Torseurs

Colas Bardavid
colas.bardavid (a) gmail.com

avril 2009

Table des matières

(1) Introduction, cas des groupes abstraits.

Le but de ce texte est de familiariser le lecteur avec la notion de *torseur* : contrairement à ce qu'on pourrait être tenté de penser dans un premier temps :

– les torseurs ne sont pas des instruments de torture du Moyen-Âge ou d'un autre temps
– les torseurs n'ont rien à voir les sciences industrielles et la mécanique du point.

En fait, les torseurs sont des objets très simples ; ils ressemblent beaucoup aux espaces affines (ceux de l'algèbre linéaire, pas ceux de la géométrie algébrique !) ; ils sont peu comme un groupe G à qui on aurait ôté son identité.

Cas très facile : les torseurs sous l'action d'un groupe abstrait. Si G est un groupe (sans aucune autre structure, ni topologique, ni géométrico-algébrique, ni quoi que ce soit : ce que nous appellerons un *groupe abstrait*), alors un torseur sous l'action de G est un ensemble X muni d'une action de G et isomorphe à G pour cette action :

Définition. *Soit G un groupe (abstrait) et X un ensemble* non-vide *muni d'une action de G. On dit que X est un* torseur (sous l'action de G) *si G agit librement et transitivement sur X autrement dit si :*

$$\forall (x,y) \in X^2 \qquad \exists ! g \in G \qquad g \cdot x = y.$$

On peut alors réaliser un isomorphisme entre X et G en choisissant $x_0 \in X$ et en considérant le morphisme :

$$f_{x_0} : \begin{array}{rcl} G & \longrightarrow & X \\ g & \longmapsto & g \cdot x_0 \end{array} .$$

Notons qu'il est important de demander que X soit non-vide : en effet, si $X = \varnothing$, l'action de G sur X est toujours libre et transitive. Notons aussi que demander que l'action de G sur X soit libre et transitive est équivalent à demander que l'application

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \times X \\ (g, x) &\longmapsto (g \cdot x, x) \end{aligned}$$

soit bijective. Si X vérifie les hypothèses de la définition **(1)** sans être nécessairement non-vide, on dit que X est un *espace principal homogène (pour l'action de G)*. Moralement, un torseur est un espace où l'on peut faire « la soustraction » de deux éléments, auquel cas on obtient un élément de G, mais pas « l'addition ».

Exemples physiques.

- Si on ne tient pas compte des théories relativistes, alors, l'espace physique est un torseur sous l'action (de translation) de $(\mathbf{R}^3, +)$. Par exemple, cela a un sens de soustraire la position du sommet de l'Himalaya à la position du lecteur de ces lignes : c'est le vecteur de $\mathbf{R}^3$ qui relie le lecteur au sommet tibétain. En revanche, si on ne fixe pas d'origine, cela n'a pas de sens de vouloir additionner ces positions.
- L'ensemble des températures est un $(\mathbf{R}, +)$-torseur (en imaginant qu'on puisse avoir des températures aussi basses que possible). On peut définir l'écart entre deux températures mais pas la somme.

L'exemple (fondamental) des espaces affines. Si on ouvre un bouquin de premier cycle, on peut trouver la définition suivante d'un $\mathbf{R}$-espace affine de dimension n : c'est un ensemble $\mathcal{E}$ (l'ensemble des points) muni d'une action de $\mathbf{R}^n$ sur $\mathcal{E}$ qui vérifie :

- $\mathcal{E}$ est non-vide.
- $\mathbf{R}^n$ agit sur $\mathcal{E}$. Cette action est notée additivement : si $P \in \mathcal{E}$ et $\vec{v} \in \mathbf{R}^n$, on note $P + \vec{v}$.
- pour tous points $A, B \in \mathcal{E}$, il existe un unique $\vec{v} \in \mathbf{R}^n$ tel que $A + \vec{v} = B$. Cet unique vecteur est noté $\overrightarrow{AB}$.

On voit donc bien qu'une autre définition possible pour un espace affine est de dire que c'est un $\mathbf{R}^n$-torseur.

---

(2) Torseurs dans une catégorie quelconque.

On peut généraliser ce qu'on vient de voir.
Dans toute la suite, $\mathcal{C}$ désigne une catégorie.

Ensembles enrichis. Avant d'entrer dans le vif du sujet, il nous faut expliquer au lecteur qui ne le connaît pas le *yoga* de Yoneda. Il s'agit d'une « philosophie » (d'un *yoga* comme dirait Alexandre Grothendieck) – ou d'un foncteur pleinement fidèle, au choix – qui offre un nouveau point de vue sur toute une classe d'objets, nouveau point de vue qui est effectif, dans le sens où il produit des idées et des résultats. Pour quelqu'un qui est familier de la géométrie algébrique, ce yoga est facile à expliquer[1]. Pour les autres, il faut introduire cette notion de « point d'un objet à valeurs dans un autre ».

C'est dans ce but qu'on va introduire des objets un peu bizarres, les *ensembles enrichis*. Comme vous le verrez par la suite, on aurait pu définir, non pas les ensembles enrichis, mais les *espaces topologiques enrichis* (de multiples façons d'ailleurs) ; néanmoins, cela aurait ajouté de nombreuses difficultés techniques.

Moralement, un *ensemble enrichi* est un ensemble composé de plusieurs types de points : les points de type T_0, les points de type T_1, les points de type T_2, etc. Tous ces points ont la même propriété (intuitive) d'être de taille infiniment petite. Néanmoins, dans cet univers de l'infiniment petit, les points T_0 sont les plus gros, ensuite viennent les points de type T_1, etc. Naturellement, les points T_0 ne peuvent pas s'envoyer dans les points T_1 et, plus généralement, les points T_i ne peuvent s'envoyer que les points T_j plus gros, *ie* tels que $j \leqslant i$.

Formellement :

Définition. *Un* ensemble enrichi $\underline{E}$ *est la donnée d'une famille* $\underline{E} = (E_0, E_1, \ldots, E_n, \ldots)$ *d'ensembles. Les éléments de* E_i *sont appelés les points de type* T_i *de* $\underline{E}$*. Étant donnés deux ensembles enrichis* $\underline{E}$ *et* $\underline{F}$*, un morphisme entre* $\underline{E}$ *et* $\underline{F}$ *est une famille de flèches*

$$\varphi_i : E_i \to \bigcup_{j \leqslant i} F_j.$$

La catégorie obtenue est notée $\underline{\mathbf{Ens}}$.

Points élémentaires. Si $i \in \mathbf{N}$ est fixé, on peut considérer l'ensemble enrichi qu'est le point de type T_i ; on le note encore T_i. Formellement, il s'agit de :

$$T_i = \left(\varnothing, \ldots, \varnothing, \underbrace{\{*\}}_{i-\text{ième rang}}, \varnothing, \ldots \right).$$

C'est à l'aide de ces points T_i élémentaires qu'on va pouvoir « reconstituer » nos ensembles enrichis. En effet, dans le cadre des ensembles classiques, on peut « reconstituer » un ensemble X à partir des morphismes du point dans X. Plus précisément, si on note $P = \{*\}$ un ensemble de cardinal 1, on a l'isomorphisme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ens}}(P, X) & \xrightarrow{\sim} & X \\ f & \longmapsto & f(*) \end{array}.$$

[1] Grâce à la notion de point d'un schéma X à valeurs dans un anneau.

Dans le cadre des ensembles enrichis, il faut regarder plusieurs types de points pour collecter la totalité des informations sur $\underline{E}$. Plus précisément, on a l'isomorphisme[2] suivant :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{\underline{\mathbf{Ens}}}(T_i, \underline{E}) \backslash \mathrm{Hom}_{\underline{\mathbf{Ens}}}(T_{i-1}, \underline{E}) & \xrightarrow{\sim} & E_i \quad , \\ f & \longmapsto & f(T_i) \end{array}$$

qui nous dit simplement que les points de $\underline{E}$ de type T_i sont ceux sur lesquels T_i peut s'envoyer mais pas T_{i-1}.

Notion de K-points. C'est ce genre de considérations qui amènent à considérer la définition suivante :

Définition *Si $\mathcal{C}$ est une catégorie, X un objet de $\mathcal{C}$ qu'on veut étudier et K un objet de $\mathcal{C}$ qu'on considère comme un étalon, on appelle* K-point de X *toute flèche du type*

$$\begin{array}{c} K \\ \downarrow \\ X \end{array} .$$

On note $X(K) = Hom_{\mathcal{C}}(K, X)$ l'ensemble des K-points de X.

