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "h\circ g"] & G \arrow[r, "h"] & H
\end{tikzcd}$$

On dit que la composition est <u>associative</u>

D/ Soit $x \in E$

On $\big(h\circ(g\circ f)\big)(x) = h\big((g\circ f)(x)\big)$

$= h\big(g(f(x))\big)$

et $\big((h\circ g)\circ f\big)(x) = h\circ g\,(f(x)) = h(g(f(x)))$

DLR

Rq

Ainsi on pourra noter simplement $h\circ g\circ f$: cette application est égale à l'une ou l'autre des applications possibles

• De même : si on dispose de quatre applications composables f, g, h et i,

on a $\left(i \circ (h \circ g) \right) \circ f \overset{\text{DACQP}}{=} \left(\underbrace{(i \circ h)}_{\text{notée } j} \circ g \right) \circ f$

$= (j \circ g) \circ f \underset{\text{DACQP}}{=} j \circ (g \circ f) = (i \circ h) \circ (g \circ f)$

De façon générale tous les parenthésages possibles de l'expression $i \circ h \circ g \circ f$ donnent le même résultat

• CCl on pourra écrire directement $i \circ h \circ g \circ f$

De même pour la composée de $5, 6, \ldots, n$ applications

c) composition et identité

Prop - ✱

Soit $f : E \to F$

Alors $Id_F \circ f = f \circ Id_E = f$

D/

Soit $x \in E$. On a $(Id_F \circ f)(x) = Id_F(f(x)) = f(x)$ car $\forall y \in F$

$Id_F(y) = y$

Donc on a mq $\forall x \in E, (Id_F \circ f)(x) = f(x)$

On a mq $\boxed{Id_F \circ f = f}$

De m̃ pour $\boxed{f \circ Id_E = f}$

$\blacksquare$

5) Diagrammes

Déf :

Un diagramme est la donnée d'ensembles et d'applications "reliant" certains de ces ensembles

Exemples

- $$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "a"] \arrow[dr, "\beta"'] & F \arrow[r, "b"] & G \arrow[dl, "\alpha"] \\ & H & \end{tikzcd}$$

- $$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

On dit qu'un diagramme est commutatif ⚠ ssi

"tous chemins du diagramme" ayant m̃ but et m̃ origine sont égaux.

Ex :

- $$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[rd, bend left=60, "b\circ a"] \arrow[rd, bend right=60, "\beta\circ\alpha"'] & F \arrow[d, "b"] \\ G \arrow[r, "\beta"'] & H \end{tikzcd}$$ commute $\Leftrightarrow b\circ a = \beta\circ\alpha$

- Notons $c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (on peut la noter $\overline{\cdot}$)
  $z \mapsto \bar{z}$

Ocsd
$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "c"] \arrow[rd, "Id_{\mathbb{C}}"'] & \mathbb{C} \arrow[d, "c"] \\ & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

Ce diagramme commute : on a $c\circ c = Id_{\mathbb{C}}$

On dit q c est une involution

(Dḿ Soit $z \in \mathbb{C}$, On a $(c\circ c)(z) = c(c(z))$

$= c(\bar{z}) = \bar{\bar{z}} = z = Id_{\mathbb{C}}(z)$ ■)

6) Endo-applications

a) def°

Une endo-application de E est une applicat° de E dans E

b) points fixes

Def°: Soit $f : E \to E$ et soit $x \in E$

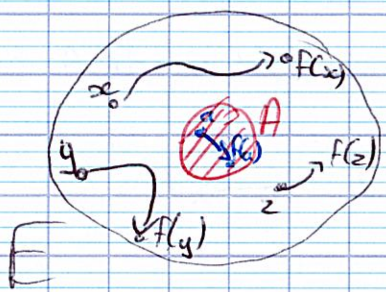
On dit que x est un point fixe de f $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $f(x) = x$

c) !! parties stables et endo-application induite

Def°: Soit $f : E \to E$
Soit $A \subset E$

• On dit que A est stable par f $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\forall a \in A, f(a) \in A$

dⁿ



Exemple

Ocsd $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$

Voici des parties de $\mathbb{R}$ stables par f

• $\mathbb{R}_+$ • $\mathbb{R}$ • $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ • 0 et 1 sont les points fixes de f ;

$\{1\}$ et $\{0\}$ sont stables • $\{0,1\}$

- $\{2k, k \in \mathbb{Z}\}$ (noté aussi $2\mathbb{Z}$)
- $[0, 1]$ • $[-1, 1]$ • $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$
- $[1, +\infty[$ et $[2; +\infty[$

Déf° (7)

Si A est stable par f, alors l'application $f|_A : A \to E$ est corestreignable à A : on peut considérer $(f|_A)|^A$. C'est une application de A dans A.

On l'appelle endo-application de A induite par f et on la note $f||_A : A \longrightarrow A$

d) composées itérées

Déf° : Soit $f : E \longrightarrow E$. Soit $n \in \mathbb{N}$

On pose $f^{n+1} := f^n \circ f$.

Rq : On a $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}}$

On pose $f^0 := Id_E$.

