Idéaux, idéaux premiers et idéaux maximaux de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$

Colas Bardavid

mercredi 23 mars 2005

Principaux idéaux introduits

$\mathfrak{M}_x$: l'idéal des fonctions s'annulant en x.
$\mathfrak{M}_{x,A}^{\mathrm{loc}}$: l'idéal des fonctions s'annulant localement en x dans la direction A.
$\mathfrak{M}_{x,V}^{\infty-\mathrm{plat}}$: l'idéal des fonctions plates en x selon la direction V.
$\mathfrak{M}_{\infty}^{\mathrm{loc}}$: l'idéal des fonctions s'annulant à l'infini.
$\mathfrak{M}_{\infty,A}^{\mathrm{loc}}$: l'idéal des fonctions s'annulant à l'infini dans la direction A.
$\mathfrak{M}_{\mathfrak{p},V}^{\infty-\mathrm{plat}}$: l'idéal des fonctions plates en $\mathfrak{p}$ selon la direction V.

Résultats démontrés

Fait 0.1 $\mathfrak{M}_{x,A}^{\mathrm{loc}}$ *ne dépend que du "germe d'espace" de* A *en* x*, c'est-à-dire que s'il existe* $U \in \mathcal{V}(x)$ *tel que* $A \cap U = B \cap U$*, alors* $\mathfrak{M}_{x,A}^{\mathrm{loc}} = \mathfrak{M}_{x,B}^{\mathrm{loc}}$*.*

Fait 0.2 $\mathfrak{M}_{x,A}^{\mathrm{loc}} = \mathfrak{M}_{x,\bar{A}}^{\mathrm{loc}}$*.*

Théorème 0.3 (classification des idéaux maximaux de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$) *Soit* $\mathfrak{M}$ *un idéal maximal de* $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$*. Alors :*

- *soit il existe* $x \in \mathbf{R}^n$ *tel que* $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_x$
- *soit* $\mathfrak{M}_\infty^{\mathrm{loc}} \subset \mathfrak{M}$*.*

Fait 0.4 *L'ensemble des fonctions qui tendent vers* 0 *en* $+\infty$ *n'est jamais un idéal, quelle que soit la vitesse de convergence qu'on impose.*

Corollaire 0.5 *Il existe une infinité non dénombrable d'idéaux maximaux contenant* $\mathfrak{M}_\infty^{\mathrm{loc}}$*.*

Théorème 0.6 (classification des idéaux premiers de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$) *Soit* $\mathfrak{M}$ *un idéal maximal à l'infini,* ie *tel que* $\mathfrak{M}_\infty^{\mathrm{loc}} \subset \mathfrak{M}$*. Soient* x, y *distincts dans* $\mathbf{R}^n$*. Soit* $\mathfrak{P}$ *un idéal premier de* $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$*. Alors,* $\mathfrak{P}$ *ne peut être contenu à la fois dans* $\mathfrak{M}_x$ *et dans* $\mathfrak{M}_y$*, et* $\mathfrak{P}$ *ne peut être contenu à la fois dans* $\mathfrak{M}_x$ *et dans* $\mathfrak{M}$*.*

Proposition 0.7 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{p},\vec{v}}^{\infty-\mathrm{plat}}$ *est un idéal premier de* $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$*, non-maximal si* $\mathfrak{p} = \mathfrak{M}_x$*.*

Grande déception 0.8 *Soient* $x \in \mathbf{R}^n$ *et* A *une partie à laquelle* x *adhère. Alors, on n'a pas nécessairement* $\mathfrak{M}_{x,A}^{\mathrm{loc}} \subset \mathfrak{M}_{x,T_xA}^{\infty-\mathrm{plat}}$*.*

Questions en suspens

Question 0.9 *Soient A et B deux fermés de X tels que $\mathfrak{M}^{\mathrm{loc}}_{x,A} = \mathfrak{M}^{\mathrm{loc}}_{x,B}$. Est-ce que A et B ont le même germe d'espace en x ?*

Proposition 0.10 *Soit $y \in X$. Si $\forall U \in \mathcal{V}_A(x), y \in U$ alors $\mathfrak{M}^{\mathrm{loc}}_{x,A} \subset \mathfrak{M}_y$.*

La réciproque est fausse : il suffit de prendre pour X un espace topologique où il existe x_1 et x_2 tel que tout voisinage de x_2 contienne x_1. Alors, $\mathfrak{M}^{\mathrm{loc}}_{x_1,X\setminus\{x_2\}} \subset \mathfrak{M}_{x_2}$. Cependant, j'ai l'impression que ce contre-exemple un peu artificiel ne règle pas la question de la réciproque.

Question 0.11 *Soit $(a_n)_n$ une suite injective de points de $\mathbf{R}^n$ tendant vers x. Existe-t-il une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ dont l'ensemble des zéros est $\overline{\{a_n, n \in \mathbf{N}\}}$?*

Conjecture 0.12 *Soient A et B deux fermés disjoints à l'infini. Soit $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ deux idéaux maximaux à l'infini contenant respectivement $\mathfrak{M}^{\mathrm{loc}}_{\infty,A}$ et $\mathfrak{M}^{\mathrm{loc}}_{\infty,B}$. Alors il n'y a aucun idéal premier $\mathfrak{P}$ contenu à la fois dans $\mathfrak{M}_1$ et dans $\mathfrak{M}_2$.*

Projet 0.13 *Démêler tout ce qui a été fait et continuer à chercher aux alentours de l'infini.*

Table des matières

1 Naïveté **5**

2 Idéaux de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ **6**

2.1 L'idéal $\mathfrak{M}_x^{\text{loc}}$ des fonctions qui s'annulent localement autour de x 6

2.2 $\mathfrak{M}_{x,\vec{v}}^{\text{loc},\frac{1}{2}}$ 6

2.3 $\mathfrak{M}_{x,\vec{v}}^{\text{loc,ang}}$ 6

2.4 $\mathfrak{M}_{x,\vec{v}}^{\text{loc}}$ 6

2.5 L'idéal $\mathfrak{M}_{x,A}^{\text{loc}}$ des fonctions qui s'annulent localement autour de x dans la direction A 6

2.6 Généralisation pour les espaces topologiques 7

3 Point à l'infini et idéaux maximaux de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ **9**

3.1 L'idéal $\mathfrak{M}_\infty^{\text{loc}}$ des fonctions s'annulant à l'infini 9

3.2 L'idéal $\mathfrak{M}_{\infty,A}^{\text{loc}}$ des fonctions s'annulant à l'infini dans la direction A 9

3.3 Idéaux maximaux de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ contenant $\mathfrak{M}_\infty^{\text{loc}}$ 10

4 Idéaux et idéaux premiers de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ **11**

4.1 Idéaux premiers à distance finie 11

4.1.1 Classification des idéaux premiers à distance finie de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ 11

4.1.2 Notations pour les germes 12

4.1.3 Généralisation 12

4.2 Idéaux premiers à l'infini 13

4.2.1 Classification des idéaux à l'infini 13

4.2.2 Généralisation 13

4.3 Exemples d'idéaux premiers non maximaux de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ 14

4.3.1 L'idéal $\mathfrak{M}_x^{m-\text{plat}} \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ des fonctions m-presque plates en x 14

4.3.2 L'idéal $\mathfrak{M}_x^{\infty-\text{plat}} \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ des fonctions plates en x . . . 14

4.4 Exemples d'idéaux premiers non maximaux de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ 15

4.4.1 L'idéal $\mathfrak{M}_{x,\vec{v}}^{\infty-\text{plat}}$ des fonctions plates en x suivant la direction $\vec{v}$ 15

4.4.2 Généralisation : l'idéal $\mathfrak{M}_{x,V}^{\infty-\text{plat}}$ des fonctions plates selon la direction V 15

4.4.3 Une déception 16

4.4.4 Généralisation et point à l'infini 17

Motivations

Au début, je voulais comprendre la localisation : pourquoi appelle-t-on $A_{\mathfrak{p}}$ le localisé ? La meilleure façon de le comprendre est de voir sur un exemple que Spec $A_{\mathfrak{p}}$ correspond bien au "germe de l'espace" Spec A, quand on connaît Spec A.