Notons que si on a un morphisme $X \xrightarrow{\varphi} Y$, on en déduit facilement une flèche entre les K-points : $X(K) \xrightarrow{\varphi_K} Y(K)$, de la même façon qu'une flèche entre deux espaces enrichis envoie les points de type T_i dans ceux de type T_j, $j \leqslant i$.

On peut alors associer à X un objet qui synthéthise toutes les informations données par tous les K-points (pour tout « type de point » K) ; c'est le foncteur (contravariant) des points, qu'on note h_X :

$$h_X : \begin{array}{rcl} \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathbf{Ens} \\ K & \longmapsto & X(K) \end{array}$$

On peut montrer (sans difficulté) que si l'on considère le foncteur h_X au lieu de l'objet X, on ne perd aucune information : c'est le lemme de Yoneda (*cf.* par exemple le texte d'Angelo Vistoli dans [FGI+05]), qui dit que le foncteur qui à X associe h_X est pleinement fidèle. On peut alors décier, si on veut regarder des objets généralisant ceux de X, de se placer dans la catégorie $\hat{\mathcal{C}} := \mathrm{Hom}\,(\mathcal{C}^\circ, \mathbf{Ens})$ des foncteurs contravariants de $\mathcal{C}$ dans $\mathbf{Ens}$. L'avantage de $\hat{\mathcal{C}}$ sur $\mathcal{C}$ est qu'on sait y faire beaucoup plus de choses.

Objets en groupe et actions. Par exemple, on peut y définir ce qu'est un objet de $\hat{\mathcal{C}}$ muni d'une structure de groupe : ce sont les foncteurs contravariants de $\mathcal{C}$ dans $\mathbf{Grp}$. On retrouve ainsi les notions de groupe de Lie, de groupe topologique, de groupe algébrique, etc. Si G est un tel *objet en groupes* et $X \in \hat{\mathcal{C}}$, on appelle alors une action à gauche de G sur X toute flèche $G \times X \to X$ telle que, pour tout K, la flèche résultante sur les K-points, $G(K) \times X(K) \to X(K)$ soit une action de groupe.

On dit alors que X est un torseur sous l'action de G si la flèche $G \times X \to X \times X$ est un isomorphisme.

[2] $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathbf{Ens}}}(T_{i-1}, \underline{E})$ est vu comme un sous-ensemble de $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathbf{Ens}}}(T_i, \underline{E})$ via la flèche $T_i \to T_{i-1}$.

(3) Torseurs en topologie.

Catégorie des espaces au-dessus d'un autre. Soit B un espace topologique connexe non-vide. On considère la catégorie $\mathbf{Top}/B$ des espaces topologiques au-dessus de B : un objet est un espace topologique muni d'une flèche vers B, qu'on appelle *morphisme structural*. Intuitivement, un objet $\begin{array}{c}X\\ \downarrow\\ B\end{array}$ est une famille d'espaces topologiques paramétrée par B.

Plus précisement, à $\begin{array}{c}X\\ \downarrow{\scriptstyle p}\\ B\end{array}$ on associe la famille des fibres : $(X_b)_{b\in B}$, avec $X_b = p^{-1}(b)$. Avec ce point de vue, un morphisme dans $\mathbf{Top}/B$

$$\begin{tikzcd} f : X \arrow[rr] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & B & \end{tikzcd}$$

est un morphisme compatible aux fibres : f envoie X_b dans Y_s. En particulier, on pourra parler de la fibre f_b de f, et on vérifie que cette application entre les fibres est bien une application *continue*. On a ainsi un foncteur

$$(-)_{b\in B} : \mathbf{Top}/B \to \mathbf{Top}^B$$

qui associe à X sa famille de fibres. Typiquement, ce morphisme est un « changement de point de vue » qui nous fait voir une banale flèche $X \to B$ comme une famille « topologique » (c'est-à-dire qu'on demande à la famille d'espaces topologiques de varier « topologiquement ») paramétrée par la *base* B. Attention, néanmoins, cette interprétation n'est pas adéquate, autrement dit, le foncteur $(-)_{b\in B}$ *n'est pas* une équivalence de catégories. On peut le voir en considérant les deux espaces au-dessus de B :

$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, "\mathrm{Id}_B"] \\ B \end{tikzcd} \qquad \text{et} \qquad \begin{tikzcd} \coprod_{b\in B}\{b\} \arrow[d] \\ B \end{tikzcd}$$

qui ne sont manifestement pas isomorphes mais qui ont la même image par le foncteur. Cependant, même si $(-)_{b\in B}$ n'est pas une équivalence de catégories, on a la proposition suivante :

Principe. *Un diagramme carré de* $\mathbf{Top}/B$ *commute si, et seulement si, son image dans* $\mathbf{Top}^B$ *commute. Autrement dit :*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Y \arrow[d] \\ Z \arrow[r] & T \end{tikzcd} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall b \in B, \quad \begin{tikzcd} X_b \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Y_b \arrow[d] \\ Z_b \arrow[r] & T_b \end{tikzcd}$$

Démonstration. — Le sens gauche $\Longrightarrow$ droite découle de la fonctorialité. Réciproquement, supposons qu'un tel diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"] & Y \arrow[d, "g"] \\ Z \arrow[r, "k"] & T \end{tikzcd}$$

ne commute pas. Il existe donc un $x \in X$ tel que $g(f(x)) \neq k(h(x))$. Notons b le point de la base au-dessus duquel vit x. Alors, le diagramme

$$\begin{tikzcd} X_b \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"] & Y_b \arrow[d, "g"] \\ Z_b \arrow[r, "k"] & T_b \end{tikzcd} .$$

ne commute pas non plus. ■

Produits fibrés. La catégorie $\mathbf{Top}/B$ admet les produits (au sens des catégories). En fait, étant donné deux objets

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d] \\ B \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} Y \arrow[d] \\ B \end{tikzcd} ,$$

trouver un produit de X et Y dans $\mathbf{Top}/B$ est équivalent à trouver un *produit fibré* (toujours au sens des catégories) pour le système

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & B \end{tikzcd} .$$

Par ailleurs, il est connu que ce produit fibré existe et est en fait égal à

$$X \times_B Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid x \text{ et } y \text{ sont dans la même fibre}\} .$$

Autrement dit, la fibre de $X \times_B Y$ au dessus de b est égale au produit $X_b \times Y_b$ des fibres. Autrement dit, le foncteur $(-)_{b \in B}$ commute au produit. Autrement dit, voilà pourquoi le produit fibré s'appelle le produit fibré.

Foncteurs de changement de base. Considérons la catégorie $\mathbf{Top}/B$ et imaginons qu'on veuille restreindre tous nos espaces X au-dessus de B à des ouverts U de B. C'est tout à fait possible en considérons l'image inverse du morphisme structural. On obtient alors un foncteur de $\mathbf{Top}/B$ dans $\mathbf{Top}/U$. En fait, plus généralement, si $B' \to B$ est une flèche, il est possible de construire un espace $X_{B'}$ au-dessus de B' qui joue le rôle de l'image inverse. C'est l'espace obtenu après changement de base. Techniquement, il s'agit du produit fibré de X et B' au-dessus de B. On obtient un foncteur changement de base $-_{B'} : \mathbf{Top}/B \to \mathbf{Top}/B'$. Si $b' \in B'$ et $f(b') = b$, alors, la fibre de $X_{B'}$ au-dessus de b', après changement de base par f, est la fibre de X au-dessus de B. Autrement dit, le diagramme de foncteurs suivant commute

$$\begin{tikzcd} (X_b)_{b \in B} \arrow[r, mapsto] & (X_{f(b')})_{b' \in B'} \\ \mathbf{Top}^B \arrow[r] & \mathbf{Top}^{B'} \\ \mathbf{Top}/B \arrow[r, "-_{B'}"'] \arrow[u, "(-)_{b \in B}"] & \mathbf{Top}/B' \arrow[u, "(-)_{b' \in B'}"'] \end{tikzcd} .$$

