Intermède

Théorie des ensembles III

Relations

Soient E, F, G des ensembles

I) Relations

1) Définition

Def : Une relation $\mathcal{R}$ sur E est une partie de E^2

- Soient $x, y \in E$

On dit que x et y sont en relation (via $\mathcal{R}$) et on note $x \mathcal{R} y$ ssi $(x, y) \in \mathcal{R}$

- Dans le cas contraire on note $x \not\mathcal{R} y$

Rq : en général pour définir une relation $\mathcal{R}$, on dit :

" Ocsd $\mathcal{R}$ la relation sur E définie

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow \quad \ldots$$

pour tous $x, y \in E$."

2) Exemples

• On prend $E := MPSI_3$

Voici des exemples de relations sur E :

* $x \mathcal{R} y \iff x$ et y se sont déjà parlés

On a Gabriel $\mathcal{R}$ Alexandre

Elle est symétrique :

$$\forall x, y \in MPSI_3,\ x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$$

En fait non ! Il est possible que x ait parlé à y mais que y ait déjà parlé à x

* x et y sont ds le m̃ gp de colle

* x est allé chez y

* x est plus g^d que y

Ex : Nils $\mathcal{R}$ Aveline mais Aveline $\not\mathcal{R}$ Nils

Pour la relation "être ds le m̃ grp de colle", notée $\mathcal{S}$, on a

Aveline $\mathcal{S}$ Joan <u>et</u> Joan $\mathcal{S}$ Aveline

- **Sur $\mathbb{R}$** ①

⊛ x et y ont m̄ signe (au sens stricte)

⊛ On fixe $R \geq 0$. On considère $\mathcal{R}$ la relation sur $\mathbb{R}$ def par

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x^2 + y^2 = R^2$$

⊛ $x > y$

⊛ $x \geq y$

- **Sur $\mathbb{Z}$** ①

⊛ a et b ont m̄ parité

⊛ $a = -b$

⊛ (a divise b) $a | b$

⊛ a et b sont premier entre eux

⊛ Fixons $N \in \mathbb{N}^*$

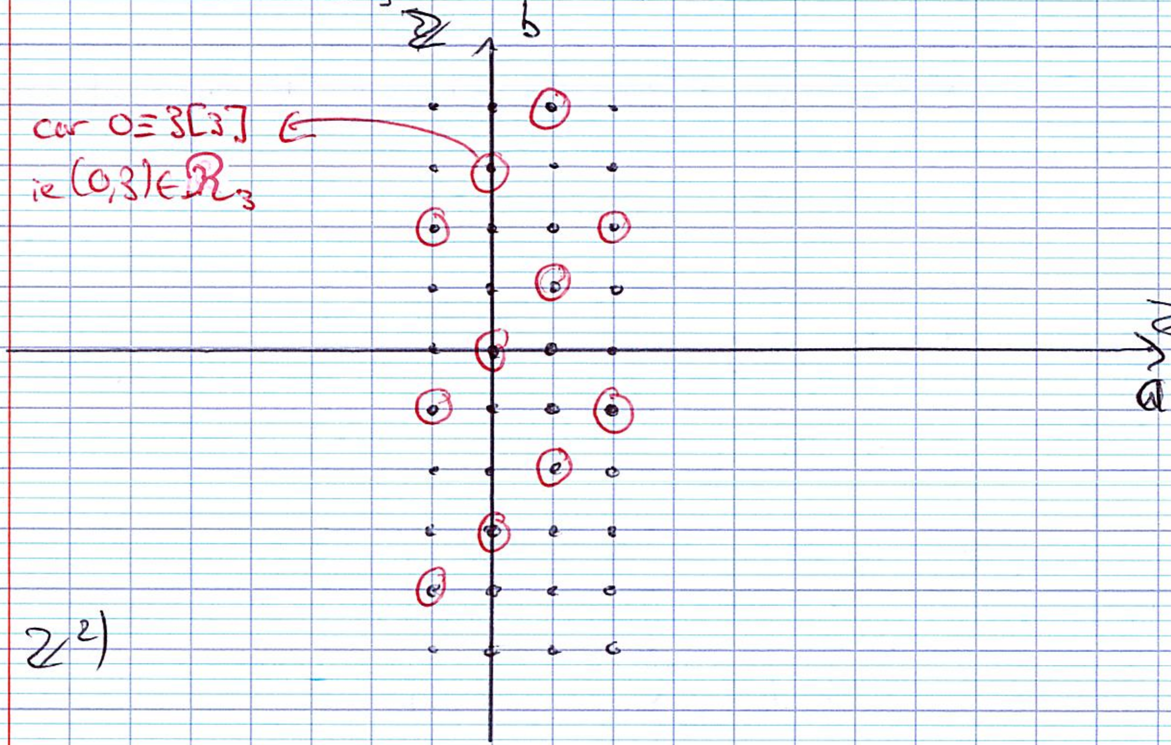
On considère la relation $\mathcal{R}_N$ sur $\mathbb{Z}$ def pa

