Lycée Louis Bascan — 2017/2018 | 6 décembre 2017
M. BARDAVID | $1^{\text{ère}}$ **S5**

DS3

Les calculatrices sont interdites.

Une partie très importante du barème sera comptée pour le soin, la rédaction et la **présence d'un brouillon**.
Faites des phrases.
Encadrez vos résultats en couleur, soignez votre copie, aérez-la.

Le sujet est **recto-verso**.

Exercice 1

1. Combien vaut 0^0 ?

2. Combien vaut $(-2)^{-2}$?

3. Combien vaut $\sqrt{(5!)}$? On simplifiera le résultat.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\sqrt{x}}}$$

Quelles sont les variations de f sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 3

On considère la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par

$$u_n = \frac{n-1}{n+1}.$$

1. Donner les valeurs exactes de u_0, u_1, u_2 et u_3.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que vaut u_{n+1} ?

3. À l'aide de la « méthode−Reine », étudier les variations de $(u_n)_n$.

4. On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x-1}{x+1} \end{array}.$$

a) À l'aide d'une réécriture astucieuse de f, déterminer les variations de f.

b) En déduire les variations de $(u_n)_n$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geqslant 2$.

a) Montrer soigneusement que $u_n > 0$.

b) Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

c) En déduire les variations de $(u_n)_n$.

Problème

On considère la fonction f définie par
$$f(x) = \frac{2x+1}{1+x}.$$

Partie A : étude préliminaire d'une fonction

1. Quel est le domaine de définition de f ?

2. Trouver a et b dans $\mathbb{R}$ tels que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = a + \frac{b}{1+x}.$$

3. Quelles sont la variations de la fonction f ?

4. a) Dessiner rapidement et proprement le graphe de f.

b) Placer sur le même dessin la droite d'équation $y = x$.

5. Résoudre l'équation $f(x) = x$.

6. Comparer les nombres -1 et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

7. a) Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant x$.

b) Votre réponse précédente est-elle cohérente avec le graphe de f ?

Partie B : étude d'une suite

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{si } n \geqslant 0 \end{cases}$$

7. Donner les valeurs exactes de u_0, u_1, u_2, u_3.

8. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.
Donner la définition de « $(u_n)_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ » avec quantificateurs.

9. Dans cette question, on admettra que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \left[0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right].$$

Étudier les variations de $(u_n)_n$.