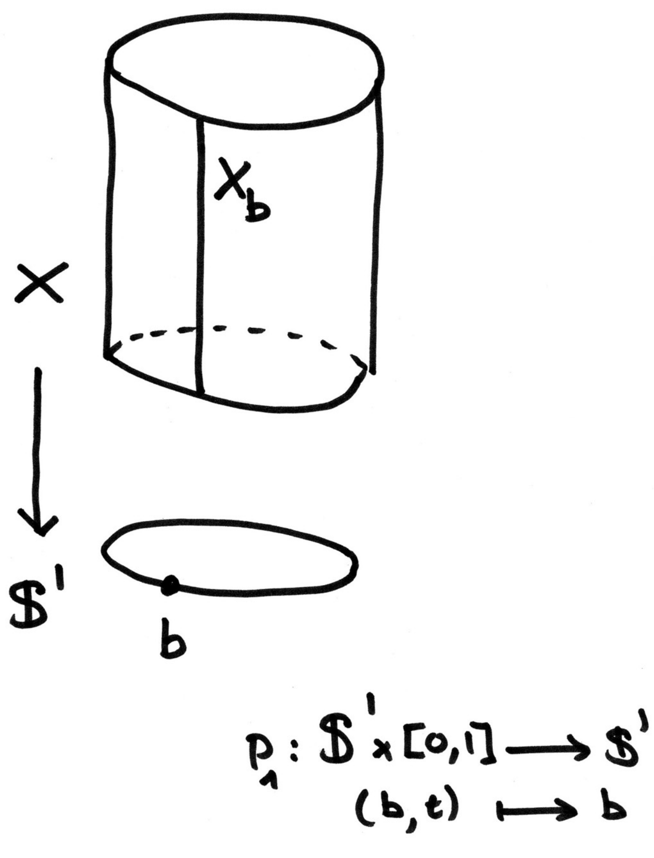

FIG. 1 – Le cylindre au-dessus de $\mathbf{S}^1$.

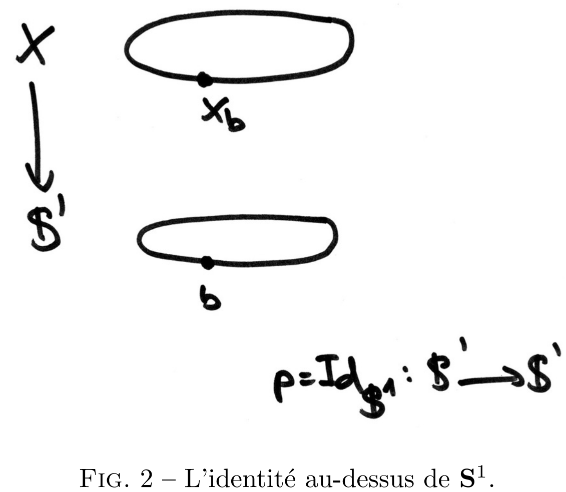

FIG. 2 – L'identité au-dessus de $\mathbf{S}^1$.

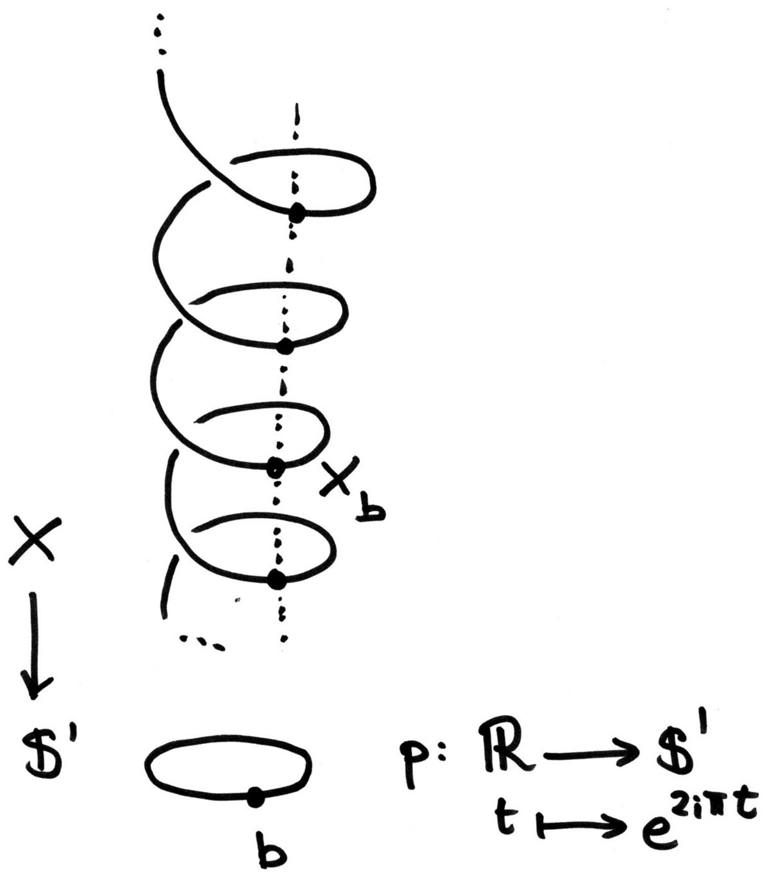

Fig. 3 – Le revêtement universel de $\mathbf{S}^1$ par $\mathbf{R}$.

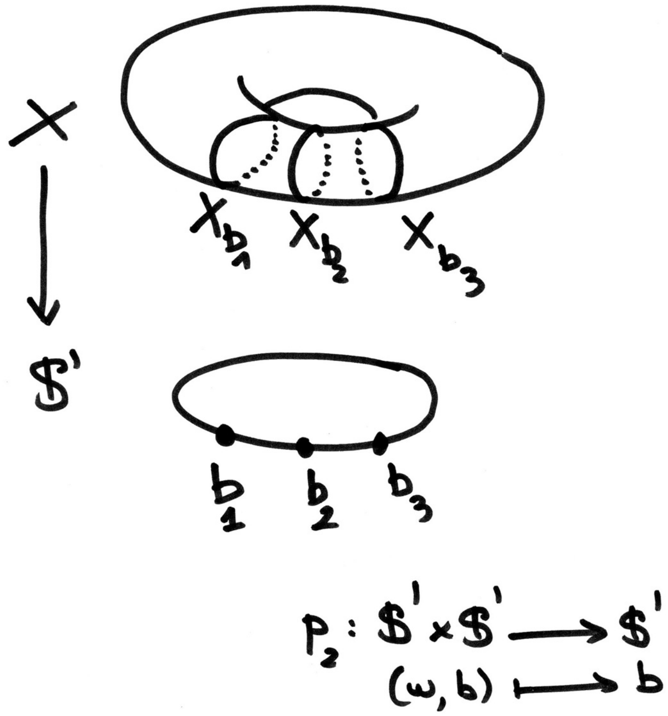

FIG. 4 – Le tore au-dessus de $\mathbf{S}^1$.

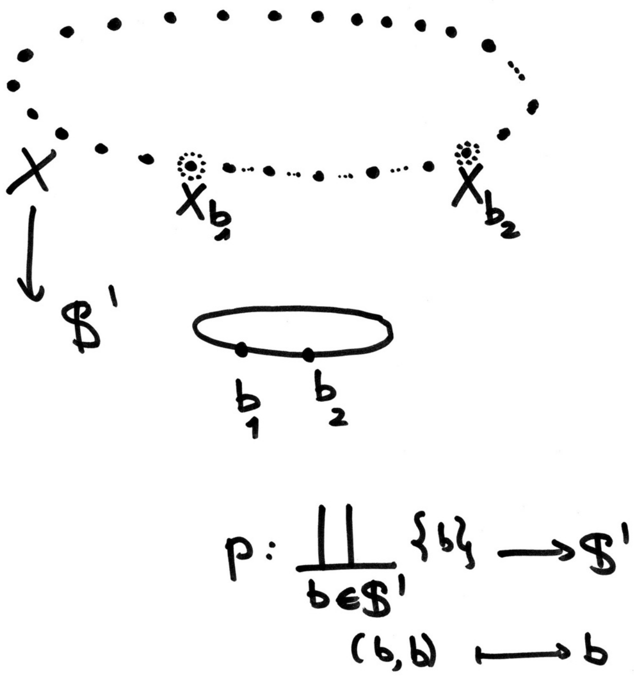

FIG. 5 – L'union disjointe des points du cercle au-dessus de $\mathbf{S}^1$.

