Chapitre 9 : Fonctions usuelles II

I) Rappels et compléments

1) Dérivées de la composée

On considère le diagramme $I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{R}$

où I, J intervalle.

Prop : $\left.\begin{array}{l} f \text{ dérivable} \\ g \text{ dérivable} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \cdot\ g\circ f \text{ dérivable} \\ \cdot\ \boxed{\forall x \in I,\ (g\circ f)'(x) = g'(f(x)).f'(x)} \end{array}\right.$

Rq : on peut aussi écrire $(g\circ f)' = g'\circ f \times f'$

Exemple

Ocsd $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \exp(\sqrt{x^2+1})$

Elle est dérivable et, pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = \exp(\sqrt{x^2+1}).\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}.2x$$
$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\exp(\sqrt{x^2+1})$$
$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.f(x)$$

2) Transformations de graphes et symétrie

a) transformations

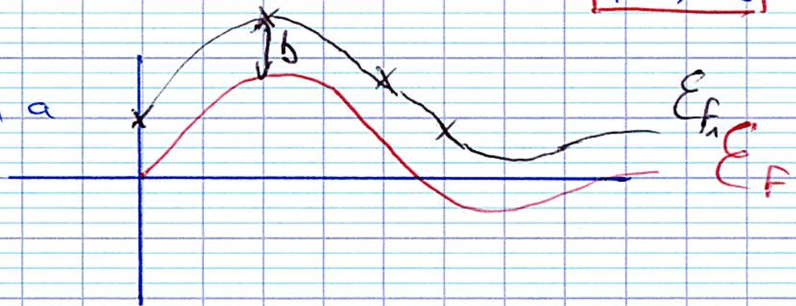
Traitons un exemple ; on csd $f : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$

tq

Ocsd $f_1 : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$ avec $b \in \mathbb{R}$

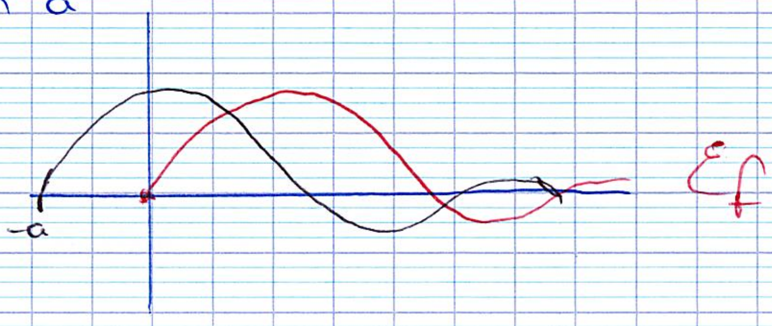
$x \longmapsto \boxed{f(x)+b}$

On a



Ocsd $x \longmapsto f(x+a)$

On a



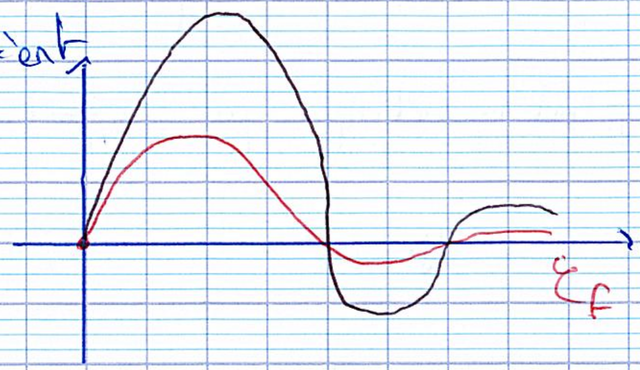
Osq $a \geq 0$

Astuce : on a $[-a, +\infty[\to \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x+a)$

① Ocsd $x \longmapsto \lambda f(x)$

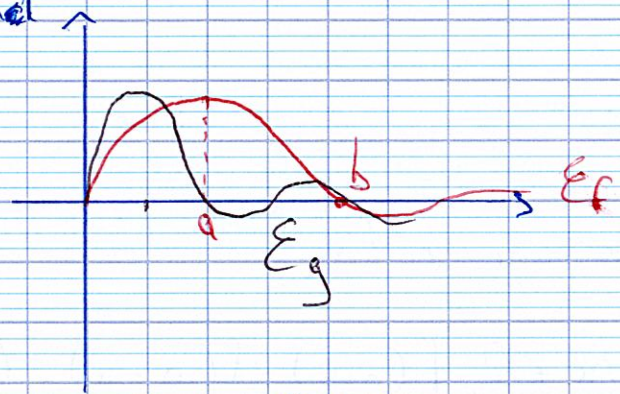
On obtient



$(\lambda = 2)$

Enfin Ocsd $x \longmapsto f(\lambda x)$

On obtient



$(\lambda = 2)$

On note $g : x \longmapsto f(\lambda x)$

II <u>Idée</u> la f° g est maximal q^d $\lambda x = a$, ici pour $x = \frac{a}{2}$

De m̄, le 1er zero de g correspond à $\lambda x = b$; ici pour $x = \frac{b}{2}$

b) symetrie

Ocsd $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

On sait que f est paire $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{E}_f$ est symetrique par rapport à $(x=0)$

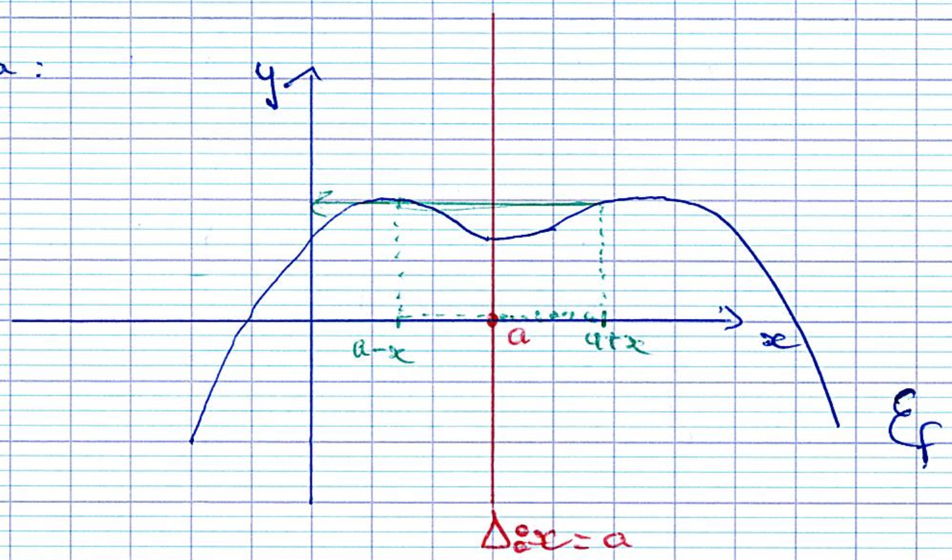
et que f impaire $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{E}_f$ est symetrique par rapport $O\binom{0}{0}$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$

Notons Δ la droite d'équation $x = a$ et $\Omega\binom{a}{b}$

- Osq $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à Δ

On a :

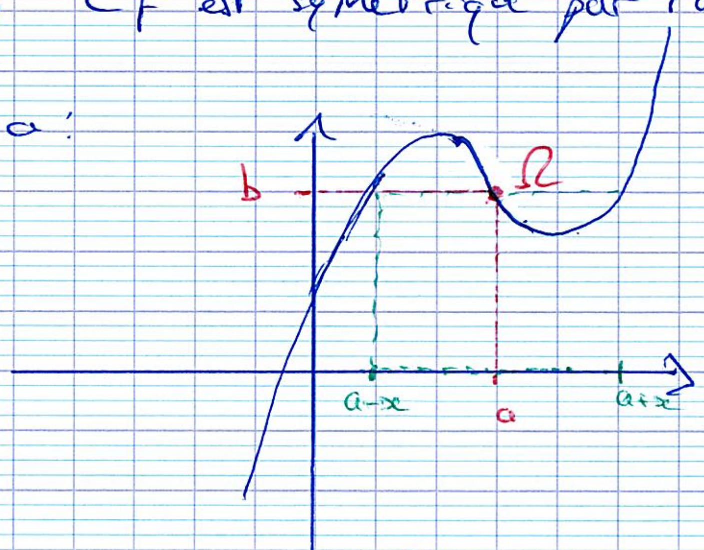


Quelle formule vérifie f ?

On a $\forall x \in \mathbb{R}, f(a+x) = f(a-x)$. (a rcprq est V

- Osq $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à Ω

On a :



On a : $\forall x \in \mathbb{R}, \dfrac{f(a+x) + f(a-x)}{2} = b$ (la rcpq est V

3) Espaces de fonctions

Soit I un intervalle

Notations :
- on note $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$
- on note $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables de I dans $\mathbb{R}$

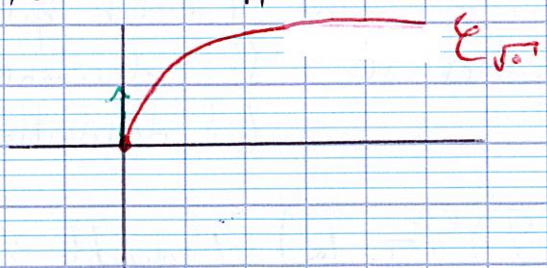
Ex :
- on a $\ln(\cdot) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$
- mieux, $\ln(\cdot) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$

- On a $\sqrt{\cdot} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ mais $\sqrt{\cdot} \notin \mathcal{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$

→ En effet : $\sqrt{\cdot}$ n'est pas dérivable en 0 car

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} = +\infty$$

On a



Soient $x \in \mathbb{R}_+$ et $y \in \mathbb{R}$
Notons $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On a

$$M \in \mathcal{C}_{\sqrt{\cdot}} \Leftrightarrow y = \sqrt{x}$$

Si $M \in \mathcal{C}_{\sqrt{\cdot}}$, on a $y = \sqrt{x}$ et donc $y^2 = (\sqrt{x})^2$, i.e. $\boxed{x = y^2}$

Prop : $\mathcal{D}(I, \mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$

Definition : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est **continûment derivable** ssi $\begin{cases} f \text{ derivable} \\ f' \text{ continue} \end{cases}$

On note $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ l'ens. des fonctions continûment derivables

Rq : en g^al, si f est derivable, il n'y a pas de raison que f' soit continue

Prop : On a $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{D}(I, \mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$

Rq : on donnera de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable tq $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas continue plus tard

Def^e : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que **f est deux fois derivables** $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\begin{cases} f \text{ derivable} \\ f' \text{ derivable} \end{cases}$

On note $\mathcal{D}^2(I, \mathbb{R})$ l'ensemble de ces fonctions

Prop : On a $\mathcal{D}^2(I, \mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{C}^1(I \to \mathbb{R})$

Rq ! : on aurait en fait pu poser :

$$\mathcal{C}(I, \mathbb{R}) := \left\{ f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}) \mid f' \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \right\}$$

et $\mathcal{D}^2(I, \mathbb{R}) := \{ f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}) \mid f' \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}) \}$

Definition :

Soit $p \in \mathbb{N}^*$
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$

On dit que f est p fois derivable $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$\exists f_0, f_1, \dots, f_{p-1} \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$:

$$\begin{cases} \forall i \in [\![0, p-2]\!], \ f_i' = f_{i+1} \\ f_0 = f \end{cases}$$

idée : $f \rightsquigarrow f' \rightsquigarrow f'' \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow f^{(p)}$
$f_0 \rightsquigarrow f_1 \rightsquigarrow f_2 \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow f_p$

On note $\mathcal{D}^p(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions p fois derivables

Rq : dans ce cas les f_i sont uniques ; on les note $f^{(i)}$: ce sont les derivees d'ordre superieur de f, et $f^{(p)} := (f^{(p-1)})'$

· On a $\boxed{f^{(0)} = f}$

· On dit que f est p fois continûment derivable

$\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\begin{cases} f \in \mathcal{D}^p(I, \mathbb{R}) \\ f^{(p)} \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \end{cases}$

On note $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ l'ens de ces fonctions

Rq ⊕ les $f^{(k)}$ vérifient les relations
$$\begin{cases}(f^{(k)})' = f^{k+1}\\(f^{(k)})^{(\ell)} = f^{(k+\ell)}\end{cases}$$

Notation :

On note $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}) := \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$
$\mathcal{D}^1(I,\mathbb{R}) := \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$

Rq : on pourra écrire "f $\mathcal{C}^0$" pour "f continue"

et "f $\mathcal{D}^1$" pour "f dérivable"

Rq * : on aurait pu définir par récurrence

pour $p \geq 1$: $\mathcal{C}^p(I,\mathbb{R}) := \{f \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R}) / f' \in \mathcal{C}^{p-1}(I,\mathbb{R})\}$

pour $p \geq 2$: $\mathcal{D}^p(I,\mathbb{R}) := \{f \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R}) / f' \in \mathcal{D}^{p-1}(I,\mathbb{R})\}$

Rq

On a ⊕ $\mathcal{C}^p(I,\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}^p(I,\mathbb{R})$

On obtient une "tour d'inclusion"

" $\mathcal{C} \supset \mathcal{D} \supset \mathcal{C}^1 \supset \mathcal{D}^2 \supset \mathcal{C}^2 \supset \dots$ "

