Lemme de Yoneda, K-points, yoga des foncteurs et foncteurs représentables

Colas Bardavid
colas.bardavid (a) gmail.com

juin 2008

(1) Introduction.

Le but de ce texte est double. D'une part, il s'agit d'introduire le lemme de Yoneda et « le yoga des foncteurs », afin de les rendre clairs pour les non-initiés. D'autre part, il s'agit d'« implémenter » ce lemme dans différentes catégories (le lecteur est supposé être un peu familier avec les catégories...). On verra alors apparaître la notion de *catégorie de Yoneda*.

En deux mots, si X est un objet mathématique, ce que nous dit le lemme de Yoneda c'est qu'on peut retrouver X à partir des différentes flèches $Y \to X$ pour des objets Y bien choisis.

On verra en conclusion le grand intérêt que peuvent avoir de telles considérations.

(2) Ensembles.

Le cas des ensembles est le plus facile. Si X est un ensemble, alors on peut retrouver X à partir d'un ensemble quelconque de cardinal 1. Notons par exemple $E_1 = \{\star\}$ un tel ensemble. Alors, on peut retrouver X à partir de l'ensemble des fonctions de E_1 dans X, autrement dit de $\mathcal{F}(E_1, X)$, autrement dit de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ens}}(E_1, X)$. En effet, une application de E_1 dans X correspond simplement à choisir un élément de X. Plus précisément, l'application

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ens}}(E_1, X) &\longrightarrow X \\ f &\longmapsto f(\star) \end{aligned}$$

est une bijection, c'est-à-dire un isomorphisme d'ensembles.

(3) Ensembles enrichis.

Le cas des ensembles est peut-être un peu trop simple pour qu'on puisse voir la subtilité du procédé. On va donc compliquer un peu les choses. Le lecteur qui s'y perd pourra à loisir passer aux sections suivantes ; le but est de comprendre, pas de s'arracher les cheveux !

C'est ainsi qu'on va introduire des objets un peu bizarres, les *ensembles enrichis*.

Moralement, un *ensemble enrichi* est un ensemble composé de plusieurs types de points, qui ont des tailles différentes : les points de type T_0, les points de type T_1, les points de type T_2, etc. Tous ces points ont la même propriété (intuitive) d'être de taille infiniment petite. Néanmoins, dans cet univers de l'infiniment petit, les points T_0 sont les plus gros, ensuite viennent les points de type T_1, qui sont plus fins ; puis, viennent les points de type T_2, etc. Naturellement, les points T_0 ne peuvent pas s'envoyer dans les points T_1 — ils sont trop gros ! — et, plus généralement, les points T_i ne peuvent s'envoyer que les points T_j plus gros, *ie* les points T_j avec $j \leqslant i$.

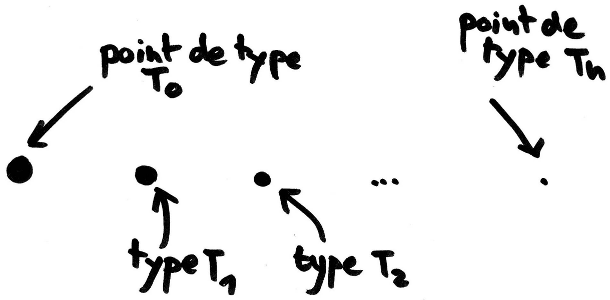


FIG. 1 – Les différents types de points.

Formellement :

(3.1) Définition. *Un* ensemble enrichi $\underline{E}$ *est la donnée d'une famille* $\underline{E} = (E_0, E_1, \ldots, E_n, \ldots)$ *d'ensembles. Les éléments de* E_i *sont appelés les points de type* T_i *de* $\underline{E}$. *Étant donnés deux ensembles enrichis* $\underline{E}$ *et* $\underline{F}$, *un morphisme entre* $\underline{E}$ *et* $\underline{F}$ *est une famille de flèches*

$$\varphi_i : E_i \to \bigcup_{j \leqslant i} F_j.$$

La catégorie obtenue est notée $\mathbf{Ens}^\star$.

(3.2) Points élémentaires. Si $i \in \mathbf{N}$ est fixé, on peut considérer l'ensemble enrichi formé par le point de type T_i ; on le note encore T_i. Formellement, il s'agit de :

$$T_i = \left(\varnothing, \ldots, \varnothing, \underset{i-\text{ième rang}}{\{\star\}}, \varnothing, \ldots \right).$$

C'est à l'aide de ces points T_i élémentaires qu'on va pouvoir « reconstituer » nos ensembles enrichis. En effet, on vient de voir que, dans le cadre des ensembles classiques, on peut « reconstituer » un ensemble X à partir des morphismes du point dans X. Dans le cadre des ensembles enrichis, il faut regarder plusieurs types de points pour collecter la totalité des informations sur $\underline{E}$. Plus précisément, on a l'isomorphisme[1] suivant :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ens}^\star}(T_i, \underline{E}) \setminus \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ens}^\star}(T_{i-1}, \underline{E}) & \xrightarrow{\sim} & E_i \quad , \\ f & \longmapsto & f(T_i) \end{array}$$

[1]$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ens}^\star}(T_{i-1}, \underline{E})$ est vu comme un sous-ensemble de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ens}^\star}(T_i, \underline{E})$ via la flèche $T_i \to T_{i-1}$.

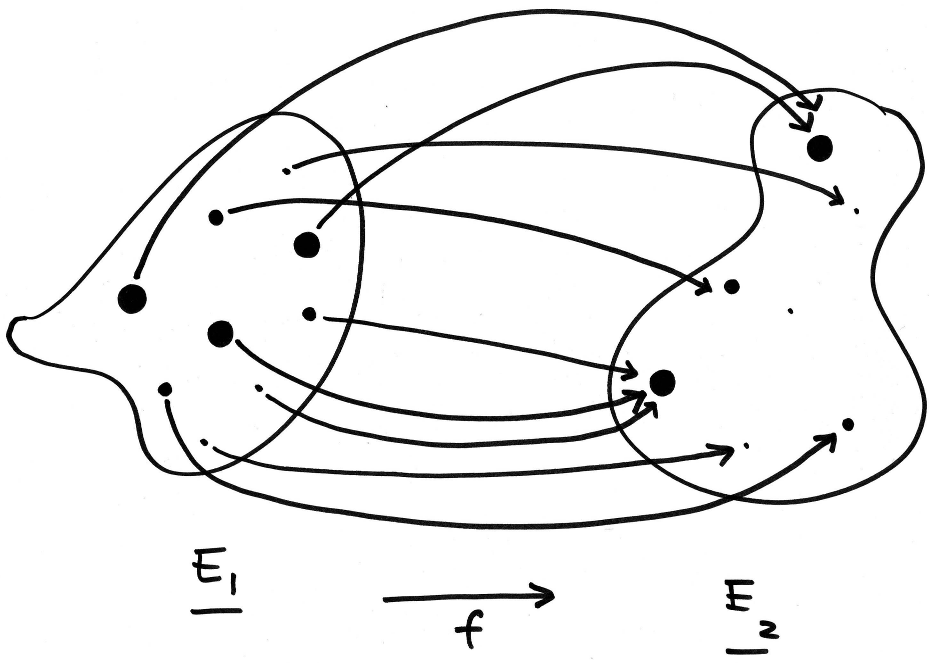


FIG. 2 – Exemple de morphisme entre deux ensemble enrichis.

qui nous dit simplement que les points de $\underline{E}$ de type T_i sont ceux sur lesquels T_i peut s'envoyer mais pas T_{i-1}. On peut résumer ce qui précède ainsi :

(3.3) Proposition. *Soit $\underline{E}$ un ensemble enrichi. Alors $\underline{E}$ est isomorphe à*

$$\left(Hom_{\mathbf{Ens}^{\star}}\left(T_0, \underline{E}\right), \ldots, Hom_{\mathbf{Ens}^{\star}}\left(T_i, \underline{E}\right) \setminus Hom_{\mathbf{Ens}^{\star}}\left(T_{i-1}, \underline{E}\right), \ldots\right).$$

---

(4) K-points.

(4.1) Notion de K-points. Ainsi, on voit qu'il y a un lien étroit entre les points de type T_i d'un ensemble enrichi $\underline{E}$ et l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ens}^{\star}}(T_i, \underline{E})$: les points atteints par de telles applications ne sont pas forcément de type T_i mais sont de type « au plus T_i ».

Ce qui se passe pour les ensembles enrichis arrive aussi dans le cas des groupes. Prenons G un groupe quelconque. On peut aussi considérer que G est constitué d'éléments de type distincts ; on peut par exemple dire que $g \in G$ est de type n si l'ordre de g est n. On peut alors retrouver ces éléments de type n ou, plus exactement, les éléments de type d pour $d \mid n$ — d'une certaine façon, les éléments d'ordre « au plus n » — avec les morphismes $\mathbf{Z}/(n) \to G$. On remarquera là aussi, que dans un sens vague, $\mathbf{Z}/(n)$ représente l'objet-modèle de type n.