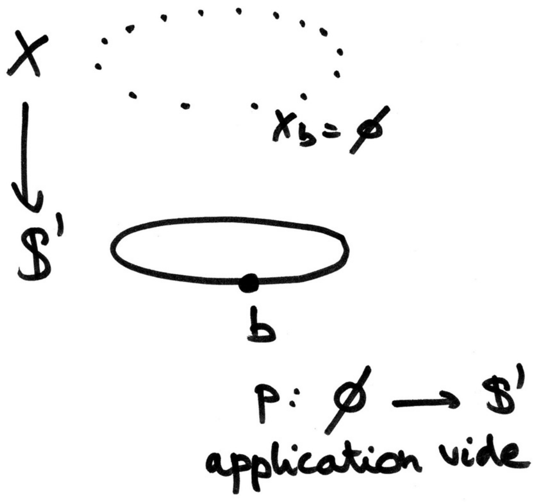

FIG. 6 – L'espace vide au-dessus de $\mathbf{S}^1$.

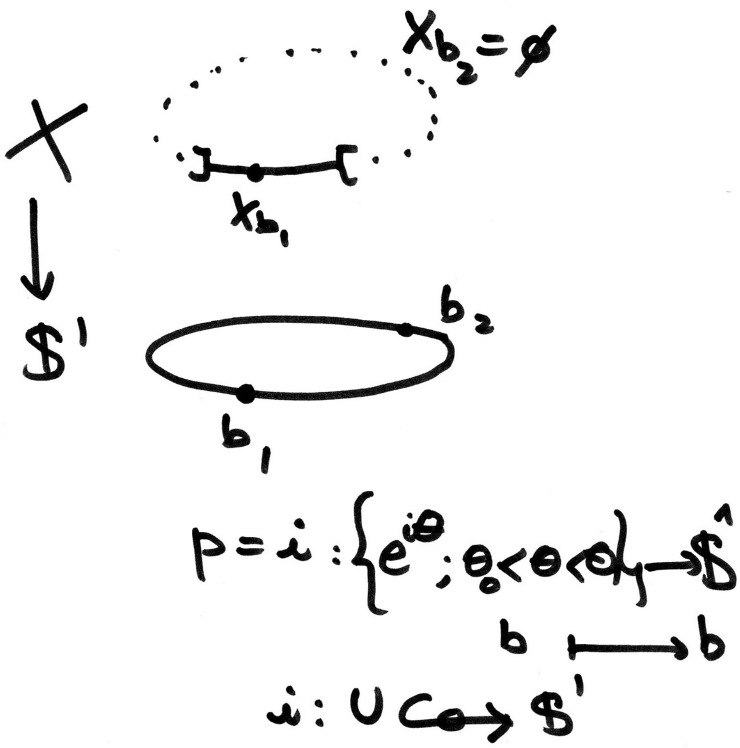

FIG. 7 – L'immersion d'un arc de cercle au-dessus de $\mathbf{S}^1$.

Dans le cas particulier (qu'on envisagera plus loin) où $(U_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de B, si $X \in \mathbf{Top}/B$, sans rentrer dans les détails, en considérant la famille de changements de base induits par les morphismes $(U_i \hookrightarrow B)_{i\in I}$, on a un principe de recollement qui nous permet d'énoncer des résultats du type :

Lemme. *Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de B, soient $X, Y \in \mathbf{Top}/B$ et soient $f : X \to Y$. Alors, si pour tout $i \in I$, $f_{U_i} : X_{U_i} \to Y_{U_i}$ est un isomorphisme, il en est de même pour f.*

Groupes dans $\mathbf{Top}/S$. Muni de interprétation, on peut deviner ce qu'il faut entendre par *groupe dans* $\mathbf{Top}/S$. Moralement, c'est un espace X au-dessus de S dont toutes les fibres sont des groupes topologiques.

En fait, cela n'est pas suffisant. En effet, qui dit groupe dit structure supplémentaire. En particulier, si chaque fibre X_b possède une structure de groupe (topologique), en particulier, chaque fibre possède un point marqué qu'on note $e(b)$ et qui correpond au neutre du groupe X_b. Un minimum qu'on attend d'un « groupe topologique au-dessus de B » et que la famille de ces points marqués soit suffisamment régulière. En l'occurrence, ici, on demandera simplement que l'application définie par $b \mapsto e(b)$ soit continue de B dans X. On appellera cette flèche $e : B \to X$ *la section unité.*

De même, la structure de groupe sur chacune des fibres X_b nous donne une collection d'applications

$$m_b : X_b \times X_b \to X_b.$$

Comme on est aussi en droit d'attendre que ces applications soient plus ou moins « compatibles » entre elles, on demandera qu'elles proviennent toutes d'une seule application « globale », autrement dit qu'elles soient les fibres d'une application. C'est pourquoi pour définir une structure de groupe sur X on se donnera une flèche $m : X \times X \to X$. Enfin, de même, au lieu de se donner des applications d'inversion sur chaque fibre, on se la donne globalement.

Définition. *Un* groupe G *dans* $\mathbf{Top}/B$ *est un espace* $\begin{matrix} G \\ \downarrow \\ B \end{matrix}$ *au-dessus de B muni de*

- *une flèche $B \to G$ appelée* section unité
- *une flèche de* multiplication $m : G \times G \to G$
- *une flèche d'*inversion $i : G \to G$

telles que, pour tout $b \in B$, les fibres G_b munies des données $(e(b), m_b, i_b)$ soient des groupes topologiques.

Cette définition diffère de celle que serait en droit d'attendre un lecteur assidu de Grothendieck. Ce dernier explique, par exemple dans [Gro62] comment définir un groupe dans une catégorie qui admet les produits. La proposition suivante dit que notre définition coïncide avec le cadre général établi par Grothendieck.

Proposition. *Soit G/B un espace au-dessus de B de morphisme structural p, muni de $e : B \to G$, de $m : G \times G \to G$ et de $i : G \to G$. Alors, les trois points suivants sont équivalents :*

(i) G est un groupe

(ii) Les données (e, m, i) *induisent une factorisation du foncteur* $h_G = Hom(-, G)$: $\mathbf{Top}/B \to \mathbf{Ens}$ *par le foncteur oubli* $\omega : \mathbf{Gr} \to \mathbf{Ens}$.

(iii) Les diagrammes suivants sont commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
G \times G \times G \arrow[r, "m\times Id"] \arrow[d, "Id\times m"'] & G \times G \arrow[d, "m"] \\
G \times G \arrow[r, "m"] & G
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "{(p,Id)}"] \arrow[d, "{(Id,p)}"'] \arrow[ddrr, "Id"] & B \times G \arrow[r, "e\times Id"] & G \times G \arrow[dd, "m"] \\
G \times B \arrow[d, "Id\times e"'] & & \\
G \times G \arrow[rr, "m"'] & & G
\end{tikzcd}
\quad et \quad
\begin{tikzcd}
B \times G \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] \arrow[ddrr, "e\times Id"] & G \arrow[r, "{(i,Id)}"] & G \times G \arrow[dd, "m\times p_2"] \\
G \arrow[d, "{(Id,i)}"'] & & \\
G \times G \arrow[rr, "m\times p_1"'] & & G \times G
\end{tikzcd}$$

Commentaires. Le premier diagramme définit la commutativité, le second l'existence d'un neutre e et le troisième celle d'une inversion i.

En ce qui concerne la deuxième condition, c'est un des aspects de que Grothendieck appelle le « yoga » des foncteurs représentables. Ce point de vue fonctoriel sera largement utilisé dans la suite. Pour la troisième condition, la comprendre nécessite une bonne familiarité avec les diagrammes commutatifs des catégories et le plus simple pour en être convaincu est *certainement* de les retrouver soi-même. Ces deux formalismes sont très généraux et permettent de définir ce qu'est en géénal un groupe dans une catégorie $\mathcal{C}$ quelconque ; on retrouve ainsi les groupes abstraits, les groupes topologiques, les groupes de Lie, les groupes algébriques, etc. Pour ces deux points, le lecteur courageux pourra consulter [DG70].

Sinon, la propriété d'être un groupe est stable par changement de base. Un groupe de $\mathbf{Top}/B$ est, après changement de base, un groupe de $\mathbf{Top}/B'$.

Démonstration. — L'équivalence entre les points *(ii)* et *(iii)* est classique (cf. par exemple [DG70, Chap. II, §1] ou [Gro61, Chap. 0, §8.2]).

Le sens *(iii)*$\Longrightarrow$*(i)* est assez facile puisqu'il suffit de considérer les fibres des trois diagrammes. En effet, puisque toutes les fèches considérée sont des flèches de $\mathbf{Top}/B$, elles préservent les fibres. En particulier, on déduit de m de i et de e des applications continues $m_b : G_b \times G_b \to G_b$ et $i_b : G_b \to G_b$ et un élément $e(b) \in G_b$. Puis, les fibres des diagrammes assurent que ces données vérifient les axiomes des groupes.

