Produit semi-direct

Colas Bardavid
colas.bardavid (a) gmail.com

novembre 2006

---

1 Introduction

(1.1) Automorphismes et automorphismes intérieurs. Soit G un groupe. On dispose naturellement d'un morphisme de G vers son groupe d'automorphismes, morphisme qu'on note Int et qui est :

$$\mathrm{Int} : \begin{array}{l} G \to \mathrm{Aut}\,(G) \\ g \mapsto \mathrm{Int}\,(g) : \begin{array}{l} G \to G \\ x \mapsto gxg^{-1} \end{array} \end{array}.$$

L'image de ce morphisme est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}\,(G)$, qu'on note $\mathrm{Int}\,(G)$ et qui est appelé le groupe des *automorphismes intérieurs* de G.

Soit maintenant G° un sous-groupe *distingué* de G. Cela signifie, par définition, que pour tout $g \in G$, l'automorphisme $\mathrm{Int}\,(g)$ laisse stable le sous-groupe G°. Mieux que cela, la restriction de $\mathrm{Int}\,(g)$ (au but et à la source) est elle-même un automorphisme de G°. On dispose ainsi d'une nouvelle flèche :

$$\mathrm{Int}_{G^\circ \lhd G} : G \to \mathrm{Aut}\,(G^\circ).$$

D'une certaine manière, on a une factorisation de la flèche $G \to \mathrm{Aut}\,(G)$; plus précisément, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Aut}\,(G^\circ) \arrow[dr, "(i_{G^\circ \subset G})\circ"] & \\ G \arrow[ur, "\mathrm{Int}_{G^\circ \lhd G}"] \arrow[dr, "\mathrm{Int}"'] & & \mathrm{Hom}_{(Grp)}(G^\circ, G) \\ & \mathrm{Aut}\,(G) \arrow[ur, "\circ(i_{G^\circ \subset G})"'] & \end{tikzcd}$$

Généralement, les automorphismes $\text{Int}_{G^\circ \lhd G}(g) : G^\circ \to G^\circ$ pour $g \in G$ ne sont pas des automorphismes *intérieurs* de G°. Ainsi, on se trouve dans une situation « dialectique » où l'automorphisme $\text{Int}\,(g)$ est *intérieur* (c'est-à-dire d'un type particulier) alors que sa restriction $\text{Int}_{G^\circ \lhd G}(g)$ n'est *pas* intérieure mais est un automorphisme *quelconque* de G°.

(1.2) Philosophie du produit semi-direct. On part de deux groupes abstraits et totalement étrangers l'un à l'autre, groupes qu'on note G° et H. On se donne aussi une flèche $\alpha : H \to \text{Aut}\,(G^\circ)$. À partir de là, on va construire un « sur-groupe » G, qui « contiendra » G° et H, mieux, pour lequel on aura « $G^\circ \lhd G$ » et qui vérifiera la propriété suivante :

> *les automorphismes intérieurs Int (h) de G, provenant d'éléments de H, et restreints au sous-groupe distingué G° de G, c'est-à-dire les automorphismes Int$_{G^\circ \lhd G}(h)$, sont donnés par la flèche α.*

Plus précisément, si on identifie H et G° à leur image dans G, on dispose de deux flèches. Pour la première, on part de la flèche $\text{Int}_{G^\circ \lhd G} : G \to \text{Aut}\,(G^\circ)$ et on la restreint à H. La seconde, c'est α.

$$1) \qquad H \xrightarrow{(\text{Int}_{G^\circ \lhd G})|_H} \text{Aut}\,(G^\circ)$$

$$2) \qquad H \xrightarrow{\alpha} \text{Aut}\,(G^\circ)$$

Ce qu'on veut, c'est que ces deux flèches coïncident.

