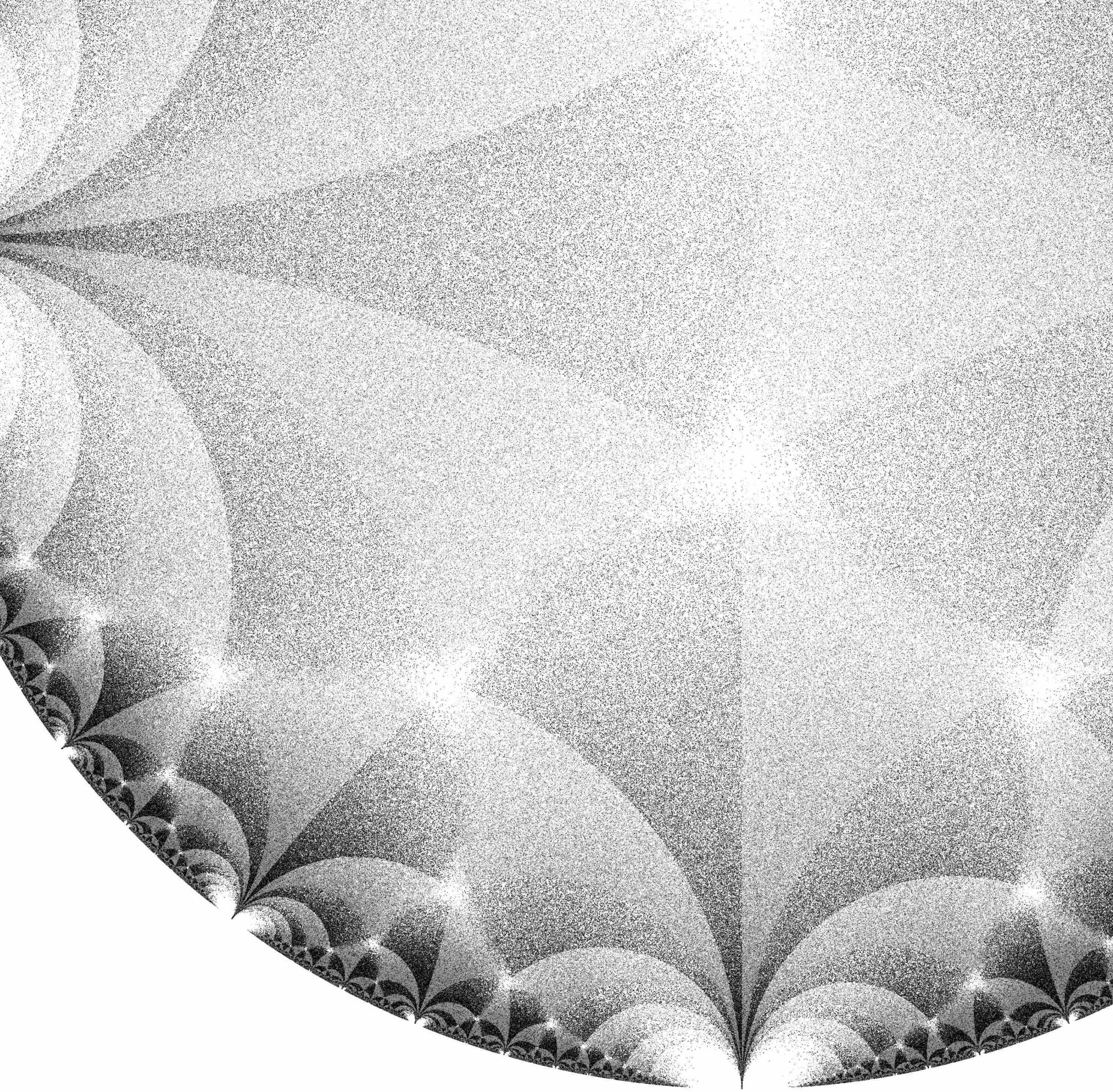


Cahier de calcul

échauffements, entraînements et approfondissements

Mathématiques Expertes

673 calculs

Page web du *Cahier de calcul*,
dernières versions

Ce cahier de calcul a été écrit collectivement par une équipe composée de professeurs en classes préparatoires et de professeurs en lycée.

Conception et coordination

Colas Bardavid

Aide à la coordination

Jérôme Trochon

Équipe des auteurs

Mélissa Baillœuil-Inglart
Romain Basson
Ménard Bourgade
Van Bien Bui
Carole Chabanier
Blaise Le Meaux
Anthony Ollivier
Alan Pellé
Nicolas Popoff
Jérôme Trochon

Relecture

Rémy Allou, Thibaut Deheuvels, Anne-Lucie Delvallez, Alain Camanes, Pierre Cauchois, Anne Foubert, Jérôme Gärtner, Éliane Gayout, William Gregory, Benjamin Groux, Jonathan Harter, Marie Hézard, Sandrine et Hadrien Larôme, Landry Lavoine, Arthur Meyer, Pedro Montoya, Inès Nebzry, Quang-Thai Ngo, Sébastien Pellerin

Illustrations

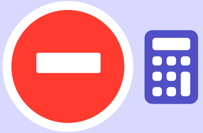
Le pictogramme de l'horloge a été créé par Ralf Schmitzer (The Noun Project).
Le pictogramme de la roue crantée a été créé par AFY Studio (The Noun Project).
Le pictogramme de la calculatrice a été créé par Sita Raisita (The Noun Project).
Le pictogramme du bateau a été créé par Mello (The Noun Project).

L'illustration de la couverture a été réalisée par Colas Bardavid, inspirée par une réalisation similaire de Simone Conradi. Elle illustre les propriétés de certaines matrices, en lien avec l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Version 1.5.0 — 25 janvier 2025

Sommaire

Dans tout ce livre, l'usage de la calculatrice
est strictement et formellement interdit.



Utiliser une calculatrice pour les exercices serait tout simplement absurde :
le but même de ce livre est de fournir à l'étudiant
un outil pour s'entraîner au calcul.

Introduction

Le calcul

Le calcul a parfois été délaissé par l'école.

On lui reprochait son côté rébarbatif, on disait que les calculatrices pouvaient s'en charger.
On lui préférait les activités de recherche, plus ludiques, plus intéressantes.
On déconseillait de donner aux élèves des fiches de calcul.

Certes, savoir chercher est essentiel ; mais, tout de même, ce faisant, on a formé des élèves à qui il manquait quelque chose de fondamental.

Les vertus du calcul

Le calcul a de nombreuses qualités, de nombreuses vertus.

- Le calcul est indispensable aux mathématiques.

  Sans calcul, les mathématiques seraient un paysage inerte, sans mouvement.
  C'est le calcul qui permet de transformer une expression $A(x)$ en une autre expression $B(x)$.
  C'est le calcul qui permet de montrer que deux quantités sont égales, que deux choses sont identiques.
  Quand on explore une situation mathématique, l'intuition est la boussole, c'est elle qui nous indique la direction à prendre. Mais c'est le calcul qui permet d'avancer, de passer d'une étape à la suivante.

- Le calcul permet de se familiariser avec les objets mathématiques compliqués.

  Certains objets mathématiques sont difficiles à appréhender. Qu'on pense par exemple aux vecteurs. On peut être dérouté la première fois qu'on doit raisonner avec les vecteurs. Dans ce cas, il est conseillé de beaucoup calculer avec les vecteurs. À force d'en faire, on s'y habitue ; à la fin, on n'est plus dérouté.

- Le calcul donne des idées.

  Face à un problème mathématique, être fort en calcul est très utile. On imagine rapidement ce qui va se passer, on peut prévoir « de tête » la direction globale du calcul et donc prendre une bonne direction.

- Le calcul est comme un échauffement mathématique.
- Le calcul est *a priori* une activité sans piège.

  Il suffit de suivre les règles méthodiquement.

- Le calcul peut même être ludique !

L'intérêt du calcul

C'est très simple.

Si vous voulez bien comprendre les mathématiques, le calcul est indispensable.

Quand on apprend à jouer au piano, faire des gammes est, de même, indispensable. Elles permettent de délier les doigts, elles permettent d'ancrer dans les mains des habitudes, des réflexes. Sans gamme, certains morceaux sont inabordables.

De même, la pratique du calcul permet de mieux comprendre les mathématiques.

Le cahier de calcul

Le cahier de calcul est l'outil idéal pour vous entraîner au calcul, **en toute autonomie**.

Il a été conçu par une large équipe de professeurs de mathématiques, en lycée et en classes préparatoires, tous soucieux de vous apporter **l'aide et les outils pour réussir**.

Pour profiter totalement de cet outil, **pratiquez régulièrement** : nous vous conseillons de faire (au moins) quinze minutes de calcul chaque jour.

Comment est-il organisé ?

Trois parties pour chaque fiche

Chaque fiche du cahier de calcul est divisée en trois parties :

- une première partie de calculs généraux, destinée à **vous entraîner sur les fondamentaux** ;
- la partie principale, qui porte sur le thème de **la fiche en question** ;
- une dernière partie, composée de **calculs plus avancés**, qui est prévue pour ceux qui veulent aller plus loin.

Des pictogrammes

Le temps de résolution de chaque calcul (incluant la longueur et la technicité du calcul) est symbolisé par :

- des bateaux ⛵ pour les exercices de calculs généraux ;
- des horloges 🕒 pour les exercices de la partie principale ;
- des roues crantées ⚙ pour les exercices plus avancés.

Des cadres pour les réponses

Vous êtes invité à écrire directement les réponses dans les cadres prévus à cet effet.

Une erreur ? Une remarque ?

Si jamais vous voyez une erreur d'énoncé ou de corrigé, ou bien si vous avez une remarque à faire, n'hésitez pas à nous écrire à l'adresse `cahierdecalcul@gmail.com`. *Merci en nous contactant de donner l'identifiant de la fiche, écrit en gris clair en haut à gauche de chaque fiche.*

Conventions suivies dans ce livre

Polynômes

Dans ce cahier de calcul, nous avons choisi de noter les polynômes avec la lettre « X ».

- Ainsi, au lieu de considérer, par exemple, la fonction
$$t \longmapsto 5t^4 - 3t^3 + 25t^2 + 10t - 1,$$
on considérera le polynôme
$$5X^4 - 3X^3 + 25X^2 + 10X - 1.$$
- On notera généralement les polynômes P ou Q. Par exemple, on peut poser $P = 5X^2 - 3X - 2$.
- Les polynômes peuvent être évalués en un nombre, comme les fonctions.
Ainsi, pour $t \in \mathbb{R}$, on peut considérer $P(t)$.
En reprenant l'exemple précédent, on a
$$P(1) = 5 \times 1^2 - 3 \times 1 - 2 = 0.$$
On dit alors que 1 *est une racine de P*.

Définition des variables

Dans certains exercices, nous avons choisi, par souci de clarté et de concision, de ne pas préciser à quel ensemble appartiennent les variables.

- Par exemple, on pourra demander de simplifier l'expression
$$\frac{2-x}{x+3} - \frac{1-x}{5-x}$$
sans préciser qui est la variable x.
- Dans ce cas, il faudra toujours considérer que la variable x est implicitement définie et appartient au bon ensemble.
- Dans l'exemple précédent, il est sous-entendu que x est un nombre réel différent de -3 et 5.

Bons calculs à vous !

Énoncés

Calcul algébrique complexe I

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 1.1 — Quelques racines.

Simplifier les expressions suivantes.

a) $\sqrt{3^2+4^2}$ ....

b) $\sqrt{1^2+(-1)^2}$.

c) $\sqrt{16^2+4^2}$ ...

Calcul 1.2 — Quelques fractions de racines.

Écrire les fractions suivantes sans racine au dénominateur.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ ......

b) $\dfrac{1}{4+\sqrt{3}}$ ......

c) $\dfrac{1}{3-\sqrt{5}}$ ......

Produits de nombres complexes

Calcul 1.3 — Produits de nombres complexes (I).

Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique, c'est-à-dire les mettre sous la forme $a+\mathrm{i}b$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

a) $(2+3\mathrm{i})(1+\mathrm{i})$ ....

b) $(1-\mathrm{i})(-2+3\mathrm{i})$ ....

c) $(4-\mathrm{i})(3-\mathrm{i})$ ....

d) $(1+\mathrm{i})^2$ ....

e) $(5-2\mathrm{i})(5+2\mathrm{i})$ ....

f) $\mathrm{i}(\mathrm{i}-1)$ ....

Calcul 1.4 — Produits de nombres complexes (II).

Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique, c'est-à-dire les mettre sous la forme $a+\mathrm{i}b$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

a) $(\mathrm{i}+2)\mathrm{i}-6(1+\mathrm{i})$ ....

b) $\left(2-\dfrac{\mathrm{i}}{2}\right)(1+4\mathrm{i})+\left(\dfrac{3}{2}-6\mathrm{i}\right)\mathrm{i}$ ...

c) $\mathrm{i}(\mathrm{i}+1)(\mathrm{i}+2)+(\mathrm{i}-1)\mathrm{i}(\mathrm{i}+1)$ ...

d) $(7-2\mathrm{i})^2-(5+\mathrm{i})(-\mathrm{i}-4)$ ......

Calcul 1.5 — Identités remarquables chez les complexes.

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique, c'est-à-dire les mettre sous la forme $a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

a) $(x + \mathrm{i}y)^2$ ....

b) $(x - \mathrm{i}y)^2$ ....

c) $(x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y)$ ....

Quotients de nombres complexes

Remarque

Étant donné un nombre complexe non nul $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, pour mettre $\frac{1}{z}$ sous forme algébrique, on peut utiliser la technique dite du conjugué en écrivant

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Il apparaît ainsi un réel positif au dénominateur. Par exemple, on a

$$\frac{1}{1+\mathrm{i}} = \frac{1-\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} = \frac{1-\mathrm{i}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}.$$

Calcul 1.6 — Inverses de nombres complexes (I).

Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique.

On pourra utiliser la technique du conjugué.

a) $\dfrac{1}{1-\mathrm{i}}$ ....

b) $\dfrac{1}{3-4\mathrm{i}}$ ....

c) $\dfrac{1}{2\mathrm{i}-1}$ ....

Calcul 1.7 — Inverses de nombres complexes (II).

Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique.

On pourra utiliser la technique du conjugué.

a) $\dfrac{1}{\mathrm{i}}$ ....

b) $\dfrac{1}{1+7\mathrm{i}}$ ....

c) $\dfrac{1}{-5-7\mathrm{i}}$ ....

d) $\dfrac{1}{\mathrm{i}(\mathrm{i}-1)}$ ....

e) $\dfrac{1}{\frac{1}{2}+2\mathrm{i}}$ ....

f) $\dfrac{1}{(1+\mathrm{i})^2}$ ....

Calcul 1.8 — Quotients de nombres complexes.

Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique.

a) $\dfrac{\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$ .... b) $\dfrac{\mathrm{i}-3}{1+2\mathrm{i}}$ .... c) $\dfrac{6-\mathrm{i}}{3\mathrm{i}+1}$ ....

Calcul 1.9 — Polynômes et nombres complexes.

Dans cet exercice, on donnera les résultats sous forme algébrique.

a) Soit $P = X^2 + 1$. Calculer $P(\mathrm{i})$ et $P(-\mathrm{i})$ ....

b) Soit $P = X^2 + 3X - 1$. Calculer $P(1+\mathrm{i})$ ....

c) Soit $P = X^2 + X$. Calculer $P\left(-\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ....

d) Soit $P = X^3 + X^2 + X + 1$. Calculer $P(\mathrm{i})$ ....

Module

Calcul 1.10 — Module de nombres complexes (I).

Déterminer les modules des nombres complexes suivants.

a) $|3+4\mathrm{i}|$ ....

b) $|1-\mathrm{i}|$ ....

c) $|-9+27\mathrm{i}|$ ....

d) $|-8\mathrm{i}|$ ....

e) $\left|\dfrac{1}{\mathrm{i}}\right|$ ....

f) $\left|\dfrac{1+i}{3-3\mathrm{i}}\right|$ ....

Calcul 1.11 — Module de nombres complexes (II).

Déterminer les modules des nombres complexes suivants.

a) $\left|\sqrt{5}+\mathrm{i}\right|$ ....

b) $\left|\dfrac{\sqrt{7}+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right|$ ....

c) $\left|\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|$ ....

d) $\left|\sqrt{2+\sqrt{2}} + \mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{2}}\right|$ ....

Calcul 1.12 — Module de nombres complexes (III).

Soit $a \in \mathbb{R}$ un paramètre réel.

Déterminer les modules des nombres complexes suivants.

a) $|1 + \mathrm{i}a|$ ....

b) $|-\mathrm{i}a|$ ....

c) $\left|\dfrac{2+\mathrm{i}a}{2-\mathrm{i}a}\right|$ ....

Calculs plus avancés

Calcul 1.13 — Une fonction complexe.

Pour $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (avec $x, y \in \mathbb{R}$), on définit

$$f(z) = \frac{\overline{z}}{z}.$$

a) Donner la forme algébrique de $f(z)$ ....

Le résultat sera exprimé en fonction de x et y.

b) Choisir la bonne réponse : l'expression $f(z)$ est réelle lorsque

(a) $x = 0$ ou $y = 0$ (b) $x = y$ ou $x = -y$ (c) $|z| = 1$

....

c) Choisir la bonne réponse : l'expression $f(z)$ est imaginaire pure lorsque

(a) $x = 0$ ou $y = 0$ (b) $x = y$ ou $x = -y$ (c) $|z| = 1$

....

d) Choisir toutes les réponses possibles : on a toujours

(a) $|f(z)| = 1$ (b) $f(\overline{z}) = f(z)$ (c) $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ (d) $f(\overline{z}) = \dfrac{1}{f(z)}$

....

Calcul 1.14 — Une relation algébrique.

Soit z un nombre complexe vérifiant $z^3 = z + \mathrm{i}$.

a) Exprimer z^4 en fonction de z^2 et z ....

b) Exprimer $\dfrac{1}{z}$ en fonction de z^2 et z ....

Réponses mélangées

$-\dfrac{1}{5}+\dfrac{7}{5}\mathrm{i}$ $\quad\sqrt{6}\quad$ b $\quad$ a $\quad 11-7\mathrm{i}\quad \sqrt{2}\quad 2\mathrm{i}\quad 2+5\mathrm{i}\quad -3-\mathrm{i}\quad 1+5\mathrm{i}$

$-\mathrm{i}z^2+\mathrm{i}\quad 64-19\mathrm{i}\quad 4\sqrt{17}\quad |a|\quad x^2+y^2\quad z^2+\mathrm{i}z\quad 5\quad \sqrt{2}\quad 8\quad \dfrac{1}{3}$

$-\dfrac{5}{74}+\dfrac{7}{74}\mathrm{i}\quad -1\quad -7-4\mathrm{i}\quad \dfrac{3}{25}+\dfrac{4}{25}\mathrm{i}\quad 0\quad \dfrac{4-\sqrt{3}}{13}\quad 1\quad \dfrac{3+\sqrt{5}}{4}\quad \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

$-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\quad \sqrt{1+a^2}\quad x^2-y^2+2\mathrm{i}xy\quad \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-\mathrm{i}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}\quad \dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}\mathrm{i}\quad \sqrt{2}-1$

$2\quad x^2-y^2-2\mathrm{i}xy\quad$ 0 et 0 $\quad -1+5\mathrm{i}\quad 5\quad 29\quad -\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\quad 2\quad \dfrac{1}{50}-\dfrac{7}{50}\mathrm{i}\quad -\mathrm{i}$

a, c et d $\quad -1-\mathrm{i}\quad 9\sqrt{10}\quad -\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{5}\mathrm{i}\quad 10+9\mathrm{i}\quad 1\quad 1\quad \dfrac{2}{17}-\dfrac{8}{17}\mathrm{i}\quad \dfrac{3}{10}-\dfrac{19}{10}\mathrm{i}$

► Réponses et corrigés page 70

Calcul algébrique complexe II

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 2.1 — Des équations.

Donner la ou les solutions dans $\mathbb{R}$ des équations suivantes.

a) $3x + 1 = 0$ ....

b) $7x - 5 = 4x + 8$ ....

c) $(2 - x)(4x - 3) = 0$ .....

d) $\dfrac{2x-1}{7x+2} = 3$ ....

Calcul 2.2 — Des fractions et des puissances.

Exprimer sous la forme d'une seule fraction les expressions suivantes, où a désigne un paramètre réel.

a) $\dfrac{1}{a-1} - \dfrac{1}{a+1}$, avec $a \neq \pm 1$ ...

b) $\dfrac{1}{a-1} - \dfrac{2}{a^2-1}$, avec $a \neq \pm 1$ ..

c) $\dfrac{1}{2^a} + \dfrac{1}{4^a}$ ....

d) $\dfrac{9}{2^{a+2}} + \dfrac{4}{2^{a-1} \times 3^a}$ ....

Équations du premier degré

Calcul 2.3 — Équations du premier degré (I).

Donner la solution dans $\mathbb{C}$ (sous forme algébrique) des équations d'inconnue z suivantes.

a) $3z - 4\mathrm{i} = 0$ ....

b) $\mathrm{i}z - 2 = 0$ ....

c) $3z + \mathrm{i}z = 0$ ....

d) $(2+\mathrm{i})z - 1 - \mathrm{i} = 0$ ......

Calcul 2.4 — Équations du premier degré (II).

Donner la solution dans $\mathbb{C}$ (sous forme algébrique) des équations d'inconnue z suivantes.

a) $2z + 2\mathrm{i} - 1 = 5z + 4\mathrm{i}$ ....

b) $z = \mathrm{i} - 2\mathrm{i}z$ ....

c) $z + 2 = \mathrm{i}(z+1)$ ....

d) $(1+2\mathrm{i})z - (\mathrm{i}-1) = \mathrm{i}z - 3$ ..

Calcul 2.5 — Équations se ramenant au premier degré.

Donner la ou les solutions dans $\mathbb{C}$ (sous forme algébrique) des équations d'inconnue z suivantes.

a) $(z+2i)(2z-4+2i)=0$ .....

b) $\dfrac{z-5}{z-i}=i$ ....

c) $\dfrac{z+1}{2z+1}=1+i$ ....

d) $\dfrac{z-3+i}{z+2-i}=-2i$ ....

Calcul 2.6 — Systèmes d'équations du premier degré.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants d'inconnues u et v.

a) $\begin{cases} 3u+v=2i \\ u-4v=1-i \end{cases}$ .....

b) $\begin{cases} iu+v=2i \\ 3iu-iv=1 \end{cases}$ ....

Équations faisant intervenir le conjugué

Calcul 2.7

Donner la solution dans $\mathbb{C}$ (sous forme algébrique) des équations d'inconnue z suivantes.

a) $2\overline{z}=i-1$ ....

b) $(3-i)\overline{z}=4-3i$ ....

c) $-i\overline{z}+2=4\overline{z}-5i$ ....

d) $(1-i)\overline{z}+4i=3\overline{z}-5i+2$.

Calcul 2.8

Donner la ou les solutions dans $\mathbb{C}$ (sous forme algébrique) des équations d'inconnue z suivantes.

a) $(2z+i-1)(i\overline{z}-2)=0$ ....

b) $\dfrac{\overline{z}-1}{\overline{z}+1}=i$ ....

c) $\dfrac{3\overline{z}-1}{2i\overline{z}+1}=1-i$ ....

Calcul 2.9

Donner l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de chacune des équations suivantes d'inconnue z.

a) $z+\overline{z}=2$ ....

b) $z-4i=\overline{z}+3i$ ....

c) $\overline{z}-3iz-3+6i=0$ ......

d) $\dfrac{\overline{z}-2i}{z+i}=i$ ....

Calcul 2.10 — Équations avec un paramètre.

Donner la solution dans $\mathbb{C}$ (sous forme algébrique et en fonction du paramètre réel a) des équations d'inconnue z suivantes.

a) $3\mathrm{i}z - \mathrm{i}a = 7a + 2\mathrm{i}$ ..... $\square$

b) $a^2 z - 4\mathrm{i} + 2 = 3\mathrm{i} - z$ .. $\square$

c) $3\overline{z} - 2\mathrm{i}a = 5a - \mathrm{i}\overline{z}$ .... $\square$

d) $\dfrac{5 - 2\mathrm{i}z}{3z - 4\mathrm{i}} = 3a$ .... $\square$

Calculs plus avancés

Calcul 2.11 — Systèmes avec un paramètre.

Résoudre en fonction du paramètre complexe m les systèmes suivants, d'inconnues complexes u et v.

a) $\begin{cases} 2u + 2v = m \\ \mathrm{i}u - v = m + \mathrm{i} \end{cases}$ .... $\square$

b) $\begin{cases} mu + v = 1 \\ u + mv = m \end{cases}$ .... $\square$

Calcul 2.12 — Calcul de sommes géométriques.

Soit z un nombre complexe, distinct de 1 et -1, et soit n un entier naturel.

Déterminer en fonction des paramètres z et n une expression de chacune des sommes suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} z^k$ .... $\square$

b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} z^k$ .... $\square$

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} z^{2k}$ .... $\square$

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} z^{2k+1}$ .... $\square$

e) On suppose que $z^n \neq 1$.

Donner une expression simplifiée de $\dfrac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} z^{2k}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} z^k}$ .... $\square$

Calcul 2.13 — Carré du module.

Soient z et z' deux nombres complexes.

a) Exprimer la somme $|z+z'|^2 + |z-z'|^2$ en fonction de $|z|^2$ et $|z'|^2$.

.... $\boxed{}$

b) Exprimer $|z+z'|^2$ en fonction de $|z|^2$, $|z'|^2$ et $\mathsf{Re}\big(z\overline{z'}\big)$.

.... $\boxed{}$

Réponses mélangées

$\dfrac{z^2 - z^{n+1}}{1-z}$	$\dfrac{2+\mathrm{i}}{5}$	$\dfrac{3+\mathrm{i}}{5}$	$\varnothing$	$\lvert z\rvert^2 + 2\,\mathsf{Re}\big(z\overline{z'}\big) + \lvert z'\rvert^2$	$\left\{x + \dfrac{7}{2}\mathrm{i}\ ;\ x \in \mathbb{R}\right\}$		
$\dfrac{2^a+1}{4^a}$	$-\mathrm{i}$	$\dfrac{3^{a+2}+32}{2^{a+2}\times 3^a}$	$1-4\mathrm{i}$	$2\Big(\lvert z\rvert^2 + \lvert z'\rvert^2\Big)$	$\dfrac{4-3\mathrm{i}}{5}$	$\dfrac{4\mathrm{i}}{3}$	$\dfrac{-2+7\mathrm{i}}{a^2+1}$
$u = \dfrac{1+7\mathrm{i}}{13}$ et $v = \dfrac{-3+5\mathrm{i}}{13}$	$\dfrac{13}{3}$	$3+3\mathrm{i}$	$\dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}$	$\dfrac{z - z^{2n+3}}{1-z^2}$	$-\dfrac{1+2\mathrm{i}}{3}$	$-2\mathrm{i}$	
$-2\mathrm{i}$ et $2-\mathrm{i}$	$-\dfrac{2+\mathrm{i}}{5}$	$\dfrac{13-18\mathrm{i}}{17}$	$-\dfrac{9+7\mathrm{i}}{5}$	$-\dfrac{7}{19}$	0	$\begin{cases} u = \dfrac{2+3m+(2-3m)\mathrm{i}}{4} \\ v = \dfrac{-m-2+(3m-2)\mathrm{i}}{4} \end{cases}$	
$\dfrac{(17-\mathrm{i})a}{10}$	$\dfrac{1+z^{n+1}}{1+z}$	$\dfrac{1}{a+1}$	2 et $\dfrac{3}{4}$	$\dfrac{2+a-7a\mathrm{i}}{3}$	$\dfrac{1-\mathrm{i}}{2}$ et $2\mathrm{i}$	$\dfrac{3+\mathrm{i}}{2}$	
$\dfrac{2}{a^2-1}$	$-\dfrac{3+\mathrm{i}}{2}$	$\dfrac{69a+(108a^2-10)\mathrm{i}}{81a^2+4}$	$u = \dfrac{1+3\mathrm{i}}{10}$ et $v = \dfrac{3+19\mathrm{i}}{10}$	$-\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}$	$-\dfrac{1}{3}$		
$\begin{array}{ll} \big\{(0,1)\big\} & \text{si } m \neq \pm 1 \\ \Big\{(u, 1-u)\ ;\ u \in \mathbb{C}\Big\} & \text{si } m = 1 \\ \Big\{(u, 1+u)\ ;\ u \in \mathbb{C}\Big\} & \text{si } m = -1 \end{array}$	$\dfrac{-3+5\mathrm{i}}{2}$	$\left\{\dfrac{15+3\mathrm{i}}{8}\right\}$	$\{1 + \mathrm{i}y\ ;\ y \in \mathbb{R}\}$	$\dfrac{1-z^{2n+2}}{1-z^2}$			

► Réponses et corrigés page 72

Équations de degré 2

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 3.1 — Racines carrées et identités remarquables.

Développer et réduire les expressions suivantes.

a) $(2\sqrt{3}+3)^2$ ....

b) $(\sqrt{5}-1)^2$ ....

c) $(\sqrt{2}-\sqrt{5})(\sqrt{5}+\sqrt{2})$ ....

d) $(1-\sqrt{2})^4$ ....

Calcul 3.2 — Exponentielles.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier les expressions suivantes.

a) $\mathrm{e}^{3x} \times \mathrm{e}^{1-2x}$ ....

b) $(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}-3})^2$ ....

c) $\dfrac{(\mathrm{e}^{x-1})^3 \times \mathrm{e}^{3-5x}}{\mathrm{e}^{-2x+4}}$ ....

d) $\left(\dfrac{\mathrm{e}^{2x-\frac{1}{2}}}{\mathrm{e}^{1-x}}\right)^2$ ....

Calcul 3.3 — Un peu de calcul fractionnaire.

Soit x un nombre réel différent de 0 et de -3. Réduire au même dénominateur les expressions suivantes.

a) $\dfrac{x+1}{x^2+1} - \dfrac{1}{x}$ ....

b) $\dfrac{x-1}{3x} + \dfrac{5x+2}{x+3}$ ....

Équations de degré 2

Calcul 3.4

Donner l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ des équations suivantes.

a) $z^2 - 6z + 13 = 0$ ....

b) $2z^2 - 2z + 5 = 0$ ....

c) $2z^2 + 2z + 1 = 0$ ....

d) $\dfrac{1}{2}z^2 - 2z + 3 = 0$ ....

Calcul 3.5

Donner l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 - (1+\sqrt{2})z + \sqrt{2} = 0$ ......

Calcul 3.6 — Des équations se ramenant à des équations de degré 2.

Soit $z \neq 0$. Donner l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ des équations suivantes.

a) $4z + \dfrac{1}{z} = 3$ ....

b) $9z + \dfrac{5}{z} = 6$ ....

c) $100z + \dfrac{3}{z} = 20\sqrt{3}$ ..

d) $\dfrac{z}{3} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{2}{3}$ ....

Autres types d'équations

Calcul 3.7 — Trois équations.

Donner l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ des équations suivantes.

a) $\dfrac{1}{z^2} - \dfrac{4}{z} + 5 = 0.$

On posera $Z = \dfrac{1}{z}$.

.....

b) $z^4 + z^2 - 6 = 0.$

On posera $Z = z^2$.

.....

c) $z^3 + 8z - \dfrac{9}{z} = 0.$

On multipliera par z et on effectuera un changement de variable adéquat.

....

Calcul 3.8 — Une équation de degré 3.

On considère le polynôme $P = 2X^3 - 12X^2 + 36X - 26$.

a) Calculer $P(1)$ ....

b) Déterminer (a, b, c) tel que $P = (X-1)(aX^2 + bX + c)$ ....

c) Résoudre l'équation $2z^3 - 12z^2 + 36z - 26 = 0$.

....

Calcul 3.9 — Une équation riche en factorisations.

Donner l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de $z^5 + 2z^3 + z^2 + 2 = 0$.

On factorisera $z^5 + 2z^3$ par z^3.

....

Calculs plus avancés

Calcul 3.10

Soient $z \in \mathbb{C}^*$ et $u \in \mathbb{C}$. Donner l'ensemble des solutions des équations suivantes.

a) $z + \dfrac{1}{z} = 1$ ....

b) $z + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{2}$ ....

c) $2u^2 - 3u + 1 = 0$ ....

d) $2z^2 - 3z + \dfrac{2}{z^2} - \dfrac{3}{z} + 5 = 0$

On posera $u = z + \dfrac{1}{z}$ dans l'équation précédente.

....

Calcul 3.11

a) Donner l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $2u^2 + 9u - 5 = 0$ ....

b) On pose $u = z + \dfrac{1}{z}$. Calculer $2u^2 + 9u$ ....

c) Trouver la valeur de α telle que $2u^2 + 9u + \alpha = 2z^2 + 9z + \dfrac{9}{z} + \dfrac{2}{z^2} - 1$ ....

d) En déduire les solutions de l'équation $2z^2 + 9z + \dfrac{9}{z} + \dfrac{2}{z^2} - 1 = 0$.

....

Calcul 3.12

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $2z^2 + 3z + \dfrac{3}{z} + \dfrac{2}{z^2} - 1 = 0$.

On utilisera la même méthode qu'à l'exercice précédent.

....