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est infiniment dérivable ssi

$$\exists (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})^{\mathbb{N}} :$$

$$\begin{cases} \forall i \in \mathbb{N},\ f_i' = f_{i+1} \\ f_0 = f \end{cases}$$

Rq : L'ens des f° infiniments dérivables est

$$\bigcap_{p\geq 1} \mathcal{D}^p(I, \mathbb{R})$$

Rq*

$$\bigcap_{p\geq 1} \mathcal{D}^p(I, \mathbb{R}) = \bigcap_{p\geq 0} \mathcal{C}^p(I, \mathbb{R})$$

(• La suite d'ensemble $(\mathcal{C}^p(I, \mathbb{R}))_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissant pour l'inclusion ; de m pour les $\mathcal{D}^p(I, \mathbb{R})$;

donc pour tout $p_0 \in \mathbb{N}$, $\bigcap_{p\geq 0} \mathcal{C}^p(I, \mathbb{R}) = \bigcap_{p\geq p_0} \mathcal{C}^p(I, \mathbb{R})$;

de m pour $\mathcal{D}^p$)

(• Si $f \in \mathcal{D}^{p+1}(I, \mathbb{R})$ alors $f^{(p)}$ est dérivable et donc $f^{(p)}$ est continue ; donc $f \in \mathcal{C}^p(I, \mathbb{R})$) ☒

Notation : On note $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions infiniments derivables

⚠ $f^{(\infty)}$ n'a $\emptyset$ sens

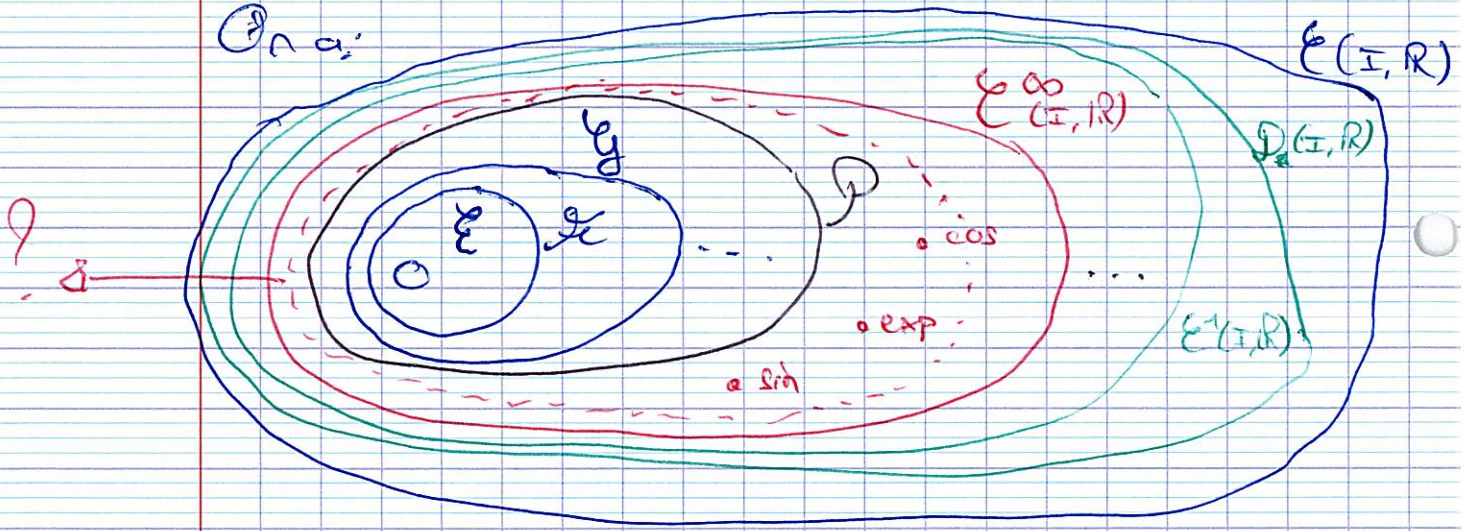
Notons $\mathcal{E} := \{f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ cste}\}$

$\mathcal{F} := \{f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ affine}\}$

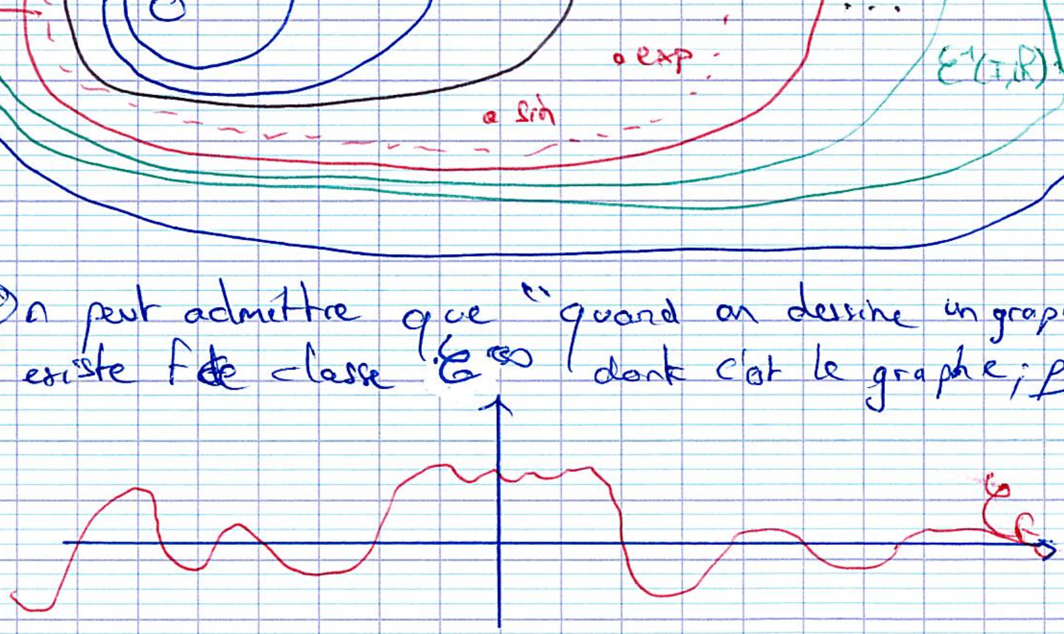
$\mathcal{G} := \{f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ polynomiale de degré} \leq 2\}$

et $\mathcal{P} := \{f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ polynomiale}\}$

On a :



On peut admettre que "quand on dessine un graphe regulier" il existe f de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont c'est le graphe ; p. ex :



Prop : Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Alors (R*) :

$$f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}) \Rightarrow f' \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$$

D/ok ■

Applicat° : on peut donc considérer :

$$D : \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$$
$$f \longmapsto f'$$

4) Fonctions réciproques

Soient I, J des intervalles
Soit $f : I \longrightarrow J$ (ex : $\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$
$\sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$ ...)

Osp q f est bijective

On dispose donc de : (R*) $\boxed{f^{-1} : J \to I}$ sa réciproque

a) monotonie

Prop :

- f monotone $\Rightarrow f^{-1}$ monotone
- Dans ce cas f et f^{-1} ont "la même monotonie"

D/. **Rq** : $\hat{C}$ f bij, dire que f est monotone équivaut à dire que f est strictement monotone

. Osq $f \nearrow$. Mq $f^{-1} \nearrow$

Fe mq $\forall y_1, y_2 \in J,\ y_1 < y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$

Soit $y_1, y_2 \in J$ tq $y_1 < y_2$

Mq $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$

ORPA et Osq $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$

$\hat{C}$ $f \nearrow$, on a $f \uparrow$

Donc on a, $f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2))$

ie $y_1 \geq y_2$

Abs

DCR

Dém si $f \searrow \Rightarrow f^{-1} \searrow$

b) graphe

Notons Δ la droite d'éq° $y = x$

Notons $s : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y) \longmapsto$ le symétrique du p^t (x,y) par rapport à Δ

Rq (+) on notera aussi $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ au lieu de (x,y)

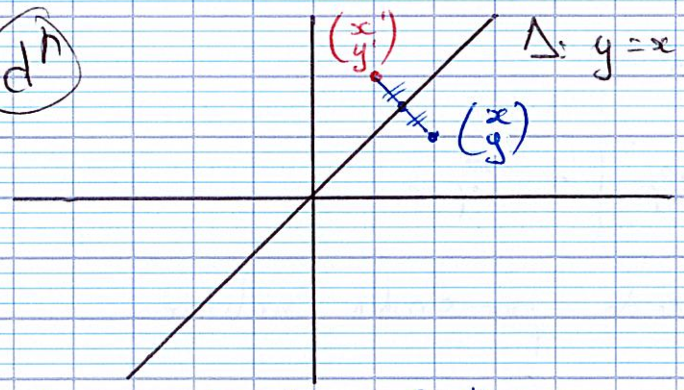
Déterminons l'expression de s

Prop : $s\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

D/ Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Ĉ le symétrique $s\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$?

écrivons-le $s\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ avec $x', y' \in \mathbb{R}$

d^n



Notons $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

Notons $I\begin{pmatrix} x_I \\ y_I \end{pmatrix}$ le milieu de $[MM']$. On a $I \in \Delta$

Donc (AC) on a $x_I = y_I$ Or $x_I = \dfrac{x + x'}{2}$ et $y_I = \dfrac{y + y'}{2}$

CCl : on a $\dfrac{x + x'}{2} = \dfrac{y + y'}{2}$ i.e. $\boxed{x + x' = y + y'}$ (1)

• On a $(MM') \perp \Delta$

Un vecteur directeur de Δ est $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$; de ⊕, $\overrightarrow{MM'} = \begin{pmatrix}x'-x\\y'-y\end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{MM'} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 0$ ie $\begin{pmatrix}x'-x\\y'-y\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 0$

ie $(x'-x) \times 1 + (y'-y)\, 1 = 0$ ie

$\boxed{x'-x = y-y'}$ (2)

• En faisant "(1) + (2)", on obtient

$2x' = 2y$ ie $\boxed{x' = y}$; de m : $\boxed{y' = x}$ ■

Ici, on a $s : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ et on a $\mathcal{E}_f \subset \mathbb{R}_2$ (et $\mathcal{E}_{f^{-1}} \subset \mathbb{R}^2$)

Prop : On a

$$s[\mathcal{E}_f] = \mathcal{E}_{f^{-1}}$$

D/ On procède par double inclusion

• Mq $s[\mathcal{E}_f] \subset \mathcal{E}_{f^{-1}}$

Soit $(x,y) \in s[\mathcal{E}_f]$

$a \in I$ et $b = f(a)$

Fixons donc $(a,b) \in \mathcal{E}_f$ tq $(x,y) = s\left(\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right) = (b,a)$

Mq $(x,y) \in \mathcal{E}_{f^{-1}}$ $x \in J$ et $y = f^{-1}(x)$

$\hat{c}$ $(x,y) = s((a,b))$, on a $(x,y) = (b,a)$

$\hat{c}$ $(a,b) \in \mathcal{G}_f$, on a $\begin{cases} a \in I \\ b = f(a) \end{cases}$ donc $\begin{cases} y \in I \\ x = f(y) \end{cases}$ $(*)$

$\hat{c}$ $y \in I$, $\hat{c}$ $f : I \to J$ et $\hat{c}$ $x = f(y)$ on a $\underline{x \in J}$

En appliquant f^{-1} à $(*)$, on a $f^{-1}(x) = f^{-1}(f(y))$

ie $y = f^{-1}(x)$

Ainsi $(x,y) \in \mathcal{G}_{f^{-1}}$

Donc $s[\mathcal{G}_f] \subset \mathcal{G}_{f^{-1}}$

• Mq $\mathcal{G}_{f^{-1}} \subset s[\mathcal{G}_f]$

→ on pourrait faire de même mais

en appliquant la première inclusion à f^{-1}, on a :

$$s[\mathcal{G}_{f^{-1}}] \subset \mathcal{G}_{\underbrace{(f^{-1})^{-1}}_{\text{ie } f}}$$