L'exemple d'espace le plus simple est $\mathbf{R}^n$ (d'autant plus qu'alors je suivais le cours de groupe de Lie d'Antoine Chambert-Loir). Dans ce cas, le germe d'espace est le même en tout point, la notion n'a pas beaucoup d'intérêt.

Quoi qu'il en soit, finalement, j'ai essayé de comprendre Spec $(\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n))$.

Comme c'est trop dur et comme je suivais le cours d'introduction à la géométrie algébrique d'Antoine Ducros (k–algèbres réduites de type fini avec k algébriquement clos), je me suis dit : d'abord, on va calculer Specmax $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$.

1 Naïveté

Notation 1.1 *Soit $x \in \mathbf{R}^n$. On note $\mathfrak{M}_x = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n) \mid f(x) = 0\}$. De façon plus générale, si $A \subset \mathbf{R}^n$, on note $\mathfrak{M}_A = \left\{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n) \mid f_{|A} = 0\right\}$.*

On a évidemment, la

Proposition 1.2 *$\mathfrak{M}_x$ est un idéal maximal de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$.*

Démonstration : En effet, si $f \notin \mathfrak{M}_x$, $f(x) \neq 0$ et par continuité, il existe $U \underset{\circ}{\hookrightarrow} \mathbf{R}^n$ tel que $f_{|U}$ ne s'annule pas. En considérant f^2, on a mieux : la fonction est strictement positive sur U. Soit maintenant ϕ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ qui vaut 0 à l'extérieur de U et 1 en x et qui est toujours positive et inférieure à 1. Alors, $1-\phi$ est dans $\mathfrak{M}_x$, $f^2+(1-\phi)$ est dans $\mathfrak{M}_x+(f)$ et est partout non-nulle donc inversible. Morale de l'histoire : $\mathfrak{M}_x + (f) = \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$. ■

Bien sûr, si $a \in A$, on a $\mathfrak{M}_A \subset \mathfrak{M}_a$; par conséquent, $\mathfrak{M}_A$ est un idéal maximal si et seulement si A est de cardinal 1.

Comme on a

Résultat classique 1.3 (cité dans le cours d'Antoine Ducros) *Soit X un espace topologique compact. On pose $A = \mathcal{C}(X, \mathbf{R})$. Alors les idéaux maximaux de A sont les $\mathfrak{M}_x = \{f \in A \mid f(x) = 0\}$.*

mais surtout

Résultat classique 1.4 (Nullstellensatz) *Soit k un corps algébriquement clos. Alors, $(a_1, \ldots, a_n) \mapsto ((X_1 - a_1), \ldots, (X_n - a_n))$ est une bijection entre k^n et* Specmax $k[X_1, \ldots, X_n]$.

Dans un premier temps, je m'attendais à

Erreur 1.5 *Les idéaux maximaux de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ sont les $(\mathfrak{M}_x)_{x\in\mathbf{R}^n}$.*

2 Idéaux de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$

2.1 L'idéal $\mathfrak{M}_x^{\mathrm{loc}}$ des fonctions qui s'annulent localement autour de x

Notation 2.1 *Si $x \in \mathbf{R}^n$, on note $\mathfrak{M}_x^{\mathrm{loc}}$ l'idéal des fonctions qui sont localement nulles autour de x,* ie $\{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n) \mid \exists U \in \mathcal{V}(x), \forall y \in U, f(y) = 0\}$.

2.2 $\mathfrak{M}_{x,\vec{v}}^{\mathrm{loc},\frac{1}{2}}$

En fait, on a plus général : on peut choisir dans quelle direction s'annule localement f autour de x.

Notation 2.2 *Si $\vec{v}$ est un vecteur de $\mathbf{R}^n$ et si $x \in \mathbf{R}^n$, on note $E_{x,\vec{v}}^{\frac{1}{2}}$ le demi-espace des points $y \in \mathbf{R}^n$ tels que $(y - x \mid \vec{v}) \geq 0$, délimité par $x + \vec{v}^\perp$.*

On peut alors considérer $\left\{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n) \mid \exists U \in \mathcal{V}(x), \forall y \in U \cap E_{x,\vec{v}}^{\frac{1}{2}}, f(y) = 0\right\}$, qu'on note $\mathfrak{M}_{x,\vec{v}}^{\mathrm{loc},\frac{1}{2}}$.

2.3 $\mathfrak{M}_{x,\vec{v}}^{\mathrm{loc,ang}}$

On peut faire plein d'autres constructions de ce type : regarder les fonctions qui s'annulent dans un secteur angulaire d'angle quelconque, d'extrémité x et de bissectrice $x + \mathbf{R}_+\vec{v}$, qu'on peut noter $\mathfrak{M}_{x,\vec{v}}^{\mathrm{loc,ang}}$.

2.4 $\mathfrak{M}_{x,\vec{v}}^{\mathrm{loc}}$

Autre construction possible : les fonctions qui s'annulent sur un voisinage de x dans $x + \mathbf{R}_+\vec{v}$, qu'on peut noter $\mathfrak{M}_{x,\vec{v}}^{\mathrm{loc}}$.

2.5 L'idéal $\mathfrak{M}_{x,A}^{\mathrm{loc}}$ des fonctions qui s'annulent localement autour de x dans la direction A

De façon plus générale, si A est une partie de $\mathbf{R}^n$, on peut regarder les fonctions qui s'annulent sur un voisinage de x dans A. Ce qu'on notera $\mathfrak{M}_{x,A}^{\mathrm{loc}}$. Remarquons que si $x \notin \bar{A}$, alors $\mathfrak{M}_{x,A}^{\mathrm{loc}} = \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$; le cas intéressant est donc quand $x \in \bar{A}$. En fait, on étudiera la cas où $x \in A$.