(d°) $E \xrightarrow{f} E \xrightarrow{f} \ldots \xrightarrow{f} E$

f^n

Prop : Soit $f : E \longrightarrow E$

Alors : $\forall n, m \in \mathbb{N},\ f^{n+m} = f^n \circ f^m = f^m \circ f^n$

III - Injections, Surjections, Bijections

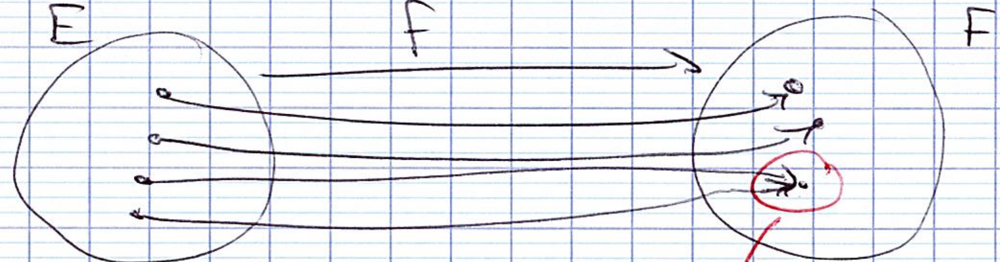
1. Injections

a) définition

Déf° : Soit $f : E \longrightarrow F$. On dit que f est injective ssi

$$\boxed{\forall x, x' \in E,\ x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')}$$

d°



f n'est pas injective

⚠ Pour dire : " on a $f(a) = f(b)$ donc $a = b$ ", il faut que f soit injective.

b) propriétés des injections

Prop : Ocsd le diagramme $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$. Alors :

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ injective} \\ g \text{ injective} \end{array}\right\} \Longrightarrow g \circ f \text{ injective}$$

D/ Mq $\left.\begin{array}{l} f \text{ inj} \\ g \text{ inj} \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f$ inj

Osq f inj et g inj

Mq $g \circ f$ inj

Ie mq $\forall x, x' \in E$, $x \neq x' \Rightarrow (g \circ f)(x) \neq (g \circ f)(x')$

Soient $x, x' \in E$ tels que $x \neq x'$

Mq $(g \circ f)(x) \neq (g \circ f)(x')$

On a $x \neq x'$ donc, ĉ f est inj $f(x) \neq f(x')$.

Ĉ g est inj on a aussi $g(f(x)) \neq g(f(x'))$

Ie on a $(g \circ f)(x) \neq (g \circ f)(x')$

La réciproque de cette application est-elle vraie?
Ie a-t-on en gal Ⓣ :

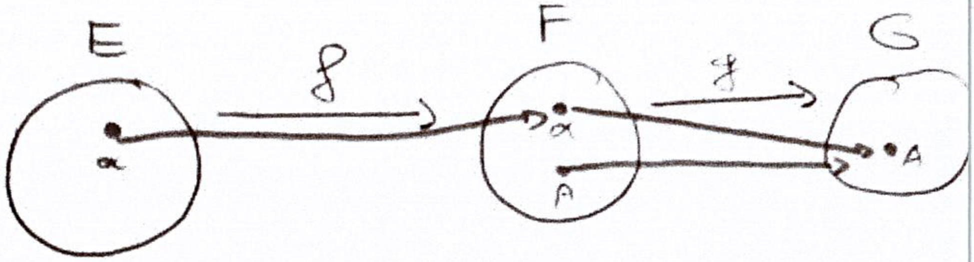
$$g \circ f \text{ inj} \Rightarrow (f \text{ inj et } g \text{ inj})$$

NON

CTrex

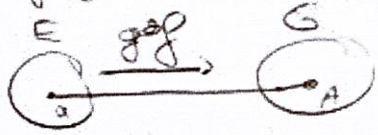
- Le plus simple est de définir f et g par des dessins avec des diagrammes dessins avec des diagrammes.

• Ocsd :



On a : • g n'est pas injective.

• en revanche $g \circ f$ est injective

→ c'est 

De façon plus générale, une application

$f : E \longrightarrow F$ avec E fini de cardinal 1

est toujours injective.

• Ocsd $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{array}$ et $g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ y \longmapsto y^2 \end{array}$

Alors : g n'est pas injective car $g(-1) = g(1)$
Mais $g \circ f$ est injective
En effet, pour $x \in \mathbb{R}_+$, on a $(g \circ f)(x) = (\sqrt{x})^2 =$

On a cependant une réciproque partielle

Prop : Ocsd $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$. Alors

$$g \circ f \text{ inj} \Rightarrow f \text{ inj}$$

Rq !! : Pour mq f est injective on utilise souvent la formule suivante :

Mq $\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

D/ Osq $g \circ f$ inj

Mq f inj

Ie mq $\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

Soient $x, x' \in E$ tq $f(x) = f(x')$

Mq $x = x'$

Comme $f(x) = f(x')$, on a

$g(f(x)) = g(f(x'))$, ie on a

$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$

Or $g \circ f$ inj

Donc $x = x'$

Donc f inj

$\mathcal{D}/^2$

ORP contrap.

Mq f non-inj $\Longrightarrow g \circ f$ non-inj

Osq f non inj

Mq $g \circ f$ non inj

$\hat{C}$ f est non inj, on a non$(\forall x, x' \in E, x \neq x' \Rightarrow$ ...

Ie on a: $\exists x, x' \in E : \begin{cases} x \neq x' \\ f(x) = f(x') \end{cases}$

Fixons $x, x' \in E$ de tels éléments

$\hat{C}$ $f(x) = f(x')$, on a $g(f(x)) = g(f($...

Ie on a $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$

Ainsi on a

$$\exists x, x' \in E : \begin{cases} x \neq x' \\ (g \circ f)(x) = (g \circ f)(x') \end{cases}$$

Ie on a $g \circ f$ non-inj

D'où l'implicat° contraposée.