Or, l'opération "poussé-en-avant" est croissante pour l'inclusion

Donc $s\Big[s[\mathcal{G}_{f^{-1}}]\Big] \subset s\Big[\mathcal{G}_f\Big]$

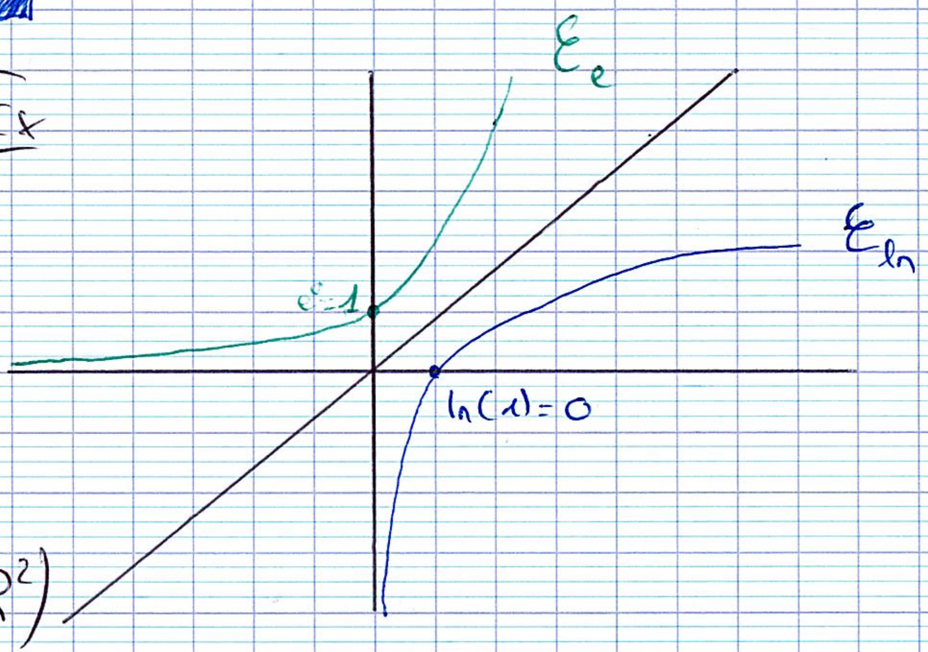
De +, elle est compatible à la composition donc

$$s\Big[s[\ldots]\Big] = (s \circ s)[\ldots]$$

Or : $s \circ s = Id_{\mathbb{R}^2}$. Donc :

$$\mathcal{E}_{f^{-1}} \subset s[\mathcal{E}_f]$$

Ex



c) dérivée

Théorème

Soit $f : I \to J$ une bijection dérivable

Soit $y \in J$. Alors

1) f^{-1} dérivable en $y \Leftrightarrow f'(\qquad) \neq 0$

2) Ds ce cas, on a

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

$D(1)$ $\Leftarrow$ + tard

$\Rightarrow$ Osq f^{-1} dérivable en y

Or si on a le diagramme $\underset{a}{\overset{\in}{K}} \xrightarrow{g} L \xrightarrow{h} M$

où K, L, M sont des intervalles, on a :

$$\left.\begin{array}{l} g \text{ d}^1 \text{ en } a \\ h \text{ d}^1 \text{ en } g(a) \end{array}\right\} \Rightarrow h\circ g \text{ d}^1 \text{ en } a \text{ et } (h\circ g)'(a) = h'(g(a)).g'(a)$$

On l'applique à

$$\underset{y}{\overset{\in}{J}} \xrightarrow{f^{-1}} I \xrightarrow{f} J$$

On obtient $(f\circ f^{-1})'(y) = f'(f^{-1}(y)) \times (f^{-1})'(y)$

Or $\boxed{\text{!}}$: $\forall w \in J$, $f\circ f^{-1}(w) = w$

Ie : $f\circ f^{-1} = Id_J$. Donc $f\circ f^{-1}$ est dérivable et $(f\circ f^{-1})' = \tilde{1}$.

Donc $(f\circ f^{-1})'(y) = 1$

- Donc $\underbrace{f'(f^{-1}(y))}_{} \times (f^{-1})'(y) = 1$

- Donc $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$ et $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$ ie 2) ■

Application

- La f° $\ln(\cdot)$ est l'unique primitive de $x \longmapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ s'annulant en 1
- On a $\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$. En tant que primitive, on a $\ln(\cdot) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$
- $\hat{C}$ $\forall x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$ on a $\ln' > 0$; donc $\boxed{\ln \nearrow}$
- Admettons (exo) $\begin{cases} \ln(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty \\ \ln(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \end{cases}$

(indicat° : $\boxed{\int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln(x)}$)

- CCl : $\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ est une bijection
- Notons $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ sa bijection réciproque
- Fait : exp est $\mathcal{D}^1$

D/ En effet, $\forall x > 0$, $\ln'(x) \neq 0$ et on utilise le Thm

- Thm : $\exp' = \exp$

D/ Soit $y \in \mathbb{R}$. DACAP, on a

$$(\exp)'(y) = \frac{1}{\ln'(\exp(y))} = \frac{1}{\frac{1}{\exp(y)}} = \exp(y)$$

5) Théorème de la bijection réciproque

Thm

Soit I un intervalle
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone
Alors :
1) $f[I]$ est un intervalle, qu'on note J
($\underline{p.ex}$: si $f \nearrow$ et si $I =]a ; +\infty[$ alors $J =]\lim_{x \to a^+} f(x) , \lim_{x \to +\infty} f(x)[$)

2) f établit une bijection entre I et J

3) La f° $f^{-1} : J \to I$ est continue, strictement monotone, de même sens de variation que f

D/ 1) ⊕ tard
2) évident
3) ⊕ tard et ok

6) Dérivation des fonctions complexes

⚠ on s'intéresse aux "fonctions dans $\mathbb{C}$"

Soit I un intervalle de $l(I) > 0$
On s'intéresse aux fonctions $f : I \to \mathbb{C}$

Exemples

- Osd $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$
$t \longmapsto (3t^2 + 2t - 1) + i(5t^2 - t + 1)$

- Ocsd $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$
$t \mapsto \frac{1}{t^2+1} + e^t i$

- Ocsd $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$
$t \mapsto e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$

a) def°

Soit $f : I \to \mathbb{C}$. On dispose de $Re(f) : I \to \mathbb{R}$ et de $Im(f) : I \to \mathbb{R}$

Def° : On dit que f est dérivable $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\begin{cases} Re(f) : I \to \mathbb{R} \text{ d}^1 \\ Im(f) : I \to \mathbb{R} \text{ d}^1 \end{cases}$

On pose alors $f' = Re(f)' + i\, Im(f)'$
c'est la dérivée de f

- On note $\mathcal{D}(I, \mathbb{C})$ l'ens des f° d¹ de I dans $\mathbb{C}$

Rq : Soit $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{C})$. Alors

$$Re(f') = Re(f)'$$

b) exemple f°al

$$\boxed{\text{Prop : Pour tout } t \in \mathbb{R},\ \frac{de^{it}}{dt} = i \cdot e^{it}}$$

⚠ N'écrivez pas $(e^t)' = e^t$

c'est un nombre

⚠ N'écrivez pas non plus $(e^{\circ})' = e^{\circ}$. N'utilisez pas la notat° $f(\circ)$ pour cela

b/ Notons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{it}$. On a $Re(f) = \cos$

Donc $Re(f)$ est d^1 et $Re(f)' = -\sin$; de m̄ pour $Im(f)$

D'où : $f' = -\sin + i\cos$

Or, $if = i(\cos + i\sin) = -\sin + i\cos$ ∎

c) propriétés

On a $\begin{cases} (\lambda f)' = \lambda f' & (\lambda \in \mathbb{C}) \\ (f+g)' = f' + g' \\ (fg)' = f'g + g'f \\ \left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{1}{f^2} \end{cases}$

La composition pose problème

On doit composer d'abord une f° : $I \to \mathbb{R}$
puis une f° : $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$

Prop Soient I, J des intervalles. Ocsd

$$I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{C}$$

Alors $\left.\begin{array}{l} f\ d^1 \\ g\ d^1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} g \circ f\ d^1 \\ (g\circ f)' = g' \circ f \times f' \end{cases}$

D/ (exo) ∎

d) dérivation avec $\exp_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$

Prop : (1er cas)

Soit $\alpha : I \to \mathbb{R}$ d^1

Alors $\forall t$ $\dfrac{de^{i\alpha(t)}}{dt} = i\alpha'(t) . e^{i\alpha t}$

D/ ocsd $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$
$\theta \mapsto e^{i\theta}$

$(f \circ \alpha)(t) = f(\alpha(t))$
$= e^{i\alpha(t)}$

Ocsd $I \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$

On a vu que f est d^1. DACQP : $(f \circ \alpha)' = f' \circ \alpha \times \alpha'$

Ie, pour $t \in I$, $\dfrac{de^{i\alpha(t)}}{dt} = \alpha'(t) . ie^{i\alpha(t)}$ ■

Prop (2e cas)

Soit $\varphi : I \to \mathbb{C}$ d^1 $\to \exp_{\mathbb{C}}(\varphi(t))$

Alors $\forall t$: $\dfrac{de^{\varphi(t)}}{dt} = \varphi'(t) \times e^{\varphi(t)}$

D/ $\forall t$ $e^{\varphi(t)} = e^{Re(\varphi)(t)} \times e^{i Im(\varphi)(t)}$
$= (\exp \circ Re(\varphi) \times f \circ Im(\varphi))(t)$

$\dfrac{de^{\varphi(t)}}{dt} = Re(\varphi)' . e^{Re(\varphi)} + ie^{i}$

Complement sur les tableaux de variations

Sauf mention du contraire

- dans un tableau de signes : les signes sont strictes
- dans un tableau de variation : les variations sont strictes

Consequence

Si on a $f :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ d^1 et qu'on a montré que

$$\forall x > 0,\ f'(x) \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq 1 \quad (*)$$

C'est insuffisant pour faire le tableau de signes

En effet : à $(*)$ peut corespondre

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

ou

x	0		1		42	
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$+$

ou

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	0	

⚠ Pire :

Dire " soit $x > 0$. Si $f'(x) \geq 0$ alors ... alors ... alors ... alors ... alors $x \geq 1$ "

Cela implique $\{x > 0 \mid f'(x) \geq 0\} \subset [1 ; +\infty[$

Comment procéder alors ?

Il faut savoir où $f' > 0$, où $f' < 0$ et où $f' = 0$

Ie, il faut écrire

- $\forall x \geq 0$, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow$
- $\forall x \geq 0$, $f'(x) < 0 \Leftrightarrow$
- $\forall x \geq 0$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow$

Rq : en fait suffit d'écrire les deux premiers $\Leftrightarrow$

⚠

II) Convexité

On fixe I un intervalle de $\mathbb{R}$

1) Paramétrisation des intervalles

Prop : Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tq $a \leq b$
Alors :

$$[a,b] = \{ta + (1-t)b \,;\, t \in [0,1]\}$$

Notons $t \in [0,1]$, $x_t := t_a + (1-t)b$

On a $x_0 = b$ et $x_1 = a$

Idée : x_t est un point mobile parcourant $[a,b]$; à $t=0$, il est en b et à $t=1$ il est en a. On a

$$\frac{dx_t}{dt} = a - b$$

Sa vitesse est cste.

: x_t est la moyenne de a et de b, pondérée par les coefficients t et $(1-t)$

(rappel : (R×) $t \in [0,1] \Rightarrow 1-t \in [0,1]$)

D/ On pose $E = \{x_t, t \in [0,1]\}$

② Mq $E \subset [a,b]$

Ie mq $\forall t \in [0,1], x_t \in [a,b]$

Ie mq $\forall t \in [0,1], a \leq x_t \leq b$

Soit $t \in [0,1]$

d/1

On a $x_t = b - (b-a)t$

$\hat{c}$ $b - a \geq 0$ et $\hat{c}$ $0 \leq t \leq 1$

On a $0 \leq (b-a)t \leq b-a$ donc $a-b \leq -(b-a)t \leq 0$

Donc $a \leq b-(b-a)t \leq b$ ie $a \leq x_t \leq b$ ■ 1

d/2

On a $a \leq a \leq b$

Donc (1) $ta \leq ta \leq tb$ car $t \geq 0$

On a $a \leq b \leq b$

Donc (2) $(1-t)a \leq (1-t)b \leq (1-t)b$ car $1-t \geq 0$

En sommant (1) et (2), on a $a \leq ta + (1-t)b \leq b$ ■

D'où ②

(c) Mq $[a,b] \subset E$

(Ac) i.e, mq $\forall x \in [a,b] : \exists t \in [0,1] : x = x_t$

Soit $x \in [a,b]$, Osq $a < b$, si $a=b$, on a $a = x = x_1$

Mq $\exists t \in [0,1] : x = x_t$

d¹/

"Cinematiquement", on comprend qu'il faut poser

$$t := \frac{b-x}{b-a}$$

On a $x_t := b - (b-a)t = b - (b-x) = x$

On a $a \leq x \leq b$ donc $-b \leq -x \leq -a$

donc $b-b \leq b-x \leq b-a$

$\hat{c}$ $b-a > 0$, on a $0 \leq \dfrac{b-x}{b-a} \leq 1$ ■1

d²/ ORP(A/S)

• (a) Soit $t \in [0,1]$ tq $x = x_t$

On a donc $b - t(b-a) = x$

Donc $b - x = t(b-a)$, donc $t = \dfrac{b-x}{b-a}$

(s) $\boxed{\text{Posant } t := \frac{b-x}{b-a}}$ cf ci-dessus

■

2) Définition

Rq : de m̄, on a $[a,b] = \{tb + (1-t)a \,;\, t \in [0,1]\}$

- Si $a, b \in \mathbb{R}$ et qu'on n'a pas nécessairement $a < b$. On peut considérer $\{ta + (1-t)b \,;\, t \in [0,1]\}$

Il est égal à : $[\min(a,b), \max(a,b)]$

On pourra le noter $[\widehat{a,b}]$

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soient $a, b \in I$. Osq $a \neq b$

