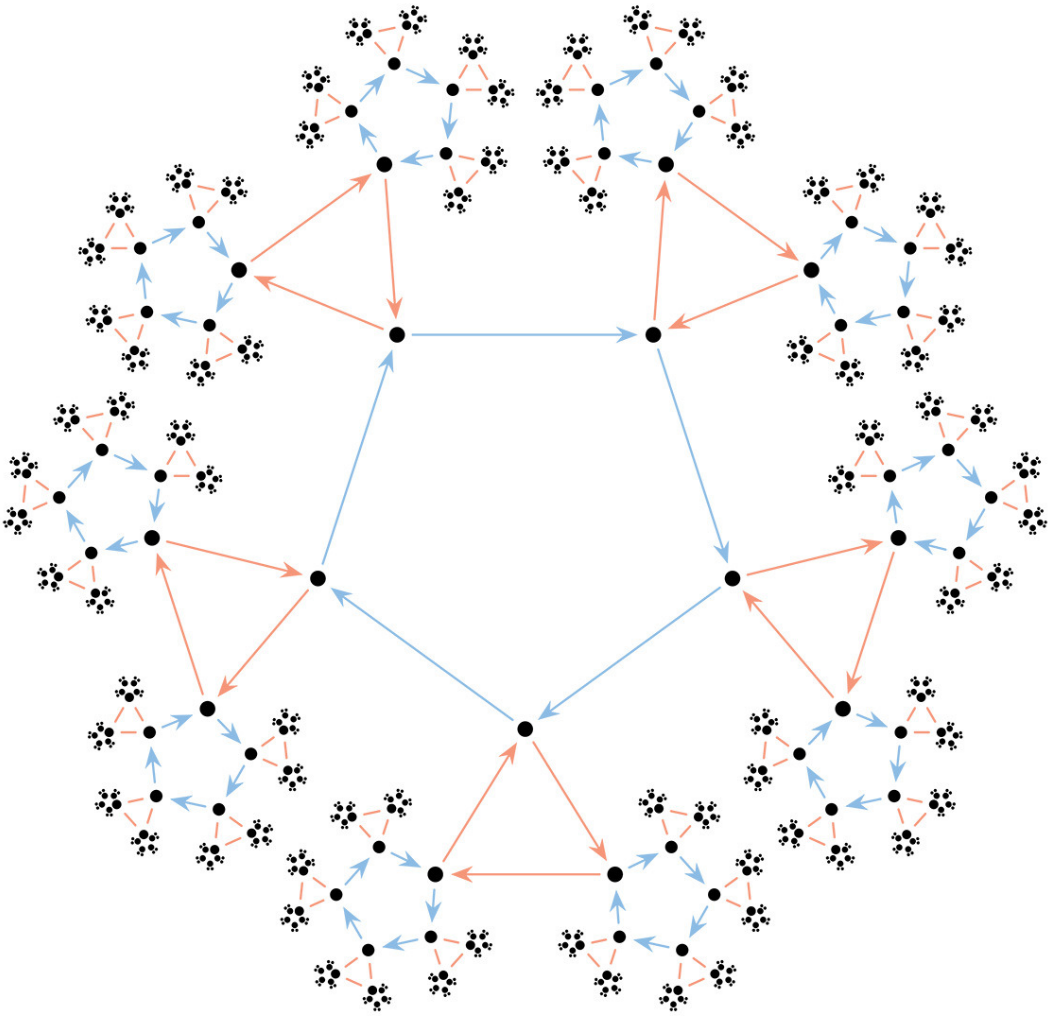
PCSI 3
2019/2020

Lycée Sainte-Geneviève
10 mars 2020

Dénombrement

Cahier de gammes



Énoncés

○ **Exercice** DÉNO.**1**
Combien le mot « ANANAS » possède-t-il d'anagrammes ?

→ solution p. 7

○ **Exercice** DÉNO.**2**
La classe de **PCSI 3** compte 40 élèves.
Quelle est la probabilité pour qu'au moins deux d'entre eux aient leur anniversaire le même jour ?
On part du principe qu'une année comporte 365 jours.

→ solution p. 8

○ **Exercice** DÉNO.**3**
Soit $r \in \mathbb{N}^*$.

1) Combien y a-t-il de nombres à au plus r chiffres ?
2) Combien y a-t-il de nombres à r chiffres exactement ?

→ solution p. 9

○ **Exercice** DÉNO.**4**
Un jeu de cartes non truqué comporte 52 cartes. Une main est constituée de 8 cartes.

1) Quel est le nombre de mains possibles ?
2) Quel est le nombre de mains possibles avec au moins un as ?
3) Quel est le nombre de mains possibles avec au moins un cœur ou une dame ?
4) Quel est le nombre de mains possibles avec exactement un as et exactement un cœur ?
5) Quel est le nombre de mains possibles comportant des cartes d'exactement 2 couleurs ?
6) Quel est le nombre de mains possibles comportant deux couleurs au plus ?
7) Quel est le nombre de mains possibles avec 8 cartes dont les rangs se suivent ?

→ solution p. 10

◯ **Exercice DÉNO.5**

Le bureau d'une association de 10 personnes, dont 6 femmes, est constitué d'un président, d'un trésorier et d'un secrétaire. Le cumul de fonction est exclu.

1) Déterminer le nombre de bureaux possibles.
2) Combien de bureaux peut-on former sachant que le président est un homme et le secrétaire une femme ?
3) Combien de bureaux exclusivement féminins peut-on former ?
4) Combien de bureaux peut-on former où les hommes et les femmes sont présents ?
5) Combien de bureaux peut-on former sachant que Mme X refuse de siéger avec M. Y ?

→ solution p. 13

◯ **Exercice DÉNO.6**

Soient $n, N \in \mathbb{N}^*$.