On peut aussi considérer cette notion de type de point pour les variétés différentielles. Cela nécessite quand même d'avoir des conceptions libérales en ce qui concerne la notion de point... Tout d'abord, il y a les points habituels des variétés, ceux qu'on dessine en posant la pointe de son stylo sur la variété. Mais, si on se laisse imaginer qu'un point est « marque noire » sur la variété, comme une sorte de tache — et qui peut donc avoir une extension — il y a alors d'autres types de points, qu'on pourra typiquement distinguer les uns des autres par la dimension. Ainsi, les flèches

$$\{\star\} \to M$$

qu'on préfèrera en fait noter

$$\begin{tikzcd} \{\star\} \arrow[d] \\ M \end{tikzcd}$$

énumèrent les points classiques d'une variété différentielle M. Pour avoir accès aux points de dimension « au plus 1 », il suffit de considérer les flèches (sous-entendu différentiables)

$$\begin{tikzcd} \mathbf{R} \arrow[d] \\ M \end{tikzcd}$$

qui correspondent, intuitivement, aux droites tracées sur la variété (mais aussi aux points classiques, si la droite $\mathbf{R}$ se projète entièrement sur un seul point). Évidemment, pour les points qui ont une extension dimensionnelle « au plus égale à 2 », il faut considérer les flèches

$$\begin{tikzcd} \mathbf{R}^2 \arrow[d] \\ M \end{tikzcd} .$$

(4.2) Une notation provisoire. Avec les notations qui suivent, on peut réexprimer ce qui vient d'être expliqué plus haut ainsi :

– dans le cas des ensembles enrichis : si $\underline{E}$ est un tel ensemble, on note $\underline{E}(i)$ l'ensemble des points de $\underline{E}$ de type au plus T_i. On a alors :

$$\underline{E}(i) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ens}^\star}(T_i, \underline{E}).$$

– dans le cas des groupes : si on note $G(n)$ l'ensemble des éléments d'ordre divisant n, *ie* $\{g \in G \mid g^n = e\}$, on a alors :

$$G(n) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Gr}}(\mathbf{Z}/(n), G)$$

– dans le cas des variétés différentielles : si M est une telle variété et si on note $M(d)$ l'ensemble des « points-tache d'extension dimensionnelle inférieure ou égale à d », on a :

$$M(d) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Diff}}(\mathbf{R}^d, M).$$

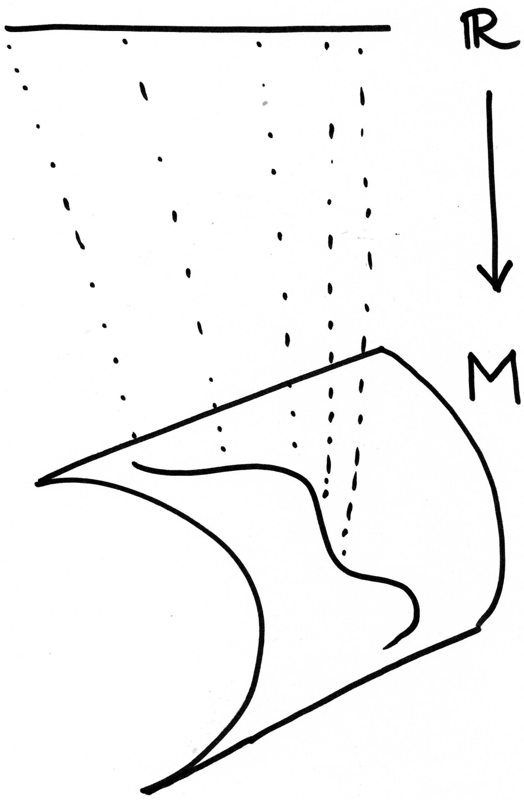


FIG. 3 – Point « d'extension dimensionnelle » égale à 1.

On peut faire la même chose pour les k-espaces vectoriels : si V est un tel espace, qu'on définit « les points de type d de V » comme les sous-espaces vectoriels de dimension d de V et qu'on note $V(d)$ l'ensemble des points de dimension inférieure à d, on a :

$$V(d) \cong \mathrm{Hom}_{k-\mathbf{ev}}(k^d, V).$$

Tout ceci étant dit, on peut en venir à la défintion des K-points dans une catégorie quelconque.

(4.3) Définition. *Soient $\mathcal{C}$ est une catégorie et X un objet de $\mathcal{C}$ qu'on veut étudier. Soit K un objet de $\mathcal{C}$ qu'on considère comme un étalon. On appelle K-*point *de X toute flèche du type*

$$\begin{array}{c} K \\ \downarrow \\ X \end{array}$$

On note

$$X(K) = Hom_{\mathcal{C}}(K, X)$$

l'ensemble des K-points de X.

(4.4) Réinterprétation des parties (2) et (3). Ce qu'on a remarqué pour les ensembles et pour les ensembles enrichis peut se traduire en disant que les correspondances suivantes sont injectives, à isomorphisme près :

– pour les ensembles :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dotted] & X(\{\bigstar\}) \end{tikzcd}$$

– pour les ensembles enrichis :

$$\begin{tikzcd} & X(T_0) \\ & X(T_1) \\ X \arrow[ur, dotted] \arrow[uur, dotted] \arrow[dr, dotted] & \vdots \\ & X(T_n) \\ & \vdots \end{tikzcd}$$

On commence à avoir un avant-goût du lemme de Yoneda qui dit que, moralement,

on peut retrouver l'objet X si on connaît tous ses points !

Plus précisément, si pour tout objet-étalon K on connaît les points de type K de X, alors on peut reconstruire X. Ou bien : si pour tout K on connaît l'ensemble $X(K)$ des K-points de X alors on connaît X.

(5) Ensembles ordonnés.

Soit $X = (E, \leqslant)$ un ensemble ordonné. On retrouve l'ensemble sous-jacent facilement, en considérant les flèches $\{\bigstar\} \to (E, \leqslant)$ où $\{\bigstar\}$ est muni du seul ordre possible. Pour retrouver maintenant l'ordre sur E, il suffit de considérer l'ensemble totalement ordonné à deux éléments qu'on note $\{\bigstar_a \leqslant \bigstar_b\}$. On a alors pour $x, y \in E$ que $x \leqslant y$ si et seulement s'il existe une application

$$f : \{\bigstar_a \leqslant \bigstar_b\} \to (E, \leqslant)$$

qui envoie $\bigstar_a$ sur x et $\bigstar_b$ sur y. Ici, la correspondance injective est donc :

$$\begin{tikzcd} & X(\{\bigstar\}) \\ X \arrow[ur, dotted] \arrow[dr, dotted] & \\ & X(\{\bigstar_a \leqslant \bigstar_b\}) \end{tikzcd}$$

Plus précisément, partant de $(E, \leqslant)$ on définit un espace ordonné isomorphe à partir des données $X(\{\bigstar\})$, $X(\{\bigstar_a \leqslant \bigstar_b\})$ ainsi que des flèches qui les relient. En effet :

(5.1) Flèches induites entre les points. Si X et Y sont deux objets et si K est un objet étalon, si $f : X \to Y$ est un morphisme, on s'attend naturellement à ce que f induise une application entre les points de type K. C'est effectivement ce qui arrive, le lecteur pourra le vérifier aisément sur un petit diagramme. On note

$$f_K : X(K) \to Y(K)$$

cette flèche induite.

Que se passe-t-il, au contraire, si l'objet X est fixé mais qu'on considère deux type K et K' différents, reliés entre eux par exemple par $K \to K'$? On voit sur le diagramme

$$\begin{tikzcd} K \arrow[d] \\ K' \arrow[d] \\ X \end{tikzcd}$$

qu'à une flèche $K' \to X$ on pourra en associer une, par composition, $K \to X$. Autrement dit : le sens des flèches est inversé. À une flèche $K \to K'$ correspond une application $X(K') \to X(K)$ entre les points. On dit qu'on est dans une situation *contravariante*.

(5.2) Reconstruction de l'espace ordonné. Pour reconstruire $(E, \leqslant)$, comme on va le voir, en fait, on a besoin des deux ensembles de points

$$X(\{\bigstar\}) \quad \text{et} \quad X(\{\bigstar_a \leqslant \bigstar_b\})$$

mais on a aussi besoin de connaître certaines flèches du type $X(K') \to X(K)$ qui relient ces ensembles.

On commence par poser, naturellement, vu ce qui précède : $\widetilde{E} = \mathrm{Hom}_{\leqslant-\mathbf{Ens}}(\{\bigstar\}, E)$.
Puis, pour l'ordre, on procède ainsi. On considère les morphismes

$$i_a : \begin{array}{rcl} \{\bigstar\} & \longrightarrow & \{\bigstar_a \leqslant \bigstar_b\} \\ \bigstar & \longmapsto & \bigstar_a \end{array} \quad \text{et} \quad i_b : \begin{array}{rcl} \{\bigstar\} & \longrightarrow & \{\bigstar_a \leqslant \bigstar_b\} \\ \bigstar & \longmapsto & \bigstar_b \end{array}$$

et les applications

$$f_a, f_b : \quad X(\{\bigstar_a \leqslant \bigstar_b\}) \to X(\{\bigstar\})$$

qui leur correspondent sur les points. Puis, si $\tilde{x} : \{\bigstar\} \to E$ et $\tilde{y} : \{\bigstar\} \to E$ sont deux éléments de $\widetilde{E}$, on dit que $\tilde{x} \leqslant \tilde{y}$ s'il existe une application $\varphi : \{\bigstar_a \leqslant \bigstar_b\} \to (E, \leqslant)$, autrement dit $\varphi \in X(\{\bigstar_a \leqslant \bigstar_b\})$ tel que $f_a(\varphi) = \tilde{x}$ et $f_b(\varphi) = \tilde{y}$. On laissera le soin au lecteur de vérifier que la construction fonctionne, c'est-à-dire que l'ensemble ordonné ainsi reconstruit est bien isomorphe à X.