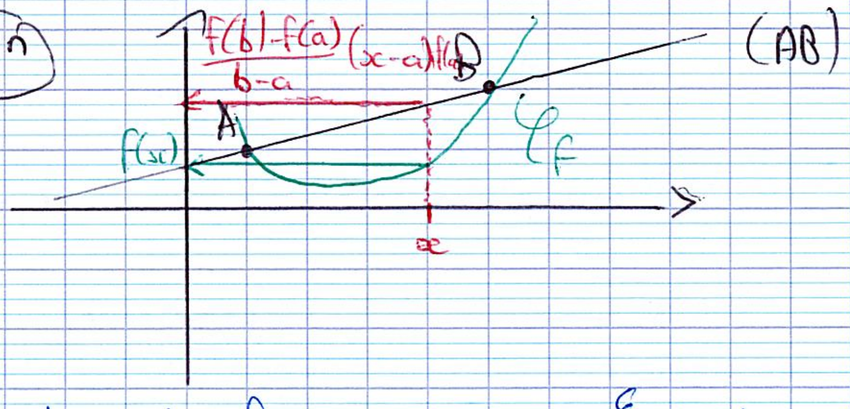
On csd $A\begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} b \\ f(b) \end{pmatrix}$

Une équation de la droite (AB) est :

À savoir faire $\quad y = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \times (x-a) + f(a)$

II) Astuce

dⁿ



On voit qd f est convexe q $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $[AB]$; i.e.

$$\forall x \in [a,b],\ f(x) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$$

$\hat{G}$ à la paramétrisation, cela s'écrit

$$\forall t \in [0,1],\ f(x_t) \leq \boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x_t - a) + f(a)} \quad (*)$$

Pour $t \in [0,1]$, on a

$$(*) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(ta + (1-t)b - a\right) + f(a)$$

$$= \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \times (1-t)(b-a) + f(a)$$

$$= f(b)(1-t) - f(a) + t f(a) + f(a)$$

$$= \boxed{t f(a) + (1-t) f(b)}$$

__CCl__ : Si f "convexe", on a

$$\boxed{\forall t \in [0,1],\ f(ta + (1-t)b) \leq t f(a) + (1-t) f(b)}$$

On a "mq"

$\mathcal{C}_f$ est en dessous de $[AB]$

$\iff \forall t \in [0,1],\ f(ta + (1-t)b) \leq t f(a) + (1-t) f(b)$

__Définition__ : On dit q. __f est convexe__ ssi $\triangle$

· "$\mathcal{C}_f$ est en dessous de toutes ses cordes"

· ie ssi $\forall a, b \in I,\ \forall t \in [0,1],\ f(ta + (1-t)b) \leq t f(a) + (1-t) f(b)$

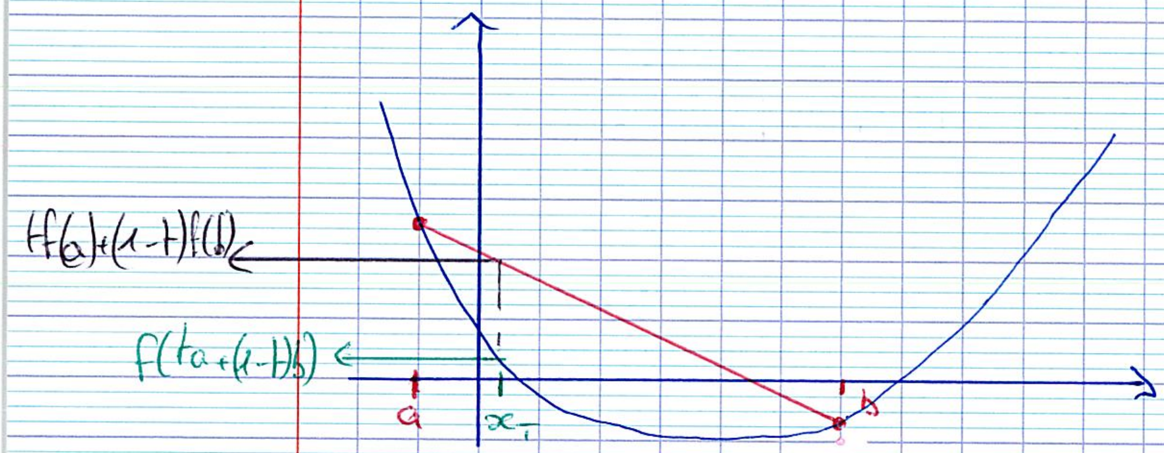
Rq : on dit que f est concave ssi ... $\geq$ ...

- On a : f concave $\Leftrightarrow$ $-f$ convexe

- On dit f est strictement convexe ssi

$\forall a,b \in I,\ a \neq b \Rightarrow \forall t \in]0,1[,\ f(ta+(1-t)b) < tf(a)+(1-t)f(b)$

3) Interpretation graphique



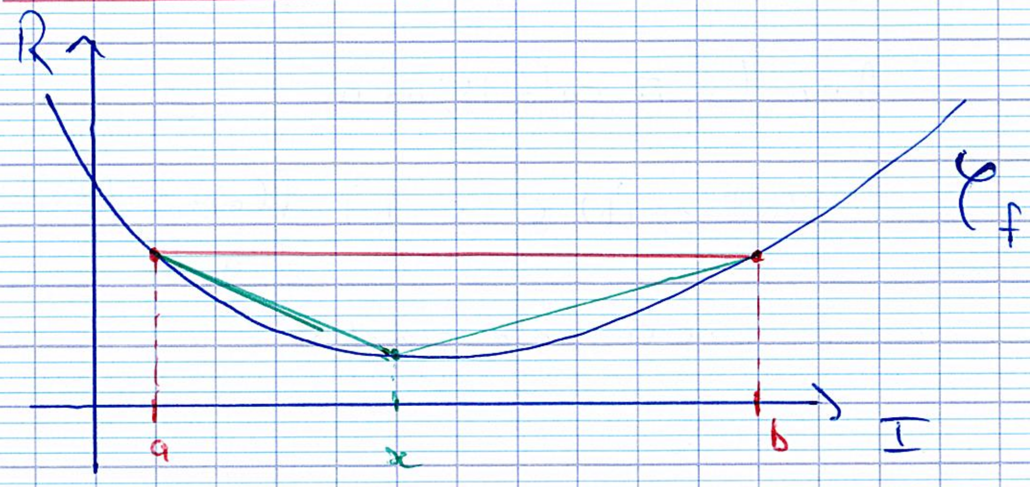
$(t \simeq 0,2)$

4) Lemme des trois pentes

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe

Soient $a,b \in I$ tq $a < b$

a) dessin du lemme



b) le lemme

Prop : On a :

$\cdot \ \forall x \in]a,b[, \ \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \dfrac{f(b)-f(x)}{b-x}$

D/ Soient $x \in]a,b[$

DACQP : fixons $t \in [0,1]$ tq $x = ta + (1-t)b$

On a : $f(x) = f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$

Donc $f(x) - f(a) \leq (1-t)[f(b) - f(a)]$

Or $t = \dfrac{b-x}{b-a}$ donc $1-t = \dfrac{x-a}{b-a}$

On a ainsi : $f(x) - f(a) \leq (x-a)\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

(car $x - a > 0$) et $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ inégalité de gauche

• Maintenant : fixons $t \in [0,1]$ tq $x = tb + (1-t)a$

Avec les m̃ calculs, on a

$$f(x) - f(b) \leq (x-b)\,\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$$

ĉ $x - b < 0$, cela conclut

5) Cas dérivable et cas d^2

a) cas d^1

Prop : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une f° dérivable. Alors :
f convexe $\Leftrightarrow$ $f' \nearrow$

D/ ($\Rightarrow$) Osq f convexe. Mq $f' \nearrow$ Soient $a, b \in I$ tq $a \leq b$
Mq $f'(a) \leq f'(b)$
Si $a = b$: c'est ok. Osq $a <$

On sait $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

En particulier : $f'(a) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Or $\forall x \in]a, b[$, $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

En passant à la limite ds l'inégalité large, on a

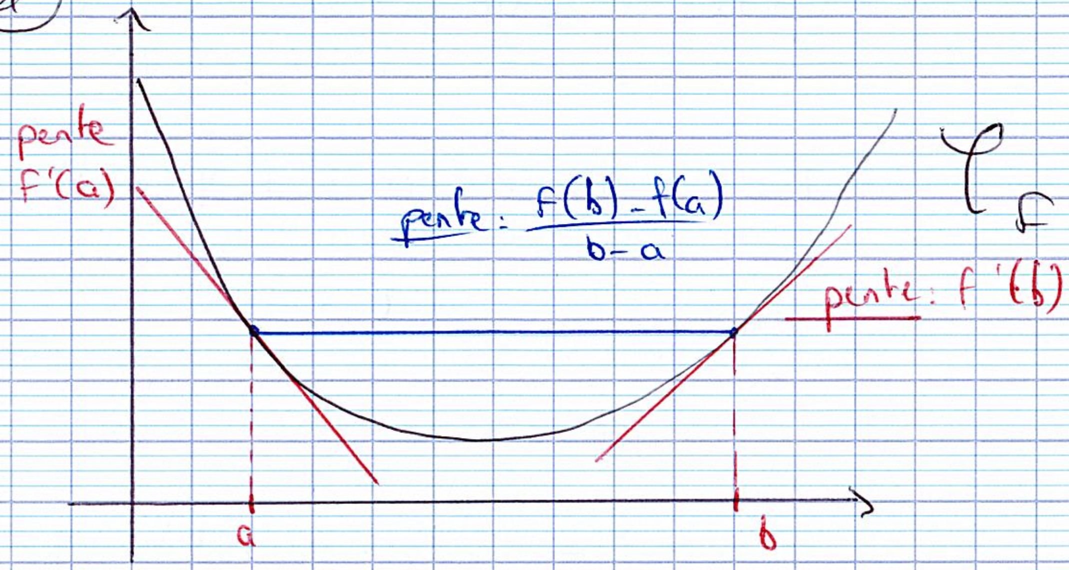
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Ie on a $f'(a) \leq \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

De m̃ $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'(b)$

En particulier $f'(a) \leq f'(b)$ ■ $\Rightarrow$

d n



$\Leftarrow$ Osq $f' \nearrow$. Mq f est convexe

Soient $a, b \in I$ Mq

$\forall t \in [0,1], f(ta+(1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$

Idée : introduire la f° aux. "qu'il faut" et la dériver

idée : Ocsd $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$t \longmapsto tf(a) + (1-t)b - f(ta+(1-t)b)$

Elle $d^1_{\neq}$ et $\varphi'(t) = f(a) - f(b) - (a-b).f'(ta+(1-t)b)$

Mq $\varphi \geq 0$

ORPA et osq $\exists t_0 \in [0,1] : \varphi(t_0) < 0$

On fixe un tel $t_0 \in [0,1]$

- **Déjà** $t_0 \in]0,1[$ car $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$

- On ne peut avoir $\varphi' \geq 0$ sur $[0, t_0]$; sinon φ y serait ↗ et $\hat{c}$ $\varphi(0) = 0$, on aurait $\varphi(t_0) \geq 0$

- Ainsi : $\exists t_1 \in [0, t_0] : \varphi'(t_1) < 0$

- Fixons un tel $t_1 \in [0, t_0]$

- Osq $\underline{a < b}$ (si $a = b$ ok ; sinon ok par symétrie)

On a $t \longmapsto ta + (1-t)b$ ↘ et f' ↗

Donc $(\ldots)$ φ' ↘

- Donc : $\forall t \geq t_1$, $\varphi'(t) \leq \varphi'(t_1)$, donc $\varphi' \leq 0$ sur $[t_1, 1]$

En particulier : $\varphi' \leq 0$ sur $[t_0, 1]$ car $t_0 \geq t_1$ Donc φ ↘ sur $[t_0, 1]$

Or $\varphi(t_0) < 0$; donc $\varphi(1) < 0$ Abs

Idée $(\forall a, b \in I, \forall t \in [0,1])$

On veut mq $\oplus$ $f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$

On dérive par rapport à a !