On considère un ensemble E formé constituée de N individus. On effectue un prélèvement de n individus avec remise. Le résultat est donc un n-uplet d'individus de E.

Soit x un individu. Soient $k, m, r, s, t \in \mathbb{N}$.

On note :

- A l'ensemble des n-uplets où x a été prélevé k fois ;
- B l'ensemble des n-uplets où x a été prélevé m fois au cours des r premiers tirages ;
- C l'ensemble des n-uplets où x a été prélevé pour la s-ième fois au t-ième tirage.

a) Calculer le cardinal de A.
b) Calculer le cardinal de B.
c) Calculer le cardinal de C.

→ solution p. 15

◯ **Exercice DÉNO.7**

Soient $b, r \in \mathbb{N}^*$.

Considérons une urne contenant des boules colorées et numérotées : b boules blanches et r boules rouges. On pose $n := b + r$.

1) On effectue 5 tirages successifs avec remise.
   Le résultat d'un tirage est la liste ordonnée des boules tirées.
   Dénombrer toutes les configurations, puis celles ayant :
   a) 2 blanches puis 3 rouges ;
   b) 2 blanches exactement ;
   c) 1 blanche au plus ;
   d) 1 blanche au moins.
2) Mêmes questions avec 5 tirages successifs sans remise.

→ solution p. 17

◯ **Exercice DÉNO.8**

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.

Calculer Card $\left\{ f : [\![1, n]\!] \longrightarrow [\![1, n]\!] \;\middle|\; f(1) \neq f(2) \right\}$.

→ solution p. 20

Exercice DÉNO.9

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.

On considère

$$\mathfrak{S}_n := \left\{ f : [\![1,n]\!] \longrightarrow [\![1,n]\!] \;\middle|\; f \text{ est bijective } \right\},$$

ainsi que

$$A := \left\{ f \in \mathfrak{S}_n \;\middle|\; f(1) = 2 \right\}$$

Calculer $\operatorname{Card}(A)$.

→ solution p. 21

Exercice DÉNO.10

Soit $n \geqslant 3$.

On considère l'ensemble $E := \left\{ f : [\![1,n]\!] \longrightarrow [\![1,n]\!] \;\middle|\; f \text{ est bijective } \right\}$ et la partie $A \subset E$ définie par

$$A := \left\{ f \in E \;\middle|\; f(n) > f(1) \right\}.$$

Calculer $\operatorname{Card}(A)$.

→ solution p. 22

Exercice DÉNO.11

Soit E un ensemble fini de cardinal n et soit $k \in \mathbb{N}^*$.

On considère l'ensemble

$$\mathscr{E} := \left\{ (E_1, \dots, E_k) \in \mathscr{P}(E)^k \mid \text{les } E_i \text{ sont deux à deux disjointes} \right\}.$$

Déterminer $\operatorname{Card} \mathscr{E}$.

→ solution p. 23

Exercice DÉNO.12

Soient $m, h, p \in \mathbb{N}$. Une étagère comporte des livres *distincts* :

- m livres de mathématiques ;
- h livres d'histoire ;
- p livres de philosophie.

On pose $N := m + h + p$.

a) Combien y a-t-il de façons de ranger cette étagère ?

b) Même question en imposant un rangement par genre.

c) Même question en imposant uniquement que les livres de maths soient groupés.

→ solution p. 24

◯ **Exercice** DÉNO**.13**

On distribue 7 prospectus dans 10 boîtes aux lettres nominatives.

De combien de façons peut-on le faire si :

a) on met au plus un prospectus dans chaque boîte aux lettres et les prospectus sont identiques ?

b) on met au plus un prospectus dans chaque boîte aux lettres et les prospectus sont tous différents ?

c) on met un nombre quelconque de prospectus dans chaque boîte aux lettres et les prospectus sont tous différents ?

d) on met un nombre quelconque de prospectus dans chaque boîte aux lettres et les prospectus sont identiques ?

→ solution p. 25

Solutions

○ **Exercice** DÉNO.1
Combien le mot « ANANAS » possède-t-il d'anagrammes ?

Solution

Le mot « ANANAS » possède 6 lettres et il en est de même pour chaque anagramme de « ANANAS ».
Pour construire une anagramme, on procède comme suit :

1. D'abord, on choisit les deux emplacements où seront situés les deux « N ». On a $\binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2}$ choix possibles, *ie* on a 15 choix.
2. Puis, on choisit l'emplacement où l'on mettra le « S ». Il reste 4 emplacements possibles. On en choisit un. On a 4 choix possibles.

De plus, ce procédé de construction d'une anagramme de « ANANAS » est exhaustif et sans redondance.

Par conséquent, il y a : $15 \times 4 \boxed{= 60 \text{ anagrammes}}$ du mot « ANANAS ».

◯ **Exercice** DÉNO.**2**
La classe de **PCSI 3** compte 40 élèves.
Quelle est la probabilité pour qu'au moins deux d'entre eux aient leur anniversaire le même jour ?
On part du principe qu'une année comporte 365 jours.

Solution

Combien y a-t-il de « distribution d'anniversaires » possibles ?
Pour construire une telle distribution :

1. Pour le premier élève, on a 365 choix possibles.
2. Pour le deuxième élève également.

⋮ *etc.*

De plus, ce procédé de construction d'une distribution d'anniversaires est exhaustif et sans redondance.

Ainsi, il y a 365^{40} distributions d'anniversaires.

Maintenant, on va compter les distributions d'anniversaires deux à deux distincts.
Pour construire une telle distribution :

1. Pour le premier élève, on a 365 choix possibles.
2. Pour le deuxième élève, on a 364 choix possibles.

⋮ ⋮

40. Enfin, pour le 40ᵉ élève, : on a $365 - 40 + 1$ choix possibles.

De plus, ce procédé de construction d'une telle distribution d'anniversaires est exhaustif et sans redondance.