Fait 2.3 *$\mathfrak{M}_{x,A}^{\mathrm{loc}}$ ne dépend que du "germe d'espace" de A en x, c'est-à-dire que s'il existe $U \in \mathcal{V}(x)$ tel que $A \cap U = B \cap U$, alors $\mathfrak{M}_{x,A}^{\mathrm{loc}} = \mathfrak{M}_{x,B}^{\mathrm{loc}}$.*

Démonstration : D'abord, on se simplifie la tâche : soient A et B qui ont le même germe d'espace en x et U le voisinage de x qui convient. Soit alors $r > 0$ suffisamment petit pour que $B_o(x, r)$ soit incluse dans U. On a alors :

$A \cap B_o(x,r) = B \cap B_o(x,r)$. Puis : on montre que $\mathfrak{M}^{\mathrm{loc}}_{x,A} \subset \mathfrak{M}^{\mathrm{loc}}_{x,B}$, ce qui suffit par symétrie. Soit donc $f \in \mathfrak{M}^{\mathrm{loc}}_{x,A}$: f s'annule sur $A \cap B_o(x,r')$, avec r' bien choisi. Si $r' \geq r$, alors f s'annule en particulier sur $A \cap B_o(x,r) = B \cap B_o(x,r)$ et donc est dans $\mathfrak{M}^{\mathrm{loc}}_{x,B}$. Si $r' < r$, alors on a encore $A \cap B_o(x,r') = B \cap B_o(x,r')$ et on conclut identiquement. ■

Fait 2.4 *On a* $\mathfrak{M}^{\mathrm{loc}}_{x} = \mathfrak{M}^{\mathrm{loc}}_{x,\mathbf{R}^n}$, $\mathfrak{M}^{\mathrm{loc},\frac{1}{2}}_{x,\vec{v}} = \mathfrak{M}^{\mathrm{loc}}_{x,E^{\frac{1}{2}}_{x,\vec{v}}}$ *et* $\mathfrak{M}^{\mathrm{loc}}_{x,\vec{v}} = \mathfrak{M}^{\mathrm{loc}}_{x,x+\mathbf{R}_+\vec{v}}$.

Fait 2.5 $\mathfrak{M}^{\mathrm{loc}}_{x} \subset \mathfrak{M}^{\mathrm{loc},\frac{1}{2}}_{x,\vec{v}} \subset \mathfrak{M}^{\mathrm{loc,ang}}_{x,\vec{v}} \subset \mathfrak{M}^{\mathrm{loc}}_{x,\vec{v}} \subset \mathfrak{M}_x$.

Fait 2.6 *Le seul idéal maximal contenant* $\mathfrak{M}^{\mathrm{loc}}_{x,A}$ *est* $\mathfrak{M}_x$ *quand* $x \in \bar{A}$.

Démonstration : Ce fait est évident quand on dispose de la classification des idéaux maximaux donnée dans le théorème 3.2. ■

Déception 2.7 *Ni* $\mathfrak{M}^{\mathrm{loc}}_{x}$, *ni* $\mathfrak{M}^{\mathrm{loc},\frac{1}{2}}_{x,\vec{v}}$, *ni* $\mathfrak{M}^{\mathrm{loc}}_{x,\vec{v}}$, *ni* $\mathfrak{M}^{\mathrm{loc,ang}}_{x,\vec{v}}$ *ne sont des idéaux premiers de* $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Déception 2.8 *Si x est un point isolé dans A,* $\mathfrak{M}^{\mathrm{loc}}_{x,A} = \mathfrak{M}_x$ *; si x n'est pas un point isolé dans A,* $\mathfrak{M}^{\mathrm{loc}}_{x,A}$ *n'est pas un idéal premier.*

Quitte à répondre à la question ci-dessous, la démonstration qui suit est valable.

Question 2.9 *Soit $(a_n)_n$ une suite injective de points de $\mathbf{R}^n$ tendant vers x. Existe-t-il une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ dont l'ensemble des zéros est* $\overline{\{a_n, n \in \mathbf{N}\}}$ *?*

Démonstration : On fait une esquisse de preuve. On se place dans le cas où dans un voisinage petit de x, A est une suite de points tendant vers x. On sépare ces points en deux paquets tendant vers x et on construit des fonctions qui s'annulent sur un paquet mais pas sur l'autre. Si A n'est jamais d'intérieur vide au voisinage de x, sur chaque petite boule, on s'arrange pour qu'une des fonctions soit non-nulle au centre et l'autre si (mais pas partout). ■

2.6 Généralisation pour les espaces topologiques

Soit X un espace topologique, A une sous-partie de X et $x \in X$; on peut alors considérer d'une part $\mathfrak{M}_x$ et d'autre part $\mathfrak{M}^{\mathrm{loc}}_{x,A}$. On a encore l'égalité entre $\mathfrak{M}^{\mathrm{loc}}_{x,A}$ et $\mathfrak{M}^{\mathrm{loc}}_{x,B}$ quand A et B ont même "germe d'espace" en x.

Définition 2.10 *On définit* $\mathfrak{M}_x = \{f \in \mathcal{C}(X) \mid f(x) = 0\}$ *et, quand A est un sous-espace topologique de X,* $\mathfrak{M}^{\mathrm{loc}}_{x,A}$ *comme* $\{f \in \mathcal{C}(X) \mid \exists U \in \mathcal{V}(x), \forall y \in U \cap A, f(y) = 0\}$.

On a encore que si $x \notin \bar{A}$, $\mathfrak{M}^{\mathrm{loc}}_{x,A} = \mathcal{C}(X)$ et que si x est un point isolé dans A, alors $\mathfrak{M}^{\mathrm{loc}}_{x,A} = \mathfrak{M}_x$. On a toujours $\mathfrak{M}^{\mathrm{loc}}_{x,A} \subset \mathfrak{M}_x$ si $x \in \bar{A}$.

Proposition 2.11 $\mathfrak{M}_x$ *est un idéal maximal de* $\mathcal{C}(X)$.

Démonstration : Soit $f \notin \mathfrak{M}_x$: on cherche à montrer que $\mathfrak{M}_x + (f) = \mathcal{C}(X)$. On regarde la fonction $g = f(x) - f$, qui s'annule en x. Alors, $g + f$ est inversible. ■

Proposition 2.12 $\mathfrak{M}^{\text{loc}}_{x,A}$ *ne dépend que du "germe d'espace" de* A *en* x*, c'est-à-dire que s'il existe* $U \in \mathcal{V}(x)$ *tel que* $A \cap U = B \cap U$*, alors* $\mathfrak{M}^{\text{loc}}_{x,A} = \mathfrak{M}^{\text{loc}}_{x,B}$.

Démonstration : Soit U tel que $A \cap U = B \cap U$. Alors, si $f \in \mathfrak{M}^{\text{loc}}_{x,A}$, il existe V tel que $\forall y \in V \cap A, f(y) = 0$. Cependant $W = V \cap U$ est encore un voisinage de x et $A \cap W = B \cap W$; puis, f s'annule sur $A \cap W$ donc sur $B \cap W$ dont est dans $\mathfrak{M}^{\text{loc}}_{x,B}$. ■

Hélas, la réciproque est fausse ; on a le

Contre-exemple 2.13 *Considérons l'espace topologique* $X = \mathbf{R}$ *et les parties* $A = \mathbf{R}$ *et* $B = \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbf{N}^\star\right\}$. A *et* B *n'ont pas le même "germe d'espace en* 0*" car tout voisinage de* 0 *dans* B *est disconnexe. Cependant,* $\mathfrak{M}^{\text{loc}}_{0,A} = \mathfrak{M}^{\text{loc}}_{0,B}$.

Plus généralement, on a

Propriété 2.14 *Soient* $A \subset B$ *deux sous-espaces topologiques de* X*. Alors, on a* $\mathfrak{M}^{\text{loc}}_{x,B} \subset \mathfrak{M}^{\text{loc}}_{x,A}$.