Soit $b \in I$, soit $t \in [0, 1]$

⊙ csd $\psi : I \longrightarrow \mathbb{R}$

$$a \longmapsto tf(a)+(1-t)f(b)-f(ta+(1-t)b)$$

elle est $\mathcal{D}^1$ et ⊙ $\psi'(a) = tf'(a) - tf'(ta+(1-t)b)$

$$= t\left(f'(a) - f'(\underbrace{ta+(1-t)b}_{\text{entre } a \text{ et } b})\right)$$

On a

- si $a \leq b$: $ta+(1-t)b \geq a$ et donc car $f' \nearrow$ on a $f'(ta+(1-t)b) \geq f'(a)$ et donc $\psi'(a) \leq 0$
- $\psi'(b) = 0$
- si $a \geq b$, $\psi'(a) \geq 0$

D'où le tableau de variation au sens large

a		b	
$\psi'(a)$	$-$	0	$+$
ψ	$\searrow$	$\psi(b)$	$\nearrow$

Or $\psi(b) = 0$ DCR ∎

b) cas $\mathcal{D}^2$

Thm Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois derivable

Alors f convexe $\iff f'' \geq 0$

D/ ⊕ ⊖

ĉ f' est derivable, on a $f' \nearrow \iff f'' \geq 0$ ■

Osq f d^2

Rq*: f st° convexe $\iff f' \nearrow\nearrow$ mais ⚠ $\iff f'' > 0$

$\Leftarrow$ Vrai

$\Rightarrow$ Faux

6) Une fonction convexe est au dessus de ses tangentes

Prop: Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe
Soit $a \in I$ où f est derivable
Alors $\forall x \in I,\ f(x) \geq f'(a)(x-a) + f(a)$

D/ Osq f derivable

Ocsd $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto f(x) - (f'(a)(x-a) + f(a))$ qui est d^1

Pour $x \in I$, $\varphi'(x) = f'(x) - f'(a)$ Or $f' \nearrow_I$

D'où

x		a	
$\varphi'(x)$	$-$	0	$+$
φ	$\searrow$	$\varphi(a)=0$	$\nearrow$

(au sens large)

DLR ■

Soit $b \in I$

D/. On a vu que $f'(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ si $a < b$

Ainsi si $a < b$, on a $f(b)-f(a) \geq (b-a)f'(a)$

Ie $f(b) \geq f'(a)(b-a) + f(a)$

- si $a = b$: ok (égalité)

- si $a > b$: on a vu que de m̂ $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'(a)$

■

7) Inégalité de Jensen

Prop: Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe
Soit $n \in \mathbb{N}^*$
Soient $a_1, \ldots, a_n \in I$

Alors :

$$\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in [0,1]^n, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(a_i)$$

D/ Déjà fait ■

8) Inégalités classiques

a) avec $\ln(\cdot)$

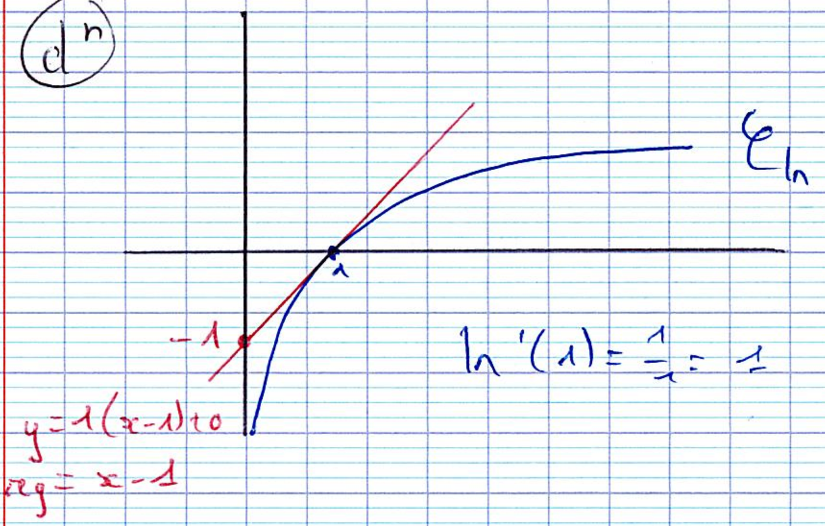
Fait : $\ln(\cdot)$ est concave (strict)

D/ Pour $x>0$, $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ ∎

$$\boxed{\text{Prop : } \forall x > -1,\ \ln(1+x) \leq x}$$

R^X

dⁿ



$\ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$

DACQP $\forall X > 0$, $\ln(X) \leq X-1$

Soit $x > -1$; posons $X = x+1$, on a $X > 0$ donc $\ln(X) \leq X-1$

ie $\underline{\ln(1+x) \leq x}$ ∎

Rq : mieux, on a

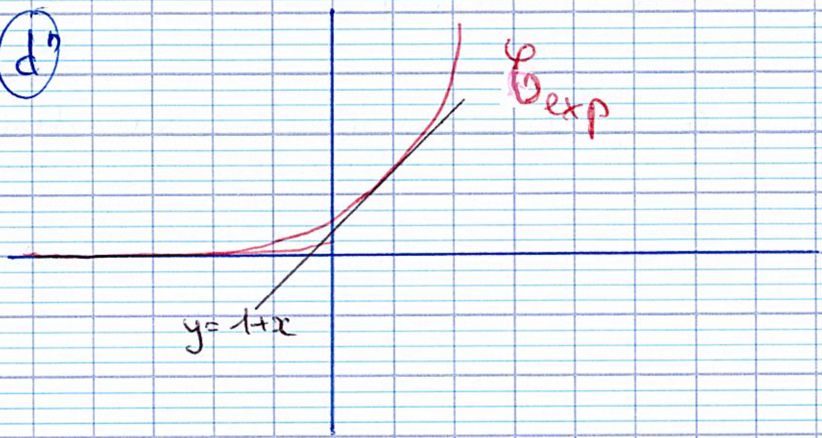
$$\forall x > -1,\ x \neq 0 \Rightarrow \ln(1+x) < x$$

D/ par étude de fonction

b) avec exp(.)

$\boxed{\text{Prop : } \forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \geq 1+x}$

d')



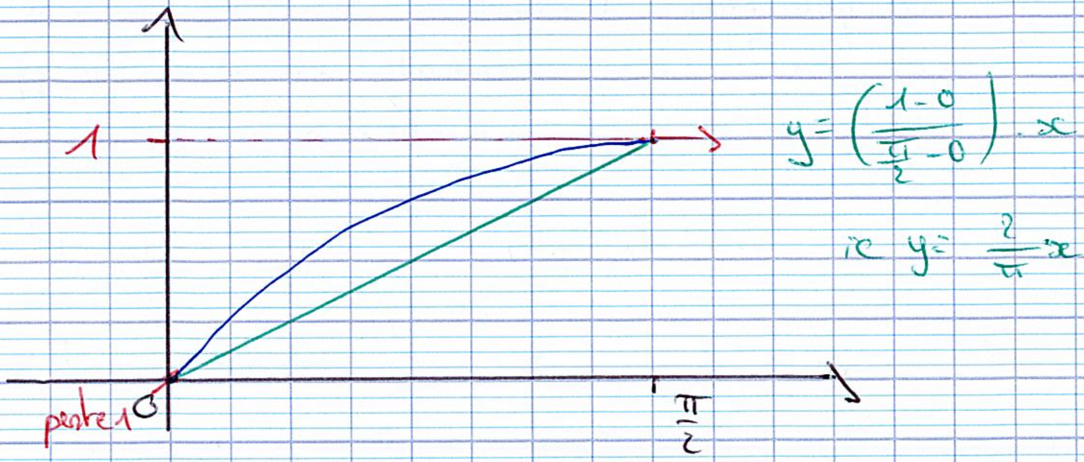
D/ ① $\exp'' = \exp > 0 \rightarrow$ exp convexe $\rightarrow$ ok (AF)

D/ ② 2

On a $e^x > 0$; ~~on~~ on pose $X = e^x$

On a $\ln(X) \leq X - 1$ ie $x \leq e^x - 1$ ∎

c) avec sin(.)



$$\boxed{\text{Prop : } \forall x \in [0, \tfrac{\pi}{2}],\ \sin(x) \geq \tfrac{2}{\pi} x}$$

Rappel : $\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin(x)| \leq |x|$

D/ Sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\sin'' = -\sin \leq 0$; donc sin est concave

III Fonctions usuelles

1) Symbole a^x

Definition : Soit $a > 0$ et soit $x \in \mathbb{R}$. On pose

$$a^x := e^{x \ln(a)}$$

("le x est en haut : il y reste")

Rq : on a ⊕ $a^x > 0$

- Pourquoi cette formule ? Si a^x a un sens, alors on veut que $\boxed{\ln(a^x) = x \ln(a)}$ et donc en appliquant à cette egalité la f° exp on obtient :

$$\exp(\ln(a^x)) = \exp(x \ln(a))$$

$$\text{ie} \quad a^x = e^{x \ln(a)}.$$

Exemple $2^\pi = \exp(\pi \ln(2))$

Rq : si $n \in \mathbb{N}$ et si $a \in \mathbb{R}_+^*$, on a deux déf$^{\text{ons}}$ possibles pour a^n

Est-ce $\underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ fois}}$? Ou est-ce $e^{n\ln(a)}$?

Ces deux nombres sont égaux.

De même si $n \in \mathbb{Z}$, de même si $n = \frac{1}{2}$

Toutes les propriétés auxquelles on s'attend sont vraies

Prop Ⓣ

1) $a^x . b^x = (ab)^x$
2) $a^{x+y} = a^x . a^y$
3) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

4) $(a^x)^y = a^{xy}$
5) $a^0 = 1$
6) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

Lemme Ⓣ $\exp(x+y) = \exp(x).\exp(y)$

D/ On a mq $\exp' = \exp$

Soit $y \in \mathbb{R}$. Ocsd $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$

Elle est $\mathcal{C}^1$ et pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\varphi'(x) = \frac{\exp(x+y)\exp(x) - \exp(x)\exp(x+y)}{\exp(x)^2}$$

$$= 0$$

Donc φ est cst. Or $\varphi(0) = \exp(y)$

CCl : $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)} = \exp(y)$ DLR ■

Corollaire (T) $\ln(ab) = \ln(a) \cdot \ln(b)$

D/ Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$

Posons $x := \ln(a)$ et $y := \ln(b)$

On a $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$

Ie on a $\exp(x+y) = a \times b$

En appliquant $\ln(-)$, on a $x+y = \ln(ab)$

Ie, on a $\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$ ■

D/

1) (T) $(ab)^x = \exp(x\ln(ab)) = \exp(x(\ln(a)+\ln(b)))$

$= \exp(x\ln(a) + x\ln(b)) = \exp(x\ln(a)) \times \exp(x\ln(b$

$= a^x \cdot b^x$

2) (T)

$$a^{x+y} = \exp((x+y)\ln(a)) = \exp(x\ln(a) + y\ln(a))$$

$$= \exp(x\ln(a)) \times \exp(y\ln(a))$$

$$= a^x \cdot a^y$$

Etc... ■

Rq Soit $x \in \mathbb{R}$ on a $e^x = \exp(x \underbrace{\ln(e)}_{=1}) = \exp(x)$

2) Fonctions puissances

a) def° et notation

Definition : Soit $a \in \mathbb{R}$ on note $p_a : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^a$

c'est la fonction "puissance a"

b) etude de p_a

Soit $a \in \mathbb{R}$

Prop : p_a est $\mathcal{C}^\infty$ et la derivée de $p_a' = a\, p_{a-1}$

D/ Soit $a \in \mathbb{R}$
Déjà on csd la f° $g_a : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto a\ln(x)$

La fonction g_a est $\mathcal{C}^\infty$

On a $p_a = \exp \circ g_a$

$\hat{C}$ $\exp$ est $\mathcal{C}^\infty$, par composition p_a est $\mathcal{C}^\infty$

Soit $x > 0$: on a $p_a'(x) = \exp'(g_a(x)) \times g_a'(x)$

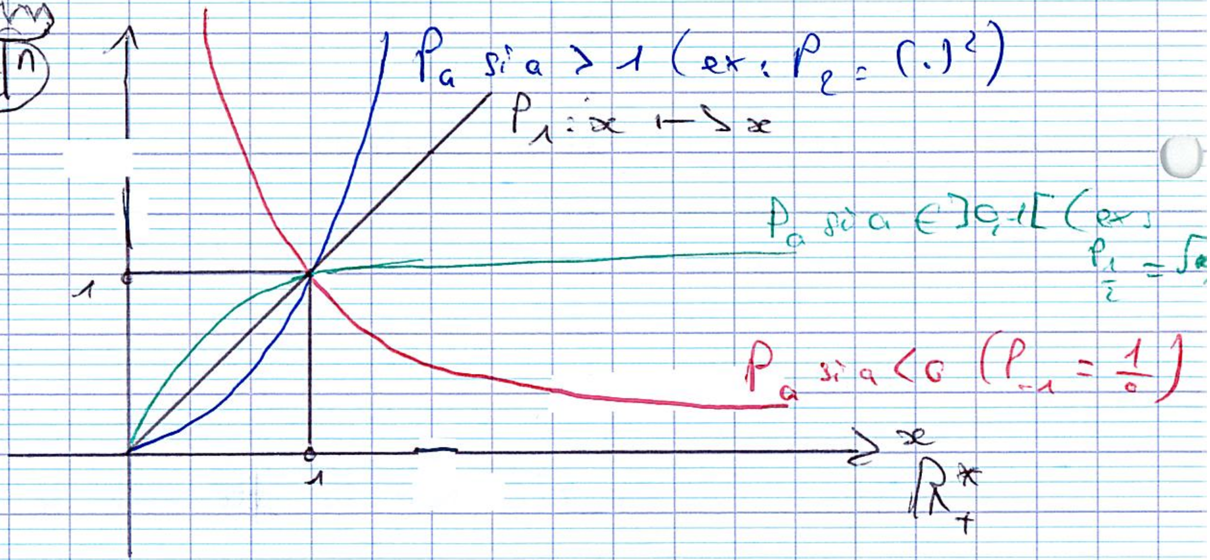
$$= \underbrace{\exp(g_a(x))}_{x^a} \cdot \frac{a}{x} = a\frac{x^a}{x} = a x^{a-1} = a\, p_{a-1}(x)$$ ∎

<u>Corollaire</u> : 1) $p_a > 0$

2) $a > 0 \Rightarrow p_a \nearrow\nearrow$ et $a < 0 \Rightarrow p_a \searrow\searrow$

3) $a \geq 1 \Rightarrow p_a$ convexe
$a \leq 0 \Rightarrow p_a$ convexe
$a \in [0,1] \Rightarrow p_a$ concave

d^n



D/ 1) ok 2) ok car $p_a' = a \cdot p_{a-1}$

3) $p_a'' = a(a-1)\, p_{a-2}$ et $a \leq 0 \Rightarrow a(a-1) \geq 0$
$a \geq 1 \Rightarrow a(a-1) \geq 0$

$$a \in [0,1] \Rightarrow \left.\begin{cases} a \geq 0 \\ a-1 \leq 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow a(a-1) \leq 0$$

