

Chapitre 12: Polynômes I

Dans tout ce chapitre: la lettre K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Rq: tout ce qui suit (sauf exception) est valable pour un corps K quelconque.

• Une bonne partie de ce qui suit est vrai pour A anneau commutatif quelconque.

• Si R est un anneau on peut aussi définir $\mathbb{R}[X]$ des polynômes

① Présentation et définition

1) Exemples

⚠ On n'écrit pas "Soit $X \in \dots$ "
C'est inutile et ce ferait une faute

Voici des polynômes:

- $X^2 - 2X + 1$
- $XS - 1$
- $\frac{1}{30}X^{18} + \frac{1}{50}X^3 - \frac{50}{7}$
- $eX^2 - \pi X + \sqrt{3}$
- $X^5 - i$
- $(1+i)X^5 + (5-i)X + (\sqrt{3} + 2i)$
- 5
- 23
- 0
- $\textcircled{1} X^n - 2$
- $\textcircled{2} nX^n + (n-1)X^{n-1} + \dots + 2X^2 + X$ noté $\sum_{h=0}^n kX^h$
-

Ne sont pas des polynômes :

$$\frac{1}{x}; x^{\frac{1}{2}}; e^x$$

2) Notations

On les note en gal : P, Q, R, S, T, U, V, W

Ex : "Posons $P := X^2 + 3X + 4$ "

⚠ On n'écrit pas "Posons $P(X) := X^2 + 3X + 4$ "

3) Exemples de calculs

a) addition

$$\begin{aligned} \text{p. ex. on a } (x^5 + 3x^2 - 2x - 1) + (x^4 + x^3 - x^2 - x - 1) \\ = x^5 + x^4 + x^3 + 2x^2 - 3x - 2 \end{aligned}$$

b) multiplication

P. ex. ; on a ~~x^5~~

$$\begin{aligned} (x^3 + 3x^2 - 2x + 1) \times (3x^2 - x + 2) &= 2 - 5x + (6 + 2 + 3)x^2 \\ &\quad + (2 - 3 - 6)x^3 + (-1 + 9) \\ &\quad + 3x^5 \\ &= 2 - 5x + 11x^2 - 7x^3 + 8x^4 + 3x^5 \end{aligned}$$

c) scalarisation

Vocabulaire : un scalaire, c'est un élément de $\mathbb{K}$

P.ex: on a $3(x^2 + x + 7) = 3x^2 + 3x + 21$

d) exemple - bilan

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Fait: $(x-1)(1+x+x^2+\dots+x^{n-1}) = x^n - 1$

Or On a $(x-1)(1+x+\dots+x^{n-1})$

$$= (x + x^2 + \dots + x^n) - (1 + x + \dots + x^{n-1})$$

$$= x^n - 1$$

4) L'ensemble des polynômes

On note :

- $\mathbb{R}[X]$ l'ens des polynômes (à coeff. réels)
- $\mathbb{C}[X]$ l'ens des polynômes (à coeff. complexes)

Rq: si R est un anneau, on peut aussi définir $R[X]$

Ex ***:

DS $M_2(\mathbb{R})[X]$, on peut considérer:

$$P := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(exo) calculer P^2

$$\begin{aligned}
 \text{On a } P^2 &= \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} x^4 + \left(\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \right) x^3 \\
 &+ \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right) x^2 + \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) x + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} x^4 + \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Ex: $\mathbb{Z}[x]$: très important

⚠ pas de $\mathbb{N}[x]$ ni de $\{0, 1\}[x]$

5) L'indéterminée

Certains objets mathématiques possèdent un nom fixe une fois pour toute et connu de tous : "le π propre".

Ex: $\mathbb{R}$, $\exp$, π , i , ζ (la fonction zêta de Riemann), γ ,
 $\mathbb{N}$, ψ , 0 , 1 , ..., 9 , $\emptyset$, $\ln$, $\sin$, $\cos$, $\tan$, $\sinh$, ..., **X**

X: c'est l'indéterminée

6) Premières propriétés

a) propriétés

- $(P+Q)+R = P+(Q+R)$
- $(P+0) = Q+P$
- $P+0 = 0+P = P$
- $P+(-P) = (-P)+P = 0$

- $P(Q \times R) = (P \times Q) \times R$
- $P \times 1 = 1 \times P = P$
- Dans $A[x]$, $P \times Q = Q \times P$
- $(P+Q)R = R \times P + Q \times R$
- $P \times (Q+R) = P \times Q + P \times R$

b) bilan

Prop:

$(K[x], +, \times, 0, 1)$ est un anneau commutatif

Rq $A[x]$: idem
 $R[x]$: est un anneau

Ex: Soient $P, Q, R, S, T \in K[x]$

On peut considérer

$$(P+SQ)^2 - 3RS + \underbrace{(T^2 R^5 S^{10} + P)^5}_{S_0}$$

g^o naturelles

- Que vaut $U(K[x])$?
- Que vaut $U(A[x])$?
- $K[x]$ est-il intègre?
- Que vaut $\text{End}_{\text{CM}}(K[x])$?

7) ^{!!} Ecriture canonique d'un polynôme

a) écriture canonique

Théorème-définition

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul

1) Alors : P s'écrit de manière unique :

$$P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$$

avec $n \in \mathbb{N}$, avec $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tq $a_n \neq 0$

re $\forall P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0_{\mathbb{K}[X]}\}, \exists ! n \in \mathbb{N}, \exists ! (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1} :$

$$P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \text{ et } \underline{a_n \neq 0}$$

2) On dit que :

- n est le degré de P ; on le note $\deg(P)$;
- les a_k sont les coeffs de P ; on le note $c_k[P]$
- a_0 est le coeff const de P
- a_n est le coeff dominant de P ; on le note $c_{\text{dom}}[P]$
- $a_n X^n$ est le term dominant de P

b) exemples

• On a : $\deg(5X^3 - 2X^2 + X - 1) = 3$
 $c_{\text{dom}}[\dots] = 5$

$$\textcircled{a} c_0[\dots] = \frac{-1}{m}$$

$$\textcircled{a} c_1[\dots] = 1$$

$$\textcircled{a} \forall k \geq 1, c_k[\dots] = 0$$

c) quelques propriétés

Prop: $\textcircled{a}$ (pour $P, Q \in K[x] \setminus \{0_{K[x]}\}$)

$$1) c_0[P \times Q] = c_0[P] \times c_0[Q]$$

$$2) c_{\text{dom}}[P \times Q] = c_{\text{dom}}[P] \times c_{\text{dom}}[Q]$$

D/ Soient $P, Q \in K[x]$ non nuls

Fixons donc $n, m \in \mathbb{N}$, $(a_0, \dots, a_n) \in K^{n+1}$ et $(b_0, \dots, b_m) \in K^{m+1}$

$$P = \sum_{k=0}^n a_k x^k \quad \text{et} \quad Q = \sum_{l=0}^m b_l x^l \quad \text{et} \quad a_n \neq 0 \text{ et } b_m \neq 0$$

(C'est un $\mathbb{R}^x$ redactionnel)

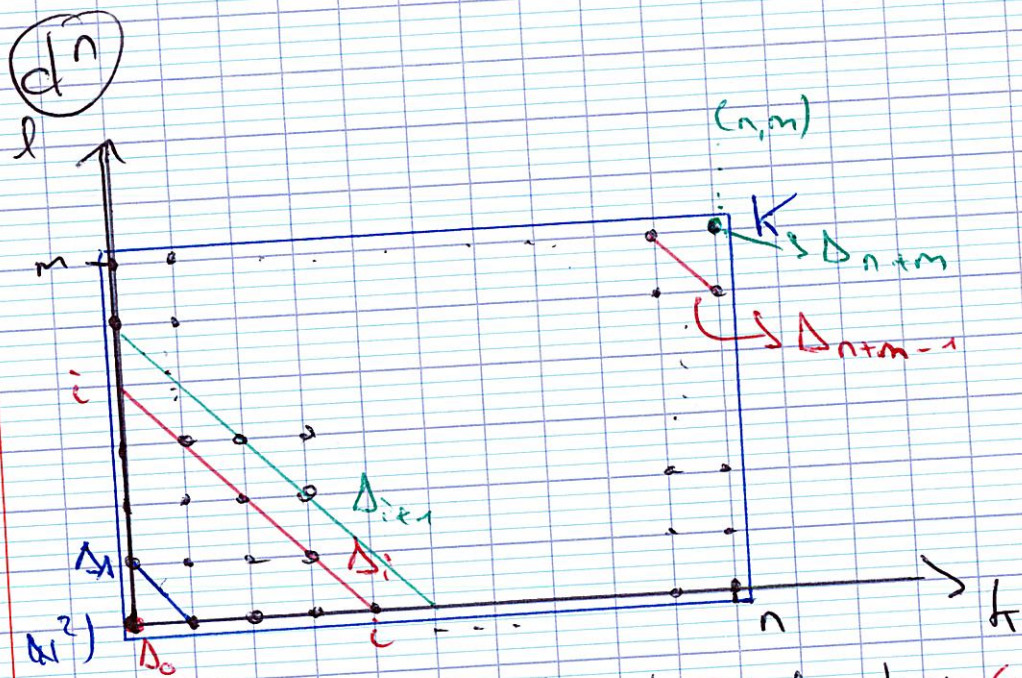
Rq: on a $n = \deg(P)$ et $m = \deg(Q)$

$$\begin{aligned} \text{On a } P \times Q &= \sum_{k=0}^n a_k x^k \times \sum_{l=0}^m b_l x^l \\ &= \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ 0 \leq l \leq m}} a_k b_l x^k x^l \\ &= \sum_{(k,l) \in [0,n] \times [0,m]} a_k b_l x^{k+l} \end{aligned}$$