Donc, on a $365 \times 364 \times \cdots \times 365 - 40 + 1$ choix possibles, *ie* $\dfrac{365\,!}{325\,!}$ distributions d'anniversaires deux à deux distincts.

Ainsi, la probabilité qu'aucun des élèves de **PCSI 3** ne soit né le même jour vaut $\dfrac{365\,!}{325\,! \times 365^{40}}$.
Et donc, la probabilité pour qu'au moins deux élèves de **PCSI 3** aient leur anniversaire le même jour vaut

$$\boxed{1 - \frac{365\,!}{325\,! \times 365^{40}} \approx 89\%.}$$

■

Exercice DÉNO.3

Soit $r \in \mathbb{N}^*$.

1) Combien y a-t-il de nombres à au plus r chiffres ?
2) Combien y a-t-il de nombres à r chiffres exactement ?

Solution

1) Pour construire un nombre à au plus r chiffres, on procède de la façon suivante.
   1. Pour le chiffre des unités, on a 10 choix possibles.
   2. Pour le chiffre des centaines, on a 10 choix possibles.
   $\vdots$ $\vdots$
   ***r*.** Enfin, pour le r^{e} chiffre, on a 10 choix possibles.

   De plus, ce procédé de construction d'une nombre à r chiffres est exhaustif et sans redondance.

   Donc, on a 10^r choix possibles : il y a $\boxed{10^r \text{ nombres à au plus } r \text{ chiffres.}}$

2) Pour construire un nombre à exactement r chiffres, on procède de la façon suivante.
   1. Pour le chiffre des unités, on a 10 choix possibles.
   2. Pour le chiffre des centaines, on a 10 choix possibles.
   $\vdots$ $\vdots$
   ***r*.** Enfin, pour le r^{e} chiffre, on a 9 choix possibles. En effet, ce dernier chiffre ne peut pas être égal à 0.

   De plus, ce procédé de construction d'une nombre à exactement r chiffres est exhaustif et sans redondance.

   Ainsi, il y a $\boxed{9 \times 10^{r-1} \text{ nombres à exactement } r \text{ chiffres.}}$

◯ **Exercice** DÉNO.4

Un jeu de cartes non truqué comporte 52 cartes. Une main est constituée de 8 cartes.

1) Quel est le nombre de mains possibles ?
2) Quel est le nombre de mains possibles avec au moins un as ?
3) Quel est le nombre de mains possibles avec au moins un cœur ou une dame ?
4) Quel est le nombre de mains possibles avec exactement un as et exactement un cœur ?
5) Quel est le nombre de mains possibles comportant des cartes d'exactement 2 couleurs ?
6) Quel est le nombre de mains possibles comportant deux couleurs au plus ?
7) Quel est le nombre de mains possibles avec 8 cartes dont les rangs se suivent ?

Solution

1) Choisir une main de 8 cartes revient à choisir 8 cartes dans un ensemble de 52 cartes.

   Donc, il y a $\boxed{\binom{52}{8} \text{ mains à 8 cartes.}}$

2) Comptons les mains sans aucun as. Comme il y a 4 as, choisir une main de 8 cartes sans as revient à choisir 8 cartes dans un ensemble de $52 - 4$ cartes. Donc, il y a $\binom{48}{8}$ mains à 8 cartes sans as.

   Donc, le nombre de mains à 8 cartes comportant au moins un as est

$$\boxed{\binom{52}{8} - \binom{48}{8}.}$$

3) Remarquons pour commencer qu'il y a 13 cœurs dans un paquet de 52 cartes. Donc, il y a $13 + 3$ cartes qui sont ou des cœurs ou une dame. En raisonnant comme pour la question précédente, on voit que le nombre de mains sans cœur ni dame vaut

$$\binom{52-13}{8} \quad ie \quad \binom{39}{8}.$$

   Donc, le nombre de mains à 8 cartes comportant au moins un cœur ou une dame est

$$\boxed{\binom{52}{8} - \binom{39}{8}.}$$

4) On doit distinguer le cas de l'as de cœur.

- Notons M_1 l'ensemble des mains qui contiennent l'as de cœur, aucun autre as et aucun autre cœur. Comptons le nombre d'éléments dans M_1 : choisir un élément de M_1 revient à choisir une partie à 7 éléments parmi les $52-13$ cartes qui ne sont ni un cœur ni un as. Donc, on a

$$\text{Card}\, M_1 = \binom{52-13}{7} = \binom{39}{7}.$$

- Maintenant, notons M_2 l'ensemble des mains qui contiennent un unique as (trèfle, carreau ou pique) et un unique cœur (qui ne soit pas un as). Pour construire, une main de M_2, on procède la manière suivante.
  1. Pour l'as, on a 3 choix possibles.
  2. Pour le cœur, on a 12 choix possibles.
  3. Pour les autres cartes, il faut prendre 6 cartes parmi les $52-13$ cartes qui ne sont ni un cœur ni un as : il y a $\binom{52-13}{6} = \binom{39}{6}$ choix possibles.

De plus, ce procédé de construction d'une main de M_2 est exhaustif et sans redondance.

On a donc $\text{Card}\, M_2 = 3 \times 12 \times \binom{39}{7}$.

En conclusion, le nombre de mains recherchées vaut

$$\binom{39}{7} + 3 \times 12 \times \binom{39}{7} = \boxed{(1+3\times 12)\binom{39}{7}.}$$

5) Comptons le nombre de mains possédant exactement 2 couleurs. Pour construire une telle main, on procède la manière suivante.