Rq : on a aussi toutes les limites

c) comparaison des $\hat{p}_a$

• Soient $a, b > 1$ tq $a < b$. Alors on a

D/ Mq : • $x \in]0,1[$, $x^b < x^a$
• $\forall x > 1$, $x^b > x^a$

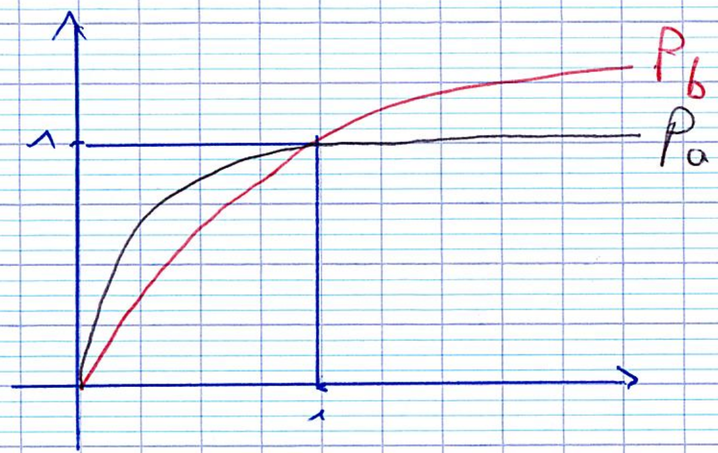
Soit $x \in]0,1[$ On a $\ln(x) < 0$; ĉ $a < b$, on a $a . \ln(x) > b\ln(x)$; ĉ exp ↗, on a $\exp(a\ln(x)) > \exp(b\ln(x))$

ie $x^a > x^b$

• De m si $x > 1$ $\blacksquare$

• Soient $a, b \in]0,1[$ tq $a < b$

On a



D/ de $\bar{m}$ ■

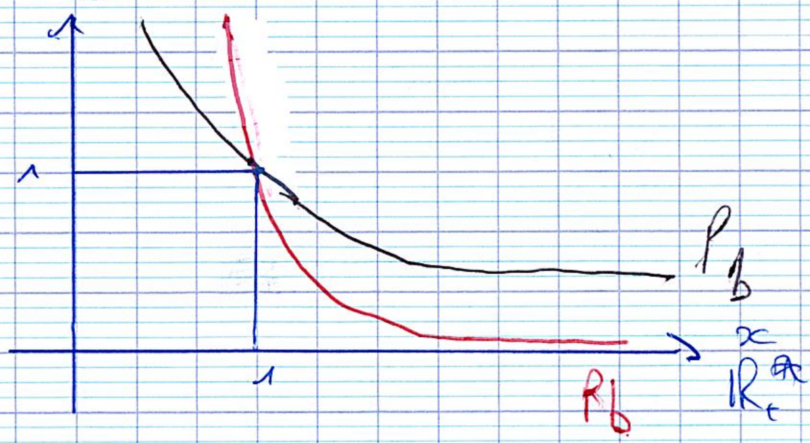
Rq : Soient $a, b \geqslant 0$ tq $a < b$. Alors on a

- $P_b \geq P_a$ sur $]1,+\infty[$
- $P_b < P_a$ sur $]0,1[$

Ex : $\forall x \in]0,1[,\ \sqrt{x} > x$ et $\forall x > 1,\ x > \sqrt{x}$

- Soient $a, b \geqslant 0$ tq $b > a$

On a



D/ ok ■

3) Exponentielle de base a

a) def°

Definition : soit $a > 0$. l'exponentielle de base a est la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & a^x \end{array}$$

On la note $\exp_a$; ici φ_a

Ex : la f° : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & 2^x \end{array}$

b) dérivée !!

Prop (R*) : $\dfrac{d}{dx}(x^a) = a x^{a-1}$

et $\boxed{\dfrac{d}{dx}(a^x) = \ln(a)\, a^x}$

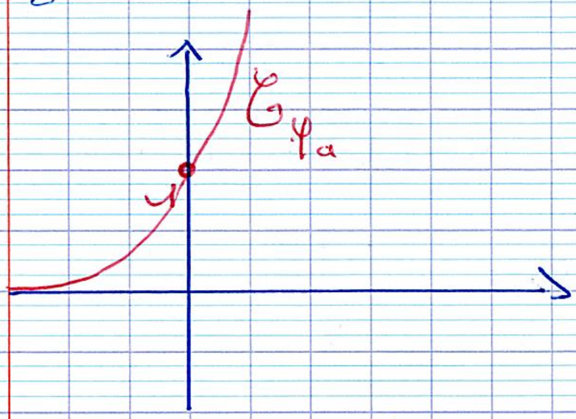
D/ Ocsd $h_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(a)x \end{array}$

On a $\varphi_a = \exp \circ h_a$; donc $\varphi_a' = \exp' \circ h_a \times h_a'$

Donc $\varphi_a' = \exp \circ h_a \times \ln(a) = \ln(a)\, \varphi_a$ ■

c) étude de $x \longmapsto a^x$

Soit $a > 1$. On a



b/ On a $\varphi_a' = \underbrace{\ln(a)}_{>0}\, \underbrace{\varphi(a)}_{>0} > 0$; donc $\varphi_a \nearrow\nearrow$

et $\varphi_a'' = \ln(a)^2 \varphi_a > 0$; donc φ_a convexe

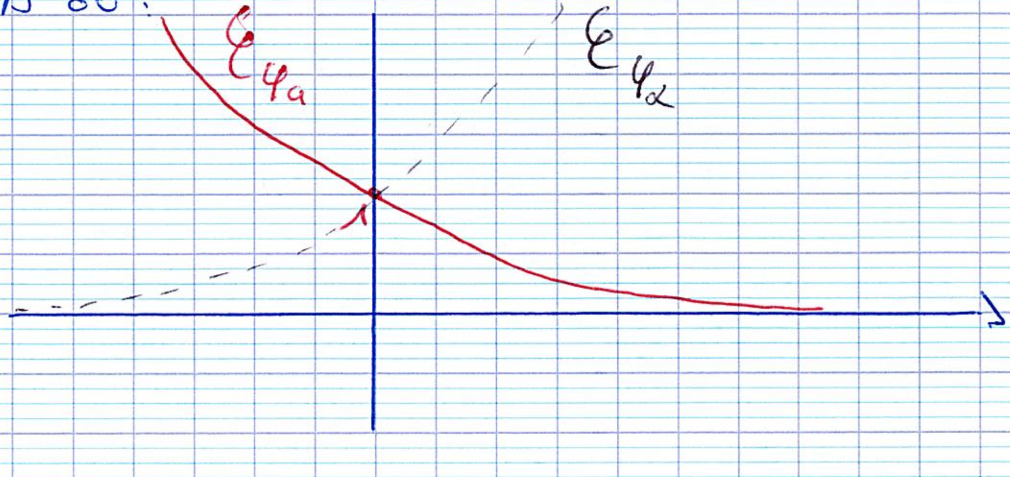
Etc... $\blacksquare$

Soit $a \in]0, 1[$; Fixons $\alpha > 1$ tq $a = \frac{1}{\alpha}$

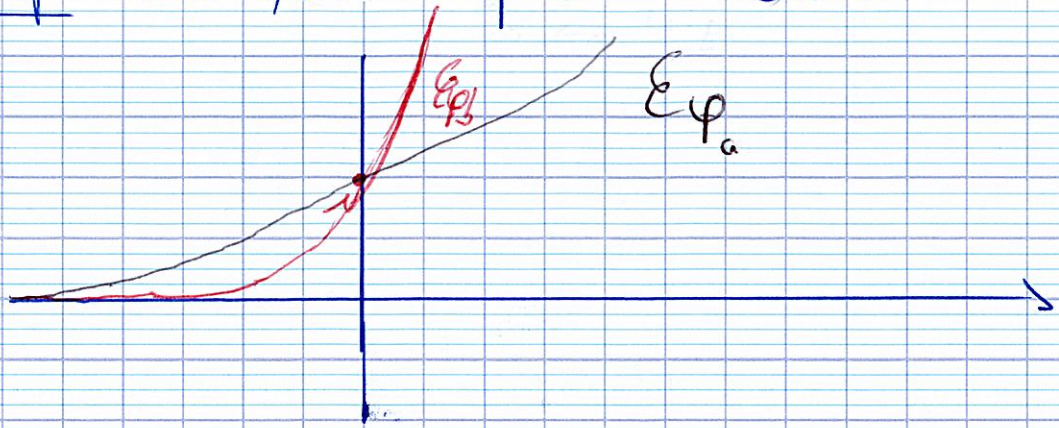
On a ①

$\varphi_a(x) = a^x = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^x = \varphi_\alpha(-x)$

D'où :



Prop Soient $a, b > 1$ tq $b > a$. On a



D/ ok

$(x>0 \longrightarrow$ c $a < b$, on a $\ln(a) \overset{\text{car } \ln(\cdot) \nearrow}{\longrightarrow} < \ln(b)$, $x<0$

$\hookrightarrow x\ln(a) < x\ln(b) \xrightarrow{\exp \nearrow} e^{x\ln(a)} < e^{x\ln(b)}$ (>)

$\hookrightarrow a^x < b^x)$ (>)

4) Croissances comparées

a) en $+\infty$

Def°. Soient $f, g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^*$.

On dit que f est negligeable devant g au voisinage de $+\infty$

et on note $\boxed{f(x) = o\left(g(x)\right) \text{ q}^d\ x \longrightarrow +\infty}$

ou $f(x) \underset{x \to +\infty}{=} o(g(x))$

lu : "f(x) est un petit o de g(x)"

Δ ssi $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

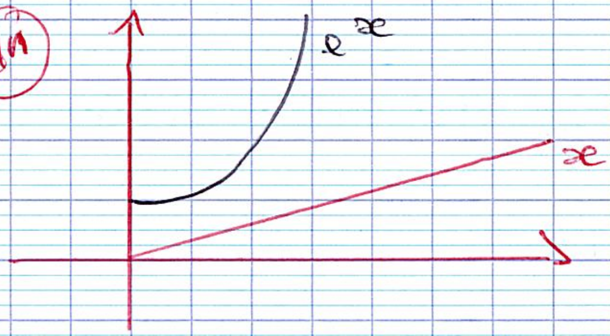
On dit alors que g est prépondérante devant f au voisinage des $+\infty$

Rq : en physique, on écrit $f(x) << g(x)$ qd $x \to +\infty$

b) exemples

- On a $\boxed{x = o(\exp(x))}$ qd $x \to +\infty$

dn



D/ C'est la limite remarquable $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

qu'on écrit aussi $\dfrac{e^x}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

- Plus généralement : $\boxed{x^2 = o(\exp(x))}$ et si $a \geq 0$, $\boxed{x^a = o(e^x)}$ qd $x \to +\infty$

- Ainsi : $\boxed{x^{10\,000} = o(e^x)}$

- $\boxed{\ln(x) = o(x)}$ qd $x \to +\infty$

- Soient $a, b \geq 0$. Alors $a < b \Rightarrow \boxed{x^a = o(x^b)}$

- Etc

- Oscd $x \longmapsto \frac{1}{x^2}$ et $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$

  On a $\boxed{\frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}$ qd $x \to +\infty$

<u>Astuce</u> : $f(x) = o(g(x)) \Leftrightarrow \frac{1}{g(x)} = o\left(\frac{1}{f(x)}\right)$

D/ⓣ

$$f(x) = o\,g(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{g(x)} = o\left(\frac{1}{f(x)}\right)$$

Ĉ $\sqrt{x} = o(x^2)$, cela conclut

- on a $\frac{1}{e^x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

- On a $\boxed{\frac{1}{x} = o(\ln(x))}$ qd $x \to +\infty$

c) comparaison en 0

Def° : Soient $f, g :]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}^*$

On dit ~~dit~~ que $f(x) = o(g(x))$ qd $x \to 0$

ssi $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

Exemples

- Au voisinage de 0, on a $\boxed{x^2 = o(x)}$

(⚠ on a $x = o(x^2)$ qd $x \longrightarrow +\infty$)

(Dï On a $\dfrac{x^2}{x} = x$ et $x \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

- Plus generalement : ⓣ

$$\boxed{b > a \Rightarrow x^b = o(x^a) \quad \text{qd } x \to 0}$$

- Ainsi $x^3 = o(x)$ et $x^3 = o(x^2)$ ...

- On a $\dfrac{1}{x} = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ qd $x \to 0$

- Question : entre $\ln(x)$ et $\dfrac{1}{x}$ qui est negligeable qd $x \to 0$.