Notons $K = [0, n] \times [0, m]$

et pour $i \in \mathbb{N}$, $\Delta_i = \{(k, l) \in K \mid k+l=i\}$

On a: $K \subset \mathbb{N}^2$ et $\forall i \in \mathbb{N}$, $\Delta_i \subset K \subset \mathbb{N}^2$



$\textcircled{B^0} \Delta_i: k+l=i \iff l=i-k \iff l=-k+i \iff y=-x+i$

Fait

1) $K = \bigcup_{i=0}^{n+m} \Delta_i$

2) $\Delta_0 = \{(0, 0)\}$

$\Delta / \textcircled{2 \times 0}$

3) $\Delta_{n+m} = \{(n, m)\}$

Par sommations par paquets, on a

PQ: $\sum_{(k, l) \in K} a_k b_l x^{k+l} = \sum_{(k, l) \in \bigcup_{i=0}^{n+m} \Delta_i} a_k b_l x^{k+l}$

$$= \sum_{i=0}^{n+m} \sum_{(k,l) \in D_i} a_k b_l x^{k+l} = \sum_{i=0}^{n+m} \left(\sum_{(k,l) \in D_i} a_k b_l \right) x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n+m} x^i \left(\sum_{(k,l) \in D_i} a_k b_l \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n+m} \underbrace{\left(\sum_{(k,l) \in D_i} a_k b_l \right)}_{c_i} x^i$$

$$c_0 \dots c_{n+m} = \sum_{(k,l) \in \underbrace{D_{n+m}}_{= \{(n,m)\}}} a_k b_l = a_n \times b_m$$

Or, $a_n \neq 0$ $b_m \neq 0$ Donc, $\exists$ 1_K est intègre car 1_K corps :

$$a_n \times b_m \neq 0$$

Donc $\boxed{c_{n+m} \neq 0}$

Donc le terme de plus grand degré non nul est celui en x^{n+m}

$$\text{Donc } \deg(PQ) = n+m$$

$$\text{Donc } c_{\deg(PQ)} = c_{n+m} = a_n b_m = c_{\deg(P)} \times c_{\deg(Q)}$$

■

$$\begin{aligned} 2) \text{ Et } c_0 &= \sum_{(k,l) \in \Delta_0} a_k b_l \\ &= \{c_0, c_0\} \\ &= a_0 b_0 \end{aligned}$$

$$\underline{\text{F.e.}} \quad c_0 [PQ] = c_0 [P] c_0 [Q] \quad \blacksquare$$

d) def^o

Def.

- un polynôme unitaire est un polynôme non nul P tq $c_{\text{dom}}(P) = 1$ (ex. $x^5 - 8x^4 + 3x^2 + 10$ est unitaire; $5x+2$ ne l'est pas)
- Soit P un polynôme. On dit que P est constant si:
 $P = 0$ ou $\deg(P) = 0$

Ex: $0, 3, 8$ sont des polynômes constants. Mais $3x+2$ est de degré 1 donc n'est pas constant.

8) Exemples d'identités algébriques classiques

Prop. (Newton) polynomial)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[x]$. Alors

$$(P+Q)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P^k Q^{n-k}$$

✓ C'est ok car $\mathbb{K}[x]$ est un anneau commutatif. $\blacksquare$

$$\sum_{k=0}^n x^k = (x+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

• ect...

Prop: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors^⑦

$$P^n - Q^n = (P - Q) \sum_{k=0}^{n-1} P^k Q^{n-1-k}$$

D/ de $\tilde{m}$

$$\underline{\text{Ex:}} \quad x^{30} - 1 = (x-1)(1+x+\dots+x^{n-1})$$

$$\bullet x^{30} - 1 = (x^{15})^2 - 1 = (x^{15} - 1)(x^{15} + 1)$$

$$\text{Et } (x^{15} + 1) = [(x^3)^5 - (-1)^5]$$

Bernoulli.
impaire

$$= [x^3 - (-1)] [1 - x^3 + x^6 - x^9 + x^{12}]$$

$$\text{Et } [x^3 + 1] = \dots = [x+1][1-x+x^2]$$

$$\text{Et } (x^{15} - 1) = ((x^5)^3 - 1) = (x^5 - 1)(1+x^5+x^{10})$$

$$= (x-1)(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x^5+x^{10})$$

CC1:

$$\bullet (x^{30} - 1) = (x-1)(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x^5+x^{10})(x+1)(1-x+x^2)(1-x^3+x^6-x^9+x^{12})$$

g) Une expression du produit

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[x]$ qu'on écrit :

$$P = \sum_{k=0}^n a_k x^k \text{ et } Q = \sum_{l=0}^m b_l x^l$$

avec n et $m \in \mathbb{N}$ et $\forall k, a_k \in \mathbb{K}$ et $\forall l, b_l \in \mathbb{K}$

$P \times Q$ redactionnel

Alors :

$$\forall i \in \mathbb{N}, c_i[PQ] = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ 0 \leq l \leq m \\ \boxed{k+l=i}}} a_k b_l$$

$$= \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ 0 \leq l \leq m \\ k+l=i}} a_k [P] c_l [Q]$$

II) Degré

1) Cas du polynôme nul

On pose $\deg(0_{K[x]}) := -\infty$

Rq: on étend $+$ à $\mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ en posant

$$\begin{cases} (-\infty) + (-\infty) = -\infty \\ a + (-\infty) = -\infty & \text{si } a \in \mathbb{N} \\ (-\infty) + a = -\infty \end{cases}$$

2) Degré de la somme

Soient $P, Q \in K[x]$

1) Alors: $\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$

2) Si $\deg(P) \neq \deg(Q)$, alors on a:

$$\deg(P+Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$$

3) Orsq $\deg(P) = \deg(Q) \geq 0$,

a) si $c_{\deg(P)} \neq -c_{\deg(Q)}$, on a $\deg(P+Q) = \deg(P)$

b) si $c_{\deg(P)} + c_{\deg(Q)} = 0$, on a

$$\deg(P+Q) < \deg(P)$$

On dit qu'il y a chute de degré

AlcF poly

¹⁰⁰
3) Espace $K_n[X]$

Notation:

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$K_n[X] := \{P \in K[X] \mid \deg(P) \leq n\}$$



Attention : ce n'est pas l'ensemble des polynômes de degré n

Fait : $K_n[X]$ est stable par somme

⚠ Si on avait pris l'ensemble des polynômes de degré n cela aurait été faux

Alc Soit $P, Q \in K_n[X]$. On a

$$\deg(P) \leq n \text{ et } \deg(Q) \leq n$$

$$\text{Or } \underline{\text{D'ACQ}} \quad \deg(P+Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q)) \leq n$$

$$\text{I.e. } P+Q \in K_n[X]$$

Fait ① Il s'agit de $K_n[x]$ est stable par combinaison linéaire (CL)

$$\bullet \text{ i.e. } \boxed{\forall P, Q \in K_n[x], \forall \lambda, \mu \in K, \lambda P + \mu Q \in K_n[x]}$$

D/ On a :

$$\deg(\lambda P) = \begin{cases} \deg(P) & \text{si } \lambda \neq 0 \\ -\infty & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$$

pour $\lambda \in K$, pour $P \in K[x]$

Donc on a ② $\deg(\lambda P) \leq \deg(P)$

Donc ③

$$\left. \begin{array}{l} \lambda, \mu \in K \\ P, Q \in K_n[x] \end{array} \right\} \longrightarrow \lambda P + \mu Q \in K_n[x]$$