Plus formellement, on va construire un groupe G tel que :
- on dispose d'un morphisme injectif $i_H : H \hookrightarrow G$;
- on dispose aussi de $i_{G^\circ} : G^\circ \hookrightarrow G$;
- par ailleurs, on a, pour ce morphisme, $i_{G^\circ}\,(G^\circ) \lhd G$;
- enfin, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & i_H\,(H) \arrow[r, hook, "i_H"] & G \arrow[rr, "\text{Int}_{i_{G^\circ}(G^\circ) \lhd G}"] & & \text{Aut}\,(i_{G^\circ}\,(G^\circ)) \\
H \arrow[ur, "\sim"] \arrow[rrr, "\alpha"'] & & & \text{Aut}\,(G^\circ) \arrow[ur, "\sim"] &
\end{tikzcd}$$

Évidemment, on souhaitera faire cela de façon minimale, c'est-à-dire qu'on cherche un objet qui a ces propriétés et qui est universel pour elles.

2 Définition et premières considérations

Ainsi, on part de G° et H deux groupes et d'un morphisme $\alpha : H \to \mathrm{Aut}(G^\circ)$. On construit avec ces données un groupe $G^\circ \rtimes_\alpha H$, qu'on note en fait plus souvent $G^\circ \rtimes H$, et qui s'appelle le *produit semi-direct*.

(2.1) À propos du choix du symbole. Un problème récurrent pour qui utilise le produit semi-direct est qu'on a deux choix d'orientation. Considérant l'écriture

$$G \rtimes H$$

on peut en effet se demander pourquoi ne pas plutôt mettre H à gauche et G à droite. Le deuxième problème d'orientation provient du fait qu'on peut choisir « $\rtimes$ » ou « $\ltimes$ » comme symbole.

Je vais expliquer pourquoi en fait il n'y a pas d'ambigüité dans les notations.

D'abord, comme les symboles

$$\rtimes \qquad \text{et} \qquad \circlearrowright$$

se ressemblent et qu'on a justement une action $\left(G^\circ \overset{\alpha}{\circlearrowright} H \right)$ de H sur G°, il est entendu que la boucle du symbole $\rtimes$ devra être du côté de H.

Mais aussi, le symbole $\rtimes$ ressemble au symbole $\lhd$ utilisé pour signifié qu'un groupe est distingué dans un autre : $G^\circ \lhd G$.

Comme le groupe G° est distingué dans le produit semi-direct, on a :

$$G^\circ \lhd G^\circ \rtimes H.$$

Pour toutes ces raisons, quand on lit $G \rtimes H$ on sait qui agit sur qui et qui est distingué dans quoi. Plus de désorientation ni pour le lecteur ni pour celui qui écrit.

(2.2) Définition. Le groupe $G^\circ \rtimes H$ est l'ensemble $G^\circ \times H$ muni de la loi :

$$(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1 \cdot (\alpha(h_1) \bullet g_2), h_1 h_2).$$

Muni de cette loi, l'ensemble $G^\circ \rtimes H$ est un groupe.

(2.3) Définition (bis) ou la vraie définition. La définition donnée au-dessus est la bonne définition formelle… mais est-ce qu'on y comprend quelque chose ? Est-ce qu'on sait pourquoi on a choisi cette loi, au regard de notre objectif initial, celui de faire d'automorphismes quelconques des automorphismes « induit par l'intérieur » ?

Pour mieux comprendre les choses, on va décrire autrement le groupe $G^\circ \rtimes H$.

C'est l'ensemble des « écritures » gh pour $g \in G^\circ$ et $h \in H$. Comment compose-t-on deux telles écritures ? On écrit :

$$\begin{aligned}(g_1h_1)(g_2h_2) &= g_1h_1g_2\left({h_1}^{-1}h_1\right)h_2\\ &= g_1\left(h_1g_2{h_1}^{-1}\right)h_1h_2\end{aligned}$$

Comme le groupe G° est destiné à être destiné distingué, l'élément $h_1g_2{h_1}^{-1}$ vit bien dans G°. Cependant, comme les groupes G° et H sont étrangers, il faut donner un sens à $h_1g_2{h_1}^{-1}$, ce qu'on fait en remplaçant cette écriture par $\alpha(h_1)\bullet g_2$. Finalement, on retrouve la définition initiale.

