Noyaux de formes linéaires

Notations

Soit E un espace vectoriel et $n \in \mathbb{N}^*$.

- *Si $\mathscr{F} = (x_1, \dots, x_n) \in E^n$ est une famille de E, on note*

$$\mathrm{CL}_{\mathscr{F}} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & E \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \end{array} \right. .$$

- *Quand $\mathscr{B}$ est une base de E, on peut prouver que $\mathrm{CL}_{\mathscr{B}}$ est inversible. On note alors* $\mathrm{Coords}_{\mathscr{B}}$ *sa réciproque. On a*

$$\mathrm{Coords}_{\mathscr{B}} : E \longrightarrow \mathbb{K}^n.$$

Introduction

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On rappelle qu'on note $E^* := \mathrm{L}(E, \mathbb{K})$. L'espace E^* est aussi appelé espace dual de E.

Le but de ce problème est de montrer que

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}\,\varphi_i\right) = \dim E - \dim \mathrm{Vect}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p).$$

1. Combien vaut $\dim E^*$, en fonction de $\dim E$?

2. Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ et soient $(\varphi_i)_i \in (E^*)^p$, $(\psi_j)_j \in (E^*)^q$ telles que

$$\mathrm{Vect}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p) = \mathrm{Vect}(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_q).$$

Montrer que

$$\bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}\,\varphi_i = \bigcap_{j=1}^{q} \mathrm{Ker}\,\psi_j.$$

3. Notons $n := \dim E$. Dans la suite, pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note p_i l'application

$$p_i : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \longmapsto & x_i \end{array} \right. .$$

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

a) Montrer que $p_i \circ \mathrm{Coords}_{\mathscr{B}} \in E^*$.

b) Décrivez plus précisément cette forme linéaire.

c) On note $e_i^* := p_i \circ \mathrm{Coords}_{\mathscr{B}}$. Montrer que $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^*.

Définition

La base $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ de E^* est appelée base duale de $(e_1, \dots, e_n)$.

4. Soit $\mathscr{F} := (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) \in (E^*)^n$. On note

$$\Phi_{\mathscr{F}} : \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ x \longmapsto \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \vdots \\ \varphi_n(x) \end{pmatrix} \end{cases} .$$

a) On suppose que $\mathscr{F}$ est une base de E^*. Montrer que $\Phi_{\mathscr{F}}$ est un isomorphisme.

b) On suppose que $\mathscr{F}$ n'est pas une base. Montrer que $\Phi_{\mathscr{F}}$ n'est pas un isomorphisme.

5. On considère l'application

$$\Psi : \begin{cases} E^n \longrightarrow \mathrm{L}(\mathbb{K}^n, E) \\ \mathscr{F} \longmapsto \mathrm{CL}_{\mathscr{F}} \end{cases} .$$

a) Montrer que Ψ est linéaire.

b) Montrer que Ψ est un isomorphisme.

6. Soit $\mathscr{F} := (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ une base de E^*.

a) Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\Phi_{\mathscr{F}} = \mathrm{Coords}_{\mathscr{B}}$.

b) Montrer que cette base $\mathscr{B}$ est unique.

7. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soient $\varphi_1, \dots, \varphi_p \in E^*$.
Montrer que

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker} \varphi_i\right) = \dim E - \dim \operatorname{Vect}\big(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p\big).$$