DACQP on a

$$\lambda P + \mu Q \in K_n[x]$$



4) Degré du produit

Prop : Soient $P, Q \in K[x]$
Alors

$$\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$$

④ Hélène Abbe s'est mariée ; elle s'appelle Hélène Abbe-DeGrée

D/ Déjà : si $P=0$ ou $Q=0$, on a $PQ=0$

La formule est vraie, car $\forall a \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$, $a + (-\infty) = -\infty$

• Or si $P, Q \neq 0$. On pose $n := \deg(P)$ et $m := \deg(Q)$

$$\text{On a vu que } \forall i \in \mathbb{N}, c_i[PQ] = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ 0 \leq l \leq m \\ k+l=i}} a_k(P) c_l(Q)$$

Donc, si $i > n+m$, la somme ci-dessus est vide

$$\left(\begin{array}{l} 0 \leq k \leq n \\ 0 \leq l \leq m \end{array} \right) \text{ tel } k+l \leq n+m < i \text{ et donc } c_i[PQ] = 0$$

Donc on a $\deg(PQ) \leq n+m$

$$\text{Or } c_{n+m}[PQ] \underset{\text{DACP}}{=} \underset{1}{a_n(P)} c_m(Q)$$

De plus $c_n(P) \neq 0$ car $n = \deg(P)$; de même $c_m(Q) \neq 0$

Or $\mathbb{K}$, corps, intègre. Donc $c_n(P) c_m(Q) \neq 0$

$$\text{ie } c_{n+m}[PQ] \neq 0$$

Bilan :

$$\deg(PQ) = n+m = \deg(P) + \deg(Q)$$

Rq*: cette formule est encore vraie dans $A[x]$ si A intègre

• On prend $A = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

On prend $P = 2x + 1$; on a $\deg(P) = 1$

$$\text{Et } P^2 = (2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$$

Or $4=0$
Con est dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$)

$$= 1$$

$$\text{Donc } \deg(P^2) = 0 \neq 2\deg(P)$$

Corollaire

$$\deg(P^n) = n\deg(P)$$

Not ok (cc) ■

5) Intégrité de $K[x]$

Prop:

1) $K[x]$ est intègre

2) si $PQ = 0 \Rightarrow (P=0 \text{ ou } Q=0)$

3) si $P \neq 0$ et $Q \neq 0 \Rightarrow PQ \neq 0$

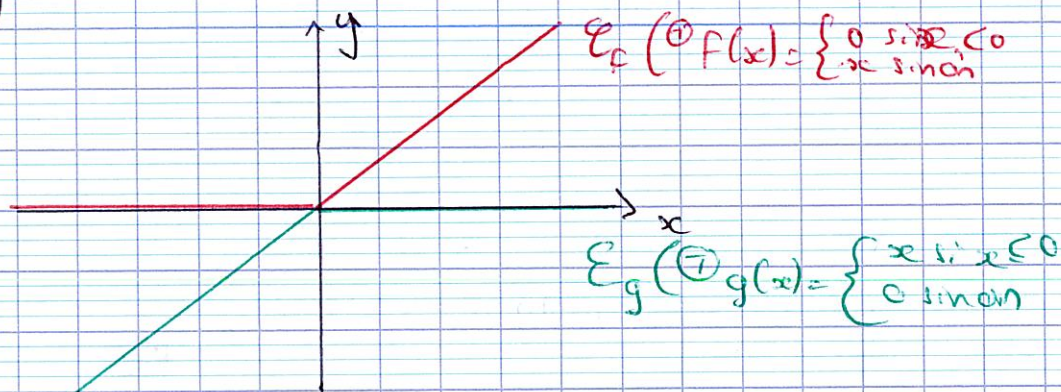
Rq: on a vu que $\mathbb{Z}^2, \mathbb{R}^2$ etc... sont non intègres

• on a vu que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ n'est pas intègre dès que n n'est pas premier

• $(\pi_q: \mathbb{R}^2 \simeq \mathcal{H}(\{0,1\}, \mathbb{R}))$

• $\mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est non intègre

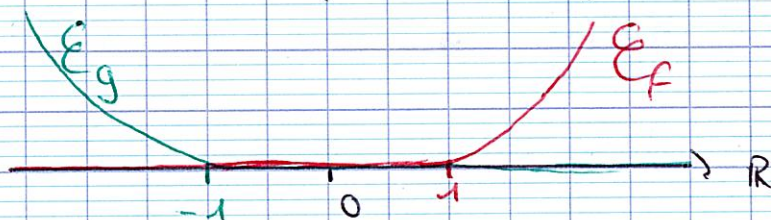
(d.n)



On a $f, g \neq \tilde{0}$, i.e. $f, g \neq 0_{\mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$ mais $f+g = \tilde{0}$

• De m: $\mathcal{E}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ non intègre

(d.n)



$\Delta / \mathbb{Z} \pi_q \mathbb{K}[x]$ intègre

Sont $P, Q \in \mathbb{K}[x]$ non nuls

On a donc $\deg(P) \geq 0$ et $\deg(Q) \geq 0$

On a $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q) \geq 0$

Donc $\deg(PQ) \neq -\infty$, donc $PQ \neq 0$

D/ Soient $P, Q \in K[x] \setminus \{0, K[x]\}$

On pose $n := \deg(P)$ et $m := \deg(Q)$

On sait que $c_{n+m}[PQ] = \underbrace{c_n[P]}_{\neq 0} \underbrace{c_m[Q]}_{\neq 0}$
 $\neq 0$ car K intègre

Ainsi $\exists k \in \mathbb{N}_0$ $c_k[PQ] \neq 0$

Donc $PQ \neq 0$

Rq: on a m_q

A intègre $\Rightarrow A[x]$ intègre

(Ex) $\forall q$ $K[x]$ n'est pas un corps

Corollaires:

$$\left. \begin{array}{l} PQ = PR \\ P \neq 0 \end{array} \right\} Q = R$$

D/ok

Def $K_0[x]$: c'est l'ensemble des polynômes constants

• $\Delta \deg(P) = 0 \Leftrightarrow P$ cst et $P \neq 0$

Souvent on identifie $K_0[x]$ et K

III) Evaluations des polynômes

Soient $P, Q \in K[x]$ et soient $\alpha, \beta \in K$

1) Définition

a) évaluation

Def: L'évaluation de P en α , notée $P(\alpha)$, est le scalaire défini par

$$P(\alpha) := \sum_{k=0}^n a_k \alpha^k$$

si on a écrit $P = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ avec $n \in \mathbb{N}$

avec $\forall k \in [0, n], a_k \in K$

Rq: L'écriture $P = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ n'est pas unique

Vérifions que $P(\alpha)$ ne dépend pas de cette écriture

$$\text{On écrit } P = \sum_{k=0}^n a_k x^k = \sum_{l=0}^m b_l x^l$$

avec $n, m \in \mathbb{N}$ et avec $\forall k, a_k \in K$ et $\forall l, b_l \in K$

• On a $n \leq m$ (le cas $n \geq m$ serait identique)

• Soit $l_0 \in [n+1, m]$. On a $c_{l_0}[\sum_{k=0}^n a_k x^k] = 0$

(Rq) $c_k[P+Q] = c_k[P] + c_k[Q]$ i.e. $c_k[\cdot]: K[x] \rightarrow K$ est un morphisme entre $(K[x], +)$ et $(K, +)$)

On a aussi: $c_k[\lambda P] = \lambda c_k[P]$

$$\text{Et } c_k[x^p] = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq p \\ 1 & \text{si } k = p \end{cases}$$

Notation

Soient $a, b \in \mathbb{R}$

Le symbole de Kronecker $\delta_{a,b}$ est défini par

$$\delta_{a,b} := \begin{cases} 0 & \text{si } a \neq b \\ 1 & \text{si } a = b \end{cases}$$

D'où

$$\begin{aligned} c_{l_0} \left[\sum_{k=0}^n a_k x^k \right] &\stackrel{\text{DACP}}{=} \sum_{k=0}^n c_{l_0} [a_k x^k] \\ &= \sum_{k=0}^n a_k c_{l_0} [x^k] = \sum_{k=0}^n a_k \delta_{k, l_0} \end{aligned}$$