En fait, les deux sens, et en particulier le sens réciproque *(i)*$\Longrightarrow$*(iii)*, résultent du principe **(3)** : si les trois diagrammes commutent dans toutes les fibres, ils commutent globalement. ■

Torseurs dans $\mathbf{Top}/B$. Maintenant qu'on a défini les groupes, on va pouvoir définir les torseurs. Mais avant, il nous faut définir ce qu'est un espace sur lequel agit un groupe. Naturellement, on va procéder comme pour la définition d'un groupe.

Définition. *Soit G un groupe dans* **Top**$/B$*. Un G-*espace *est un objet $X \in$* **Top**$/B$ *muni d'une application $f : G \times X \to X$ telle que les morphismes $f_b : G_b \times X_b \to X_b$ dans chaque fibre soient des actions de groupes de G_b sur X_b.*

De la même façon que pour la définition d'un groupe, il est équivalent de demander que la donnée $f : G \times X \to X$ vérifie que les deux diagrammes suivants commutent

$$\begin{tikzcd} G \times G \times X \arrow[r, "\mathrm{Id}\times f"] \arrow[d, "m\times\mathrm{Id}"'] & G \times X \arrow[d, "f"] \\ G \times X \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd} \qquad \text{et} \qquad \begin{tikzcd} & G \times X \arrow[dr, "f"] & \\ X \arrow[ur, "(e{,}\mathrm{Id})"] \arrow[rr, "\mathrm{Id}"'] & & X \end{tikzcd}$$

Il est aussi équivalent de demander que le morphisme f définisse une action fonctoriellement ; autrement dit que pour tout objet K de **Top**$/B$, les applications « sur les points »

$$f(K) : h_G(K) \times h_X(K) \to h_X(K)$$

soient des actions de groupe.

Les actions de groupe traversent les changements de base : si X est un G-espace dans **Top**$/B$, $X_{B'}$ est un $G_{B'}$-espace dans **Top**$/B'$.

On commence par définir un torseur trivial ; c'est la même idée que dans le cas des groupes abstraits : c'est en quelque sorte le groupe dont on a « oublié » l'identité. On définit ensuite un torseur qui est un objet qui est localement « une copie » du groupe.

Définition. *Soit G un groupe dans* **Top**$/B$ *et X un G-espace.*
- *On dit que X est un* torseur trivial (sous l'action de G) *si X et G sont isomorphes en tant que G-espaces.*
- *On dit que X est un* torseur *si c'est localement un torseur trivial. Autrement dit : s'il existe un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de B tel que X_{U_i} soit un G_{U_i}-torseur trivial dans* **Top**$/U_i$ *pour tout $i \in I$.*

En particulier un torseur trivial est un torseur. Comme on peut s'y attendre la propriété d'être un torseur passe aux fibres :

Proposition. *Soit G un groupe dans* **Top**$/B$ *et X un G-torseur. Alors X_b est un G_b-torseur pour tout $b \in B$.*

(On dit qu'un G_b-espace X_b est un torseur dans la catégorie **Top** des espaces topologiques si c'est un torseur pour les structures ensemblistes sous-jacentes.)

Démonstration. — Soit b un point de la base. Comme on ne s'intéresse qu'aux fibres, on peut se restriendre à n'importe quel ouvert autour de b et on peut donc supposer que le torseur est trivial. X et donc G-isomorphe à G, et cela reste vrai sur les fibres, d'où le résultat. ■

On a alors la proposition suivante qui est fondamentale. Moralement, elle nous dit que si on a un point P dans un G-torseur X, alors l'application $g \mapsto g \cdot P$ définit une bijection entre G et X. Dans le cas des espaces topologiques, un « point » signifie une collection de point « suffisamment régulière » paramétrée par B : autrement dit, une section $s : B \to X$. Cela veut donc dire qu'on peut caractériser les torseurs triviaux parmi les torseurs comme ceux qui admettent une section. Plus précisément, si G est un groupe dans $\mathbf{Top}/B$ et si X est un G-espace, on peut définir naturellement à partir d'une section de X une flèche de G vers X. On construit d'abord une flèche de G vers $G \times X$: à $g \in G$ on associe (g, x) où $x = s(b)$ et où x est au-dessus de b. Plus catégoriquement, on dispose de deux flèches $G \xrightarrow{\mathrm{Id}} G$ et $G \xrightarrow{p_G} B \xrightarrow{s} X$ donc d'une flèche $G \to G \times X$. On compose ensuite cette flèche avec l'application qui définit l'action de G sur X. On vérifie facilement que cette flèche est un morphisme entre G et X pour les structures de G-espaces à gauche. On notera cette flèche :

$$s : B \to X \text{ une section} \qquad \rightsquigarrow \qquad \varphi_s : G \to X.$$

Proposition. *Soit G un groupe et X un G-torseur. Alors, X est trivial si, et seulement si, X admet « un point (en famille) », c'est-à-dire s'il admet une section, autrement s'il existe*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "p"'] \\ B \arrow[u, bend right, "s"'] \end{tikzcd} .$$

Pour démontrer cette proposition, on étudie avant plus précisément ce qui se passe dans le cas de torseurs triviaux.

Lemme. *Soit G un groupe dans* $\mathbf{Top}/B$ *et X un G-espace.*
- *S'il existe une section s_0 telle que $\varphi_{s_0} : G \to X$ soit un isomorphisme (de G-espaces), alors, tous les φ_s pour toutes les sections s sont des isomorphismes.*
- *Dans ce cas, l'application $s \mapsto \varphi_s$ est une bijection entre l'ensemble $h_X(B) = X(B)$ des sections qu'admet X et l'ensemble $Hom_G(G, X)$ des morphismes de G-espaces entre G et X, qui sont en fait tous des isomorphismes.*

Démonstration du lemme. — Démontrons d'abord le premier point. On commence d'abord par remarquer que, dans le cas où φ_{s_0} est un isomorphisme, une section s quelconque est toujours déduit de s_0 par l'action d'un « élément » de g. En effet, φ_{s_0} induit un isomorphisme entre les « B-points », c'est-à-dire entre les sections de G et celle de X :

$$\varphi_{s_0}(B) : G(B) \xrightarrow{\sim} X(B).$$

Il existe donc $g_s \in G(B)$ tel que $g_s \cdot s_0 = s$. On peut alors considérer la multiplication à droite par g_s dans G, qui est un isomorphisme $\rho_{g_s} : G \to G$ (on peut le vérifier avec les diagrammes commutatifs — ce qui est très abstrait ; ou on peut le vérifier fibre par fibre — ce qui est très facile). Il suffit alors ensuite de constater que $\varphi_s = \varphi_{s_0} \circ \rho_{g_s}$, par exemple fibre par fibre en vertu du principe **(3)**.

Pour le deuxième point, il suffit de montrer que deux sections différentes donnent deux isomorphismes différents et que tout isomorphisme provient d'une section. Pour l'injectivité, on peut raisonner au niveau des B-points, c'est-à-dire des sections. En effet, comme on l'a vu un φ_s induit un morphisme

$$\varphi_s(B) : G(B) \to X(B)$$

qui vérifie $\varphi_s(B)(e) = s$. En ce qui concerne la surjectivité, si $\varphi : G \to X$ est un G-morphisme, on sait grâce au point précédent que la section de X qu'on cherche pour le recomposer doit nécessairement être $s = \varphi(B)(e)$. On vérifie ensuite l'égalite $\varphi = \varphi_s$ fibre par fibre. ■

Démonstration de la proposition ***(3)****.* — Si X est isomorphe à G alors on peut transporter le point en famille qu'est la section unité $e : B \to G$ de G à X.

Réciproquement, supposons que X admette une section s. On dispose donc, comme on l'a expliqué plus haut d'un G-morphisme $\varphi_s : G \to X$. Si on restreint ces données à un ouvert U_i où X_{U_i} est un torseur trivial, l'application $(\varphi_s)_{U_i}$ est égale à $\varphi_{s_{U_i}}$ et on sait d'après le lemme **(3)**, on en déduit que φ_s est un isomorphisme et donc que X est un torseur trivial. ■

Autre définitions possibles d'un torseur ? Dans la définition d'un torseur qu'on a choisie, la topologie de la base joue un rôle essentiel, il s'agit vraiment d'une définition locale. Cependant, s'inspirant de la proposition **(3)**, d'autres définitions peuvent sembler légitimes :

- (D1) : qui serait une définition fibre par fibre : pour tout $b \in B$, l'action $G_b \circlearrowleft X_b$ définit un G_b-torseur.
- (D2) : une définition fonctorielle : pour tout $K \in \mathbf{Top}/B$, l'action sur les K-points est simple et transitive, *ie* $G(K) \circlearrowleft X(K)$ définit une espace principal homogène.
- (D3) : une définition plus globale, où l'on demanderait que la flèche $G \times X \to X \times X$ soit un isomorphisme ; c'est la définition donnée dans le cadre de la partie **(2)**.
- (Dloc) : la définition qu'on a effectivement choisie pour les torseurs.
- (Dtriv) : enfin, la définition des torseurs triviaux.

