JBE : Mathématiques

Les calculatrices sont autorisées.

Une partie très importante du barème sera comptée pour le soin et la rédaction.
Faites des phrases.
Encadrez vos résultats en couleur, soignez votre copie, aérez-la.

Le sujet comporte trois pages.

---

durée : 2 heures

Exercice 1

Une entreprise fabrique des canapés.
On admet que la fabrication mensuelle est comprise entre 0 et 120 canapés.
On note x le nombre de canapés produits et vendus chaque mois, on modélise :

— les coûts, exprimés en euros, par la fonction C définie sur $[0;120]$ par

$$C(x) = 0{,}04x^3 - 0{,}4x^2 + 380x + 6\,000\,;$$

— les recettes, exprimés en euros, par la fonction R définie sur $[0;120]$ par $R(x) = 912x$.

Soit B la fonction qui à x associe le bénéfice réalisé pour la fabrication et la vente mensuelle de x canapés.

1) Exprimer le bénéfice $B(x)$ en fonction de x.
2) a) Calculer, pour tout x de $[0;120]$, $B'(x)$.
   b) Dresser le tableau de variation de la fonction B.
3) Déduire de ce qui précède le bénéfice maximal réalisable par l'entreprise ainsi que le nombre de produits à fabriquer pour l'obtenir.

Exercice 2

1) Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $g(x) = 2\sqrt{x} - x - 1$.
   a) Étudier le sens de variation de g sur $[0;+\infty[$.
   b) Démontrer que, pour tout x de $[0;+\infty[$, $2\sqrt{x} \leq x + 1$.
2) Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.
   a) Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
   b) Étudier la position relative de cette tangente par rapport à $\mathscr{C}_f$.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Une urne contient une boule rouge et n boules blanches.
On tire successivement et avec remise deux boules de l'urne.

1) Exprimer en fonction de n la probabilité des événements suivants :

   M : « Les deux boules sont de la même couleur »

   N : « Les deux boules sont de couleur différente »

2) On considère le jeu suivant : le joueur perd $(n+1)^2$ euros si M est réalisé et gagne $2(n+1)^2$ euros sinon. On appelle X la variable aléatoire égale au gain (positif ou négatif) du joueur.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   b) Démontrer que $E(X) = -n^2 + 4n - 1$.
   c) Pour quelles valeurs de n le jeu est-il favorable au joueur ?

Exercice 4

Un arbre représente la répétition de $(n+1)$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes (avec n nombre entier naturel non nul).
Soit k un nombre entier naturel avec $0 \leq k \leq n-1$.
Le nombre de chemins qui réalisent $(k+1)$ succès lors des $(n+1)$ épreuves est : $\binom{n+1}{k+1}$.

1) Démontrer la formule de Pascal :

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

2) Démontrer que, pour tout entier naturel n et pour tout entier naturel k compris entre 0 et $n-2$:

$$\binom{n+2}{k+2} = \binom{n}{k+2} + 2\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}.$$

3) Sachant que $\binom{6}{1} = 6$; $\binom{6}{2} = 15$ et $\binom{6}{3} = 20$, en déduire la valeur du coefficient $\binom{8}{3}$.

Exercice 5

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ des vecteurs non nuls tels que : $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \equiv \frac{\pi}{4}\ (2\pi)$ et $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \equiv \frac{5\pi}{6}\ (2\pi)$.
Déterminer la mesure principale des angles suivants :

a) $(-\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$; b) $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$; c) $(2\overrightarrow{u}, 3\overrightarrow{v})$; d) $(-\overrightarrow{v}, -\overrightarrow{w})$.

Exercice 6

Soient α un réel de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$ tel que $\cos(\alpha)=\frac{3}{5}$ et M le point du cercle trigonométrique $\mathscr{C}_{\text{trig}}$ de mesure angulaire α.

1) Placer le point M sur le cercle $\mathscr{C}_{\text{trig}}$.
2) Placer les points du cercle $\mathscr{C}_{\text{trig}}$ associés aux réels :

   a) $\pi+\alpha$; b) $-\alpha$; c) $\frac{\pi}{2}+\alpha$.
3) Déterminer la valeur exacte de $\sin(\alpha)$.
4) Calculer les valeurs exactes :

   a) $\sin(\pi+\alpha)$; b) $\sin(-\alpha)$; c) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$.

Exercice 7

1) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $2\cos(x)+\sqrt{3}=0$.
2) Résoudre, dans $\mathbb{R}$ puis dans $]-\pi;\pi]$, l'équation $\sin(2x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.
3) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $\sin(x)=\cos(x)$.

Exercice 8

On souhaite étudier d'un point de vue statistique le nombre d'enfants par foyer dans une ville. Les données recueillies sont les suivantes :

Nombre d'enfants dans le foyer	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Effectifs	45	47	83	35	12	4	3	1	1

1) Combien y a-t-il de foyers dans la ville étudiée ?
2) Quel est le nombre moyen d'enfants par foyer ?
3) Expliquer ce que mesure l'écart-type d'une série statistique.
4) Quel est l'écart-type du nombre d'enfants par foyer ?

Exercice 9

Trouver une série statistique dont la moyenne vaut 5 et l'écart-type 2.