Calcul 3.13 — **Une équation à coefficients complexes.**

On considère l'équation (E) : $z^2 - (8+2\mathrm{i})z + 19 + 8\mathrm{i} = 0$.

a) Trouver la valeur de α telle que $z^2 - (8+2\mathrm{i})z = (z - (4+\mathrm{i}))^2 + \alpha$ ....

b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de (E) ....

Calcul 3.14 — **Avec un paramètre.**

Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère le polynôme $P = X^4 - (m+1)X^3 + (m^2-1)X^2 + (m+1)X - m^2$.

a) Déterminer α et β en fonction de m tels que $P = (X^2-1)(X^2 + \alpha X + \beta)$ ....

b) En déduire l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles l'équation $P(z) = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées non réelles.

....

Réponses mélangées

$\{2-\sqrt{2}\mathrm{i}\,,2+\sqrt{2}\mathrm{i}\}$ $\quad$ e^{x+1} $\quad$ $\alpha=-15-8\mathrm{i}$ $\quad$ $\{1-\mathrm{i}\sqrt{2}\,,1+\mathrm{i}\sqrt{2}\}$ $\quad$ $\dfrac{x-1}{x(x^2+1)}$

$\{1\,,\sqrt{2}\}$ $\quad$ $\left\{\dfrac{\sqrt{3}}{10}\right\}$ $\quad$ $\left\{-1\,,-\sqrt{2}\mathrm{i}\,,\sqrt{2}\mathrm{i}\,,\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right\}$ $\quad$ $21+12\sqrt{3}$

$\left\{\dfrac{-5-\sqrt{21}}{2}\,,\dfrac{-5+\sqrt{21}}{2}\,,\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{15}}{4}\mathrm{i}\,,\dfrac{1}{4}+\dfrac{\sqrt{15}}{4}\mathrm{i}\right\}$ $\quad$ $\left\{\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\,,\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right\}$ $\quad$ e^{x-6} $\quad$ $\{-\sqrt{2},\sqrt{2},-\sqrt{3}\mathrm{i}\,,\sqrt{3}\mathrm{i}\}$

-3 $\quad$ $\left\{-2\,,-\dfrac{1}{2}\,,\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\,,\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right\}$ $\quad$ $\left\{-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\,,-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right\}$ $\quad$ $\{-1\,,1\,,-3\mathrm{i}\,,3\mathrm{i}\}$

$\alpha=-m-1\,;\beta=m^2$ $\quad$ $\left\{\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{15}}{4}\mathrm{i}\,,\dfrac{1}{4}+\dfrac{\sqrt{15}}{4}\mathrm{i}\,,\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\,,\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right\}$ $\quad$ $(a,b,c)=(2,-10,26)$

$\dfrac{16x^2+8x-3}{3x(x+3)}$ $\quad$ 0 $\quad$ $\left\{\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{15}}{4}\mathrm{i}\,,\dfrac{1}{4}+\dfrac{\sqrt{15}}{4}\mathrm{i}\right\}$ $\quad$ $\alpha=-5$ $\quad$ e^{-4} $\quad$ $6-2\sqrt{5}$

e^{6x-3} $\quad$ $\{4-\mathrm{i}\,,4+3\mathrm{i}\}$ $\quad$ $2z^2+9z+\dfrac{9}{z}+\dfrac{2}{z^2}+4$ $\quad$ $\left\{\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{5}\mathrm{i}\,,\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{5}\mathrm{i}\right\}$ $\quad$ $\left\{-5\,,\dfrac{1}{2}\right\}$

$\left\{\dfrac{1}{2}\,,1\right\}$ $\quad$ $\left]-\infty,-\frac{1}{3}\right[\cup]1,+\infty[$ $\quad$ $\left\{1\,,\dfrac{5}{2}-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\,,\dfrac{5}{2}+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right\}$ $\quad$ $\left\{\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{3}\mathrm{i}\,,\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\mathrm{i}\right\}$

$17-12\sqrt{2}$ $\quad$ $\left\{\dfrac{3}{8}-\dfrac{\sqrt{7}}{8}\mathrm{i}\,,\dfrac{3}{8}+\dfrac{\sqrt{7}}{8}\mathrm{i}\right\}$ $\quad$ $\{3-2\mathrm{i}\,,3+2\mathrm{i}\}$ $\quad$ $\left\{\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\mathrm{i}\,,\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\mathrm{i}\right\}$

► Réponses et corrigés page 78

Formes exponentielles

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 4.1 — Fractions : additions et soustractions.

Effectuer les calculs suivants.

a) $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{3}$ ......

b) $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}$ ......

c) $\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}$ ......

d) $\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}$ ...

e) $-\dfrac{2\pi}{5}+\dfrac{3\pi}{4}$ ...

f) $-\dfrac{7\pi}{12}+\dfrac{5\pi}{3}$ ...

Calcul 4.2 — Des calculs de modules.

Calculer le module de chacun des nombres complexes suivants.

a) $1+\mathrm{i}$ ....

b) $1-\mathrm{i}$ ....

c) $2-\mathrm{i}\sqrt{3}$ ......

d) $-\sqrt{2}+\mathrm{i}$ ......

e) $3-4\mathrm{i}$ ....

f) $-2\sqrt{3}+4\mathrm{i}$ ...

Premiers calculs

Calcul 4.3 — Mise sous forme exponentielle de formes algébriques.

Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes suivants.

a) i ....

b) $-\mathrm{i}$ ....

c) $1+\mathrm{i}$ ....

d) $1-\mathrm{i}$ ....

e) $1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ ......

f) $-2\sqrt{3}-2\mathrm{i}$ ...

Calcul 4.4 — Mise sous forme exponentielle de produits.

Déterminer la forme exponentielle de $z_1\times z_2$ dans chacun des cas suivants.

a) $z_1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}}$ et $z_2=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$ ....

b) $z_1=2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$ et $z_2=3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}}$ ....

c) $z_1=\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}$ et $z_2=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}}$ .....

d) $z_1=\sqrt{6}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$ et $z_2=\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ ....

Calcul 4.5 — Mise sous forme exponentielle de quotients.

Déterminer la forme exponentielle de $\dfrac{z_1}{z_2}$ dans chacun des cas suivants.

a) $z_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}}$ et $z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$ ....

b) $z_1 = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$ et $z_2 = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}}$ ......

c) $z_1 = \sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}$ et $z_2 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}}$ .....

d) $z_1 = \sqrt{6}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$ et $z_2 = \sqrt{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ ....

Calcul 4.6 — Mise sous forme exponentielle de puissances.

Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes suivants.

a) $z = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}}\right)^4$ ....

b) $z = \left(2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\right)^5$ ....

c) $z = \left(3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}}\right)^6$ ....

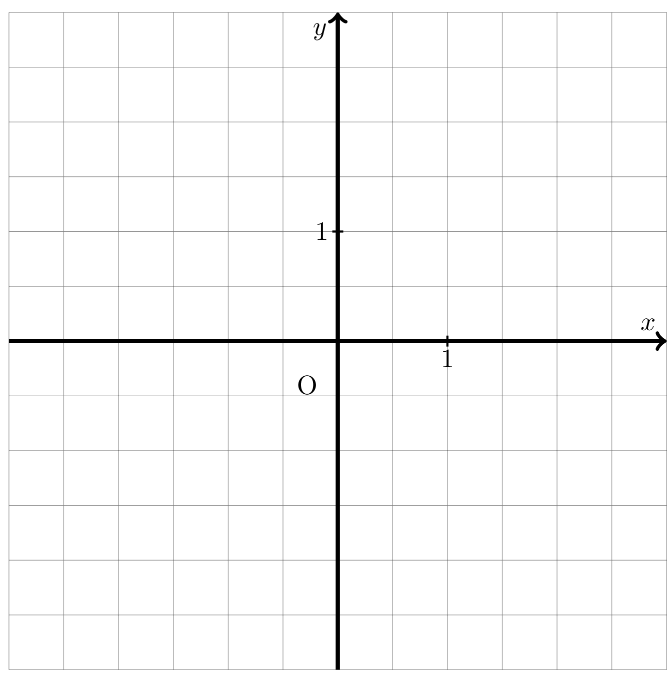
d) $z = \left(\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}\right)^4$ ....

e) $z = \left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}} \times \sqrt{6}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\right)^3$ ......

f) $z = \left(\dfrac{\sqrt{6}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}\right)^4$ ....

Calcul 4.7 — Affixes.

Placer les points dans le repère orthonormé direct ci-dessous :



a) Le point M d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ ....

b) Le point N d'affixe $-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}$ ....

c) Le point P d'affixe $\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$ ....

d) Le point Q d'affixe $-(1+\mathrm{i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$ ....

Calcul 4.8 — Mise sous forme exponentielle.

Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes suivants.

a) $-e^{i\frac{\pi}{3}}$ ....

b) $ie^{-i\frac{\pi}{4}}$ ....

c) $\dfrac{e^{-i\frac{\pi}{6}}}{-2i}$ ....

d) $(1+i)e^{i\frac{\pi}{5}}$ ....

e) $4\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)e^{i\frac{\pi}{12}}$ ....

f) $\dfrac{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}$ ....

Calcul 4.9 — Associer forme exponentielle et forme algébrique.

Pour chacun des nombres complexes suivants, donner sa forme exponentielle parmi les propositions (a), (b), (c) ou (d).

(a) $2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ (b) $2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$ (c) $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ (d) $2e^{i\frac{5\pi}{4}}$

a) $1-i$ ....

b) $-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$ ....

c) $i\sqrt{6}+\sqrt{2}$ ....

d) $i-\sqrt{3}$ ....

Calcul 4.10 — Des formes algébriques grâce à la forme exponentielle (I).

À l'aide de leur forme exponentielle, déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants.

a) $(1+i)^6$ ....

b) $(1-i)^4$ ....

c) $(\sqrt{3}+i)^5$ ....

d) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2024}$ ....

Calcul 4.11 — Des formes algébriques grâce à la forme exponentielle (II).

À l'aide de leur forme exponentielle, déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants.

a) $\dfrac{i^5}{(1-i)^6}$ ....

b) $\dfrac{(1+i)^3}{\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)^4}$ ....

c) $\left(\dfrac{2-2i\sqrt{3}}{1-i}\right)^5$ ....

d) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{(1+i)^2}\right)^{10}$ ....

Calculs plus avancés

Calcul 4.12 — Une forme exponentielle.

Déterminer la forme exponentielle de $\left((1+\mathrm{i}\sqrt{3})(1-\mathrm{i})\right)^{20}$ ....

Calcul 4.13

Donner la forme algébrique de $\dfrac{(1+\mathrm{i})^4}{(1-\mathrm{i})^3}+\dfrac{(1-\mathrm{i})^4}{(1+\mathrm{i})^3}$ ....

Calcul 4.14 — Une valeur remarquable de sinus et cosinus.

Soit $z=\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1+\mathrm{i}}$.

a) Déterminer la forme exponentielle du nombre complexe z ....

b) Déterminer la forme algébrique du nombre complexe z ....

c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ ....

Réponses mélangées

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}$ voir corrigé 2 $\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{9\pi}{20}}$ $\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ -4 $\sqrt{2}$ $2^6(\sqrt{3}-1)-\mathrm{i}2^6(\sqrt{3}+1)$

$24\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ $\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$ voir corrigé $\sqrt{\dfrac{3}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{23\pi}{30}}$ $\sqrt{3}$ $\dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{11\pi}{6}}$

$\dfrac{7\pi}{20}$ $\dfrac{\pi}{12}$ 5 $\sqrt{6}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{47\pi}{30}}$ $6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ $\dfrac{5\pi}{6}$ (c) $\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$

$4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ $\dfrac{7\pi}{12}$ $3\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}$ $\dfrac{1}{8}$ $\sqrt{7}$ $-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\dfrac{13\pi}{12}$ $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$

$\dfrac{7\pi}{12}$ $-8\mathrm{i}$ $-16\sqrt{3}+16\mathrm{i}$ voir corrigé $\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{12}}$ voir corrigé (b) (a)

$3^6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ $9\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{8\pi}{5}}$ 1 $2^{30}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}}$ $2\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{12}}$ $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ (d) $\sqrt{2}$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{30}}$ $4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$ $2\sqrt{7}$ $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{20\pi}{3}}$ $2^5\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{10\pi}{3}}$ $\dfrac{1}{8}-\mathrm{i}\dfrac{1}{8}$

► Réponses et corrigés page 82

Complexes et géométrie

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 5.1 — Des racines.

Simplifier les radicaux suivants.

a) $\sqrt{9 \times 2}$ ... b) $\sqrt{72}$ ...... c) $\sqrt{550}$ ..... d) $\sqrt[3]{27 \times 5}$ ..

Calcul 5.2 — Des fractions de racines.

Simplifier les fractions suivantes. L'écriture obtenue ne doit plus comporter de radical au dénominateur.

a) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}}$ ...... b) $\dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{5}}$ ..... c) $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{49}}$ ..... d) $\dfrac{\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}}}$ ....

Autour des affixes

Calcul 5.3 — Affixes de vecteurs.

On considère A, B, C et D les points du plan d'affixes respectives

$$z_{\mathrm{A}} = 1 + 2\mathrm{i}, \quad z_{\mathrm{B}} = 4 - \mathrm{i}, \quad z_{\mathrm{C}} = -3 + 2\mathrm{i}, \quad \text{et} \quad z_{\mathrm{D}} = -2 - 3\mathrm{i}.$$

Calculer l'affixe des vecteurs suivants.

a) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ ....

b) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ....

c) $2\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ ....

d) $3\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)$ ....

Calcul 5.4 — Affixes de points.

On considère encore A, B, C et D les points du plan d'affixes respectives

$$z_{\mathrm{A}} = 1 + 2\mathrm{i}, \quad z_{\mathrm{B}} = 4 - \mathrm{i}, \quad z_{\mathrm{C}} = -3 + 2\mathrm{i}, \quad \text{et} \quad z_{\mathrm{D}} = -2 - 3\mathrm{i}.$$

Calculer l'affixe des points suivants.

a) E tel que $\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AE}}$ ....

b) F tel que $\overrightarrow{\mathrm{AF}} = 3\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ ....

c) G tel que $\overrightarrow{\mathrm{AG}} + \overrightarrow{\mathrm{BG}} + \overrightarrow{\mathrm{CG}} = \vec{0}$ ...

d) I milieu du segment [AB] ....

Avec le module

Calcul 5.5 — Sur le cercle ?

On considère $\mathscr{C}$ le cercle de centre A d'affixe $2+\mathrm{i}$ et de rayon 3.

a) Le point M d'affixe $-1+\mathrm{i}$ appartient-il au cercle $\mathscr{C}$? ....

b) Le point N d'affixe $3+3\mathrm{i}$ appartient-il au cercle $\mathscr{C}$? ....

Calcul 5.6 — Être sur la médiatrice.

Soient x et y deux réels et soit M le point du plan d'affixe $z_{\mathrm{M}} = x + \mathrm{i}y$.

On considère deux points du plan A et B d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = 1 - \mathrm{i}$ et $z_{\mathrm{B}} = 3 + \mathrm{i}$.

a) Exprimer en fonction de x et y la distance entre A et M ....

b) Exprimer en fonction de x et y la distance entre B et M ....

c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur x et y pour que le point M appartienne à la médiatrice du segment [AB].

....

Calcul 5.7 — À l'intersection des médiatrices.

On considère encore les points du plan A et B d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = 1 - \mathrm{i}$ et $z_{\mathrm{B}} = 3 + \mathrm{i}$.

On considère deux nouveaux points du plan C et D d'affixes respectives $z_{\mathrm{C}} = 1$ et $z_{\mathrm{D}} = 3$.

En s'inspirant de l'exercice précédent, déterminer l'affixe de l'intersection de la médiatrice de [AB] et de la médiatrice de [CD].

....

Calcul 5.8 — Équations de cercles.

Rappelons qu'un point M appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon r si, et seulement si, $\mathrm{AM}^2 = r^2$.

Soient x et y deux réels ; on considère le point M d'affixe $z_{\mathrm{M}} = x + \mathrm{i}y$.

Donner une condition nécessaire et suffisante sur x et y pour que le point M d'affixe $x + \mathrm{i}y$ appartienne au cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon r pour les données suivantes.

a) Le point A a pour affixe 0, et on a $r = 5$ ....

b) Le point A a pour affixe $2+2\mathrm{i}$, et on a $r = 2$ ....

Avec l'argument

Calcul 5.9 — Mesures d'angles orientés.

Soient A, B et C des points du plan d'affixes respectives z_{A}, z_{B}, z_{C}, deux à deux distincts.

Rappelons qu'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}})$ est un argument de $\dfrac{z_{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}}{z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}}$.

Déterminer une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}})$ pour les affixes suivantes.

a) $z_{\mathrm{A}} = 0,\ z_{\mathrm{B}} = 5,\ z_{\mathrm{C}} = 3 + 3\mathrm{i}$ ....

b) $z_{\mathrm{A}} = 1 + 2\mathrm{i},\ z_{\mathrm{B}} = 2 + 2\mathrm{i},\ z_{\mathrm{C}} = 2 + (2 + \sqrt{3})\mathrm{i}$ ....

c) $z_{\mathrm{A}} = 3\mathrm{i},\ z_{\mathrm{B}} = 4 - 5\mathrm{i},\ z_{\mathrm{C}} = 8 + 7\mathrm{i}$ ....

d) $z_{\mathrm{A}} = 3 - 8\mathrm{i},\ z_{\mathrm{B}} = 1 - 10\mathrm{i},\ z_{\mathrm{C}} = 5 - 6\mathrm{i}$ ....

Calcul 5.10 — Droites parallèles ou droites perpendiculaires ?

Soient A, B, C et D des points du plan d'affixes respectives z_{A}, z_{B}, z_{C}, z_{D}.

Dans chacun des cas suivants, déterminer si les droites (AB) et (CD) sont :

(a) perpendiculaires (b) parallèles

a) $z_{\mathrm{A}} = 0,\ z_{\mathrm{B}} = 5,\ z_{\mathrm{C}} = 3 + 2\mathrm{i},\ z_{\mathrm{D}} = 7 + 2\mathrm{i}$ ....

b) $z_{\mathrm{A}} = 1 + 2\mathrm{i},\ z_{\mathrm{B}} = 2 + 5\mathrm{i},\ z_{\mathrm{C}} = -4 + 5\mathrm{i},\ z_{\mathrm{D}} = 2 + 3\mathrm{i}$ ....

c) $z_{\mathrm{A}} = 4 + 2\mathrm{i},\ z_{\mathrm{B}} = -1 + \mathrm{i},\ z_{\mathrm{C}} = 1 - 2\mathrm{i},\ z_{\mathrm{D}} = 2 - 7\mathrm{i}$ ....

Polygones

Calcul 5.11 — Nature d'un quadrilatère (I).

On considère A, B, C et D les points du plan d'affixes respectives

$$z_{\mathrm{A}} = 1 + 2\mathrm{i},\ z_{\mathrm{B}} = 2 + 3\mathrm{i},\ z_{\mathrm{C}} = 1 + 4\mathrm{i},\ z_{\mathrm{D}} = 3\mathrm{i}.$$

a) Le quadrilatère ABCD est-il un parallélogramme ? ....

b) Le quadrilatère ABCD est-il un rectangle ? ....

c) Le quadrilatère ABCD est-il un carré ? ....

Calcul 5.12 — **Nature d'un quadrilatère (II).**

On considère A, B, C et D les points du plan d'affixes respectives

$$z_A = 3 + i,\ z_B = -1 + 3i,\ z_C = 1 + 4i,\ z_D = 5 + 2i.$$

a) Le quadrilatère ABCD est-il un parallélogramme ? ....

b) Le quadrilatère ABCD est-il un rectangle ? ....

Calcul 5.13 — **Étude d'un premier triangle.**

On considère A, B et C des points du plan d'affixes respectives

$$z_A = \frac{3}{2} + \sqrt{3} - i\frac{\sqrt{3}}{2},\ z_B = 1 - i,\ z_C = 2 + i.$$

a) Calculer $\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ ....

b) En déduire la nature du triangle ABC, parmi les propositions suivantes :

(a) rectangle (b) iscocèle (c) équilatéral

....

Calcul 5.14 — **Étude de deux autres triangles.**

Soient A, B et C des points du plan d'affixes respectives z_A, z_B et z_C.

a) Pour $z_A = 2i,\ z_B = 3 + 5i,\ z_C = 4i - 2$, le triangle ABC est-il rectangle en A ? ....

b) Pour $z_A = -i,\ z_B = 1 + 2i,\ z_C = -\sqrt{2} + i(2\sqrt{2} - 1)$, le triangle ABC est-il isocèle en A ? ..

Calculs plus avancés

Calcul 5.15 — **Un critère pour être équilatéral.**

On note $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Soient A, B et C des points du plan d'affixes respectives z_A, z_B et z_C. On suppose que le triangle ABC est équilatéral direct.

a) Calculer $-j^2$ et donner le résultat sous forme exponentielle ....

b) Calculer $1 + j + j^2$ ....

c) Déterminer $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ ....

d) Calculer z_C en fonction de z_A, z_B et j ....

Calcul 5.16 — Théorème de Napoléon.

Soient A, B et C des points du plan d'affixes respectives a, b et c.

Le centre de gravité G du triangle ABC a pour affixe $g = \frac{1}{3}(a+b+c)$.

On pourra utiliser la propriété suivante, partiellement démontrée à l'exercice précédent : le triangle ABC est équilatéral direct si, et seulement si, $c + \mathrm{j}a + \mathrm{j}^2 b = 0$.

a) On place A′ tel que CBA′ soit un triangle équilatéral direct.

Calculer son affixe a' ....

b) On place de même B′ tel que ACB′ soit un triangle équilatéral direct.

Calculer son affixe b' ....

c) On place enfin C′ tel que BAC′ soit un triangle équilatéral direct.

Calculer son affixe c' ....

d) On place enfin G_1, G_2 et G_3 les centres de gravité respectifs des triangles CBA′, ACB′ et BAC′, dont on note z_1, z_2 et z_3 les affixes respectives.

Calculer $3(z_3 + \mathrm{j}z_1 + \mathrm{j}^2 z_2)$ ....

e) Qu'en déduire pour le triangle $\mathrm{G}_1\mathrm{G}_2\mathrm{G}_3$? ....

Réponses mélangées

$\frac{\sqrt{5}}{2}$ π oui 2 0 $x^2+y^2=25$ $3\sqrt{2}$ $-\mathrm{j}z_{\mathrm{A}} - \mathrm{j}^2 z_{\mathrm{B}}$ b $\frac{\pi}{4}$

$3\sqrt[3]{5}$ $\frac{\sqrt{7}}{7}$ $\sqrt{10}$ oui oui a $-\mathrm{j}a - \mathrm{j}^2 c$ non $-\mathrm{j}c - \mathrm{j}^2 b$

$\frac{\pi}{2}$ $5\sqrt{22}$ $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ $\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}$ $5-\mathrm{i}$ $-1-3\mathrm{i}$ oui oui

$-12-24\mathrm{i}$ $6\sqrt{2}$ $\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$ non $3-3\mathrm{i}$ $\frac{2}{3}+\mathrm{i}$ $(x-2)^2+(y-2)^2=4$

$\frac{\pi}{3}$ il est équilatéral $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ c a $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ oui $y=-x+2$

0 $-\mathrm{j}b - \mathrm{j}^2 a$ $11-12\mathrm{i}$ $\sqrt{5}$ oui $\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}$ $2+\mathrm{i}$

► Réponses et corrigés page 88

Nombres complexes et trigonométrie I

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 6.1 — Simplification de fractions.

Écrire sous forme d'une fraction irréductible :

a) $\dfrac{50}{33} + \dfrac{7}{22}$ .....

b) $\dfrac{13}{28} - \dfrac{17}{30}$ .....

c) $\dfrac{14^3 \times 5^5}{7^5 \times 10^2}$ .....

Calcul 6.2 — Équations en cosinus et sinus.

Proposer un angle α tel que le couple $\big(\cos(\alpha), \sin(\alpha)\big)$ soit égal à :

a) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ ....

b) $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ......

c) $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ...

Autour des formules d'addition et de duplication

Remarque

On rappelle *les formules d'addition et de duplication.* Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\
\sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \\
\cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \\
\sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x).
\end{aligned}$$

Calcul 6.3 — Formules complémentaires.

Soient x et y deux réels.

Exprimer les quantités suivantes en fonction des sinus et cosinus des angles x et y.

a) $\cos(x-y)$ ....

b) $\sin(x-y)$ ....

En utilisant la relation fondamentale $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$:

c) exprimer $\cos(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ ....

d) exprimer $\cos(2x)$ en fonction de $\sin(x)$ ....

Calcul 6.4

Soit x un réel. Simplifier les expressions suivantes.

a) $\cos(x) + \cos\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \dfrac{4\pi}{3}\right)$ ....

b) $\sin(x) + \sin\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \dfrac{4\pi}{3}\right)$ ....

Calcul 6.5

Soit x un réel. Réduire les expressions suivantes.

a) $\cos(x)\cos(2x) - \sin(x)\sin(2x)$ ....

b) $\cos(3x)\cos(5x) + \sin(3x)\sin(5x)$ ....

c) $\cos(3x)\sin(2x) + \cos(2x)\sin(3x)$ ....

d) $\cos(7x)\sin(6x) - \sin(7x)\cos(6x)$ ....

Calcul 6.6 — Cosinus et sinus de $\frac{\pi}{12}$.

En remarquant que $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$, déterminer les valeurs exactes de :

a) $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ ....

b) $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ ....

Calcul 6.7 — Cosinus et sinus de $\frac{\pi}{8}$.

Dans cet exercice, on note $\alpha = \cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

a) Exprimer $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ en fonction de α ....

On pourra utiliser une formule de duplication du cosinus.

b) En déduire la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ ....

c) Donner également la valeur de $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ ....

Calcul 6.8

Soit $\alpha \in [0, \pi]$. On pose $C = \cos(2\alpha)$. Exprimer $\sin(\alpha)$ en fonction de C ....

Calcul 6.9 — Formules de triplication.

Soit x un réel. En utilisant les formules d'addition et de duplication :

a) exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$ ....

b) exprimer $\sin(3x)$ en fonction de $\sin(x)$ ....

Calcul 6.10 — Cosinus d'une somme d'angles.

Soit $\alpha \in [\pi, 2\pi]$ et soit $\beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On suppose que $\cos(\alpha) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos(\beta) = \dfrac{7}{25}$.

Calculer $\cos(\alpha + \beta)$ ....

Calculs plus avancés

Calcul 6.11 — Trouver l'angle connaissant le cosinus.

On rappelle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$.

Soit $a \in [0, \pi]$ tel que $\cos(a) = -\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

a) Calculer $\cos(2a)$ ....

b) En déduire a ....

Soit $b \in [0, \pi]$ tel que $\cos(b) = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

c) Calculer $\cos(2b)$ ....

d) Calculer $\cos(4b)$ ....

e) En déduire b ....

Calcul 6.12 — Résolution d'équations trigonométriques.

Déterminer l'ensemble des solutions dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ de chacune des équations suivantes.

On pourra commencer par transformer chacune de ces équations via *les formules d'addition ou de duplication vues aux calculs précédents.*

a) $\sin(x) + \sin(2x) = 0$ ......

b) $2\cos(x) - \cos(3x) = 0$ ....

c) $\cos(2x) = 1 + \sin(x)$ ......

d) $\cos(x) = 1 + \sqrt{3}\sin(x)$ ...

Calcul 6.13 — Calcul de somme par télescopage.

Soient x et y deux réels et soit n un entier naturel non nul.

a) Écrire $\sin(x)\sin(y)$ en fonction de $\cos(x+y)$ et $\cos(x-y)$ ....

b) En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{\pi}{2^k}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2^k}\right)$ ....

Réponses mélangées

$\frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y))$ $\quad$ $\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$ $\quad$ $\sin(5x)$ $\quad$ 0 $\quad$ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ $\quad$ $\cos(3x)$

$2\alpha^2-1$ $\quad$ $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ $\quad$ $\frac{11\pi}{12}$ $\quad$ $\sqrt{\frac{1-C}{2}}$ $\quad$ $-\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ $\quad$ $\frac{24-7\sqrt{3}}{50}$ $\quad$ $4\cos^3(x)-3\cos(x)$

$\frac{2\pi}{3} \mod 2\pi$ $\quad$ $\left\{0, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, 2\pi\right\}$ $\quad$ $1-2\sin^2(x)$ $\quad$ $\cos(x)\cos(y)+\sin(x)\sin(y)$

$2\cos^2(x)-1$ $\quad$ $\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2^{n-1}}\right)-1\right)$ $\quad$ $-\sin(x)$ $\quad$ $\frac{\pi}{6} \mod 2\pi$ $\quad$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $\frac{11}{6}$ $\quad$ $\left\{0, \frac{4\pi}{3}, 2\pi\right\}$

$\sin(x)\cos(y)-\cos(x)\sin(y)$ $\quad$ 0 $\quad$ $\frac{2\pi}{5}$ $\quad$ $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ $\quad$ $\left\{0, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, 2\pi\right\}$ $\quad$ $\cos(2x)$

$-\frac{43}{420}$ $\quad$ $3\sin(x)-4\sin^3(x)$ $\quad$ $\frac{250}{49}$ $\quad$ $\frac{5\pi}{4} \mod 2\pi$ $\quad$ $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ $\quad$ $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

► Réponses et corrigés page 92

Nombres complexes et trigonométrie II

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 7.1 — Simplifications.

Soient a et b deux réels. Simplifier les expressions suivantes.

a) $e^{3a-2} \times e^{5b-2a} \times e$ ....

b) $\left(e^{3-7a}\right)^4 \times \left(e^{a-1}\right)^{-3}$ .....

c) $\dfrac{e^{3a-2} \times e^{4-5a}}{\left(e^{a-1}\right)^3}$ ....

d) $\dfrac{e^{4a-7b} \times e}{e^{5b-2a} \times e^{6a-4}}$ ....

Calcul 7.2 — Équations avec des valeurs absolues.

Donner l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ des équations suivantes.

a) $|x+5| = 3$ ....

b) $|2x-3| = |x+7|$ ....

Factorisation par l'angle moitié

Calcul 7.3 — Première formule de factorisation par l'angle moitié.

Soient x et y deux réels. On cherche à obtenir une factorisation de $e^{ix} + e^{iy}$. On note $m = \dfrac{x+y}{2}$.

a) Déterminer un réel α tel que $e^{i\alpha}e^{im} = e^{ix}$ ....

b) Déterminer un réel β tel que $e^{i\beta}e^{im} = e^{iy}$ ....

c) Soit θ un réel. L'expression $e^{i\theta} + e^{-i\theta}$ est égale à

(a) $\dfrac{1}{2}\sin(\theta)$ (b) $\dfrac{1}{2}\cos(\theta)$ (c) $\sin(\theta)$ (d) $\cos(\theta)$ (e) $2\sin(\theta)$ (f) $2\cos(\theta)$

....

d) En déduire une factorisation de $e^{ix} + e^{iy}$ par $e^{i\frac{x+y}{2}}$ ....

Calcul 7.4 — Seconde formule de factorisation par l'angle moitié.

Soient x et y deux réels.

En s'inspirant du calcul précédent, factoriser $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$ par l'angle moitié $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x+y}{2}}$.

....

Calcul 7.5 — Deux factorisations classiques.

a) Soit θ un réel. Quelle est la factorisation de $1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$?

(a) $\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$ (b) $2\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$ (c) $2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$ (d) $2\cos(\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$

....

b) Soit θ un réel. Quelle est la factorisation de $1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$?

(a) $2\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$ (b) $-2\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$ (c) $2\mathrm{i}\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$ (d) $-2\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$

....

Calcul 7.6 — Factorisation *via* l'angle moitié.

Soient x et y deux réels. Factoriser *via* l'angle moitié les expressions suivantes.

a) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}$ ....

b) $\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$ ....

c) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+2y)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-y)}$ ...

d) $1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-2y)}$ ....

Calcul 7.7 — Factorisation des sommes de sinus/cosinus.

Soient x et y deux réels.

a) Simplifier $\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}y}\right)$ ....

b) Rappeler la factorisation de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$ *via* l'angle moitié $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x+y}{2}}$ ....

c) En déduire une factorisation de $\cos(x) + \cos(y)$ ....

d) *Via* une stratégie similaire, factoriser $\sin(x) + \sin(y)$ ....

Calcul 7.8 — Factorisation des différences de sinus/cosinus.

Soient x et y deux réels. En s'inspirant du calcul précédent, factoriser les expressions suivantes.

a) $\cos(x) - \cos(y)$ ....

b) $\sin(x) - \sin(y)$ .....

Calculs plus avancés

Calcul 7.9 — Calcul de sommes (I).

Soient x un réel et soit n un entier naturel. On suppose x non congru à 0 modulo π.

a) Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{2ikx}$ ....

Via la technique de l'angle moitié, factoriser :

b) $1 - \mathrm{e}^{2ix}$ ....

c) $1 - \mathrm{e}^{2i(n+1)x}$ ....

En déduire une expression factorisée de :

d) $\mathsf{Re}\left(\dfrac{1 - \mathrm{e}^{2i(n+1)x}}{1 - \mathrm{e}^{2ix}}\right)$ ..

e) puis $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(2kx)$ ....