Démonstration : Soit $f \in \mathfrak{M}^{\text{loc}}_{x,B}$: il existe U tel que $f_{|B \cap U} = 0$. Cependant, $A \cap U \subset B \cap U$ et donc $f \in \mathfrak{M}^{\text{loc}}_{x,A}$. ■

Fait 2.15 $\mathfrak{M}^{\text{loc}}_{x,A} = \mathfrak{M}^{\text{loc}}_{x,\bar{A}}$.

Démonstration : Il suffit de montrer que $\mathfrak{M}^{\text{loc}}_{x,A} \subset \mathfrak{M}^{\text{loc}}_{x,\bar{A}}$, d'après la propriété énoncée ci-dessus. Soient donc $f \in \mathfrak{M}^{\text{loc}}_{x,A}$ et U un ouvert tel que $f_{|A \cap U} = 0$. On aimerait montrer que $f_{|\bar{A} \cap U} = 0$: soit $y \in \bar{A} \cap U$; si $f(y) \neq 0$, il existe un ouvert V contenant y tel que f ne s'annule pas sur V ; $V \cap U$ est encore un voisinage de y donc rencontre A donc rencontre $A \cap U$. C'est absurde car f ne s'annule pas sur V mais s'annule sur $A \cap U$. Donc $f \in \mathfrak{M}^{\text{loc}}_{x,\bar{A}}$. ■

On s'intéresse donc logiquement aux sous-ensembles fermés de X. On se pose la

Question 2.16 *Soient* A *et* B *deux fermés de* X *tels que* $\mathfrak{M}^{\text{loc}}_{x,A} = \mathfrak{M}^{\text{loc}}_{x,B}$*. Est-ce que* A *et* B *ont le même germe d'espace en* x *?*

Une autre généralisation :

Proposition 2.17 *Soit* $y \in X$*. Si* $\forall U \in \mathcal{V}_A(x), y \in U$ *alors* $\mathfrak{M}^{\text{loc}}_{x,A} \subset \mathfrak{M}_y$.

La réciproque est fausse : il suffit de prendre pour X un espace topologique où il existe x_1 et x_2 tel que tout voisinage de x_2 contienne x_1. Alors, $\mathfrak{M}^{\text{loc}}_{x_1, X \setminus \{x_2\}} \subset \mathfrak{M}_{x_2}$. Cependant, j'ai l'impression que ce contre-exemple un peu artificiel ne règle pas la question de la réciproque.

3 Point à l'infini et idéaux maximaux de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$

3.1 L'idéal $\mathfrak{M}_\infty^{\mathrm{loc}}$ des fonctions s'annulant à l'infini

S'inspirant de la partie précédente, on pose :

Définition 3.1 *On note* $\mathfrak{M}_\infty^{\mathrm{loc}}$ *l'idéal* $\{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n) \mid \exists K \text{compact}, \forall x \notin K, f(x) = 0\}$.

On peut alors démontrer

Théorème 3.2 (classification des idéaux maximaux de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$) *Soit* $\mathfrak{M}$ *un idéal maximal de* $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$*. Alors :*
– *soit il existe* $x \in \mathbf{R}^n$ *tel que* $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_x$
– *soit* $\mathfrak{M}_\infty^{\mathrm{loc}} \subset \mathfrak{M}$*.*

Démonstration : Soit $\mathfrak{M}$ un idéal maximal tel que pout tout $x \in \mathbf{R}^n$, $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{M}_x$. Supposons que $\mathfrak{M}_\infty^{\mathrm{loc}} \not\subset \mathfrak{M}$: $\exists f \in \mathfrak{M}_\infty^{\mathrm{loc}}$ et $f \notin \mathfrak{M}$. Donc $\mathfrak{M} + (f) = \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$, *ie* $\exists \varphi \in \mathfrak{M}, \exists \lambda \in \mathbf{R} \mid \varphi + \lambda f = 1$. Comme $f \in \mathfrak{M}_\infty^{\mathrm{loc}}$, on peut choisir K un compact tel que f soit nulle en dehors de K et donc tel que φ vaille 1 en dehors de K.

En particulier, on a $\mathfrak{M}_K \subset \mathfrak{M}$: si $g \in \mathfrak{M}_K$, $g\varphi = g$. Par ailleurs, si $x \in K, \mathfrak{M} \neq \mathfrak{M}_x$ et donc il existe $f_x \in \mathfrak{M}$ (qu'on peut supposer partout positive quitte à prendre son carré) telle que $f_x(x) > 0$; mieux, il existe $U_x \in \mathcal{V}(x)$ tel que $f_{x|U_x} > 0$. Comme les U_x recouvrent K, on peut trouver $(x_i)_{0 \leq i \leq m}$ tels que $K = \bigcup_{0 \leq i \leq m} U_{x_i}$. Puis, $h = \sum_{0 \leq i \leq m} f_{x_i}$ est une fonction dans $\mathfrak{M}$, strictement positive sur K entier.

Cependant, on a toujours à notre disposition φ^2 dans $\mathfrak{M}$ qui est positive et qui vaut 1 en dehors de K : $\varphi^2 + h$ est inversible et donc $\mathfrak{M} = \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$. C'est absurde et donc $\mathfrak{M}_\infty^{\mathrm{loc}} \subset \mathfrak{M}$. ■

3.2 L'idéal $\mathfrak{M}_{\infty,A}^{\mathrm{loc}}$ des fonctions s'annulant à l'infini dans la direction A

La question naturelle qu'on se pose maintenant est

Question 3.3 $\mathfrak{M}_\infty^{\mathrm{loc}}$ *est-il un idéal maximal ?*

La réponse est négative car on peut faire les mêmes constructions en l'infini que ce qu'on a fait pour $x \in \mathbf{R}^n$.

Cependant, notons qu'on a

Fait 3.4 *L'ensemble des fonctions qui tendent vers* 0 *en* $+\infty$ *n'est jamais un idéal, quelle que soit la vitesse de convergence qu'on impose.*

Définition 3.5 *Soit* A *une partie de* $\mathbf{R}^n$*. On note* $\mathfrak{M}_{\infty,A}^{\mathrm{loc}}$ *l'idéal des fonctions sur un voisinage de l'infini dans A :*
$\mathfrak{M}_{\infty,A}^{\mathrm{loc}} = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n) \mid \exists K \text{compact}, \forall x \in A \setminus K, f(x) = 0\}$.

Les propriétés de $\mathfrak{M}^{\text{loc}}_{\infty,A}$ se copient sur celles de $\mathfrak{M}^{\text{loc}}_{x,A}$.

Propriété 3.6 *Soient $A \subset B$ deux sous-espaces topologiques de X. Alors, on a $\mathfrak{M}^{\text{loc}}_{\infty,B} \subset \mathfrak{M}^{\text{loc}}_{\infty,A}$.*

Fait 3.7 $\mathfrak{M}^{\text{loc}}_{x,A} = \mathfrak{M}^{\text{loc}}_{x,\bar{A}}$.

On peut donc uniquement s'intéresser aux sous-ensembles fermés de $\mathbf{R}^n$.

Fait 3.8 *Si A est borné,* ie *si l'infini n'est pas adhérent à A, alors $\mathfrak{M}^{\text{loc}}_{\infty,A} = \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$.*

On s'intéressera donc dans la suite au cas où A est non borné.

