Lien entre les dérivations ∂ et δ

Colas Bardavid

20 octobre 2008

La motivation de départ de ce texte est d'étudier le lien entre les deux dérivations ∂ et δ de $k(X)$, définies par :
a) ∂ : $\partial X^n = nX^{n-1}$;
b) δ : $\delta P = X\partial P$.

On peut néanmoins se placer dans un cadre plus général, ce qu'on fera, en considérant un corps différentiel (k, ∂) de caractéristique nulle contenant un élément x tel que $\partial x = 1$. On peut alors vérifier que l'opérateur δ défini par $\delta f = x\partial f$ est une dérivation.

En effet, on a $\delta(f+g) = x\partial f + x\partial g = \delta f + \delta g$. Par ailleurs, $\delta(fg) = x(f\partial g + g\partial f) = f\delta g + g\delta f$. On remarque même que pour tout élément y non-nul de k, l'opérateur $y\partial$ est une dérivation.

L'avantage de la dérivation δ sur ∂ est que : $\delta x^n = nx^{n-1}\delta x = nx^n$.

1 Premier lien entre $t^m\partial^m$ et δ

Proposition 1 $\forall m \geq 1, \qquad x^m\partial^m = \delta(\delta-1)\cdots(\delta-m+1)$

Pour démontrer cette proposition, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 2 $\forall n \geq 0, \qquad x^n\partial^n x\partial = x^{n+1}\partial^{n+1} + nx^n\partial^n$

Démonstration : On démontre ce lemme par récurrence.
Pour $n = 0$, c'est évident.
Supposons que la propriété est vraie pour n. Alors,

$$\begin{aligned} x^{n+1}\partial^{n+1}x\partial &= xx^n\partial^n\partial x\partial \\ &= x(x^n\partial^n)(x\partial+1)\partial \\ &= x(x^n\partial^n x\partial)\partial + x^{n+1}\partial^{n+1} \\ &= x(x^{n+1}\partial^{n+1} + nx^n\partial^n)\partial + x^{n+1}\partial^{n+1} \\ &= x^{n+2}\partial^{n+2} + (n+1)x^{n+1}\partial^{n+1} \end{aligned}$$

■

Démonstration : (de la proposition)
Cette proposition se démontre aussi par récurrence.
Pour $m = 1$, c'est évident.

Supposons la propriété vraie pour m. Alors,

$$\begin{aligned}
x^{m+1}\delta^{m+1} &= x^m\delta^m z\delta - mx^m\delta^m \qquad \text{d'après le lemme 2}\\
&= \delta(\delta-1)\cdots(\delta-m+1)\delta - m\delta(\delta-1)\cdots(\delta-m+1)\\
&= \delta(\delta-1)\cdots(\delta-m+1)(\delta-m)
\end{aligned}$$

■

2 Expression de δ^n en fonction des $x^i\partial^i$

A priori, on ne se sait pas grand chose de cette expression δ^n. Cependant, grâce à la proposition 1, on sait qu'on peut écrire :

$$\delta^n = x^n\partial^n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i(n)x^i\partial^i.$$

On va trouver des relations de récurrence que vérifient les suites a_i et les résoudre.

2.1 Les relations de récurrence entres les $a_i(n)$

2.1.1 Un calcul

Ces relations se déduisent du calcul suivant :

$$\begin{aligned}
\delta^{n+1} &= \left(x^n\partial^n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i(n)x^i\partial^i\right)x\partial\\
&= x^n\partial^n x\partial + \sum_{i=1}^{n-1} a_i(n)x^i\partial^i x\partial\\
&= x^{n+1}\partial^{n+1} + nx^n\partial^n +\\
&\qquad \sum_{i=1}^{n-1} a_i(n)x^{i+1}\partial^{i+1} + \sum_{i=1}^{n-1} ia_i(n)x^i\partial^i \qquad \text{d'après le lemme 2}\\
&= x^{n+1}\partial^{n+1} + (n + a_{n-1}(n))x^n\partial^n + \sum_{i=2}^{n-1}(a_{i-1}(n) + ia_i(n))x^i\partial^i + a_1(n)x\partial.
\end{aligned}$$

2.1.2 Relations de récurrence

On en déduit les relations :

$$a_n(n+1) = n + a_{n-1}(n) \qquad n \geq 2 \tag{1}$$
$$a_i(n+1) = a_{i-1}(n) + ia_i(n) \qquad n-1 \geq i \geq 2 \tag{2}$$
$$a_1(n+1) = a_1(n). \tag{3}$$