DLR ■

c) lien avec le cardinal

Prop :

Soit E, F finis et soit $f : E \to F$
Alors :

$$f \text{ inj} \Rightarrow |E| \leq |F|$$

D/ + tard dans l'année

Rq : on a la forme contraposée :

$$\left.\begin{array}{l} f : E \to F \\ |E| > |F| \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ non-injective}$$

2) Surjections

a) définition

Déf : Soit $f : E \to F$. On dit que f est surjective $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\forall y \in F, \exists x \in E : y = f(x)$$

Ie, f est surjective quand tous les éléments de F sont atteints par f.

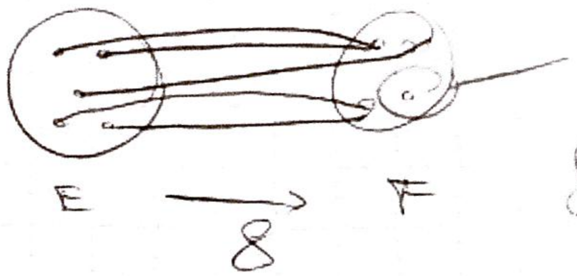
__Exemple :__

- Ocsd $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{array}$

  Alors f __n'est pas surjective.__ (ex : -1 n'è [illegible]

- Ocsd $g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto x^2 \end{array}$. Elle est __surjective.__

d^m



" défaut de surjectivité "

f est non-surj

b) propriétés

> **Prop** : Ocsd $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$. Alors :
>
> $$\left.\begin{array}{l} f \text{ surj} \\ g \text{ surj} \end{array}\right\} \Longrightarrow g \circ f \text{ surj}$$

À savoir faire R^x

D/

Osq f surj et g surj

Mq $g \circ f$ surj.

Ie mq $\forall z \in G, \exists x \in E : z = (g \circ f)(x)$

Soit $z \in G$

Mq $\exists x \in E : z = (g \circ f)(x)$

dm

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

$\exists x \in E$ $\quad$ $\exists y \in F \longrightarrow z \in G$

Ĉ g ē surj et comme $z \in G$, on sait que $\exists y \in F : z = g(y)$.

Fixons un tel $y \in F$

Ĉ f est surj ê ĉ $y \in F$, On sait que $\exists x \in E : y = f(x)$

Fixons un tel $x \in E$

$$\begin{aligned} \text{On a } (g\circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(y) \\ &= z \end{aligned}$$

On a mq $\exists x \in E : z = (g\circ f)(x)$

On a mq $\forall z \in G, \exists x \in E : z = (g\circ f$

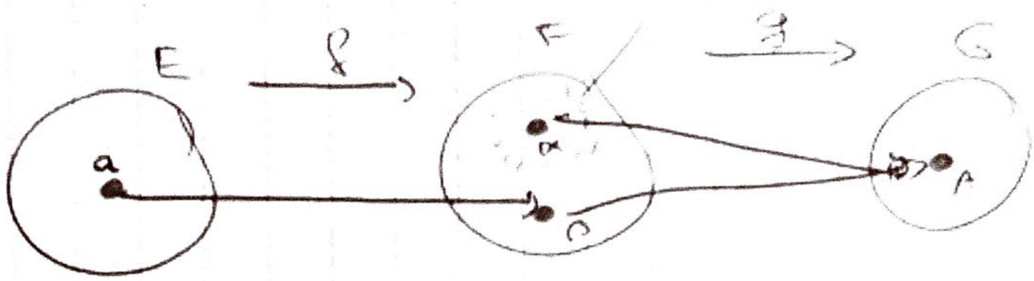
Ie, on a mq $g\circ f$ est surj.

La réciproque est fausse.

Contre-exemples :

• Ceci le diagramme sagittal

Défaut de surjectivité



La composée est :

Elle est surjective.

Cependant, f n'est pas surjective.

• Ceci $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{array}$; $g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto \sqrt{|y|} \end{array}$

Calculons la composée. Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{|x^2|}$$

$$= \sqrt{x^2} = |x|$$

On voit que $g\circ f$ est surjective.

En revanche f n'est pas surjective.

On a une réciproque partielle.

Prop : Ocsd $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$. Alors on a

$g \circ f$ surj $\Rightarrow g$ surj

D/ Osq $g \circ f$ surjective

Mq g est surj

Ie mq $\forall z \in G, \exists y \in F : z = g(y)$

Soit $z \in G$.

Mq $\exists y \in F : z = g(y)$

Ĉ $z \in G$ et ĉ $g \circ f$ surj
on sait que $\exists x \in E : z = (g \circ f)(x)$

Fixons un tel $x \in E$.

Posons $y := f(x)$

On a $y \in F$ et $g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x)$
$= z$

On a mq $\exists y \in F : g(y) = z$

On a donc mq

$\forall z \in G, \exists y \in F : z = g(y)$

Ie on a mq g surj

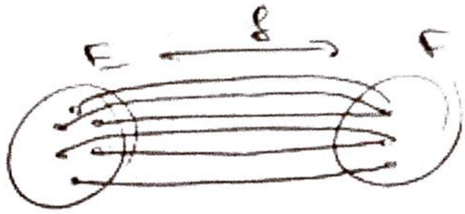
DLR de récip partielle

c) lien avec le cardinal

Prop : Osq E, F finis ; ocsd $f : E \to F$

Alors $\boxed{f \text{ surj} \Rightarrow |E| \geq |F|}$

dᵐ



Rq : l'inversion contraposée est :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f : E \to F \\ |E| < |F| \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ non surj}}$$

3) Bijections

a) définition

Défⁿ : Soit $f : E \to F$. On dit que f est bijective ssi f ē injective et surjective

Rq : on a $\underline{f \text{ bij} \Leftrightarrow \forall y \in F, \exists! x \in E : y = f(x)}$

D/

$\Rightarrow$ Osq f est bijective.

