

## DS 5

---

Les calculatrices sont interdites.

Une partie très importante du barème sera comptée pour le soin et la rédaction.  
Faites des phrases.

**Encadrez vos résultats en couleur**, soignez votre copie, aérez-la.

Le sujet est **recto-verso**.

---

Durée : 55 minutes

### Exercice 1 – Calculs de dérivées

Calculer les dérivées des fonctions définies par les formules suivantes :

(Les domaines de dérivabilité sont donnés)

1.  $f(x) = \sqrt{1+x^2}$  pour  $x \in \mathbb{R}$ .
2.  $g(x) = (1-x)^{2018}$  pour  $x \in \mathbb{R}$ .
3.  $h(x) = \frac{-2}{x^4}$  pour  $x \neq 0$ .
4.  $j(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}}$  pour  $x > 0$ .

### Exercice 2 – Étude d'une fonction

#### Questions préliminaires

1. Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}_+, x^3 + 1 \neq 0$ .
2. On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -2x^3 + x^2 + 1 \end{array} .$$

Donner le tableau de signes de  $f$ .

#### Étude de la fonction

Dans la suite de cet exercice, on considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x - \frac{1}{3}}{x^3 + 1} \end{array} .$$

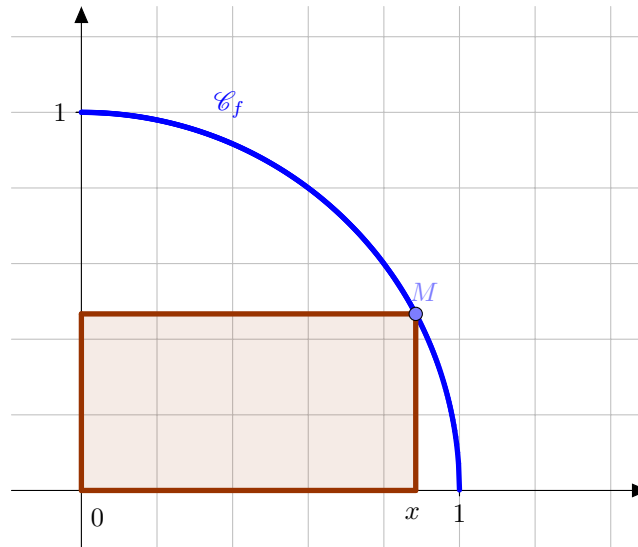
3. Calculer  $g(0)$ ,  $g(1)$  et  $g(\frac{1}{3})$ .
4. Donner le domaine de dérivabilité de  $g$ .
5. Calculer la dérivée de  $g$ .
6. Donner le tableau de signes de  $g'$ .
7. Donner le tableau de variations de  $g$ .
8. La fonction  $g$  admet-elle un maximum ? Si oui, en quel point et combien vaut-il ?

## Exercice 3 – Optimisation

Dans cet exercice, la démarche (la mise en œuvre de la solution) sera autant valorisée que les calculs.

On considère comme sur la figure suivante un rectangle dont un sommet  $M$ , d'abscisse  $x$ , parcourt la courbe  $\mathcal{C}_f$ . La courbe  $\mathcal{C}_f$ , qui est un quart de cercle, peut aussi être vue comme le graphe de la fonction

$$f : \begin{array}{l} [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{1 - x^2} \end{array}$$



1. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Factoriser  $1 - 2x^2$ .
2. Justifier le fait que  $\mathcal{C}_f$  est un quart de cercle.
3. On note  $\mathcal{A}(x)$  l'aire du rectangle.
  - a) Donner une formule pour  $\mathcal{A}(x)$ .
  - b) Trouver la valeur de  $x$  pour laquelle l'aire du rectangle est maximale.
  - c) Montrer que, dans ce cas, le rectangle est un carré.

## Exercice 4 – Dérivées successives

Dans cet exercice, toute prise d'initiative sera valorisée.

Quelles sont les dérivées successives de la fonction  $f$  définie par

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{1 + x^2} \end{array} \quad ?$$