(2.4) Propriétés. On dispose de deux morphismes injectifs :

$$i_{G^\circ} : \begin{array}{c} G^\circ \to G^\circ \rtimes H \\ g \mapsto (g, 1_H) \end{array}$$

$$i_H : \begin{array}{c} H \to G^\circ \rtimes H \\ h \mapsto (1_G, h) \end{array} \quad .$$

(2.4.1) À l'aide de ces inclusions i_G et i_H, on peut écrire tout élément de $G^\circ \rtimes H$. Soit

$(g, h) \in G^\circ \rtimes H$. Alors on a

$$(g, h) = i_{G^\circ}(g)i_H(h).$$

Grâce à cette propriété, lorsqu'on travaille dans un produit semi-direct, on peut *vraiment* écrire les éléments gh au lieu de (g, h).

(2.4.2) On vérifie trivialement qu'on a $i_H(H) \cap i_{G^\circ}(G^\circ) = \{1\}$.

(2.4.3) Enfin, on peut vérifier que G° (c'est-à-dire son image par i_{G°) est distingué dans le nouveau groupe. *(démonstration laissée au lecteur)*

(2.5) Automorphismes intérieurs. Pour vérifier qu'on a bien atteint notre but initial qu'était le réinvestissement du morphisme α par le point de vue des automorphismes intérieurs restrients, prenons $g \in G^\circ$ et $h \in H$. On a alors :

$$hgh^{-1} \overset{\text{ie}}{=} i_H(h)i_{G^\circ}(g)i_H(h)^{-1} = (\alpha(h) \bullet g, 1).$$

Cela signifie tout simplement que les diagrammes de l'introduction **(??.??)** commutent.

3 Produit semi-direct et suites exactes

Dans cette partie, on établit la proprosition suivante :

(3.1) Proposition. *Soit* $1 \to G^\circ \to G \to H \to 1$. *Alors* G *est isomorphe au produit semi-direct* $G^\circ \rtimes_\alpha H$ *pour l'action* α *de « conjuguaison restreinte » si, et seulement si, la suite exacte est scindée.*

(3.2) Cas direct. Comme on vient de le voir, étant donnés G°, H deux groupes et $\alpha : H \to \mathrm{Aut}\,(G^\circ)$ une flèche, on construit un groupe $G = G^\circ \rtimes H$ dans lequel G° est distingué. On peut donc considérer le quotient G/G° (en identifiant G° et son image dans G. Si on décide de considérer les classes à gauche, alors on a :

$$G^\circ \cdot (g, h) = G^\circ \cdot (1, h)$$

et un système de représentants des classes à gauche est donné par les $h \in H$.

En particulier, si on considère la suite exacte :

$$1 \longrightarrow G^\circ \xrightarrow{i_{G^\circ}} G \xrightarrow{p} G/G^\circ \longrightarrow 1$$

on a une flèche $s : G/G^\circ \to G$ telle que $p \circ s = \mathrm{Id}_{G/G^\circ}$. On notera alors :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & G^\circ \arrow[r, "i_{G^\circ}"] & G \arrow[r, dashed, shift right, "p"'] & G/G^\circ \arrow[l, shift right, "s"'] \arrow[r] & 1 \end{tikzcd} ;$$

la flèche p est dessinée en pointillés pour souligner le fait qu'elle est composée en second. On dit qu'une telle suite exacte est *scindée*.

Moralement, une suite exacte $1 \to G^\circ \to G \to G/G^\circ \to 1$ est scindée si on peut trouver dans chaque classe à gauche $C = G^\circ x$ un représentant h_C tel que l'ensemble $H = \{h_C\}_{C \in G/G^\circ}$ soit un sous-groupe de G.

(3.3) Cas inverse. Inspiré par ce qui précède, on part d'une suite exacte courte scindée :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & G^\circ \arrow[r, "i"] & G \arrow[r, dashed, shift right, "p"'] & H \arrow[l, shift right, "s"'] \arrow[r] & 1 \end{tikzcd} .$$

On va alors montrer que G est isomorphe à un produit semi-direct de G° par H. Dans cette situation, contrairement à ce qui précède, les groupes G° et H ne sont pas « étrangers » l'un à l'autre ; en effet, via i et s, il s'injectent dans G et donc, moralement, vivent dans un même groupe. Ainsi, vu la philosophie du produit semi-direct qu'on a présentée, concernant l'action de H sur G° qui est susceptible de recomposer le groupe G, on n'a pas trop le choix. H agit par conjugaison sur G tout entier (via s) et donc agit sur G° par restriction.