---

(6) Espaces topologiques.

On cherche à caractériser les espaces topologiques par leur points. Soit donc X un espace topologique. D'abord, on peut retrouver l'espace sous-jacent $|X|$ à X en considérant $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\{\bigstar\}, X)$. Supposons X localement à base dénombrable de voisinages. On peut alors caractériser facilement les fermés de façon séquentielle :

$$F \subset X \text{ est fermé } \iff \forall (x_n)_n \in F^{\mathbf{N}}\ \forall x_\infty \in X, \quad (x_n \to x_\infty \Rightarrow x_\infty \in F)\,.$$

Ainsi, on peut retrouver la topologie de X en considérant l'espace topolgique

$$T_1 := \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n>0} \cup \{0\}$$

et les T_1-points de X, à savoir $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(T_1, X)$.

Ici, la correspondance injective est donc :

$$\begin{tikzcd} & X(\{\bigstar\}) \\ X \arrow[ur, dotted] \arrow[dr, dotted] & \\ & X(T_1) \end{tikzcd}$$

(6.1) Généralisation par les ordinaux. En ce qui concerne les espace topologiques à base quelconque (c'est-à-dire pas forcément localement à base dénombrable de voisinages), voici une généralisation possible. Au lieu de considérer l'espace T_1, il faudrait considérer des espaces[2] similaires T_α, pour chaque ordinal α : introduire des suites $(x_a)_{a\in\alpha}$ indexées par des ordinaux α quelconques, définir une notion de convergence et considérer enfin les points $X(T_\alpha)$. Cependant, malheureusement, cette généralisation est fausse. Pour construire un contre-exemple, il faut considérer la *planche de Tychonoff*, présentée dans [SS78, §II.86]. Cet espace topologique $(T, \mathcal{O})$ admet un point ∞ qui vérifie les propriétés suivantes :

- $\{\infty\}$ n'est pas ouvert dans T.
- si α et un ordinal quelconque et si $(x_a)_{a\in\alpha}$ est une suite à valeurs dans $T\backslash\{\infty\}$, alors on n'a jamais $x_a \to \infty$.

En considérant alors une autre topologie $\mathcal{O}'$ sur T, qui ne diffère de la précédente que par le fait que $\{\infty\}$ est ouvert, on a que $f = \mathrm{Id}_T : (T, \mathcal{O}) \to (T, \mathcal{O}')$ n'est pas continue mais vérifie que toute suite convergente $(x_a)_{a\in\alpha} \to x_\infty$ est transformée par f en une suite convergente $(f(x_a))_{a\in\alpha} \to f(x_\infty)$.

(6.2) Généralisations avec les *nets*. On va voir que la bonne généralisation aux espaces topologiques quelconques se fait avec les nets. Rappelons, pour commencer, qu'un *ensemble dirigé* est un couple $(A, \leqslant)$ où A est un ensemble, où $\leqslant$ est un pré-ordre[3], et qui vérifie

$$\forall (x,y) \in A^2, \quad \exists z \in A \quad | \quad z \geqslant x \text{ et } z \geqslant y.$$

[2] Les espace topologiques T_α sont en fait, tout simplement, les ordinaux α munis de la topologie de l'ordre.

[3] Un préé-ordre est une relation réflexive et transitive.

On peut alors définir (voir, par exemple, [Wil70]) :

(6.3) Définition. *Soit X un espace topologique. Un* net *de X est une suite $(x_a)_{a\in A}$ à valeurs dans X indexée par un ensemble dirigé A. On dit qu'un net $(x_a)_{a\in A}$ converge vers x_∞ s'il vérifie*

$$\forall V \in \mathcal{V}(x_\infty), \quad \exists a_0 \in A \quad | \quad \forall a \geqslant a_0,\, x_a \in V.$$

(6.4) Nets convergents vus comme fonctions continues. Soit A un ensemble dirigé quelconque. On ajoute un « point à l'infini » à A, qu'on note ∞. On note le nouvel ensemble $\overline{A} = A \cup \{\infty\}$. On munit $\overline{A}$ d'une topologie ainsi :
- si $a \in A$ alors $\{a\}$ est ouvert
- une base de voisinages de ∞ est la collection des $[a_0, \infty]$ c'est-à-dire des ensembles du type

$$[a_0, \infty] = \{\infty\} \cup \{a \in A \mid a \geqslant a_0\}\,.$$

On a alors la caractérisation suivante des nets convergents :

(6.5) Proposition. *Soit $(x_a)_{a\in A}$ un net de X et x_∞. Alors, le net $(x_a)_{a\in A}$ converge vers x_∞ si, et seulement si, la fonction de $\overline{A}$ dans X qui à a associe x_a et à ∞ associe x_∞ est continue.*

(6.6) Caractérisation par les nets de la continuté. On peut alors démontrer sans difficulté, en considérant $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinage de x, qui est un ensemble dirigé :

(6.7) Théorème. *Soient X, Y des espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application. Alors*

$$f \text{ est continue}$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall (x_a)_{a\in A} \text{ net à valeurs dans } X, \quad ((x_a)_{a\in A} \to x_\infty) \Rightarrow ((f(x_a))_{a\in A} \to f(x_\infty))$$

---

(7) Catégories, groupes, k-algèbres

(7.1) Catégories. On cherche à reconstruire une catégorie $\mathcal{C}$ à partir des « relations qu'elle entretient » avec les autres catégories. En particulier, on se place dans la catégorie des catégories, qu'on note $\mathbf{Cat}$. On ignorera les problèmes de théorie des ensembles soulevés par la considération d'une telle catégorie.

– En considérant la catégorie $T_0 = \begin{tikzcd} \star \arrow[loop above] \end{tikzcd}$ munie d'un objet et d'une flèche, on peut retrouver les objets de $\mathcal{C}$ en considérant $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(T_0, \mathcal{C})$.

– En considérant la catégorie $T_1 = \begin{tikzcd} \star_a \arrow[loop above] \arrow[r] & \star_b \arrow[loop above] \end{tikzcd}$ munie de deux objets et d'une flèche entre eux, on peut retrouver tous les ensembles de morphismes $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ pour tout couple d'objet (X, Y) de $\mathcal{C}$, en considérant $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(T_1, \mathcal{C})$.

– Efin, en considérant la catégorie $T_2 = \begin{tikzcd} \star_\alpha \arrow[loop above] \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & \star_\beta \arrow[loop above] \arrow[r, "g"] & \star_\gamma \arrow[loop above] \end{tikzcd}$ munie de trois objets, de deux flèches et de leur composée, on peut retrouver les applications de composition

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z),$$

en considérant $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(T_2, \mathcal{C})$.

(7.2) Groupes. Considérons G un groupe. Cette fois-ci, pour récupérer l'ensemble sous-jacent à G, il ne faut pas considérer le groupe à un élément mais plutôt le groupe $\mathbf{Z}$. En effet, un morphisme $\mathbf{Z} \to G$ est déterminé par l'image de 1 : $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Gr}}(\mathbf{Z}, G)$ est en bijection avec l'ensemble G. Voyons maintenant comment récupérer d'autres informations sur G, à savoir : son neutre, sa loi de composition et sa fonction inverse.

– Pour le neutre, c'est très facile, il suffit de considérer $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Gr}}(\{e\}, G)$. Puis, *via* le morphisme $\mathbf{Z} \to \{e\}$, on obtient une flèche $G(\{e\}) \to G(\mathbf{Z})$ qui permet de voir l'unique élément de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Gr}}(\{e\}, G)$ comme un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Gr}}(\mathbf{Z}, G)$.

– Pour la loi de composition, il faut considérer le groupe libre à deux éléments, $\mathbf{Z} * \mathbf{Z}$, dont on note les générateurs 1_a et 1_b, respectivement. Ce groupe est muni de deux injections canoniques de i_a et i_b, définies comme suit :

$$i_a : \begin{array}{rcl} \mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{Z} * \mathbf{Z} \\ 1 & \longmapsto & 1_a \end{array} \quad \text{et} \quad i_b : \begin{array}{rcl} \mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{Z} * \mathbf{Z} \\ 1 & \longmapsto & 1_b \end{array}.$$

Ce groupe est le coproduit, dans la catégorie des groupes, de $\mathbf{Z}$ avec lui-même. Cela signifie que si $x : \mathbf{Z} \to G$ et $y : \mathbf{Z} \to G$ sont deux $\mathbf{Z}$-points, alors, il existe un unique morphisme φ (qu'on devrait en fait plutôt noter (x, y)) qui fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Z} * \mathbf{Z} \arrow[dr, "\varphi"] & \mathbf{Z} \arrow[l, "i_a"'] \arrow[d, "x"] \\ \mathbf{Z} \arrow[u, "i_b"] \arrow[r, "y"'] & G \end{tikzcd}.$$

En effet, un morphisme $\mathbf{Z} * \mathbf{Z}$ est déterminé par les images de 1_a et de 1_b. Le produit de x et y correspond alors à la composée de φ avec le morphisme

$$m : \begin{array}{rcl} \mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{Z} * \mathbf{Z} \\ 1 & \longmapsto & 1_a 1_b \end{array}.$$

– Pour l'inverse, c'est beaucoup plus facile. On dispose d'un morphisme $i : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, défini par $i(1) = -1$. Ce morphisme induit une application entre $G(\mathbf{Z})$ et $G(\mathbf{Z})$, qui correspond à l'inverse.