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \delta_{k, l_0} = 0 \text{ car } l_0 \geq n+1$$

$$\text{Donc } c_{l_0} \left[\sum_{k=0}^n a_k x^k \right] = 0$$

$$\text{De même } c_{l_0} \left[\sum_{k=0}^m b_k x^k \right] = b_{l_0}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } b_{l_0} &= c_{l_0} \left[\sum_{k=0}^m b_k x^k \right] \\ &= c_{l_0} \left[\sum_{k=0}^n \overset{0}{b_k} x^k \right] = 0 \end{aligned}$$

car $\forall l \geq n+1, b_l = 0$

Donc : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k = b_k$

Donc :

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^n b_l x^l &= \sum_{l=0}^n \overset{a_l}{b_l} x^l = \sum_{l=0}^n \overset{0}{b_l} x^l \\ &= \sum_{k=0}^n a_k x^k \quad \square \end{aligned}$$

Exemple

$\bullet P(0) = \sum_{k=0}^n a_k 0^k = a_0 0^0 = a_0 = c_0 [P]$

$\bullet 0^k = 0$ si $k \geq 1$ et $0^0 = 1$

$\bullet P(1)$ est la somme des coefficients de P

⚠ Quand on évalue P en 1 (p.ex), on n'écrit pas "en $k=1$, on a". On écrit : "En évaluant P en 1, on a".

b) fonction associée à P

Def : Soit $P \in K[x]$. La fonction associée à P , notée $\widetilde{P}$ est défini par

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{P} : K & \longrightarrow & K \\ x & \longmapsto & P(x) \end{array}$$

• Soit $f: K \longrightarrow K$. On dit que f est polynomiale si

$$\exists P \in K[x] : f = \widetilde{P}$$

Rq :

• $\forall P \in \mathbb{R}[x], \widetilde{P} \in \mathcal{E}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Te : les fonctions polynomiales sont de classe $\mathcal{E}^\infty$

$$\begin{array}{ccc} \text{Ex : } \widetilde{x^2 + 3x + 1} : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t^2 + 3t + 1 \end{array}$$

Rq : on dispose donc de $\mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathcal{E}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$P \longmapsto \widetilde{P}$$

$$\text{On a } \oplus \quad \widetilde{P+Q} = \widetilde{P} + \widetilde{Q}$$

$$\widetilde{PQ} = \widetilde{P} \widetilde{Q}$$

$$\widetilde{1_{\mathbb{R}[X]}} = \widetilde{1} = 1_{\mathcal{E}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$$

CCII : $\widetilde{\cdot} : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathcal{E}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un morphisme d'anneaux

a) évaluation en une matrice

On pose $P := X^3 - 5X^2 + 3X + 2$

$$\text{et } A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

On peut évaluer P en A

C'est la grande différence entre les fonctions polynomiales et les polynômes

On a  $P = X^3 - 5X^2 + 3X + 2X^0$

et donc

$$P(A) = A^3 - 5A^2 + 3A + 2A^0 \rightarrow \text{c'est } \mathbb{F}_2$$

$$\text{Or } A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } P(A) &= \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 12 & -19 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Rq: de m s: $A \in M_n(K)$

d) généralisation

Cesd $\mathcal{R}$ un ensemble muni de 3 opérations

① $+$ lcia commutative sur $\mathcal{R}$

② $\times$ lcia lq $\mathcal{R}$ soit un anneau

③ une opération de "scalairisation" : ie si $\lambda \in K$ et si $\alpha \in \mathcal{R}$:

on dispose de $\lambda \cdot \alpha$

Soit $\alpha \in \mathcal{R}$

Soit $P \in K[x]$ qu'on écrit $P = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $\forall k \in \{0, \dots, n\}$
 $a_k \in K$

On peut évaluer P en α

C'est $P(\alpha) = \sum_{k=0}^n \left[\underbrace{a_k}_{\in K} \cdot \underbrace{\alpha^k}_{\in \mathcal{R}} \right]_{\in \mathcal{R}}$
 ok grâce à x
 ok grâce à la scalairisation
 $\in \mathcal{R}$ ok grâce à $+$

Ces structures sont des anneaux sur lesquelles on peut scalairiser par K

Non exemples : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ (si $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

Exemples : $M_n(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, ${}^{\textcircled{1}}\mathcal{R}(X, \mathbb{R})$, ${}^{\textcircled{1}}\mathcal{P}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$, $\mathbb{R}[X]$

Ex:

On considère $P := x^3 - 3x + 5$

On a $P(\sin) = \sin^3 - 3\sin + 5$

2.) Propriétés fausses

Fait $\oplus$
en gal

$$1) P(\alpha + \beta) \neq P(\alpha) + P(\beta)$$

$$2) P(\alpha\beta) \neq P(\alpha)P(\beta)$$

D/

1) On prend $P := x^2$

A-t-on $(\alpha\beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2$ en gal? Non

Par ex, c'est F pour $\alpha := 1$ et $\beta := 1$

2. On prend $P := 2$. On a $P(\alpha\beta) = 2 = P(\alpha) = P(\beta)$

Or $2 \neq 2 \cdot 2$ 

3) Propriétés vraies

Prop: $\oplus$

$$1) (P + Q)(\alpha) = P(\alpha) + Q(\alpha)$$

$$2) (PQ)(\alpha) = P(\alpha) \cdot Q(\alpha)$$

D/

1) ok

2) Regardons un exemple

On prend $P = 5x^2 + 2x + 1$ et $Q = x^2 + x - 1$

Soit α un élément

On a $P(\alpha) = 5\alpha^2 + 2\alpha + 1$ et $Q(\alpha) = \alpha^2 + \alpha - 1$

Donc $P(\alpha)Q(\alpha) = (5\alpha^2 + 2\alpha + 1)(\alpha^2 + \alpha - 1)$

$$= 5\alpha^4 + 7\alpha^3 - 2\alpha^2 - \alpha - 1$$

$$\text{Et } PQ = (5x^2 + 2x + 1)(x^2 + x - 1) = 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 - x - 1$$

$$\text{Donc } (PQ)(\alpha) = 5\alpha^4 + 7\alpha^3 - 2\alpha^2 - \alpha - 1$$

"□"

Notation

Si $\alpha \in \mathcal{R}$, on peut considérer $\bar{\text{ev}}_\alpha: \mathbb{K}[x] \rightarrow \mathcal{R}$
 $P \mapsto P(\alpha)$

$$\text{On a } \bar{\text{ev}}_\alpha(P+Q) = \bar{\text{ev}}_\alpha(P) + \bar{\text{ev}}_\alpha(Q)$$

$$\text{et } \bar{\text{ev}}_\alpha(P \times Q) = \bar{\text{ev}}_\alpha(P) \times \bar{\text{ev}}_\alpha(Q)$$

facile

le x de $\mathcal{R}$

le x de $\mathbb{K}[x]$
= des "polynômes"

IV) Division euclidienne polynomiale

1) le théorème !!

Th : Soient $A, B \in K[x]$ tq $B \neq 0$

$$\text{Alors } \exists ! (Q, R) \in K[x]^2 : \begin{cases} A = BQ + R \\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases}$$

D/

Unicité : Soient $(Q_1, R_1), (Q_2, R_2) \in K[x]^2$ tq

$$A = BQ_1 + R_1 = BQ_2 + R_2 \text{ et } \begin{cases} \deg(R_1) < \deg(B) \\ \deg(R_2) < \deg(B) \end{cases}$$

$$\text{Pq } (Q_1, R_1) = (Q_2, R_2)$$

 il suffit en réalité de mq $Q_1 = Q_2$ ou $R_1 = R_2$

$$\text{On a } BQ_1 - BQ_2 = R_2 - R_1 \text{ ie } B(Q_1 - Q_2) = R_2 - R_1$$

$$\text{Donc } \deg(R_2 - R_1) = \deg(B(Q_1 - Q_2))$$

$$= \deg(B) + \deg(Q_1 - Q_2)$$

$$\text{Donc } \deg(Q_1 - Q_2) = \deg(R_2 - R_1) - \deg(B)$$

Notons $d := \deg(B)$  On a $R_2, R_1 \in K_{d-1}[x]$

On a donc $R_2 - R_1 \in K_{d-1}[x]$ ($\mathbb{P}^{R^X}$ les $K_n[x]$ sont stables par $\mathcal{C}$)

$$\nexists e \text{ deg}(R_2 - R_1) \leq d-1$$

$$\nexists e \text{ deg}(R_2 - R_1) < d$$

$$\hat{G} \text{ à } (*) \text{ on obtient : } \deg(Q_1 - Q_2) < 0$$

$$\text{Donc } Q_1 - Q_2 = 0 \text{ ie } \boxed{Q_1 = Q_2}$$

$$\hat{C} \ R_1 = A - BQ_1 \text{ et } R_2 = A - BQ_2, \text{ on a } \boxed{R_1 = R_2} \text{ unique}$$

Existence

⚡ ORP rec sur $\deg(A)$

Notons pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{P}(n) : "A \in K_n[x], \exists (Q, R) \in K[x]^2 : \begin{cases} A = BQ + R \\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases}"$$

On note $d := \deg(B)$

Rq : siq $d = 0$; donc $\deg(B) = 0$ ie B est un polynôme constant;

Fixons donc $b \in K^*$ tq $B = b$

$$\text{On écrit } A = B \frac{A}{b} + 0$$

$$\text{On pose } Q := \frac{A}{b} \text{ et } R := 0. \text{ On a } A = BQ + R \text{ et } \deg(R) < \deg(B)$$

Osq $d \geq 1$

Initialisation : $\Pi_q [R(d-1)]$

$\exists \text{ tq } \forall A \in K_{d-1}[x], \exists (Q, R) \in K[x]^2 : \begin{cases} A = BQ + R \\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases}$

Soit $A \in K_{d-1}[x]$

On pose $Q := 0$ et $R := A$.