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, a \mathcal{R} b \Leftrightarrow a \equiv b [N]$$

⊛ $a \leq b$

(d°) On pose $N := 3$. Ocsd $\mathcal{R}_3$

On a $\mathcal{R}_3 \subset \mathbb{Z}^2$, Dessinons-la :



Def° :

La relation $\mathcal{R}_N$ sur $\mathbb{Z}$ est appelée la relat° de congruence modulo N, on la note $\equiv_{[N]}$

3) Vocabulaire

Soit $\mathcal{R}$ une relation sur E. On dit que :

- $\mathcal{R}$ est réflective $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\forall x \in E, x \mathcal{R} x$
- $\mathcal{R}$ est transitive $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\forall x, y, z, (x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} z) \Rightarrow x \mathcal{R} y$
- $\mathcal{R}$ est symétrique $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\forall x, y \in E, x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$

• $\mathcal{R}$ est anti-symetrique $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\forall x,y \in E, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \Rightarrow x=y$

II Relations d'ordre

1) Def°

Def° : Soit E un ensemble. Soit $\mathcal{R}$ une relat° sur E. On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur E $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$
$\mathcal{R}$ est reflexive, transitive et anti-symetrique

Remarques

• Les relations d'ordre "abstraites" sont notées generalement :
$\preccurlyeq$, $\preceq$, $\curlyeqprec$

• Un ensemble ordonné est un couple $(E, \curlyeqprec)$ où E est un ensemble et où $\curlyeqprec$ est une relat° d'ordre sur E

• On dit$^{(T)}$ que $\mathcal{R}$ est un pré-ordre sur E $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$
$\mathcal{R}$ est reflexive et transitive

2) Exemples

• $\mathbb{R}$ muni de l'ordre usuel $\leq$.
• $\mathbb{Z}$ muni de $\leq$.
• $\mathbb{Z}$ muni de $|$

* on a $\forall a \in \mathbb{Z}, a|a$: d'où la reflexivité
* $^{(T)}$ si $a|b$ et si $b|c$ alors $a|c$: d'où la transivité
* $^{(T)}$ si $a|b$ et si $b|a$ alors ⚠ $a = \pm b$

Fait : • "|" est un preordre sur $\mathbb{Z}$

• "|" est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$

• Si X est un ensemble. On dispose de $\leq$ sur $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$
C'est une relation d'ordre

• L'inclusion est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$

3) ~~Vocabulaire~~ Ordres totaux

Soit $\leq$ une relation d'ordre E

Def° : On dit qu'elle est **totale** $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\forall x, y \in E, (x \leq y \text{ ou } y \leq x)$

• On dit que $(E, \leq)$ est **totalement ordonné**

Ex :

• L'inclusion n'est pas totale

- Dans $\mathcal{P}(\{0,1\})$ muni de $\subset$: les singletons $\{0\}$ et $\{1\}$ ne sont pas comparables

• De même pour "|" : car $2 \nmid 3$ et $3 \nmid 2$

• De même pour $\leq$ sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

On a $\sin \not\leq \tilde{0}$ et $\sin \not\geq \tilde{0}$
Donc $\sin$ et $\tilde{0}$ ne sont pas comparables

4) Applications croissantes

Def° : Soient $(E, \leq_E)$ et $(F, \leq_F)$ deux ensembles ordonnés.
Soit $f : E \to F$.
On dit que f est croissante (pour les $\leq_E$ et $\leq_F$)

$$\overset{\Delta}{\text{ssi}} \quad \forall x, y \in E, \; x \leq_E y \implies f(x) \leq_F f(y)$$

Ex :

- les f° ↗ au sens usuel : ok
- C'est des applications croissantes de $(\mathbb{R}, \leq)$ dans $(\mathbb{R}, \leq)$

