Lycée Louis Bascan — 2017/2018 | 23 mai 2018
M. Bardavid | $1^{\text{ère}}$ **S5**

DS 8

Les calculatrices sont autorisées.

Une partie très importante du barème sera comptée pour le soin et la rédaction.
Faites des phrases.
Encadrez vos résultats en couleur, soignez votre copie, aérez-la.

Le sujet est **recto-verso**.

Durée : 55 minutes

Exercice 1

1) Soit $n \in \mathbb{N}$.
   a) Combien y a-t-il de termes dans la somme $\sum_{k=0}^{n} k$?
   b) Combien vaut cette somme ?
   c) Démontrer la formule précédente.
2) Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite arithmétique de raison r telle que

$$u_{10} = 0 \quad \text{et} \quad u_{90} = 100.$$

   a) Combien vaut r ?
   b) Combien vaut u_0 ?
   c) Calculer u_{100}.
   d) Calculer $u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}$.

Exercice 2

Dans cet exercice, on pourra s'aider de la calculatrice.

Un QCM comporte vingt questions. Pour chaque question, trois réponses sont proposées dont une seule est correcte. Yannis décide de répondre au hasard à toutes les questions du QCM.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses de Yannis.

1) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants.
   On donnera une valeur exacte et une valeur approchée.
   a) A = « Yannis obtient exactement quatorze bonnes réponses. »
   b) B = « Yannis répond correctement à toutes les questions. »
   c) C = « Yannis donne au moins une bonne réponse. »
   d) D = « Yannis répond correctement à 10 ou moins de 10 questions. »
   e) E = « Le nombre de bonnes réponses données par Yannis est compris (au sens large) entre 5 et 10. »
2) Calculer $\mathrm{E}(X)$ et interpréter le résultat.
3) Calculer $\mathrm{V}(X)$.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On lance n dés à six faces.
Combien vaut la probabilité qu'on obtienne au moins un « six » ou au moins un « cinq » ?

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On note

$$\begin{aligned} I_n &= \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots \\ P_n &= \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots \\ S_n &= I_n + S_n \\ T_n &= S_n - I_n. \end{aligned}$$

Le but de cet exercice est de calculer ces quantités, et, en particulier, T_n.

1) Combien vaut S_n ? Justifier votre réponse.
2) On suppose n impair.
   a) Montrer que $I_n = P_n$.
   b) Combien vaut T_n ?
3) Traiter le cas où n est pair.

Exercice bonus

Trouver un nombre entier p, aussi optimal que possible, tel que

$$3^{1000} \geqslant 10^p.$$

On pourra utiliser que $3^{12} \approx 2^{19}$.