Prop : on a $\ln(x) = o\left(\dfrac{1}{x}\right)$ qd $x \to 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet \text{ on a } \dfrac{1}{\sqrt{x}} = o\left(\dfrac{1}{x}\right) \text{ qd } x \to 0 \\ \bullet \text{ Mieux : on a } \ln(x) = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) \text{ qd } x \to 0 \end{array}}$$

D/ 2) ok

OFAA$\sqrt{x}$

3) On a $\dfrac{\ln(x)}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \sqrt{x}\ln(x) = 2\sqrt{x}\ln(\sqrt{x})$

DALC$_{\text{Term}}$: $\boxed{t\ln(t) \xrightarrow[t \to 0^+]{} 0}$

ê $\sqrt{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$, par composit° des limites, on a

$$\sqrt{x}\,.\ln(\sqrt{x}) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

s)

1) Découle de 2) et 3)

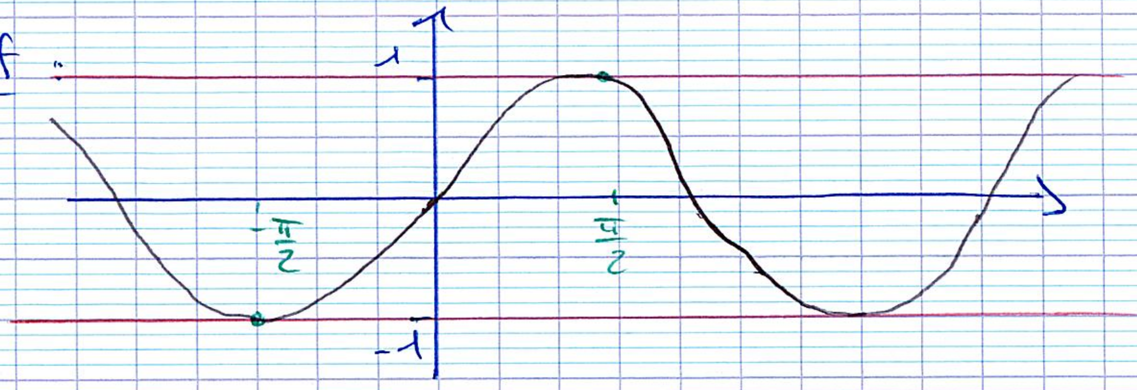
IV Fonctions trigonométriques réciproques

1) arcsin(.)

: si $y \in [-1, 1]$, il existe un unique $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tq $\sin(\theta) = y$. On le note arcsin(y)

a) définition et relations fondamentale

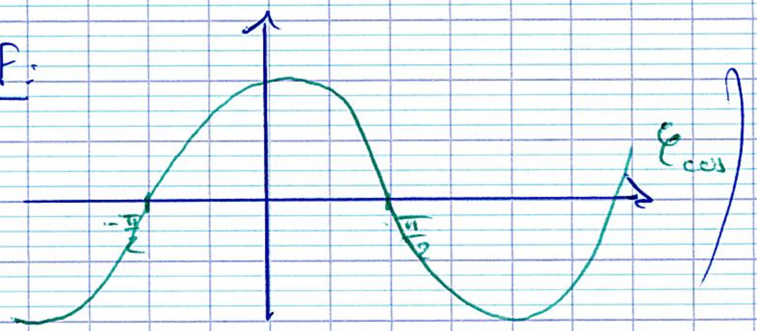
La F° sin $\mathbb{R} \to [-1, 1]$: elle n'est pas bij cf :



Mais $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} : [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1,1]$

est $\nearrow\nearrow$ (car $\sin' = \cos$ et car $\cos > 0$ sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

cf :



) et elle est continue

et $\begin{cases} \sin \frac{\pi}{2} = 1 \\ \sin -\frac{\pi}{2} = -1 \end{cases}$

D'après le théorème de la bijection monotone :

sin établit une bijecf° entre $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ et $[-1,1]$

On note cette bijecf° : $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} : [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$

Def° On appelle $\boxed{\text{arcsin} : [-1,1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$

sa fonction réciproque

$\boxed{\begin{array}{l}\text{Prop :}\\ 1)\ \forall y\in[-1,1]\ \sin(\arcsin(y))=y\\ 2)\ \forall \theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}],\ \arcsin(\sin(\theta))=\theta\end{array}}$

Attention :

- $\forall y \in \mathbb{R}$, $\sin(\arcsin(y)) = y$: c'est F car $\arcsin(y)$ n'existe que pour $y \in [-1, 1]$

- Si $\theta \in \mathbb{R}$, $\arcsin(\sin(\theta)) \neq \theta$ en general : ⚠ attention à ce faux $\boxed{R \cdot \theta}$

  - c'est vrai si $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

  - c'est faux sinon

(Ex/ On a $\arcsin(0) = 0$

En effet on a $\boxed{\forall \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \arcsin(\sin(\theta)) = \theta}$

Pour $\theta = 0$: $\arcsin(0) = 0$

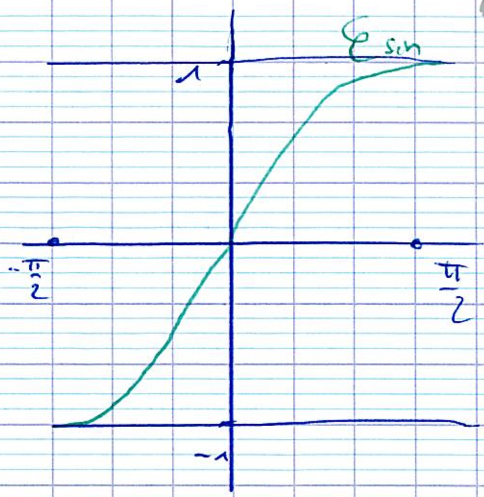
- Et $\arcsin(\sin(\pi)) = \pi$?

Non car $\sin(\pi) = 0$

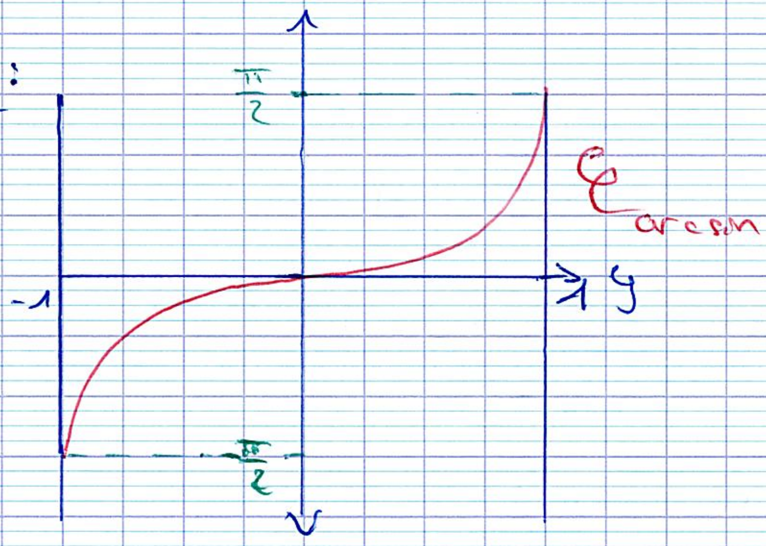
Donc $\arcsin(\sin(\pi)) = 0$ ■)

b) graphe

On sait $\mathcal{C}_{\sin|[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$; c'est



D'où :



c) étude de arcsin

Prop : On a

$$\arcsin(0) = 0$$

$$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$$

D/ on sait que $\forall \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\arcsin(\sin(\theta)) = \theta$ (*)

On applique (*) pour $\theta = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$

Rq : on a

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

donc

y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin(y)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Fait : arsin $\nearrow\nearrow$

D/ Cela decoule des fait general $\left.\begin{array}{l} f \text{ bij} \\ f \nearrow\nearrow \end{array}\right\} \Rightarrow f^{-1} \nearrow\nearrow$

et du fait que $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \nearrow\nearrow$

Prop arcsin est impair

D/ Mq $\forall y \in [-1, 1]$, $\arcsin(-y) = -\arcsin(y)$

Idée : partir "du monde des y", aller dans le monde des angles, utiliser des propriétés connues, retourner ds le monde y

Soit $y \in [-1, 1]$

Posons $\theta := \arcsin(y)$, on a $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

On a $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ car sin impair.

Donc on a $\arcsin(\sin(-\theta)) = \arcsin(-\sin(\theta))$

- De $\oplus$, $\sin(\theta) = \sin(\arcsin(y)) = y$

- En outre, on a $\arcsin(\sin(-\theta)) = -\theta$ car $-\theta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$

Fe on a : $-\theta = \arcsin(-y)$

Or $\theta = \arcsin(y)$

donc $-\arcsin(y) = \arcsin(-y)$

<u>Prop</u> : arcsin est C^0

D/ c'est une consequence du theorème de la bijection monotone

d) exemples de calcul

- On a $\arcsin(\sin(\frac{5\pi}{6})) = \arcsin(\sin(\frac{\pi}{6})) = \frac{\pi}{6}$

<u>Fait</u> : Soit $y \in [-1, 1]$ Alors

$$\cos(\arcsin(y)) = \sqrt{1-y^2}$$

D/ On pose $\theta := \arcsin(y)$ On a $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

On a $\boxed{\cos^2(\theta) + \sin^2\theta = 1}$

Or $\sin^2(\theta) = \sin(\arcsin(y))^2 = y^2$

Donc $\cos^2(\theta) = 1 - y^2$. Donc $|\cos\theta| = \sqrt{\cos^2\theta} = \sqrt{1-y^2}$

Or $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$; donc $\cos\theta \geq 0$

Donc $\cos(\theta) = \sqrt{1-y^2}$ ie $\cos(\arcsin(y)) = \sqrt{1-y^2}$

e) dérivée de arcsin

Prop : 1) arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ ouvert

2) On a $\boxed{\forall y \in]-1,1[, \arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}}$

Rq : ainsi une primitive de

$$\begin{aligned}]-1,1[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \end{aligned}$$

est arcsin.

D/ Rappel ⊕ f^{-1} est d^1 en $y \Leftrightarrow f'(f^{-1}(y)) \neq 0$

et on a alors $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

1. Soit $y \in [-1,1]$. On pose $f := \sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$

On a arcsin est d^1 en $y \Leftrightarrow \cos(\arcsin(y)) \neq 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{1-y^2} \neq 0$

$\Leftrightarrow 1-y^2 \neq 0 \Leftrightarrow y^2 \neq 1$

$\Leftrightarrow y \neq \pm 1$

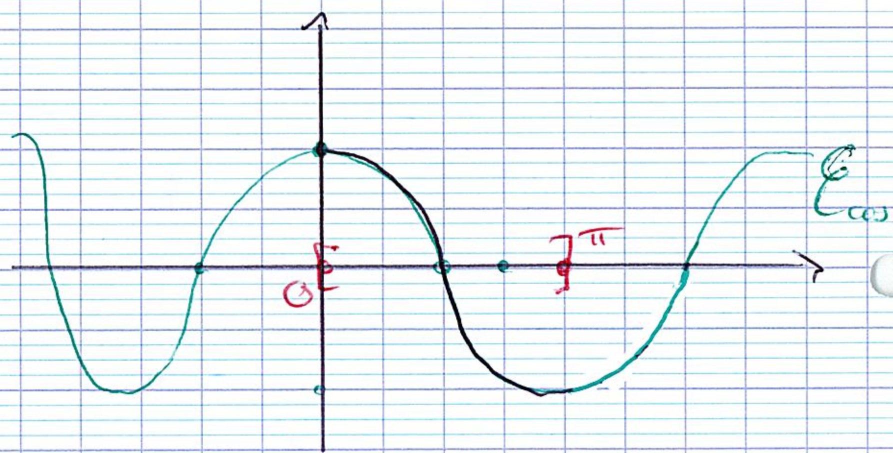
2. Soit $y \in]-1, 1[$. On a alors

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

2) arccos

C'est la m̄ chose

On a d^n



a) def° et RF

Fait : La f° $\cos|_{[0,\pi]} : [0, \pi] \to [-1, 1]$

est une bij° strictement decroissante

D/ $\cos' = -\sin$ et $\sin \geq 0$ sur $[0, \pi]$ avec egalité uniquement en 0 et π

<u>Def°</u> : La fonction

$$\underline{\arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]}$$

est la reciproque de la fonction

$$\cos|_{[0,\pi]} : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$$

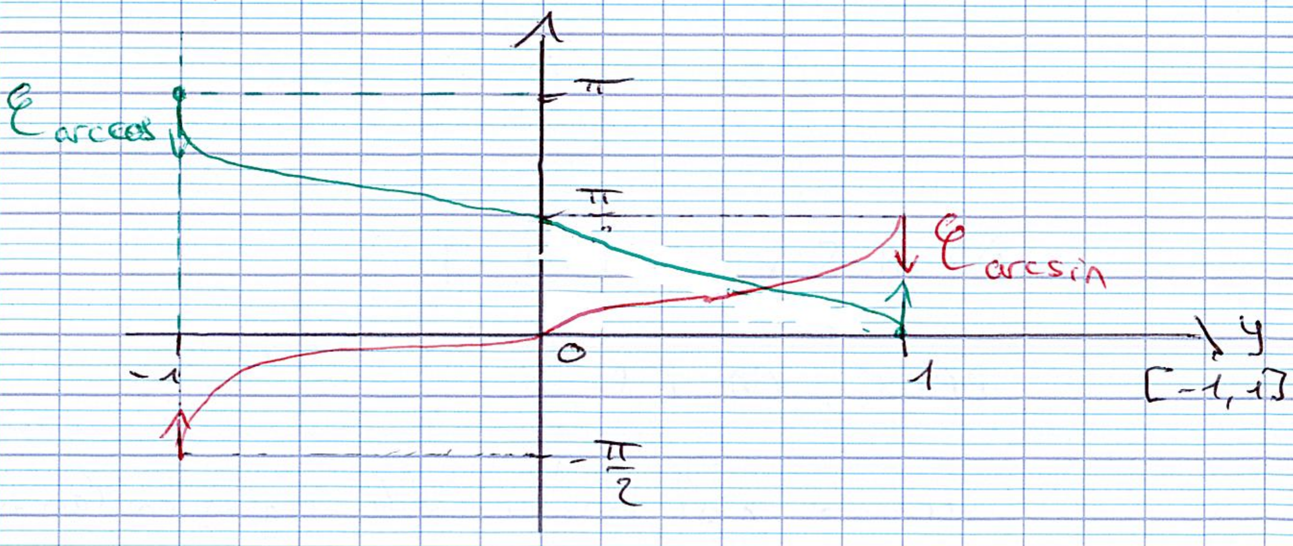
<u>Prop</u> :