Proposition 3.9 *A et B étant deux parties de $\mathbf{R}^n$, s'il existe un compact K tel que $A \setminus K = B \setminus K$, alors $\mathfrak{M}^{\text{loc}}_{\infty,A} = \mathfrak{M}^{\text{loc}}_{\infty,B}$.*

3.3 Idéaux maximaux de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ contenant $\mathfrak{M}^{\text{loc}}_\infty$

Naturellement, on se pose la question

Question 3.10 *Existe-t-il un unique idéal maximal $\mathfrak{M}_\infty$ contenant $\mathfrak{M}^{\text{loc}}_\infty$?*

À laquelle on répond par la

Proposition 3.11 *Soient A et B deux fermés de $\mathbf{R}^n$ disjoints localement en l'infini,* ie *telles qu'il existe un compact K tel que $(A \cap B) \setminus K = \varnothing$. Alors, $\mathfrak{M}^{\text{loc}}_{\infty,A}$ et $\mathfrak{M}^{\text{loc}}_{\infty,B}$ ne sont contenus dans aucun idéal maximal commun.*

Démonstration : Donnons d'abord une idée de la démonstration. Si on devait démontrer le résultat pour l'anneau $\mathcal{C}(X, \mathbf{R})$, ce serait facile : il suffit de prendre les fonctions $f_A = d(\cdot, A \cap K)$ et $f_B = d(\cdot, B \cap K)$ qui s'annulent respectivement uniquement sur $A \cap K$ et $B \cap K$. On a $f_A \in \mathfrak{M}^{\text{loc}}_{\infty,A}$ et $f_B \in \mathfrak{M}^{\text{loc}}_{\infty,B}$. Ainsi, si ces deux idéaux étaient contenus dans un même idéal maximal $\mathfrak{M}$, ce dernier contiendrait $f_A + f_B$ qui est une fonction inversible.

Ainsi, pour démontrer le résultat, il suffit de trouver deux fonctions f_A et f_B dans $\mathfrak{M}^{\text{loc}}_{\infty,A}$ et $\mathfrak{M}^{\text{loc}}_{\infty,B}$, toutes deux positives et n'ayant aucun zéro commun.

Déjà, on se convainc (surtout avec ce qui suit) qui si A et B sont fermés et disjoints à l'infini, deux telles fonctions existent. Démontrons-le d'abord dans le cas où $d(A \setminus K, B \setminus K) > 0$.

On note $\varepsilon = d(A \setminus K, B \setminus K)$. Puis on se donne une marge en considérant $A' = \{x \notin K \mid d(x, A) \leq \varepsilon/3\}$ et $B' = \{x \notin K \mid d(x, B) \leq \varepsilon/3\}$. On regarde ensuite les fonctions $f_A = d(\cdot, A')$ et $f_B = d(\cdot, B')$. Malheureusement, il se peut qu'elles ne soient pas $\mathcal{C}^\infty$ (c'est notamment le cas si par exemple A' n'est pas convexe, auquel cas f_A n'est même pas différentiable) ; en tout cas, elles sont continues et positives ; chacune d'elles s'annule sur A' ou sur B'. On les convole alors par une fonction $\mathcal{C}^\infty$ φ, positive, de norme L^1 1 et dont le support est inclus dans $B_o(0, \varepsilon/3)$. On obtient deux fonctions positives $f_A^\star$ et $f_B^\star$, $\mathcal{C}^\infty$ qui s'annulent respectivement sur $A \setminus K'$ et $B \setminus K'$ et ne s'annulent pas sur B et A, où K' est un compact contenant K plus une marge de sécurité de largeur au moins $\varepsilon/3$. Ainsi, $f_A^\star \in \mathfrak{M}^{\mathrm{loc}}_{\infty,A}$ et $f_B^\star \in \mathfrak{M}^{\mathrm{loc}}_{\infty,B}$ mais leur somme est inversible : aucun idéal maximal $\mathfrak{M}$ ne contient à la fois $\mathfrak{M}^{\mathrm{loc}}_{\infty,A}$ et $\mathfrak{M}^{\mathrm{loc}}_{\infty,B}$.

Montrons maintenant le théorème dans le cas général. On note $r > 0$ tel que $(A \cap B) \setminus B_f(0, r) = \varnothing$. On note $A' = A \setminus B_f(0, r)$ et $B' = B \setminus B_f(0, r)$. Alors, d'après la partie précédente de la démonstration, on peut construire une fonction f_n positive qui s'annule sur $B' \cap (B_f(0, r + n) \setminus B_f(0, r + (n - 1))$ mais pas sur $A' \cap (B_f(0, r + n) \setminus B_f(0, r + (n - 1))$. De même, on construit une fonction g_n positive qui s'annule sur $A' \cap (B_f(0, r + n) \setminus B_f(0, r + (n - 1))$ mais pas sur $B' \cap (B_f(0, r + n) \setminus B_f(0, r + (n - 1))$. Le problème maintenant est de recoller ces fonctions. Pour ce faire, en les multipliant par de bonnes fonctions "plateau", on trouve des fonctions $\tilde{f}_n$ et $\tilde{g}_n$ qui coïcident avec respectivement f_n et g_n sur $B_f(0, r + n - \varepsilon) \setminus B_f(0, r + (n - 1) + \varepsilon)$ et sont nulles en dehors de $B_f(0, r + n) \setminus B_f(0, r + (n - 1))$, en choisissant un ε plus petit que $1/10$. Dès lors, les fonctions $\tilde{f}_n$ et $\tilde{g}_n$ se recollent parfaitement pour former des fonctions f et g. La fonction f, par exemple, s'annule sur B' et est strictement positive sur A' sauf à l'intérieur de couronnes concentriques fines de largeur 2ε et de rayon n. On fait alors la même construction mais avec des couronnes de rayon $n + 1/2$ pour obtenir des fonctions $\bar{f}$ et $\bar{g}$. Enfin, les fonctions $f = \tilde{f} + \bar{f}$ et $g = \bar{g} + \tilde{g}$ vérifient les bonnes propriétés pour établir le résultat escompté. ∎

Contre-exemple 3.12 *Le résultat est faux si l'on omet l'hypothèse A et B fermés. Si on note e_1 le vecteur $(1, 0, \ldots, 0)$ de $\mathbf{R}^n$, $A = \mathbf{Q}e_1$ et $B = (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})e_1$, alors on a $\mathfrak{M}^{\mathrm{loc}}_{\infty,A} = \mathfrak{M}^{\mathrm{loc}}_{\infty,B}$ alors que $A \cap B = \varnothing$.*

Corollaire 3.13 *Il existe une infinité non dénombrable d'idéaux maximaux contenant $\mathfrak{M}^{\mathrm{loc}}_\infty$.*

Démonstration : Si $n > 1$, il suffit de considérer les fermés $F_u = (\mathbf{R}\vec{u})_{||u||=1}$. D'ailleurs dans ce cas, on peut donner des fonctions explicites f_{F_u} et donc se passer de la démonstration précédente. Si $n = 1$, on fait autrement en considérant par exemple les fermés $\mathbf{N} + x$ avec $0 \leq x < 1$. ∎

4 Idéaux et idéaux premiers de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$

4.1 Idéaux premiers à distance finie

4.1.1 Classification des idéaux premiers à distance finie de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$

Voici un résultat de classification des idéaux premiers de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$:

Théorème 4.1 *Soit $\mathfrak{P}$ un idéal premier de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$. Alors $\mathfrak{P}$ ne peut être contenu à la fois dans $\mathfrak{M}_x$ et $\mathfrak{M}_y$ si $x \neq y$.*

Démonstration : (Il est conseillé de prendre un crayon et de faire un dessin).