Via la même stratégie, expliciter sous forme factorisée :

f) $\mathsf{Im}\left(\dfrac{1 - \mathrm{e}^{2i(n+1)x}}{1 - \mathrm{e}^{2ix}}\right)$ ..

g) puis $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(2kx)$ ....

Calcul 7.10 — Calcul de sommes (II).

Soient x et y deux réels ainsi que n un entier naturel. On suppose x non congru à 0 modulo π. Calculer les sommes suivantes (on attend une expression sous forme factorisée).

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(2kx + y)$.

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(2kx + y)$ ..

Calcul 7.11 — Calcul de somme (III).

Soit x un réel et soit n un entier naturel non nul. On suppose x non congru à 0 modulo $\dfrac{\pi}{2}$.

a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Quelle est la partie réelle de $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{\cos^k(x)}$? ....

b) Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos(kx)}{\cos^k(x)}$ ....

Calcul 7.12 — Calcul de sommes (IV).

Soit x un réel et soit n un entier naturel.

a) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ ....

b) En déduire la valeur du module de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ ....

En déduire également une expression factorisée des deux sommes suivantes.

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$ .....

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx)$ .....

Réponses mélangées

$2\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{x-y}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x+y}{2}}$ $\quad -2\mathrm{i}\sin(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ $\quad \dfrac{\cos(nx)\sin((n+1)x)}{\sin(x)}$ $\quad \dfrac{\sin(nx+y)\sin((n+1)x)}{\sin(x)}$

e^{5-12b} $\quad \alpha = \dfrac{x-y}{2}$ $\quad \left\{-\frac{4}{3}, 10\right\}$ $\quad 2\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x-y}{2}}$ $\quad \dfrac{\cos(nx+y)\sin((n+1)x)}{\sin(x)}$

$2^n\cos^n\left(\dfrac{x}{2}\right)\sin\left(\dfrac{nx}{2}\right)$ $\quad$ c $\quad 2\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x+y}{2}}$ $\quad \dfrac{1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(n+1)x}}{1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}}$ $\quad 2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$

$2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$ $\quad \dfrac{\cos(nx)\sin((n+1)x)}{\sin(x)}$ $\quad \dfrac{\sin(nx)}{\sin(x)\cos^{n-1}(x)}$ $\quad \dfrac{\sin(nx)\sin((n+1)x)}{\sin(x)}$

$\left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)^n$ $\quad 2\mathrm{i}\sin(2x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ $\quad \mathrm{e}^{5(1-a)}$ $\quad \cos(x)+\cos(y)$ $\quad$ f $\quad 2^n\cos^n\left(\dfrac{x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{nx}{2}\right)$

$-2\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{x}{2}-y\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{x}{2}-y\right)}$ $\quad 2\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\frac{x}{2}}$ $\quad 2\sin\left(\dfrac{x-y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$ $\quad \mathrm{e}^{a+5b-1}$

$\beta = \dfrac{y-x}{2}$ $\quad \dfrac{\cos(kx)}{\cos^k(x)}$ $\quad 2\sin\left(\dfrac{y-x}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$ $\quad$ d $\quad 2\cos\left(\dfrac{3y}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+y/2)}$

$2^n\left|\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)\right|^n$ $\quad \{-2, -8\}$ $\quad \dfrac{\sin(nx)\sin((n+1)x)}{\sin(x)}$ $\quad \mathrm{e}^{15-31a}$ $\quad -2\mathrm{i}\sin((n+1)x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x}$

► Réponses et corrigés page 99

Nombres complexes et trigonométrie III

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 8.1 — Développer.

Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes.

a) $(4x-1)(3x+5)$ ...

b) $(x-3)^2(2x-1)$ ...

c) $\left(x^2-3x+2\right)^2$ .....

d) $(1-x)^3(x+2)$ ....

Calcul 8.2

Calculer $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$ pour les valeurs suivantes de α.

a) $\alpha = -\dfrac{23\pi}{3}$ ..

b) $\alpha = \dfrac{13\pi}{4}$ ....

c) $\alpha = -\dfrac{29\pi}{6}$ ..

Linéarisation d'expressions trigonométriques

Remarque

Linéariser une expression polynomiale en $\sin(x)$ et $\cos(x)$ consiste à l'exprimer comme une combinaison linéaire de sinus et de cosinus des multiples de x (c'est-à-dire de $\sin(x)$, $\sin(2x)$, $\sin(3x)$,... et $\cos(x)$, $\cos(2x)$, $\cos(3x)$,...).

Par exemple, on a

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}.$$

Les deux ingrédients essentiels sont les formules d'Euler et celle du binôme, comme nous allons le voir avec l'exemple de la linéarisation de $\sin^3(x)$.

Calcul 8.3 — Une linéarisation pas à pas.

a) Rappeler la formule d'Euler pour le sinus ....

b) *Via* la formule du binôme, développer $\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^3$ ....

c) En déduire la linéarisation de $\sin^3(x)$ ....

Calcul 8.4 — Linéarisation (I).

Soit x un réel. Linéariser les expressions suivantes.

a) $\cos^3(x)$ .....

b) $\sin^5(x)$ .....

Calcul 8.5 — Linéarisation (II).

Soit x un réel. Linéariser les expressions suivantes.

a) $\sin(x)\cos^2(2x)$ .....

b) $\sin^3(2x)\cos(3x)$ .....

Délinéarisation d'expressions trigonométriques

Remarque

On peut aussi *délinéariser* les expressions trigonométriques : il s'agit d'écrire $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$ comme des polynômes en $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

Par exemple, on a $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ et $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.

Les deux ingrédients essentiels sont la formule de Moivre et celle du binôme, comme nous allons le voir avec l'exemple de la délinéarisation de $\cos(3x)$ et $\sin(3x)$.

Calcul 8.6 — Une délinéarisation pas à pas.

a) Rappeler la formule de Moivre ....

b) *Via* la formule du binôme, développer $(\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x))^3$

....

c) En identifiant les parties réelles, obtenir une expression de $\cos(3x)$

....

d) En déduire une expression de $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$

....

e) Procéder de façon similaire pour exprimer $\sin(3x)$ en fonction de $\sin(x)$

....

Calcul 8.7 — Délinéarisation.

Soit x un réel. Délinéariser les expressions suivantes.

a) $\cos(6x)$ ....

b) $\sin(6x)$ ....

Calculs plus avancés

Calcul 8.8 — Calculs d'intégrales par linéarisation (I).

a) Linéariser l'expression $\sin^2(x)\cos^4(x)$ ....

b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\cos^4(x)\,\mathrm{d}x$ ....

Calcul 8.9 — Calculs d'intégrales par linéarisation (II).

a) Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4(x)\,\mathrm{d}x$ ....

b) Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\sin(3x)\,\mathrm{d}x$ .....

Réponses mélangées

$x^4-6x^3+13x^2-12x+4$; $\cos^3(x)+3\mathrm{i}\cos^2(x)\sin(x)-3\cos(x)\sin^2(x)-\mathrm{i}\sin^3(x)$; $2x^3-13x^2+24x-9$

$\dfrac{1}{4}(3\sin(x)-\sin(3x))$; $\dfrac{1}{16}(\sin(5x)-5\sin(3x)+10\sin x)$; $\dfrac{\pi}{8}$; $\dfrac{1}{4}+\dfrac{3\pi}{32}$

$\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}-3\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}$; $12x^2+17x-5$; $32\cos^6(x)-48\cos^4(x)+18\cos^2(x)-1$

$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $4\cos^3(x)-3\cos(x)$; $\dfrac{1}{4}(\cos(3x)+3\cos(x))$; $\dfrac{7}{15}$; $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\dfrac{1}{2}$

$\cos^3(x)-3\cos(x)\sin^2(x)$; $\dfrac{1}{32}(2+\cos(2x)-2\cos(4x)-\cos(6x))$; $\sin(\theta)=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$

$\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $(\cos(x)+\mathrm{i}\sin(x))^n=\cos(nx)+\mathrm{i}\sin(nx)$; $3\sin(x)-4\sin^3(x)$; $\dfrac{1}{4}\sin(5x)-\dfrac{1}{4}\sin(3x)+\dfrac{1}{2}\sin(x)$

$-\dfrac{1}{8}\sin(9x)+\dfrac{3}{8}\sin(5x)-\dfrac{1}{8}\sin(3x)-\dfrac{3}{8}\sin(x)$; $2\cos(x)\sin(x)\times\Big(16\cos^4(x)-16\cos^2(x)+3\Big)$; $-x^4+x^3+3x^2-5x+2$

► Réponses et corrigés page 105

Racines n-ièmes

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 9.1

Exprimer les nombres suivants sous forme de fraction irréductible.

a) $\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{3}-2$ ....

b) $\dfrac{3}{5}+\dfrac{5}{3}$ ....

c) $\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{3}+\dfrac{5}{2}$ ....

d) $\dfrac{2-\frac{1}{2}}{5-\frac{1}{2}}$ ....

Calcul 9.2

Pour chacune des équations suivantes, donner sa ou ses solutions dans $\mathbb{R}$.

a) $2x+\pi=\dfrac{3}{5}x-1$ ....

b) $x^2+7x=44$ ....

c) $x^2-x+5=4-2x$ ....

d) $\dfrac{x+1}{x-2}=x-1$ ....

Racines n-ièmes de l'unité

Calcul 9.3

On considère le nombre complexe $\mathrm{j}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.

Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique $x+\mathrm{i}y$ (où x et y sont réels).

a) j^3 ....

b) $1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2$ ....

c) $\mathrm{j}(\mathrm{j}+1)$ ....

d) $\dfrac{\mathrm{j}}{\mathrm{j}^2+1}$ ....

e) j ....

f) $\dfrac{1+\mathrm{j}}{1-\mathrm{j}}$ ....

Calcul 9.4 — Des simplifications à foison.

On considère un nombre complexe α tel que $\alpha^5 = 1$ et $\alpha \neq 1$.

a) Calculer $\big(\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1\big)(\alpha - 1)$ ....

b) En déduire la valeur de $\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1$ ....

c) Calculer $\alpha(\alpha + 1)\big(\alpha^2 + 1\big)$ ....

d) En déduire la valeur de $(\alpha^2 + \alpha + 1)(\alpha^3 + \alpha + 1)(\alpha^4 + \alpha + 1)\big(\alpha^2 + 1\big)$ ....

Calcul 9.5 — D'autres simplifications.

On considère un nombre complexe β tel que $\beta^7 = 1$ et $\beta \neq 1$.

a) Calculer $\big(\beta^6 + \beta^5 + \beta^4 + \beta^3 + \beta^2 + \beta + 1\big)(\beta - 1)$ ....

b) En déduire la valeur de $\beta^6 + \beta^5 + \beta^4 + \beta^3 + \beta^2 + \beta + 1$ ....

c) Calculer $\dfrac{\beta}{1 + \beta^2} + \dfrac{\beta^2}{1 + \beta^4} + \dfrac{\beta^3}{1 + \beta^6}$ ....

Calcul 9.6 — Somme et produit des racines n-ièmes de l'unité.

On considère un entier naturel $n \geqslant 2$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $\omega_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}$.

a) Calculer $\omega_0 + \omega_1 + \cdots + \omega_{n-1}$ ..

b) Calculer $\omega_0 \times \omega_1 \times \cdots \times \omega_{n-1}$ ..

Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Calcul 9.7 — Racines carrées dans $\mathbb{C}$.

Soient a et b des nombres réels. Soient $x, y \in \mathbb{R}$; on pose $z = x + \mathrm{i}y$ et on suppose que $\boxed{z^2 = a + \mathrm{i}b.}$

On dit alors que z est une racine carrée de $a + \mathrm{i}b$.

a) Exprimer a et b en fonction de x et de y ....

b) Calculer $x^2 + y^2$ en fonction de a et b ....

On pourra utiliser le module.

c) Déterminer, sous forme algébrique, les racines carrées de $3 + 4\mathrm{i}$ ....

Calcul 9.8 — D'autres racines carrées dans $\mathbb{C}$.

Calculer, sous forme algébrique, les racines carrées des nombres complexes suivants.

On procèdera comme dans l'exercice précédent.

a) $1 - 2\sqrt{6}\mathrm{i}$ ....

b) $-\dfrac{99}{4} + 5\mathrm{i}$ ....

Calcul 9.9 — Racines cubiques.

Étant donné $a \in \mathbb{C}$, on dit qu'un nombre complexe z est une racine cubique de a lorsque $z^3 = a$.
Dans cet exercice, on cherche z sous sa forme algébrique $z = x + \mathrm{i}y$ (où x et y sont réels).

Calculer, sous forme algébrique, les racines cubiques des nombres complexes suivants.

On commencera par déterminer une racine cubique, puis on utilisera les racines cubiques de 1 *pour trouver les autres racines cubiques.*

a) 8 ....

b) i ....

c) $2(1 + \mathrm{i})$ ....

Calcul 9.10 — Racines 5-ièmes.

Étant donné $a \in \mathbb{C}$, on dit qu'un nombre complexe z est une racine 5-ième de a lorsque $z^5 = a$.
Dans cet exercice, on cherche z sous sa forme exponentielle $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Calculer l'ensemble des racines 5-ièmes des nombres complexes suivants, écrites sous forme exponentielle.

a) i ....

b) $\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \mathrm{i}\dfrac{1}{2}$ ....

c) $1 + \mathrm{i}$ ....

Calculs plus avancés

Calcul 9.11

Calculer, sous forme algébrique, les racines 4-ièmes de $-119 + 120\mathrm{i}$.

....

Calcul 9.12

On considère les nombres complexes $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{7}}$, $A = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$.

a) Calculer $A + B$ ....

b) Calculer AB ....

c) Sachant que $\mathrm{Im}(A) > 0$, calculer (A, B) ....

Calcul 9.13

Trouver, sous forme algébrique, l'ensemble des solutions complexes des équations suivantes.

a) $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^4 = 1$ ....

b) $(z-2)^4 = (z-3\mathrm{i})^4$ ....

Calcul 9.14

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $(z+2)^8 - 17(z+2)^4(z-1)^4 + 16(z-1)^8 = 0$.

On pourra considérer les solutions de l'équation $X^2 - 17X + 16 = 0$.

....

Réponses mélangées

$\left\{\frac{5}{2}+\frac{5}{2}\mathrm{i}, 1+\frac{3}{2}\mathrm{i}, -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right\}$ $\quad$ $\sqrt{3}-\mathrm{i}\sqrt{2}$ et $-\sqrt{3}+\mathrm{i}\sqrt{2}$ $\quad$ $\{0, \mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$

$3+2\mathrm{i}$, $-2+3\mathrm{i}$, $-3-2\mathrm{i}$ et $2-3\mathrm{i}$ $\quad$ $\left\{\sqrt[10]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi(1+8k)}{20}} ; k \in \{0, 1, \dots, 4\}\right\}$ $\quad$ $\varnothing$

-2 $\quad$ 0 $\quad$ 4 et -11 $\quad$ $-1+\mathrm{i}$, $\frac{1-\sqrt{3}}{2} - \mathrm{i}\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{3}}{2} - \mathrm{i}\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $2+\sqrt{3}$ et $2-\sqrt{3}$

$(-1)^{n-1}$ $\quad$ -1 $\quad$ $\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi(12k-1)}{30}} ; k \in \{0, 1, \dots, 4\}\right\}$ $\quad$ 0 $\quad$ $\left(\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}, \frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}\right)$

2, $-1+\mathrm{i}\sqrt{3}$, et $-1-\mathrm{i}\sqrt{3}$ $\quad$ $\frac{61}{30}$ $\quad$ -1 $\quad$ $\frac{34}{15}$ $\quad$ 0 $\quad$ -1 $\quad$ $\left\{-\frac{1}{2}, 0, 4, \frac{2}{5}+\frac{6}{5}\mathrm{i}, \frac{2}{5}-\frac{6}{5}\mathrm{i}, -\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{i}, -\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}\right\}$

$-\mathrm{i}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$, et $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$ $\quad$ 0 $\quad$ 0 $\quad$ $\frac{1}{2}+5\mathrm{i}$ et $-\frac{1}{2}-5\mathrm{i}$ $\quad$ 1 $\quad$ $\frac{1}{3}$ $\quad$ 2

$-\frac{1}{6}$ $\quad$ $\sqrt{a^2+b^2}$ $\quad$ $-\frac{5(\pi+1)}{7}$ $\quad$ -1 $\quad$ 0 $\quad$ $\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi(5+4k)}{10}} ; k \in \{0, 1, \dots, 4\}\right\}$

-1 $\quad$ $2+\mathrm{i}$ et $-2-\mathrm{i}$ $\quad$ $-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $(a, b) = (x^2-y^2, 2xy)$ $\quad$ $\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}$

▶ Réponses et corrigés page 111

Formule du binôme

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 10.1 — Fractions numériques.

Simplifier, en donnant le résultat sous forme de fraction irréductible.

a) $\dfrac{3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2} + \dfrac{5 \times 4 \times 3}{6 \times 5 \times 4}$ ....

b) $\dfrac{4 \times 3 \times 2}{5 \times 4 \times 3} - \dfrac{6 \times 5 \times 4}{7 \times 6 \times 5}$ ....

c) $\dfrac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{5 \times 4 \times 3 \times 2} + \dfrac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{7 \times 6 \times 5 \times 4}$ ..

d) $\dfrac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{6 \times 5 \times 4 \times 3} - \dfrac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{8 \times 7 \times 6 \times 5}$ ..

Calcul 10.2 — Fractions littérales.

Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que, dans chaque cas, les expressions considérées soient bien définies.

Simplifier au maximum :

a) $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n-1}$ ....

b) $\dfrac{n-1}{n(n+1)} - \dfrac{n+1}{n(n-1)}$ ....

c) $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{(n+1)n(n-1)} + \dfrac{(n+2)(n+1)n}{(n+3)(n+2)(n+1)}$ ....

d) $\dfrac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{(n+2)(n+1)n(n-1)} - \dfrac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}$ ....

Premiers calculs

Calcul 10.3 — Coefficients binomiaux (I).

Calculer :

a) $\dbinom{3}{0}$ ....

b) $\dbinom{3}{1}$ ....

c) $\dbinom{3}{2}$ ....

d) $\dbinom{3}{3}$ ....

e) $\dbinom{4}{0}$ ....

f) $\dbinom{4}{1}$ ....

g) $\dbinom{4}{2}$ ....

h) $\dbinom{4}{3}$ ....

i) $\dbinom{4}{4}$ ....

Calcul 10.4 — Simplification de factorielles numériques.

Écrire les expressions suivantes sous forme d'un entier ou d'une fraction irréductible.

a) $\dfrac{5!}{3!}$ ....

b) $\dfrac{10!}{7!}$ ....

c) $\dfrac{10! \times 5!}{8! \times 4!}$ ....

d) $\dfrac{(6!)^2(5!)^2}{4! \times 7! \times 9!}$ ....

Calcul 10.5 — Coefficients binomiaux (II).

Déterminer la valeur des coefficients binomiaux suivants sous forme d'un nombre entier.

a) $\dbinom{10}{3}$ ....

b) $\dbinom{10}{7}$ ....

c) $\dbinom{12}{4}$ ....

d) $\dbinom{12}{8}$ ....

Calcul 10.6 — Simplification de factorielles littérales.

Soit $n \geqslant 2$ un entier. Écrire les expressions suivantes sous la forme la plus simplifiée possible.

a) $\dfrac{n!}{(n-2)!}$ ....

b) $\dfrac{(n+1)!}{(n-2)!}$ ....

c) $\dfrac{(n^2-1) \times n!}{(n+1)!}$ ....

d) $\dfrac{(n-1)!}{(n+1)!} + \dfrac{(n-2)!}{n!}$ ....

Calcul 10.7 — Coefficients binomiaux (III).

Soit $n \geqslant 3$ un entier. Déterminer la valeur des coefficients binomiaux suivants sous forme d'une fraction, aussi simplifiée que possible.

a) $\dbinom{n}{0}$ ....

b) $\dbinom{n}{1}$ ....

c) $\dbinom{n}{2}$ ....

d) $\dbinom{n}{3}$ ....

e) $\dbinom{n}{n-3}$ ....

f) $\dbinom{n}{n-2}$ ....

g) $\dbinom{n}{n-1}$ ....

h) $\dbinom{n}{n}$ ....

Calcul 10.8 — Quelques développements.

Soit x un réel. À l'aide de la formule du binôme, développer les expressions suivantes.

a) $(1+x)^3$ ....

b) $(2-x)^4$ ....

c) $(x+3)^5$ ....

d) $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^6$ ....

Calcul 10.9 — Sommes binomiales (I).

Déterminer la valeur de chacune des sommes suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}\times 1^k\times 2^{5-k}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}\times 3^{6-k}$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}\times\frac{1}{2^{7-k}}$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}$ ....

Calcul 10.10 — Sommes binomiales (II).

Soit n un entier naturel. Déterminer la valeur de chacune des sommes suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times 1^k\times 2^{n-k}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times 3^{n-k}$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times\frac{1}{2^{n-k}}$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ ....

Calcul 10.11 — Sommes binomiales (III).

Soit n un entier naturel. Déterminer la valeur de chacune des sommes suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}\times(-1)^k$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}\times(-1)^{-k}$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}\times 2^{-k}$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}\times(-3)^{8-k}$ ....

Calcul 10.12 — Sommes binomiales (IV).

Soit n un entier naturel non nul. Déterminer la valeur de chacune des sommes suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times(-1)^k$ ……………

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times(-1)^{-k}$ ……………

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times 2^{-k}$ ……………

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times(-3)^{n-k}$ ……………

Calcul 10.13 — Sommes binomiales (V).

Soit n un entier naturel, et soient a et b deux réels.

Déterminer une expression factorisée et réduite de chacune des sommes suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times a^k$ ……………

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times b^n$ ……………

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{-k}$ ……………

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times a^k b^n$ ……………

Calculs plus avancés

Calcul 10.14 — Une formule bien utile.

Soit $n\in\mathbb{N}$ et soit $k\in[\![1,n]\!]$.

Calculer $\displaystyle\binom{n+1}{k+1}-\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$ ……………

Calcul 10.15 — Sommes binomiales d'indices pairs et impairs.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On note

$$\mathcal{P}=\sum_{\substack{k=0\\k\text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k}\quad\text{et}\quad\mathcal{I}=\sum_{\substack{k=0\\k\text{ impair}}}^{n}\binom{n}{k}.$$

a) Exprimer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ à l'aide de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ ……………

b) Exprimer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$ à l'aide de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ ……………

c) En déduire les valeurs de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{I}$ ……………

Calcul 10.16 — Une somme binomiale classique.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto (1+x)^n. \end{cases}$

a) La fonction f est dérivable. Calculer $f'(x)$, pour $x \in \mathbb{R}$ ....

b) Exprimer $f(x)$, pour $x \in \mathbb{R}$, sous la forme d'une somme ....

c) En déduire une expression sous forme de somme de $f'(x)$ ....

d) En évaluant en $x = 1$ les deux expressions obtenues pour $f'(x)$, en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

....

Calcul 10.17 — Une formule binomiale.

Soient $N, k \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leqslant k \leqslant N$. On note $\mathsf{S}(k, N) = \displaystyle\sum_{n=k}^{N} \binom{n}{k}$.

Combien valent les valeurs particulières suivantes ? On attend une réponse aussi simple que possible.

a) $\mathsf{S}(N, N)$ ....

b) $\mathsf{S}(0, N)$ ....

c) $\mathsf{S}(N-1, N)$ ....

d) $\mathsf{S}(N-2, N)$ ....

e) Exprimer $\mathsf{S}(k, N+1)$ en fonction de $\mathsf{S}(k, N)$ ....

On note maintenant $\mathsf{T}(k, N) = \mathsf{S}(k, N) - \dbinom{N+1}{k+1}$.

f) Combien vaut, d'après la relation de Pascal, $\dbinom{N+1}{k} + \dbinom{N+1}{k+1}$?

ⓐ $\dbinom{N+1}{k+2}$ ⓑ $\dbinom{N+2}{k}$ ⓒ $\dbinom{N+2}{k+1}$ ⓓ $\dbinom{N+2}{k+2}$

....

g) Calculer $\mathsf{T}(k, N+1) - \mathsf{T}(k, N)$ ....

h) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=k}^{N} \binom{n}{k}$ ....

Réponses mélangées

1 $\quad -\dfrac{6}{35}$ $\quad \dfrac{N(N+1)}{2}$ $\quad 495$ $\quad 6$ $\quad 1$ $\quad 3^n$ $\quad \left(\dfrac{1}{a}+1\right)^n$ $\quad 20$ $\quad \mathcal{P}-\mathcal{I}$ $\quad 2^8$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1}$ $\quad ⓒ$ $\quad 256$ $\quad 120$ $\quad 1$ $\quad \left(\dfrac{3}{2}\right)^7$ $\quad 3^5$ $\quad \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$ $\quad 1$ $\quad n^3-n$

n $\quad N+1$ $\quad \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$ $\quad 1$ $\quad 1$ $\quad N+1$ $\quad -\dfrac{4}{(n+1)(n-1)}$ $\quad x^6-3x^5+\dfrac{15}{4}x^4-\dfrac{5}{2}x^3+\dfrac{15}{16}x^2-\dfrac{3}{16}x+\dfrac{1}{64}$

$\dfrac{n(n-1)}{2}$ $\quad 4^6$ $\quad 0$ $\quad n(1+x)^{n-1}$ $\quad 4$ $\quad n2^{n-1}$ $\quad (-2)^n$ $\quad 2^n$ $\quad (a+1)^n$

$\left(\dfrac{3}{2}\right)^7$ $\quad 4$ $\quad \dfrac{2}{n^2-1}$ $\quad x^4-8x^3+24x^2-32x+16$ $\quad \dfrac{2n^2+2n-6}{(n+1)(n+3)}$ $\quad x^3+3x^2+3x+1$

$(2b)^n$ $\quad n^2-n$ $\quad 3$ $\quad \dfrac{n(n-1)}{2}$ $\quad \dfrac{3}{4}$ $\quad n-1$ $\quad (ab+b)^n$ $\quad -\dfrac{8}{(n+2)(n+4)}$

0 $\quad 0$ $\quad 120$ $\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$ $\quad \mathcal{P}+\mathcal{I}$ $\quad \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$ $\quad x^5+15x^4+90x^3+270x^2+405x+243$

$\dfrac{25}{147}$ $\quad -\dfrac{1}{6}$ $\quad 1$ $\quad 0$ $\quad \mathsf{S}(k,N)+\dbinom{N+1}{k}$ $\quad n$ $\quad 720$ $\quad \mathcal{P}=2^{n-1},\ \mathcal{I}=2^{n-1}$ $\quad 4^n$

0 $\quad \dfrac{22}{35}$ $\quad \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$ $\quad 495$ $\quad 0$ $\quad 450$ $\quad 3$ $\quad -\dfrac{1}{n(n-1)}$ $\quad \dbinom{N+1}{k+1}$

► Réponses et corrigés page 116

Calcul matriciel I

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 11.1

On considère le polynôme $P = -X^3 + 3X^2 - 4X + 12$. Calculer $P(a)$ dans chacun des cas suivants.

a) $a = -1$ ....

b) $a = 3$ ....

c) $a = -2$ ....

d) $a = -\sqrt{2}$ ....

Calcul 11.2 — Des systèmes.

Résoudre les systèmes d'équations suivants.

On donnera l'unique couple (x, y) ou l'unique triplet (x, y, z) solution.

a) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x + y = 9 \end{cases}$ ....

b) $\begin{cases} -3x + 2y = 6 \\ 4x - 5y = -1 \end{cases}$ ....

c) $\begin{cases} -x + 5y = x + 3y - 2 \\ 3x - y = 2x + y - 1 \end{cases}$ ....

d) $\begin{cases} -4x + y + 3z = -2 \\ 5x - 2y + z = 1 \\ 3x + y + 5z = 5 \end{cases}$ ....

Calcul 11.3 — Des produits possibles (I) ?

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dire, dans chacun des cas suivants, laquelle des deux affirmations suivantes est vraie :

(a) Le produit $A \times B$ peut être effectué

(b) Le produit $A \times B$ n'a aucun sens

a) $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ....

b) $B = \begin{pmatrix} -12 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ ....

c) $B = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 1 \\ -5 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & -11 \end{pmatrix}$ ....

d) $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 14 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ ....

e) $B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ....

f) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ....

Calcul 11.4 — Des produits possibles (II) ?

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Dire, dans chacun des cas suivants, laquelle des deux affirmations suivantes est vraie :

- (a) Le produit $B \times A$ peut être effectué
- (b) Le produit $B \times A$ n'a aucun sens

a) $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ ....

b) $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ....

c) $B = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ ....

d) $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix}$ ....

e) $B = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ....

f) $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ....

Calcul 11.5 — Des colonnes (I).

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$. Effectuer les calculs suivants.

Les résultats attendus sont des « matrices colonnes ».

a) $A \times B$ ....

b) $A \times C$ ....

c) $A \times (B + C)$ ....

d) $A \times B + C$ ......

e) $A \times C - B$ ......

f) $A \times C - A \times B$ ..

Calcul 11.6 — Des colonnes (II).

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$. Effectuer les calculs suivants.

Les résultats attendus sont des « matrices colonnes ».

a) $A \times B$ ....

b) $A \times C$ ....

c) $A \times (B + C)$ ....

d) $A \times B + C$ ......

e) $A \times C - B$ ......

f) $A \times C - A \times B$ ..

Calcul 11.7 — Des résultats remarquables !

On considère la matrice
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Effectuer les calculs suivants.

Les résultats attendus sont des « matrices colonnes » pour les trois premiers calculs et des « matrices lignes » pour les trois derniers.

a) $P \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .... $\boxed{}$

b) $P \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .... $\boxed{}$

c) $P \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .... $\boxed{}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times P$ .... $\boxed{}$

e) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times P$ .... $\boxed{}$

f) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times P$ .... $\boxed{}$

Calcul 11.8 — Équations (I).

Déterminer dans chacun des cas le couple de réels (α, β) vérifiant l'égalité.

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .... $\boxed{}$

b) $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 14 \end{pmatrix}$ .... $\boxed{}$

Calcul 11.9 — Équations (II).

Déterminer dans chacun des cas le couple de réels (α, β) vérifiant l'égalité.

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .... $\boxed{}$

b) $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ \sqrt{12} & -2\sqrt{12} \end{pmatrix}$ .... $\boxed{}$

Calcul 11.10 — Équations (III).

Déterminer dans chacun des cas la valeur du réel α tel que $A \times B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) $A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$ .... $\boxed{}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2\alpha & 1 \\ 8 & \alpha \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ .... $\boxed{}$

Calcul 11.11 — Équations (IV).

Déterminer dans chacun des cas la valeur du réel α tel que $A \times B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) $A = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 2\alpha \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ....

b) $A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha + 2 \end{pmatrix}$ ...

Calcul 11.12 — Équations (V).

Déterminer dans chacun des cas le couple de réels (α, β) tel que $A \times B = B$.

a) $A = \begin{pmatrix} \alpha & 4 \\ -3 & \beta \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .....

b) $A = \begin{pmatrix} \alpha & 2\beta \\ -\alpha & -\beta \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ...

c) $A = \begin{pmatrix} -2\alpha & -1 \\ 4\beta & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ ....

d) $A = \begin{pmatrix} 2\alpha & \beta \\ -\beta & 3\alpha \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .....

Calcul 11.13 — Une dernière équation.

Déterminer la valeur du réel α tel que $\begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha \\ 5\alpha & -\alpha^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -6 \end{pmatrix}$ ....

Calcul 11.14 — Des puissances à foison.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer le produit suivant en simplifiant au maximum.

Le résultat attendu est une « matrice ligne ».

$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^{n-2} & -2^{n-1} & 2^n \\ 2^{n-1} & 2^n & -2^{n+1} \\ 2^n & -2^{n+1} & 2^{n+2} \end{pmatrix}$ ....

Calculs plus avancés

Calcul 11.15

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer le produit $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times A \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ....

b) Déterminer le réel α tel que $\begin{pmatrix} \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix} \times A \times \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$ ....

Calcul 11.16 — Un hasard ?

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 5 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ et on pose $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Enfin, on pose $\qquad C_1 = A \times E_1, \quad C_2 = A \times E_2 \quad \text{et} \quad C_3 = A \times E_3.$

a) Calculer C_1 .... $\boxed{}$ b) Calculer C_2 .... $\boxed{}$ c) Calculer C_3 .... $\boxed{}$

d) Déterminer le réel α tel que $-2C_1 + 3C_2 + \alpha C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -11 \\ 14 \end{pmatrix}$ .... $\boxed{}$

e) Calculer le produit $A \times \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ \alpha \end{pmatrix}$ .... $\boxed{}$

Réponses mélangées

$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad$ $(3, 2)$ $\quad$ 3 $\quad$ $\begin{pmatrix} -7 \\ -15 \\ 19 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $(-4, -3)$ $\quad$ a

0 $\quad$ $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad$ a $\quad$ b $\quad$ $\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ $\quad$ a $\quad$ $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ $\quad$ 20 $\quad$ $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

$(1, 2, 0)$ $\quad$ $\left(9, \frac{-1}{2}\right)$ $\quad$ $\begin{pmatrix} -10 \\ -22 \end{pmatrix}$ $\quad$ b $\quad$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\quad$ b $\quad$ $(2, 2)$ $\quad$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ $\quad$ 40

$\frac{-1}{10}$ $\quad$ a $\quad$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad$ $(2, 3)$ $\quad$ a $\quad$ $\begin{pmatrix} -9 \\ -10 \end{pmatrix}$ $\quad$ -1 $\quad$ $\left(\frac{-4}{3}, \frac{-5}{12}\right)$

$\begin{pmatrix} 0 \\ -11 \\ 14 \end{pmatrix}$ $\quad$ $(-1, 1)$ $\quad$ $\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{pmatrix} -8 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{pmatrix} -6 \\ -13 \\ 18 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ $\quad$ b $\quad$ -2

$(-2, 3)$ $\quad$ b $\quad$ $2^n \times \begin{pmatrix} 1 & -6 & 12 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{pmatrix} -3 \\ -12 \\ 11 \end{pmatrix}$ $\quad$ 4 $\quad$ $\begin{pmatrix} -9 \\ -14 \\ 25 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad$ -2

$\begin{pmatrix} 1 \\ 12 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\left(\frac{5}{14}, \frac{1}{7}\right)$ $\quad$ (12) $\quad$ a $\quad$ $\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{3}\right)$ $\quad$ $6\sqrt{2} + 18$ $\quad$ b $\quad$ $\begin{pmatrix} -4 \\ -12 \end{pmatrix}$

► Réponses et corrigés page 122

Calcul matriciel II

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 12.1 — Des fractions.