Mq $\forall y \in F, \exists! x \in E : y = f(x)$

Soit $y \in F$

Mq $\exists! x \in E : y = f(x)$

Existence :

$\hat{C}$ f est surj car f bij et $\hat{c}$ $y \in$ on sait que $\exists x \in E : y = f(x)$

d'où l'existence

Unicité :

Soient $x_1, x_2 \in E$ tq $\begin{cases} y = f(x_1) \\ y = f(x_2) \end{cases}$

Mq $x_1 = x_2$

On a $f(x_1) = f(x_2)$. Or f est injective puisque f est bijective

Donc on a bien $x_1 = x_2$

D'où l'unicité

On a bien mq $\exists! x \in E : y = f(x)$

On a Mq $\forall y \in F, \exists! x \in E : y = f(x)$

($\Leftarrow$) Osq $\forall y \in F, \exists!\, x \in E : y = f(x)$

Mq f est bijective.

- **Déjà** : f est surjective (on a supposé "l'existence et l'unicité", on a donc en particulier l'existence)

- Mq f ê inj. Ie mq $\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

  Soient $x, x' \in E$ tq $f(x) = f(x')$

  Mq ~~f~~ $x = x'$

  Posons $y := f(x)$. On sait que

  $\exists!\, a \in E : y = f(a)$

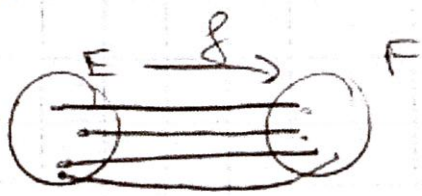
  Donc par unicité, on a $x = x'$

  DCR

DCR

b) propriétés

d^{n}



Prop : Cosd $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$

Alors :

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ bij} \\ g \text{ bij} \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f \text{ bij}$$

D^{tt} / Osq f bij & g bij

Mq $g \circ f$ bij. Ie mq $g \circ f$ inj et $g \circ f$ surj

Mq $g \circ f$ inj

Ĉ f bij, on a f inj. De m̂ : g inj

DACQP $g \circ f$ inj

Mq $g \circ f$ surj

IDEM

La récipr^q ê fausse.

Contre-exemples :

Ici, f n'ê $\emptyset$ surj dc pas bij

et g n'est pas inj dc pas bij

Mais $g\circ f$: $E \xrightarrow{g\circ f} G$ est bij.

- Ccsd $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array}$; elle n'est pas surj ((-1) n'est atteint)

Et $g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \\ y \mapsto \sqrt{|y|} \end{array}$; elle n'est pas inj ($g(1) = g(-1)$)

Calculons la composée. Soit $x \in \mathbb{R}_+$

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{|x^2|}$$

$$= \sqrt{x^2} = |x|$$

Δ en gal $\sqrt{a^2} \neq a$

$$= x \quad (x \in \mathbb{R}_+)$$

D'où $\boxed{g\circ f = Id_{\mathbb{R}_+}}$ donc $g\circ f$ est bijective

Rq : Pour tout ensemble E, Id_E est inj, est surj et est bij.

Il n'y a pas de réciproque partielle. Mais on a ①

$$g\circ f \text{ bij} \Longrightarrow \begin{cases} f \text{ injective} \\ g \text{ surjective} \end{cases}$$

c) lien avec le cardinal

Prop : ~~Soit~~ E, F finis. Qsd $f : E \to F$

Alors f bij $\Rightarrow |E| = |F|$

D/ Ⓣ

$$\begin{tikzcd}
 & f \text{ inj} \arrow[r] & |E| \leq |F| \arrow[dr] & \\
f \text{ bij} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & |E| = |F| \\
 & f \text{ surj} \arrow[r] & |E| \geq |F| \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

4) Réciproque d'une application

a) définition

Soit $f : E \to F$

Déf : Soit $g : F \to E$. On dit que g est réciproque à f ssi

$$g \circ f = Id_E \quad \text{et} \quad f \circ g = Id_F$$

Rq : Soit $f : E \to F$ et $g : F \to E$

Alors g réciproque à $f \Rightarrow f$ réciproque à g

On pourra dire dans ce cas que f et g sont réciproques l'une de l'autre.

b) exemples

- $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ et $\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ sont réciproques l'une de l'autre

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, \ \ln(\exp(t)) = t \\ \forall x > 0, \ \exp^{\ln(x)} = x \end{cases}$$

- $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto x^2 \end{array}$ $\quad g : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ y \longmapsto \sqrt{y} \end{array}$

sont réciproques l'une de l'autre.

- Les applications A et B ("très compliquées" définies plus haut) sont réciproques l'une de l'autre.