1) $\forall y \in [-1, 1]$, $\cos(\arccos(y)) = y$

2) $\forall \theta \in \underline{[0, \pi]}$, $\arccos(\cos(\theta)) = \theta$

D/ C'est "$g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$"

b) <u>graphes</u>



c) dérivée

Fait ⊕ $\sin(\arccos(y)) = \sqrt{1-y^2}$

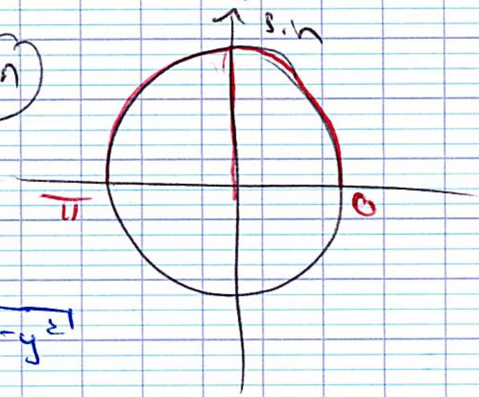
D/ Soit $y \in [-1, 1]$; posons $\theta := \arccos(y)$

On a $\theta \in [0, \pi]$

On a $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$ et $\cos \theta = \cos(\arccos(y)) = y$

donc $\sin^2(\theta) = 1 - y^2$ donc $\sqrt{\sin^2 \theta} = \sqrt{1-y^2}$

ie $|\sin \theta| = \sqrt{1-y^2}$ dn



$\hat{C}$ $\theta \in [0, \pi]$, on a $\sin(\theta) \geq 0$

CCl : $\sin(\arccos(y)) = \sin(\theta) = \sqrt{1-y^2}$

Prop :

1) arccos est d^1 sur $]-1, 1[$

2) $\forall y \in]-1, 1[$, $\boxed{\arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}}$

D/ 1) Soit $y \in [-1, 1]$

DACC, OACES

arccos n'est pas dérivable en $y = \pm 1$ $\cos'(\arccos(y)) = 0$

$\Leftrightarrow -\sin(\arccos(y)) = 0$

$\Leftrightarrow -\sqrt{1-y^2} = 0$

$\Leftrightarrow 1-y^2 = 0$

$\Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow y \in \{-1, 1\}$

2) Soit $y \in]-1,1[$. On a alors DALC

$$\arccos'(y) = \frac{1}{\cos'(\arccos(y))} = \frac{1}{-\sin(\arccos(y))} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

d) une relation

$\boxed{\underline{\text{Prop}} : \forall y \in [-1,1],\ \arccos(y) + \arcsin(y) = \frac{\pi}{2}}$

D/ Soit $y \in [-1,1]$

Posons $\boxed{\theta := \arcsin(y)}$. On a $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Idée : On a $\boxed{\sin(\theta) = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)}$

- Déjà : $\sin(\theta) = \sin(\arcsin(y)) = y$

Donc $y = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$

Donc $\arccos(y) = \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - \theta))$

• Pour pouvoir affirmer que $\arccos(\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)) = \frac{\pi}{2}-\theta$,
il suffit de montrer que $\frac{\pi}{2} - \theta \in [0, \pi]$

Or $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

donc $\frac{\pi}{2} \geq -\theta \geq -\frac{\pi}{2}$

donc $0 \leq \frac{\pi}{2} - \theta \leq \pi$

• Donc $\arccos(y) = \frac{\pi}{2} - \theta$

• $\hat{C}$ $\theta = \arcsin(y)$: DLR $\blacksquare$

D/² Ocsd $\varphi :]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$y \longmapsto \arccos(y) + \arcsin(y)$$

Elle est C^1 et $\forall y \in]-1, 1[$, $\varphi'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} = 0$

Donc φ est cste et $\varphi = \widetilde{\varphi(0)}$. Or $\varphi(0) = \arccos(0) + \arcsin$

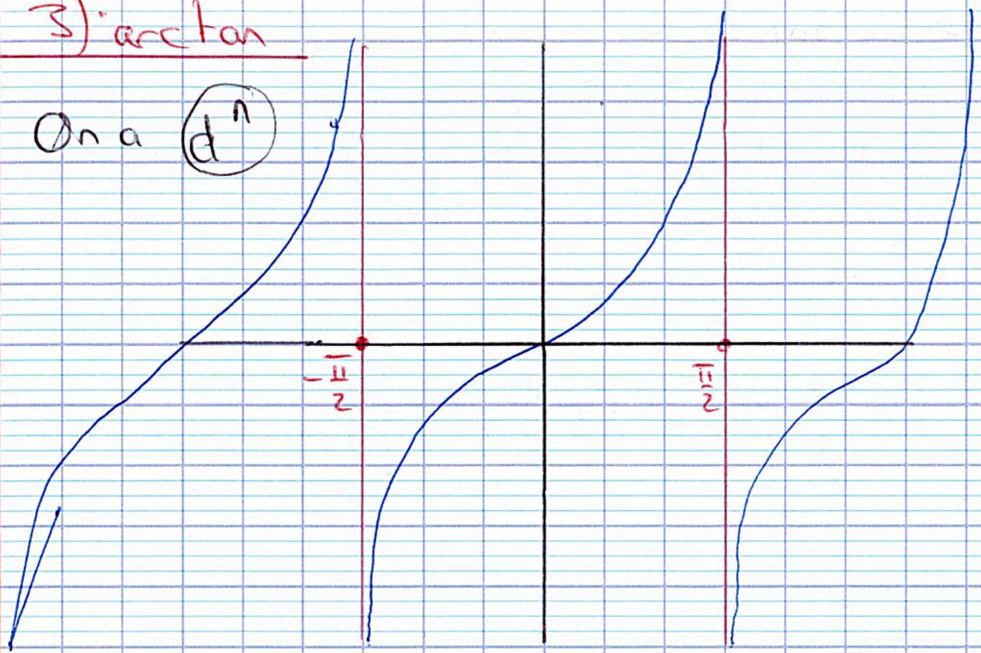
$= \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$

• Et $\varphi(-1) = \arccos(-1) + \arcsin(-1)$
$= \pi - \frac{\pi}{2}$
$= \frac{\pi}{2}$

et $\varphi(1) = \arccos(-1) + \arcsin(1)$
$= 0 + \frac{\pi}{2}$
$= \frac{\pi}{2}$ $\blacksquare$

3) arctan

On a d°



a) déf° et RF

Fait : $\tan\Big|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[} :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$

D / Elle est c° par opération et car cos et sin le sont

- Elle est $\nearrow\nearrow$ car $\tan' = 1+\tan^2 \geq 1 > 0$

Enfin :

$$\tan(\theta) \xrightarrow[\substack{\theta \xrightarrow{>} -\frac{\pi}{2} \\ (\theta \to -\frac{\pi}{2}^+)}]{} -\infty \quad \text{car} \begin{cases} \sin(\theta) \xrightarrow[\theta \to -\frac{\pi}{2}]{} -1 \\ \cos(\theta) \xrightarrow[\theta \to -\frac{\pi}{2}]{} 0 \\ \forall \theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \cos\theta > 0 \end{cases}$$

et donc $\dfrac{1}{\cos\theta} \xrightarrow[\theta \xrightarrow{>} -\frac{\pi}{2}]{} +\infty$

De m̄ $\tan\theta \xrightarrow[\theta \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}]{} +\infty$

- DLR d'après le theorème de la bijection monotone ■

Def° : La f° $\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est la bijection repq de $\tan\Big|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$

Prop :

1) $\forall y \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(y)) = y$

2) $\forall \theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \arctan(\tan(\theta)) = \theta$

D/ ok ■

b/ graphe

Fait : • arctan $\nearrow\nearrow$

• arctan impaire

D/ ok ■

On a :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

Prop : On a

y	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\arctan(y)$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$

En particulier : $\boxed{\arctan(1) = \pi/4}$

D/ok ■

Prop : $\arctan(y) \xrightarrow[y \to +\infty]{} \frac{\pi}{2}$ et $\arctan(y) \xrightarrow[y \to -\infty]{} -\frac{\pi}{2}$

D/

Ie mq $\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R} : \forall y \geq A \frac{\pi}{2} - \varepsilon \leq \arctan(y) \leq \frac{\pi}{2} + \varepsilon$

Soit $\varepsilon > 0$

ORPA et osq $\forall A \in \mathbb{R}, \exists y_0 \geq A : \arctan(y_0) > \frac{\pi}{2} + \varepsilon$
ou $\arctan(y_0) < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$

Ĉ $\forall y \in \mathbb{R}, \arctan(y) < \frac{\pi}{2}$, on a donc

$\forall A \in \mathbb{R}, \exists y_0 \geq A : \arctan(y_0) < \frac{\pi}{2} - \varepsilon \quad (*)$

On peut supposer $\varepsilon < \frac{\pi}{4}$. On a donc $\frac{\pi}{2} - \varepsilon \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Ĉ arctan est surjective sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, fixons $y_1 \in \mathbb{R}$ tq

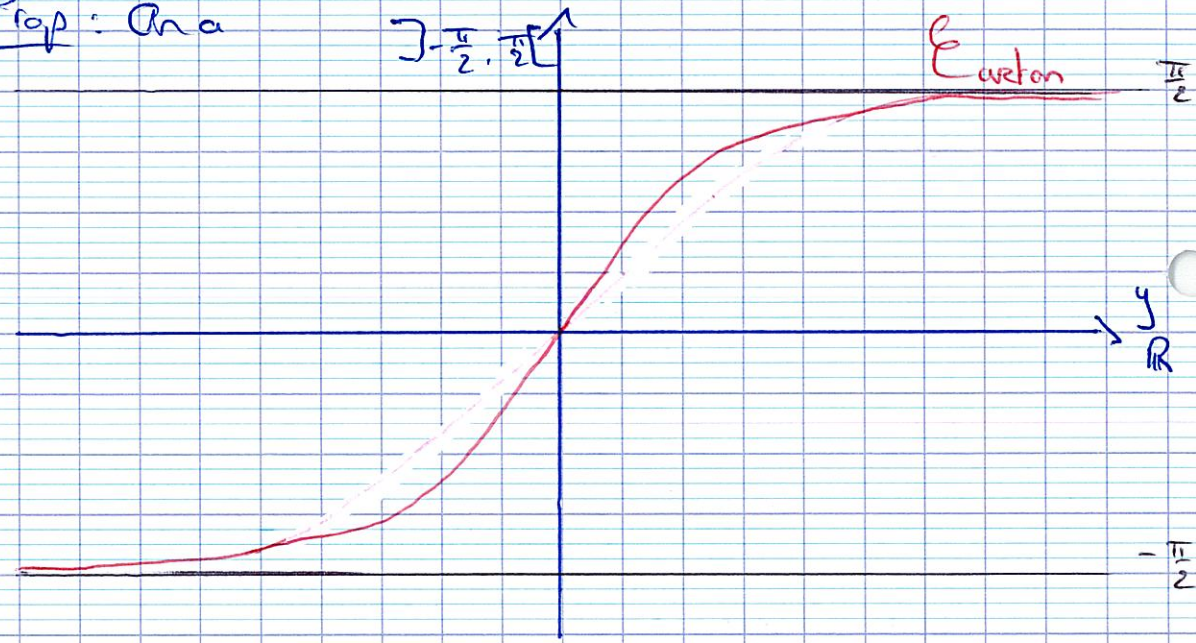
$\arctan(y_1) = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$

Ĉ arctan ↗, $\forall y \geq y_1, \arctan(y) \geq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$

Or d'après (*) (avec $A := y_1$), on a $\exists\, y_0 \geq y_1 : \arctan(y_0) \leq \frac{\pi}{2}$

Abs ∎

Prop : On a



c) dérivée

Prop 1) arctan est dérivable

2) Et, $\forall y \in \mathbb{R}$, $\boxed{\arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}}$

D/ Soit $y \in \mathbb{R}$

On a $\tan'(\arctan(y)) = (1+\tan^2)(\arctan(y))$

$$= 1 + \underbrace{\tan(\arctan(y))}_{y}{}^2 = 1 + y^2 \geq 1 > 0$$

DAL C : arctan est d^1 en y et $\arctan'(y) = \dfrac{1}{1+y^2}$ $\blacksquare$