Écrire sous forme de fraction irréductible les nombres suivants.

a) $\dfrac{5}{3}+\dfrac{3}{2}$ ....

b) $\dfrac{5}{3}-\dfrac{3}{2}$ ....

c) $5-\dfrac{3}{2}$ ....

Calcul 12.2

Simplifier le plus possible les expressions suivantes.

a) $\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{x}{x+2}$

b) $\dfrac{1}{x+1}+1$ ....

c) $\dfrac{1-2x}{2x}-\dfrac{x+4}{1-x}$

Calcul 12.3 — Deux petites équations.

Donner la solution de chacune des équations suivantes.

a) $\dfrac{2x}{3}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{2}$ ....

b) $\dfrac{3}{2x+1}=\dfrac{4}{5}$ ....

Somme de matrices

Calcul 12.4

On considère les matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 4 & 5\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B=\begin{pmatrix}3 & -4\\ 2 & 0\end{pmatrix}.$$

Effectuer les calculs suivants.

a) $A+B$ ......

b) $2A-B$ ....

c) $-\dfrac{1}{2}A+\dfrac{2}{3}B$

Calcul 12.5

On considère les matrices suivantes $A = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & \frac{4}{3} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & 4 \\ -1 & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$. Calculer :

a) $A + B$ ....

b) $A - B$ ....

Produit matriciel

Calcul 12.6

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Effectuer les calculs suivants.

a) $A \times B$ ....

b) $B \times A$ ....

c) A^2 ....

d) B^2 ....

Calcul 12.7

On considère les matrices $C = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{6}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$. Effectuer les calculs suivants.

a) $C \times D$ ....

b) $D \times C$ ....

Calcul 12.8

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Effectuer les calculs suivants.

a) $A \times B$ ....

b) $B \times A$ ....

Puissances de matrices

Calcul 12.9 — Une propriété remarquable.

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Effectuer les calculs suivants.

a) A^2 ....

b) A^3 ....

c) A^4 ....

d) A^5 ....

Calcul 12.10

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. En faisant des calculs en autonomie, exprimer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice A^n en fonction de n.

A^n ....

Calculs plus avancés

Calcul 12.11 — Des équations matricielles.

On considère les matrices J et L définies par $J = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Déterminer une matrice N telle que $N \times J = J$ et $N \times K = K$ ....

b) Déterminer une matrice R telle que $K \times R = J$ ....

Réponses mélangées

$\dfrac{19}{6}$ $\quad$ $\dfrac{-11x+1}{2x(1-x)}$ $\quad$ $R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{5}{2} & -3 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{pmatrix} \frac{72}{5} & \frac{48}{5} \\ -\frac{48}{5} & -\frac{32}{5} \end{pmatrix}$ $\quad$ $\dfrac{-x^2+2x+6}{(x+1)(x+2)}$ $\quad$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{pmatrix} \frac{51}{28} & \frac{16}{3} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{8} \end{pmatrix}$ $\quad$ $\dfrac{7}{2}$ $\quad$ $\dfrac{1}{6}$ $\quad$ $\begin{pmatrix} 9 & 8 & 16 \\ 7 & 1 & 11 \\ 8 & 3 & 15 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{pmatrix} -\frac{19}{28} & -\frac{8}{3} \\ \frac{7}{2} & -\frac{9}{8} \end{pmatrix}$

$\dfrac{27}{8}$ $\quad$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 4 & 3 & 5 \\ 20 & 17 & 17 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\dfrac{11}{8}$ $\quad$ $\dfrac{x+2}{x+1}$ $\quad$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

► Réponses et corrigés page 126

Matrices inversibles

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 13.1 — Quelques factorisations.

Factoriser les expressions suivantes.

a) $x^3 - x$ ....

b) $2x^2 - 10x + 12$ ....

c) $x^2 - 121$ ....

d) $(x^3 + 9x^2) - (x + 9)$ ..

e) $x^4 + 5x^2 - 36$ ....

f) $2x^3 + 5x^2 - 2x - 5$ ....

Calcul 13.2 — Des racines (I).

Utiliser la « méthode de la quantité conjuguée » pour simplifier l'écriture des nombres suivants.

L'écriture obtenue ne doit plus comporter de racine au dénominateur.

a) $\dfrac{-2}{1-\sqrt{3}}$ ....

b) $\dfrac{\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$ ....

Calcul 13.3 — Des racines (II).

Même consigne que dans le calcul précédent.

a) $\dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$ ....

b) $\dfrac{2}{(1-\sqrt{2})(1-\sqrt{3})}$ ....

Calcul de l'inverse

Calcul 13.4

Calculer l'inverse des matrices inversibles suivantes.

a) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ..

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ...

c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$ ..

Calcul 13.5

Soient a, b, c trois réels tels que $bc \neq 0$. Calculer, si elle existe, l'inverse de $\begin{pmatrix} a & c \\ b & 0 \end{pmatrix}$.

....

Calcul 13.6

Calculer l'inverse des matrices inversibles suivantes.

a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ....

b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ....

Calcul 13.7

La matrice $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? ....

Autres méthodes de calcul

Calcul 13.8 — Inversion d'une matrice grâce à une relation (I).

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -3 & -4 & 3 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $A^2 - A$ ....

b) En déduire l'expression de A^{-1} en fonction de A et de I_3 ....

c) En déduire A^{-1} ....

Calcul 13.9 — Inversion d'une matrice grâce à une relation (II).

a) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 4 \\ 4 & 5 & -4 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

En utilisant le calcul de $A^2 + 2A$, calculer A^{-1} ....

b) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

En utilisant le calcul de $A^2 - A - 2\mathrm{I}_3$, calculer A^{-1} ....

Calcul 13.10 — Inversibilité d'une matrice grâce à une relation (III).

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer A^3 ....

b) A est-elle inversible ? ....

Calcul 13.11 — Inversion d'une matrice en résolvant des systèmes.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et on considère $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ la matrice colonne inconnue.

a) Calculer AX ....

b) Résoudre $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ....

c) Résoudre $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ....

d) Résoudre $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ....

e) En déduire A^{-1} ....

Calcul 13.12 — Inversion d'une matrice en résolvant un système.

Résoudre le système $\begin{cases} x - \ \ y + \ \ z = a \\ x + 2y + \ \ z = b \\ x + \ \ y + 2z = c \end{cases}$ puis calculer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

....

Calcul 13.13 — Avec des coefficients.

Soient a, b deux réels. On pose $P = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

a) Calculer PQ ....

b) En déduire, pour $(a, b) \neq (0, 0)$, l'inverse de P ....

Calculs plus avancés

Calcul 13.14

Soit θ un réel. Calculer l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ ....

Calcul 13.15

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer PQ ....

b) Déterminer l'inverse de P

c) Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$ ....

d) Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer $\left(PDP^{-1}\right)^n$ en fonction de P, D^n et P^{-1} ....

e) Calculer la première ligne de A^n ....

Calcul 13.16 — Effets de transformations sur l'inverse d'une matrice.

On considère des matrices inversibles de taille supérieure ou égale à 2.

a) Que se passe-t-il quand on échange deux lignes d'une matrice et qu'on l'inverse ?

(a) Les lignes correspondantes de la matrice inverse sont échangées.

(b) Les colonnes correspondantes de la matrice inverse sont échangées.

(c) On ne peut rien dire.

....

b) Que se passe-t-il quand on multiplie la première ligne d'une matrice par 2 puis qu'on l'inverse ?

(a) La première ligne de la matrice inverse est multipliée par 2.

(b) La première ligne de la matrice inverse est multipliée par $\frac{1}{2}$.

(c) On ne peut rien dire.

(d) La première colonne de la matrice inverse est multipliée par 2.

(e) La première colonne de la matrice inverse est multipliée par $\frac{1}{2}$.

....

c) Que se passe-t-il quand on ajoute à la première ligne d'une matrice la deuxième puis qu'on l'inverse ?

(a) La seconde ligne est ajoutée à la première ligne de la matrice inverse.

(b) La seconde ligne est soustraite à la première ligne de la matrice inverse.

(c) On ne peut rien dire.

(d) La seconde colonne est ajoutée à la première colonne de la matrice inverse.

(e) La seconde colonne est soustraite à la première colonne de la matrice inverse.

....

Réponses mélangées

$1+\sqrt{3}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$(x-11)(x+11)$	$\frac{3\sqrt{5}+5}{4}$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2}Q$	
$(x-1)(x+1)(x+9)$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{-3}{2} & \frac{-5}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	Non	$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$		
$(x-1)(x+1)(2x+5)$	$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$	$2\mathrm{I}_3$	PD^nP^{-1}	
$(a^2+b^2)\,\mathrm{I}_2$	$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$	$x(x-1)(x+1)$	$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$	$(x+2)(x-2)(x^2+9)$		
$\sqrt{14}+2$	$\begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{-4}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{7}{3} & \frac{-4}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$	(e)	$2(x-2)(x-3)$	$\begin{pmatrix} 4x-2y+z \\ 2x-y+2z \\ -x+2y+2z \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	
non	$\frac{1}{2}(A-\mathrm{I}_3)$	$1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$	$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & -\frac{a}{bc} \end{pmatrix}$	(b)	A	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
(e)	$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{3^n+(-1)^n}{2} & \frac{(-1)^n-3^n}{2} & \frac{3^n-(-1)^n}{2} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{a^2+b^2}Q$	$2\mathrm{I}_3$	

► Réponses et corrigés page 128

Congruences

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 14.1

Donner le reste dans :

a) la division de 115 par 6 ....

b) la division de 115 par 7 ....

Calcul 14.2 — Des puissances.

Écrire les produits suivants sous la forme « a^n », où a et n sont des entiers relatifs.

a) $5^9 \times 5^{-3}$ ....

b) $7^{-5} \times 7$ ....

c) $(3^6)^7 \times 3^{(-8)}$ ....

d) $(-4)^5 \times ((-4)^2)^{-10}$ ....

e) $\dfrac{(-3)^6 \times (-3)^{-5}}{(-3)^7}$ ....

f) $((4^5)^6)^7$ ....

Calcul 14.3

Écrire sous la forme d'une fraction irréductible $\dfrac{\dfrac{81}{63}}{4 - \dfrac{2}{14}}$ ....

Calculs avec les congruences

Calcul 14.4 — Des puissances de trois.

Déterminer les valeurs suivantes.

On attend un nombre entier positif ou nul aussi petit que possible.

a) 3^2 modulo 2 ....

b) 3^3 modulo 5 ....

c) 3^4 modulo 7 ....

d) 3^5 modulo 11 ....

Calcul 14.5 — D'autres puissances de trois.

Déterminer les valeurs suivantes.

On attend un nombre entier positif aussi petit que possible.

a) 3^{10} modulo 7 ..

b) 3^{20} modulo 7 ..

c) 3^{45} modulo 7 ..

Calcul 14.6 — Encore des puissances.

Déterminer les valeurs suivantes.

On attend un nombre entier positif aussi petit que possible.

a) 12^7 modulo 11 ....

b) 99^5 modulo 10 ....

Calcul 14.7 — Calcul de restes (I).

a) Sachant que $2^4 \equiv 1$ [5], quel est le reste dans la division euclidienne de 12^{14} par 5 ? ......

b) Sachant que $3^4 \equiv 1$ [10], quel est le reste dans la division euclidienne de 103^{15} par 10 ? ..

Calcul 14.8 — Calcul de restes (II).

Déterminer le reste de la division euclidienne de :

a) 3^{100} par 7 ....

b) 524^{425} par 5 ....

c) $3^{1\,515} + 4^{1\,515}$ par 11 ....

Inversion modulo n de petits nombres

Remarque
Dans les exercices de cette section, on donnera les solutions des équations considérées sous la forme « $x \equiv k$ [n] », où k est à déterminer et où n dépend de l'équation.

Calcul 14.9 — Inversion et résolution (I).

Pour tous entiers a et n, on appelle *inverse de a modulo n* tout entier b tel que $ab \equiv 1$ [n].

a) Déterminer un inverse de 2 modulo 5 ....

b) Résoudre l'équation $2x \equiv 3$ [5] ....

Calcul 14.10 — Inversion et résolution (II).

Pour tous entiers a et n, on appelle *inverse de a modulo n* tout entier b tel que $ab \equiv 1\ [n]$.

a) Déterminer un inverse de 4 modulo 5 ....

b) Résoudre l'équation $9x \equiv 1\ [5]$ ....

Calcul 14.11 — Inversion et résolution (III).

Pour tous entiers a et n, on appelle *inverse de a modulo n* tout entier b tel que $ab \equiv 1\ [n]$.

a) Déterminer un inverse de 3 modulo 7 ....

b) Résoudre l'équation $3x \equiv 4\ [7]$ ....

c) Déterminer un inverse de 4 modulo 9 ....

d) Résoudre l'équation $4x \equiv 5\ [9]$ ....

Calcul du dernier chiffre

Calcul 14.12

Déterminer le dernier chiffre (dans leur écriture en base 10) des nombres suivants.

a) $7^{1\,010}$ ....

b) 92^{32} ....

c) 204^{402} ....

d) 919^{199} ....

e) $4\,242^{4\,343}$ ....

Calculs plus avancés

Calcul 14.13

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de 5^{4n} par 13 ....

Calcul 14.14

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le dernier chiffre (dans son écriture en base 10) du nombre 3^{4n+1} ....

Calcul 14.15

Soit $n \in \mathbb{N}$. Trouver une valeur simple de a, indépendante de n, telle que $2^{4n+3} + 3^{4n+3} \equiv a\ [5]$.

....

Calcul 14.16

Soit $n \in \mathbb{N}$. Trouver une valeur simple de a, indépendante de n, telle que $4^{3n+5} - 3^{2n+10} \equiv a\ [11]$.

....

Calcul 14.17

a) Trouver le plus petit entier non nul $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $3^p \equiv 1\ [7]$ ....

b) En déduire une condition sur n pour que $3^n - 1$ soit divisible par 7.

On attend une réponse de la forme « $n \equiv k\ [N]$ », où k et N sont à déterminer.

....

Calcul 14.18

a) Trouver le plus petit entier non nul $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $2^p \equiv 1\ [5]$ ....

b) En déduire une condition sur n pour que $2^n - 1$ soit divisible par 5.

On attend une réponse de la forme « $n \equiv k\ [N]$ », où k et N sont à déterminer.

....

Réponses mélangées

1 — 2 modulo 7 — 5 — $x \equiv 8\ [9]$ — 0 — 4 modulo 7 — 9 — 1 modulo 11

9 modulo 10 — $n \equiv 0\ [4]$ — 0 — 2 — 6 — 4 — 1 — 4 — 4^{210}

2 modulo 5 — 1 modulo 11 — $n \equiv 0\ [6]$ — 4 — 6 — $\dfrac{1}{3}$ — 3 — 4 — 3^{34}

9 — 4 — 7 — 7 — $x \equiv 4\ [5]$ — 7^{-4} — 4 modulo 7 — $(-3)^{-6}$ — $x \equiv 4\ [5]$

$(-4)^{-15}$ — 3 — 1 modulo 2 — $x \equiv 6\ [7]$ — 5^6 — 6 — 8 — 6 modulo 7 — 3

▶ Réponses et corrigés page 133

PGCD

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 15.1 — Des fractions.

Calculer et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

a) $\dfrac{5}{16} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{2}{3} - 1$ ....

b) $\left(\dfrac{25}{15} - \dfrac{11}{12}\right) \times \dfrac{8}{11}$ ....

Calcul 15.2

Mettre au même dénominateur les expressions suivantes.

a) $\dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{9x-1}{x^3}$ ....

b) $\dfrac{3x+1}{2x-4} - \dfrac{2x-1}{5x+3}$ ....

Calcul 15.3 — Diviseurs.

Donner l'ensemble de tous les diviseurs positifs ou nuls des nombres entiers suivants.

a) 60 ....

b) 96 ....

Calcul du PGCD par décomposition en nombres premiers

Calcul 15.4

Donner la décomposition en facteurs premiers de :

a) 36 ....

b) de 90 ....

c) En déduire leur PGCD ....

Calcul 15.5

Donner la décomposition en facteurs premiers de :

a) 300 ....

b) 810 ....

c) En déduire leur PGCD ....

Calcul 15.6

Donner la décomposition en facteurs premiers de :

a) 1 530, sachant que 34 divise 1 530 ....

b) 910, sachant que 35 divise 910 ....

c) En déduire le PGCD de 910 et 1 530 ....

Calcul 15.7

Donner la décomposition en facteurs premiers de :

a) 450 ....

b) 306 ....

c) En déduire leur PGCD ....

Calcul 15.8

Déterminer l'entier a vérifiant $\text{PGCD}(a, 90) = 15$ et $90 < a < 120$ ....

Calcul du PGCD à l'aide de l'algorithme d'Euclide

Calcul 15.9

À l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminer :

a) $\text{PGCD}(1\ 518, 506)$ ....

b) $\text{PGCD}(441, 6\ 069)$ ....

Calcul 15.10

En utilisant l'algorithme d'Euclide, dans chaque cas suivant, déterminer si, « oui » ou « non », les nombres suivants sont premiers entre eux.

a) 11 011 et 285 ....

b) 7 875 et 352 ....

Relations de Bézout

Calcul 15.11

Dans chacun des cas suivants, déterminer un couple d'entiers relatifs (u, v) tel que :

a) $34u - 105v = 1$ ....

b) $51u + 210v = 3$ ....

Calcul 15.12

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $a = 3n + 2$ et $b = 2n + 1$.

Déterminer un couple d'entiers relatifs (u, v) tel que $au + bv = 1$ ....

Inverses modulo n de nombres

Remarque
Dans les exercices de cette section, on donnera les solutions des équations considérées sous la forme « $x \equiv k\ [n]$ », où k est à déterminer et où n dépend de l'équation.

Calcul 15.13

a) Déterminer un inverse de 7 modulo 15 ....

b) En déduire les solutions de l'équation $7x \equiv 8\ [15]$ ....

Calcul 15.14

a) Calculer un inverse de 24 modulo 55 ....

b) En déduire les solutions de l'équation $24x \equiv 5\ [55]$ ....

Calcul 15.15

a) Déterminer un inverse de 11 modulo 25 ....

b) En déduire les solutions de l'équation $11x \equiv -4\ [25]$. ....

Calculs plus avancés

Calcul 15.16 — PGCD de trois nombres.

Le PGCD de trois nombres est défini de manière analogue au PGCD de deux nombres.

Pour le calculer, on utilise la propriété suivante : $\mathrm{PGCD}(a, b, c) = \mathrm{PGCD}\Big(\mathrm{PGCD}(a, b), c\Big)$.

Déterminer :

a) $\mathrm{PGCD}(30, 105, 245)$ ....

b) $\mathrm{PGCD}(1\ 365, 1\ 925, 273)$ ....

Calcul 15.17 — Relations de Bézout.

a) Déterminer un couple d'entiers relatifs (u_1, v_1) tel que $42u_1 + 231v_1 = 21$ ....

b) Déterminer un couple d'entiers relatifs (u_2, v_2) tel que $21u_2 + 133v_2 = 7$ ....

c) En déduire un triplet d'entiers relatifs (u, v, w) tel que $42u + 231v + 133w = 7$ ...

Réponses mélangées

$2 \times 3^2 \times 17$ $\quad$ $2 \times 3^2 \times 5 \times 17$ $\quad$ $x \equiv 30\ [55]$ $\quad$ $x \equiv -1\ [15]$ $\quad$ -2 $\quad$ 506 $\quad$ 7

$(34, 11)$ $\quad$ $(30, -6, 1)$ $\quad$ 5 $\quad$ $(2, -3)$ $\quad$ $\dfrac{3x^2 - 5x + 1}{x^3}$ $\quad$ $x \equiv 11\ [25]$ $\quad$ $\dfrac{6}{11}$ $\quad$ $2 \times 3^2 \times 5$

$2 \times 3^2 \times 5^2$ $\quad$ -16 $\quad$ $2 \times 5 \times 7 \times 13$ $\quad$ 21 $\quad$ $(33, -8)$ $\quad$ $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96\}$

oui $\quad$ $2^2 \times 3^2$ $\quad$ $2 \times 3^4 \times 5$ $\quad$ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$ $\quad$ $2^2 \times 3 \times 5^2$ $\quad$ 105 $\quad$ 10

$(-5, 1)$ $\quad$ $-\dfrac{13}{48}$ $\quad$ $\dfrac{11x^2 + 2x - 1}{2(x-2)(5x+3)}$ $\quad$ $(-6, 1)$ $\quad$ oui $\quad$ 30 $\quad$ 18 $\quad$ -9 $\quad$ 18

► Réponses et corrigés page 137

Réponses et corrigés

Fiche n° 1. Calcul algébrique complexe I

Réponses

1.1 a) .... $\boxed{5}$

1.1 b) .... $\boxed{\sqrt{2}}$

1.1 c) .... $\boxed{4\sqrt{17}}$

1.2 a) .... $\boxed{\sqrt{2}-1}$

1.2 b) .... $\boxed{\dfrac{4-\sqrt{3}}{13}}$

1.2 c) .... $\boxed{\dfrac{3+\sqrt{5}}{4}}$

1.3 a) .... $\boxed{-1+5\mathrm{i}}$

1.3 b) .... $\boxed{1+5\mathrm{i}}$

1.3 c) .... $\boxed{11-7\mathrm{i}}$

1.3 d) .... $\boxed{2\mathrm{i}}$

1.3 e) .... $\boxed{29}$

1.3 f) .... $\boxed{-1-\mathrm{i}}$

1.4 a) .... $\boxed{-7-4\mathrm{i}}$

1.4 b) .... $\boxed{10+9\mathrm{i}}$

1.4 c) .... $\boxed{-3-\mathrm{i}}$

1.4 d) .... $\boxed{64-19\mathrm{i}}$

1.5 a) .... $\boxed{x^2-y^2+2\mathrm{i}xy}$

1.5 b) .... $\boxed{x^2-y^2-2\mathrm{i}xy}$

1.5 c) .... $\boxed{x^2+y^2}$

1.6 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}}$

1.6 b) .... $\boxed{\dfrac{3}{25}+\dfrac{4}{25}\mathrm{i}}$

1.6 c) .... $\boxed{-\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{5}\mathrm{i}}$

1.7 a) .... $\boxed{-\mathrm{i}}$

1.7 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{50}-\dfrac{7}{50}\mathrm{i}}$

1.7 c) .... $\boxed{-\dfrac{5}{74}+\dfrac{7}{74}\mathrm{i}}$

1.7 d) .... $\boxed{-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}}$

1.7 e) .... $\boxed{\dfrac{2}{17}-\dfrac{8}{17}\mathrm{i}}$

1.7 f) .... $\boxed{-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}}$

1.8 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}\mathrm{i}}$

1.8 b) .... $\boxed{-\dfrac{1}{5}+\dfrac{7}{5}\mathrm{i}}$

1.8 c) .... $\boxed{\dfrac{3}{10}-\dfrac{19}{10}\mathrm{i}}$

1.9 a) .... $\boxed{0 \text{ et } 0}$

1.9 b) .... $\boxed{2+5\mathrm{i}}$

1.9 c) .... $\boxed{-1}$

1.9 d) .... $\boxed{0}$

1.10 a) .... $\boxed{5}$

1.10 b) .... $\boxed{\sqrt{2}}$

1.10 c) .... $\boxed{9\sqrt{10}}$

1.10 d) .... $\boxed{8}$

1.10 e) .... $\boxed{1}$

1.10 f) .... $\boxed{\dfrac{1}{3}}$

1.11 a) .... $\boxed{\sqrt{6}}$

1.11 b) .... $\boxed{2}$

1.11 c) .... $\boxed{1}$

1.11 d) .... $\boxed{2}$

1.12 a) .... $\boxed{\sqrt{1+a^2}}$

1.12 b) .... $\boxed{|a|}$

1.12 c) .... $\boxed{1}$

1.13 a) .... $\boxed{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-\mathrm{i}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}}$

1.13 b) .... $\boxed{\text{a}}$

1.13 c) .... $\boxed{\text{b}}$

1.13 d) .... $\boxed{\text{a, c et d}}$

1.14 a) .... $\boxed{z^2+\mathrm{i}z}$

1.14 b) .... $\boxed{-\mathrm{i}z^2+\mathrm{i}}$

Corrigés

1.1 c) Le plus direct est d'écrire $16^2+4^2=16\times16+16=17\times16$, et donc $\sqrt{16^2+4^2}=\sqrt{17\times16}=4\sqrt{17}$.

....

1.2 a) On a $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}^2-1}=\sqrt{2}-1$.

....

1.2 b) On a $\dfrac{1}{4+\sqrt{3}} = \dfrac{4-\sqrt{3}}{(4+\sqrt{3})(4-\sqrt{3})} = \dfrac{4-\sqrt{3}}{4^2-\sqrt{3}^2} = \dfrac{4-\sqrt{3}}{13}$.

1.3 d) On a $(1+\mathrm{i})^2 = 1^2 + 2\mathrm{i} + \mathrm{i}^2 = 1 + 2\mathrm{i} - 1 = 2\mathrm{i}$.

1.3 e) On peut reconnaître une identité remarquable : $(5-2\mathrm{i})(5+2\mathrm{i}) = 5^2 - (2\mathrm{i})^2 = 25 - (-4) = 29$.

1.9 d) On a $\mathrm{i}^2 = -1$ et $\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$, d'où le résultat.

1.10 a) On a $|3+4\mathrm{i}| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$.

1.10 b) On a $|1-\mathrm{i}| = \sqrt{1+(-1)^2} = \sqrt{2}$.

1.10 c) Ne pas se lancer sans factoriser, afin d'éviter le calcul de 27^2 ! On a

$$|-9+27\mathrm{i}| = |9(-1+3\mathrm{i})| = 9|-1+3\mathrm{i}| = 9\sqrt{10}.$$

1.10 d) Ne pas utiliser la formule avec la racine mais $|-8\mathrm{i}| = |-8| \times |\mathrm{i}| = 8$.

1.10 e) On a $\left|\dfrac{1}{\mathrm{i}}\right| = \dfrac{1}{|\mathrm{i}|} = 1$.

1.10 f) Commencer par factoriser le dénominateur : $\left|\dfrac{1+\mathrm{i}}{3-3\mathrm{i}}\right| = \left|\dfrac{1+\mathrm{i}}{3(1-\mathrm{i})}\right| = \dfrac{|1+\mathrm{i}|}{3|1-\mathrm{i}|} = \dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \dfrac{1}{3}$.

1.11 b) On a $\left|\dfrac{\sqrt{7}+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right| = \dfrac{|\sqrt{7}+\mathrm{i}|}{|1+\mathrm{i}|} = \dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$.

1.12 c) On remarque que $2-\mathrm{i}a$ est le conjugué de $2+\mathrm{i}a$, ils ont donc le même module. Ainsi, on a

$$\left|\frac{2+\mathrm{i}a}{2-\mathrm{i}a}\right| = \frac{|2+\mathrm{i}a|}{|2-\mathrm{i}a|} = 1.$$

1.13 b) On a les équivalences suivantes : $f(z) \in \mathbb{R} \iff 2xy = 0 \iff x = 0$ ou $y = 0$.

1.13 c) On a les équivalences suivantes : $f(z) \in \mathrm{i}\mathbb{R} \iff x^2 - y^2 = 0 \iff x = y$ ou $x = -y$.

1.13 d) On a $|f(z)| = \dfrac{|z|}{|\overline{z}|}$ et $|\overline{z}| = |z|$. Donc, a est vraie. On a $f(\overline{z}) = \dfrac{\overline{(\overline{z})}}{\overline{z}} = \dfrac{z}{\overline{z}}$. D'un autre côté, $\overline{f(z)} = \dfrac{\overline{(\overline{z})}}{\overline{z}} = \dfrac{z}{\overline{z}}$. Donc, c est vraie, mais pas b. On a aussi $\dfrac{1}{f(z)} = \dfrac{1}{\frac{\overline{z}}{z}} = \dfrac{z}{\overline{z}}$. Donc, d est vraie.

1.14 a) On multiplie l'égalité par z. On a $z^4 = z \times z^3 = z \times (z+\mathrm{i}) = z^2 + \mathrm{i}z$.

1.14 b) On a l'équivalence $z^3 = z + \mathrm{i} \iff z^3 - z = \mathrm{i}$. Puisque z est non nul (car 0 ne vérifie pas l'équation), on peut diviser par z, on obtient les équivalences $z^3 = z + \mathrm{i} \iff z^2 - 1 = \dfrac{\mathrm{i}}{z} \iff \dfrac{1}{z} = \dfrac{z^2-1}{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}(z^2-1)$.

Fiche n° 2. Calcul algébrique complexe II

Réponses

2.1 a) .... $\boxed{-\dfrac{1}{3}}$

2.1 b) .... $\boxed{\dfrac{13}{3}}$

2.1 c) .... $\boxed{2 \text{ et } \dfrac{3}{4}}$

2.1 d) .... $\boxed{-\dfrac{7}{19}}$

2.2 a) .... $\boxed{\dfrac{2}{a^2-1}}$

2.2 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{a+1}}$

2.2 c) .... $\boxed{\dfrac{2^a+1}{4^a}}$

2.2 d) .... $\boxed{\dfrac{3^{a+2}+32}{2^{a+2}\times 3^a}}$

2.3 a) .... $\boxed{\dfrac{4\mathrm{i}}{3}}$

2.3 b) .... $\boxed{-2\mathrm{i}}$

2.3 c) .... $\boxed{0}$

2.3 d) .... $\boxed{\dfrac{3+\mathrm{i}}{5}}$

2.4 a) .... $\boxed{-\dfrac{1+2\mathrm{i}}{3}}$

2.4 b) .... $\boxed{\dfrac{2+\mathrm{i}}{5}}$

2.4 c) .... $\boxed{-\dfrac{3+\mathrm{i}}{2}}$

2.4 d) .... $\boxed{\dfrac{-3+5\mathrm{i}}{2}}$

2.5 a) .... $\boxed{-2\mathrm{i} \text{ et } 2-\mathrm{i}}$

2.5 b) .... $\boxed{3+3\mathrm{i}}$

2.5 c) .... $\boxed{-\dfrac{2+\mathrm{i}}{5}}$

2.5 d) .... $\boxed{-\dfrac{9+7\mathrm{i}}{5}}$

2.6 a) .... $\boxed{u=\dfrac{1+7\mathrm{i}}{13} \text{ et } v=\dfrac{-3+5\mathrm{i}}{13}}$

2.6 b) .... $\boxed{u=\dfrac{1+3\mathrm{i}}{10} \text{ et } v=\dfrac{3+19\mathrm{i}}{10}}$

2.7 a) .... $\boxed{-\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}}$

2.7 b) .... $\boxed{\dfrac{3+\mathrm{i}}{2}}$

2.7 c) .... $\boxed{\dfrac{13-18\mathrm{i}}{17}}$

2.7 d) .... $\boxed{1-4\mathrm{i}}$

2.8 a) .... $\boxed{\dfrac{1-\mathrm{i}}{2} \text{ et } 2\mathrm{i}}$

2.8 b) .... $\boxed{-\mathrm{i}}$

2.8 c) .... $\boxed{\dfrac{4-3\mathrm{i}}{5}}$

2.9 a) .... $\boxed{\{1+\mathrm{i}y\ ;\ y\in\mathbb{R}\}}$

2.9 b) .... $\boxed{\left\{x+\dfrac{7}{2}\mathrm{i}\ ;\ x\in\mathbb{R}\right\}}$

2.9 c) .... $\boxed{\left\{\dfrac{15+3\mathrm{i}}{8}\right\}}$

2.9 d) .... $\boxed{\varnothing}$

2.10 a) .... $\boxed{\dfrac{2+a-7a\mathrm{i}}{3}}$

2.10 b) .... $\boxed{\dfrac{-2+7\mathrm{i}}{a^2+1}}$

2.10 c) .... $\boxed{\dfrac{(17-\mathrm{i})a}{10}}$

2.10 d) .... $\boxed{\dfrac{69a+(108a^2-10)\mathrm{i}}{81a^2+4}}$

2.11 a) .... $\boxed{\begin{cases} u = \dfrac{2+3m+(2-3m)\mathrm{i}}{4} \\ v = \dfrac{-m-2+(3m-2)\mathrm{i}}{4} \end{cases}}$

2.11 b) ..... $\boxed{\begin{array}{ll} \big\{(0,1)\big\} & \text{si } m \neq \pm 1 \\ \big\{(u, 1-u)\ ;\ u \in \mathbb{C}\big\} & \text{si } m = 1 \\ \big\{(u, 1+u)\ ;\ u \in \mathbb{C}\big\} & \text{si } m = -1 \end{array}}$

2.12 a) .... $\boxed{\dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}}$

2.12 b) .... $\boxed{\dfrac{z^2-z^{n+1}}{1-z}}$

2.12 c) .... $\boxed{\dfrac{1-z^{2n+2}}{1-z^2}}$

2.12 d) .... $\boxed{\dfrac{z-z^{2n+3}}{1-z^2}}$

2.12 e) .... $\boxed{\dfrac{1+z^{n+1}}{1+z}}$

2.13 a) .... $\boxed{2\Big(|z|^2+|z'|^2\Big)}$

2.13 b) .... $\boxed{|z|^2+2\,\mathsf{Re}\big(z\overline{z'}\big)+|z'|^2}$

Corrigés

2.1 d) Quand $x \neq -\dfrac{7}{2}$, on a les équivalences suivantes :

$$\frac{2x-1}{7x+2} = 3 \iff 2x-1 = 3(7x+2) \iff 19x = -7 \iff x = -\frac{7}{19}.$$

....