- Soient E, F ens ; soit $f : E \to F$
Ocsd $\Phi : \mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(E)$

$$B \longmapsto f^{\langle -1 \rangle}[B]$$

Elle est croissante pour l'inclusion
De même pour l'application "poussé-en-avant"

- Ocsd $\text{Card} : \mathcal{P}_F(E) \to \mathbb{N}$

$$A \longmapsto \text{Card}(A)$$

On a $A \subseteq B \implies \text{Card}(A) \leq \text{Card}(B)$

Donc Card est croissante pour $\subseteq$ et $\leq$

- Ocsd $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ie $Id_{\mathbb{N}}$

$$n \longmapsto n$$

a) A-t-on $Id_{\mathbb{N}} : (\mathbb{N}, \leq) \to (\mathbb{N}, |)$ croissante

b) A-t-on $Id_{\mathbb{N}} : (\mathbb{N}, |) \longrightarrow (\mathbb{N}, \leq)$ croissante ?

a) NON car $2 \leq 3$ mais $2 \nmid 3$

b) A-t-on $a | b \Rightarrow a \leq b$?

NON car $1 | 0$ mais $1 \nleq 0$

MAIS : on a $\left.\begin{array}{l} a | b \\ b \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow |a| \leq |b|$

Ainsi $Id_{\mathbb{N}^*} : (\mathbb{N}^*, |) \longrightarrow (\mathbb{N}^*, \leq)$ est croissante

5) Remarque

Les notions de majorant, minorant, maximum, minimum, etc peuvent être définie dans un ensemble ordonné qcq

III Relations d'équivalence

1) Définition

Déf° : Soit $\mathcal{R}$ une relation sur E. On dit que $\mathcal{R}$ est une relat° d'~~ordre~~ équivalence sur E ssi
$\mathcal{R}$ réflexive, $\mathcal{R}$ symétrique, $\mathcal{R}$ transitive

Rq : Les relat° d'équivalence sont l'outil par excellence permettant de faire des $\left\{\begin{array}{l}\text{identifications} \\ \text{abstractions}\end{array}\right.$

Notations : Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E
Soient $x, y \in E$. On note

$$x \equiv_{\mathcal{R}} y \quad \overset{\Delta}{\text{ssi}} \quad x \mathcal{R} y$$

(en qq sorte : x et y sont les m̄ du point de vue de $\mathcal{R}$)

2) Exemples

- **Sur $MPSI_3$**

  - la relation "être dans le m̄ gp de colle"
  - "être du même sexe"
  - "venir du m̄ departement"

- **Sur $\mathbb{Z}$**

  - Pour $N \in \mathbb{N}^*$ la relation de $\equiv_{[N]}$ est une relation d'équivalence :

$$\begin{cases} \cdot\ x \equiv x\ [N] \\ \cdot\ x \equiv y\ [N] \Rightarrow y \equiv x\ [N] \\ \left.\begin{array}{l} \cdot\ x \equiv y\ [N] \\ \cdot\ y \equiv z\ [N] \end{array}\right\} \Rightarrow x \equiv z\ [N] \end{cases}$$

- **Sur $\mathbb{R}$**

La relation "être du m̄ signe au sens strict" est une relation d'équivalence

3) Classes d'équivalences et

a) déf°

Soit E un ensemble muni d'une relat° d'équivalence $\mathcal{R}$

Déf° : Soit $x \in E$. La classe d'équivalence pour $\mathcal{R}$, notée $Cl_{\mathcal{R}}(x)$ est l'ensemble des éléments $y \in E$ tq $y \equiv_{\mathcal{R}} x$

Fe on pose :

$$Cl_{\mathcal{R}}(x) := \{y \in E \mid y \mathcal{R} x\}$$

b) un exemple

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Ocsd $\equiv_{[N]}$

Alors $\cdot\ Cl_{\equiv_{[N]}}(0) = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \equiv 0 [N]\}$

$= \{k \in \mathbb{Z} \mid N \text{ divise } k\}$

$= N\mathbb{Z}$ (= ensemble des multiples de N)

$\cdot\ Cl_{\equiv_{[N]}}(1) = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \equiv 1 [N]\}$

$= \{1, 1+N, 1+2N, \ldots, 1-N, \ldots\}$

On le note $1 + N\mathbb{Z}$

c) propriétés

Prop ①

1) $x \in Cl_{\mathcal{R}}(x)$

2) $Cl_{\mathcal{R}}(x) \cap Cl_{\mathcal{R}}(y) \neq \emptyset \iff \cancel{x} \; x \mathcal{R} y$