Soit I un idéal contenu à la fois dans $\mathfrak{M}_x$ et $\mathfrak{M}_y$. Pour simplifier la preuve, on peut supposer que $x = (1, 0, \ldots, 0)$ et $y = (-3, 0, \ldots, 0)$. On peut trouver une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ telle que $\forall x \leq 0, \varphi(x) = 0$, $\forall x > 0, \varphi(x) > 0$ et $\forall x \geq 1/2, \varphi(x) = 1$. On construit à partir de φ la fonction $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ définie par $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi(x_1)$.

Soit alors $f \in I$: on a $f(x) = f(y) = 0$. $g = \psi f$ est encore dans I et s'annule si $x_1 \leq 0$. On va montrer que g est le produit de deux fonctions qui ne s'annulent pas simultanément en x et en y et qui par conséquent ne sont pas dans I. On en déduira que I n'est pas premier.

On considère la fonction $\tilde{\psi}$ définie par $\tilde{\psi}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \psi(-x_1 - 2, x_2, \ldots, x_n)$, qui s'annule si $x_1 \geq -2$. Soit alors $h = \tilde{\psi} + g$: h ne s'annule pas en y. Enfin, soit l définie par $l(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \psi(x_1 + 2, x_2, \ldots, x_n)$, qui est nulle si $x_1 \leq -2$ et qui vaut 1 si $x_1 \geq -1$: l ne s'annule pas en x. Cependant, $hl = g$. ■

4.1.2 Notations pour les germes

Pour généraliser ce résultat, on va introduire quelques notations concernant les germes.

Notation 4.2 *Soit $\mathcal{A} = (X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé. On note $\mathcal{G}_x\mathcal{A}$ l'ensemble des germes de "fonctions" en $x \in X$. Dans la situation qui nous intéresse, on regardera $\mathcal{G}_x\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$.*

Si $U \underset{\Theta}{\hookrightarrow} X$ avec $x \in U$ et $f \in \mathcal{O}_X(U)$, on notera $\mathcal{G}_x f$ l'image de f dans $\mathcal{G}_x\mathcal{A}$.

4.1.3 Généralisation

Voici comment ce généralise le théorème :

Proposition 4.3 *Soit $\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec} \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ tel que $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{M}_x$. Alors, $\forall y \neq x, \forall h \in \mathcal{G}_y\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n), \exists f \in \mathfrak{P} \mid \mathcal{G}_y f = h$.*

Cela signifie que l'appartenance de f à $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{M}_x$ n'est soumise à aucune condition locale en $y \neq x$.

Démonstration : Soit $y \neq x$. On a vu que $\mathfrak{P} \not\subset \mathfrak{M}_y$: $\exists f \in \mathfrak{P} \mid f(y) \neq 0$; donc f est non-nulle sur $V \in \mathcal{V}(y)$. Soit alors $h \in \mathcal{G}_y\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$: sur une boule ouverte $B_o(y, \varepsilon) \subset V$, on considère la fonction $\varphi(z)) = \frac{h(z)}{f(z)}$, bien définie car f ne s'y annule pas. Puis, pour en faire une fonction $\tilde{\varphi}$ définie sur $\mathbf{R}^n$ tout entier, on multiplie φ par ψ qui vaut 1 sur un voisinage de y et 0 en dehors d'une boule ouverte incluse dans $B_o(y, \varepsilon)$.

On a alors que $\tilde{\varphi} f \in \mathfrak{P}$ et $\mathcal{G}_y(\tilde{\varphi} f) = h$. ■

En fait, suivant la même démonstration, on pourrait prouver la

Proposition 4.4 *Soit $x \in \mathbf{R}^n$, soit $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{M}_x$ un idéal premier. Soit $Y = \{y_1, y_2, \ldots y_n, \ldots\}$ un ensemble de points distincts de x qui n'a pas de point d'accumulation. Soient $(h_i)_{i \geq 0} \in \prod_{i \geq 0} \mathcal{G}_{y_i}\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ des germes de fonctions en les points y_i. Alors, $\exists f \in \mathfrak{P} \mid \forall i \geq 0, \mathcal{G}_{y_i} f = h_i$.*

4.2 Idéaux premiers à l'infini

En fait, on peut compléter ces résultats.

4.2.1 Classification des idéaux à l'infini

Théorème 4.5 *Soit $\mathfrak{M}$ un idéal maximal à l'infini,* ie *tel que $\mathfrak{M}_\infty^{\mathrm{loc}} \subset \mathfrak{M}$. Soit $\mathfrak{P}$ un idéal premier de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ et soit $x \in \mathbf{R}^n$. Alors, $\mathfrak{P}$ ne peut être contenu à la fois dans $\mathfrak{M}$ et dans $\mathfrak{M}_x$.*

Pour démontrer ce théorème, on utilise le

Lemme 4.6 *Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ telle qu'il existe un compact K tel que $x \notin K \Rightarrow f(x) \neq 0$. Alors f n'est dans aucun idéal maximal à l'infini.*

Démonstration : (lemme) En effet, un idéal maximal à l'infini $\mathfrak{M}$ contient $\mathfrak{M}_\infty^{\mathrm{loc}}$ donc contient une fonction g $\mathcal{C}^\infty$ qui est strictement positive dans K et nulle en dehors d'un compact. Comme $g + f$ est inversible, c'est que $f \notin \mathfrak{M}$. ■
Démonstration : (théorème) (Il est conseillé de prendre un crayon et de faire un dessin).

Soit I un idéal contenu dans $\mathfrak{M}_x$ et dans un idéal maximal à l'infini $\mathfrak{M}$ contenant $\mathfrak{M}_\infty^{\mathrm{loc}}$. Soit B une boule fermée contenant x et $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ strictement positive sur B et nulle en dehors d'une boule fermée B'. Alors, $g = \varphi f$ est encore dans I. Soit ψ qui vaut 1 sur B' et 0 en dehors d'un boule fermée B''. Soit $\tilde{\psi}$ qui vaut 0 dans B'' et qui vaut 1 en dehors d'une boule femée B'''. Soit $h = f + \tilde{\psi}$. Alors, h n'est pas dans I car n'est pas dans $\mathfrak{M}$ d'après le lemme précédent et ψ n'est pas dans I car $\psi(x) \neq 0$ mais $\psi h = g$. ■

On résume les deux théorèmes de classification dans

Théorème 4.7 (classification des idéaux premiers de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$) *Soit $\mathfrak{M}$ un idéal maximal à l'infini,* ie *tel que $\mathfrak{M}_\infty^{\mathrm{loc}} \subset \mathfrak{M}$. Soient x, y distincts dans $\mathbf{R}^n$. Soit $\mathfrak{P}$ un idéal premier de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$. Alors, $\mathfrak{P}$ ne peut être contenu à la fois dans $\mathfrak{M}_x$ et dans $\mathfrak{M}_y$, et $\mathfrak{P}$ ne peut être contenu à la fois dans $\mathfrak{M}_x$ et dans $\mathfrak{M}$.*

Ça serait bien si on pouvait généraliser cette classification pour comparer les idéaux à l'infini entre eux.