2.2 a) Pour $a \neq \pm 1$, on a $\dfrac{1}{a-1} - \dfrac{1}{a+1} = \dfrac{a+1-(a-1)}{(a-1)(a+1)} = \dfrac{2}{a^2-1}$.

....

2.2 b) Pour $a \neq \pm 1$, en remarquant que $a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$, on a

$$\frac{1}{a-1} - \frac{2}{a^2-1} = \frac{a+1-2}{a^2-1} = \frac{a-1}{a^2-1} = \frac{1}{a+1}.$$

....

2.2 c) On veille à choisir un dénominateur commun le plus petit possible, en remarquant que $4^a = \left(2^2\right)^a = (2^a)^2$. Ainsi, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{1}{2^a} + \frac{1}{4^a} = \frac{2^a+1}{4^a} = \frac{2^a+1}{2^a}.$$

....

2.2 d) Là aussi, on veille à choisir un dénominateur commun le plus petit possible. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{9}{2^{a+2}} + \frac{4}{2^{a-1} \times 3^a} = \frac{9 \times 3^a + 2^3 \times 4}{2^{a+2} \times 3^a} = \frac{32 + 3^{a+2}}{2^{a+2} \times 3^a}.$$

....

2.3 a) On procède directement par équivalence. On a les équivalences suivantes :

$$3z - 4\mathrm{i} = 0 \iff 3z = 4\mathrm{i} \iff z = \frac{4\mathrm{i}}{3}.$$

....

2.3 b) On procède directement par équivalence. On a les équivalences suivantes :

$$\mathrm{i}z - 2 = 0 \iff \mathrm{i}z = 2 \iff z = \frac{2}{\mathrm{i}} = \frac{2\bar{\mathrm{i}}}{|\mathrm{i}|^2} = -2\mathrm{i}.$$

....

2.3 c) On procède directement par équivalence. On a les équivalences suivantes :

$$3z + iz = 0 \iff (3+i)z = 0 \iff z = 0.$$

2.3 d) On procède directement par équivalence. On a les équivalences suivantes :

$$(2+i)z - 1 - i = 0 \iff (2+i)z = 1 + i \iff z = \frac{1+i}{2+i} = \frac{(1+i)\overline{(2+i)}}{|2+i|^2} = \frac{3+i}{5}.$$

2.4 a) On procède directement par équivalence, en commençant bien sûr par regrouper les termes en z et les termes constants. On a les équivalences suivantes :

$$2z + 2i - 1 = 5z + 4i \iff 2z - 5z = 4i - 2i + 1 \iff -3z = 2i + 1 \iff z = -\frac{1+2i}{3}.$$

2.4 b) On procède de même. On a les équivalences suivantes :

$$z = i - 2iz \iff (1+2i)z = i \iff z = \frac{i}{1+2i} = \frac{i \times \overline{(1+2i)}}{|1+2i|^2} = \frac{2+i}{5}.$$

2.4 c) On procède de même. On a les équivalences suivantes :

$$z + 2 = i(z+1) \iff (1-i)z = i - 2 \iff z = \frac{i-2}{1-i} = \frac{(i-2)(1+i)}{|1-i|^2} = -\frac{3+i}{2}.$$

2.4 d) On procède de même. On a les équivalences suivantes :

$$(1+2i)z - (i-1) = iz - 3 \iff (1+i)z = i - 4 \iff z = \frac{i-4}{1+i} = \frac{(i-4)(1-i)}{|1+i|^2} = \frac{-3+5i}{2}.$$

2.5 a) On applique la règle classique sur les produits nuls. On a les équivalences suivantes :

$$(z+2i)(2z-4+2i) = 0 \iff \big(z + 2i = 0 \text{ ou } 2z - 4 + 2i = 0\big) \iff \big(z = -2i \text{ ou } z = 2 - i\big).$$

2.5 b) En cherchant les solutions dans $\mathbb{C} \setminus \{i\}$, on dispose des équivalences suivantes :

$$\frac{z-5}{z-i} = i \iff z - 5 = i(z - i) \iff (1-i)z = 6 \iff z = \frac{6}{1-i} = 3 + 3i.$$

2.5 c) En cherchant les solutions dans $\mathbb{C} \setminus \left\{\frac{-1}{2}\right\}$, on dispose des équivalences suivantes :

$$\frac{z+1}{2z+1} = 1 + i \iff z + 1 = (1+i)(2z+1) \iff (1+2i)z = -i \iff z = \frac{-i}{1+2i} = -\frac{2+i}{5}.$$

2.5 d) En cherchant les solutions dans $\mathbb{C} \setminus \{i-2\}$, on dispose des équivalences suivantes :

$$\frac{z-3+i}{z+2-i} = -2i \iff z - 3 + i = -2i(z + 2 - i) \iff (1+2i)z = 1 - 5i \iff z = \frac{1-5i}{1+2i} = -\frac{9+7i}{5}.$$

2.6 a) En soustrayant trois fois la deuxième ligne à la première, on obtient les équivalences suivantes :

$$\begin{cases} 3u + v = 2\mathrm{i} \\ u - 4v = 1 - \mathrm{i} \end{cases} \iff \begin{cases} 13v = -3 + 5\mathrm{i} \\ u - 4v = 1 - \mathrm{i} \end{cases} \iff v = \frac{-3+5\mathrm{i}}{13} \text{ et } u = 1 - \mathrm{i} + 4v = \frac{1+7\mathrm{i}}{13}.$$

2.6 b) En soustrayant trois fois la première ligne à la seconde, on obtient les équivalences suivantes :

$$\begin{cases} \mathrm{i}u + \phantom{\mathrm{i}}v = 2\mathrm{i} \\ 3\mathrm{i}u - \mathrm{i}v = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \mathrm{i}u + \phantom{-(3+\mathrm{i})}v = 2\mathrm{i} \\ \phantom{\mathrm{i}u} -(3+\mathrm{i})v = 1 - 6\mathrm{i} \end{cases} \iff \left(v = \frac{6\mathrm{i}-1}{3+\mathrm{i}} = \frac{3+19\mathrm{i}}{10} \text{ et } u = \frac{2\mathrm{i}-v}{\mathrm{i}} = 2 + \mathrm{i}v = \frac{1+3\mathrm{i}}{10}\right).$$

2.7 a) On a les équivalences suivantes :

$$2\overline{z} = \mathrm{i} - 1 \iff \overline{z} = \frac{\mathrm{i}-1}{2} \iff z = \overline{\left(\frac{\mathrm{i}-1}{2}\right)} = \frac{\overline{\mathrm{i}-1}}{\overline{2}} = -\frac{1+\mathrm{i}}{2}.$$

2.7 b) On a les équivalences suivantes :

$$(3-\mathrm{i})\overline{z} = 4 - 3\mathrm{i} \iff \overline{z} = \frac{4-3\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}} \iff z = \frac{\overline{4-3\mathrm{i}}}{\overline{3-\mathrm{i}}} = \frac{4+3\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}} = \frac{3+\mathrm{i}}{2}.$$

2.7 c) On a les équivalences suivantes :

$$-\mathrm{i}\overline{z} + 2 = 4\overline{z} - 5\mathrm{i} \iff (4+\mathrm{i})\overline{z} = 2 + 5\mathrm{i} \iff \overline{z} = \frac{2+5\mathrm{i}}{4+\mathrm{i}} \iff z = \frac{2-5\mathrm{i}}{4-\mathrm{i}} = \frac{13-18\mathrm{i}}{17}.$$

2.7 d) On a les équivalences suivantes :

$$(1-\mathrm{i})\overline{z} + 4\mathrm{i} = 3\overline{z} - 5\mathrm{i} + 2 \iff (2+\mathrm{i})\overline{z} = 9\mathrm{i} - 2 \iff \overline{z} = \frac{9\mathrm{i}-2}{2+\mathrm{i}} \iff z = -\frac{2+9\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}} = 1 - 4\mathrm{i}.$$

2.8 a) Dans $\mathbb{C}$, un produit est nul si, et seulement si, l'un de ses facteurs l'est. Ainsi, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} (2z + \mathrm{i} - 1)(\mathrm{i}\overline{z} - 2) = 0 \iff 2z + \mathrm{i} - 1 = 0 \text{ ou } \mathrm{i}\overline{z} - 2 = 0 &\iff z = \frac{1-\mathrm{i}}{2} \text{ ou } \overline{z} = \frac{2}{\mathrm{i}} = -2\mathrm{i} \\ &\iff z = \frac{1-\mathrm{i}}{2} \text{ ou } z = \overline{-2\mathrm{i}} = 2\mathrm{i}. \end{aligned}$$

2.8 b) On suppose $z \neq -1$, pour assurer $\overline{z} + 1 \neq 0$. On a alors les équivalences suivantes :

$$\frac{\overline{z}-1}{\overline{z}+1} = \mathrm{i} \iff \overline{z} - 1 = \mathrm{i}(\overline{z}+1) \iff (1-\mathrm{i})\overline{z} = \mathrm{i} + 1 \iff \overline{z} = \frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \frac{(1+\mathrm{i})^2}{2} = \mathrm{i} \iff z = \overline{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}.$$

2.8 c) On procède comme à la question précédente.

2.9 a) Il suffit de se rappeler que $z + \overline{z} = 2\,\mathsf{Re}(z)$.

2.9 b) Il suffit de se rappeler que $z - \overline{z} = 2\mathrm{i}\,\mathsf{Im}(z)$.

2.9 c) Écrivons $z = x + \mathrm{i}y$ sous forme algébrique, avec $x, y \in \mathbb{R}$. On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}\overline{z} - 3\mathrm{i}z - 3 + 6\mathrm{i} = 0 &\iff x - \mathrm{i}y - 3\mathrm{i}(x + iy) - 3 + 6\mathrm{i} = 0 \\ &\iff x + 3y - 3 + \mathrm{i}(6 - y - 3x) = 0.\end{aligned}$$

En identifiant parties réelle et imaginaire, on a les équivalences suivantes :

$$x + 3y - 3 + \mathrm{i}(6 - y - 3x) = 0 \iff \begin{cases} x + 3y = 3 \\ 3x + y = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 3y = 3 \\ - 8y = -3 \end{cases} \iff x = \frac{15}{8} \text{ et } y = \frac{3}{8}.$$

....

2.9 d) On procède comme à la question précédente, en écrivant $z = x + \mathrm{i}y$ sous forme algébrique. On a alors les équivalences suivantes, pour $z \neq -\mathrm{i}$:

$$\frac{\overline{z} - 2\mathrm{i}}{z + \mathrm{i}} = \mathrm{i} \iff \overline{z} - 2\mathrm{i} = \mathrm{i}z - 1 \iff x - \mathrm{i}y - 2\mathrm{i} = \mathrm{i}x - y - 1 \iff x - \mathrm{i}(2 + y) = -(y + 1) + \mathrm{i}x.$$

En identifiant parties réelle et imaginaire, on a donc

$$\frac{\overline{z} - 2\mathrm{i}}{z + \mathrm{i}} = \mathrm{i} \iff \big(x = -(y + 1) \text{ et } -(2 + y) = x\big) \iff \big(x + y = -1 \text{ et } x + y = -2\big).$$

Il n'y a donc aucune solution.

....

2.10 c) On a les équivalences suivantes :

$$3\overline{z} - 2\mathrm{i}a = 5a - \mathrm{i}\overline{z} \iff (3 + \mathrm{i})\overline{z} = (5 + 2\mathrm{i})a \iff \overline{z} = \frac{(5 + 2\mathrm{i})a}{3 + \mathrm{i}} \underset{\text{car } a \in \mathbb{R}}{\iff} z = \frac{(5 - 2\mathrm{i})a}{3 - \mathrm{i}} = \frac{(17 - \mathrm{i})a}{10}.$$

....

2.10 d) Soit $z \neq \frac{4\mathrm{i}}{3}$. On a les équivalences suivantes :

$$\frac{5 - 2\mathrm{i}z}{3z - 4\mathrm{i}} = 3a \iff 5 - 2\mathrm{i}z = 9az - 12\mathrm{i}a \iff (9a + 2\mathrm{i})z = 5 + 12\mathrm{i}a \underset{\text{car } 9a + 2\mathrm{i} \neq 0}{\iff} z = \frac{5 + 12\mathrm{i}a}{9a + 2\mathrm{i}}.$$

De plus, on a $\dfrac{5 + 12\mathrm{i}a}{9a + 2\mathrm{i}} = \dfrac{(5 + 12\mathrm{i}a)(9a - 2\mathrm{i})}{(9a)^2 + 2^2} = \dfrac{69a + (108a^2 - 10)\mathrm{i}}{81a^2 + 4}$.

....

2.11 a) En ajoutant deux fois la deuxième ligne à la première, on obtient les équivalences suivantes :

$$\begin{cases} 2u + 2v = m \\ \mathrm{i}u - v = m + \mathrm{i} \end{cases} \iff \begin{cases} 2(1 + \mathrm{i})u = 3m + 2\mathrm{i} \\ \mathrm{i}u - v = m + \mathrm{i} \end{cases} \iff \begin{cases} u = \dfrac{3m + 2\mathrm{i}}{2(1 + \mathrm{i})} = \dfrac{3m + 2 + (2 - 3m)\mathrm{i}}{4} \\ v = \mathrm{i}u - m - \mathrm{i} = \dfrac{-m - 2 + (3m - 2)\mathrm{i}}{4}. \end{cases}$$

....

2.11 b) En soustrayant m fois la première ligne à la deuxième, on a l'équivalence suivante :

$$\begin{cases} mu + v = 1 \\ u + mv = m \end{cases} \iff \begin{cases} mu + v = 1 \\ \big(1 - m^2\big)u = 0. \end{cases}$$

On distingue alors trois cas :

- si $m \neq \pm 1$, alors $1 - m^2 \neq 0$ et le système équivaut à $u = 0$ et $v = 1$;
- si $m = 1$, alors le système équivaut à l'équation $u + v = 1$ et il y a une infinité de solutions, à savoir l'ensemble $\big\{(u, 1 - u) \mid u \in \mathbb{C}\big\}$;
- si $m = -1$, alors le système équivaut à l'équation $-u + v = 1$ et il y a une infinité de solutions, à savoir l'ensemble $\big\{(u, 1 + u) \mid u \in \mathbb{C}\big\}$.

....

2.12 a) Comme $z \neq 1$, grâce à la formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique, on a

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = z^0 \times \frac{1 - z^{n-0+1}}{1-z} = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}.$$

....

2.12 b) Comme $z \neq 1$, de même on a $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} z^k = z^2 \times \frac{1-z^{n-2+1}}{1-z} = \frac{z^2 - z^{n+1}}{1-z}$.

....

2.12 c) On peut aller plus vite en réutilisant le résultat de la question a), en remplaçant z par z^2, sachant qu'on a bien $z^2 \neq 1$. On trouve $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} z^{2k} = \sum_{k=0}^{n} \left(z^2\right)^k = \frac{1-\left(z^2\right)^{n+1}}{1-z^2} = \frac{1-z^{2n+2}}{1-z^2}$.

....

2.12 d) Il suffit de remarquer que, sachant que $z^2 \neq 1$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} z^{2k+1} = z\sum_{k=0}^{n} z^{2k} = z \times \frac{1-z^{2n+2}}{1-z^2} = \frac{z - z^{2n+3}}{1-z^2}$.

....

2.12 e) D'après ce qui précède, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} z^{2k} = \frac{1-z^{2n+2}}{1-z^2}$. Cette expression peut être factorisée : on a

$$\frac{1-z^{2n+2}}{1-z^2} = \frac{1-\left(z^{n+1}\right)^2}{1-z^2} = \frac{(1-z^{n+1})(1+z^{n+1})}{(1-z)(1+z)}.$$

Comme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$, on obtient $\displaystyle\frac{\sum_{k=0}^{n} z^{2k}}{\sum_{k=0}^{n} z^k} = \frac{(1-z^{n+1})(1+z^{n+1})}{(1-z)(1+z)} \times \frac{1-z}{1-z^{n+1}} = \frac{1+z^{n+1}}{1+z}$.

....

2.13 a) Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned}
\left|z+z'\right|^2 + \left|z-z'\right|^2 &= \left(z+z'\right)\overline{\left(z+z'\right)} + \left(z-z'\right)\overline{\left(z-z'\right)} \\
&= \left(z+z'\right)\left(\overline{z}+\overline{z'}\right) + \left(z-z'\right)\left(\overline{z}-\overline{z'}\right) \\
&= z\overline{z} + z\overline{z'} + z'\overline{z} + z'\overline{z'} + z\overline{z} - z\overline{z'} - z'\overline{z} + z'\overline{z'} \\
&= 2z\overline{z} + 2z'\overline{z'} \\
&= 2\left(|z|^2 + \left|z'\right|^2\right).
\end{aligned}$$

....

2.13 b) Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned}
\left|z+z'\right|^2 &= \left(z+z'\right)\overline{z+z'} \\
&= \left(z+z'\right)\left(\overline{z}+\overline{z'}\right) \\
&= z\overline{z} + z\overline{z'} + z'\overline{z} + z'\overline{z'} \\
&= |z|^2 + z\overline{z'} + \overline{z\overline{z'}} + \left|z'\right|^2 && \left(\text{car } \overline{\overline{z'}} = z'\right) \\
&= |z|^2 + 2\,\mathsf{Re}\left(z\overline{z'}\right) + \left|z'\right|^2 && \left(\text{car } u + \overline{u} = 2\,\mathsf{Re}(u) \text{ avec } u = z\overline{z'}\right).
\end{aligned}$$

Cette formule rappelle l'identité remarquable donnant le développement de $(a+b)^2$, avec un terme croisé un peu plus compliqué.

....

Fiche n° 3. Équations de degré 2

Réponses

3.1 a) .... $\boxed{21+12\sqrt{3}}$

3.1 b) .... $\boxed{6-2\sqrt{5}}$

3.1 c) .... $\boxed{-3}$

3.1 d) .... $\boxed{17-12\sqrt{2}}$

3.2 a) .... $\boxed{\mathrm{e}^{x+1}}$

3.2 b) .... $\boxed{\mathrm{e}^{x-6}}$

3.2 c) .... $\boxed{\mathrm{e}^{-4}}$

3.2 d) .... $\boxed{\mathrm{e}^{6x-3}}$

3.3 a) .... $\boxed{\dfrac{x-1}{x(x^2+1)}}$

3.3 b) .... $\boxed{\dfrac{16x^2+8x-3}{3x(x+3)}}$

3.4 a) .... $\boxed{\{3-2\mathrm{i}\,,3+2\mathrm{i}\}}$

3.4 b) .... $\boxed{\left\{\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\mathrm{i}\,,\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\mathrm{i}\right\}}$

3.4 c) .... $\boxed{\left\{-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\,,-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right\}}$

3.4 d) .... $\boxed{\{2-\sqrt{2}\mathrm{i}\,,2+\sqrt{2}\mathrm{i}\}}$

3.5 .... $\boxed{\{1\,,\sqrt{2}\}}$

3.6 a) .... $\boxed{\left\{\dfrac{3}{8}-\dfrac{\sqrt{7}}{8}\mathrm{i}\,,\dfrac{3}{8}+\dfrac{\sqrt{7}}{8}\mathrm{i}\right\}}$

3.6 b) .... $\boxed{\left\{\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{3}\mathrm{i}\,,\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\mathrm{i}\right\}}$

3.6 c) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\sqrt{3}}{10}\right\}}$

3.6 d) .... $\boxed{\{1-\mathrm{i}\sqrt{2}\,,1+\mathrm{i}\sqrt{2}\}}$

3.7 a) .... $\boxed{\left\{\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{5}\mathrm{i}\,,\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{5}\mathrm{i}\right\}}$

3.7 b) .... $\boxed{\{-\sqrt{2},\sqrt{2},-\sqrt{3}\mathrm{i}\,,\sqrt{3}\mathrm{i}\}}$

3.7 c) .... $\boxed{\{-1\,,1\,,-3\mathrm{i}\,,3\mathrm{i}\}}$

3.8 a) .... $\boxed{0}$

3.8 b) .... $\boxed{(a,b,c)=(2,-10,26)}$

3.8 c) .... $\boxed{\left\{1\,,\dfrac{5}{2}-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\,,\dfrac{5}{2}+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right\}}$

3.9 .... $\boxed{\left\{-1\,,-\sqrt{2}\mathrm{i}\,,\sqrt{2}\mathrm{i}\,,\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right\}}$

3.10 a) .... $\boxed{\left\{\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\,,\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right\}}$

3.10 b) .... $\boxed{\left\{\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{15}}{4}\mathrm{i}\,,\dfrac{1}{4}+\dfrac{\sqrt{15}}{4}\mathrm{i}\right\}}$

3.10 c) .... $\boxed{\left\{\dfrac{1}{2}\,,1\right\}}$

3.10 d) .... $\boxed{\left\{\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{15}}{4}\mathrm{i}\,,\dfrac{1}{4}+\dfrac{\sqrt{15}}{4}\mathrm{i}\,,\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\,,\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right\}}$

3.11 a) .... $\boxed{\left\{-5\,,\dfrac{1}{2}\right\}}$

3.11 b) .... $\boxed{2z^2+9z+\dfrac{9}{z}+\dfrac{2}{z^2}+4}$

3.11 c) .... $\boxed{\alpha=-5}$

3.11 d) .... $\boxed{\left\{\dfrac{-5-\sqrt{21}}{2}\,,\dfrac{-5+\sqrt{21}}{2}\,,\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{15}}{4}\mathrm{i}\,,\dfrac{1}{4}+\dfrac{\sqrt{15}}{4}\mathrm{i}\right\}}$

3.12 .... $\boxed{\left\{-2\,,-\dfrac{1}{2}\,,\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\,,\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right\}}$

3.13 a) .... $\boxed{\alpha=-15-8\mathrm{i}}$

3.13 b) .... $\boxed{\{4-\mathrm{i}\,,4+3\mathrm{i}\}}$

3.14 a) .... $\boxed{\alpha = -m-1\,;\beta = m^2}$ **3.14** b) .... $\boxed{\left]-\infty, -\frac{1}{3}\right[\cup \left]1, +\infty\right[}$

Corrigés

3.4 a) Le discriminant vaut $(-6)^2 - 4\times1\times13 = -16 < 0$; les solutions sont

$$\frac{-(-6) - \mathrm{i}\sqrt{16}}{2\times 1} \quad \text{et} \quad \frac{-(-6) + \mathrm{i}\sqrt{16}}{2\times 1}.$$

....

3.7 a) En posant $Z = \frac{1}{z}$, l'équation $\frac{1}{z^2} - \frac{4}{z} + 5 = 0$ devient (E') : $Z^2 - 4Z + 5 = 0$.

Le discriminant de cette dernière équation vaut $(-4)^2 - 4\times1\times5 = -4 < 0$. Donc, l'équation (E') admet deux solutions complexes conjuguées : $Z_1 = 2 - \mathrm{i}$ et $Z_2 = 2 + \mathrm{i}$.

Les solutions de l'équation initiale sont donc $\frac{1}{Z_1}$ et $\frac{1}{Z_2}$, c'est-à-dire $\frac{2}{5} + \frac{1}{5}\mathrm{i}$ et $\frac{2}{5} - \frac{1}{5}\mathrm{i}$.

....

3.7 b) En posant $Z = z^2$, l'équation $z^4 + z^2 - 6 = 0$ devient (E') : $Z^2 + Z - 6 = 0$.

Le discriminant de cette dernière équation vaut $(1)^2 - 4\times1\times(-6) = 25 > 0$. Donc, l'équation (E') admet deux solutions réelles : $Z_1 = \frac{-1-\sqrt{25}}{2} = -3$ et $Z_2 = \frac{-1+\sqrt{25}}{2} = 2$.

On résout ensuite les équations $z^2 = Z_1 = -3$ et $z^2 = Z_2 = 2$. On a les équivalences

$$z^2 = Z_1 = -3 \iff \big(z = -\sqrt{3}\mathrm{i} \text{ ou } z = \sqrt{3}\mathrm{i}\big)$$

et

$$z^2 = Z_2 = 2 \iff \big(z = -\sqrt{2} \text{ ou } z = \sqrt{2}\big).$$

L'ensemble des solutions est donc $\Big\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{3}\mathrm{i}\,, \sqrt{3}\mathrm{i}\Big\}$.

....

3.7 c) En multipliant l'équation $z^3 + 8z - \frac{9}{z} = 0$ par z, on obtient l'équation $z^4 + 8z^2 - 9 = 0$. On pose alors $Z = z^2$ et l'équation $z^4 + 8z^2 - 9 = 0$ devient $Z^2 + 8Z - 9 = 0$, dont les solutions sont $Z_1 = -9$ et $Z_2 = 1$.

On résout ensuite les équations : $z^2 = Z_1 = -9$ et $z^2 = Z_2 = 1$.

....

3.8 b) En développant le polynôme $(X-1)(aX^2 + bX + c)$ et en égalant les termes de même degré, on obtient le système à résoudre $\begin{cases} a & = 2 \\ -a + b & = -12 \\ \quad - b + c & = 36 \\ \qquad - c & = -26 \end{cases}$, dont l'unique solution est $(2, -10, 26)$.

....

3.8 c) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} 2z^3 - 12z^2 + 36z - 26 = 0 &\iff (z-1)(2z^2 - 10z + 26) = 0 \\ &\iff \big(z - 1 = 0 \text{ ou } 2z^2 - 10z + 26 = 0\big) \\ &\iff \Big(z = 1 \text{ ou } z = \frac{5 - \mathrm{i}\sqrt{27}}{2} \text{ ou } z = \frac{5 + \mathrm{i}\sqrt{27}}{2}\Big). \end{aligned}$$

....

3.9 On a $z^5+2z^3+z^2+2=z^3(z^2+2)+z^2+2=(z^2+2)(z^3+1)$.

Donc, on a les équivalences suivantes

$$z^5+2z^3+z^2+2=0 \iff (z^2+2)(z^3+1)=0 \iff \big(z^2+2=0 \text{ ou } z^3+1=0\big).$$

- Les solutions de l'équation $z^2+2=0$ sont $z=-\sqrt{2}\mathrm{i}$ et $z=\sqrt{2}\mathrm{i}$.
- Puis, en remarquant que $z^3+1=(z+1)(z^2-z+1)$, on a l'équivalence $z^3+1=0 \iff (z+1)(z^2-z+1)=0$.
- Enfin, on a l'équivalence $z^2-z+1=0 \iff \left(z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \quad \text{ou} \quad \dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)$.

L'ensemble des solutions de l'équation $z^5+2z^3+z^2+2=0$ est donc $\left\{-1\,,-\sqrt{2}\mathrm{i}\,,\sqrt{2}\mathrm{i}\,,\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right\}$.

3.10 a) Comme $z\in\mathbb{C}^*$, on a les équivalences suivantes : $z+\dfrac{1}{z}=1 \iff z^2+1=z \iff z^2-z+1=0$.

Le discriminant de cette dernière équation vaut $(-1)^2-4\times1\times1=-3<0$; donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées : $\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ et $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

3.10 d) En posant $u=z+\dfrac{1}{z}$, l'équation précédente devient $2\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2-3\left(z+\dfrac{1}{z}\right)+1=0$. Or, on a

$$2\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-3\left(z+\frac{1}{z}\right)+1=2\left(z^2+2+\frac{1}{z^2}\right)-3\left(z-\frac{3}{z}\right)+1=2z^2+4+\frac{2}{z^2}-3z-\frac{3}{z}+1=2z^2-3z+\frac{2}{z^2}-\frac{3}{z}+5.$$

Or, les solutions de l'équation $2u^2-3u+1=0$ sont $\dfrac{1}{2}$ et 1. Avec le changement de variable $u=z+\dfrac{1}{z}$, résoudre (E) revient donc à résoudre les équations $z+\dfrac{1}{z}=1$ et $z+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}$. On reconnaît les équations résolues ci-dessus. L'ensemble des solutions de l'équation (E) est donc $\left\{\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{15}}{4}\mathrm{i}\,,\ \dfrac{1}{4}+\dfrac{\sqrt{15}}{4}\mathrm{i}\,,\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\,,\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right\}$.

3.11 c) On a $2z^2+9z+\dfrac{9}{z}+\dfrac{2}{z^2}+4-5=2z^2+9z+\dfrac{9}{z}+\dfrac{2}{z^2}-1$ d'où $\alpha=-5$.

3.12 L'équation intermédiaire qu'on trouve est $2u^2+3u-5=0$.

3.13 a) On a $(z-(4+\mathrm{i}))^2=z^2-(8+2\mathrm{i})z+(4+\mathrm{i})^2=z^2-(8+2\mathrm{i})z+16+8\mathrm{i}+\mathrm{i}^2=z^2-(8+2\mathrm{i})z+15+8\mathrm{i}$.
D'où $z^2-(8+2\mathrm{i})z=(z-(4+\mathrm{i}))^2-(15+8\mathrm{i})$. On a donc $\alpha=-15-8\mathrm{i}$.

3.13 b) On a les équivalences suivantes :

$$z^2-(8+2\mathrm{i})z+19+8\mathrm{i}=0 \iff (z-(4+\mathrm{i}))^2-(15+8\mathrm{i})+19+8\mathrm{i}=0 \iff (z-(4+\mathrm{i}))^2+4=0.$$

L'équation (E) est donc équivalente à $(z-(4+\mathrm{i}))^2=-4$ et donc à $z-(4+\mathrm{i})=2\mathrm{i}$ ou $z-(4+\mathrm{i})=-2\mathrm{i}$, ce qui est équivalent à $z=4+3\mathrm{i}$ ou $z=4-\mathrm{i}$.

3.14 a) On a $(X^2-1)(X^2+\alpha X+\beta)=X^4+\alpha X^3+(\beta-1)X^2-\alpha X-\beta$. En égalant les coefficients de même degré, on obtient que $\alpha=-m-1$ et $\beta=m^2$. On a donc $P(X)=(X^2-1)(X^2+(-m-1)X+m^2)$.

3.14 b) L'équation $P(z) = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées et non réelles si, et seulement si, le discriminant du trinôme $z^2 + (-m-1)z + m^2$ est strictement négatif.

Or, ce discriminant, qu'on note Δ, vaut $(-m-1)^2 - 4m^2 = -3m^2 + 2m + 1$. Donc, on a l'équivalence

$$\Delta < 0 \iff -3m^2 + 2m + 1 < 0.$$

Après recherche des racines du polynôme du second degré $-3m^2+2m+1$ puis factorisation, on obtient l'équivalence

$$\Delta < 0 \iff (m-1)(-3m-1) < 0.$$

On dresse le tableau de signes de $(m-1)(-3m-1)$:

m	$-\infty$		$-1/3$		1		$+\infty$
$(m-1)(-3m-1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit que l'équation $P(z) = 0$ possède deux solutions complexes conjuguées non réelles si, et seulement si, $m \in \left]-\infty, -\frac{1}{3}\right[\cup]1, +\infty[$.

....