Quelles sont les relations entre les différentes définitions ? Remarquons d'abord qu'on a (D2) $\iff$ (D3). En effet, dire que l'action $G(K) \circlearrowleft X(K)$ est simple et transitive signifie que l'application $G(K) \times X(K) \to X(K) \times X(K)$ est une bijection. Or, demander que cette application soit bijective « sur tous les points » est équivalent à demander que $G \times X \to X \times X$ soit un isomorphisme. Par ailleurs, on a D(2)$\Longrightarrow$(D1) car si $b \in B$ alors l'ensemble de b-points $X(b)$ s'identifie à la fibre X_b de X au-dessus de b. Mieux, on a :

Proposition.

$$(Dtriv) \Longrightarrow (Dloc) \Longrightarrow (D3), \qquad (D3) \iff (D2),$$
$$((D2) \quad et \quad \forall b \in B,\ X_b \neq \varnothing) \Longrightarrow (D1)$$

Pour démontrer cette proposition, on va avoir besoin d'un lemme.

Lemme. *Les torseurs traversent les changements de base,* ie *si G est un groupe dans* $\mathbf{Top}/B$*, X un G-torseur et $f : B' \to B$ un changement de base, alors, $X_{B'}$ est un $G_{B'}$-torseur.*

Démonstration. — *(du lemme).* Il suffit de montrer que les torseurs triviaux traversent les changements de base : en effet, si (U_i) est un recouvrement ouvert de B , alors, $f^{-1}(U_i)$ est un recouvrement ouvert de B'. Soit donc X un torseur trivial sous l'action de G. X possède une section s et celle-ci nous fournit une section s' de $X_{B'}$. Il s'agit alors de montrer que $\varphi_{s'} : G_{B'} \to X_{B'}$ est un isomorphisme. Pour ce faire, il suffit de considérer l'inverse de φ_s au-dessus de B puis de considérer « sa restriction » à B' ; comme on a $\varphi_{s'} = (\varphi_s)_{B'}$, cela permet de conclure. ■

Démonstration. — *(de la proposition).* Il ne reste plus qu'à montrer (Dloc)$\Longrightarrow$(D2). Soit donc $K \to B$ un objet de $\mathbf{Top}/B$. Remarquons d'abord que les K-points de X, $X(K) = h_X(K)$ correspondent bijectivement aux sections de X_K (c'est une propriété catégorique). Maintenant, comme X est un G-torseur, on sait d'après le lemme **(3)** « de la traversée des changements de base » que X_K est encore un G_K-torseur. Maintenant, deux cas se présentent. Si $X(K) = \varnothing$, l'action de $G(K)$ sur $X(K)$ est bien libre et transitive. Si $X(K) \neq \varnothing$, alors X_K est un torseur qui a une section : c'est un torseur trivial ; en particulier, l'application envisagée est bijective. ■

Implication réciproques et contre-exemples. Que se passe-t-il pour les réciproques ? On va montrer que

$$\begin{array}{rcl} (D1) & \not\Rightarrow & (D2) \\ (D3) & \not\Rightarrow & (Dloc) \\ (Dloc) & \not\Rightarrow & (Dtriv) \end{array}$$

ce qui en particulier nous fournira un exemple de torseur non-trivial. En fait, fournir un tel contre-exemple était l'intention initiale de ce chapitre ; en effet, les torseurs que nous auront à étudier sont des torseurs en tant que *schémas* et, à ce titre, ne sont pas tous triviaux. Cependant, dans cette situatuation d'espaces topologiques « en famille », on voit plus clairement où peuvent apparaître des obstructions à la trivialité.

Afin d'exhiber un contre-exemple pour montrer (D3)$\not\Rightarrow$(Dloc), on va d'abord caractériser les G-espaces pour lesquels on peut remonter les flèches.

Proposition. *Soit G un groupe dans* $\mathbf{Top}/B$ *et X un G-espace. On a alors :*

$$\left\{\begin{array}{l} (D2) \\ \ et \\ X(B) \neq \varnothing \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad (Dtriv)$$

$$\left\{\begin{array}{l} (D2) \\ \ et \\ \exists\, (U_i)_i \ \text{ recouvrement de } B \mid \forall i,\ X(U_i) \neq \varnothing \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad (Dloc)$$

Démonstration. — Il suffit de montrer la première équivalence d'après le caractère local des torseurs. Le sens droite $\Longrightarrow$ gauche ayant déjà été montré, on s'occupe de l'autre sens.

Puisque $X(B) \neq \varnothing$, soit s une section : on peut définir $\varphi_s : G \to X$. Cette application est un isomorphisme car elle est bijective sur tous les points, d'après l'hypothèse (D2) qu'on a faite. ■

Exemple d'un G-espace vérifiant (D2) mais qui n'est pas un torseur. Pour trouver ce contre-exemple, il suffit de trouver un G-espace vérifiant (D2) mais qui n'admet aucune section locale. C'est le cas de

$$\begin{array}{c} X = \coprod_{u \in \mathbf{S}^1} \{s\} \; . \\ \Big\downarrow{\scriptstyle p} \\ \mathbf{S}^1 \end{array}$$

En effet, si p possède une section s sur un ouvert $U \hookrightarrow \mathbf{S}^1$, celle-ci est nécessairement « l'identité » $u \mapsto u$. Comme, dans X, tout point est ouvert, l'image inverse d'un point, qui est un point, devrait être ouverte dans $\mathbf{S}^1$ devrait être ouverte, ce qui est impossible. Il suffit ensuite de trouver un groupe G dans $\mathbf{Top}/\mathbf{S}^1$ pour lequel X soit un G-ensemble. En fait, on prend tout simplement le groupe trivial $G = \mathbf{S}^1 \times \{e\}$.

On aurait pu aussi considérer l'espace vide muni de n'importe quelle action de n'importe quel groupe.

Exemple d'un G-espace vérifiant (D1) mais pas (D2). Pour produire ce contre-exemple, on va aussi raisonner avec des unions disjointes. On considère l'espace

$$X = \coprod_{u \in \mathbf{S}^1} \mathbf{R}_u$$

union disjointe de droite au-dessus de $\mathbf{S}^1$. Le groupe $\mathbf{R}$ au-dessus de $\mathbf{S}^1$, c'est-à-dire $G = \mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}$, c'est-à-dire le cylindre agit sur X. On considère l'action de G sur X par translation, qu'on peut par exemple définir « par les points » : étant donné $K \in \mathbf{Top}/\mathbf{S}^1$ et deux section $g : K \to G$ et $x : K \to X$, on définit $g \cdot x$ par :

$$(g \cdot x)(k) = g(k) + x(k) \qquad \text{pour } k \in K.$$

On vérifie facilement que l'action qu'on a ainsi définie donne une structure de torseur aux fibres X_a sous l'action de G_a ; en l'occurence, c'est l'action de $\mathbf{R}$ sur lui-même par translation. Cependant, le G-espace ne vérifie pas (D2). Pour le vérifier, il suffit de voir ce qui se passe sur les sections : l'application

$$G(\mathbf{S}^1) \times X(\mathbf{S}^1) \to X(\mathbf{S}^1) \times X(\mathbf{S}^1)$$

n'est pas bijective. En effet, une section de X est simplement, à cause de la topologie de l'union disjointe, une famille $(x_a)_{a \in \mathbf{S}^1}$. Ainsi, si l'on prend la famille (*ie* la section) $s_0 = (0)_{a \in \mathbf{S}^1}$ et une autre section $s = (x_a)$ quelconque, la seule section de G qui pourrait envoyer s_0 sur s est définie par

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{S}^1 & \longrightarrow & G \\ a & \longmapsto & x_a \end{array} .$$

Cependant, pour que cette formule définisse bien une section, il faute que cette application soit *continue*, ce qui n'est pas toujours le cas.