(7.3) k-algèbres. C'est le même genre de considérations qui permet de régler le cas de k-algèbres. Soit donc k un anneau et A une k-algèbre. Pour retrouver l'ensemble sous-jacent à A, il suffit de considérer les $k[X]$-points : en effet, un morphisme de k-algèbres $k[X] \to A$ est déterminé par l'image de l'indéterminée X.

Pour reconstruire les lois de A, il suffit de considérer la k-algèbre $k[X_a, X_b]$. De la même façon que précédemment, à tout couple de $k[X]$-points (x, y), on associe un unique morphisme $\varphi : k[X_a, X_b] \to A$. Pour retrouver la somme de x et y, on compose φ avec

$$a : \begin{array}{rcl} k[X] & \longrightarrow & k[X_a, X_b] \\ X & \longmapsto & X_a + X_b \end{array} .$$

Pour retrouver le produit de x et y, on compose φ avec

$$m : \begin{array}{rcl} k[X] & \longrightarrow & k[X_a, X_b] \\ X & \longmapsto & X_a X_b \end{array} .$$

Enfin, retrouver la structure de k-algèbres n'est pas compliqué, il suffit de considérer pour chaque $\lambda \in k$ le morphisme $k[X] \to A$ qui à X associe λ.

---

(8) Le lemme de Yoneda.

On va maintenant énoncer et démontrer le lemme de Yoneda. Comme on l'a déjà signalé, il dit que, étant donné une catégorie $\mathcal{C}$ et un objet X, « connaître les points $X(K)$ pour tout objet K permet de retrouver l'objet X ».

(8.1) Le foncteur des points. En fait, pour être plus exact, et on l'a vu dans l'exemple des ensembles ordonnés (ainsi que dans les exemples suivants), connaître les *ensembles* $X(K)$ pour tout K ne suffit pas ; il faut aussi connaître les relations entre les différents $X(K)$, c'est-à-dire les applications $X(K') \to X(K)$ induites par des $K \to K'$.

Plus précisément, si X est un objet de $\mathcal{C}$, on peut lui associer un foncteur contravariant, *le foncteur des points de* X. C'est le foncteur

$$X(\,\cdot\,) : \quad \mathcal{C} \to \mathbf{Ens}$$

qui à chaque objet K de $\mathcal{C}$ associe l'ensemble $X(K)$ de ses K-points, et qui à une flèche $K \to K'$ associe la flèche $X(K') \to X(K)$ correspondantes, entre les K-points. Ce foncteur est aussi classiquement noté h_X.

En fait, on peut voir $X(\cdot)$ comme un *objet* de la catégorie très générale des foncteurs contravariants de $\mathcal{C}$ dans $\mathbf{Ens}$, qu'on note

$$\widehat{\mathcal{C}} := \mathbf{Fun}(\mathcal{C}^\circ, \mathbf{Ens}).$$

Rappelons qu'en particulier, si F et G sont deux foncteurs de $\mathcal{C}$ dans $\mathbf{Ens}$, on définit un morphisme[4] $\varphi : F \to G$ comme la donnée pour tout objet K de $\mathcal{C}$ d'une application $\varphi_K : F(K) \to G(K)$ telle que si $K \to K'$ est un morphisme dans $\mathcal{C}$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} K \arrow[d, "f"'] & F(K) \arrow[r, "\varphi_K"] & G(K') . \\ K' & F(K') \arrow[u, "F(f)"] \arrow[r, "\varphi_{K'}"'] & G(K') \arrow[u, "G(f)"'] \end{tikzcd}$$

On a vu que quand on dispose d'un objet X de $\mathcal{C}$ on sait lui associer toute sa collection de points $X(K)$, pour tous les K ; moralement, dans cette optique, un objet F de $\widehat{\mathcal{C}}$ c'est se donner directement la collection de points $F(K)$, sans se donner d'abord l'objet X de $\mathcal{C}$ et d'ailleurs, sans qu'il existe nécessairement d'objet X de $\mathcal{C}$ engendrant la collection de points $F(K)$. Avec cette interprétation, la définition d'un morphisme de foncteurs est claire : c'est une flèche qui envoie les K-points sur les K-points, avec les nécessaires relations de compatibilité.

(8.2) Le foncteur du foncteur des points. Ainsi, à un objet X de $\mathcal{C}$ on sait associer un objet $X(\cdot)$ de $\widehat{\mathcal{C}}$. Plus précisément, on a un foncteur

$$i_{\widehat{\mathcal{C}}} := \begin{array}{c} \mathcal{C} \longrightarrow \widehat{\mathcal{C}} \\ X \longmapsto X(\cdot) \end{array} .$$

C'est un foncteur *covariant* : une flèche $f : X \to Y$ entre deux objets de $\mathcal{C}$ « passe aux points », c'est-à-dire qu'elle induit des flèches $f_K : X(K) \to Y(K)$.

(8.3) Théorème (lemme de Yoneda). *Le foncteur $i_{\widehat{\mathcal{C}}}$ est pleinement fidèle.*

Moralement, cela signifie que le foncteur $i_{\widehat{\mathcal{C}}}$ est une « injection » de $\mathcal{C}$ dans $\widehat{\mathcal{C}}$. Et donc, moralement, cela signifie que connaître tous les points de X permet de connaître X.

Dans le cadre des catégories, comme on s'intéresse plus aux objets isomorphes qu'aux objets égaux, il faut être plus précis par rapport à la notion d'« injection »... Ainsi, demander à un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ d'être « injectif », c'est plutôt vouloir que tout couple d'objets X et Y de la catégorie $\mathcal{C}$ devenant isomorphes après application du foncteur F soient déjà isomorphes dans $\mathcal{C}$.

Mathématiquement :

(8.4) Définition. *Un foncteur (covariant) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est dit* pleinement fidèle *si, pour tout couple (X, Y) d'objets de $\mathcal{C}$, l'application*

$$F(\cdot) : \begin{array}{c} Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow Hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y)) \\ \left(X \xrightarrow{f} Y \right) \longmapsto \left(F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \right) \end{array}$$

[4] Les morphismes entre foncteurs sont aussi appelés *transformations naturelles*.

est bijective.

Vérifions qu'un foncteur pleinement fidèle est « injectif » : si $F(X)$ et $F(Y)$ sont isomorphes, c'est qu'il existe φ et ψ dans $\mathcal{D}$ qui vérifient

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, shift left, "\varphi"] & F(Y) \arrow[l, shift left, "\psi"] \end{tikzcd}$$

$$\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_{F(Y)} \quad \text{et} \quad \psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{F(X)}$$

Par surjectivité, ces flèches proviennent de flèches $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{\psi}$ de $\mathcal{C}$; par injectivité, $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{\psi}$ vérifient les mêmes relations que leur consœurs : X et Y sont isomorphes.

Attention cependant, la réciproque n'est pas vraie : une foncteur « injectif » n'est pas forcément pleinement fidèle. En fait, on choisira plutôt la notion de *pleine fidélité* pour exprimer le fait qu'une catégorie « s'injecte » dans une autres.

(8.5) Démonstration du lemme de Yoneda. On veut donc démontrer que $i_{\widehat{\mathcal{C}}} : \mathcal{C} \to \widehat{\mathcal{C}}$ est un foncteur pleinement fidèle. Soient donc X et Y deux objets de $\mathcal{C}$. On veut montrer que

$$\Psi : \begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(X(\cdot), Y(\cdot)) \\ f & \longmapsto & (f_K : X(K) \to Y(K))_K \end{array}$$

est bijective.

Commençons par l'injectivité. Soient f et g deux morphismes entre X et Y qui induisent les mêmes applications sur les points : $f_K = g_K$ pour tout K. Montrons que $f = g$. On regarde ce qui se passe pour les X-points : f et g sur les X-points sont égaux. Et, les images par ces f_X et g_X du X-point de X qu'est Id_X sont justement les X-points de Y que sont f et g. Donc, $f = g$.