Fiche n° 4. Formes exponentielles

Réponses

4.1 a) .... $\boxed{\dfrac{7\pi}{12}}$

4.1 b) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{12}}$

4.1 c) .... $\boxed{\dfrac{5\pi}{6}}$

4.1 d) .... $\boxed{\dfrac{7\pi}{12}}$

4.1 e) .... $\boxed{\dfrac{7\pi}{20}}$

4.1 f) .... $\boxed{\dfrac{13\pi}{12}}$

4.2 a) .... $\boxed{\sqrt{2}}$

4.2 b) .... $\boxed{\sqrt{2}}$

4.2 c) .... $\boxed{\sqrt{7}}$

4.2 d) .... $\boxed{\sqrt{3}}$

4.2 e) .... $\boxed{5}$

4.2 f) .... $\boxed{2\sqrt{7}}$

4.3 a) .... $\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}$

4.3 b) .... $\boxed{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}$

4.3 c) .... $\boxed{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$

4.3 d) .... $\boxed{\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$

4.3 e) .... $\boxed{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}$

4.3 f) .... $\boxed{4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}}$

4.4 a) .... $\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}$

4.4 b) .... $\boxed{6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}$

4.4 c) .... $\boxed{\sqrt{6}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{47\pi}{30}}}$

4.4 d) .... $\boxed{3\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}}$

4.5 a) .... $\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}}$

4.5 b) .... $\boxed{\dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{11\pi}{6}}}$

4.5 c) .... $\boxed{\sqrt{\dfrac{3}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{23\pi}{30}}}$

4.5 d) .... $\boxed{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{12}}}$

4.6 a) .... $\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{20\pi}{3}}}$

4.6 b) .... $\boxed{2^5\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{10\pi}{3}}}$

4.6 c) .... $\boxed{3^6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}$

4.6 d) .... $\boxed{9\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{8\pi}{5}}}$

4.6 e) .... $\boxed{24\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$

4.6 f) .... $\boxed{4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}$

4.7 a) .... voir corrigé

4.7 b) .... voir corrigé

4.7 c) .... voir corrigé

4.7 d) .... voir corrigé

4.8 a) .... $\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}}$

4.8 b) .... $\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$

4.8 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}$

4.8 d) .... $\boxed{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{9\pi}{20}}}$

4.8 e) .... $\boxed{2\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{12}}}$

4.8 f) .... $\boxed{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{30}}}$

4.9 a) c

4.9 b) .... d

4.9 c) .... b

4.9 d) .... a

4.10 a) .... $\boxed{-8\mathrm{i}}$

4.10 b) .... $\boxed{-4}$

4.10 c) .... $\boxed{-16\sqrt{3}+16\mathrm{i}}$

4.10 d) .... $\boxed{1}$

4.11 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{8}}$

4.11 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{8}-\mathrm{i}\dfrac{1}{8}}$

4.11 c) .... $\boxed{2^6(\sqrt{3}-1)-\mathrm{i}2^6(\sqrt{3}+1)}$

4.11 d) .... $\boxed{-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

4.12 .... $\boxed{2^{30}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}}}$

4.13 .... $\boxed{2}$

4.14 a) .... $\boxed{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}}$

4.14 b) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}}$

4.14 c) .... $\boxed{\begin{array}{l}\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\\ \sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{array}}$

Corrigés

4.1 a) On a $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{3\pi}{12}+\dfrac{4\pi}{12}=\dfrac{7\pi}{12}$.

4.1 b) On a $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3\pi}{12}-\dfrac{2\pi}{12}=\dfrac{\pi}{12}$.

4.1 c) On a $\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{4\pi}{6}+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{5\pi}{6}$.

4.1 d) On a $\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{6\pi}{12}+\dfrac{4\pi}{12}-\dfrac{3\pi}{12}=\dfrac{7\pi}{12}$.

4.1 e) On a $-\dfrac{2\pi}{5}+\dfrac{3\pi}{4}=-\dfrac{8\pi}{20}+\dfrac{15\pi}{20}=\dfrac{7\pi}{20}$.

4.1 f) On a $-\dfrac{7\pi}{12}+\dfrac{5\pi}{3}=-\dfrac{7\pi}{12}+\dfrac{20\pi}{12}=\dfrac{13\pi}{12}$.

4.2 a) On a $|1+\mathrm{i}|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

4.2 b) On a $|1-\mathrm{i}|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$.

4.2 c) On a $|2-\mathrm{i}\sqrt{3}|=\sqrt{2^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{7}$.

4.2 d) On a $|-\sqrt{2}+\mathrm{i}|=\sqrt{(-\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{3}$.

4.2 e) On a $|3-4\mathrm{i}|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=\sqrt{25}=5$.

4.2 f) On a $|-2\sqrt{3}+4\mathrm{i}|=\sqrt{(-2\sqrt{3})^2+4^2}=\sqrt{12+16}=2\sqrt{7}$.

4.3 c) On a $|1+\mathrm{i}| = \sqrt{2}$. Notons θ un argument de $1+\mathrm{i}$. On a $\cos(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. La valeur $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ convient et on a ainsi $1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

4.3 d) On a $|1-\mathrm{i}| = \sqrt{2}$. Notons θ un argument de $1-\mathrm{i}$. On a $\cos(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin(\theta) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. La valeur $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$ convient et on a ainsi $1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

4.3 e) On a $\left|1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right| = 2$. Notons θ un argument de $1+\mathrm{i}\sqrt{3}$. On a $\cos(\theta) = \dfrac{1}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. La valeur $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ convient et on a ainsi $1+\mathrm{i}\sqrt{3} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

4.3 f) On a $\left|-2\sqrt{3}-2\mathrm{i}\right| = 4$. Notons θ un argument de $-2\sqrt{3}-2\mathrm{i}$. On a $\cos(\theta) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{1}{2}$. La valeur $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$ convient et on a ainsi $-2\sqrt{3}-2\mathrm{i} = 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$.

4.4 a) On a $z_1 \times z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}+\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{15\pi}{6}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{2}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$.

4.4 b) On a $z_1 \times z_2 = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \times 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}} = 6\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}} = 6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{6}} = 6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$.

4.4 c) On a $z_1 \times z_2 = \sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}} \times \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}} = \sqrt{6}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}+\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}} = \sqrt{6}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{47\pi}{30}}$.

4.4 d) On a $z_1 \times z_2 = \sqrt{6}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} \times \sqrt{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = 3\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = 3\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}$.

4.5 a) On a $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}-\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$.

4.5 b) On a $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}}{3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}}} = \dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}-\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}} = \dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-4\pi-7\pi}{6}} = \dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{11\pi}{6}}$.

4.5 c) On a $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}}} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}-\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{12\pi-35\pi}{30}} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-23\pi}{30}}$.

4.5 d) On a $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{6}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}} = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{9\pi+2\pi}{12}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{12}}$.

4.6 a) On a $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}}\right)^4 = \mathrm{e}^{4\times\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{20\pi}{3}}$ ou $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.

4.6 b) On a $\left(2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\right)^5 = 2^5\mathrm{e}^{-5\times\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = 2^5\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{10\pi}{3}}$ ou $2^5\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.

4.6 c) $\left(3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}}\right)^6 = 3^6\mathrm{e}^{6\times\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}} = 3^6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\times 7\pi} = 3^6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$.

4.6 d) On a $\left(\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}\right)^4 = \left(\sqrt{3}\right)^4\mathrm{e}^{4\times\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}} = 9\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{8\pi}{5}}$.

4.6 e) On a

$$\left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}} \times \sqrt{6}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\right)^3 = \left(\sqrt{12}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}+\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\right)^3 = \left(2\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{14\pi}{12}+\mathrm{i}\frac{9\pi}{12}}\right)^3$$
$$= \left(2\sqrt{3}\right)^3\mathrm{e}^{3\times\mathrm{i}\frac{23\pi}{12}} = 24\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{23}{4}\pi} = 24\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}.$$

....

4.6 f) On a $\left(\dfrac{\sqrt{6}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}\right)^4 = \left(\sqrt{\dfrac{6}{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)^4 = \left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{9\pi+2\pi}{12}}\right)^4 = \sqrt{2}^4\mathrm{e}^{4\times\mathrm{i}\frac{11\pi}{12}} = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{3}} = 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}.$

....

4.7 a) On a $|z_\mathrm{M}| = 1$ donc M est sur le cercle de centre O et de rayon 1. De plus, un argument de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ est $\dfrac{\pi}{4}$, donc le point M est sur la demi-droite bissectrice de l'angle $\widehat{x\mathrm{O}y}$ du repère.

Le point M se trouve donc à l'intersection du cercle et de cette demi-droite, comme représenté ci-dessous.

....

4.7 b) On a $|z_\mathrm{N}| = 2$ donc N est sur le cercle de centre O et de rayon 2. De plus, comme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$, on a $-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\pi} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{3}}$, donc $\mathsf{Re}(z_\mathrm{N}) = 1$ et donc N est sur la demi-droite d'équation $x = 1$ et $y > 0$.

Le point N se trouve donc à l'intersection du cercle et de cette demi-droite, comme représenté ci-dessous.

....

4.7 c) On a $\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}$. De plus, on a $|z_\mathrm{P}| = 1$ donc P est sur le cercle de centre O et de rayon 1. Enfin, $\mathsf{Re}(z_\mathrm{P}) = -\dfrac{1}{2}$, donc le point P est sur la demi-droite d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$ et $y < 0$ car $\mathsf{Im}(z_\mathrm{P}) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Le point P se trouve donc à l'intersection de ce cercle et de cette demi-droite, comme représenté ci-dessous.

....

4.7 d)

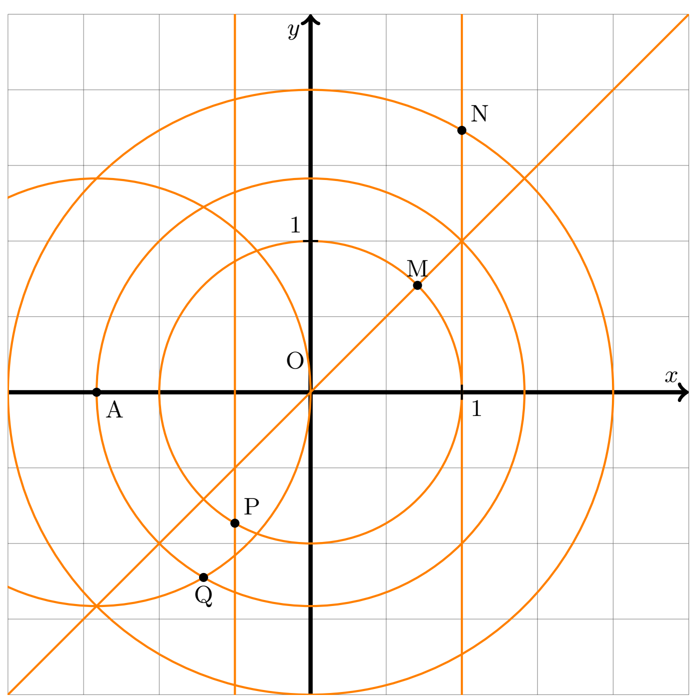
On a

$$\begin{aligned}-(1+\mathrm{i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} \times \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\\ &= \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi+\mathrm{i}\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\\ &= \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{16\pi}{12}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}.\end{aligned}$$

On a $|z_\mathrm{Q}| = \sqrt{2}$. On en déduit que le point Q est sur le cercle $\mathcal{C}$ de centre O passant par le point d'affixe $1+\mathrm{i}$, simple à placer.

Puisqu'un argument de z_Q est $\dfrac{4\pi}{3}$, le point Q se trouve dans le troisième quadrant, $x < 0$ et $y < 0$, sommet d'un triangle équilatéral direct OAQ où A est le point d'intersection du cercle $\mathcal{C}$ et de la demi-droite d'équation $y = 0, x < 0$.

Le point Q se trouve donc à l'intersection du cercle $\mathcal{C}$ et du cercle de centre A et de rayon AO.



....

4.8 a) On a $-e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\pi} \times e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\pi + i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

4.8 b) On a $ie^{-i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{-i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{2} - i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

4.8 c) On a $\dfrac{e^{-i\frac{\pi}{6}}}{-2i} = \dfrac{1}{2} ie^{-i\frac{\pi}{6}} = \dfrac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{-i\frac{\pi}{6}} = \dfrac{1}{2} e^{i\frac{3\pi}{6} - i\frac{\pi}{6}} = \dfrac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{3}}$.

4.8 d) On sait que $1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$. On a donc $(1+i)e^{i\frac{\pi}{5}} = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{\pi}{5}} = \sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{20} + i\frac{4\pi}{20}} = \sqrt{2} e^{i\frac{9\pi}{20}}$.

4.8 e) Comme $\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) < 0$, on a $\left| 4\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) e^{i\frac{\pi}{12}} \right| = -4\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

On a donc $4\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) e^{i\frac{\pi}{12}} = -4e^{i\pi} \cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) e^{i\frac{\pi}{12}} = -4\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) e^{i\frac{\pi}{12} + i\pi} = -4\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) e^{i\frac{13\pi}{12}} = 2\sqrt{3} e^{i\frac{13\pi}{12}}$.

4.8 f) On a $\dfrac{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \dfrac{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}{\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)} = 2\dfrac{e^{-i\frac{\pi}{6}}}{e^{-i\frac{\pi}{5}}} = 2e^{-i\frac{\pi}{6} + i\frac{\pi}{5}} = 2e^{i\left(-\frac{5\pi}{30} + \frac{6\pi}{30}\right)} = 2e^{i\frac{\pi}{30}}$.

4.9 a) On a $1 - i = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$; donc $1 - i$ est associé à c.

4.9 b) On a $-\sqrt{2} - i\sqrt{2} = -\sqrt{2}(1+i) = -\sqrt{2} \times \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} = 2e^{i\pi} \times e^{i\frac{\pi}{4}} = 2e^{i\frac{5\pi}{4}}$, ce qui correspond à d.

4.9 c) On a $i\sqrt{6} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{3}}$, ce qui correspond à b.

4.9 d) On a $i - \sqrt{3} = 2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2} i\right) = 2\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right) = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$, ce qui correspond à a.

4.10 a) On a $(1+i)^6 = \left(\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^6 = \sqrt{2}^6 \times e^{6 \times i\frac{\pi}{4}} = 8e^{i\frac{3\pi}{2}} = 8\left(\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)\right) = 8(0 - i) = -8i$.

4.10 b) On a $(1-i)^4 = \left(\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^4 = \sqrt{2}^4 \times e^{-4 \times i\frac{\pi}{4}} = 4e^{-i\pi} = -4$.

4.10 c) On a $(\sqrt{3} + i)^5 = \left(2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}\right)\right)^5 = \left(2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)\right)^5 = \left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^5 = 2^5 e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2^5\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}\right)$,
ce qui donne $-16\sqrt{3} + 16i$.

4.10 d) On a $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2024} = \left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{2024} = e^{-i\frac{2\,024\pi}{4}} = e^{-i506\pi} = \left(e^{-i\pi}\right)^{506} = 1$.

4.11 a) On a $\dfrac{i^5}{(1-i)^6} = \dfrac{i^4 \times i}{\left(\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^6} = \dfrac{1 \times e^{i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}^6 e^{-i\frac{6\pi}{4}}} = \dfrac{e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{i\frac{3\pi}{2}}}{8} = \dfrac{1}{8} e^{i2\pi} = \dfrac{1}{8}$.

4.11 b) On a

$$\frac{(1+i)^3}{\left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)^4} = \frac{\left(\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^3}{\left(\sqrt{2}(1-i)\right)^4} = \frac{\sqrt{2}^3 e^{i\frac{3\pi}{4}}}{\left(\sqrt{2}\left(\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)\right)^4} = \frac{2\sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}}{2^4 e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \frac{\sqrt{2}}{2^3} e^{i\frac{3\pi}{4} + i\frac{4\pi}{4}}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{8} e^{i\frac{7\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{8}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{8} - i\frac{1}{8}.$$

4.11 c) On a

$$\left(\frac{2-2\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}}\right)^5 = \frac{\left(4\left(\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^5}{\left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^5} = \frac{4^5\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}}}{\sqrt{2}^5\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}}} = \frac{2^{10}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}}}{2^2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}}} = \frac{2^8}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}}$$
$$= 2^7\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right) = 2^7\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-1-\mathrm{i})$$
$$= 2^7\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2^6\left(\sqrt{3}-1-\mathrm{i}(1+\sqrt{3})\right) = 2^6(\sqrt{3}-1)-\mathrm{i}2^6(\sqrt{3}+1).$$

4.11 d) On a

$$\left(\frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})^2}\right)^{10} = \frac{\left(2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)\right)^{10}}{\left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^{20}} = \frac{2^{10}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)^{10}}{\sqrt{2}^{20}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{20\pi}{4}}} = \frac{2^{10}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{10\pi}{6}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}5\pi}}{2^{10}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi}$$
$$= \left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)\times(-1) = -\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4.12 On a

$$\left((1+\mathrm{i}\sqrt{3})(1-\mathrm{i})\right)^{20} = \left(2\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right)\right)^{20}$$
$$= \left(2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^{20}$$
$$= \left(2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^{20} = (2\sqrt{2})^{20}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^{20} = 2^{30}\mathrm{e}^{20\times\mathrm{i}\frac{\pi}{12}} = 2^{30}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}}.$$

4.13 On a

$$\frac{(1+\mathrm{i})^4}{(1-\mathrm{i})^3}+\frac{(1-\mathrm{i})^4}{(1+\mathrm{i})^3} = \frac{(1+\mathrm{i})^4(1+\mathrm{i})^3}{(1-\mathrm{i})^3(1+\mathrm{i})^3}+\frac{(1-\mathrm{i})^4(1-\mathrm{i})^3}{(1+\mathrm{i})^3(1-\mathrm{i})^3} = \frac{(1+\mathrm{i})^7+(1-\mathrm{i})^7}{(1-\mathrm{i}^2)^3}$$
$$= \frac{\left(\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)^7+\left(\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)^7}{2^3}$$
$$= \frac{\sqrt{2}^7}{2^3}\left(\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^7+\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^7\right) = \sqrt{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{4}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{7\pi}{4}}\right) = \sqrt{2}\times 2\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = 2.$$

4.14 a) On a $z = \dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{2\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \sqrt{2}\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$.

4.14 b) On a $z = \dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{(1+\mathrm{i}\sqrt{3})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} = \dfrac{1-\mathrm{i}+\mathrm{i}\sqrt{3}-\mathrm{i}^2\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}^2} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

4.14 c) On a donc $\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\right)$. En passant à la partie réelle et à la partie imaginaire, on obtient

$$\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \quad \text{et} \quad \sqrt{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

donc $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Fiche n° 5. Complexes et géométrie

Réponses

5.1 a) .... $\boxed{3\sqrt{2}}$

5.1 b) .... $\boxed{6\sqrt{2}}$

5.1 c) .... $\boxed{5\sqrt{22}}$

5.1 d) .... $\boxed{3\sqrt[3]{5}}$

5.2 a) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{5}}{2}}$

5.2 b) .... $\boxed{\sqrt{5}}$

5.2 c) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{7}}{7}}$

5.2 d) .... $\boxed{\sqrt{10}}$

5.3 a) .... $\boxed{3-3\mathrm{i}}$

5.3 b) .... $\boxed{-1-3\mathrm{i}}$

5.3 c) .... $\boxed{5-\mathrm{i}}$

5.3 d) .... $\boxed{-12-24\mathrm{i}}$

5.4 a) .... $\boxed{2+\mathrm{i}}$

5.4 b) .... $\boxed{11-12\mathrm{i}}$

5.4 c) .... $\boxed{\dfrac{2}{3}+\mathrm{i}}$

5.4 d) .... $\boxed{\dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}}$

5.5 a) .... $\boxed{\text{oui}}$

5.5 b) .... $\boxed{\text{non}}$

5.6 a) .... $\boxed{\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}}$

5.6 b) .... $\boxed{\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}}$

5.6 c) .... $\boxed{y=-x+2}$

5.7 .... $\boxed{2}$

5.8 a) .... $\boxed{x^2+y^2=25}$

5.8 b) .... $\boxed{(x-2)^2+(y-2)^2=4}$

5.9 a) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{4}}$

5.9 b) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{3}}$

5.9 c) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{2}}$

5.9 d) .... $\boxed{\pi}$

5.10 a) .... $\boxed{\text{b}}$

5.10 b) .... $\boxed{\text{a}}$

5.10 c) .... $\boxed{\text{a}}$

5.11 a) .... $\boxed{\text{oui}}$

5.11 b) .... $\boxed{\text{oui}}$

5.11 c) .... $\boxed{\text{oui}}$

5.12 a) .... $\boxed{\text{oui}}$

5.12 b) .... $\boxed{\text{non}}$

5.13 a) .... $\boxed{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}$

5.13 b) .... $\boxed{\text{c}}$

5.14 a) .... $\boxed{\text{oui}}$

5.14 b) .... $\boxed{\text{oui}}$

5.15 a) .... $\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}$

5.15 b) .... $\boxed{0}$

5.15 c) .... $\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}$

5.15 d) .... $\boxed{-\mathrm{j}z_{\mathrm{A}}-\mathrm{j}^2z_{\mathrm{B}}}$

5.16 a) .... $\boxed{-\mathrm{j}c-\mathrm{j}^2b}$

5.16 b) .... $\boxed{-\mathrm{j}a-\mathrm{j}^2c}$

5.16 c) .... $\boxed{-\mathrm{j}b-\mathrm{j}^2a}$

5.16 d) .... $\boxed{0}$

5.16 e) .... $\boxed{\text{il est équilatéral}}$

Corrigés

5.3 a) L'affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ est donnée par $z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}}=(4-\mathrm{i})-(1+2\mathrm{i})=3-3\mathrm{i}$.

....

5.4 a) L'égalité vectorielle se traduit pour les affixes par $\frac{1}{3}(z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}})=z_{\mathrm{E}}-z_{\mathrm{A}}$. En isolant z_{E}, on obtient

$$z_{\mathrm{E}}=z_{\mathrm{A}}+\tfrac{1}{3}(z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}})=1+2\mathrm{i}+\tfrac{1}{3}(4-\mathrm{i}-1-2\mathrm{i}).$$

Après simplifications, on trouve $z_{\mathrm{E}}=2+\mathrm{i}$.

....

5.4 b) L'égalité vectorielle se traduit pour les affixes par $z_{\mathrm{F}} - z_{\mathrm{A}} = 3(z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}) + z_{\mathrm{D}} - z_{\mathrm{C}}$.
En isolant z_{F}, on obtient

$$z_{\mathrm{F}} = z_{\mathrm{A}} + 3(z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}) + z_{\mathrm{D}} - z_{\mathrm{C}} = 1 + 2\mathrm{i} + 3(4 - \mathrm{i} - 1 - 2\mathrm{i}) + (-2 - 3\mathrm{i}) - (-3 + 2\mathrm{i}).$$

Après simplifications, on trouve $z_{\mathrm{F}} = 11 - 12\mathrm{i}$.

5.4 c) L'égalité vectorielle se traduit pour les affixes par $z_{\mathrm{G}} - z_{\mathrm{A}} + z_{\mathrm{G}} - z_{\mathrm{B}} + z_{\mathrm{G}} - z_{\mathrm{C}} = 0$.
En isolant z_{G}, on obtient $3\,z_{\mathrm{G}} = z_{\mathrm{A}} + z_{\mathrm{B}} + z_{\mathrm{C}} = 1 + 2\mathrm{i} + 4 - \mathrm{i} - 3 + 2\mathrm{i}$. Après simplifications, on trouve $z_{\mathrm{G}} = \frac{2}{3} + \mathrm{i}$.

5.4 d) Le point I est le milieu du segment [AB] donc $\overrightarrow{\mathrm{AI}} = \overrightarrow{\mathrm{IB}}$. Donc, on a $z_{\mathrm{I}} - z_{\mathrm{A}} = z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{I}}$ et donc $2z_{\mathrm{I}} = z_{\mathrm{A}} + z_{\mathrm{B}}$; autrement dit l'affixe de I est la moyenne des affixes de A et de B. Après calcul, on obtient

$$z_{\mathrm{I}} = \tfrac{1}{2}(1 + 2\mathrm{i} + 4 - \mathrm{i}) = \tfrac{5}{2} + \tfrac{1}{2}\mathrm{i}.$$

5.5 a) On calcule $\mathrm{AM} = |-1 + \mathrm{i} - (2 + \mathrm{i})| = 3$.

5.5 b) On calcule $\mathrm{AN} = |3 + 3\mathrm{i} - (2 + \mathrm{i})| = |1 + 2\mathrm{i}| = \sqrt{1 + 4} \neq 3$.

5.6 a) On utilise la formule du module pour $z_{\mathrm{M}} - z_{\mathrm{A}}$.

5.6 b) On utilise la formule du module pour $z_{\mathrm{M}} - z_{\mathrm{B}}$.

5.6 c) On peut remarquer que les distances AM et BM sont égales si, et seulement si, leurs carrés sont égaux. Considérer les modules aux carrés permet de ne pas avoir affaire à des racines carrées. On a les équivalences :

$$\begin{aligned}
\mathrm{AM}^2 = \mathrm{BM}^2 &\iff x - 1)^2 + (y + 1)^2 = (x - 3)^2 + (y - 1)^2 \\
&\iff x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 \\
&\iff y = -x + 2.
\end{aligned}$$

5.7 Soient x et y deux réels et soit M d'affixe $z_{\mathrm{M}} = x + \mathrm{i}y$. Le point M appartient à la médiatrice de [CD] si, et seulement si, $\mathrm{CM} = \mathrm{DM}$. De plus, on a les équivalences suivantes :

$$\mathrm{CM} = \mathrm{DM} \iff (x - 1)^2 + y^2 = (x - 3)^2 + y^2 \iff x = 2$$

Donc le point d'intersection M de la médiatrice de [AB] et de la médiatrice de [CD] vérifie $y = -x + 2$ et $x = 2$, autrement dit $x = 2$ et $y = 0$.

5.8 a) On a $\mathrm{AM}^2 = r^2$ si, et seulement si, $|x + \mathrm{i}y|^2 = 5^2$ si, et seulement si, $x^2 + y^2 = 25$.

5.8 b) On a $\mathrm{AM}^2 = r^2$ si, et seulement si, $|x + \mathrm{i}y - 2 - 2\mathrm{i}|^2 = 2^2$ si, et seulement si, $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

5.9 a) On détermine un argument du nombre complexe $\dfrac{z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}}$ en calculant

$$\frac{z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}} = \frac{3 + 3\mathrm{i}}{5} = \frac{3\sqrt{2}}{5} \times \Big(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\Big) = \frac{3\sqrt{2}}{5}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}.$$

5.9 b) On détermine un argument du nombre complexe en calculant

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{2 + (2 + \sqrt{3})\mathrm{i} - 1 - 2\mathrm{i}}{2 + 2\mathrm{i} - 1 - 2\mathrm{i}} = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}.$$

Un argument vaut donc $\frac{\pi}{3}$.

....

5.9 c) On détermine un argument du nombre complexe $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{8 + 4\mathrm{i}}{4 - 8\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}(-8\mathrm{i} + 4)}{4 - 8\mathrm{i}} = \mathrm{i}$ qui vaut donc $\frac{\pi}{2}$.

....

5.9 d) On détermine un argument du nombre complexe $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -1$ qui vaut donc π.

....

5.10 a) On détermine un argument du nombre complexe $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \frac{4}{5}$ qui vaut donc 0.

....

5.10 b) On détermine un argument du nombre complexe $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = -2\mathrm{i}$ qui vaut donc $-\frac{\pi}{2}$.

....

5.10 c) On détermine un argument du nombre complexe $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \mathrm{i}$ qui vaut donc $\frac{\pi}{2}$.

....

5.11 a) Les nombres complexes $z_C - z_D = 1 + \mathrm{i}$ et $z_B - z_A = 1 + \mathrm{i}$ sont égaux donc ABCD est un parallélogramme.

....

5.11 b) Le nombre complexe $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}$ vaut i d'argument $\frac{\pi}{2}$ donc le parallélogramme ABCD est un rectangle.

....

5.11 c) Le nombre complexe $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}$ vaut i de module 1 donc le rectangle ABCD est un carré.

....

5.12 a) Les nombres complexes $z_C - z_D = -4 + 2\mathrm{i}$ et $z_B - z_A = -4 + 2\mathrm{i}$ sont égaux donc ABCD est un parallélogramme.

....

5.12 b) Le nombre complexe $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}$ n'est pas d'argument $\frac{\pi}{2}$ donc ABCD n'est pas un rectangle.

....

5.13 b) Le nombre $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ est de module 1 et d'argument $-\frac{\pi}{3}$. Donc, on a $\mathrm{AB} = \mathrm{AC}$ et l'angle $(\overrightarrow{\mathrm{BC}}, \overrightarrow{\mathrm{BA}})$ vaut $-\frac{\pi}{3}$. Ainsi, le triangle ABC est équilatéral.

....

5.14 a) Le nombre $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{2}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ est d'argument $\frac{\pi}{2}$. Donc, l'angle $(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}})$ vaut $\frac{\pi}{2}$ et ABC est un triangle rectangle en A.

....

5.14 b) On calcule les modules de $z_C - z_A = -\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\mathrm{i}$ et $z_B - z_A = 1 + 3\mathrm{i}$ qui sont égaux tous les deux à $\sqrt{10}$ donc ABC est un triangle isocèle en A.

....

5.15 a) Ici, on mène le calcul avec la forme exponentielle. On trouve $-\mathrm{j}^2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3} \times 2}$.

....

5.15 b) Là, on mène le calcul avec la forme algébrique. On trouve

$$1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2 = 1+\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0.$$

5.15 c) Le triangle ABC est équilatéral direct donc $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$ et $(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}})=\dfrac{\pi}{3}$.

On en déduit que $\dfrac{z_{\mathrm{C}}-z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}}}$ est un nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{3}$. On a $\dfrac{z_{\mathrm{C}}-z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}=-\mathrm{j}^2$.

5.15 d) On a $\dfrac{z_{\mathrm{C}}-z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}=-\mathrm{j}^2$. Donc, $z_{\mathrm{C}}-z_{\mathrm{A}}=(z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}})\times(-\mathrm{j}^2)$; donc, $z_{\mathrm{C}}=(1+\mathrm{j}^2)z_{\mathrm{A}}-\mathrm{j}^2z_{\mathrm{B}}$.

Finalement, on trouve $z_{\mathrm{C}}=-\mathrm{j}z_{\mathrm{A}}-\mathrm{j}^2z_{\mathrm{B}}$.

5.16 d) On a $3(z_3+\mathrm{j}z_1+\mathrm{j}^2z_2)=3z_3+3\mathrm{j}z_1+3\mathrm{j}^2z_2=(b+a+c')+\mathrm{j}(c+b+a')+\mathrm{j}^2(a+c+b')$.

Grâce aux calculs précédents, on obtient $3(z_3+\mathrm{j}z_1+\mathrm{j}^2z_2)=(b+a-\mathrm{j}b-\mathrm{j}^2a)+\mathrm{j}(c+b-\mathrm{j}c-\mathrm{j}^2b)+\mathrm{j}^2(a+c-\mathrm{j}a-\mathrm{j}^2c)$.
Comme $\mathrm{j}^3=1$, on trouve $3(z_3+\mathrm{j}z_1+\mathrm{j}^2z_2)=0$.

5.16 e) On a $3(z_3+\mathrm{j}z_1+\mathrm{j}^2z_2)=0$ donc le triangle $\mathrm{G}_1\mathrm{G}_2\mathrm{G}_3$ est équilatéral.

Fiche n° 6. Nombres complexes et trigonométrie I

Réponses

6.1 a) $\boxed{\dfrac{11}{6}}$

6.1 b) $\boxed{-\dfrac{43}{420}}$

6.1 c) $\boxed{\dfrac{250}{49}}$

6.2 a) $\boxed{\dfrac{\pi}{6} \mod 2\pi}$

6.2 b) $\boxed{\dfrac{2\pi}{3} \mod 2\pi}$

6.2 c) $\boxed{\dfrac{5\pi}{4} \mod 2\pi}$

6.3 a) $\boxed{\cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)}$

6.3 b) $\boxed{\sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)}$

6.3 c) $\boxed{2\cos^2(x) - 1}$

6.3 d) $\boxed{1 - 2\sin^2(x)}$

6.4 a) $\boxed{0}$

6.4 b) $\boxed{0}$

6.5 a) $\boxed{\cos(3x)}$

6.5 b) $\boxed{\cos(2x)}$

6.5 c) $\boxed{\sin(5x)}$

6.5 d) $\boxed{-\sin(x)}$

6.6 a) $\boxed{\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

6.6 b) $\boxed{\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

6.7 a) $\boxed{2\alpha^2 - 1}$

6.7 b) $\boxed{\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$

6.7 c) $\boxed{\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$

6.8 $\boxed{\sqrt{\dfrac{1-C}{2}}}$

6.9 a) $\boxed{4\cos^3(x) - 3\cos(x)}$

6.9 b) $\boxed{3\sin(x) - 4\sin^3(x)}$

6.10 $\boxed{\dfrac{24-7\sqrt{3}}{50}}$

6.11 a) $\boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

6.11 b) $\boxed{\dfrac{11\pi}{12}}$

6.11 c) $\boxed{-\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}}$

6.11 d) $\boxed{\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}}$

6.11 e) $\boxed{\dfrac{2\pi}{5}}$

6.12 a) $\boxed{\left\{0, \dfrac{2\pi}{3}, \pi, \dfrac{4\pi}{3}, 2\pi\right\}}$

6.12 b) $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right\}}$

6.12 c) $\boxed{\left\{0, \pi, \dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}, 2\pi\right\}}$

6.12 d) $\boxed{\left\{0, \dfrac{4\pi}{3}, 2\pi\right\}}$

6.13 a) $\boxed{\dfrac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))}$

6.13 b) $\boxed{\dfrac{1}{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n-1}}\right) - 1\right)}$

Corrigés

6.1 a) En cherchant à se ramener à un dénominateur commun minimal, on a

$$\frac{50}{33}+\frac{7}{22}=\frac{50}{3\times 11}+\frac{7}{2\times 11}=\frac{50\times 2+7\times 3}{2\times 3\times 11}=\frac{121}{2\times 3\times 11}=\frac{11}{6}.$$

6.1 b) On procède de même

$$\frac{13}{28}-\frac{17}{30}=\frac{13}{2^2\times 7}-\frac{17}{2\times 3\times 5}=\frac{13\times 3\times 5-17\times 2\times 7}{2^2\times 3\times 5\times 7}=-\frac{43}{420}.$$

6.1 c) On a

$$\frac{14^3\times 5^5}{7^5\times 10^2}=\frac{2^3\times 5^5\times 7^3}{2^2\times 5^2\times 7^5}=2^{3-2}\times 5^{5-2}\times 7^{3-5}=\frac{2\times 5^3}{7^2}=\frac{250}{49}.$$

6.3 a) Pour tous $x,y\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\cos(x-y)&=\cos(x+(-y))\\
&=\cos(x)\cos(-y)-\sin(x)\sin(-y) && \text{(formule d'addition du cosinus)}\\
&=\cos(x)\cos(y)-\sin(x)(-\sin(y)) && \text{(cosinus paire et sinus impaire)}\\
&=\cos(x)\cos(y)+\sin(x)\sin(y).
\end{aligned}$$

6.3 b) On procède comme au calcul précédent avec la formule d'addition du sinus.