Exemple d'un torseur non-trivial. En vertu de la proposition **(3)**, il suffit de trouver un torseur sans section. Pour ce faire, on considère le groupe $\mathbf{Z} \times \mathbf{S}^1$ agissant par translation sur le revêtement universel $\mathbf{R} \to \mathbf{S}^1$. Le dessin 9 qui suit parle pour lui-même.

(4) Torseurs en géométrie algébrique.

Venons-en maintenant au cas qui nous intéresse, celui des torseurs en géométrie algébrique. Les choses se passent sensiblement de la même façon que dans le cas topologique. On part d'une variété de base S, on considère la catégorie des variétés au-dessus de S, on définit ensuite les groupes dans cette catégorie ainsi que les actions de groupe ; on peut alors s'intéresser aux torseurs, à leur caractérisation par les sections, etc.

Néanmoins, il y a une différence notable entre ces deux théories, c'est le cas où la base est réduite à un point. Ce cas est d'autant plus important que c'est celui qui nous intéresse en théorie de Galois différentielle et qu'on étudiera. En effet, dans le cas topologique, si la base $B = \{b\}$ est un point, alors, tout espace $X \in \mathbf{Top}/B$ non-vide possède une section et, donc, tout torseur est trivial. En revanche, dans le cas de géométrie algébrique, lorsque la base $S = \operatorname{Spec} k$ est un point, une variété X au-dessus de S ne possède pas forcément de section : de façon équivalente, X ne possède pas nécessairement un point k-rationnel. En particulier, un torseur au-dessus d'un point n'est pas forcément trivial !

Avant de donner les définitions précises des objets considérés, on peut quand même faire sentir la saveur de cet étrange fait. Considérons le groupe (algébrique) $G = \mathbf{Z}/(2)$ au-dessus de $\mathbf{Q}$, qu'on peut voir par exemple comme $\{\pm 1\}$. Considérons maintenant le schéma $X = \{\pm\sqrt{2}\}$, c'est-à-dire $X = \operatorname{Spec}\big(\mathbf{Q}[X]/(X^2-2)\big)$. On imagine bien que l'action de G sur X qui échange les deux racines de 2 définit un torseur. Néanmoins, ce torseur n'est pas trivial car G et X ne sont pas isomorphes (au-dessus de $\mathbf{Q}$) : si on devait définir un isomorphisme entre ces deux espaces, on devrait alors avoir nécessairement dans notre besace de départ le chiffre $\sqrt{2}$.

Notations, définitions en géométrie algébrique. Soit k un corps. Une *variété (algébrique)* sur k est un schéma de type fini, séparé et réduit sur $S = \operatorname{Spec} k$. Un *groupe algébrique* sur k est une variété munie d'une structure de groupe ; deux définitions sont possibles (et équivalentes) :

- soit on demande que le foncteur $h_X : \mathbf{Sch} \to \mathbf{Ens}$ se factorise par le foncteur oubli $\omega : \mathbf{Gr} \to \mathbf{Ens}$;
- soit il nous faut des données (e, m, i) avec

$$\begin{aligned} m &: X \times_k X \to X \\ i &: X \to X \\ e &: \operatorname{Spec} k \to X \end{aligned}$$

  qui vérifient les trois diagrammes commutatifs de l'associativité, du neutre et de l'inverse, similaires à ceux de la proposition **(3)**.

Le lecteur soucieux de références concernant les groupes algébriques pourra consulter [???]. Le lecteur à la recherche d'une référence plus pédagogique pourra aller voir [???]. Pour définir une *action de groupe*, on a aussi le choix entre une définition « globale » et une définition « fonctorielle », définitions qui sont équivalentes, comme dans la remarque qui suit la définition **(3)**, dans le cas topologique. On pourra par exemple dire qu'une action de groupe est un morphisme $f : G \times_k X \to X$ qui définisse une action de groupe sur tous les points : pour tout k-algèbre R la flèche

$$f(R) : G(R) \times X(R) \to X(R)$$

est une action de groupe au sens « ensembliste » du terme.

Torseurs. Adapter la définition du cas topologique est plus délicat car on ne dispose pas, *à un niveau élémentaire*, de notion de « localement » pour les schémas, et en particulier pour $S = \operatorname{Spec} k$: la notion de « localement » pour la topologie de Zariski est trop grossière, en particulier pour l'espace $S = \operatorname{Spec} k$. Ce problème peut être résolu en considérant les *topologies de Grothendieck.* En particulier, en considérant le site étale, on dispose d'une notion de « localement » assez fine. Dans le cas où la base est $S = \operatorname{Spec} k$, dire qu'un espace X vérifie une propriété localement sur k signifie qu'il existe un extension galoisienne finie L/k telle que l'espace X_L déduit de X par changement de base vérifie la dite propriété. Ce qui suit ne prétend pas suivre une approche des torseurs en terme de la topologie étale mais seulement tisser des liens avec celle-ci ; le lecteur qui souhaite en savoir plus sur l'approche étale consultera avec profit (et enthousiasme !) [? ?].

Remarquons néanmoins que nous avons proposé deux autres définitions (D1) et (D2) dans le cas topologique. Si la définition (D1) n'est pas transposable pour les variétés algébriques, il est en revanche tout à fait envisageable de considérer (D2). Par ailleurs, comme vu dans la proposition **(3)**, un G-espace qui vérifie (D2) et *qui admet localement des sections* est un torseur. *Or, si X est une variété (non-vide)sur k, alors, X admet des sections locales* : autrement dit, il existe une extension galoisienne L/k telle que l'ensemble des L-points de X, $X(L)$ soit non-vide (c'est *grosso modo* le Nullstellensatz d'Hilbert). Tout ceci nous incite donc à poser la définition suivante.

Définition. *Soit G/k un groupe algébrique et X un G-espace non-vide.*
- *On dit que X est un G-*torseur trivial *si X et G sont G-isomorphes.*
- *On dit que X est un G-*torseur *si le morphisme $G \times X \to X \times X$ est un isomorphisme.*

En vertu du « yoga des foncteurs », il est évidemment équivalent de demander que pour toute k-algèbre R, l'ensemble des R-points soit un espace principal homogène sous l'action de $G(R)$ *ie* que les applications $G(R) \times X(R) \to X(R) \times X(R)$ soient bijectives. Par exemple, en raisonnant de la sorte sur les R-points, on montre qu'*un torseur trivial est un torseur.* Par ailleurs, comme dans le cas topologique, on a la caractérisation suivante des torseurs triviaux :

Proposition. *Soit G/k un groupe algébrique et X un G-torseur. Alors*

$$X \text{ est un torseur trivial} \iff X(k) \neq \varnothing.$$

Une condition vérifiable pour qu'un G-espace soit un torseur. En pratique, c'est techniquement relativement compliqué de vérifier qu'un G-espace est un torseur, même si la condition « en famille » sur les R-points est moins rebutante que la condition sur le morphisme de schémas $G \times X \to X \times X$. Ainsi, en pratique, on utilisera plutôt le critère suivant :

Proposition. *Soit G/k un groupe algébrique et X un G-espace réduit. Soit k^{alg} une clôture algébrique de k. Alors, X est un G-torseur si, et seulement si,*

$$G\left(k^{alg}\right) \times X\left(k^{alg}\right) \to X\left(k^{alg}\right) \times X\left(k^{alg}\right) \qquad \textit{est une bijection.}$$

Avant de démontrer cette démonstration, notons bien que la condition X réduit est nécessaire. Pour le voir, il suffit de considérer le groupe trivial pour G et de prendre $X = \operatorname{Spec}\left(k[x]/x^2\right)$. L'action est bien libre et transitive sur les k^{alg}-points mais X n'est pas un torseur sous-l'action de G (puisque G admet une section mais n'est pas isomorphe à X).

Démonstration. — La condition est évidemment vérifiée si X est un G-torseur. Réciproquement, supposons-la satisfaite. On peut d'abord vérifier que G agit librement sur X, c'est-à-dire, selon la définition de [DG70, p. 305][3] :

$$G(R) \times X(R) \to X(R) \times X(R) \quad \text{est injectif pour tout } R.$$

Comme on est en caractéristique nulle et que G est de type fini sur k, le résultat [DG70, ch. III, §2, Corollaire 2.5] nous permet de conclure : il suffit de le vérifier sur les k^{alg}-points.