Pour la surjectivité : soit $\varphi : X(\cdot) \to Y(\cdot)$ un morphisme de foncteurs. On veut montrer qu'il provient d'une « vraie » flèche entre X et Y. Si c'est effectivement le cas, d'après ce qui précède, cette flèche f doit être l'image par φ_X de Id_X ; on pose donc

$$f = \varphi_X\left(\mathrm{Id}_X\right).$$

Vérifions donc que $f_K = \varphi_K$ pour tout K. Soit donc $\begin{array}{c} K \\ \downarrow p \\ X \end{array}$ un K-point de X. On peut aussi voir p comme un morphisme entre les deux « types de points » K et X, auquel cas on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} K \arrow[d, "p"'] \\ X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X(K) \arrow[r, "\varphi_K"] & Y(K) \\ X(X) \arrow[u, "\cdot \circ p"] \arrow[r, "\varphi_X"'] & Y(X) \arrow[u, "\cdot \circ p"'] \end{tikzcd} .$$

On a ainsi, en faisant tourner Id_X dans le diagramme, on vérifie que que $\varphi_K(p) = f \circ p = f_K(p)$, ce qui prouve la surjectivité !

---

(9) Variétés différentielles.

On reprend notre programme précédent, « implémenter » le lemme de Yoneda pour différentes variétés. On s'intéresse ici à la catégorie $\mathbf{Diff}^{(n)}$ des variétés différentielles de dimension n.

D'après le résultat général qu'on vient de voir, le lemme de Yoneda, on sait qu'étant donné une variété différentielle M donnée, il est possible « de la retrouver » à partir de la donnée des différents « points » $M(K)$, où K parcourt tout $\mathbf{Diff}^{(n)}$. La question qu'on se pose maintenant est : à quel « domaine » peut-on restreindre les types de point K dont on se sert comme « étalons » pour considérer les $X(K)$?

(9.1) Une première approche du problème. On se donne M une variété différentielle. En un sens intuitif, qu'on formalisera mieux plus loin, on souhaite « reconstruire » M à partir de données du type $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Diff}^{(n)}}(K, M)$ où les K sont des « types de point » bien choisis. Et, reconstruire M, si l'on connaît déjà M en tant qu'espace topologique[5], c'est connaître les anneaux de fonction régulière : connaître les $\mathcal{C}^\infty(U, \mathbf{R})$ pour les ouverts U, ainsi que les flèches de restriction, c'est connaître la structure d'espace annelé de M.

On veut donc retrouver, disons, les $\mathcal{C}^\infty(U, \mathbf{R})$ à partir des $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Diff}^{(n)}}(K, M)$. On va voir en l'occurrence, ce qui est en fait somme toute assez naturel, qu'il suffit de connaître les $\mathbf{R}^n$-points.

En effet, choisissons une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbf{R}) : U \xrightarrow{\varphi} \mathbf{R}$. On peut composer tous les morphismes $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Diff}^{(n)}}(\mathbf{R}^n, U)$ avec φ,

$$\mathbf{R}^n \xrightarrow{f} U \xrightarrow{\varphi} \mathbf{R}$$

de manière à obtenir des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$. On obtient ainsi une flèche, qui est en fait un morphisme de $\mathbf{R}$-algèbres

$$\begin{aligned} T_\cdot : \ \mathcal{C}^\infty(U, \mathbf{R}) &\longrightarrow \mathcal{F}\left(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Diff}^{(n)}}(\mathbf{R}^n, U), \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})\right) . \\ \varphi &\longmapsto T_\varphi : f \mapsto \varphi \circ f \end{aligned}$$

Ce morphisme $T_\cdot$ est-il un isomorphisme ?

Tout d'abord, il est bien injectif. Si φ_1 et φ_2 sont deux fonctions disctinctes, elles prennent des valeurs différentes en, par exemple, x_0. Dès lors, un morphisme f de $\mathbf{R}^n$ dans U qui atteint x_0 permet de détecter cette différence. En revanche, $T_\cdot$ n'est pas surjectif : la $\mathbf{R}$-algèbre de droite est trop lâche, associer un élément de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ à tout morphisme n'est pas assez demander. Il faut plus de structure, de cohérence, de conditions à imposer. C'est pourquoi on considère plutôt les applications $T : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Diff}^{(n)}}(\mathbf{R}^n, U) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ qui vérifient la condition

$$\begin{tikzcd} \mathbf{R}^n \arrow[d, "\psi"'] \arrow[dr, "f"] & \\ \mathbf{R}^n \arrow[r, "g"'] & U \end{tikzcd} \ \textit{commute} \quad \Rightarrow \quad \begin{tikzcd} \mathbf{R}^n \arrow[d, "\psi"'] \arrow[dr, "T(f)"] & \\ \mathbf{R}^n \arrow[r, "T(g)"'] & \mathbf{R} \end{tikzcd} \ \textit{commute.}$$

[5] Ce qui a été fait dans la partie **(6)** s'applique car une variété différentielle est toujours localement à base dénombrable de voisinage — comme les différents $\mathbf{R}^p$.

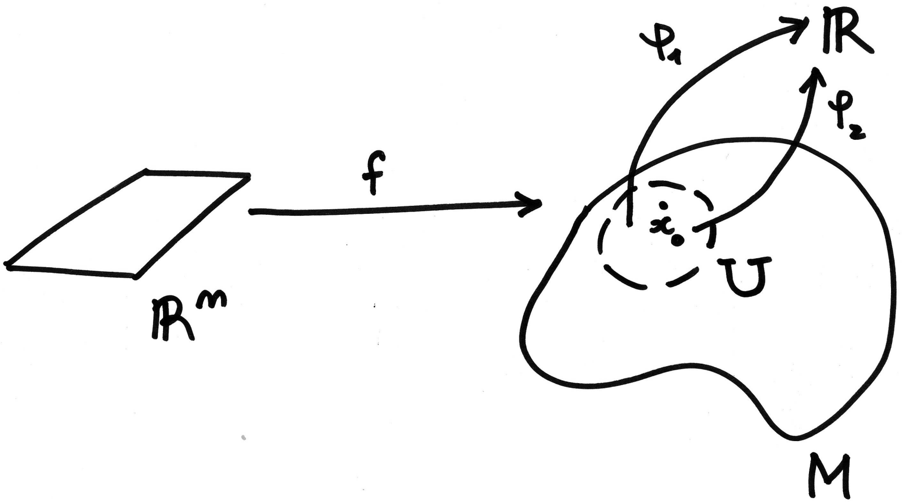


FIG. 4 – La flèche $T_\cdot$ est injective.

On notera l'ensemble de ces applications :

$$\mathcal{F}^{coh}\left(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Diff}^{(n)}}\left(\mathbf{R}^n, U\right), \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})\right).$$

On a encore un morphisme de $\mathbf{R}$-algèbres

$$T_\cdot : \ \mathcal{C}^\infty\left(U, \mathbf{R}\right) \longrightarrow \mathcal{F}^{coh}\left(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Diff}^{(n)}}\left(\mathbf{R}^n, U\right), \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})\right)$$

mais cette fois-ci, c'est un isomorphisme ! En effet, le fait que les applications soient « cohérentes » permet de définir à partir d'un tel T une fonction de U dans $\mathbf{R}$, qui, on peut le vérifier, est bien $\mathcal{C}^\infty$ — en effet, être $\mathcal{C}^\infty$ pour une telle application, c'est être $\mathcal{C}^\infty$ dans les cartes, ce qu'on impose justement.

(9.2) Une approche plus formelle. Maintenant qu'on est dotés de la notion de foncteur pleinement fidèle, on peut aborder notre problème, déterminer une « petite » donnée de points qui suffit, plus rigoureusement. On va en fait démontrer :

(9.3) Proposition *Le foncteur*

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{Diff}^{(n)} & \longrightarrow & \mathbf{Fun}\left(\begin{tikzcd} \mathbf{R}^n \arrow[loop above, "\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n)"] \end{tikzcd}, \mathbf{Ens}\right) \\ M & \longmapsto & M(\mathbf{R}^n) \end{array}$$

est pleinement fidèle.

On a noté $\begin{tikzcd} \mathbf{R}^n \arrow[loop above, "\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n)"] \end{tikzcd}$ la catégorie qui a un seul objet et dont les morphismes sont les applications $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$. Ici, l'objet, unique, n'a pas d'importance, seuls les morphismes comptent. On aurait donc pu noter cette catégorie $\begin{tikzcd} \star \arrow[loop above, "\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n)"] \end{tikzcd}$. On verra dans la suite qu'on peut en fait considérer une famille de morphismes plus petite.

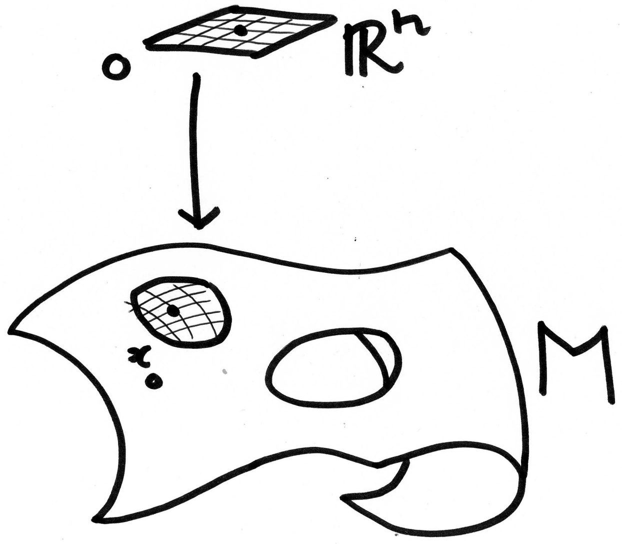


FIG. 5 – Un $\mathbf{R}^n$-point d'une variété différentielle de dimension n.