1. On choisit 2 couleurs parmi les 4 : on a $\binom{4}{2}$ choix.

2. Pour ces deux couleurs : on a $\frac{52}{2} = 26$ cartes possibles. On choisit 8 cartes parmi ces 26 carte. On a donc $\binom{26}{8}$ choix possibles.

3. Parmi ces choix, il faut exclure les cas où l'on a choisi que des cartes de la même couleur. Soit on a pris que des cartes de la première couleur, et on a $\binom{13}{8}$ tels choix possibles ; soit, on l'a fait pour la deuxième couleurs, , et on a $\binom{13}{8}$ tels choix possibles. On doit donc exclure $2 \times \binom{13}{8}$ choix.

De plus, ce procédé de construction de telles mains est exhaustif et sans redondance.

Donc, le nombre de telles mains est

$$\boxed{\binom{4}{2} \times \left(\binom{26}{8} - 2 \times \binom{13}{8}\right).}$$

6) Comptons le nombre de mains possédant au plus 2 couleurs. Une telle main soit possède une seule couleur, soit possède exactement deux couleurs. On a déjà compté le nombre de mains possédant exactement deux couleurs. Il nous reste à compte le nombre de mains avec un seule couleur. Pour construire une telle main, on procède la manière suivante.

1. On choisit 1 couleurs parmi les 4 : on a 4 choix.

2. Il y a 13 cartes de cette couleur. On choisit 8 cartes parmi ces 13 carte. On a donc $\binom{13}{8}$ choix possibles.

De plus, ce procédé de construction des mains à une couleur est exhaustif et sans redondance.

Donc, le nombre de mains à une couleur vaut $4 \times \binom{13}{8}$.

Donc, le nombre de mais à au plus deux couleurs vaut

$$\boxed{\binom{4}{2} \times \left(\binom{26}{8} - 2 \times \binom{13}{8}\right) + 4 \times \binom{13}{8}.}$$

7) Comptons le nombre de mains possibles avec 8 cartes dont les rangs se suivent. Chaque couleur possède 13 cartes. Donc, il y a $13 - 8 + 1 = 6$ choix possibles pour la première carte de cette suite : elle peut être un 2, un 3, ..., un 7.

Ainsi, pour construire une telle main, on procède de la façon suivante.

1. On choisit la première carte de notre suite. On a 6 choix possibles.

2. On a ensuite 8 carte à choisir. Pour la première de ces cartes, on a 4 choix.

3. Pour la suivante, on a également 4 choix.

⋮ ⋮

De plus, ce procédé de construction de telles mains est exhaustif et sans redondance.

Donc, le nombre de mains possibles avec 8 cartes dont les rangs se suivent vaut

$$\boxed{6 \times 4^8.}$$

Exercice DÉNO.5

Le bureau d'une association de 10 personnes, dont 6 femmes, est constitué d'un président, d'un trésorier et d'un secrétaire. Le cumul de fonction est exclu.

1) Déterminer le nombre de bureaux possibles.
2) Combien de bureaux peut-on former sachant que le président est un homme et le secrétaire une femme ?
3) Combien de bureaux exclusivement féminins peut-on former ?
4) Combien de bureaux peut-on former où les hommes et les femmes sont présents ?
5) Combien de bureaux peut-on former sachant que Mme X refuse de siéger avec M. Y ?

Solution

1) Pour former un bureau, on procède de la manière suivante.

   1. On choisit le président : il y a 10 choix possibles.
   2. On choisit le trésorier : il y a 9 choix possibles.
   3. Enfin, on choisit le secrétaire : il y a 8 choix possibles.

   De plus, ce procédé de construction d'un bureau est exhaustif et sans redondance.

   Donc, il y a $\boxed{8 \times 9 \times 10}$ bureaux possibles.

2) On veut déterminer le nombre de bureaux avec un homme comme président et une femmes comme secrétaire. Pour former un tel bureau, on procède de la manière suivante.

   1. On choisit le président : il y a 4 choix possibles (car il y a 4 hommes dans l'association).
   2. On choisit la secrétaire : il y a 6 choix possibles.
   3. Enfin, on choisit le trésorier : il reste 8 personnes possibles.

   De plus, ce procédé de construction d'un bureau avec un président homme et une secrétaire femme est exhaustif et sans redondance.

   Donc, il y a $\boxed{4 \times 6 \times 8}$ tels bureaux possibles.

3) On veut déterminer le nombre de bureaux entièrement féminins. Pour former un tel bureau, on procède de la manière suivante.

   1. On choisit la président : il y a 6 choix possibles.
   2. On choisit la trésorière : il y a 5 choix possibles.
   3. Enfin, on choisit la secrétaire : il reste 4 choix possibles.

   De plus, ce procédé de construction d'un bureau entièrement féminin est exhaustif et sans redondance.

   Donc, il y a $\boxed{4 \times 5 \times 6}$ bureaux entièrement féminins possibles.

4) De même, le nombre de bureaux entièrement masculins vaut $2 \times 3 \times 4$.
   Par conséquent, le nombre de bureaux mixtes vaut

$$\boxed{8 \times 9 \times 10 - \left(4 \times 6 \times 8 + 2 \times 3 \times 4\right).}$$

5) On suppose que Mme X refuse de siéger avec M. Y. Comptons le nombre de bureaux possibles. Pour cela, on va compter le nombre de bureaux qui réunissent Mme X et M. Y. Pour former un tel bureau, on procède de la manière suivante.

   1. On choisit la troisième personne du bureau : on a 8 choix possibles.
   2. On attribue un rôle à Mme X : on a 3 choix possibles.
   3. On attribue un rôle à M. Y : il reste 2 choix possibles.
   4. Le rôle de la troisième personne du bureau est alors entièrement déterminée.