- $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x+1 \end{array}$ et $g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x-1 \end{array}$ sont réciproques l'une de l'autre

- Pour $a, b \in \mathbb{R}$, notons $f_{a,b} : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto ax+b \end{array}$

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et soit $b \in \mathbb{R}$.
Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$f_{\alpha,\beta} \circ f_{a,b} = f_{\alpha,\beta}(f_{a,b}(x))$$
$$= f_{\alpha,\beta}(ax+b) = a\alpha x + (\beta + \alpha b)$$

$= f_{a\alpha, \beta + b\alpha}(x)$

Donc $\boxed{f_{\alpha,\beta} \circ f_{a,b} = f_{a\alpha, \beta + b\alpha}}$

(**B°**) On veut $f_{\alpha,\beta} \circ f_{a,b} = Id_{\mathbb{R}} = f_{1,0}$

Il suffit d'avoir $a\alpha = 1$ et $b\alpha + \beta = 0$.

On a alors $\alpha = \frac{1}{a}$ et $\beta = -\frac{b}{a}$

Ocsd $g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{a} x - \frac{b}{a} \end{array}$

ie on pose $g := f_{\frac{1}{a}, \frac{-b}{a}}$

On vérifie que g et $f_{a,b}$ sont réciproque l'une de l'autre

- Soit $f : E \to E$. On dit que f est une involution ssi $f \circ f = Id_E$
Dans ce cas, f est sa propre réciproque

- Pour tout ensemble E, $\boxed{Id_E : E \to E \text{ est une involution}}$.

($\text{On a bien } Id_E \circ Id_E = Id_E$)

- L'application $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^* \\ x \mapsto \frac{1}{x} \end{array}$ est involutive.

($\mathcal{D}$ / $f(f(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$)

- L'application $\begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \bar{z} \end{array}$ est une involution

- Pour tout ensemble E, l'application

$$\begin{array}{l} \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E) \\ A \longmapsto \bar{A} \end{array}$$ est involutive.

- L'application $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 1-x \end{array}$ est involutive

$\oplus$ généralemt, pour $a_0 \in \mathbb{R}$, l'application

$$\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto a_0 - x \end{array}$$ est involutive

($\mathcal{D}$ $a_0 - (a_0 - x) = x$)

- L'application $\begin{array}{l} [0,1] \longrightarrow [0,1] \\ x \longmapsto 1-x \end{array}$ est involutive

c) unicité

En général, il n'y a pas existence d'une réciproque, mais quand c'est le cas, il y a unicité. On peut alors parler de « la réciproque »

Prop : Soit $f : E \longrightarrow F$. Soient g_1 et $g_2 : F \longrightarrow E$. Alors

$$\left.\begin{array}{l} g_1 \text{ récipq à } f \\ g_2 \text{ récip à } f \end{array}\right\} \Rightarrow g_1 = g_2$$

D/ Osq g_1 recipq à f et g_2 recpq à f

On a donc :

$$\begin{cases} g_1 \circ f = Id_E & (1) \\ g_2 \circ f = Id_E & (1') \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} f \circ g_1 = Id_F & (2) \\ f \circ g_2 = Id_F & (2') \end{cases}$$

<u>Idée</u> : on compose par g_2 à droite dans (1)

On a $(g_1 \circ f) \circ g_2 = Id_E \circ g_2 = g_2$

<u>Idée</u> : ae sd (2') qu'on compose à gauche par g_1

On a $g_1 (f \circ g_2) = g_1 \circ Id_F = g_1$

Or on sait, par associativité, que

$$(g_1 \circ f) \circ g_2 = g_1 \circ (f \circ g_2)$$

Donc $g_1 = g_2$.

Faux

<u>Rq</u> : Ĉ $g_1 \circ f = g_2 \circ f$, on en déduit que

$$\forall x \in E, \quad g_1(f(x)) = g_2(f(x))$$

2/.

Soit $x \in E$.
Posons $y := f(x)$. On a alors $g_1(y) = g_2(y)$

donc $g_1 = g_2$

C'est Faux : ça n'a pas été mq pour tout $y \in F$

Si ce raisonnement était valide, on aurait
- $g_1 \circ f = g_2 \circ f \Rightarrow g_1 = g_2$

Contre-exemple :

Ocsd $E := \mathbb{R}$, $F := \mathbb{R}$ et ocsd

$g_1 : \begin{matrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin x \end{matrix}$ et $g_2 : \begin{matrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{matrix}$

Il suffit de considérer :

$$f := \tilde{0}$$

On a bien $\boxed{g_1 \circ f = g_2 \circ f}$

5) bijection réciproque

a) définition

Théorème - définition : Soit $f : E \to F$.

a) On a $\exists g : E \to F$, g récip^q à $f \Leftrightarrow f$ bij

$\Leftarrow f$ admet une récip^{q}

b) Si f est bijective, on note $f^{-1} : F \to E$ l'unique réciproque à f. On l'appelle bijection réciproque de f

2/

a) ($\Rightarrow$) Osq $\exists g : F \to E$: g récip à f

- Fixons une telle application $g : F \to E$
  On a donc : $\boxed{g \circ f = Id_E}$ et $\boxed{f \circ g = Id_F}$

  Or, $Id_E : E \to E$ est bijective. En particulier Id_E est injective.

- Donc $g \circ f$ injective. DALC (récip partielle du II. 1.), f est injective.

- De m̄ $Id_F : F \to F$ est surjective car bijective. Donc $f \circ g$ est surjective.
  DALC, on a donc f surjective

- Bilan : f est bijective.

Lemme (oubli) : Soit G un ensemble. Alors, $Id_G : G \to G$ est bij.

1/ Mq $Id_G : G \to G$ injective
Soient $x, x' \in G$ tq $Id_G(x) = Id_G(x')$
Mq $x = x'$
C'est évident car $Id_G(x) = x$ et $Id_G(x') = x'$

• Mq $Id_G : G \to G$ surj.

