Contre-exemple : une fonction nulle partout mais qui n'est pas nilpotente

Colas Bardavid

mercredi 26 mai 2005

On donne un exemple simple.

On considère les schémas affines $S_n = \operatorname{Spec} \frac{k[t]}{(t^n)}$, où k est un corps. Ils ne sont formés que d'un point, d'épaisseur différentielle $n-1$: sur ce point, on peut détecter les dérivées k-ièmes, jusqu'à $k = n-1$.

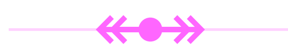

Fig. 1 – Spec $\frac{k[t]}{t^3}$, le point d'épaisseur différentielle 2

On considère alors la réunion disjointe des S_n : $S = \coprod_{n \geq 1} S_n$; c'est bien un schéma. Topologiquement, c'est $\mathbf{N}$ muni de la topologie discrète. Soit U un ouvert de S, c'est-à-dire une partie de S, c'est-à-dire une partie de S. On a alors : $\mathcal{O}_S(U) = \prod_{n \in U} \frac{k[t]}{t^n}$.

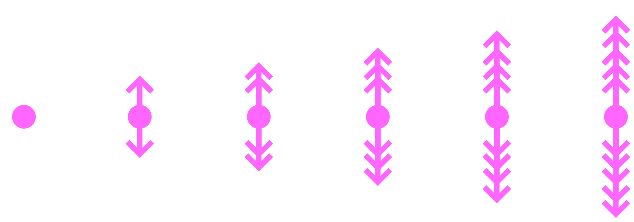

Fig. 2 – Une première représentation de $\coprod_{n \geq 1} \operatorname{Spec} \frac{k[t]}{t^n}$

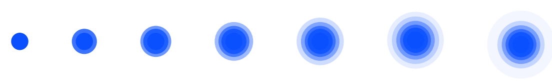

FIG. 3 – Une autre représentation de $\coprod_{n\geq 1} \operatorname{Spec} \frac{k[t]}{t^n}$

Considérons alors la fonction $f = (t, t, \cdots) \in \prod_{n\geq 1} \frac{k[t]}{t^n}$. On veut savoir quelle est sa valeur au point S_n. On regarde donc sa restriction $f\mid_{S_n}$ (rappelons que S_n est ouvert), qui est $t \in \frac{k[t]}{t^n}$. La valeur de cette fonction en S_n est 0 car la fonction est nilpotente.

Ainsi, la fonction f est nulle en tout point.

Cependant, la fonction f n'est pas nilpotente. En effet, f^N est non-nulle restreint à l'ouvert S_{N+1}.

On en déduit en particulier que le schéma S n'est pas affine.