   De plus, ce procédé de construction d'un bureau réunissant Mme X et M. Y est exhaustif et sans redondance.

   Donc, le nombre de bureaux réunissant Mme X et M. Y vaut $8 \times 2 \times 3$.
   Par conséquent, le nombre de bureaux possibles sachant que que Mme X refuse de siéger avec M. Y vaut

$$\boxed{8 \times 9 \times 10 - 8 \times 2 \times 3.}$$

○ **Exercice** DÉNO.6

Soient $n, N \in \mathbb{N}^*$.

On considère un ensemble E formé constituée de N individus. On effectue un prélèvement de n individus avec remise. Le résultat est donc un n-uplet d'individus de E.

Soit x un individu. Soient $k, m, r, s, t \in \mathbb{N}$.

On note :

- A l'ensemble des n-uplets où x a été prélevé k fois ;
- B l'ensemble des n-uplets où x a été prélevé m fois au cours des r premiers tirages ;
- C l'ensemble des n-uplets où x a été prélevé pour la s-ième fois au t-ième tirage.

a) Calculer le cardinal de A.

b) Calculer le cardinal de B.

c) Calculer le cardinal de C.

Solution

a) Commençons par calculer $\operatorname{Card} A$.

Pour construire un élément de A, on procède de la façon suivante.

1. On choisit les k places parmi les n places possibles (dans le n-uplet) où l'on va mettre l'individu x. Il y a $\binom{n}{k}$ façons possibles de faire ce choix.

2. On choisit les autres éléments que x. On $n-k$ éléments à choisir. Pour chaque élément, on a $N-1$ choix. Au total, on a donc $(N-1)^{n-k}$ choix possibles pour ces éléments restants.

De plus, ce procédé de construction d'un élément de A est exhaustif et sans redondance.

Donc, on a

$$\boxed{\operatorname{Card} A = \binom{n}{k} \times (N-1)^{n-k}.}$$

b) Calculons maintenant $\operatorname{Card} B$. Le calcul de $\operatorname{Card} B$ utilise celui de $\operatorname{Card} A$. En effet, on peut utiliser le résultat de $\operatorname{Card} A$ pour $n \leftarrow r$ et $k \leftarrow m$. On obtient le nombre de tirages possibles pour les r premiers éléments du n-uplet :

$$\binom{r}{m} \times (N-1)^{r-m}.$$

Pour les $n-r$ tirages restants, on n'a aucune contrainte. Il y a donc N^{n-r} choix possibles.

De plus, ce procédé de construction d'un élément de B est exhaustif et sans redondance.

On a donc

$$\boxed{\operatorname{Card} B = \binom{r}{m} \times (N-1)^{r-m} \times N^{n-r}.}$$

c) Enfin, calculons le cardinal de C.

Pour construire un élément de C, *ie* un n-uplet où x a été prélevé pour la s-ième fois au t-ième tirage, on procède de la façon suivante :

1. On sait qu'au cours de $t-1$ premiers tirages, x a été prélevé $s-1$ fois. On choisit donc les $t-1$ places parmi les $s-1$ places correspondantes aux choix de x. On a $\binom{t-1}{s-1}$ choix possibles.

2. Ensuite, pour les $(t-1)-(s-1) = t-s$ places restantes, on a $N-1$ choix à chaque fois. Donc, au total, on a $(N-1)^{t-s}$ choix.

3. Pour l'individu en position t, on n'a pas le choix : c'est nécessairement x.

4. Enfin, pour les $n-t$ individus restants, on a N choix à chaque fois. Donc, on a N^{n-t} choix possibles.

De plus, ce procédé de construction d'un élément de C est exhaustif et sans redondance.

On a donc

$$\boxed{\operatorname{Card} B = \binom{t-1}{s-1} \times (N-1)^{t-s} \times N^{n-t}.}$$

Exercice DÉNO.**7**
Soient $b, r \in \mathbb{N}^*$.
Considérons une urne contenant des boules colorées et numérotées : b boules blanches et r boules rouges.
On pose $n := b + r$.

1) On effectue 5 tirages successifs avec remise.
   Le résultat d'un tirage est la liste ordonnée des boules tirées.
   Dénombrer toutes les configurations, puis celles ayant :
   a) 2 blanches puis 3 rouges ;
   b) 2 blanches exactement ;
   c) 1 blanche au plus ;
   d) 1 blanche au moins.
2) Mêmes questions avec 5 tirages successifs sans remise.

Solution

1) Dénombrons toutes les configurations. Pour construire une configuration, on procède de la manière suivante.
   1. Pour la première boule, on choisit un élément parmi les n boules distinctes : on a n choix possibles.
   2. Pour la deuxième boule, de même, on a n choix possibles.
   ⋮ ⋮
   5. Pour la cinquième boule, de même, on a n choix possibles.

   De plus, ce procédé de construction d'une configuration est exhaustif et sans redondance.

   On a donc $\boxed{n^5}$ configurations.

   a) Dénombrons les configurations ayant 2 boules blanches puis 3 rouges. Pour construire une telle configuration, on procède de la manière suivante.
      1. Pour la première boule, on choisit un élément parmi les b boules blanches : on a b choix possibles.
      2. Pour la deuxième boule, de même, on a b choix possibles.
      3. Pour les trois boules suivantes, on a chaque fois r choix possibles.

      De plus, ce procédé de construction d'une telle configuration est exhaustif et sans redondance.

      Il y a donc $\boxed{b^2 \times r^3}$ configurations ayant 2 boules blanches puis 3 rouges.

b) Dénombrons les configurations ayant 2 boules blanches exactement. Pour construire une telle configuration, on procède de la manière suivante.