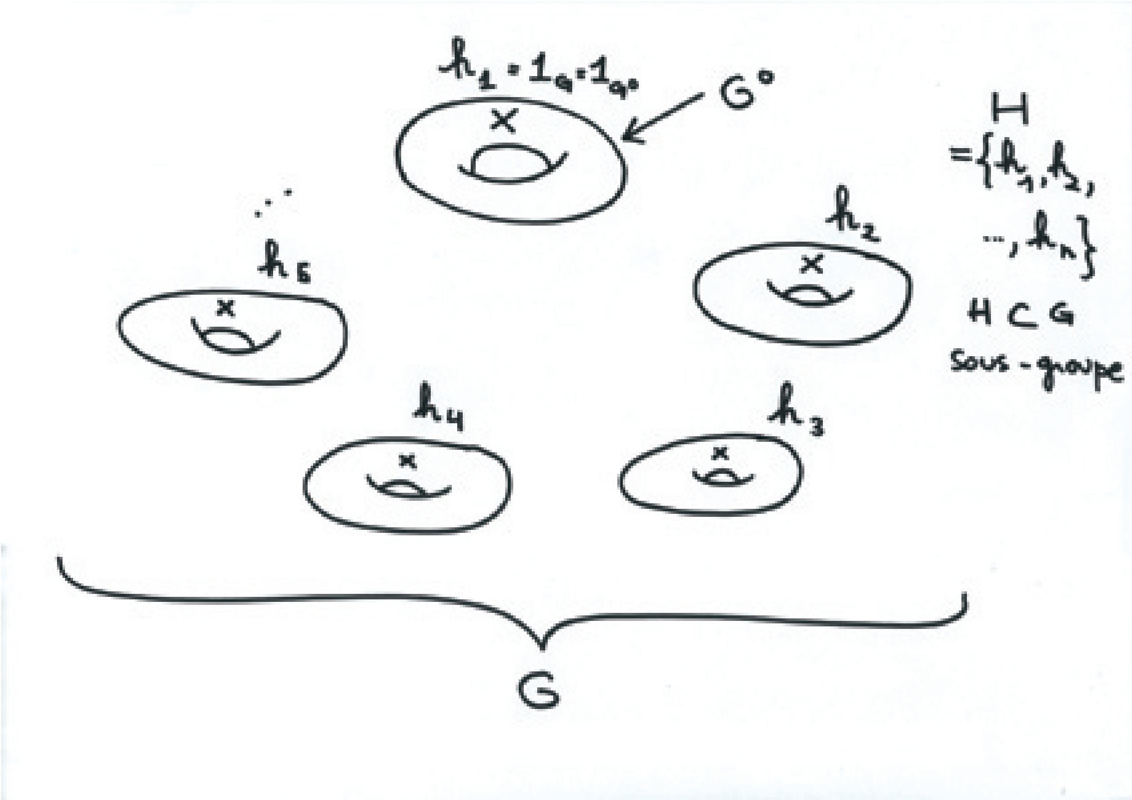

FIG. 1 – Cas typique d'une suite exacte scindée.

Il faut maintenant montrer que G et $G^\circ \rtimes H$ sont isomorphes. On considère le morphisme :

$$f : \begin{array}{l} G^\circ \rtimes H \to G \\ (g,h) \mapsto i(g)\cdot s(h) \end{array} .$$

(3.3.1) C'est bien un morphisme car

$$\begin{aligned}(g_1,h_1)(g_2,h_2) &= (g_1 \cdot \alpha(h_1) \bullet g_2, h_1h_2) \\ &= \left(g_1 i^{-1}\left(s(h_1)i(g_2)s(h_1)^{-1}\right), h_1h_2\right).\end{aligned}$$

Ainsi, alors que d'un côté on a $f\left((g_1,h_1)(g_2,h_2)\right) = i(g_1)s(h_1)i(g_2)s(h_2)$ de l'autre

$$\begin{aligned}f\left((g_1,h_1)(g_2,h_2)\right) &= i\left(g_1 i^{-1}\left(s(h_1)i(g_2)s(h_1)^{-1}\right)\right)\cdot s(h_1)s(h_2) \\ &= i(g_1)s(h_1)i(g_2)s(h_1)^{-1}s(h_1)s(h_2) \\ &= i(g_1)s(h_1)i(g_2)s(h_2).\end{aligned}$$

(3.3.2) Pour l'injectivité, si $f(g,h)=1$, cela signifie que $i(g)s(h)=1$ et donc $s(h) \in \operatorname{Im} i$. Or, comme la suite est exacte, $\operatorname{Im} i = \operatorname{Ker} p$ et donc $p(s(h)) = h = 1$ et donc $g = 1$.