Démonstration : Soient M et N deux variétés différentielles. On doit démontrer la bijectivité de

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Diff}^{(n)}}(M, N) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fun}}\left(M(\cdot), N(\cdot)\right).$$

Commençons par l'injectivité. Si $f, g : M \to N$ sont deux morphismes distincts, il existe $x_0 \in M$ tel que $f(x_0) \neq g(x_0)$. Soit alors $p : \mathbf{R}^n \to M$ qui « atteint » x_0 : on a par exemple $p(0) = x_0$. Le point p est envoyé par f et g respectivement sur

$$f(p) : \mathbf{R}^n \xrightarrow{p} M \xrightarrow{f} N \quad \text{et} \quad g(p) : \mathbf{R}^n \xrightarrow{p} M \xrightarrow{g} N .$$

Ainsi, $f(p)(0) \neq g(p)(0)$: notre application est bien injective.

Pour la surjectivité, soit donc $\Phi : M(\cdot) \to N(\cdot)$. Vérifions pour commencer que Φ définit une fonction f de M dans N. Soit $x \in M$: quelle est l'image $f(x)$ de x ? Soit $p : \mathbf{R}^n \to M$ un point qui « atteint » x. En l'occurence, disons que a dans $\mathbf{R}^n$ est tel que $p(a) = x$. On a envie de poser : $f(x) = \Phi(p)(a)$. Il faut pour cela vérifier que $f(x)$ ne dépend pas du p et du a choisis. Commençons par montrer que $f(x)$ ne dépend que du germe de point autour de a. En effet, soit $B(a, r)$ une petite boule centrée en a et soit $\varphi : \mathbf{R}^n \to B(a, r)$ un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme qui envoie a sur a. On a alors le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{R}^n \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, "p\circ\varphi"] & \\
\mathbf{R}^n \arrow[r, "p"'] & M
\end{tikzcd}.$$

Le nouveau point $p \circ \varphi$ « correspond » à la restriction de p à $B(a, r)$. Par fonctorialité, on a :

$$\Phi(p \circ \varphi) = \Phi(p) \circ \varphi$$

(c'est en fait la même condition que celle qu'on imposait pour la « cohérence »...) et donc :

$$\Phi(p \circ \varphi)(a) = \Phi(p)(a).$$

Soient alors p' et a' des données similaires. Vu ce qu'on vient de faire ci-dessus, on peut supposer que p et p' sont des $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphismes. Il existe donc une fonction φ qui fasse commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{R}^n \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, "p"] & \\
& M \\
\mathbf{R}^n \arrow[ur, "p'"'] &
\end{tikzcd}$$

et telle que $\varphi(a) = a'$. On vérifie bien alors que

$$\Phi(p)(a) = \Phi(p')(a').$$

Il faut maintenant vérifier que cette fonction $f : M \to N$ est bien $\mathcal{C}^\infty$. Voici, sans entrer dans les détails l'idée de la démonstration. Supposons que f ne soit pas $\mathcal{C}^\infty$. Alors, on peut « localiser » ce défaut de continuité autour d'un point x_0 de M. Puis, on choisit un point $p : \mathbf{R}^n \to M$ qui est une carte pour M autour de a. Alors, la composée de p et f doit encore être une application $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbf{R}^n$ dans N. Comme p est « inversible », le caractère non-continu de f se transmet à $f \circ p$, ce qui est contradictoire. ■

(9.4) Remarque. D'après la démonstration, on peut réduire la catégorie $\begin{tikzcd} \mathbf{R}^n \arrow[loop above, "\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n{,}\mathbf{R}^n)"] \end{tikzcd}$ à une catégorie plus petite : on peut remplacer $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ par l'ensemble des fonctions engendré par une famille de $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphismes centrés en a entre $\mathbf{R}^n$ et les boules $\left(B(a, \frac{1}{m})\right)_{m \in \mathbf{N}^*}$, pour $a \in \mathbf{R}^n$ et engendré par les $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphismes de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$.

Si on arrivait à élargir notre catégorie $\mathbf{Diff}^{(n)}$ pour y inclure des objets tels que le « germe d'espace » de $\mathbf{R}^n$ autour de 0, qu'on pourrait noter $\mathcal{G}_0(\mathbf{R}^n)$, alors, on aurait un résultat similaire avec la catégorie dont l'unique objet est $\mathcal{G}_0(\mathbf{R}^n)$ et dont les morphismes sont les germes de difféomorphismes.

---

(10) Catégories de Yoneda.

Formalisons un peu ce que l'on vient de voir. Le lemme de Yoneda nous dit que connaître tous les K-points $X(K)$ d'un objet X permet de connaître X. Dans la pratique, on a vu que dans de nombreux cas, il suffisait de connaître les K-points de X pour un nombre restreint de types de points K. D'une certaine façon, ces types de point là sont les points de base pour la catégorie considérée.

(10.1) Définition. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On dit qu'une sous-catégorie $\mathcal{K}$ de $\mathcal{C}$ est de* Yoneda *pour $\mathcal{C}$ si le foncteur*

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &\longrightarrow \mathbf{Fun}(\mathcal{K}^\circ, \mathbf{Ens}) \\ X &\longmapsto X(\cdot) \end{aligned}$$

est pleinement fidèle.

Ainsi, le théorème **(8.10)** peut être reformulé, avec cette définition :

(10.2) Théorème (lemme de Yoneda). *Toute catégorie $\mathcal{C}$ est de Yoneda pour elle-même.*

(10.3) Exemples de catégories de Yoneda.

Voici une catégorie de Yoneda pour **Ens** la catégorie des ensembles :

$$\begin{tikzcd} \star \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

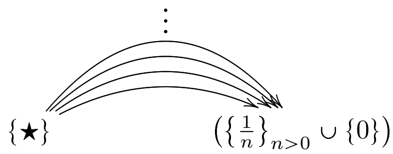
En ce qui concerne la catégorie des ensembles ordonnés, voici une catégorie de Yoneda :

$$\begin{tikzcd} \star \arrow[r, bend left, "a"] \arrow[r, bend right, "b"'] & \{\star_a \leqslant \star_b\} \end{tikzcd}$$

Pour les ensembles enrichis qu'on a introduits plus haut, une catégorie de Yoneda est

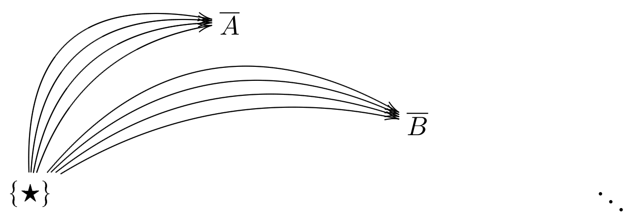
$$T_0 \longleftarrow T_1 \longleftarrow T_2 \longleftarrow \cdots .$$

Pour la catégorie des espaces topologiques localement à base dénombrable de voisinages, une catégorie de Yoneda est



où les flèches sont les morphismes d'inclusion du point.

Pour la catégorie des espaces topologiques, une catégorie de Yoneda est



où les flèches sont les morphismes d'inclusion du point et où on condière tous les nets.

Pour la catégorie des catégories, si on note

$$T_0 = \begin{tikzcd} \star \arrow[loop above] \end{tikzcd} \qquad \text{et} \qquad T_1 = \begin{tikzcd} \star_a \arrow[loop above] \arrow[r] & \star_b \arrow[loop above] \end{tikzcd} \qquad \text{et} \qquad T_2 = \begin{tikzcd} \star_\alpha \arrow[loop above] \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & \star_\beta \arrow[loop above] \arrow[r, "g"] & \star_\gamma \arrow[loop above] \end{tikzcd} ,$$

on dispose de deux foncteurs de T_0 dans T_1 et de trois foncteurs de T_1 dans T_2 :

$$\begin{tikzcd} T_0 \arrow[r, shift left, "f_a"] \arrow[r, shift right, "f_b"'] & T_1 \end{tikzcd} \qquad \text{et} \qquad \begin{tikzcd} T_1 \arrow[r, shift left=2, "g_{\alpha,\beta}"] \arrow[r, "g_{\alpha,\gamma}" description] \arrow[r, shift right=2, "g_{\beta,\gamma}"'] & T_2 \end{tikzcd} .$$