3) $Cl_{\mathcal{R}}(x) \cap Cl_{\mathcal{R}}(y) \neq \emptyset \iff Cl_{\mathcal{R}}(x) = Cl_{\mathcal{R}}(y)$

4) $Cl_{\mathcal{R}}(x) = Cl_{\mathcal{R}}(y) \Rightarrow x \mathcal{R} y$

D/ Soit $x, y \in E$

1) ĉ $x \mathcal{R} x$, on a $x \in Cl_{\mathcal{R}}(x)$

2) Mq $Cl_{\mathcal{R}}(x) \cap Cl_{\mathcal{R}}(y) \neq \emptyset \Rightarrow x \mathcal{R} y$

$\Leftarrow$ Osq $x \equiv_{\mathcal{R}} y$ ie osq $x \mathcal{R} y$. Donc $x \in Cl_{\mathcal{R}}(y)$

Or $x \in Cl_{\mathcal{R}}(x)$; donc $x \in Cl_{\mathcal{R}}(x) \cap Cl_{\mathcal{R}}(y)$ ▣

$\Rightarrow$ Osq $Cl_{\mathcal{R}}(x) \cap Cl_{\mathcal{R}}(y) \neq \emptyset$ et on fixe $z_0 \in Cl_{\mathcal{R}}(x) \cap Cl_{\mathcal{R}}(y)$.

On a $z_0 \mathcal{R} x$ et $z_0 \mathcal{R} y$. Donc on a aussi par symétrie $x \mathcal{R} z_0$.

Ĉ $z_0 \mathcal{R} y$, par transitivité, on en déduit $x \mathcal{R} y$

Ie $x \equiv_{\mathcal{R}} y$ ▣

3) Mq $Cl_{\mathcal{R}}(x) \cap Cl_{\mathcal{R}}(y) \neq \emptyset \Leftrightarrow Cl_{\mathcal{R}}(x) = Cl_{\mathcal{R}}(y)$

($\Leftarrow$) Osq $Cl_{\mathcal{R}}(x) = Cl_{\mathcal{R}}(y)$. Donc $Cl_{\mathcal{R}}(x) \cap Cl_{\mathcal{R}}(y) = Cl_{\mathcal{R}}(x)$

Or $x \in Cl_{\mathcal{R}}(x)$; donc $Cl_{\mathcal{R}}(x) \cap Cl_{\mathcal{R}}(y) \neq \emptyset$

($\Rightarrow$) Osq $Cl_{\mathcal{R}}(x) \cap Cl_{\mathcal{R}}(y) \neq \emptyset$. Mq $Cl_{\mathcal{R}}(x) = Cl_{\mathcal{R}}(y)$

DACQP, on a $x \mathcal{R} y$

On raisonne par double inclusion (ORPDI)

Mq $Cl_{\mathcal{R}}(x) \subset Cl_{\mathcal{R}}(y)$

Soit $z \in Cl_{\mathcal{R}}(x)$

Mq $z \in Cl_{\mathcal{R}}(y)$

On a $z \mathcal{R} x$; or $x \mathcal{R} y$; par transitivité, on a

$z \mathcal{R} y$ ie $z \in Cl_{\mathcal{R}}(y)$

De même : $Cl_{\mathcal{R}}(y) \subset Cl_{\mathcal{R}}(x)$

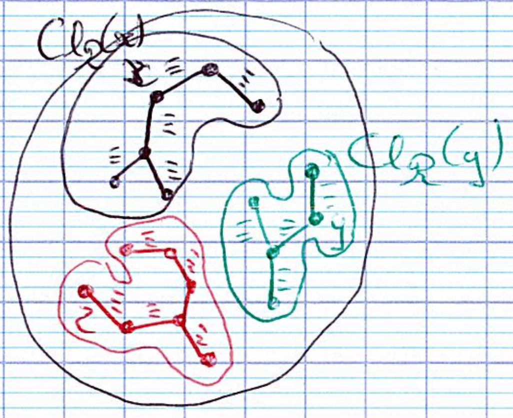
■ 3)

4) On a

$$x \mathcal{R} y \underset{2)}{\Leftrightarrow} Cl_{\mathcal{R}}(x) \cap Cl_{\mathcal{R}}(y) \neq \emptyset \underset{3)}{\Leftrightarrow} Cl_{\mathcal{R}}(x) = Cl_{\mathcal{R}}(y)$$