1. On choisit à quelles places seront les 2 boules blanches. On a $\binom{5}{2}$ choix possibles.

2. Pour la première de ces deux places, on a b choix possibles.

3. Pour la deuxième de ces deux places, on a b choix possibles également.

4. Pour les trois boules suivantes, on a chaque fois r choix possibles.

De plus, ce procédé de construction d'une configuration ayant 2 boules blanches exactement est exhaustif et sans redondance.

Il y a donc $\boxed{\binom{5}{2} \times b^2 \times r^3}$ configurations ayant 2 boules blanches exactement.

c) Dénombrons les configurations ayant 1 bouche blanche au plus. Il y a les configurations sans aucune boule blanche : il y en a r^5. Et, il y a les configurations avec 1 boule blanche exactement. Il y en $\binom{5}{1} \times b \times r^4$. Au total, il y a donc $\boxed{r^5 + 5 \times b \times r^4}$ configurations ayant 1 bouche blanche au plus.

d) Dénombrons les configurations ayant 1 boule blanche au moins. On dénombre les configurations contraires : ce sont celles sans aucune boule blanche, et il y en a r^5.

Donc, il y a $\boxed{n^5 - r^5}$ configurations ayant 1 bouche blanche au moins.

2) On considère les mêmes questions mais en supposant désormais les 5 tirages successifs sans remise.

- Dénombrons toutes les configurations.
  Pour construire une configuration, on procède de la manière suivante.

  1. Pour la première boule, on choisit un élément parmi les n boules distinctes : on a n choix possibles.

  2. Pour la deuxième boule, il ne nous reste plus que $n-1$ choix possibles.

  ⋮ ⋮

  5. Pour la cinquième boule, de même, on a $n-4$ choix possibles.

  De plus, ce procédé de construction d'une configuration est exhaustif et sans redondance.

  On a donc $\boxed{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$ configurations.

- Dénombrons les configurations ayant 2 boules blanches puis 3 rouges. Pour construire une telle configuration, on procède de la manière suivante.
  1. Pour la première boule, on choisit un élément parmi les b boules blanches : on a b choix possibles.
  2. Pour la deuxième boule, il reste $b-1$ choix possibles.
  3. Pour les trois boules suivantes, on a d'abord r choix possibles, puis $(r-1)$ choix, puis $(r-2)$ choix.

De plus, ce procédé de construction d'une telle configuration est exhaustif et sans redondance.

Il y a donc $\boxed{b(b-1)r(r-1)(r-2)}$ configurations ayant 2 boules blanches puis 3 rouges.

- Dénombrons les configurations ayant 2 boules blanches exactement.
  Pour construire une telle configuration, on procède de la manière suivante.
  1. On choisit à quelles places seront les 2 boules blanches. On a $\binom{5}{2}$ choix possibles.
  2. Pour la première de ces deux places, on a b choix possibles.
  3. Pour la deuxième de ces deux places, on a $b-1$ choix possibles.
  4. Pour les trois boules suivantes, on a d'abord r choix possibles, puis $r-1$ choix, puis $r-2$ choix.

De plus, ce procédé de construction d'une configuration ayant 2 boules blanches exactement est exhaustif et sans redondance.

Il y a donc $\boxed{\binom{5}{2} \times b(b-1)r(r-1)(r-2)}$ configurations ayant 2 boules blanches exactement.

- Dénombrons les configurations ayant 1 bouche blanche au plus.
  - ▷ Il y a les configurations sans aucune boule blanche : il y en a $r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)$.
  - ▷ Et, il y a les configurations avec 1 boule blanche exactement. Il y en $\binom{5}{1} \times b \times r(r-1)(r-2)(r-3)$.

  Au total, il y a donc $r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4) + 5 \times b \times r(r-1)(r-2)(r-3)$, *ie* il y a

$$\boxed{r(r-1)(r-2)(r-3)(5b+(r-4)).}$$

  configurations ayant 1 bouche blanche au plus.

- Dénombrons les configurations ayant 1 boule blanche au moins. On dénombre les configurations contraires : ce sont celles sans aucune boule blanche, et il y en a r^5.
  Donc, il y a $\boxed{n^5 - r^5}$ configurations ayant 1 bouche blanche au moins.

■

○ **Exercice DÉNO.8**
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.
Calculer $\operatorname{Card}\left\{f : [\![1,n]\!] \longrightarrow [\![1,n]\!] \;\middle|\; f(1) \neq f(2)\right\}$.

Solution 1

On note

$$A := \left\{f : [\![1,n]\!] \longrightarrow [\![1,n]\!] \;\middle|\; f(1) \neq f(2)\right\}.$$

Pour construire un élément f de A, on procède comme suit :

1. D'abord, on choisit une valeur pour $f(1)$: on a n choix possibles.
2. Puis, on choisit une valeur pour $f(2)$: on a $(n-1)$ choix possibles car $f(1) \neq f(2)$.
3. Ensuite, on choisit une valeur pour $f(3)$: on a n choix possibles.

$\vdots$

***n*.** Enfin, on choisit une valeur pour $f(n)$: on a n choix possibles.

De plus, ce procédé de construction de $f \in A$ est exhaustif et sans redondance.

Par conséquent, on a : $\operatorname{Card} A = n \times (n-1) \times n^{n-2} = \boxed{(n-1)n^{n-1}.}$ ■

Solution 2

Dénombrons le complémentaire de A. On note

$$B \;:=\; [\![1,n]\!]^{[\![1,n]\!]} \setminus A \;=\; \left\{f : [\![1,n]\!] \longrightarrow [\![1,n]\!] \;\middle|\; f(1) = f(2)\right\}.$$

Pour construire un élément f de B, on procède comme suit :

1. D'abord, on choisit une valeur pour $f(1)$: on a n choix possibles.
2. Puis, on choisit une valeur pour $f(2)$: on a un seul choix possible car $f(1) = f(2)$.
3. Ensuite, on choisit une valeur pour $f(3)$: on a n choix possibles.