On a bien $A = BQ + R$ et $\deg(R) < \deg(B)$ ■

Hérédité :

$\Pi_q \forall n \geq d-1, P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Soit $n \geq d-1$ tq $P(n)$

Π_q $P(n+1)$ R^x : c'est une V-assertion

Soit $A \in K_{n+1}[x]$

$\Pi_q \exists (Q, R) \in K[x]^2 : \begin{cases} A = BQ + R \\ \deg R < \deg B \end{cases}$

I idée : soustraire à A un multiple de B du type $x^k B$ pour qu'il y ait chute de degré

002 Cas

⊕ Cas 1 : Si $\deg(A) \leq n$: c'est ok q $\in P(n)$

• Cas 2 : Orq $\deg(A) = n+1$

On pose $k := \deg(A) - d$. On a $k = n+1-d$

On a $\boxed{k \geq 0 \text{ ie } k \in \mathbb{N}}$

On pose $c := \frac{c_{\text{dom}[A]}}{c_{\text{dom}[B]}}$

On écrit $A = \sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k$ et $B = \sum_{l=0}^d b_l x^l$

avec $\forall k, a_k \in K$ et $\forall l, b_l \in K$

Ainsi on a $c = \frac{a_{n+1}}{b_d}$. On calcule

$$\begin{aligned} c x^k B &= \frac{a_{n+1}}{b_d} x^{n+1-d} \sum_{l=0}^d b_l x^l \\ &= \frac{a_{n+1}}{b_d} x^{n+1-d} \left(\cancel{b_d x^d} + \sum_{l=0}^{d-1} b_l x^l \right) \\ &= a_{n+1} x^{n+1} + \underbrace{\frac{a_{n+1}}{b_d} x^{n+1-d} \sum_{l=0}^{d-1} b_l x^l}_{\deg \leq d-1} \end{aligned}$$

$$\deg \leq (n+1-d) + d-1 = n$$

Ainsi, qd "on fait $A - cx^k B$ " il y a chute de degré

• En effet $A = a_{n+1} x^{n+1} + \sum_{k=0}^n a_k x^k$

$$\text{Donc } A - cx^k B = \underbrace{\sum_{k=0}^n a_k x^k}_{\deg \leq n} - \underbrace{\frac{a_{n+1}}{b_d} x^{n+1-d} \sum_{l=0}^{d-1} b_l x^l}_{\deg \leq n}$$

Ainsi $A - cx^k B \in K_n[x]$

$\hat{G}$ à $P(n)$, fixé, donc $(Q, R) \in K[x]^2$ /

$$\begin{cases} A - cx^k B = BQ + R \\ \deg R < \deg B \end{cases}$$

On a alors $A = B(Q + cx^k) + R$

Si on pose $S = Q + cx^k$ on a $A = BS + R$

2) En pratique

On a :

$x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 1$	$x^2 - 1$
$-x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 3$	$x^2 + x + 3$
$3x + 4$	

Ainsi on a

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x^2 - 1)(x^2 + x + 3) + (3x + 4)$$

3) ^{*} Division euclidienne dans $\mathbb{Z}[x]$

Dans $\mathbb{Z}[x]$, c'est faux

P. ex, la DE de x par 2 n'existe pas dans $\mathbb{Z}[x]$

$$\nexists (Q, R) \in \mathbb{Z}[x]^2: \begin{cases} x = 2Q + R \\ \deg R < \deg 2 \end{cases}$$

(sinon on aurait $\odot$)

$R=0$ et donc $x=2Q$ et donc $Q=\frac{1}{2}x$
mais $\frac{1}{2}x \notin \mathbb{Z}[x]$)

Prop : Si $B \in \mathbb{Z}[x]$, si $B \neq 0$ et si B est unitaire
alors la DE par B existe dans $\mathbb{Z}[x]$

D/ $\odot$ ~~non~~

Rq : Dans $A[x]$ si $\text{cdom}[B] \in A^\times$ la DE par B existe dans $A[x]$

Rq : dans $K[x]$, avec K corps, c'est ok ~~non~~

IV Racines

1) Racines

Def : Soit $P \in K[x]$ et soit $\alpha \in K$

- On dit que α est une racine de P $\triangleq P(\alpha) = 0$
- On note $Z_K(P)$ l'ensemble des racines de P dans K

Ex :

- $\hat{C} \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, on a $\mathbb{R}[x] \subset \mathbb{C}[x]$
- On a $x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x]$ donc $x^2 + 1 \in \mathbb{C}[x]$
- On a $Z_{\mathbb{R}}(x^2 + 1) = \emptyset$ et $Z_{\mathbb{C}}(x^2 + 1) = \{-i, i\}$

2) Caractérisation des racines

Prop

Soit $P \in K[x]$ et soit $\alpha \in K$

Alors :

$$P(\alpha) = 0 \iff \exists Q \in K[x] : P = (x - \alpha)Q$$

D/

② On suppose ... ; fixons $Q \in K[x]$ tq $P = (x-\alpha)Q$

En évaluant en α , on obtient :

$$P(\alpha) = (\alpha - \alpha) \cdot Q(\alpha)$$

$$\text{Donc } P(\alpha) = 0$$

③ Pidée : DE

Osg $P(\alpha) = 0$ - On fait la DE de P par $x-\alpha$

Fixons $(Q, R) \in K[x]^2$: $\begin{cases} P = (x-\alpha) \cdot Q + R \\ \deg R < \deg(x-\alpha) = 1 \end{cases}$

On a ainsi : $R \in K_0[x]$ ie R est constant. Fixons donc R

tq $R=r$. On a $P = (x-\alpha)Q + r$

En évaluant en α , on trouve :

$$P(\alpha) = (\alpha - \alpha)Q(\alpha) + r \text{ ie } \underline{r = P(\alpha) = 0}$$

④ $r=0$, on a $P = (x-\alpha)Q$

3) Factorisation simultanée

Soit $N \in \mathbb{N}^*$

Seront $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N \in K$ des scalaires 2 à 2 $\neq$ st

Prop:

Soit $P \in K[x]$. Alors:

$$(\forall i \in [1, N], P(\alpha_i) = 0) \Leftrightarrow \exists Q \in K[x] : P = \prod_{i=1}^N (x - \alpha_i) \cdot Q$$

$\Delta^{\text{th}} \text{ (rec) sur } N$

$N=1$: ok

$N \rightarrow N+1$: Osg $\forall i \in [1, n+1], P(\alpha_i) = 0$

Donc $P(\alpha_{n+1}) = 0$. D'ACQP on écrit

$$P = (x - \alpha_{n+1}) Q$$

Soit $i \in [1, N]$

$$\text{On a } \underbrace{P(\alpha_i)}_{=0} = \underbrace{(\alpha_i - \alpha_{n+1})}_{\neq 0} \cdot Q(\alpha_i)$$

Donc $Q(\alpha_i) = 0$. On applique HR à Q

$\Rightarrow$ ok $\blacksquare$

4) Le degré majore le nombre de racines

Théorème :

Soit $P \in K[x]$ un polynôme non nul de degré n .

Alors : P possède au plus n racines.

⚡/ CRP, soit P possède au moins $(n+1)$ racines.