Soit $y \in G$. Mq $\exists x \in G$: $y = Id_G(x)$

On pose $x := y$, on a $x \in G$ et

$Id_G(x) = x = y$

$\Leftarrow$ Osq $f : E \to F$ bij.

On a donc :

$\forall y \in F, \exists! x \in E : y \in f(x)$

Ainsi, notons, pour $y \in F$, $\alpha_y \in E$
l'unique $x \in E$ tq $y = f(x)$

Ocsd $g : \begin{array}{l} F \to E \\ y \mapsto \alpha_y \end{array}$

Mq g ê récipq à f ie mq $\begin{cases} g \circ f = Id_E \\ f \circ g = Id_F \end{cases}$

Mq $f \circ g = Id_F$

Soit $y \in F$. On a $g(y) = \alpha_y$
Par définition, $f(\alpha_y) = y$.

Donc $f(g(y)) = y$

On a bien mq $f \circ g = Id_F$

Mq $g \circ f = Id_E$

Soit $x \in E$. Mq $(g \circ f)(x) = x$

Astuce: Dans un premier temps, mq

$$f((g \circ f)(x)) = f(x)$$

Posons $y := f(x)$. On a mq $f(g(y)) = y$
Donc on a :

$$f(g(f(x))) = f(x).$$

Donc on a $f((g \circ f)(x)) = f(x)$

Or f est injective car f est bijective

Donc $(g \circ f)(x) = x$

Rq: en gal on n'a pas T

$$g \circ f = Id_E \Rightarrow f \circ g = Id_F$$

Autrement dit de la déf° de rg récipq à f », les 2 hypothèses sont nécessaires

<u>Rq</u> : en general on n'a pas ☹

$$g \circ f = Id_E \Rightarrow f \circ g = Id_F$$

Autrement dans la def° de "g reçq à f", les 2 hypothèses sont necessaires.

<u>Contre-exemple</u> :

On cherche $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} E$ tq $g \circ f = Id_E$ mais $f \circ g \neq Id_F$

On prend $\mathbb{R}_+ \xrightarrow{\sqrt{\cdot}} \mathbb{R} \xrightarrow{(\cdot)^2} \mathbb{R}_+$

On pose $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sqrt{x}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $y \longmapsto y^2$

On a $g \circ f = Id_{\mathbb{R}_+}$ car :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad (\sqrt{x})^2 = x$$

Mais pour $y \in \mathbb{R}$, on a

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = \sqrt{y^2} = |y| \text{ ; donc } f \circ g \neq Id_{\mathbb{R}}$$

exo Soit $f : E \to F$

1) Mq $(\exists g : F \to E : g \circ f = Id_E) \iff f$ inj

2) Mq $(\exists g : F \to E : f \circ g = Id_F) \iff f$ surj

b) bijectº recpq et composition

Prop. Ocsd $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$

Osq f et g sont bijectives. Alors

1) $g \circ f$ est bijective

2) on a $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

⚠ En general

$$g \circ f \text{ bij } \Rightarrow (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

est F

Car AC +++ $g \circ f$ bij n'impliquent pas en gal que f et g soient bijectives. Or $\boxed{\text{pour ecrire } f^{-1} \text{ et } g^{-1} \text{ il faut absolument que } f \text{ et } g \text{ bij}}$

b/ 1) Deja fait

2) Posons $h := f^{-1} \circ g^{-1}$ et verifions que h est recipq à $g\circ f$.

On a :

- $h\circ(g\circ f) = (f^{-1}\circ g^{-1})\circ(f\circ g) = f^{-1}\circ\overbrace{(g^{-1}\circ g)}^{=Id_F}\circ f$

  $= f^{-1}\circ \underbrace{Id_F\circ f}_{=f} = f^{-1}\circ f = Id_E$

- $(g\circ f)\circ h =$ AF $= Id_G$

Ainsi : on a mq h est la reciproque de $g\circ f$

Ie on a mq $h = (g\circ f)^{-1}$

Ainsi on a mq $\boxed{(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}}$ ■

c) reciproque de la reciproque

Prop : Soit $f : E \to F$ bijective

Alors :

1) $f^{-1} : F \to E$

2) $(f^{-1})^{-1} = f$

D/

2) 1) C f^{-1} est rcpq à f, f est reciproque à f^{-1} ; donc f^{-1} admet une rcpq ; donc f^{-1} est bij. La rcpq de f^{-1} est f.