Par ailleurs, le fait que $\delta = x\partial$ nous donne

$$a_1(1) = 1. \tag{4}$$

Enfin, si on prend la convention

$$a_n(n) = 1 \qquad n \geq 1 \tag{5}$$

les équations (1) et (2) peuvent être exprimées par

$$a_i(n+1) = a_{i-1}(n) + ia_i(n) \qquad n \geq i \geq 2. \tag{6}$$

2.2 Calcul de $a_1(n)$

On déduit immédiatement de (3) et (4) que

Proposition 3 $\forall n \geq 1, \qquad a_1(n) = 1$

2.3 Calcul de $a_2(n)$

Connaissant maintenant $a_1(n)$, l'équation récurrente pour $a_2(n)$ s'écrit alors $a_2(n+1) = 1 + 2a_2(n)$, c'est-à-dire $(a_2(n+1)+1) = 2\,(a_2(n)+1)$. Ainsi, la suite $a_2(n)+1$ est une suite géométrique de raison 2, dont le terme général est :

$$a_2(n) + 1 = 2^{n-2}(a_2(2)+1) \qquad n \geq 2.$$

Si on résume :

Proposition 4 $\forall n \geq 2, \qquad a_2(n) = 2^{n-1} - 1$

2.4 Calcul de $a_3(n)$

En injectant la valeur $a_2(n) = 2^{n-1} - 1$, l'équation récurrente pour $a_3(n)$ s'écrit donc

$$a_3(n+1) = (2^{n-1} - 1) + 3a_3(n) \qquad n \geq 3,$$

c'est-à-dire :

$$\frac{a_3(n+1)}{3^{n+1}} = \frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{a_3(n)}{3^n} \qquad n \geq 3$$

On voit alors que $a_3(n)$ sera de la forme $a_3(n) = A3^n + B2^n + C$, pour $n \geq 3$. Plus précisément, après calcul, on trouve :

Proposition 5 $\forall n \geq 3, \qquad a_3(n) = \frac{1}{6}3^n - \frac{1}{2}2^n + \frac{1}{2}$

2.5 Forme des $a_i(n)$

Par extension, on pourrait montrer par induction que les $a_i(n)$ sont de la forme

$$a_i(n) = \sum_{j=1}^{i} C_j(i) j^n \qquad n \geq i. \tag{7}$$

2.6 Relation de récurrence pour les $C_j(i)$

2.6.1 Un calcul

On a, si $n \geq i \geq 2$, $a_i(n+1) = a_{i-1}(n) + ia_i(n)$, ce qu'on peut réécrire

$$\frac{a_i(n+1)}{i^{n+1}} = \frac{a_{i-1}(n)}{i^{n+1}} + \frac{a_i(n)}{i^n}.$$

Notons alors $v_n := \frac{a_i(n)}{i^n}$ et injectons (7) pour obtenir

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{\sum_{j=1}^{i-1} C_j(i-1) j^n}{i^{n+1}} \\ &= \sum_{j=1}^{i-1} \frac{C_j(i-1)}{i} \left(\frac{j}{i}\right)^n \end{aligned}$$

Si on décide de noter $A_j = \frac{C_j(i-1)}{i}$ et comme $v_i = \frac{1}{i^i}$, on en déduit donc :

$$\begin{aligned} v_n &= \sum_{k=i}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) + \frac{1}{i^i} \\ &= \sum_{k=i}^{n-1} \sum_{j=1}^{i-1} A_j \left(\frac{j}{i}\right)^k + \frac{1}{i^i} \\ &= \sum_{j=1}^{i-1} A_j \sum_{k=i}^{n-1} \left(\frac{j}{i}\right)^k + \frac{1}{i^i} \\ &= \sum_{j=1}^{i-1} A_j \left(\frac{j}{i}\right)^i \sum_{k=0}^{n-i-1} \left(\frac{j}{i}\right)^k + \frac{1}{i^i} \\ &= \sum_{j=1}^{i-1} A_j \left(\frac{j}{i}\right)^i \frac{\left(\frac{j}{i}\right)^{n-i} - 1}{\frac{j}{i} - 1} + \frac{1}{i^i} \\ &= \sum_{j=1}^{i-1} \frac{A_j \left(\frac{j}{i}\right)^n}{\frac{j}{i} - 1} + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{A_j \left(\frac{j}{i}\right)^i}{1 - \frac{j}{i}} + \frac{1}{i^i} \end{aligned}$$

Et, finalement :

$$\begin{aligned} a_i(n) &= i^n v_n \\ &= \sum_{j=1}^{i-1} \frac{C_j(i-1)}{(-1)(i-j)} j^n + \left(\sum_{j=1}^{i-1} \frac{C_j(i-1) \left(\frac{j}{i}\right)^i}{(i-j)} + \frac{1}{i^i} \right) i^n \\ &= \sum_{j=1}^{i} C_j(i) j^n \end{aligned}$$

2.6.2 Relations de récurrence entre les $C_j(i)$

On en déduit donc les relations :

$$C_j(i) = \frac{-1}{i-j} C_j(i-1) \qquad j \leq i-1 \text{ et } i \geq 2 \tag{8}$$

$$C_i(i) = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{C_j(i-1) \left(\frac{j}{i}\right)^i}{(i-j)} + \frac{1}{i^i} \qquad i \geq 2 \tag{9}$$

2.7 Calcul de $C_j(i)$ en fonction de $C_i(i)$

À partir de l'équation (8), on calcule facilement :

Proposition 6 $C_j(i) = \frac{(-1)^{i-j}}{(i-j)!} C_j(j) \qquad i \geq j \geq 1$

Démonstration : On procède par récurrence sur $i \geq j$.