6.3 c) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, il vient d'après la formule de duplication du cosinus

$$\cos(2x)=\cos^2(x)-\sin^2(x)=\cos^2(x)-\big(1-\cos^2(x)\big)=2\cos^2(x)-1.$$

6.3 d) On procède comme au calcul précédent.

6.4 a) D'après la formule d'addition du cosinus, on a

$$\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=\cos(x)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)-\sin(x)\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}\cos(x)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)$$

et, en remarquant que $\dfrac{4\pi}{3}=\pi+\dfrac{\pi}{3}$,

$$\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=\cos(x)\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)-\sin(x)\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-\cos(x)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}\cos(x)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x).$$

Ainsi, au total,

$$\cos(x)+\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=\cos(x)-\frac{1}{2}\cos(x)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)-\frac{1}{2}\cos(x)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)=0.$$

6.4 b) On procède de même *via* la formule d'addition du sinus.

Voici une autre solution.

On pose $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$ *et*

$$C = \cos(x) + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right), \quad S \qquad = \sin(x) + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right).$$

On a alors

$$C + \mathrm{i}S = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\left(1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \times \frac{1 - \mathrm{j}^3}{1 - \mathrm{j}} = 0,$$

car $\mathrm{j}^3 = 1$ *(j est une racine cubique de l'unité). On a donc* $C = S = 0$.

6.5 a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'après la formule d'addition du cosinus, on a

$$\cos(x)\cos(2x) - \sin(x)\sin(2x) = \cos(x + 2x) = \cos(3x).$$

6.5 b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'après la formule de soustraction du cosinus et par parité de ce dernier, on a

$$\cos(3x)\cos(5x) + \sin(3x)\sin(5x) = \cos(3x - 5x) = \cos(-2x) = \cos(2x).$$

6.5 c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'après la formule d'addition du sinus, on a

$$\cos(3x)\sin(2x) + \cos(2x)\sin(3x) = \sin(3x + 2x) = \sin(5x).$$

6.5 d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'après la formule de soustraction du sinus et par imparité de ce dernier, on a

$$\cos(7x)\sin(6x) - \sin(7x)\cos(6x) = \sin(6x - 7x) = \sin(-x) = -\sin(x).$$

6.6 a) D'après la formule de soustraction du cosinus, on a

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}.$$

6.6 b) D'après la formule de soustraction du sinus, on a

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

6.7 a) *Via* la formule de duplication $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ du cosinus, on a

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1 = 2\alpha^2 - 1.$$

6.7 b) Puisque $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, la valeur α cherchée est solution de l'équation

$$2\alpha^2 - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ donc de l'équation } \alpha^2 = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}.$$

Or, on a $\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \geqslant 0$, car $\frac{\pi}{8} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, ainsi $\alpha = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$.

6.7 c) Deux options s'offrent à nous ici.

- *Méthode 1 : utiliser la relation* $\cos^2 + \sin^2 = 1$. D'après le calcul précédent, on a

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \alpha^2 = 1 - \frac{2+\sqrt{2}}{4} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

Or, sachant également $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \geqslant 0$, il vient $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

- *Méthode 2 : utiliser la formule de duplication du cosinus* $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$.

Comme au calcul précédent, en posant $\beta = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$, on a

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - 2\beta^2,$$

soit $\beta^2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$, puis $\beta = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, sachant que $\beta \geqslant 0$.

6.8 La formule de duplication du cosinus donne

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha).$$

Ainsi, on a $\sin^2(\alpha) = \frac{1-C}{2}$. Or $\alpha \in [0, \pi]$, par conséquent $\sin(\alpha) \geqslant 0$. Donc, on a $\sin(\alpha) = \sqrt{\frac{1-C}{2}}$.

6.9 a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'après la formule d'addition, on a

$$\cos(3x) = \cos(2x + x) = \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x).$$

Or, on a $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ et $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \big(2\cos^2(x) - 1\big)\cos(x) - 2\cos(x)\sin^2(x) \\ &= 2\cos^3(x) - \cos(x) - 2\cos(x)\big(1 - \cos^2(x)\big) \\ &= 4\cos^3(x) - 3\cos(x).\end{aligned}$$

6.9 b) On procède de la même façon, avec la formule d'addition du sinus :

$$\begin{aligned}\sin(3x) &= \sin(2x + x) \\ &= \sin(2x)\cos(x) + \sin(x)\cos(2x) \\ &= 2\sin(x)\cos^2(x) + \sin(x)\big(1 - 2\sin^2(x)\big) \\ &= 2\sin(x)\big(1 - \sin^2(x)\big) + \sin(x) - 2\sin^3(x) \\ &= 3\sin(x) - 4\sin^3(x).\end{aligned}$$

6.10 D'après la formule d'addition du cosinus, on a

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta).$$

Or, on a

$$\sin^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha) = 1 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

De plus, par hypothèse, $\alpha \in [\pi, 2\pi]$ et donc $\sin(\alpha) \leqslant 0$. Donc, on a $\sin(\alpha) = -\frac{1}{2}$. Selon la même stratégie, on trouve

$$\sin^2(\beta) = 1 - \left(\frac{7}{25}\right)^2 = \left(1 - \frac{7}{25}\right)\left(1 + \frac{7}{25}\right) = \frac{18}{25} \times \frac{32}{25} = \frac{64 \times 9}{25^2} = \frac{24^2}{25^2}$$

et $\sin(\beta) \geqslant 0$, sachant $\beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, soit $\sin(\beta) = \frac{24}{25}$. Au total,

$$\cos(\alpha+\beta) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{7}{25} - \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{24}{25} = \frac{24 - 7\sqrt{3}}{50}.$$

6.11 a) La formule de duplication $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ du cosinus donne

$$\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1 = 2\left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^2 - 1 = 2 \times \frac{2+\sqrt{3}}{4} - 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

6.11 b) D'après le calcul précédent, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \cos(2a) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) &\iff 2a \equiv \pm\frac{\pi}{6}\,[2\pi] \\ &\iff a \equiv \pm\frac{\pi}{12}\,[\pi]. \end{aligned}$$

Or, par hypothèse, on a $a \in [0, \pi]$ et donc $\cos(a) \leqslant 0$, ce qui impose $a \in [\pi/2, \pi]$. Par conséquent, on a $a = \frac{11\pi}{12}$.

6.11 c) À nouveau *via* la formule de duplication du cosinus, on a

$$\cos(2b) = 2\cos^2(b) - 1 = 2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 - 1 = 2 \times \frac{5 - 2\sqrt{5} + 1}{16} - 1 = \frac{6 - 2\sqrt{5} - 8}{8} = -\frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

6.11 d) On procède de même : on a

$$\cos(4b) = 2\cos^2(2b) - 1 = 2\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 - 1 = 2 \times \frac{5 + 2\sqrt{5} + 1}{16} - 1 = \frac{6 + 2\sqrt{5} - 8}{8} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

6.11 e) D'après le calcul précédent, on a $\cos(4b) = \cos(b)$. Or, on a les équivalences suivantes

$$\cos(4b) = \cos(b) \iff 4b \equiv \pm b\,[2\pi] \iff (3b \equiv 0\,[2\pi] \text{ ou } 5b \equiv 0\,[2\pi]) \iff \left(b \equiv 0\left[\frac{2\pi}{3}\right] \text{ ou } b \equiv 0\left[\frac{2\pi}{5}\right]\right).$$

En outre, par hypothèse, $b \in [0, \pi]$ et $\cos(b) \geqslant 0$, ce qui impose $b \in [0, \pi/2]$. Les seuls angles de cet intervalle congrus à 0 modulo $\frac{2\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{5}$ sont 0 et $\frac{2\pi}{5}$, et la solution $b = 0$ est clairement exclue ($\cos(0) = 1$). Par conséquent $b = \frac{2\pi}{5}$.

6.12 a) Puisque $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}\sin(x) + \sin(2x) = 0 &\iff \sin(x)(1 + 2\cos(x)) = 0 \\ &\iff \sin(x) = 0 \text{ ou } \cos(x) = -\frac{1}{2} \\ &\iff x \equiv 0\,[\pi] \text{ ou } x \equiv \pm\frac{2\pi}{3}\,[2\pi].\end{aligned}$$

Ainsi les solutions dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ sont 0, $\dfrac{2\pi}{3}$, π, $\dfrac{4\pi}{3}$ et 2π.

....

6.12 b) D'après le calcul 9, on a $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On a donc les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}2\cos(x) - \cos(3x) = 0 &\iff 2\cos(x) - \big(4\cos^3(x) - 3\cos(x)\big) = 0 \\ &\iff \cos(x)\big(5 - 4\cos^2(x)\big) = 0 \\ &\iff \cos(x) = 0 \text{ ou } \underbrace{\cos^2(x) = \frac{5}{4}}_{\text{impossible}} \qquad (\text{car } \cos^2(x) \in [0,1]) \\ &\iff x \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi].\end{aligned}$$

Ainsi, les solutions dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ sont $\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{3\pi}{2}$.

....

6.12 c) Puisque $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ (formule de duplication du cosinus), on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}\cos(2x) = 1 + \sin(x) &\iff 1 - 2\sin^2(x) = 1 + \sin(x) \\ &\iff \sin(x)(1 + 2\sin(x)) = 0 \\ &\iff \sin(x) = 0 \text{ ou } \sin(x) = -\frac{1}{2} \\ &\iff x \equiv 0\,[\pi] \text{ ou } x \equiv -\frac{\pi}{6}\,[2\pi] \text{ ou } x \equiv \frac{7\pi}{6}\,[2\pi].\end{aligned}$$

Ainsi, les solutions dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ sont $0, \pi, \dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}$ et 2π.

....

6.12 d) Pour commencer, remarquons qu'on a les équivalences suivantes :

$$\cos(x) = 1 + \sqrt{3}\sin(x) \iff \cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = 1 \iff \frac{1}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x) = \frac{1}{2}.$$

Or, comme $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, on a (d'après la formule d'addition du cosinus)

$$\frac{1}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(x) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$$

Par conséquent, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}\cos(x) = 1 + \sqrt{3}\sin(x) &\iff \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \\ &\iff x + \frac{\pi}{3} \equiv \pm\frac{\pi}{3}\,[2\pi] \\ &\iff x \equiv 0\,[2\pi] \text{ ou } x \equiv -\frac{2\pi}{3}\,[2\pi].\end{aligned}$$

Au total, les solutions dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ sont 0, $\dfrac{4\pi}{3}$ et 2π.

....

6.13 a) Les formules d'addition et de soustraction pour le cosinus donnent

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \quad \text{et} \quad \cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y).$$

Ainsi, par demi-différence, on a

$$\frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)) = \sin(x)\sin(y).$$

6.13 b) D'après le calcul précédent, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\sin\left(\frac{\pi}{2^k}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2^k}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2^k} - \frac{\pi}{2^k}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{2^k} + \frac{\pi}{2^k}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2^{k-1}}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2^{k-2}}\right)\right).$$

Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{\pi}{2^k}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2^k}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2^{k-1}}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2^{k-2}}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\pi}{2^{k-1}}\right) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\pi}{2^{k-2}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1} \cos\left(\frac{\pi}{2^{j}}\right) - \frac{1}{2}\sum_{\ell=-1}^{n-2} \cos\left(\frac{\pi}{2^{\ell}}\right) && \text{(en posant } j = k-1 \text{ et } \ell = k-2\text{)} \\
&= \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2^{n-1}}\right) - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2^{-1}}\right) && \text{(simplification des termes communs)} \\
&= \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2^{n-1}}\right) - 1\right).
\end{aligned}$$

Fiche n° 7. Nombres complexes et trigonométrie II

Réponses

7.1 a) .... $\boxed{e^{a+5b-1}}$

7.1 b) .... $\boxed{e^{15-31a}}$

7.1 c) .... $\boxed{e^{5(1-a)}}$

7.1 d) .... $\boxed{e^{5-12b}}$

7.2 a) .... $\boxed{\{-2,-8\}}$

7.2 b) .... $\boxed{\left\{-\frac{4}{3},10\right\}}$

7.3 a) .... $\boxed{\alpha=\dfrac{x-y}{2}}$

7.3 b) .... $\boxed{\beta=\dfrac{y-x}{2}}$

7.3 c) .... $\boxed{\text{f}}$

7.3 d) .... $\boxed{2\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)e^{i\frac{x-y}{2}}}$

7.4 .... $\boxed{2i\sin\left(\dfrac{x-y}{2}\right)e^{i\frac{x+y}{2}}}$

7.5 a) .... $\boxed{\text{c}}$

7.5 b) .... $\boxed{\text{d}}$

7.6 a) .... $\boxed{2\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)e^{3i\frac{x}{2}}}$

7.6 b) .... $\boxed{2i\sin(2x)e^{ix}}$

7.6 c) .... $\boxed{2\cos\left(\dfrac{3y}{2}\right)e^{i(x+y/2)}}$

7.6 d) .... $\boxed{-2i\sin\left(\dfrac{x}{2}-y\right)e^{i\left(\frac{x}{2}-y\right)}}$

7.7 a) .... $\boxed{\cos(x)+\cos(y)}$

7.7 b) .... $\boxed{2\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)e^{i\frac{x+y}{2}}}$

7.7 c) .... $\boxed{2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)}$

7.7 d) .... $\boxed{2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)}$

7.8 a) .... $\boxed{2\sin\left(\dfrac{y-x}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right)}$

7.8 b) .... $\boxed{2\sin\left(\dfrac{x-y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)}$

7.9 a) .... $\boxed{\dfrac{1-e^{2i(n+1)x}}{1-e^{2ix}}}$

7.9 b) .... $\boxed{-2i\sin(x)e^{ix}}$

7.9 c) .... $\boxed{-2i\sin((n+1)x)e^{i(n+1)x}}$

7.9 d) .... $\boxed{\dfrac{\cos(nx)\sin((n+1)x)}{\sin(x)}}$

7.9 e) .... $\boxed{\dfrac{\cos(nx)\sin((n+1)x)}{\sin(x)}}$

7.9 f) .... $\boxed{\dfrac{\sin(nx)\sin((n+1)x)}{\sin(x)}}$

7.9 g) .... $\boxed{\dfrac{\sin(nx)\sin((n+1)x)}{\sin(x)}}$

7.10 a) .... $\boxed{\dfrac{\cos(nx+y)\sin((n+1)x)}{\sin(x)}}$

7.10 b) .... $\boxed{\dfrac{\sin(nx+y)\sin((n+1)x)}{\sin(x)}}$

7.11 a) .... $\boxed{\dfrac{\cos(kx)}{\cos^k(x)}}$

7.11 b) .... $\boxed{\dfrac{\sin(nx)}{\sin(x)\cos^{n-1}(x)}}$

7.12 a) .... $\boxed{\left(1+e^{ix}\right)^n}$

7.12 b) .... $\boxed{2^n\left|\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)\right|^n}$

7.12 c) .... $\boxed{2^n\cos^n\left(\dfrac{x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{nx}{2}\right)}$

7.12 d) .... $\boxed{2^n\cos^n\left(\dfrac{x}{2}\right)\sin\left(\dfrac{nx}{2}\right)}$

Corrigés

7.1 a) On a directement $e^{3a-2} \times e^{5b-2a} \times e = e^{3a-2+5b-2a+1} = e^{a+5b-1}$.

7.1 b) On a directement $\left(e^{3-7a}\right)^4 \times \left(e^{a-1}\right)^{-3} = e^{4(3-7a)-3(a-1)} = e^{15-31a}$.

7.1 c) On a directement $\dfrac{e^{3a-2} \times e^{4-5a}}{\left(e^{a-1}\right)^3} = e^{3a-2+4-5a-3(a-1)} = e^{5(1-a)}$.

7.1 d) On a directement $\dfrac{e^{4a-7b} \times e}{e^{5b-2a} \times e^{6a-4}} = e^{4a-7b+1-(5b-2a)-(6a-4)} = e^{5-12b}$.

7.2 a) Procédons par disjonctions de cas, selon le signe de $x+5$:

- si $x \geqslant -5$, alors $x+5 \geqslant 0$, ainsi l'équation équivaut à $x+5=3$, soit $x=-2$ et $-2 \geqslant -5$;
- si $x \leqslant -5$, alors $x+5 \leqslant 0$, ainsi l'équation équivaut à $-(x+5)=3$, soit $x=-8$ et $-8 \leqslant -5$.

L'ensemble des solutions est donc $\{-2,-8\}$.

7.2 b) *Méthode 1.* On peut procéder comme à la question précédente, en distinguant des cas selon le signe des expressions à l'intérieur des valeurs absolues, soit une résolution sur les intervalles $]-\infty,-7]$, $\left[-7,\frac{3}{2}\right]$ et $\left[\frac{3}{2},+\infty\right[$.

Méthode 2. On peut aussi tirer profit de la positivité des valeurs absolues et de la propriété « $|x|^2 = x^2$ » pour se débarrasser des valeurs absolues.

Plus précisément, puisque $|2x-3|$ et $|x+7|$ sont des réels positifs, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} |2x-3| = |x+7| &\iff |2x-3|^2 = |x+7|^2 \\ &\iff (2x-3)^2 - (x+7)^2 = 0. \end{aligned}$$

Or, on a

$$\begin{aligned} (2x-3)^2 - (x+7)^2 &= (2x-3-(x+7))(2x-3+x+7) \\ &= (x-10)(3x+4). \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation équivaut à $(x-10)(3x+4)=0$ et l'ensemble des solutions est donc $\left\{-\frac{4}{3},10\right\}$.

7.3 a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence

$$e^{i\alpha}e^{im} = e^{ix} \iff e^{i\alpha} = e^{ix}e^{-im} = e^{i(x-m)} = e^{i\frac{x-y}{2}}.$$

Ainsi, $\alpha = \dfrac{x-y}{2}$ convient.

7.3 c) Il s'agit d'une conséquence directe de la formule d'Euler : $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

7.3 d) Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, d'après les calculs précédents, on a

$$e^{ix} + e^{iy} = e^{im}\left(e^{i\alpha} + e^{i\beta}\right) = e^{i\frac{x+y}{2}}\left(e^{i\frac{x-y}{2}} + e^{-i\frac{x-y}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)e^{i\frac{x+y}{2}}.$$

7.4 Avec les notations du calculs précédents, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}m}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x+y}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x-y}{2}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{x-y}{2}}\right) = 2\mathrm{i}\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x+y}{2}},$$

la conclusion résultant de la formule d'Euler : $\sin(\theta) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

....

7.5 a) Puisque $1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}0}$, l'angle moitié est ici $\dfrac{0+\theta}{2} = \dfrac{\theta}{2}$, ce qui mène à la factorisation

$$1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}0} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}},$$

soit le résultat annoncé par la première formule de factorisation par l'angle moitié avec $x = \theta$ et $y = 0$.

....

7.5 b) À nouveau l'angle moitié est $\dfrac{\theta}{2}$, ce qui mène à la factorisation

$$1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}0} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\right) = 2\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}} = -2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}},$$

soit le résultat annoncé par la seconde formule de factorisation par l'angle moitié avec $x = 0$ et $y = \theta$.

....

7.6 a) L'angle moitié est $\dfrac{x+2x}{2} = \dfrac{3x}{2}$, ce qui mène à la factorisation

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} = \mathrm{e}^{3\mathrm{i}\frac{x}{2}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{x}{2}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\frac{x}{2}}.$$

....

7.6 b) L'angle moitié est $\dfrac{3x-x}{2} = x$, ce qui mène à la factorisation

$$\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\right) = 2\mathrm{i}\sin(2x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}.$$

....

7.6 c) L'angle moitié est $\dfrac{x+2y+x-y}{2} = x + \dfrac{y}{2}$, ce qui mène à la factorisation

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+2y)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-y)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+y/2)}\left(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}y/2} + \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}y/2}\right) = 2\cos\left(\frac{3y}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+y/2)}.$$

....

7.6 d) L'angle moitié est $\dfrac{0+x-2y}{2} = \dfrac{x}{2} - y$, ce qui mène à la factorisation

$$1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-2y)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{x}{2}-y\right)}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\frac{x}{2}-y\right)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{x}{2}-y\right)}\right) = -2\mathrm{i}\sin\left(\frac{x}{2}-y\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{x}{2}-y\right)}.$$

....

7.7 a) On a simplement $\mathsf{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}y}\right) = \mathsf{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right) + \mathsf{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}\right) = \cos(x) + \cos(y)$.

....

7.7 c) D'après les deux calculs précédents, on a

$$\begin{aligned}\cos(x) + \cos(y) &= \mathsf{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}y}\right)\\ &= \mathsf{Re}\left(\underbrace{2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}_{\in\mathbb{R}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x+y}{2}}\right)\\ &= 2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\mathsf{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x+y}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right).\end{aligned}$$

....

7.7 d) De façon similaire, on a

$$\begin{aligned}\sin(x)+\sin(y) &= \mathsf{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}\right)\\ &= \mathsf{Im}\left(\underbrace{2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}_{\in\mathbb{R}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x+y}{2}}\right)\\ &= 2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\mathsf{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x+y}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\sin\left(\frac{x+y}{2}\right).\end{aligned}$$

7.8 a) D'après la seconde formule de factorisation par l'angle moitié, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = 2\mathrm{i}\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x+y}{2}}$.
Ainsi, on a

$$\begin{aligned}\cos(x)-\cos(y) = \mathsf{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}\right) &= \mathsf{Re}\left(\underbrace{2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}_{\in\mathbb{R}}\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x+y}{2}}\right)\\ &= 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\mathsf{Re}\left(\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x+y}{2}}\right) = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\left(-\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)\\ &= 2\sin\left(\frac{y-x}{2}\right)\sin\left(\frac{x+y}{2}\right).\end{aligned}$$

7.8 b) De façon similaire, on a

$$\begin{aligned}\sin(x)-\sin(y) = \mathsf{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}\right) &= \mathsf{Im}\left(\underbrace{2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}_{\in\mathbb{R}}\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x+y}{2}}\right)\\ &= 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\mathsf{Im}\left(\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x+y}{2}}\right)\\ &= 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right).\end{aligned}$$

7.9 a) *Via* les propriétés algébriques de l'exponentielle on reconnaît une progression géométrique avec $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}\neq 1$ (car x est supposé non congru à 0 modulo π). D'où,

$$\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}kx} = \sum_{k=0}^{n}\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}\right)^k = \left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}\right)^0\times\frac{1-\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}\right)^{n+1}}{1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}} = \frac{1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(n+1)x}}{1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}}.$$

7.9 b) Puisque $1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}0}$, l'angle moitié est $\dfrac{0+2x}{2}=x$ et on a

$$1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\times 2\mathrm{i}\sin(-x) = -2\mathrm{i}\sin(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}.$$

7.9 c) De même, on a $1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(n+1)x} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+1)x}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x}\right) = -2\mathrm{i}\sin((n+1)x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x}$.

7.9 d) D'après les deux calculs précédents, on a

$$\frac{1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(n+1)x}}{1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}} = \frac{-2\mathrm{i}\sin((n+1)x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x}}{-2\mathrm{i}\sin(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}} = \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}.$$

Ainsi,

$$\mathsf{Re}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(n+1)x}}{1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}}\right) = \mathsf{Re}\left(\underbrace{\frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)}}_{\in\mathbb{R}}\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\right) = \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)}\mathsf{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\right) = \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)}\cos(nx).$$

7.9 e) *Via* les propriétés de la partie réelle vis-à-vis des sommes et d'après les calculs précédents, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(2kx) = \sum_{k=0}^{n} \mathsf{Re}\left(e^{2ikx}\right) = \mathsf{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{2ikx}\right) = \mathsf{Re}\left(\frac{1-e^{2i(n+1)x}}{1-e^{2ix}}\right) = \frac{\cos(nx)\sin((n+1)x)}{\sin(x)}.$$

7.9 f) De façon similaire, on a

$$\mathsf{Im}\left(\frac{1-e^{2i(n+1)x}}{1-e^{2ix}}\right) = \mathsf{Im}\left(\underbrace{\frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)}}_{\in\mathbb{R}} \times e^{inx}\right) = \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)}\,\mathsf{Im}\left(e^{inx}\right) = \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)}\sin(nx).$$

7.9 g) Comme pour la somme des cosinus, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(2kx) = \sum_{k=0}^{n} \mathsf{Im}\left(e^{2ikx}\right) = \mathsf{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{2ikx}\right) = \mathsf{Im}\left(\frac{1-e^{2i(n+1)x}}{1-e^{2ix}}\right) = \frac{\sin(nx)\sin((n+1)x)}{\sin(x)}.$$

7.10 a) Commençons par observer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(2kx+y) = \sum_{k=0}^{n} \mathsf{Re}\left(e^{i(2kx+y)}\right) = \mathsf{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{i(2kx+y)}\right).$$

Or, *via* les propriétés algébriques de l'exponentielle, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, on a

$$e^{i(2kx+y)} = \left(e^{2ix}\right)^k e^{iy}.$$

Ainsi, d'après le calcul précédent, sachant $e^{2ix} \neq 1$ avec x non congru à 0 modulo π,

$$\sum_{k=0}^{n} e^{i(2kx+y)} = e^{iy} \sum_{k=0}^{n} \left(e^{2ix}\right)^k = e^{iy} \times \frac{1-e^{2i(n+1)x}}{1-e^{2ix}} = e^{iy} \times \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)} e^{inx} = \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)} e^{i(nx+y)}.$$

D'où,

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(2kx+y) = \mathsf{Re}\left(\frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)} e^{i(nx+y)}\right) = \frac{\sin((n+1)x)\cos(nx+y)}{\sin(x)}.$$

7.10 b) De la même façon, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(2kx+y) = \mathsf{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{i(2kx+y)}\right) = \mathsf{Im}\left(\frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)} e^{i(nx+y)}\right) = \frac{\sin((n+1)x)\sin(nx+y)}{\sin(x)}.$$

7.11 a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, puisque $\cos^k(x)$ est un facteur réel, on a

$$\mathsf{Re}\left(\frac{e^{ikx}}{\cos^k(x)}\right) = \frac{1}{\cos^k(x)}\,\mathsf{Re}\left(e^{ikx}\right) = \frac{\cos(kx)}{\cos^k(x)}.$$

7.11 b) D'après le calcul précédent,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos(kx)}{\cos^k(x)} = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Re}\left(\frac{e^{ikx}}{\cos^k(x)}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{ikx}}{\cos^k(x)}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{e^{ix}}{\cos(x)}\right)^k\right).$$

Or, $\dfrac{e^{ix}}{\cos(x)} = 1 + i\tan(x) \neq 1$, puisque $x \not\equiv 0\,[\pi]$. Ainsi, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{e^{ix}}{\cos(x)}\right)^k = \left(\frac{e^{ix}}{\cos(x)}\right)^0 \times \frac{1 - \left(\dfrac{e^{ix}}{\cos(x)}\right)^n}{1 - \dfrac{e^{ix}}{\cos(x)}} = \frac{1 - \dfrac{e^{inx}}{\cos^n(x)}}{1 - (1 + i\tan(x))} = \frac{i}{\tan(x)}\left(1 - \frac{e^{inx}}{\cos^n(x)}\right).$$

Puis,

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{e^{ix}}{\cos(x)}\right)^k\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{i}{\tan(x)}\left(1 - \frac{e^{inx}}{\cos^n(x)}\right)\right) = \frac{-1}{\tan(x)\cos^n(x)}\,\mathrm{Re}\big(ie^{inx}\big) = \frac{\sin(nx)}{\tan(x)\cos^n(x)}.$$

D'où le résultat :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos(kx)}{\cos^k(x)} = \frac{\sin(nx)}{\tan(x)\cos^n(x)} = \frac{\sin(nx)}{\sin(x)\cos^{n-1}(x)}.$$

7.12 a) Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, d'après la formule du binôme, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(e^{ix}\right)^k 1^{n-k} = \left(1 + e^{ix}\right)^n.$$

7.12 b) *Via* la factorisation par l'angle moitié, on a

$$1 + e^{ix} = e^{i\frac{x}{2}}\left(e^{-i\frac{x}{2}} + e^{i\frac{x}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}.$$

Ainsi, d'après le calcul précédent, on a

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ikx}\right| = \left|1 + e^{ix}\right|^n = \left|2\cos\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}\right|^n = 2^n\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right|^n.$$

7.12 c) *Via* les propriétés de la partie réelle et d'après les calculs précédents, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{k}}_{\in\mathbb{R}} \mathrm{Re}\big(e^{ikx}\big) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ikx}\right) = \mathrm{Re}\left(2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{nx}{2}}\right) = 2^n\cos^n\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{nx}{2}\right).$$

7.12 d) On procède de même *via* la partie imaginaire : on a

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{k}}_{\in\mathbb{R}} \mathrm{Im}\big(e^{ikx}\big) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ikx}\right) = \mathrm{Im}\left(2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{nx}{2}}\right) = 2^n\cos^n\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right).$$

Fiche n° 8. Nombres complexes et trigonométrie III

Réponses

8.1 a) .... $\boxed{12x^2 + 17x - 5}$

8.1 b) .... $\boxed{2x^3 - 13x^2 + 24x - 9}$

8.1 c) .... $\boxed{x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4}$

8.1 d) .... $\boxed{-x^4 + x^3 + 3x^2 - 5x + 2}$

8.2 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{2} \text{ et } \dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

8.2 b) .... $\boxed{-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } -\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

8.2 c) .... $\boxed{-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } -\dfrac{1}{2}}$

8.3 a) .... $\boxed{\sin(\theta) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}}$

8.3 b) .... $\boxed{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} - 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}}$

8.3 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{4}(3\sin(x) - \sin(3x))}$

8.4 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{4}(\cos(3x) + 3\cos(x))}$

8.4 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{16}(\sin(5x) - 5\sin(3x) + 10\sin x)}$

8.5 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{4}\sin(5x) - \dfrac{1}{4}\sin(3x) + \dfrac{1}{2}\sin(x)}$

8.5 b) .... $\boxed{\begin{array}{r} -\dfrac{1}{8}\sin(9x) + \dfrac{3}{8}\sin(5x) \\ -\dfrac{1}{8}\sin(3x) - \dfrac{3}{8}\sin(x) \end{array}}$

8.6 a) .... $\boxed{\begin{array}{r} (\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x))^n \\ = \cos(nx) + \mathrm{i}\sin(nx) \end{array}}$

8.6 b) .... $\boxed{\begin{array}{r} \cos^3(x) + 3\mathrm{i}\cos^2(x)\sin(x) \\ -3\cos(x)\sin^2(x) - \mathrm{i}\sin^3(x) \end{array}}$

8.6 c) .... $\boxed{\cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x)}$

8.6 d) .... $\boxed{4\cos^3(x) - 3\cos(x)}$

8.6 e) .... $\boxed{3\sin(x) - 4\sin^3(x)}$

8.7 a) .... $\boxed{\begin{array}{r} 32\cos^6(x) - 48\cos^4(x) \\ +18\cos^2(x) - 1 \end{array}}$

8.7 b) .... $\boxed{\begin{array}{l} 2\cos(x)\sin(x) \\ \times\Big(16\cos^4(x) - 16\cos^2(x) + 3\Big) \end{array}}$

8.8 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{32}(2 + \cos(2x) - 2\cos(4x) - \cos(6x))}$

8.8 b) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{8}}$

8.9 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{4} + \dfrac{3\pi}{32}}$

8.9 b) .... $\boxed{\dfrac{7}{15}}$

Corrigés

8.1 b) On commence par développer le carré. On a

$$(x-3)^2(2x-1) = \big(x^2 - 6x + 9\big)(2x-1) = 2x^3 - 12x^2 + 18x - \big(x^2 - 6x + 9\big) = 2x^3 - 13x^2 + 24x - 9.$$

....

8.1 c) Rappelons que l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ se généralise pour trois termes : on a

$$\boxed{(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}\left(x^2 - 3x + 2\right)^2 &= \left(x^2\right)^2 + (-3x)^2 + 2^2 + 2x^2(-3x) + 2 \times 2x^2 + 2 \times 2(-3x)\\ &= x^4 + 9x^2 + 4 - 6x^3 + 4x^2 - 12x\\ &= x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4.\end{aligned}$$

....