Rq : L'idée sous jacente, ici, est que "les classes de $\mathcal{R}$" forment une partition de E

dⁿ



4) Classes d'équivalence (bis) et ensemble quotient

Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$

Def° : Soit $A \subset E$

On dit que A est une classe d'équivalence pour $\mathcal{R}$ $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\exists x \in E : A = Cl_{\mathcal{R}}(x)$$

Rq : on a

$$A \text{ classe d'équivalence pour } \mathcal{R} \Rightarrow \begin{cases} \cdot\ A \neq \emptyset \\ \cdot\ \forall a \in A, \forall x \in E, x \mathcal{R} a \Rightarrow x \in A \quad \text{« A est saturée »} \\ \cdot\ \forall a, b \in A, a \mathcal{R} b \end{cases}$$

Def° :

L'ensemble quotient de E par $\mathcal{R}$, noté $E/\mathcal{R}$ est l'ensemble des classes d'equivalence (pour $\mathcal{R}$) de E

Ie, on pose : $E/\mathcal{R} := \left\{ A \in \mathcal{P}(E) \;\middle|\; \begin{array}{l} A \text{ est une classe d'équivalence} \\ \text{de } E \text{ pour } \mathcal{R} \end{array} \right\}$

Exemple :

- On se place sur $MPSI_3$ muni de "être ds le même grp de colle", qu'on note $\mathcal{R}$. Alors :

$$MPSI_3/\mathcal{R} = \{\{\text{Hyacinthe, Romain, Thomas}\}, \dots\}$$

- Sur $\mathbb{R}$ munie de "est de $\bar{m}$ signe strict", notée $\mathcal{R}$

On a $\mathbb{R}/\mathcal{R} = \{\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_-^*, \{0\}\}$

5) $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$

On a vu que $\equiv_{[N]}$ est une relat° d'equivalence

(① $\cdot\, x \equiv x\,[N]$, $\cdot\, x \equiv y\,[N] \Rightarrow y \equiv x\,[N]$, ~~$\cdot\, x \equiv y\,[N]$~~
$\cdot\, x \equiv y\,[N]$ et $y \equiv z\,[N] \Rightarrow x \equiv z\,[N]$)

On a vu que $Cl_{\equiv[N]}(0) = N\mathbb{Z}$

et $Cl_{\equiv[N]}(1) = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 1[N]\} = \{kn+1, k \in \mathbb{Z}\}$

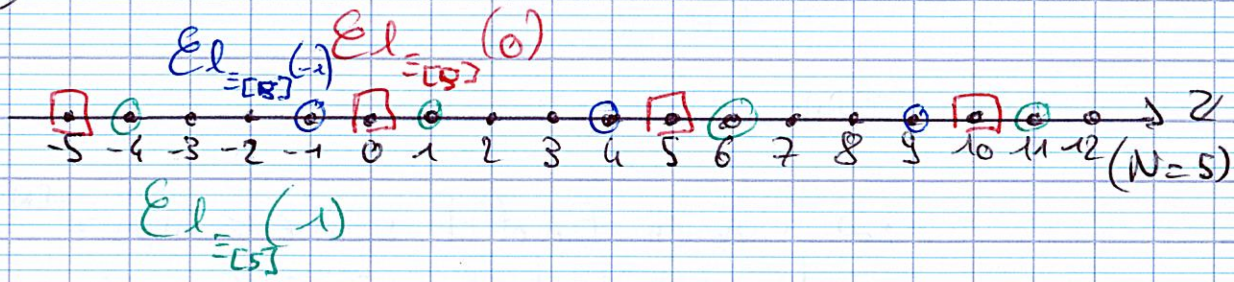
$\underset{\text{notat}^{\circ}}{=} 1 + N\mathbb{Z}$