Fixons donc $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} \in K$ les 2 distincts lq

$$\forall i \in \{1, n+1\}, P(\alpha_i) = 0$$

⚡/ CRP, fixons $Q \in K[x]$ lq $P = \prod_{i=1}^{n+1} (x - \alpha_i) Q$

⚡ $P \neq 0$, on a $Q \neq 0$

En passant au degré on a :

$$\deg(P) = \deg \left(\prod_{i=1}^{n+1} (x - \alpha_i) Q \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} \underbrace{\deg(x - \alpha_i)}_{=1} + \deg(Q) \geq n+1$$

≥ 0 car $Q \neq 0$

Ab,

Car $\deg(P) = n$



Rg - cpt
 • Soit $P \in K[x]$. Soit $A \in M_2(K)$

Osg $P(A) = 0_{M_2(K)}$ On ne dit pas que A est racine de P. On dit que P est un polynôme annulateur de A

• On a $\mathbb{Z}_2[x^2] = \{0\}$

Par : il existe une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ tq $A^2 = 0_{M_2(\mathbb{R})}$

Pour $x \in \mathbb{R}$, notons $A_x := \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

On a, pour $x \in \mathbb{R}$, $A_x^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

5) Critère radical de nullité (CRA) !![∞]

a) énoncé

Théorème ①

1) Un polynôme de degré au plus n admettant au moins $n+1$ racine est nul

2) $P \in K_n[x]$
 " $|\mathbb{Z}_K(P)| \geq n+1$ " } $\Rightarrow P=0$

D/ 1) ORPA : siq $P \neq 0$, on pose $d := \deg(P)$; ~~Alors~~ on a $d \leq n$.
 DACQP P possède au plus d racines $\blacksquare$ 1)

2) ok $\blacksquare$

Corollaire 1

Si P possède une infinité de racines, P est nul

D/ok $\blacksquare$

b) corollaires

Corollaire

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Soient $P, Q \in \underline{\mathbb{K}_n[X]}$

Si P et Q coïncident en (au moins) $n+1$ points, alors $P = Q$

D/ ①. $R := P - Q \implies \deg(R) \leq n$

• R possède au ② $n+1$ racines $\xrightarrow{\text{CRN}} R = 0 \implies P = Q$ $\blacksquare$

Corollaire

Si P et Q coïncident en une infinité de pts, alors $P = Q$

D/ok $\blacksquare$

Rg ^⑤:

- Dire que P et Q coïncident partout et dire que $P=Q$ ce n'est pas pareil
- P. a priori, ce n'est pas pareil de dire: $\textcircled{+} \forall k \in \mathbb{R}, P(k)=Q(k)$
 $\textcircled{-} P=Q$
pour $P, Q \in \mathbb{R}[x]$

• On se place sur $K := \mathbb{F}_2$

Où $P := x^2$ et $Q := x^4$

On a $P \neq Q$ mais on a

$$\forall x \in K, P(x) = Q(x)$$

D / Pour $x=0$, On a $0^2=0^4$
• Pour $x=1$, on a $1^2=1^4$

e) une belle application.

Fait Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$x^n - 1 = \prod_{\omega \in \omega_n} (x - \omega) = \prod_{k=0}^{n-1} (x - e^{ik \frac{2\pi}{n}})$$

Δ/λ nd not t.

On pose $P := x^n - 1$
 $Q := \prod_{w \in \omega_n} (x - w)$

On a $\deg(P) = n$ et $\deg(Q) = n$

De $\oplus$: $\text{c dom}[P] = 1$ et $\text{c dom}[Q] = \prod_{w \in W_p} \underbrace{\text{c dom}[x-w]} = 1$

⑦ Donc il y a chute de degré $= 1$ et $\deg(P-Q) \leq n-1$

Person 2 $S := P - Q$. On a $\deg(S) \leq n-1$

Sei $w \in V_n$. Dann

$$S(\omega_0) = P(\omega_0) - Q(\omega_0) = 0, \quad P(\omega_0) = \omega_0^n - 1 = 0$$

$$\forall \omega_0 \in \mathbb{R} \quad Q(\omega_0) = \prod_{\omega \in \mathbb{Q}} (\omega_0 - \omega) = 0$$

Also $S(w_0) = 0, 0 = 0$

Donc $\forall w_0 \in \mathcal{W}_n, S(w_0) = \emptyset$. Donc S posside au

means a factor.

D'après le CRN: $S=0$

Te $x^n - 1 = \prod_{\omega \in \omega_n} (x - \omega)$



d) reformulat°

$$\text{C'est } \sim : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathcal{E}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

$$P \longmapsto \tilde{P}$$

Fait $\sim$ est injective

Δ/ $\mathbb{R}[X]$

Comme $\sim$ est un morphisme, on calcule son noyau, on montre qu'il est nul et on conclut.

$$\text{Soit } P \in \text{Ker}(\sim). \text{ On a } \tilde{P} = 0_{\mathcal{E}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}, P(t) = 0$. Donc P possède une infinité de racines car $\mathbb{R}$ est infini. D'après le

$$\text{CRN : } P = 0$$

$$\text{Donc } \text{Ker}(\sim) = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$$

• D'ALC $\mathbb{R}[X] \xrightarrow{\sim}$ est injective $\blacksquare$

6) Théorème de d'Alembert - Gauss

On l'appelle aussi : théorème fondamental de l'algèbre

Théorème :

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré ≥ 1

Alors : P possède 1 racine

Rq :

- On dit que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos
- C'est F pour $\mathbb{R}$ puisque $\mathbb{Z}_{\mathbb{R}}(x^2+1) = \emptyset$

Admis ■

Corollaire - $\mathbb{R}^*$

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul de degré n :

Alors , on peut écrire

$$P = d \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i) \quad \text{avec } d \in \mathbb{C}^* \text{ et avec } \forall i \in \{1, n\} \alpha_i \in \mathbb{C}$$

D / rec sur n

$n=0$: ok car P est une constante non nulle

$n \rightarrow n+1$: D'après le th. de d'Alembert-Gauss, fixons $\alpha \in \mathbb{C}$
une racine de P

fixons $Q \in \mathbb{C}[X] \neq 0$ $P = (X - \alpha) Q$

$\hat{=}$ $\deg(P) = 1 + \deg(Q)$ or $\deg(Q) = n$

Par hypothèse de récurrence, on écrit $Q = \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)$ avec $\alpha_i \in \mathbb{C}$

VI Composition des polynômes

Soient $P, Q, R \in K[x]$

1) Déf.

Le polynôme composé $Q \circ P$ est défini par

$$Q \circ P := \sum_{l=0}^m b_l P^l$$

q'd Q s'écrit

$$Q = \sum_{l=0}^m b_l x^l \quad \text{avec } (-)$$

~~Ex~~

Rq, On a vu que $K[x]$ pouvait jouer le rôle de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$: on peut évaluer un polynôme.

Si on évalue $Q \in K[x]$ en le polynôme P , on obtient

$$Q(P) = \sum_{l=0}^m b_l P^l = Q \circ P$$

Exemples

• On sd $P = 2x^2 + 3x - 1$

Alors $P \circ (x+1) = P(x+1) = 2x^2 + 7x - 1$

• Soit $P \in K[x]$. Alors, on a

$$P(x) = P \circ x = P$$

Attention, il y a une ambiguïté d'écriture

Est-ce $P \circ (x+1)$ ou est-ce $P_0(x+1)$?

2) Propriétés

Prop $\widetilde{Q \circ P} = \widetilde{Q} \circ \widetilde{P}$

D/1) On a $Q \circ P = \sum_{l=0}^m b_l P^l$

Soit $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \text{On a } (Q \circ P)(t) &= \left(\sum_{l=0}^m b_l P^l \right)(t) \\ &= \sum_{l=0}^m b_l P^l(t) \\ &= \sum_{l=0}^m b_l [\widetilde{P}(t)]^l; \text{ de } \oplus \end{aligned}$$

$$\widetilde{Q}(\widetilde{P}(t)) = \sum_{l=0}^m b_l [\widetilde{P}(t)]^l$$

Prop: $(P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R)$

D/1) On fait le calcul...