Pour $i = j$, l'équation est triviale.

Supposons qu'elle soit vraie pour $i - 1 \geq j$. Alors, grâce à l'équation (8), on a

$$\begin{aligned} C_j(i) &= \frac{-1}{i-j} C_j(i-1) \\ &= \frac{-1}{i-j} \frac{(-1)^{i-1-j}}{(i-j-1)!} C_j(j) \\ &= \frac{(-1)^{i-j}}{(i-j)!} C_j(j) \end{aligned}$$

■

2.8 Expérimentation numérique pour les $C_i(i)$

On peut reporter cette nouvelle expression, pour obtenir une relation de récurrence plus simple pour les $C_i(i)$. On obtient :

$$\begin{aligned} C_i(i) &= \sum_{j=1}^{i-1} \frac{C_j(i-1)\left(\frac{j}{i}\right)^i}{(i-j)} + \frac{1}{i^i} \\ &= \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\frac{(-1)^{i-j-1}}{(i-j-1)!} C_j(j)\left(\frac{j}{i}\right)^i}{(i-j)} + \frac{1}{i^i} \\ &= \sum_{j=1}^{i-1} \frac{(-1)^{i-j-1}}{(i-j)!} \left(\frac{j}{i}\right)^i C_j(j) + \frac{1}{i^i} \end{aligned}$$

À partir de là, on est un peu dans l'embarras pour résoudre cette nouvelle suite récurrente. On fait alors quelques expérimentations numériques, pour voir, et on trouve :

$$C_1(1) = 1, \quad C_2(2) = \frac{1}{2!}, \quad C_3(3) = \frac{1}{3!} \quad \text{et} \quad C_4(4) = \frac{1}{4!}.$$

On conjecture donc qu'on a $C_i(i) = \frac{1}{i!}$. Pour le démontrer, il suffit de faire une récurrence, mais on doit savoir avant que

$$\sum_{j=1}^{i-1} \frac{(-1)^{i-j-1}}{j!(i-j)!} \left(\frac{j}{i}\right)^i + \frac{1}{i^i} \quad =_? \quad \frac{1}{i!} \qquad i \geq 2, \tag{10}$$

ce qui n'est pas gagné et qui nous amène à faire de nouveaux calculs.

2.9 Calcul d'une somme binomiale

2.9.1 Exposition du nouveau problème

Pour démontrer l'égalité qui nous intéresse, on doit savoir calculer

$$\sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} j^i (-1)^j.$$

On introduit, plus généralement, les sommes

$$X(i,p) = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} j^p (-1)^j.$$

Notre but est ainsi de calculer $X(i,i)$ pour tout i.

2.9.2 Premières identités

On peut déjà écrire les identités suivantes (on prend la convention $0^0 = 1$) :

$$\begin{aligned} X(i,0) &= 0 \quad i \geq 1 \quad \text{car c'est le développement de } (1-1)^i && (11) \\ X(0,p) &= 1 && (12) \\ X(1,p) &= -1 \quad p \geq 1 && (13) \end{aligned}$$

2.9.3 Relation de récurrence entre les $X(i,j)$

Si i et p sont plus grands que 1, on peut faire le calcul :

$$\begin{aligned} X(i,p) &= \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} j^p (-1)^j = \sum_{j=1}^{i} \binom{i}{j} j^p (-1)^j \\ &= \sum_{j=1}^{i} j \binom{i}{j} j^{p-1} (-1)^j \end{aligned}$$

Or, $j\binom{i}{j} = i\binom{i-1}{j-1}$ si $j \geq 1$. Ainsi,

$$X(i,p) = \sum_{j=1}^{i} i \binom{i-1}{j-1} j^{p-1} (-1)^j$$

Or, si $j \leq i-1$, on a

$$\binom{i-1}{j-1} = \binom{i}{j} - \binom{i-1}{j}.$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} X(i,p) &= \sum_{j=1}^{i-1} i \left(\binom{i}{j} - \binom{i-1}{j} \right) j^{p-1} (-1)^j + (-1)^i i^p \\ &= i \left(\sum_{j=1}^{i-1} \binom{i}{j} j^{p-1} (-1)^j + (-1)^i i^{p-1} \right) - i \sum_{j=1}^{i-1} \binom{i-1}{j} j^{p-1} (-1)^j \\ &= i \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} j^{p-1} (-1)^j - i \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i-1}{j} j^{p-1} (-1)^j \\ &= iX(i,p-1) - iX(i-1,p-1). \end{aligned}$$