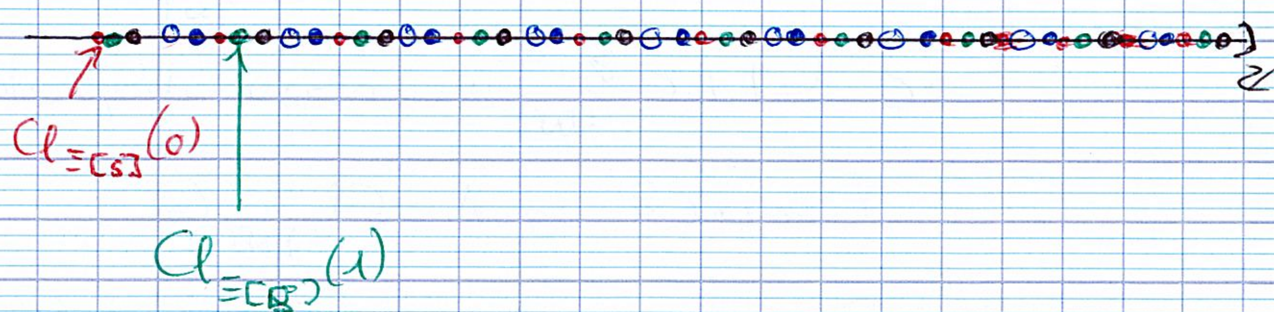
Dem : $Cl_{\equiv[N]}(2) = 2 + N\mathbb{Z}$

$\hat{C}$ $-1 \equiv N-1[N]$ donc

$Cl_{\equiv[N]}(-1) = Cl_{\equiv[N]}(N-1)$

d)





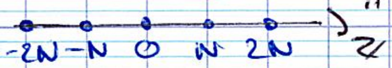
Def° : On pose

$$\mathbb{Z}/_{N\mathbb{Z}} := \mathbb{Z}/_{\equiv[N]}$$

~~Prop~~

Notation :

Si $x \in \mathbb{Z}$, on note $\overline{x}^{[N]} := Cl_{\equiv[N]}(x)$

Ex : $\overline{0}^{[N]} = N\mathbb{Z} =$ "  "

Prop :

1) $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ est fini et $\left|\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}\right| = N$

2) $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} = \left\{\overline{0}^{[N]}, \overline{1}^{[N]}, \dots, \overline{N-1}^{[N]}\right\}$

D/2) Mq $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} = \left\{\overline{0}^{[N]}, \overline{1}^{[N]}, \dots, \overline{N-1}^{[N]}\right\}$

ORPAI

• $\supset$ c'est ok. En effet, si $x \in \mathbb{Z}$, alors $\overline{x}^{[N]}$ est une classe d'équivalence et donc $\overline{x}^{[N]} \in \mathbb{Z}/_{\equiv[N]}$ ie $\overline{x}^{[N]} \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$

• $\subset$ Soit $A \in \mathbb{Z}/_{\equiv[N]}$ une classe d'équivalence

Fixons $x \in \mathbb{Z}$ tq $A = Cl_{\equiv[N]}(x)$

Mq $\exists k \in [\![0, N-1]\!],\ Cl_{\equiv[N]}(x) = Cl_{\equiv[N]}(k)$

Idée : DE

On fait la DE de x par N : fixons $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in [\![0, N-1]\!]$

tq $x = qN + r$

i.e. $x - r = Nq$, on a $N \mid x - r$ ie on a $x \equiv r\,[N]$

Donc $\underset{=[N]}{Cl(x)} = \underset{=[N]}{Cl(r)}$

■

1) Donc $\mathbb{Z}/_{N\mathbb{Z}}$ est fini car il est inclus dans l'ensemble fini :

$$\left\{ \overline{k}^{[N]} \ ; \ k \in [\![0, N-1]\!] \right\} \text{ et } \left| \mathbb{Z}/_{N\mathbb{Z}} \right| \leq N$$

2) AC

Mq les $\overline{k}^{[N]}$ sont 2 à 2 distincts qd $k \in [\![0, N-1]\!]$

Ie mq $\forall k, l \in [\![0, N-1]\!] : k \neq l \Rightarrow \overline{k}^{[N]} \neq \overline{l}^{[N]}$

Ie mq (par contraposition) :

$$\forall k, l \in [\![0, N-1]\!], \overline{k}^{[N]} = \overline{l}^{[N]} \Rightarrow k = l$$

Soient k, l $[\![0, N-1]\!]$ tq $\overline{k}^{[N]} = \overline{l}^{[N]}$

Mq $k = l$

Dyqu : DACQP on a $k \equiv l\,[N]$

Donc $N \mid k - l$

ORPA et osq $k \neq l$, alors $k - l \neq 0$

Donc $N \mid k - l$ entraine $|N| \leq |k - l|$

Rappel :

$$\left.\begin{array}{l} a \mid b \\ b \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow |a| \leq |b|$$

Or, $k, \ell \in [\![0, N-1]\!]$; $|k-\ell| \leq N-1$

Abs

DLR