Conjecture 4.8 *Soient A et B deux fermés disjoints à l'infini. Soit $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ deux idéaux maximaux à l'infini contenant respectivement $\mathfrak{M}_{\infty,A}^{\mathrm{loc}}$ et $\mathfrak{M}_{\infty,B}^{\mathrm{loc}}$. Alors il n'y a aucun idéal premier $\mathfrak{P}$ contenu à la fois dans $\mathfrak{M}_1$ et dans $\mathfrak{M}_2$.*

4.2.2 Généralisation

En recopiant la preuve de la proposition 4.3, on montre :

Proposition 4.9 *Soit $\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}\, \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ tel que $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{M}$ où $\mathfrak{M}$ est un idéal maximal contenant $\mathfrak{M}_\infty^{\mathrm{loc}}$. Alors, $\forall x \in \mathbf{R}^n, \forall h \in \mathcal{G}_x\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n), \exists f \in \mathfrak{P} \mid \mathcal{G}_x f = h$.*

qu'on peut généraliser en

Proposition 4.10 *Soit $\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec} \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ tel que $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{M}$ où $\mathfrak{M}$ est un idéal maximal contenant $\mathfrak{M}_\infty^{\mathrm{loc}}$. Soit $X = \{x_1, x_2, \dots x_n, \dots\}$ un ensemble de points de $\mathbf{R}^n$ qui n'a pas de point d'accumulation. Soient $(h_i)_{i\geq 0} \in \prod_{i\geq 0} \mathcal{G}_{x_i}\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ des germes de fonctions en les points x_i. Alors, $\exists f \in \mathfrak{P} \mid \forall i \geq 0, \mathcal{G}_{x_i} f = h_i$.*

4.3 Exemples d'idéaux premiers non maximaux de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$

4.3.1 L'idéal $\mathfrak{M}_x^{m-\mathrm{plat}} \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ des fonctions m-presque plates en x

Dans la suite, on travaille dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$: $n = 1$.
Soit $m \in \mathbf{N}$.

Définition 4.11 *Si $x \in \mathbf{R}$, on note $\mathfrak{M}_x^{m-\mathrm{plat}}$ l'ensemble des fonctions m-presque plates en x : $\mathfrak{M}_x^{m-\mathrm{plat}} = \left\{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}) \mid \forall k \leq m, f^{(k)}(x) = 0\right\}$.*

On a $\mathfrak{M}_x^{0-\mathrm{plat}} = \mathfrak{M}_x$.

Proposition 4.12 $\mathfrak{M}_x^{m-\mathrm{plat}}$ *est un idéal de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$.*

Démonstration : Pour la somme, c'est clair. Pour le produit, on utlise la formule de Leibniz. ■

Cependant, $\mathfrak{M}_x^{m-\mathrm{plat}}$ n'est pas premier.

4.3.2 L'idéal $\mathfrak{M}_x^{\infty-\mathrm{plat}} \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ des fonctions plates en x

Définition 4.13 *Si $x \in \mathbf{R}$, on note $\mathfrak{M}_x^{\infty-\mathrm{plat}}$ l'ensemble des fonctions plates en x : $\mathfrak{M}_x^{\infty-\mathrm{plat}} = \left\{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}) \mid \forall k \in \mathbf{N}, f^{(k)}(x) = 0\right\}$.*

Proposition 4.14 $\mathfrak{M}_x^{\infty-\mathrm{plat}}$ *est un idéal.*

Démonstration : Pour la somme, c'est clair. Pour le produit, on utilise la formule de Leibniz : si $f \in \mathfrak{M}_x^{\infty-\mathrm{plat}}$ et si g est quelconque, on a $(fg)^{(n)}(x) = \sum_{0\leq k\leq n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$. ■

Proposition 4.15 $\mathfrak{M}_x^{\infty-\mathrm{plat}}$ *est un idéal premier non maximal.*

Démonstration : Soient f et g telles que $fg \in \mathfrak{M}_x^{\infty-\mathrm{plat}}$. Supposons qu'à la fois ni f ni g ne soient dans $\mathfrak{M}_x^{\infty-\mathrm{plat}}$. Choisissons m et n minimaux tels que $f^{(n)}(x) \neq 0$ et $g^{(m)}(x) \neq 0$ et montrons qu'alors $(fg)^{(n+m)}(x) \neq 0$. On a $(fg)^{(n+m)}(x) = \sum_{0\leq k\leq n+m} \binom{n+m}{k} f^{(k)}(x) g^{(n+m-k)}(x)$. Mais si $k < n$, $f^{(k)}(x)$ est nul et si $n + m - k < m$ c'est-à-dire si $k > n$, $g^{(n+m-k)}(x)$ est nul. Donc le seul terme non éventuellement nul de la somme est $\binom{n+m}{n} f^{(n)}(x) g^{(m)}(x)$ qui est effectivement non-nul. ■

Fait 4.16 $\mathfrak{M}_x^{\mathrm{loc}} \subset \mathfrak{M}_{x,1}^{\mathrm{loc},\frac{1}{2}} \subset \mathfrak{M}_x^{\infty-\mathrm{plat}} \subset \cdots \subset \mathfrak{M}_x^{(m+1)-\mathrm{plat}} \subset \mathfrak{M}_x^{m-\mathrm{plat}} \subset \cdots \subset \mathfrak{M}_x^{1-\mathrm{plat}} \subset \mathfrak{M}_x^{0-\mathrm{plat}} = \mathfrak{M}_x$.

Mieux, on a le théorème :

Théorème 4.17 *Soit $x \in \mathbf{R}$ et soit $A \subset \mathbf{R}$ une partie telle que $x \in \bar{A}$ et telle que x ne soit pas un point isolé de A. Alors : $\mathfrak{M}_{x,A}^{\mathrm{loc}} \subset \mathfrak{M}_x^{\infty-\mathrm{plat}}$.*

Démonstration : Puisque $x \in \bar{A}$, on peut trouver une suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers x. Puisque x n'est pas isolé dans A, on peut supposer que cette suite est injective. Soit alors $f \in \mathfrak{M}_{x,A}^{\mathrm{loc}}$: quitte à commencer la suite (a_n) à partir d'un certain rang, on peut supposer que $\forall n \in \mathbf{N}, f(a_n) = 0$. Grâce au théorème de Rolle, on construit alors une suite $(a_n^{(1)})$, vérifiant les mêmes propriétés que (a_n), telle que $\forall n \in \mathbf{N}, f^{(1)}\left(a_n^{(1)}\right) = 0$. Mieux, par récurrence sur $p \geq 0$, on construit des suites $\left(a_n^{(p)}\right)_n$, vérifiant les mêmes propriétés que (a_n), telles que $\forall n \geq 0, f^{(p)}\left(a_n^{(p)}\right) = 0$. Par continuité, on a alors que $\forall p \in \mathbf{N}, f^{(p)}(x) = 0$, c'est-à-dire que $f \in \mathfrak{M}_x^{\infty-\mathrm{plat}}$. ■

4.4 Exemples d'idéaux premiers non maximaux de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$

On généralise ce qui a été fait pour $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$.