Cherchons une catégorie de Yoneda pour la catégorie des catégories. Si on considère la catégorie

$$\mathcal{K} = \left(\begin{tikzcd} T_0 \arrow[r, shift left, "f_a"] \arrow[r, shift right, "f_b"'] & T_1 \arrow[r, shift left=2, "g_{\alpha,\beta}"] \arrow[r, "g_{\alpha,\gamma}" description] \arrow[r, shift right=2, "g_{\beta,\gamma}"'] & T_2 \end{tikzcd} \right)$$

et si on considère deux catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$, alors, une flèche entre $\mathcal{C}(\cdot)$ et $\mathcal{D}(\cdot)$ se remonte entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ en un « presque-foncteur » : un foncteur qui ne vérifie pas forcément $F(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{F(X)}$. Si on veut qu'une flèche entre $\mathcal{C}(\cdot)$ et $\mathcal{D}(\cdot)$ se remonte en un foncteur, il faut ajouter les flèches de « contraction » de T_1 vers T_0 et de T_2 vers T_0 ($c_{\alpha,\beta}$ envoie α et β sur a ;$c_{\beta,\gamma}$ envoie β et γ sur b). Ainsi, une catégorie de Yoneda pour la catégorie des catégories est

$$\begin{tikzcd} T_0 \arrow[r, shift left=2, "f_a"] \arrow[r, shift right=2, "f_b"'] & T_1 \arrow[l, "r" description] \arrow[r, shift left=4, "g_{\alpha,\beta}"] \arrow[r, "g_{\alpha,\gamma}" description] \arrow[r, shift right=4, "g_{\beta,\gamma}"'] & T_2 \arrow[l, shift right=2, "c_{\alpha,\beta}" description] \arrow[l, shift left=2, "c_{\beta,\gamma}" description] \end{tikzcd} .$$

Pour la catégorie des groupes, une catégorie de Yoneda est

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Z} \arrow[r, shift left=2, "i_a"] \arrow[r, "m" description] \arrow[r, shift right=2, "i_b"'] & \mathbf{Z} * \mathbf{Z} \end{tikzcd} ,$$

où m est défini par $m(1) = 1_a \cdot 1_b$. Vérifions-le. Soient G et H deux groupes et soit $\varphi : G(\cdot) \to H(\cdot)$ une flèche entre les deux foncteurs des points associés. Pour commencer, la flèche $\varphi_{\mathbf{Z}} : G(\mathbf{Z}) \to H(\mathbf{Z})$ nous donne une fonction $f : G \to H$ qui vérifie : si $p : \mathbf{Z} \to G$ est un $\mathbf{Z}$-point de G, alors le point $\varphi_{\mathbf{Z}}(p)$ est

$$\varphi_Z(p) : \begin{array}{c} \mathbf{Z} \longrightarrow G \\ 1 \longmapsto f(p(1)) \end{array} .$$

Il faut maintenant vérifier que $f(xy) = f(x)f(y)$. Soient x et y dans G. On note $p_{(x,y)}$ le $\mathbf{Z}*\mathbf{Z}$-point de G défini par

$$p_{(x,y)} : \mathbf{Z} * \mathbf{Z} \to G \quad \text{et} \quad p_{(x,y)}(1_a) = x \quad \text{et} \quad p_{(x,y)}(1_b) = y.$$

Pour commencer, on utilise la commutativité des diagrammes

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Z} * \mathbf{Z} & G(\mathbf{Z} * \mathbf{Z}) \arrow[r, "\varphi_{\mathbf{Z}*\mathbf{Z}}"] \arrow[d, "G(i_a)"] & H(\mathbf{Z} * \mathbf{Z}) \arrow[d, "H(i_a)"] \\ \mathbf{Z} \arrow[u, "i_a"] & G(\mathbf{Z}) \arrow[r, "\varphi_{\mathbf{Z}}"] & H(\mathbf{Z}) \end{tikzcd} \qquad \text{et} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{Z} * \mathbf{Z} & G(\mathbf{Z} * \mathbf{Z}) \arrow[r, "\varphi_{\mathbf{Z}*\mathbf{Z}}"] \arrow[d, "G(i_b)"] & H(\mathbf{Z} * \mathbf{Z}) \arrow[d, "H(i_b)"] \\ \mathbf{Z} \arrow[u, "i_b"] & G(\mathbf{Z}) \arrow[r, "\varphi_{\mathbf{Z}}"] & H(\mathbf{Z}) \end{tikzcd}$$

pour montrer que

$$\varphi_{\mathbf{Z}*\mathbf{Z}}\left(p_{(x,y)}\right) = p_{f(x),f(y)}.$$

On utilise ensuite la commutativité de

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Z}*\mathbf{Z} & G(\mathbf{Z}*\mathbf{Z}) \arrow[r, "\varphi_{\mathbf{Z}*\mathbf{Z}}"] \arrow[d, "G(m)"] & H(\mathbf{Z}*\mathbf{Z}) \arrow[d, "H(m)"] \\
\mathbf{Z} \arrow[u, "m"] & G(\mathbf{Z}) \arrow[r, "\varphi_{\mathbf{Z}}"] & H(\mathbf{Z})
\end{tikzcd}$$

pour montrer que $f(xy) = f(x)f(y)$.

Pour la catégorie des k-algèbres, en notant

$$i_a : \begin{array}{rcl} k[X] & \longrightarrow & k[X_a, X_b] \\ X & \longmapsto & X_a \end{array} \qquad \text{et} \qquad i_b : \begin{array}{rcl} k[X] & \longrightarrow & k[X_a, X_b] \\ X & \longmapsto & X_b \end{array}$$

$$1 : \begin{array}{rcl} k[X] & \longrightarrow & k \\ X & \longmapsto & 1 \end{array}$$

$$a : \begin{array}{rcl} k[X] & \longrightarrow & k[X_a, X_b] \\ X & \longmapsto & X_a + X_b \end{array} \qquad \text{et} \qquad m : \begin{array}{rcl} k[X] & \longrightarrow & k[X_a, X_b] \\ X & \longmapsto & X_a X_b \end{array} ,$$

le même genre de calculs que ci-dessus permettent de montrer qu'une catégorie de Yoneda est

$$\begin{tikzcd}
k & k[X] \arrow[l, "1"'] \arrow[r, bend left, "a"] \arrow[r, shift left, "i_a"] \arrow[r, shift right, "i_b"'] \arrow[r, bend right, "m"'] & k[X_a, X_b]
\end{tikzcd}$$

Considérons maintenant k un anneau différentiel. Alors, une catégorie de Yoneda pour la catégorie des k-algèbres différentielles est :

$$\begin{tikzcd}
k & k\langle X\rangle \arrow[l, "1"'] \arrow[loop above] \arrow[r, bend left, "a"] \arrow[r, shift left, "i_a"] \arrow[r, shift right, "i_b"'] \arrow[r, bend right, "m"'] & k[X_a, X_b]
\end{tikzcd} ,$$

où $k\langle X\rangle$ est la k-algèbre engendrée par $X, X', \ldots, X^{(i)}, \ldots$, munie de la dérivation évidente, et où la flèche de $k\langle X\rangle$ dans lui-même est donnée par

$$\begin{array}{rcl} k\langle X\rangle & \longrightarrow & k\langle X\rangle \\ X & \longmapsto & X' \end{array} .$$

Enfin, pour donner un dernier exemple, une catégorie de Yoneda pour la catégorie des variétés différentielles de dimension n est

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{R}^n \arrow[loop above, "\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n)"]
\end{tikzcd} ,$$

c'est-à-dire la catégorie à un objet dont les morphismes sont les éléments de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$.

(10.4) Catégorie de Yoneda minimale ? Étant donné les définitions qu'on a données et le contexte, on est tenté de chercher à donner un sens à ce que serait une catégorie de Yoneda minimale. Ce serait, en un certain sens, le jeu de points de base minimal permettant de décrire la catégorie.

Par exemple, on peut mettre un ordre sur les catégories en disant que $\mathcal{C} \leqslant \mathcal{D}$ si les objets de $\mathcal{C}$ forment une sous-collection des objets de $\mathcal{D}$, si pour tout couple (X, Y) d'objets de $\mathcal{C}$, on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X,Y)$$

et enfin si la structure de catégorie sur $\mathcal{C}$ est induite par celle de $\mathcal{D}$. On pourrait alors définir une catégorie de Yoneda minimale pour $\mathcal{C}$ comme, tout simplement, une catégorie de Yoneda pour $\mathcal{C}$, minimale pour cette propriété.

Se poseraient alors les problèmes de l'existence d'une telle catégorie et de l'unicité.

(10.5) Un contre-exemple. L'exemple suivant montre que deux catégories de Yoneda minimales ne sont pas nécessairement isomorphes. On considère $\mathcal{C}$ la catégorie suivante :

$$\mathcal{C} = \begin{tikzcd} & T_\star \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd] & \\ T_a \arrow[dr] & & T_b \arrow[dl] \\ & T_0 & \end{tikzcd} .$$

Puis, on définit $\mathcal{D}$, qui est une catégorie de foncteurs :

$$\mathcal{D} = \{F : \mathcal{C} \to \mathbf{Ens} \quad | \quad F(T_\star) \to F(T_a) \quad \text{est surjective}\} .$$

On définit le foncteur $F_\star$, qui est un élément de $\mathcal{D}$ ainsi :

$$\begin{array}{rcl} F_\star(T_\star) & = & \{t_\star\} \\ F_\star(T_a) & = & \{t_a\} \\ F_\star(T_b) & = & \{t_b\} \\ F_\star(T_0) & = & \{t_0\} \end{array}$$

avec les flcèhes évidentes. De même, on définit F_a par

$$\begin{array}{rcl} F_a(T_\star) & = & \varnothing \\ F_a(T_a) & = & \{t_a\} \\ F_a(T_b) & = & \varnothing \\ F_a(T_0) & = & \{t_0\} \end{array}$$

avec les flèches évidentes. On définit identiquement F_b et F_0. Alors, on peut vérifier que les sous catégories de $\mathcal{D}$

$$\begin{tikzcd} F_a \arrow[dr] & & F_b \arrow[dl] \\ & F_0 & \end{tikzcd} \qquad \text{et} \qquad \begin{tikzcd} F_\star \arrow[d] \\ F_a \arrow[d] \\ F_0 \end{tikzcd}$$

sont des catégories de Yoneda minimales pour $\mathcal{D}$, sans toutefois être isomorphes.