Ie $(f^{-1})^{-1} = f$

■

II !! Image reciproque et image directe

Soit $f : E \to F$

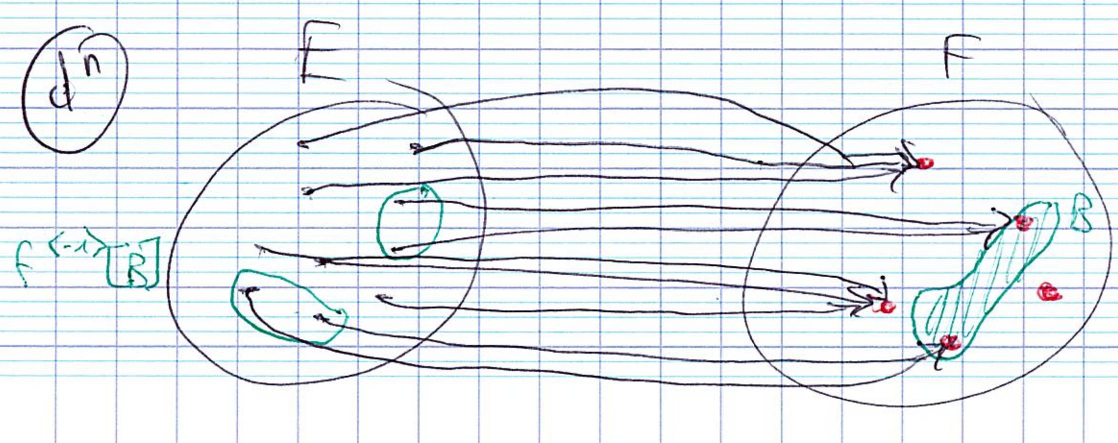
1) Image reciproque (tiré-en-arrière)

Def°

Soit $B \subset F$

L'image reciproque de B par f (ou : le tiré-en-arrière de B par f), notée $f^{\langle -1\rangle}[B]$, est la partie de E definie par $f^{\langle -1\rangle}[B] = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$

d^n



R^x de reformulation

$$x \in f^{\langle -1 \rangle}[B] \iff f(x) \in B$$

<u>Rq</u> : à partir de Pâques, on pourra utiliser une autre notation et écrire $f^{-1}(B)$ à la place de $f^{\langle -1 \rangle}[B]$

⚠ L'objet f^{-1} n'existe que quand f est bijective mais $f^{\langle -1 \rangle}[B]$ existe tout le temps.

<u>Exemples :</u>

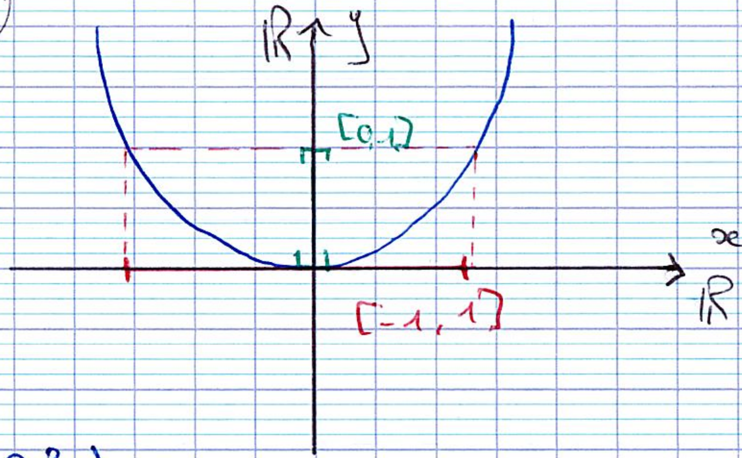
Ocsd $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$

Alors, on a :

- $f^{\langle -1 \rangle}[[0,1]] = [-1,1]$
- $f^{\langle -1 \rangle}[\mathbb{R}] = \mathbb{R}$
- $f^{\langle -1 \rangle}[[-1,1]] = [-1,1]$
- $f^{\langle -1 \rangle}[\mathbb{R}_+^*] = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $f^{\langle -1 \rangle}[\mathbb{R}_-^*] = \emptyset$
- $f^{\langle -1 \rangle}[\{1\}] = \{-1, 1\}$

- $f^{\langle -1 \rangle}[\{0\}] = \{0\}$
- $f^{\langle -1 \rangle}[\emptyset] = \emptyset$

(d^n)



$\mathbb{R}^2$)

Rq : on a donc défini

$$f^{\langle -1 \rangle}[\cdot] : \mathcal{P}(F) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$$

$$B \longmapsto f^{\langle -1 \rangle}[B]$$

- Osq f surj
  Alors :
  $\forall B \subset F,\ B \neq \emptyset \Rightarrow f^{\langle -1 \rangle}[B] \neq \emptyset$

- Exo La récipq est-elle vraie ?

Questions

- Ocsd $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$

$$f^{<-1>}\left[g^{<-1>}[B]\right] \qquad g^{<-1>}[B] \subset F \qquad B \subset G$$

On a aussi $E \xrightarrow{g\circ f} G$

$$(g\circ f)^{<-1>}[B] \qquad B \subset G$$

A-t-on en g^al

$$f^{<-1>}\left[g^{<-1>}[B]\right] = (g\circ f)^{<-1>}[B] \ ?$$

- L'application $f^{<-1>} : \mathcal{P}(F) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$

$$E \longrightarrow f^{<-1>}[B]$$

admet-elle une réciproque ? Est-elle inj ? surj ?

- $f^{<-1>}[B \cap B'] = f^{<-1>}[B] \cap f^{<-1>}[B']$?
- $f^{<-1>}[B \cup B'] = f^{<-1>}[B] \cup f^{<-1>}[B']$?
- $f^{<-1>}[\overline{B}] = \overline{f^{<-1>}[B]}$
- $f^{<-1>}[\emptyset] = \emptyset$?
- $f^{<-1>}[F] = E$?