4.4.1 L'idéal $\mathfrak{M}_{x,\vec{v}}^{\infty-\mathrm{plat}}$ des fonctions plates en x suivant la direction $\vec{v}$

Définition 4.18 *Soit $\vec{v} \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ et soit $m \in \mathbf{N}$. On définit $\mathfrak{M}_{x,\vec{v}}^{m-\mathrm{plat}} = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n) \mid \forall k \leq m, \frac{\partial^k f}{\partial \vec{v}^k}(x) = 0 \right\}$.*

Rappelons comment est défini $\frac{\partial^k f}{\partial \vec{v}^k}(x)$. On regarde la fonction $f_{x,\vec{v}} : \begin{array}{c} \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ t \mapsto f(x + t\vec{v}) \end{array}$.
On a alors $\frac{\partial^k f}{\partial \vec{v}^k}(x) = (f_{x,\vec{v}})^{(k)}(0)$. Notons qu'on a $(fg)_{x,\vec{v}} = f_{x,\vec{v}} g_{x,\vec{v}}$.

En fait, ce n'est pas vraiment $\mathfrak{M}_{x,\vec{v}}^{m-\mathrm{plat}}$ qui nous intéresse car ce n'est pas un idéal premier. Mais, déjà pas mal, c'est un idéal. On définit donc :

Définition 4.19 *Soit $\vec{v} \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$. On définit $\mathfrak{M}_{x,\vec{v}}^{\infty-\mathrm{plat}} = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n) \mid \forall k \in \mathbf{N}, \frac{\partial^k f}{\partial \vec{v}^k}(x) = 0 \right\}$.*

En utlisant tout ce qui a été fait dans la partie 4.3.2, on montre :

Proposition 4.20 *$\mathfrak{M}_{x,\vec{v}}^{\infty-\mathrm{plat}}$ est un idéal premier non maximal de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$.*

4.4.2 Généralisation : l'idéal $\mathfrak{M}_{x,V}^{\infty-\mathrm{plat}}$ des fonctions plates selon la direction V

On généralise facilement l'objet $\mathfrak{M}_{x,\vec{v}}^{\infty-\mathrm{plat}}$ en posant la

Définition 4.21 *Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$. On pose $\mathfrak{M}_{x,V}^{\infty-\mathrm{plat}} = \bigcap_{\vec{v} \in V} \mathfrak{M}_{x,\vec{v}}^{\infty-\mathrm{plat}}$.*

Malheureusement, on a la

Déception 4.22 *Si V est de dimension plus grande que 2, alors $\mathfrak{M}_{x,V}^{\infty-\mathrm{plat}}$ n'est pas premier.*

comme le montre le

Contre-exemple 4.23 *On se place dans $\mathbf{R}^2$. On note $f(x,y) = x$ et $g(x,y) = y$. On a que $f \in \mathfrak{M}_{0,(0,1)}^{\infty-\mathrm{plat}}$ mais que $f \notin \mathfrak{M}_{0,(1,0)}^{\infty-\mathrm{plat}}$ et que $g \in \mathfrak{M}_{0,(1,0)}^{\infty-\mathrm{plat}}$ mais que $g \notin \mathfrak{M}_{0,(0,1)}^{\infty-\mathrm{plat}}$. Cependant, $fg \in \mathfrak{M}_{0,\mathbf{R}^2}^{\infty-\mathrm{plat}}$.*

Notons les

Fait 4.24 *Soient $V \subset W$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$. Alors, $\mathfrak{M}_{x,W}^{\infty-\mathrm{plat}} \subset \mathfrak{M}_{x,V}^{\infty-\mathrm{plat}}$.*

et

Fait 4.25 $\mathfrak{M}_{x,\{\vec{0}\}}^{\infty-\mathrm{plat}} = \mathfrak{M}_x$.

4.4.3 Une déception

La déception dont je parle ici vient d'une illusion. Si $f \in \mathfrak{M}_x^{\mathrm{loc}}$, c'est-à-dire si f est localement nulle autour de x, alors la différentielle de f s'annule en x. Dit autrement :

Fait 4.26 $\mathfrak{M}_x^{\mathrm{loc}} \subset \mathfrak{M}_{x,\mathbf{R}^n}^{\infty-\mathrm{plat}}$.

En fait, on a mieux. D'après le théorème 4.17 :

Proposition 4.27 *Soit $x \in \mathbf{R}^n$ et soit A une partie à laquelle x adhère et telle que $\exists \vec{v} \in \mathbf{R}^n$ qui adhère à $A \cap \mathbf{R}\vec{v}$. Alors, $\mathfrak{M}_{x,A}^{\mathrm{loc}} \subset \mathfrak{M}_{x,\vec{v}}^{\infty-\mathrm{plat}}$.*

Mon illusion, c'est que cette proposition se généralisait joliment. Pour exprimer cette généralisation, on a besoin de

Définition 4.28 *Soient $x \in \mathbf{R}^n$ et A une partie de $\mathbf{R}^n$ à laquelle x adhère. On définit T_xA par* $\mathrm{Vect}\ \left\{\vec{v} \in \mathbf{R}^n \mid \exists (a_n)_n \in A^{\mathbf{N}}, \exists (\lambda_n)_n \in \mathbf{R}_+^{\mathbf{N}} \mid a_n \to a \text{ et } \frac{a_n - x}{\lambda_n} \to \vec{v}\right\}$.

Je peux alors exprimer ma

Grande déception 4.29 *Soient $x \in \mathbf{R}^n$ et A une partie à laquelle x adhère. Alors, on n'a pas nécessairement $\mathfrak{M}_{x,A}^{\mathrm{loc}} \subset \mathfrak{M}_{x,T_xA}^{\infty-\mathrm{plat}}$.*

En effet, on a le contre-exemple suivant :

Contre-exemple 4.30 *Soit $f(x,y) = -(y - x^2)(y + x^2)$. On a que $\forall x \in \mathbf{R}, f(x,x^2) = 0$ et que $\frac{1}{x}(x,x^2) \to_{x \to 0} (1,0)$. Cependant, $\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0,0) = 24 \neq 0$.*

Cependant, on a toujours le

Fait 4.31 $\mathfrak{M}_{x,A}^{\mathrm{loc}} \subset \mathfrak{M}_{x,T_xA}^{1-\mathrm{plat}}$.

4.4.4 Généralisation et point à l'infini

On va vite. Soient $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ et $\vec{v} \in \mathbf{R}^n$. En particulier, on peut prendre pour $\mathfrak{p}$ un idéal maximal $\mathfrak{M}$. On définit :

Définition 4.32 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{p},\vec{v}}^{\infty-\text{plat}} = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n) \mid \forall k \in \mathbf{N}, \frac{\partial^k f}{\partial \vec{v}^k} \in \mathfrak{p} \right\}$.

qu'on généralise en

Définition 4.33 *Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$. On pose* $\mathfrak{M}_{\mathfrak{p},V}^{\infty-\text{plat}} = \bigcap_{\vec{v} \in V} \mathfrak{M}_{\mathfrak{p},\vec{v}}^{\infty-\text{plat}}$.

On a la

Proposition 4.34 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{p},\vec{v}}^{\infty-\text{plat}}$ *est un idéal premier de* $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Ainsi que

Fait 4.35 $\mathfrak{M}_{x,V}^{\infty-\text{plat}} = \mathfrak{M}_{\mathfrak{M}_x,V}^{\infty-\text{plat}}$.

Fait 4.36 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{M}_{x,\vec{v}}^{\infty-\text{plat}},\vec{v}}^{\infty-\text{plat}} = \mathfrak{M}_{x,\vec{v}}^{\infty-\text{plat}}$.