D/2) D'après P, on a

$$\widetilde{P \circ (Q \circ R)} = \widetilde{P} \circ \widetilde{Q \circ R}$$

par associativité $= \widetilde{P} \circ (\widetilde{Q} \circ \widetilde{R})$

de la composition des $\Rightarrow (\widetilde{P \circ Q}) \circ \widetilde{R} \underset{\text{D'après P}}{=} \widetilde{P \circ Q} \circ \widetilde{R} = \widetilde{(P \circ Q) \circ R}$

• Or $\sim$ est injectif

• Donc $P_0(Q \circ R) = (P_0 Q) \circ R$

Prop: ①

$$1) (P+Q) \circ R = P \circ R + Q \circ R$$

$$2) \cancel{R}(PQ) \circ R = (P \circ R) \times (Q \circ R)$$

D/ On l'a déjà vu avec $\text{ev}_x: K[x] \rightarrow K$

$$P \longmapsto P(x)$$

$$\text{Ici, on a } \begin{cases} (P+Q) \circ R = \text{ev}_R(P+Q) \\ \cancel{R}(PQ) \circ R = \text{ev}_R(PQ) \end{cases}$$

3) Degré

Prop:

$$\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$$

$$\boxed{\text{si } \deg(Q) \geq 1}$$

Cf rex

on donne un cf rex qd $\deg(Q) \leq 0$

On pose $P := x^2 - 2$ et $Q := \sqrt{2}$

On a $P \circ Q = 0$ et donc $\deg(P \circ Q) = -\infty \neq \deg(P) \deg(Q)$
 " " " " " "
 2×0
 0

• Avec $Q = 0$

On a $P \circ Q = -2$

$\deg(P \circ Q) = 0 \neq \deg(P) - \deg(Q) = 2 \times (-\infty) = -\infty$

On pose $d := \deg(Q)$ pour $Q \neq 0$ et $P \neq 0$. (si $P = 0$, c'est ok)

On écrit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ où $n = \deg(P)$

et avec $\forall k \in [0, n], a_k \in K$

On a $P \circ Q = \sum_{k=0}^n a_k Q^k$

Idee : $\deg(Q^k) = k \deg(Q) = kd$.

Cainci : $\deg(Q^0) = 0$
 $\deg(Q) = d$
 $\deg(Q^2) = 2d$
 $\vdots$

On écrit $P \circ Q = a_n Q^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k Q^k$

Soit $k \in [0, n-1]$. On a

$\deg(Q^k) = kd \leq (n-1)d = nd - d \leq nd - 1$
 car $d \geq 1$

Donc $a_k Q^k \in K_{nd-1}[X]$

Donc par stabilité par CL: $\sum_{k=0}^{n-1} a_k Q^k \in K_{nd-1}[X]$

De @ $\hat{c} a_n \neq 0$, $\deg(a_n Q^n) = \deg(Q^n) = nd$

Donc $\deg(a_n Q^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k Q^k) = nd$

Il e $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$

VII Dérivation Formelle

1) Définition

Def : Soit $P \in K[x]$ qu'on écrit $P = \sum_{k=0}^n a_k x^k$

avec $n \in \mathbb{N}$ et avec $\forall k \in [0, n], a_k \in K$

La dérivée de P , notée P' , est le polynôme défini par

$$P' = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1}$$

Rq : on peut aussi écrire $P' = \sum_{k=0}^n k a_k x^{k-1}$

Ex :

Rappel Δ : on ne peut pas écrire $(e^t + t)' = e^t + 1$

(on écrit plutôt $\frac{d(e^t + t)}{dt} = e^t + 1$)

Pour les polynômes, on peut écrire $(3x^3 + 4x^2 - 2x + 1)' = 9x^2 + 8x - 2$

2) Propriétés

Prop : $\odot$

1) $(dP)' = dP'$

2) $(P+Q)' = P' + Q'$

3) $(PQ)' = P'Q + PQ'$

1) ok
2) ok

3) C'est @ subtil

Dans un premier temps, mg $(*)$

$$(x^k Q)' = k x^{k-1} Q + x^k Q'$$

Soit $k \in \mathbb{N}$

• Si $k=0$: ok

• Or $k \geq 1$

On écrit $Q = \sum_{l=0}^m b_l x^l$ avec $m \in \mathbb{N}$ et avec $\forall l, b_l \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} \text{On a } x^k Q &= \sum_{l=0}^m b_l x^{k+l}, \text{ donc } (x^k Q)' = \sum_{l=0}^m b_l (b_l x^{k+l-1}) \\ &= \sum_{l=0}^m k b_l x^{k+l-1} + \sum_{l=0}^m l b_l x^{k+l-1} \\ &= k x^{k-1} \underbrace{\sum_{l=0}^m b_l x^l}_Q + x^k \underbrace{\sum_{l=0}^m l b_l x^{l-1}}_{Q'} \end{aligned}$$

D'où (*)

• Écrivons $P = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ avec $n \in \mathbb{N}$ et avec $\forall k, a_k \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} \text{On a } (PQ)' &= \left(\sum_{k=0}^n a_k x^k Q \right)' = \sum_{k=0}^n (a_k x^k Q)' \\ &= \sum_{k=0}^n a_k (x^k Q)' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Donc } D(AQ)P' &= \sum_{k=0}^n a_k (kx^{k-1}Q + x^kQ') \\
 &= \sum_{k=0}^n k a_k x^{k-1}Q + \sum_{k=0}^n a_k x^k Q' \\
 &= \left(\sum_{k=0}^n k a_k x^{k-1} \right) Q + \left(\sum_{k=0}^n a_k x^k \right) Q' \\
 &= P'Q + PQ'
 \end{aligned}$$

Prop:

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$

$$\text{Alors } \widetilde{P'} = \widetilde{P}'$$

D/ $\oplus$

On écrit $P = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ avec $n \in \mathbb{N}$ et avec $\forall k, a_k \in \mathbb{R}$

On a $\widetilde{P}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$t \longmapsto \sum_{k=0}^n a_k t^k$$

On sait que $\forall t \in \mathbb{R}, \widetilde{P'}(t) = \sum_{k=0}^n k a_k t^{k-1}$

$$= \widetilde{P'}(t)$$

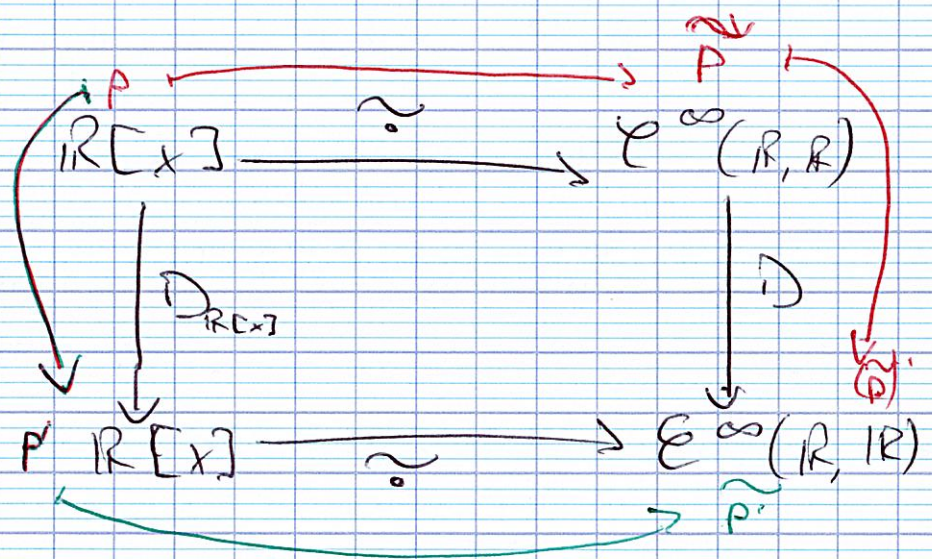
$$= \widetilde{P'}(t)$$

Rg*: On dispose de $D_{R[x]} : R[x] \longrightarrow R[x]$
 $P \longmapsto P'$,

de $D : E^\infty(R, R) \longrightarrow E^\infty(R, R)$
 $f \longmapsto f'$

et de $\sim : R[x] \longrightarrow E^\infty(R, R)$
 $P \longmapsto \tilde{P}$

Le diagramme



3) Degré

Prop

$$\deg(P') = \deg(P) - 1 \quad (\text{si } \deg(P) \geq -1)$$

Rg: $\deg(P) = 0$, P est une cste non nulle et $P' = 0$
 On a $\deg(P') = -\infty \neq \deg(P) - 1 = -1$

Nb ~~de~~ $\deg(P) \geq 1$

On écrit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ où $n = \deg(P)$

et avec $\forall k, a_k \in K$. On a $P' = \underbrace{na_n X^{n-1}}_{\deg(\cdot) = n-1} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} ka_k X^{k-1}}_{\deg \leq n-1}$

DLR ■

Rq : $\text{cdom}[P'] = \deg(P) - \text{cdom}[P]$

Rq ~~de~~ : c'est $\mathbb{F}$ dans $\mathbb{F}_p[X]$

Cherch : on prend $Q := X^P$; on a $\deg(Q) = P$

On a $Q' = pX^{P-1}$; or dans $\mathbb{F}_p$, on a $p=0$. Donc $Q' = 0$ ■

VIII Relations coefficients - racines

Soient $a_0, a_1, \dots, a_n \in K$, $a_n \neq 0$

On pose $P := \sum_{k=0}^n a_k X^k = a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-1} X^{n-1} + a_n X^n$