Maintenant, on veut montrer que $G \times X \to X \times X$ est un isomorphisme : il suffit de le montrer après changement de base fidèlement plate et quasi-compacte (*fpqc*), d'après la proposition 2.7.1 de [Gro65]. En particulier, il suffit de montrer que

$$G_{k^{alg}} \times X_{k^{alg}} \to X_{k^{alg}} \times X_{k^{alg}}$$

est un isomorphisme (tout changement de base de corps $\operatorname{Spec} L \to \operatorname{Spec} k$ est *fpqc*). Comme X est non-vide, on peut choisir $P \in X(k^{alg})$ et donc définir $\varphi_P : G_{k^{alg}} \to X_{k^{alg}}$. En fait, il suffit pour conclure de montrer que φ_P est un isomorphisme. D'abord, notons que la liberté de l'action nous permet de montrer que le centralisateur $\mathfrak{Centr}_P$ de P dans $G_{k^{alg}}$ est trivial :

$$\forall R \quad k\text{-algèbre}, \quad \mathfrak{Centr}_P(R) = \{e\}\,.$$

En particulier, le préfaisceau $G/\mathfrak{Centr}_P$ est déjà un faisceau et on a : $G/\mathfrak{Centr}_P = G$. La proposition 2.1 de [DG70, ch. III, §3] (légèrement modifiée pour le cas où k est un corps) nous permet de conclure. ■

[3] Attention, cependant, cette définition diffère *a priori* de la définition donnée par David Mumford dans [MF82, p.10] : une action est libre pour lui si le morphisme $G \times X \to X \times X$ est une immersion fermée.

Références

[DG70] Michel Demazure et Pierre Gabriel : *Groupes algébriques. Tome I : Géométrie algébrique, généralités, groupes commutatifs.* Masson & Cie, Éditeur, Paris, 1970. Avec un appendice *Corps de classes local* par Michiel Hazewinkel.

[FGI+05] Barbara Fantechi, Lothar Göttsche, Luc Illusie, Steven L. Kleiman, Nitin Nitsure et Angelo Vistoli : *Fundamental algebraic geometry*, volume 123 de *Mathematical Surveys and Monographs.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2005. Grothendieck's FGA explained.

[Gro61] Alexander Grothendieck : Éléments de géométrie algébrique. III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents. I. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (11):167, 1961.

[Gro62] Alexander Grothendieck : *Fondements de la géométrie algébrique. [Extraits du Séminaire Bourbaki, 1957–1962.].* Secrétariat mathématique, Paris, 1962.

[Gro65] Alexander Grothendieck : Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. II. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (24):231, 1965.

[MF82] David Mumford et John Fogarty : *Geometric invariant theory*, volume 34 de *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete [Results in Mathematics and Related Areas].* Springer-Verlag, Berlin, second édition, 1982.

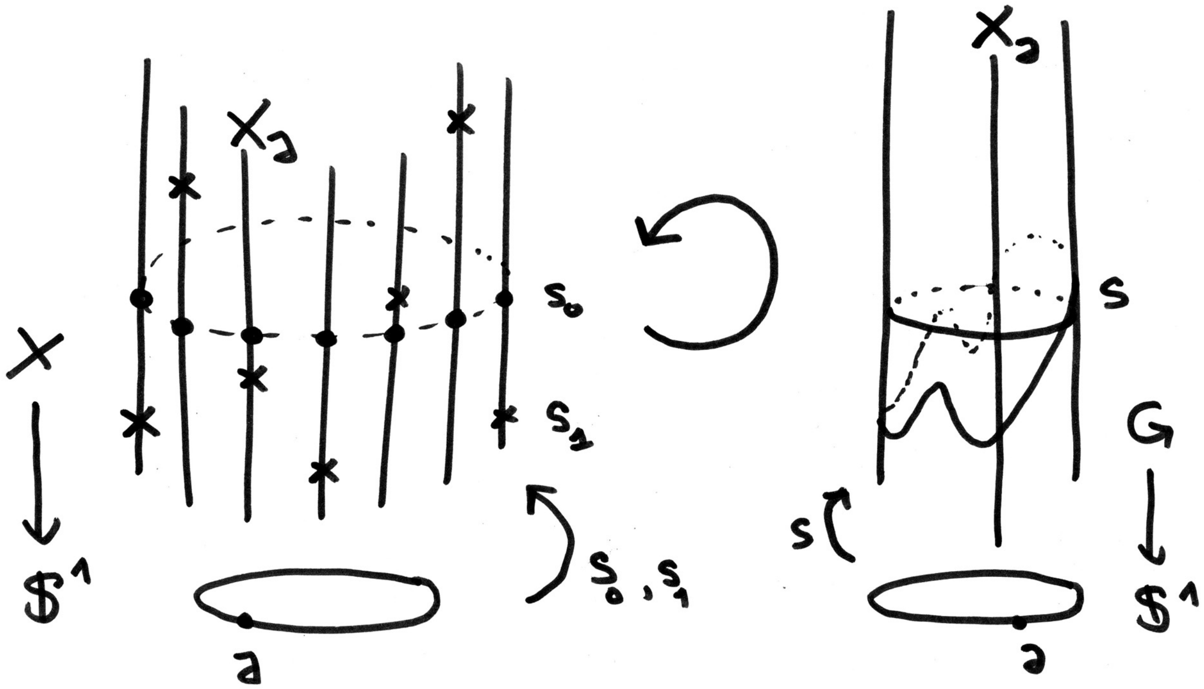

FIG. 8 – Exemple d'un G-espace vérifiant (D1) mais pas (D2).

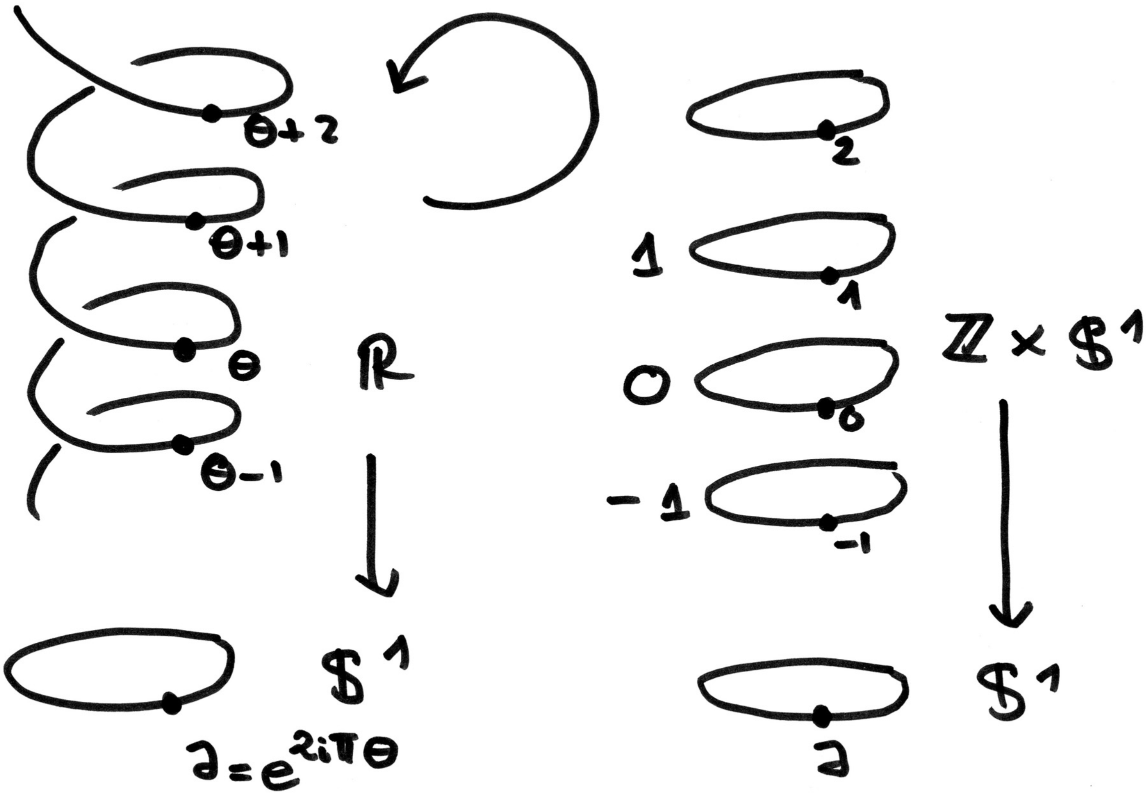

FIG. 9 – Un torseur non trivial.