Si on résume, notre relation de récurrence est :

$$X(i,p) = iX(i,p-1) - iX(i-1,p-1) \qquad i \geq 1 \text{ et } p \geq 2 \tag{14}$$

2.9.4 Nullité des $X(i,p)$ si $p < n$

Grâce à (14), on montre :

Lemme 7 $\quad \forall i \geq 1, \quad \forall\, 0 \leq p < i, \qquad X(i,p) = 0$

Démonstration : On fait une double récurrence. D'abord, on procède par récurrence sur i.

Lorsque $i = 1$, c'est l'identité (11).

Supposons que le lemme soit vérifié jusqu'à l'ordre $i \geq 1$. Démontrons par récurrence sur $0 \leq p < i+1$ le lemme à l'ordre $i+1$. Pour $p = 0$, il s'agit encore de (11). Supposons que l'on sache que $X(i+1,j) = 0$ pour tous les $j \leq p$, avec p fixé et $p < i$. Alors, on a, d'après (14), $X(i+1,p+1) = (i+1)X(i+1,p) - (i+1)X(i,p)$. Mais, d'après les hypothèses de récurrence faites, on a que $X(i+1,p) = X(i,p) = 0$ et donc $X(i+1,p+1) = 0$, ce qui achève la preuve.■

2.9.5 Nouvelle relation de récurrence sur $X(i, i)$

Tenant compte du lemme 7 et de l'identité (14), on obtient

$$X(i,i) = -iX(i-1,i-1) \qquad i \geq 2 \tag{15}$$

Cette relation se résout facilement en

Proposition 8 $\forall i \geq 1, \quad X(i,i) = (-1)^i i!$

2.10 Démonstration de l'égalité (10)

On calcule :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{i-1} \frac{(-1)^{i-j-1}}{j!(i-j)!}\left(\frac{j}{i}\right)^i + \frac{1}{i^i} &= \frac{1}{i^i}\left(\frac{(-1)^{i-1}}{i!}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{i!}{j!(i-j)!}(-1)^j j^i + 1\right) \\
&= \frac{1}{i^i}\left(\frac{(-1)^{i-1}}{i!}\left(\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}(-1)^j j^i - (-1)^i i^i\right) + 1\right) \\
&= \frac{1}{i^i}\left(\frac{(-1)^{i-1}}{i!}\left((-1)^i i! - (-1)^i i^i\right) + 1\right) \qquad \text{d'après } (14) \\
&= \frac{1}{i^i}\left(-1 + \frac{i^i}{i!} + 1\right) = \frac{1}{i!}
\end{aligned}$$

Ainsi, les expressions $C_i(i) = \frac{1}{i!}$ sont exactes et on peut dérouler tout le tapis.

2.11 Forme des $\mathbf{C_j(i)}$

On a donc $C_j(i) = \frac{(-1)^{i-j}}{(i-j)!j!} = \frac{(-1)^{i-j}}{i!}\binom{i}{j} \qquad i \geq j \geq 1$

2.12 Conclusion

Si on met bout à bout ce qui précède, on trouve :

Théorème 9

$$\delta^n = x^n\partial^n + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{i}\frac{(-1)^{i-j}}{i!}\binom{i}{j}j^n\right)x^i\partial^i$$

Maintenant qu'on a obtenu cette formule, on pourrait essayer de démontrer le résultat directement mais en fait, ça a l'air beaucoup plus dur que de trouver la formule.

3 Exemples

Voici des calculs explicites faits à l'aide du théorème 3 :

$$
\begin{aligned}
\delta &= x\partial \\
\delta^2 &= x^2\partial^2 + x\partial \\
\delta^3 &= x^3\partial^3 + 3x^2\partial^2 + x\partial \\
\delta^4 &= x^4\partial^4 + 6x^3\partial^3 + 7x^2\partial^2 + x\partial \\
\delta^5 &= x^5\partial^5 + 10x^4\partial^4 + 25x^3\partial^3 + 15x^2\partial^2 + x\partial \\
\delta^6 &= x^6\partial^6 + 15x^5\partial^5 + 65x^4\partial^4 + 90x^3\partial^3 + 31x^2\partial^2 + x\partial \\
\delta^7 &= x^7\partial^7 + 21x^6\partial^6 + 140x^5\partial^5 + 350x^4\partial^4 + 301x^3\partial^3 + 63x^2\partial^2 + x\partial
\end{aligned}
$$