$\vdots$

***n*.** Enfin, on choisit une valeur pour $f(n)$: on a n choix possibles.

De plus, ce procédé de construction de $f \in B$ est exhaustif et sans redondance.

Par conséquent, on a : $\operatorname{Card} B = n^{n-1}$. De plus, on sait que $\operatorname{Card}\left([\![1,n]\!]^{[\![1,n]\!]}\right) = n^n$.

Ainsi, on a $\operatorname{Card} A = n^n - n^{n-1} = \boxed{n^{n-1}(n-1)}$: on retrouve le résultat de la première solution. ■

Exercice DÉNO.9
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.
On considère
$$\mathfrak{S}_n := \left\{ f : [\![1,n]\!] \longrightarrow [\![1,n]\!] \;\middle|\; f \text{ est bijective} \right\},$$
ainsi que
$$A := \left\{ f \in \mathfrak{S}_n \;\middle|\; f(1) = 2 \right\}$$
Calculer $\mathrm{Card}(A)$.

Solution

Déjà, on sait que $\mathrm{Card}\,\Omega = n!$.
Dénombrons A. Pour construire un élément f de A, on procède comme suit :

1. Pour la valeur pour $f(1)$: <u>on a un seul choix possible</u>.
2. Puis, on choisit une valeur pour $f(2)$: <u>on a $(n-1)$ choix possibles</u>. En effet, $f(2) \in [\![1,n]\!] \setminus \{2\}$.
3. Ensuite, on choisit une valeur pour valeur $f(3)$: <u>on a $(n-2)$ choix possibles</u>.

$\vdots$ $\vdots$

n. Enfin, on choisit une valeur pour $f(n)$: <u>il n'y a plus qu'un seul choix possible</u>.

De plus, ce procédé de construction de $f \in A$ est exhaustif et sans redondance.

Par conséquent, on a : $\mathrm{Card}\,A = (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1 = \boxed{(n-1)!}$.

○ **Exercice** DÉNO.10

Soit $n \geqslant 3$.

On considère l'ensemble $E := \left\{ f : [\![1, n]\!] \longrightarrow [\![1, n]\!] \;\middle|\; f \text{ est bijective} \right\}$ et la partie $A \subset E$ définie par

$$A := \left\{ f \in E \;\middle|\; f(n) > f(1) \right\}.$$

Calculer $\operatorname{Card}(A)$.

Solution

Déjà, on peut remarquer que $\operatorname{Card} E = n!$.

Dénombrons A. Pour construire un élément f de A, on procède comme suit :

1. On choisit une partie P à 2 éléments de $[\![1, n]\!]$: on a $\dbinom{n}{2}$ choix possibles.
2. On pose $f(1) = \min P$ et $f(n) = \max P$: on a un seul choix possible.
3. Il nous reste à choisir $f(2), \ldots, f(n-1)$.
   Ces valeurs définissent une bijection de $[\![2, n-1]\!]$ dans $[\![1, n]\!] \setminus P$: on a $(n-2)!$ choix possibles.

De plus, ce procédé de construction de $f \in A$ est exhaustif et sans redondance.

Par conséquent, on a : $\operatorname{Card} A = \dbinom{n}{2} \times (n-2)! = \dfrac{n(n-1)}{2} \times (n-2)! = \boxed{\dfrac{n!}{2}}.$ ■

Exercice DÉNO.11
Soit E un ensemble fini de cardinal n et soit $k \in \mathbb{N}^*$.
On considère l'ensemble

$$\mathscr{E} := \left\{ (E_1, \ldots, E_k) \in \mathscr{P}(E)^k \mid \text{les } E_i \text{ sont deux à deux disjointes} \right\}.$$

Déterminer $\operatorname{Card} \mathscr{E}$.

Première solution

Dénombrons $\mathscr{E}$.
Construire un élément $(E_1, \ldots, E_k)$ de $\mathscr{E}$, équivaut à construire k parties $E_1, \ldots, E_k$ disjointes.
Au lieu de construire directement ces parties, faisons ce qui suite : à chaque $x \in E$, on associe un entier compris dans $[\![0, k]\!]$. Autrement dit, on choisit $f : E \longrightarrow [\![0, k]\!]$. Maintenant, déduisons de la fonction f choisie une famille de k parties deux à deux disjointes. On dit que E_1 est l'ensemble des $x \in E$ envoyés sur 1 par f ; de même pour E_2, *etc.*. ; les éléments de E envoyés sur 0 sont ceux qui n'appartiennent à aucune des parties E_i.

> De plus, ce procédé de construction de $(E_1, \ldots, E_k) \in \mathscr{E}$ est exhaustif et sans redondance.

Autrement dit, on a une bijection entre $\mathscr{E}$ et les applications de E dans $[\![0, k]\!]$.
Ainsi, $\operatorname{Card} \mathscr{E} = \operatorname{Card}\left([\![0, k]\!]^E \right) = \boxed{(k+1)^n.}$ ■

Deuxième solution

Construisons un couple de bijections réciproques entre $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}(E, [\![0, k]\!])$.
On considère

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{E} & \longrightarrow & \mathscr{F}\left(E, [\![0, k]\!]\right) \\ (E_1, \ldots, E_k) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & [\![0, k]\!] \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E_1 \\ 2 & \text{si } x \in E_2 \\ \vdots & \\ k & \text{si } x \in E_k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

et

$$\Psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{F}\left(E, [\![0, k]\!]\right) & \longrightarrow & \mathscr{E} \\ f & \longmapsto & \left(f^{\langle -1 \rangle}(\{1\}), f^{\langle -1 \rangle}(\{2\}), \cdots, f^{\langle -1 \rangle}(\{k\}), \right) \end{array} \right. .$$

On peut vérifier que Φ et Ψ sont des bijections réciproques l'une de l'autre.
Autrement dit, on a une bijection entre $\mathscr{E}$ et les applications de E dans $[\![0, k]\!]$.
Ainsi, $\operatorname{Card} \mathscr{E} = \operatorname{Card}\left([\![0, k]\!]^E \right) = \boxed{(k+1)^n.}$ ■

◯ **Exercice DÉNO.12**

Soient $m, h, p \in \mathbb{N}$. Une étagère comporte des livres *distincts* :

- m livres de mathématiques ;
- h livres d'histoire ;
- p livres de philosophie.