(3.3.3) Enfin, pour la surjectivité, soit $x \in G$. L'idée (comme on le voit sur le dessin), c'est que x peut s'écrire $x = gh$ où h est le représentant de la classe de conjugaison à laquelle appartient x et où $g \in G^\circ$. Ainsi, le choix de h est facile : la classe de x dans G/G°, moralement, est $p(x)$ et le bon représentant de cette classe est $s(p(x))$. On cherche donc un $g \in G^\circ$ tel que $x = g \cdot s(p(x))$. On voit qu'on n'a pas le choix et qu'on est obligé de prendre $g = xs(p(x))^{-1}$. Il suffit donc de vérifier que cet élément $xs(p(x))^{-1}$ s'écrit sous la forme $i(g)$. Or, $\operatorname{Im} i = \operatorname{Ker} s$, donc il suffit de prouver que $p\left(xs(p(x))^{-1}\right) = 1$. C'est-à-dire : a-t-on $p(x) = p(s(p(x)))$? Cette dernière égalité est vraie car $p \circ s = \mathrm{Id}_H$. Donc, f est bien surjectif.

4 Autre caractérisation du produit semi-direct

Soit G un groupe et G° un sous-groupe distingué et H un sous-groupe. On considère l'action de H sur G° donnée par « la conjugaison restreinte ». On se demande dans quel cas G est isomorphe à $G^\circ \rtimes H$.

La réponse n'est pas très compliquée : il faut (et il suffit) que G° et H soient « suffisamment gros » dans G, mais qu'en même temps il n'y ait pas de redondance.

Plus précisément :

(4.1) Proposition. *G est isomorphe à $G^\circ \rtimes H$ si, et seulement si, $G^\circ \cap H = \{1\}$ et $G = G^\circ \cdot H$.*

(La démonstration est laissée en exercice.)

5 Propriété universelle du produit semi-direct

Enfin, pour terminer ce petit texte sur les produits semi-directs, comme on a signalé en introduction que le produit semi-direct vérifiait une propriété universelle, la voici !

Avant, un petite définition :

(5.2) Définition. Soit G, G' deux groupes et $f : G \to G'$ un morphisme. On dit que la flèche f est *distinguée* si $\operatorname{Im} f$ est un sous-groupe distingué de G'.

Soit G° et H deux groupes. Soit $\alpha : H \to \operatorname{Aut}(G^\circ)$.

Imaginons qu'on ait une suite exacte $1 \longrightarrow G^\circ \xrightarrow{i} G$ où i est distinguée. Alors, on a vu en introduction qu'on pouvait construire une flèche $G \to \operatorname{Aut}(G^\circ)$ dite des « automorphismes intérieurs restreints ».

Le produit semi-direct $G^\circ \rtimes H$ vérifie la propriété universelle suivante : Pour tout groupe G muni de deux flèches

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r] & G \\ & G^\circ \arrow[u, "i"] \\ & 1 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

avec i distinguée et telle que le digramme

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "\alpha"] & G \arrow[r, "\mathrm{Int}_{G^\circ}"'] & \mathrm{Aut}\left(G^\circ\right) \\ & G^\circ \arrow[u, "i"] & \\ & 1 \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

commute, il existe une unique flèche $f : G^\circ \rtimes H \to G$ qui fasse commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} & & G \, . \\ H \arrow[r, "i_H"] \arrow[urr, bend left] & G^\circ \rtimes H \arrow[ur, "f"] & \\ & G^\circ \arrow[u, "i_{G^\circ}"] \arrow[uur, bend right] & \end{tikzcd}$$