Fixons $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tq $P = a_n \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)$

On a $P(0) = a_0 = a_n \prod_{i=1}^n (0 - \alpha_i) = (-1)^n a_n \prod_{i=1}^n \alpha_i$

Donc $\prod_{i=1}^n \alpha_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$

On a $\sum_{i=1}^n \alpha_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$

D'

On a $P = a_n (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \dots (X - \alpha_n)$

Quand on développe ce produit, on obtient une somme de termes, chacun des termes s'écrit $\prod_{i \in I} y_i$, où I_i ($y_i = X$ ou $y_i = -\alpha_i$)

Les seuls termes de degré $n-1$ sont ceux où toutes les y_i sont X sauf 1 "

Ces termes sont :

$\bullet (-\alpha_1) X^{n-1}$
 $\bullet X(-\alpha_2) X^{n-2}$
 $\vdots$
 $\bullet X^{n-1} (-\alpha_n)$

$$\bullet \text{ Donc } c_{n-1} \left[\prod_{i=1}^n (x - \alpha_i) \right] = - \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

$$\bullet \text{ Donc } c_{n-1} [P] = -a_n \sum_{i=1}^n \alpha_i \\ = -a_n \alpha_{n-1}$$

$$\Delta^{\text{I}} \odot_{\text{rec}} (\Pi_q^{\odot} c_{n-1} \left[\prod_{i=1}^n (x - \alpha_i) \right]) = - \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

$$\underline{n=1, n=2 : \text{ok}}$$

$$\underline{n \rightarrow n+1 :}$$

$$\begin{aligned} c_n \left[\prod_{i=1}^{n+1} (x - \alpha_i) \right] &= c_n \left[x \prod_{i=1}^{n+1} (x - \alpha_i) - \alpha_{n+1} \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i) \right] \\ &= \underbrace{c_n \left[x \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i) \right]}_{=1} - \alpha_{n+1} \underbrace{c_n \left[\prod_{i=1}^n (x - \alpha_i) \right]}_{=1} \\ &= c_{n-1} \left[\prod_{i=1}^n (x - \alpha_i) \right] - \alpha_{n+1} \end{aligned}$$

1) Fonctions symétriques élémentaires

On pose :

$$\underline{\sigma_1} := \sum_{k=1}^n \alpha_k$$

$$\underline{\sigma_2} := \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_i \alpha_j$$

$$\underline{\sigma_3} := \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \alpha_i \alpha_j \alpha_k \quad \text{est.}$$

$$\sigma_n := \prod_{i=1}^n \alpha_i$$

Rq:

Soit $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\text{On a } \sigma_p = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_p}$$

On peut aussi écrire :

$$\sigma_p = \sum_{\substack{I \subset \llbracket 1, n \rrbracket \text{ i.e.} \\ |I| = p}} \prod_{i \in I} \alpha_i$$

2) les relations coefficients - racines.

a) le cas gal

$$\text{On a } \sigma_1 = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \sigma_2 = \frac{a_{n-2}}{a_n}, \sigma_3 = -\frac{a_{n-3}}{a_n}, \dots$$

$$\sigma_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

$$\text{I.e. } \boxed{\forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sigma_p = (-1)^p \frac{a_{n-p}}{a_n}}$$

D / rec enc *

b) cas importants

Prop R* : $\sum_{i=1}^n \alpha_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$ et $\prod_{i=1}^n \alpha_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$

3) Fonct° symétrique

Def: une f° f de $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

Osg f est symétrique

Ex : $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2$

Le osg $\forall \sigma \in \mathcal{S}_n, f(\alpha_{\sigma(1)}, \dots, \alpha_{\sigma(n)}) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

Rq : Les σ_k sont symétriques

Theorème

f est une fonction des σ_k

Ex : $\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2 = \underbrace{(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)^2}_{\sigma_1} - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_i \alpha_j$
 $= \sigma_1^2 - 2\sigma_2$

(Exo) Exprime $\sum_{i=1}^n \alpha_i^3$ en f° des σ_k

(IX) Interpolation de Lagrange

Soient $n \in \mathbb{N}^*$

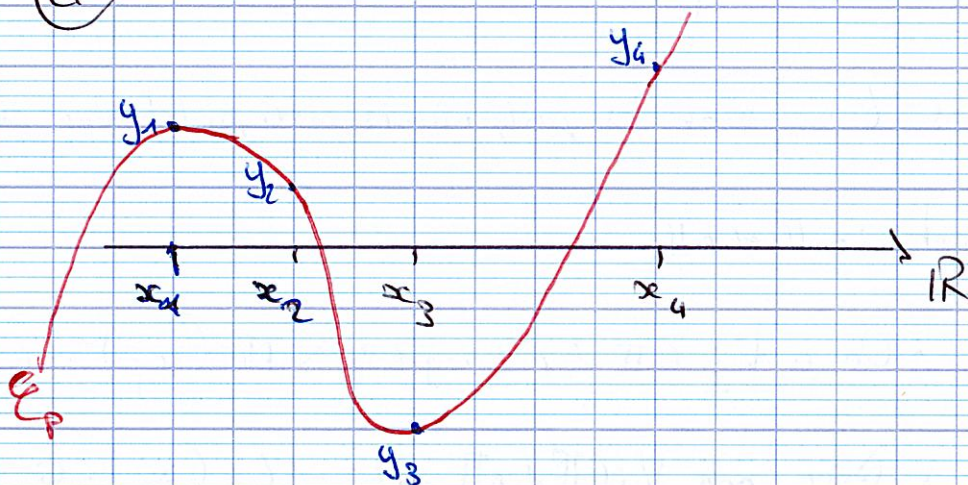
Soient $x_1, \dots, x_n \in K$ deux à deux distincts

Soient $y_1, \dots, y_n \in K$

Existe-t-il un polynôme P qui prend ses valeurs en ces points?

ie tq $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(x_i) = y_i$

(dⁿ)



Thm

$\exists! P \in K_{n-1}[x] \text{ tq } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(x_i) = y_i$

D/

unicité (CRN)

Soient $P, Q \in K_n[x]$ tq $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(x_i) = Q(x_i) = y_i$
Alors P et Q sont deux polynômes de degré au plus $n-1$,

coïncident (au moins) a points : DALC (RN), $p = Q$

Existence

Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note

$$\Pi_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (x - x_j)$$

$$\text{et } L_i = \frac{\Pi_i}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (x_j - x_j)}$$

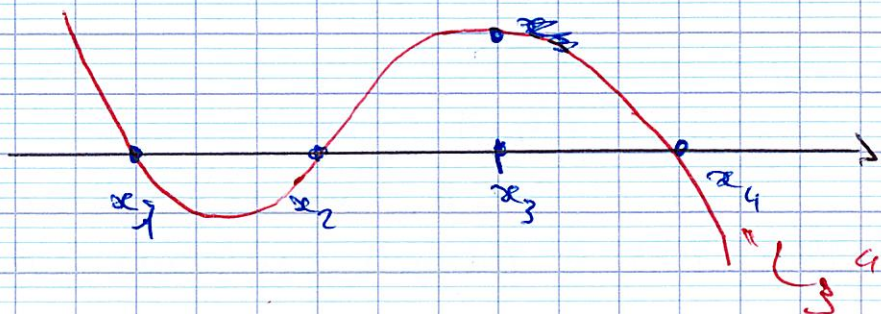
(C'est possible car les x_j sont
2 à 2 $\neq$ les)

Les L_i sont les polynômes interpolateurs de Lagrange

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

- On a $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, j \neq i \Rightarrow \Pi_i(x_j) = 0$
- Donc on a $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, j \neq i \Rightarrow L_i(x_j) = 0$
- On a $\Pi_i(x_i) = \prod_{j=1, j \neq i}^n (x_i - x_j)$
- Donc $L_i(x_i) = 1$

(d')



* Ainsi

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, L_i(x_j) = \delta_{ij}$$

• Astuce On pose $P := \sum_{i=1}^n y_i L_i$

• $\forall i, \deg(L_i) = n-1$ and $\deg(P) \leq n-1$

• Soit $i_0 \in \{1, \dots, n\}$. On calcule

$$P(x_{i_0}) = \sum_{i=1}^n y_i \underbrace{L_i(x_{i_0})}_{=\delta_{ii_0}} = \sum_{i=1}^n y_i \underbrace{\delta_{ii_0}}_{=0 \text{ sauf si } i=i_0}$$

$$= y_{i_0}$$