On pose $N := m + h + p$.

a) Combien y a-t-il de façons de ranger cette étagère ?

b) Même question en imposant un rangement par genre.

c) Même question en imposant uniquement que les livres de maths soient groupés.

Solution

a) Il y a autant de façons de ranger les livres que d'ordonner l'ensemble des N livres.
Il y a donc $\boxed{N!\text{ façons}}$ de le faire.

b) Pour ranger les livres par genre, on procède de la façon suivante.

1. On choisit d'abord l'ordre des genres. *Ie*, on choisit un ordre sur l'ensemble $\{\text{maths}, \text{histoire}, \text{philosophie}\}$. On a $3! = 6$ façons possibles de le faire.

2. On choisit ensuite l'ordre des livres de maths. On a $m!$ façons de le faire.

3. De même, on a $h!$ façons d'ordonner les livres d'histoire.

4. Enfin, on a $p!$ façons d'ordonner les livres de philosophie.

De plus, ce procédé de construction d'une façon de ranger les livres par genre est exhaustif et sans redondance.

Donc, il y a

$$\boxed{6 \times m!\, h!\, p!}$$

façons de ranger par genre ces livres sur l'étagère.

c) Pour ranger les livres en gardant les livres de maths groupés, on procède de la façon suivante.

1. On choisit la place du premier livre de maths parmi tous les livres. Si on note k cette place, on a $k \in [\![1, N - m + 1]\!]$. On a donc $N - m + 1$ choix possibles.

2. On choisit ensuite l'ordre des livres de maths. On a $m!$ façons de le faire.

3. Puis, on choisit ensuite l'ordre des livres restants. Il y a $(N - m)!$ façons de faire.

De plus, ce procédé de construction d'une façon de ranger l'étagère en gardant les livres groupés est exhaustif et sans redondance.

Donc, il y a

$$\boxed{(N - m + 1) \times m! \times (N - m)!}$$

façons de ranger les livres de cette façon.

■

◯ **Exercice** DÉNO.**13**

On distribue 7 prospectus dans 10 boîtes aux lettres nominatives.

De combien de façons peut-on le faire si :

a) on met au plus un prospectus dans chaque boîte aux lettres et les prospectus sont identiques ?

b) on met au plus un prospectus dans chaque boîte aux lettres et les prospectus sont tous différents ?

c) on met un nombre quelconque de prospectus dans chaque boîte aux lettres et les prospectus sont tous différents ?

d) on met un nombre quelconque de prospectus dans chaque boîte aux lettres et les prospectus sont identiques ?

Solution

On note E l'ensemble des boîtes aux lettres. On a $\operatorname{Card} E = 10$.

a) Dans ce premier cas, connaître la distribution des prospectus équivaut à savoir quelles boîtes aux lettres ont été servies. Donc, le nombre de telles distributions égal le nombre de parties de E à 7 éléments. Ainsi, le nombre de façons de faire vaut, dans ce cas

$$\boxed{\binom{10}{7}.}$$

b) On suppose désormais que les prospectus sont tous différents.

Pour effectuer une telle distrubtion, on procède de la façon suivante.

1. On choisit les 7 boîtes dans lesquelles on va distribuer les prospectus. On a $\binom{10}{7}$ choix possibles.

2. Pour la première boîte aux lettres choisie, on a 7 choix de prospectus possibles.

3. Pour la deuxièmes boîte aux lettres choisie, il nous reste 8 choix possibles.

⋮ ⋮

8. Pour la septième boîte aux lettres choisie, il nous reste 1 choix possibles.

De plus, ce procédé de construction d'une telle distribution est exhaustif et sans redondance.

Donc, le nombre de façons d'effectuer une telle distribution vaut

$$\binom{10}{7} \times 7! = \boxed{\frac{10\,!}{3\,!}.}$$

c) On suppose désormais que les prospectus sont tous différents. Mais, on peut en mettre plusieurs dans chaque boîte aux lettres.

Pour effectuer une telle distrubtion, on procède de la façon suivante.

1. On attribue au premier prospectus un numéro de boîte aux lettres. On a 10 choix possibles.

2. De même, pour le deuxième prospectus, on choisit un numéro de boîte aux lettres. On a 10 choix possibles.

$\vdots$ $\vdots$

7. Pour le septième et dernier prospectus, il y a aussi 10 choix possibles.

De plus, ce procédé de construction d'une telle distribution est exhaustif et sans redondance.

Donc, le nombre de façons d'effectuer une telle distribution vaut

$$\boxed{10^7.}$$

d) Dans ce dernier cas, il faut utiliser l'astuce des taquets.

On doit séparer les 7 prospectus en 10 tas distincts. Cela revient à imaginer $7 + 9 = 16$ cases dans lesquelles on va disposer 9 taquets. Ces 9 taquets vont délimiter 10 groupes de cases correspondant au nombre de prospectus à distribuer pour chacune des 10 boîtes aux lettres.

On a donc $\boxed{\binom{16}{9}}$ telles distributions.