Lycée Louis Bascan — 2017/2018 6 décembre 2017

M. Bardavid **1$^{\text{ère}}$ S5**

DS3

Les calculatrices sont interdites.

Une partie très importante du barème sera comptée pour le soin, la rédaction et la **présence d'un brouillon** avec votre copie.
Faites des phrases.
Encadrez vos résultats en couleur, soignez votre copie, aérez-la.

Le sujet est **recto-verso**.

Durée : 55 minutes

Calculs

1. Combien vaut 0^0 ?

2. Combien vaut $(-2)^{-2}$?

3. Combien vaut $\sqrt{(5!)}$? On simplifiera le résultat.

Questions de cours

1. Soit $\ell \in \mathbb{R}$ et soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Donner la définition de « $(u_n)_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ » avec quantificateurs.

2. Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Donner la définition de « $(u_n)_n$ est croissante ».

3. Soit I un intervalle et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Donner la définition de « f est croissante sur I ».

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\sqrt{x}}}$$

Quelles sont les variations de f sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 2

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par

$$u_n = \frac{2^n}{n}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. Montrer que $2n > n + 1$.

2. Étudier les variations de $(u_n)_n$.

Exercice 3

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$u_n = \frac{n-1}{n+1}.$$

Le but de cet exercice est d'étudier les variations de $(u_n)_n$ de trois façons différentes.

1. Donner les valeurs exactes de u_0, u_1, u_2 et u_3. On simplifiera les résultats.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que vaut u_{n+1} ?

3. À l'aide de la « Méthode−Reine », étudier les variations de $(u_n)_n$.

4. On considère la fonction

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x-1}{x+1} \end{array}.$$

a) À l'aide d'une réécriture astucieuse de f, déterminer les variations de f.

b) En déduire les variations de $(u_n)_n$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geqslant 2$.

a) Montrer soigneusement que $u_n > 0$.

b) Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

c) En déduire les variations de $(u_n)_n$.

Exercice 4

On considère les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ définies par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

a) Étudier les variations de $(u_n)_n$.

b) Étudier les variations de $(v_n)_n$.