(10.6) Quelques petites propriétés sur les catégories de Yoneda. On peut se demander par exemple à quel point une catégorie $\mathcal{C}$ est-elle déterminée par ses catégories de Yoneda. Notons simplement que si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ admettent des catégories de Yoneda isomorphes, alors $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ne sont pas du tout nécessairement équivalentes. Par exemple, toutes les sous-catégories de $\mathbf{Ens}$ (qui contiennent au moins un ensemble à un élément) admettent

$$\begin{tikzcd} \star \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

pour catégorie de Yoneda. Réciproquement, on a :

(10.7) Proposition. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie qui admet une catégorie de Yoneda isomorphe à*

$$\begin{tikzcd} \star \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

Alors, $\mathcal{C}$ est équivalente à une sous-catégorie de la catégorie des ensembles.

---

(11) Le yoga des foncteurs.

Nous voilà au but de ce texte : expliquer ce que j'appelle « le yoga des foncteurs ». Finalement, c'est plutôt simple. Il s'agit simplement de voir comment on peut généraliser certains objets. Et il s'agit de le voir avec le lemme de Yoneda.

Le lemme de Yoneda nous dit que le foncteur $i_{\widehat{\mathcal{C}}} : \mathcal{C} \to \widehat{\mathcal{C}}$ est toujours pleinement fidèle ; donc qu'en quelque sorte, il s'agit toujours d'un « plongement ». C'est donc ainsi qu'on décidera que $\widehat{\mathcal{C}}$ généralise $\mathcal{C}$: si par aventure on se retrouve un peu trop à l'étroit dans $\mathcal{C}$, qu'on a envie de construire des objets qui ne s'y trouvent pas, on essayera de voir si ça marche dans $\widehat{\mathcal{C}}$.

Voici un exemple.

(11.1) Germes de fonctions. Rappelons que si X et Y sont deux espaces topologiques, que si $f : X \to Y$ est une application continue et que $a \in X$, on peut définir le germe de f au point a, noté $\mathcal{G}_a(f)$. Il s'agit de l'information locale de l'application f autour du point a. On définit d'abord la coïncidence locale de deux fonctions autour de a :

(11.2) Définition. *Soient $f, g : X \to Y$ deux fonctions continues. On dit que f* et *g* coïncident localement autour de *a, et on note $f =_{\mathcal{V}(a)} g$, s'il existe un ouvert U de X contenant a tel que*

$$f_{|U} = g_{|U}.$$

On montre alors facilement que $=_{\mathcal{V}(a)}$ est une relation d'équivalence. On note $\mathcal{G}_a\mathcal{C}(X, Y)$ l'ensemble quotient ; on note $\mathcal{G}_a(f)$ la classe d'équivalence de f dans cet ensemble : c'est *le germe de f en a*.

(11.3) Germes d'espace. Maintenant, souvenons-nous qu'on avait pensé, dans le paragraphe sur les variétés différentielles, à un objet mathématique qui aurait été « le germe d'espace de $\mathbf{R}^n$ autour de 0 ». Plus généralement, on peut imaginer, assez facilement, des germes d'espace topologique. On pourrait même vouloir les mettre sur le même plan que les espaces topologiques. Problème ! Ils n'existent pas ! Ce n'est pas grave, on a qu'à les inventer, et pour ce faire, se placer dans $\widehat{\mathbf{Top}}$.

Soit X un espace topologique et soit $a \in X$. Imaginons que le germe d'espace $\mathcal{G}_a X$ existe... et même qu'il fasse partie de la catégorie $\mathbf{Top}$. On pourrait alors regarder son foncteur des points

$$\mathcal{G}_a X(\cdot) : \mathbf{Top} \to \mathbf{Ens}.$$

Que serait alors, si K est un autre espace topologique, l'ensemble des fonctions continues de K vers $\mathcal{G}_a X$, c'est-à-dire $X(K)$? Tout simplement, une fonction continue de K vers $\mathcal{G}_a X$ serait le germe en un point x d'une fonction f qui vérifie $f(x) = a$. On aurait donc :

$$X(K) = \bigcup_{x \in K} \{\mathcal{G}_x(f) \mid f(x) = a\}.$$

Finalement, on voit bien qu'on peut définir, dans $\widehat{\mathbf{Top}}$, le germe d'un espace topologique :

(11.4) Définition. *Soit X un espace topologique et $a \in X$. On appelle* germe d'espace de X en a *et on note $\mathcal{G}_a(X)$ le foncteur, dans $\widehat{\mathbf{Top}}$:*

$$\begin{array}{rrcl} \mathcal{G}_a(X) : & \mathbf{Top} & \longrightarrow & \mathbf{Ens} \\ & K & \longmapsto & \bigcup_{x \in K} \{\mathcal{G}_x(f) \mid f(x) = a\} \end{array}$$

(11.5) Quand on change le sens de toutes les flèches... Évidemment, dans cet exemple, on aurait été plus à l'aise si les flèches avaient été à l'envers... Plus explicitement, imaginons qu'au lieu d'avoir considéré l'ensemble $X(K)$ des K-points de X, on ait plutôt considéré :

(11.6) Définition. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et soit X un objet de $\mathcal{C}$. Soit K un autre objet, qu'on considère comme un étalon. On appelle K-*forme *de X toute flèche du type*

$$X \longrightarrow K$$

et on note

$$X[K] = Hom_{\mathcal{C}}(X, K)$$

l'ensemble des K-formes de X.

On aurait alors développé une théorie pour les K-formes exactement similaire à celle des K-points : il suffit d'ailleurs pour cela d'appliquer les résultats précédents à la catégorie $\mathcal{C}^\circ$ opposée à $\mathcal{C}$. Il faut juste faire attention à la variance des foncteurs ; par exemple, le *foncteur des formes* $X[\cdot]$ est covariant, et non contravariant.

Ainsi, avec ce point de vue dual, on peut identifier un objet X de $\mathcal{C}$ avec son foncteur des formes. Et, de ce point de vue, le germe de l'espace topologique X au point a correspond au foncteur

$$\begin{array}{rrcl} \mathcal{G}_a(X) : & \mathbf{Top} & \longrightarrow & \mathbf{Ens} \\ & K & \longmapsto & \mathcal{G}_a(X)[K] \text{ « } = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\mathcal{G}_a(X), K) \text{ »} \end{array} .$$

Il ne reste plus qu'à définir $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}\left(\mathcal{G}_a\left(X\right), K\right)$ mais, et c'est justement là notre propos, c'est plus naturel que de définir $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}\left(K, \mathcal{G}_a\left(X\right)\right)$: il suffit de poser

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}\left(\mathcal{G}_a\left(X\right), K\right) := \left\{\mathcal{G}_a(f), f : X \to K\right\}.$$

---

(12) Foncteurs représentables.

Munis des notions exposées ci-dessus, le concept de *foncteur représentable* devient enfantin. Pourquoi, dans ces conditions, se priver d'expliquer au lecteur, en trois mots, de quoi il s'agit ?

Tout d'abord, on parle d'un foncteur représentable lorsqu'il s'agit d'un foncteur du type $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Ens}$, contravariant, disons, pour fixer les esprits[6]. Donc, lorsqu'il s'agit d'un objet de la catégorie $\hat{\mathcal{C}}$. Et bien, tout simplement, on dira que ce foncteur F est *représentable* s'il provient d'un objet de $\mathcal{C}$. Ainsi, l'objet $\mathcal{G}_a(X)$ qu'on vient de construire, c'est-à-dire le foncteur

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{Top} & \longrightarrow & \mathbf{Ens} \\ K & \longmapsto & \bigcup_{x\in K}\left\{\mathcal{G}_x(f) \mid f(x) = a\right\} \end{array}$$

n'est-il pas représentable dans la plupart des cas, puisque le germe d'espace $\mathcal{G}_a\left(X\right)$ « n'existe pas », « n'est pas un vrai espace topologique ».

Formellement :

(12.1) Définition. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Ens}$ un foncteur contravariant. On dit que F est* représentable *s'il existe un objet X dans $\mathcal{C}$ tel que F soit isomorphe à $X(\cdot)$.*

On laissera au lecteur le loisir d'étudier plus en détail cette notion...

Références

[SS78] Lynn Arthur Steen et J. Arthur Seebach, Jr. : *Counterexamples in topology*. Springer-Verlag, New York, second édition, 1978.

[Wil70] Stephen Willard : *General topology*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1970.

[6]On peut évidemment faire la même chose pour des foncteurs covariants.