2) Image directe (poussé-en-avant)

a) definition

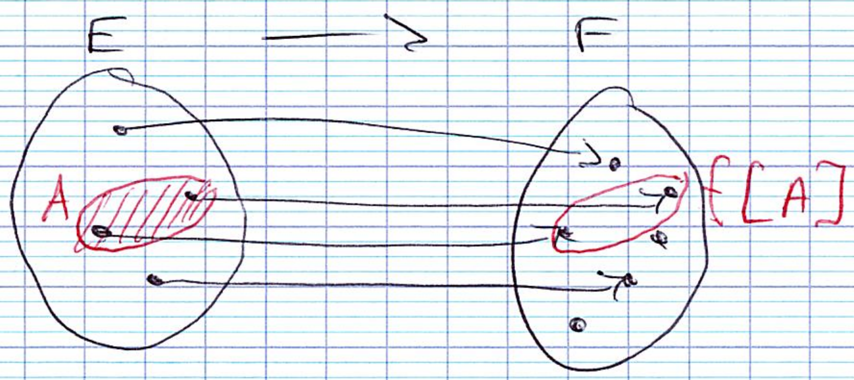
Soit $f : E \longrightarrow F$

Def°: Soit $A \subset E$

L'image directe de A par f (ou la poussé-en-avant de A par f) est la partie de F, notée $f[A]$ est definie par :

$$f[A] := \{ f(a) \; ; \; a \in A \}$$

d^n



R_x Si $y \in f[A]$, alors on peut fixer $a \in A$ tel que $y = f(a)$.

b) exemples

Ocsd $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^2$

Alors :

- $f[\mathbb{R}_-^*] = \mathbb{R}_+^*$

- $f[[-1,1]] = [0,1]$
- $f[[10,+\infty[] = [100;+\infty[$
- $f[\emptyset] = \emptyset$

Rq : À partir de Pacques on pourra noter $f(A)$ à la place de $f[A]$

c) lien avec la surjectivité

Prop : on a

$$f \text{ surjective} \iff f[E] = F$$

D/ok ■ Ça doit être clair intuitivement

Rq : On a (T)

$$\forall x \in E,\ f[\{x\}] = \{f(x)\}$$

D/ idem ■

exo trouver (s'il existe) le lien entre f injectif et le tiré en arrière.

d) questions

- Oesd $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$:

A-t-on pour $A \subset E$,

$$g\left[f[A]\right] = (g \circ f)[A] \ ?$$

- $f[A \cup A'] = f[A] \cup f[A']$?
- $f[A \cap A'] = f[A] \cap f[A']$
- $f\left[\bigcap_{i \in I} A_i\right] = \bigcap_{i \in I} f[A_i]$?
- de m̄ pour $\bigcup_{i \in I} A_i$
- $f[\bar{A}] = \overline{f[A]}$?
- $f[\emptyset] = \emptyset$?
- $f[E] = F$? Non en g^al
- $A \subset A' \Longrightarrow f[A] \subset f[A']$

3) Cas des bijections

Soit $f : E \to F$

⚠ Pour disposer de la rcpq $f^{-1} : F \to E$, il faut que f soit bijective.

Osq f bijective

Prop : Soit $B \subset F$. Alors, on a

$$f^{\langle -1 \rangle}[B] = (f^{-1})[B]$$

d/

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, bend left, "f"] & F \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \\ & \cup \\ & B \end{tikzcd}$$

D/ On procède par double inclusion

- Mq $f^{\langle -1 \rangle}[B] \subset (f^{-1})[B]$

  Soit $x \in f^{\langle -1 \rangle}[B]$ R* on a $f(x) \in B$

  Mq $x \in (f^{-1})[B]$

  On a $x = f^{-1}(f(x))$ car $f^{-1} \circ f = Id_E$

  ĉ $f(x) \in B$, on a bien

  $x \in (f^{-1})[B]$

DLR $\subset$

• Mq $(f^{-1})[B] \subset f^{\langle -1 \rangle}[B]$

Soit $x \in (f^{-1})[B]$

Fixons donc $b \in B$ tq $x = f^{-1}(b)$ R^x

Mq $x \in f^{\langle -1 \rangle}[B]$

R^x ie mq $f(x) \in B$

On a $f(x) = f(f^{-1}(b)) = (f \circ f^{-1})(b)$

$= b$

Donc $f(x) \in B$

DCR

IV $\frac{*}{2}$ Retour sur les cdv

1) Le théorème de changement de variable

Soit I un ensemble fini.
Soit $(a_i)_{i \in I} \in \mathbb{C}^I$ une famille de nombres complexes indexée par I
On dispose de $\sum_{i \in I} a_i$

Thm : Soit J un ensemble fini
Soit $\varphi : J \to I$ une bijection

$$\boxed{\text{Alors : } \sum_{j \in I} a_{\varphi(j)} = \sum_{i \in I} a_i}$$

D/ Ça découle de la définition de $\sum_{i \in I}$ ■

2) Exemples

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$

Déjà on a $\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k \in [\![0,n]\!]} a_k$

Ocsd $\varphi : [\![0,n]\!] \to [\![0,n]\!]$ (cdv) "$k = n-i$"
$i \mapsto n-i$

Elle est bijective : en effet, c'est une involution

$$\left(\forall i \quad \varphi(\varphi(i)) = \varphi(n-i) = n-(n-i) = i\right)$$

Rq : on n'a pas vérifié qu'elle était bien définie

$$\left(\text{cl } 0 \leq i \leq n \Rightarrow 0 \geq -i \geq -n \Rightarrow n+0 \geq n-i \geq n-n \Rightarrow n \geq n-i \geq 0\right)$$

D'après le thm, on a :

$$\sum_{i \in [\![0,n]\!]} a_{\varphi(i)} = \sum_{k \in [\![0,n]\!]} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

$$\sum_{i \in [\![0,n]\!]} a_{n-i} = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}$$