8.1 d) Commençons par développer le cube via la formule du binôme : on a

$$\begin{aligned}(1-x)^3 &= \binom{3}{0}1^0(-x)^3 + \binom{3}{1}1^1(-x)^2 + \binom{3}{2}1^2(-x)^1 + \binom{3}{3}1^3(-x)^0\\ &= -x^3 + 3x^2 - 3x + 1.\end{aligned}$$

On aurait aussi pu procéder en deux étapes en considérant $(1-x)(1-x)^2$.

On a alors

$$\begin{aligned}(1-x)^3(x+2) &= \left(-x^3 + 3x^2 - 3x + 1\right)(x+2)\\ &= -x^4 + 3x^3 - 3x^2 + x + 2\left(-x^3 + 3x^2 - 3x + 1\right)\\ &= -x^4 + x^3 + 3x^2 - 5x + 2.\end{aligned}$$

....

8.2 a) On commence par remarquer que $-\dfrac{23\pi}{3} = -\dfrac{24\pi - \pi}{3} = -8\pi + \dfrac{\pi}{3}$. Ainsi, par 2π-périodicité des fonctions cosinus et sinus, il vient

$$\cos\left(-\frac{23\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 8\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\left(-\frac{23\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - 8\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

....

8.2 b) On commence par remarquer que $\dfrac{13\pi}{4} = \dfrac{12\pi + \pi}{4} = 3\pi + \dfrac{\pi}{4}$. Ainsi, par 2π-périodicité des fonctions cosinus et sinus, il vient

$$\cos\left(\frac{13\pi}{4}\right) = \cos\left(3\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

et de même $\sin\left(\dfrac{13\pi}{4}\right) = -\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

....

8.2 c) On commence par remarquer que $-\dfrac{29\pi}{6} = -\dfrac{30\pi - \pi}{4} = -5\pi + \dfrac{\pi}{6}$. Ainsi, par 2π-périodicité des fonctions cosinus et sinus, il vient

$$\cos\left(-\frac{29\pi}{6}\right) = \cos\left(-5\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

et de même $\sin\left(-\dfrac{29\pi}{6}\right) = -\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$.

....

8.3 b) D'après la formule du binôme, pour tous $a, b \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} a^{3-k}(-b)^k \\ &= \binom{3}{0} a^3(-b)^0 + \binom{3}{1} a^2(-b)^1 + \binom{3}{2} a^1(-b)^2 + \binom{3}{3} a^0(-b)^3 \\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.\end{aligned}$$

En considérant $a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ et $b = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$, on a donc

$$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)^3 = \mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} - 3\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} + 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x} = \mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} - 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}.$$

8.3 c) D'après les calculs précédents, on a

$$\begin{aligned}\sin^3(x) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^3 = \frac{1}{(2\mathrm{i})^3}\left(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} - 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}\right) && \text{(binôme)} \\ &= \frac{1}{(2\mathrm{i})^2}\left(\frac{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}} - 3 \times \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right) \\ &= -\frac{1}{4}(\sin(3x) - 3\sin(x)) && \text{(formule d'Euler).}\end{aligned}$$

8.4 a) On procède comme dans le calcul précédent, on a

$$\begin{aligned}\cos^3(x) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}\right)^3 = \frac{1}{2^3}\left(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} + 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}\right) && \text{(binôme)} \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}}{2} + 3 \times \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4}(\cos(3x) + 3\cos(x)) && \text{(formule d'Euler).}\end{aligned}$$

8.4 b) D'après la formule d'Euler pour le sinus, on a

$$\sin^5(x) = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^5 = \frac{1}{(2\mathrm{i})^5}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)^5.$$

Or, la formule du binôme donne, pour tous $a, b \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}(a-b)^5 &= \binom{5}{0} a^5(-b)^0 + \binom{5}{1} a^4(-b)^1 + \binom{5}{2} a^3(-b)^2 + \binom{5}{3} a^2(-b)^3 + \binom{5}{4} a^1(-b)^4 + \binom{5}{5} a^0(-b)^5 \\ &= a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5.\end{aligned}$$

Ainsi, en considérant $a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ et $b = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$, on a

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)^5 &= \mathrm{e}^{5\mathrm{i}x} - 5\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} + 10\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} - 10\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x} + 5\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x} \\ &= \mathrm{e}^{5\mathrm{i}x} - 5\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} + 10\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - 10\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} - 5\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-5\mathrm{i}x}.\end{aligned}$$

Au total, en utilisant à nouveau la formule d'Euler pour le sinus, on trouve

$$\sin^5(x) = \frac{1}{(2\mathrm{i})^4}\left(\frac{\mathrm{e}^{5\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-5\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}} - 5 \times \frac{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}} + 10 \times \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right) = \frac{1}{16}(\sin(5x) - 5\sin(3x) + 10\sin(x)).$$

8.5 a) On conserve notre stratégie de linéarisation *via* les formules d'Euler et la formule du binôme. On a

$$\begin{aligned}
\sin(x)\cos^2(2x) &= \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\times\left(\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}\right)^2 && \text{(formules d'Euler)}\\
&= \frac{1}{8i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\left(e^{2ix}+e^{-2ix}\right)^2\\
&= \frac{1}{8i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\left(\left(e^{2ix}\right)^2+2e^{2ix}e^{-2ix}+\left(e^{-2ix}\right)^2\right) && \text{(binôme)}\\
&= \frac{1}{8i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\left(e^{4ix}+2+e^{-4ix}\right)\\
&= \frac{1}{8i}\left(e^{ix}\left(e^{4ix}+2+e^{-4ix}\right)-e^{-ix}\left(e^{4ix}+2+e^{-4ix}\right)\right)\\
&= \frac{1}{8i}\left(e^{5ix}+2e^{ix}+e^{-3ix}-e^{3ix}-2e^{-ix}-e^{-5ix}\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{5ix}-e^{-5ix}}{2i}+2\times\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}-\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i}\right)\\
&= \frac{1}{4}(\sin(5x)-\sin(3x)+2\sin(x)) && \text{(formule d'Euler).}
\end{aligned}$$

8.5 b) On procède de même. On a

$$\begin{aligned}
\sin^3(2x)\cos(3x) &= \left(\frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i}\right)^3\times\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2} && \text{(formules d'Euler)}\\
&= \frac{1}{16i^3}\left(e^{2ix}-e^{-2ix}\right)^3\left(e^{3ix}+e^{-3ix}\right)\\
&= -\frac{1}{16i}\left(\left(e^{2ix}\right)^3-3\left(e^{2ix}\right)^2e^{-2ix}+3e^{2ix}\left(e^{-2ix}\right)^2-\left(e^{-2ix}\right)^3\right)\left(e^{3ix}+e^{-3ix}\right) && \text{(binôme)}\\
&= -\frac{1}{16i}\left(e^{6ix}-3e^{2ix}+3e^{-2ix}-e^{-6ix}\right)\left(e^{3ix}+e^{-3ix}\right)\\
&= -\frac{1}{16i}\left(e^{3ix}\left(e^{6ix}-3e^{2ix}+3e^{-2ix}-e^{-6ix}\right)+e^{-3ix}\left(e^{6ix}-3e^{2ix}+3e^{-2ix}-e^{-6ix}\right)\right)\\
&= -\frac{1}{16i}\left(e^{9ix}-3e^{5ix}+3e^{ix}-e^{-3ix}+e^{3ix}-3e^{-ix}+3e^{-5ix}-e^{-9ix}\right)\\
&= -\frac{1}{8}\left(\frac{e^{9ix}-e^{-9ix}}{2i}-3\times\frac{e^{5ix}-e^{-5ix}}{2i}+3\times\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}+\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i}\right)\\
&= -\frac{1}{8}(\sin(9x)-3\sin(5x)+\sin(3x)+3\sin(x)) && \text{(formule d'Euler).}
\end{aligned}$$

8.6 b) D'après la formule du binôme, on a

$$\begin{aligned}
(\cos(x)+i\sin(x))^3 &= \binom{3}{0}\cos^3(x)+\binom{3}{1}\cos^2(x)(i\sin(x))+\binom{3}{2}\cos(x)(i\sin(x))^2+\binom{3}{3}(i\sin(x))^3\\
&= \cos^3(x)+3i\cos^2(x)\sin(x)-3\cos(x)\sin^2(x)-i\sin^3(x).
\end{aligned}$$

8.6 c) D'après les deux calculs précédents, on a

$$\begin{aligned}
\cos(3x) &= \mathsf{Re}(\cos(3x)+i\sin(3x))\\
&= \mathsf{Re}\left((\cos(x)+i\sin(x))^3\right) && \text{(formule de Moivre)}\\
&= \mathsf{Re}\left(\cos^3(x)+3i\cos^2(x)\sin(x)-3\cos(x)\sin^2(x)-i\sin^3(x)\right) && \text{(formule du binôme)}\\
&= \cos^3(x)-3\cos(x)\sin^2(x).
\end{aligned}$$

8.6 d) D'après le calcul précédent et que sachant $\cos^2 + \sin^2 = 1$, on a

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x)\\ &= \cos^3(x) - 3\cos(x)\big(1-\sin^2(x)\big)\\ &= 4\cos^3(x) - 3\cos(x).\end{aligned}$$

....

8.6 e) On procède de même pour $\sin(3x)$ *via* la partie imaginaire :

$$\begin{aligned}\sin(3x) &= \mathsf{Im}(\cos(3x) + \mathrm{i}\sin(3x))\\ &= \mathsf{Im}\big((\cos(x)+\mathrm{i}\sin(x))^3\big) && \text{(formule de Moivre)}\\ &= \mathsf{Im}\big(\cos^3(x) + 3\mathrm{i}\cos^2(x)\sin(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) - \mathrm{i}\sin^3(x)\big) && \text{(formule du binôme)}\\ &= 3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x)\\ &= 3\big(1-\sin^2(x)\big)\sin(x) - \sin^3(x)\\ &= 3\sin(x) - 4\sin^3(x).\end{aligned}$$

....

8.7 a) Comme au calcul précédent, *via* la formule de Moivre,

$$\cos(6x) = \mathsf{Re}\big((\cos(x)+\mathrm{i}\sin(x))^6\big).$$

Or, d'après la formule du binôme, avec $c = \cos(x)$ et $s = \sin(x)$,

$$\begin{aligned}(c+\mathrm{i}s)^6 &= \binom{6}{0}c^6(\mathrm{i}s)^0 + \binom{6}{1}c^5(\mathrm{i}s)^1 + \binom{6}{2}c^4(\mathrm{i}s)^2 + \binom{6}{3}c^3(\mathrm{i}s)^3 + \binom{6}{4}c^2(\mathrm{i}s)^4 + \binom{6}{5}c^1(\mathrm{i}s)^5 + \binom{6}{6}c^0(\mathrm{i}s)^6\\ &= c^6 + 6\mathrm{i}c^5s - 15c^4s^2 - 20\mathrm{i}c^3s^3 + 15c^2s^4 + 6\mathrm{i}cs^5 - s^6\\ &= c^6 - 15c^4s^2 + 15c^2s^4 - s^6 + \mathrm{i}\big(6c^5s - 20c^3s^3 + 6cs^5\big).\end{aligned}$$

Ainsi, en prenant la partie réelle, on trouve

$$\begin{aligned}\cos(6x) &= \cos^6(x) - 15\cos^4(x)\sin^2(x) + 15\cos^2(x)\sin^4(x) - \sin^6(x)\\ &= \cos^6(x) - 15\cos^4(x)\big(1-\cos^2(x)\big) + 15\cos^2(x)\big(1-\cos^2(x)\big)^2 - \big(1-\cos^2(x)\big)^3\\ &= 32\cos^6(x) - 48\cos^4(x) + 18\cos^2(x) - 1.\end{aligned}$$

....

8.7 b) *Via* le calcul précédent, on a

$$\begin{aligned}\sin(6x) &= \mathsf{Im}\big((\cos(x)+\mathrm{i}\sin(x))^6\big)\\ &= 6\cos^5(x)\sin(x) - 20\cos^3(x)\sin^3(x) + 6\cos(x)\sin^5(x)\\ &= 2\cos(x)\sin(x)\big(3\cos^4 x - 10\cos^2(x)\sin^2(x) + 3\sin^4(x)\big)\\ &= 2\cos(x)\sin(x)\Big(3\cos^4 x - 10\cos^2(x)\big(1-\cos^2(x)\big) + 3\big(1-\cos^2(x)\big)^2\Big)\\ &= 2\cos(x)\sin(x)\big(16\cos^4(x) - 16\cos^2(x) + 3\big).\end{aligned}$$

....

8.8 a) On conserve notre stratégie de linéarisation *via* les formules d'Euler et la formule du binôme. On a

$$\begin{aligned}
\sin(x)^2\cos^4(x) &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2 \times \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4 = \frac{1}{2^6 i^2}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^2\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^4 \\
&= \frac{-1}{64}\left(e^{2ix}-2+e^{-2ix}\right)\left(e^{4ix}+4e^{2ix}+6+4e^{-2ix}+e^{-4ix}\right) && \text{(binôme)} \\
&= \frac{-1}{64}\left(e^{6ix}+2e^{4ix}-e^{2ix}-4-e^{-2ix}+2e^{-4ix}+e^{-6ix}\right) \\
&= \frac{1}{32}\left(-\frac{e^{6ix}+e^{-6ix}}{2}-2\times\frac{e^{4ix}+e^{4ix}}{2}+\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}+\frac{4}{2}\right) \\
&= \frac{1}{32}(2+\cos(2x)-2\cos(4x)-\cos(6x)). && \text{(formule d'Euler)}
\end{aligned}$$

....

8.8 b) D'après le calcul précédent,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\sin^2(x)\cos^4(x)\,dx &= \int_0^{2\pi}\frac{1}{32}(2+\cos(2x)-2\cos(4x)-\cos(6x))\,dx \\
&= \frac{1}{32}\left(\int_0^{2\pi}2\,dx+\int_0^{2\pi}\cos(2x)\,dx-2\int_0^{2\pi}\cos(4x)\,dx-\int_0^{2\pi}\cos(6x)\,dx\right) && \text{(linéarité)} \\
&= \frac{1}{32}\left(2\times(2\pi-0)+\left[\frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{2\pi}-2\left[\frac{\sin(4x)}{4}\right]_0^{2\pi}-\left[\frac{\sin(6x)}{6}\right]_0^{2\pi}\right) \\
&= \frac{1}{32}(4\pi+0-2\times 0-0)=\frac{\pi}{8}.
\end{aligned}$$

....

8.9 a) Comme au calcul précédent, on commence par linéariser l'intégrande $\cos^4(x)$, ce qui donne

$$\cos^4(x)=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{1}{8}\cos(4x).$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^4(x)\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{3}{8}\,dx+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(2x)\,dx+\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(4x)\,dx \\
&= \frac{3}{8}\left(\frac{\pi}{4}-0\right)+\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{8}\left[\frac{\sin(4x)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{3\pi}{32}+\frac{1}{4}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin(0)\right)+\frac{1}{8}(\sin(\pi)-\sin(0))=\frac{1}{4}+\frac{3\pi}{32}.
\end{aligned}$$

....

8.9 b) Là aussi, on commence par linéariser l'intégrande $\cos^2(x)\sin(3x)$, ce qui donne

$$\cos^2(x)\sin(3x)=\frac{1}{4}\sin(5x)+\frac{1}{2}\sin(3x)+\frac{1}{4}\sin(x).$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(x)\sin(3x)\,dx &= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(5x)\,dx+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(3x)\,dx+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)\,dx \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{-\cos(5x)}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\left[\frac{-\cos(3x)}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{4}\left[-\cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{20}\left(\cos(0)-\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right)\right)+\frac{1}{6}\left(\cos(0)-\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)+\frac{1}{4}\left(\cos(0)-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{20}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{7}{15}.
\end{aligned}$$

....

Fiche nº 9. Racines n-ièmes

Réponses

9.1 a) .... $\boxed{-\dfrac{1}{6}}$

9.1 b) .... $\boxed{\dfrac{34}{15}}$

9.1 c) .... $\boxed{\dfrac{61}{30}}$

9.1 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{3}}$

9.2 a) .... $\boxed{-\dfrac{5(\pi+1)}{7}}$

9.2 b) .... $\boxed{4 \text{ et } -11}$

9.2 c) .... $\boxed{\varnothing}$

9.2 d) .... $\boxed{2+\sqrt{3} \text{ et } 2-\sqrt{3}}$

9.3 a) .... $\boxed{1}$

9.3 b) .... $\boxed{0}$

9.3 c) .... $\boxed{-1}$

9.3 d) .... $\boxed{-1}$

9.3 e) .... $\boxed{-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

9.3 f) .... $\boxed{\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}}$

9.4 a) .... $\boxed{0}$

9.4 b) .... $\boxed{0}$

9.4 c) .... $\boxed{-1}$

9.4 d) .... $\boxed{-1}$

9.5 a) .... $\boxed{0}$

9.5 b) .... $\boxed{0}$

9.5 c) .... $\boxed{-2}$

9.6 a) .... $\boxed{0}$

9.6 b) .... $\boxed{(-1)^{n-1}}$

9.7 a) .... $\boxed{(a,b)=(x^2-y^2,2xy)}$

9.7 b) .... $\boxed{\sqrt{a^2+b^2}}$

9.7 c) .... $\boxed{2+\mathrm{i} \text{ et } -2-\mathrm{i}}$

9.8 a) .... $\boxed{\sqrt{3}-\mathrm{i}\sqrt{2} \text{ et } -\sqrt{3}+\mathrm{i}\sqrt{2}}$

9.8 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}+5\mathrm{i} \text{ et } -\dfrac{1}{2}-5\mathrm{i}}$

9.9 a) .... $\boxed{2,\ -1+\mathrm{i}\sqrt{3},\ \text{et } -1-\mathrm{i}\sqrt{3}}$

9.9 b) .... $\boxed{-\mathrm{i},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i},\ \text{et } -\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}}$

9.9 c) .... $\boxed{\begin{array}{r} -1+\mathrm{i},\ \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}-\mathrm{i}\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \text{et } \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}-\mathrm{i}\dfrac{1-\sqrt{3}}{2} \end{array}}$

9.10 a) .... $\boxed{\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi(5+4k)}{10}}\,;k\in\{0,1,\dots,4\}\right\}}$

9.10 b) .... $\boxed{\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi(12k-1)}{30}}\,;k\in\{0,1,\dots,4\}\right\}}$

9.10 c) .... $\boxed{\left\{\sqrt[10]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi(1+8k)}{20}}\,;k\in\{0,1,\dots,4\}\right\}}$

9.11 .... $\boxed{3+2\mathrm{i},\ -2+3\mathrm{i},\ -3-2\mathrm{i} \text{ et } 2-3\mathrm{i}}$

9.12 a) .... $\boxed{-1}$

9.12 b) .... $\boxed{2}$

9.12 c) .... $\boxed{\left(\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{7}}{2},\dfrac{-1-\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}\right)}$

9.13 a) .... $\boxed{\{0,\mathrm{i},-\mathrm{i}\}}$

9.13 b) .... $\boxed{\left\{\dfrac{5}{2}+\dfrac{5}{2}\mathrm{i},1+\dfrac{3}{2}\mathrm{i},-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right\}}$

9.14 .... $\boxed{\begin{array}{r} \left\{-\dfrac{1}{2},0,4,\dfrac{2}{5}+\dfrac{6}{5}\mathrm{i},\dfrac{2}{5}-\dfrac{6}{5}\mathrm{i},\right. \\ \left. -\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\mathrm{i},-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\mathrm{i}\right\} \end{array}}$

Corrigés

9.3 a) On a $\mathrm{j}^3 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi} = 1$.

....

9.3 b) **Première solution.** Voilà une première solution qui n'utilise pas l'expression algébrique de j. On utilise le fait que, pour tous nombres complexes a, b, on a $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^3)$; pour démontrer cette formule, il suffit de développer le membre de droite.

Ainsi, on a $0 = \mathrm{j}^3 - 1 = (\mathrm{j}-1)(1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2)$; comme $\mathrm{j} \neq 1$, on a nécessairement $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0$.

Seconde solution. On a $\mathrm{j} = \dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et, après calcul, on trouve $\mathrm{j}^2 = \dfrac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$. Donc, on a $1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2 = 0$.

....

9.3 e) On a $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

....

9.3 f) On peut observer que $\mathrm{j}^2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3} - 2\pi} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = \bar{\mathrm{j}}$ et $\left|1-\mathrm{j}\right|^2 = 3$. Ainsi, on a

$$\frac{1+\mathrm{j}}{1-\mathrm{j}} = \frac{(1+\mathrm{j})\left(1-\mathrm{j}^2\right)}{(1-\mathrm{j})\left(1-\bar{\mathrm{j}}\right)} = \frac{1}{3}(\mathrm{j}-\mathrm{j}^2) = \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

....

9.4 c) On a $\alpha(\alpha+1)(\alpha^2+1) = \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha = -1$.

....

9.4 d) L'idée est d'exploiter pleinement les égalités $\alpha^5 = 1$ et $\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$.

- Ainsi, pour commencer, on a
$$\alpha^2+\alpha+1 = -(\alpha^4+\alpha^3), \qquad \alpha^3+\alpha+1 = -(\alpha^4+\alpha^2) \qquad \text{et} \qquad \alpha^4+\alpha+1 = -(\alpha^3+\alpha^2)$$
Donc, on a
$$(\alpha^2+\alpha+1)(\alpha^3+\alpha+1)(\alpha^4+\alpha+1) = -\left(\alpha^4+\alpha^3\right)\left(\alpha^4+\alpha^2\right)\left(\alpha^3+\alpha^2\right).$$
- Comme on a de plus
$$\alpha^4+\alpha^3 = \alpha^3(\alpha+1), \qquad \alpha^4+\alpha^2 = \alpha^2(\alpha^2+1) \qquad \text{et} \qquad \alpha^3+\alpha^2 = \alpha^2(\alpha+1),$$
on obtient
$$\begin{aligned}(\alpha^2+\alpha+1)(\alpha^3+\alpha+1)(\alpha^4+\alpha+1) &= -\alpha^7(\alpha+1)^2(\alpha^2+1) \\ &= -\alpha^2(\alpha+1)^2(\alpha^2+1) && (\text{car } \alpha^5 = 1) \\ &= -\alpha(\alpha+1)(\alpha^2+1) \times \alpha(\alpha+1)\end{aligned}$$
- Or, on a $\alpha(\alpha+1)(\alpha^2+1) = -1$ d'après la question précédente. Donc,
$$(\alpha^2+\alpha+1)(\alpha^3+\alpha+1)(\alpha^4+\alpha+1) = \alpha(\alpha+1).$$
- Puis, on a $(\alpha^2+\alpha+1)(\alpha^3+\alpha+1)(\alpha^4+\alpha+1)(\alpha^2+1) = \alpha(\alpha+1)(\alpha^2+1) = -1$.

....

9.5 c) L'idée est d'exploiter pleinement les égalités $\beta^7 = 1$ et $\beta^6 + \beta^5 + \beta^4 + \beta^3 + \beta^2 + \beta + 1 = 0$.

- On a

$$\begin{aligned}(1+\beta^2)(1+\beta^4)(1+\beta^6) &= (1+\beta^2)(1+\beta^4+\beta^6+\underbrace{\beta^{10}}_{=\beta^3})\\ &= (1+\beta^4+\beta^6+\beta^3) + (\beta^2+\beta^6+\underbrace{\beta^8}_{=\beta}+\beta^5)\\ &= \underbrace{1+\beta+\beta^2+\beta^3+\beta^4+\beta^5+\beta^6}_{=0}+\beta^6 = \beta^6.\end{aligned}$$

- De même, après développement et simplification, on a

$$\begin{aligned}\beta(1+\beta^4)(1+\beta^6) &= 1+\beta+\beta^4+\beta^5,\\ \beta^2(1+\beta^2)(1+\beta^6) &= \beta+\beta^2+\beta^3+\beta^4\\ \text{et}\quad \beta^3(1+\beta^2)(1+\beta^4) &= 1+\beta^2+\beta^3+\beta^5.\end{aligned}$$

- Donc, on a

$$\begin{aligned}\frac{\beta}{1+\beta^2}+\frac{\beta^2}{1+\beta^4}+\frac{\beta^3}{1+\beta^6} &= \frac{\beta(1+\beta^4)(1+\beta^6)+\beta^2(1+\beta^2)(1+\beta^6)+\beta^3(1+\beta^2)(1+\beta^4)}{(1+\beta^2)(1+\beta^4)(1+\beta^6)}\\ &= \frac{\left(1+\beta+\beta^4+\beta^5\right)+\left(\beta+\beta^2+\beta^3+\beta^4\right)+\left(1+\beta^2+\beta^3+\beta^5\right)}{\beta^6}\\ &= 2\,\frac{1+\beta+\beta^2+\beta^3+\beta^4+\beta^5}{\beta^6} = 2\frac{-\beta^6}{\beta^6} = -2.\end{aligned}$$

9.6 a) Comme $\omega_1 \neq 1$ et $\omega_k = (\omega_1)^k$, on a $\omega_0 + \omega_1 + \cdots + \omega_{n-1} = \dfrac{1-(\omega_1)^n}{1-\omega_1} = \dfrac{1-e^{i2\pi}}{1-\omega_1} = 0$.

9.6 b) On sait que $1+2+3+\cdots+(n-1) = \dfrac{(n-1)n}{2}$. Ainsi, on trouve

$$\omega_0\times\omega_1\times\cdots\times\omega_{n-1} = e^{i\frac{2\pi}{n}(1+2+3+\cdots+(n-1))} = e^{i\pi(n-1)} = \left(e^{i\pi}\right)^{n-1} = (-1)^{n-1}.$$

9.7 a) On a $a+ib = z^2 = (x+iy)^2 = x^2-y^2+i2xy$. D'où $a = x^2-y^2$ et $b = 2xy$.

9.7 b) On a $x^2+y^2 = |z|^2 = \left|z^2\right| = |a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$.

9.7 c) On doit résoudre le système $\begin{cases}2xy = 4\\ x^2-y^2 = 3\\ x^2+y^2 = \sqrt{3^2+4^2} = 5\end{cases}$, qui est équivalent au système $\begin{cases}xy > 0\\ x^2 = 4\\ y^2 = 1\end{cases}$.

Il y a donc deux couples de solutions $(x,y) = (2,1)$ et $(x,y) = (-2,-1)$. Ainsi, les racines carrées de $3+4i$ sont $2+i$ et $-2-i$.

En réalité le système à résoudre est $\begin{cases}2xy = 4\\ x^2-y^2 = 3\end{cases}$. *Mais il est plus aisé de considérer le système équivalent avec la troisième équation (provenant de l'égalité des modules). Cela permet de déterminer les carrés de x et y facilement. On a donc x et y au signe près. On utilise alors la première équation pour trouver le signe de xy.*

9.9 a) Les racines cubiques de l'unité sont 1, $j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $j^2 = \bar{j}$. Par ailleurs, $2^3 = 8$. Ainsi, les racines cubiques de 8 sont $2\times 1 = 2$, $2j = -1+i\sqrt{3}$ et $2\bar{j} = -1-i\sqrt{3}$.

9.9 b) On a $\mathrm{i} = (-\mathrm{i})^3$. Les racines cubiques de i sont donc $-\mathrm{i} \times 1 = -\mathrm{i}$, $-\mathrm{i}\mathrm{j} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ et $\mathrm{i}\bar{\mathrm{j}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.

9.9 c) On a $2(1+\mathrm{i}) = \sqrt{2}^3\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}^3 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}^3 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{9\pi}{4}} = \left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\right)^3 = (-1+\mathrm{i})^3$. Ainsi, les racines cubiques de 8 sont $(-1+\mathrm{i}) \times 1 = -1+\mathrm{i}$, $(-1+\mathrm{i})\mathrm{j} = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} - \mathrm{i}\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ et $(-1+\mathrm{i})\bar{\mathrm{j}} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} - \mathrm{i}\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$.

9.10 a) L'ensemble des racines 5-ièmes de 1 est $\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi k}{5}} ; k \in \{0,1,\dots,4\}\right\}$. Comme $\mathrm{i}^5 = \mathrm{i}$ et $\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi k}{5}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi(5+4k)}{10}}$, l'ensemble des racines 5-ièmes de i est $\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi(5+4k)}{10}} ; k \in \{0,1,\dots,4\}\right\}$.

9.10 b) Comme $\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \mathrm{i}\dfrac{1}{2} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{30}}\right)^5$ et $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{30}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi k}{5}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi(12k-1)}{30}}$, l'ensemble des racines 5-ièmes de $\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \mathrm{i}\dfrac{1}{2}$ est $\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi(12k-1)}{30}} ; k \in \{0,1,\dots,4\}\right\}$.

9.10 c) Comme $1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \left(\sqrt[10]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{20}}\right)^5$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{20}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi k}{5}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi(1+8k)}{20}}$, l'ensemble des racines 5-ièmes de $1+\mathrm{i}$ est $\left\{\sqrt[10]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi(1+8k)}{20}} ; k \in \{0,1,\dots,4\}\right\}$.

9.11 On commence par calculer une racine carrée de $-119+120\mathrm{i}$. On trouve alors $5+12\mathrm{i}$ (ou $-5-12\mathrm{i}$). Puis, on calcule une racine carrée de $5+12\mathrm{i}$. On trouve $3+2\mathrm{i}$ (ou son opposé), qui est alors une racine 4-ième de $-119+120\mathrm{i}$.

Comme les racines 4-ièmes de 1 sont 1, -1, i et $-i$, les racines 4-ièmes de $-119+120\mathrm{i}$ sont donc

$$1 \times (3+2\mathrm{i}) = 3+2\mathrm{i}, \qquad i \times (3+2\mathrm{i}) = -2+3\mathrm{i}, \qquad -1 \times (3+2\mathrm{i}) = -3-2\mathrm{i} \qquad \text{et} \qquad -\mathrm{i} \times (3+2\mathrm{i}) = 2-3\mathrm{i}.$$

9.12 a) On a $0 = \omega^7 - 1 = (\omega - 1)\left(1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6\right)$ et $\omega \neq 1$. Ainsi, $A + B = -1$.

9.12 b) En utilisant $\omega^7 = 1$ et $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 = 0$, on trouve $AB = 2$.

9.12 c) On a $(X-A)(X-B) = X^2 - (A+B)X + AB$, donc on a $(X-A)(X-B) = X^2 + X + 2$.

Ainsi, A et B sont les solutions de l'équation, d'inconnue z, $z^2 + z + 2 = 0$. Or, les solutions de cette équation sont, après calcul, $\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}$ et $\dfrac{-1-\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}$.

Comme la partie imaginaire de A est positive, on a donc $A = \dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}$ et $B = \dfrac{-1-\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}$.

9.13 a) Observons que z vérifie $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^4 = 1$ si, et seulement si, $\dfrac{z+1}{z-1}$ est une racine 4-ième de 1. C'est-à-dire : si, et seulement si, $\dfrac{z+1}{z-1}$ vaut 1, -1, i ou $-\mathrm{i}$. Or l'équation $\dfrac{z+1}{z-1} = 1$ n'a pas de solution (car elle équivaut à $-1 = 1$). Les équations $\dfrac{z+1}{z-1} = -1$, $\dfrac{z+1}{z-1} = \mathrm{i}$ et $\dfrac{z+1}{z-1} = -\mathrm{i}$ ont chacune une unique solution, à savoir 0, $-\mathrm{i}$ et i respectivement.

Ce sont les solutions de notre équation initiale.

9.13 b) On commence par observer que les équations $(z-2)^4 = (z-3\text{i})^4$ et $\left(\dfrac{z-2}{z-3\text{i}}\right)^4 = 1$ sont équivalentes entre elles puisque 3i n'est pas solution de la première (car $(3\text{i}-2)^4 \neq 0 = (3\text{i}-3\text{i})^4$). On procède alors comme dans la question précédente en résolvant chacune des équations $\dfrac{z-2}{z-3\text{i}} = -1$, $\dfrac{z-2}{z-3\text{i}} = \text{i}$, $\dfrac{z-2}{z-3\text{i}} = -\text{i}$ et $\dfrac{z-2}{z-3\text{i}} = 1$ (qui, elle, n'a pas de solution). On trouve alors $\dfrac{5}{2} + \dfrac{5}{2}\text{i}$, $1 + \dfrac{3}{2}\text{i}$ et $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\text{i}$ comme solution de l'équation initiale.

....

9.14 Comme 1 n'est pas solution de l'équation $(z+2)^8 - 17(z+2)^4(z-1)^4 + 16(z-1)^8 = 0$, celle-ci équivaut à l'équation $\left(\left(\dfrac{z+2}{z-1}\right)^4\right)^2 - 17\left(\dfrac{z+2}{z-1}\right)^4 + 16 = 0$. Or $X^2 - 17X + 16 = (X-16)(X-1)$. Il s'agit donc de résoudre

$$\left(\left(\frac{z+2}{z-1}\right)^4 - 16\right)\left(\left(\frac{z+2}{z-1}\right)^4 - 1\right) = 0.$$

Les racines 4-ièmes de 16 sont 2, -2, 2i et -2i. Et les racines 4-ièmes de 1 sont 1, -1, i et $-$i.

L'équation $\dfrac{z+2}{z-1} = 1$ n'a pas de solution.

L'équation $\dfrac{z+2}{z-1} = -1$ a pour unique solution $-\dfrac{1}{2}$.

L'équation $\dfrac{z+2}{z-1} = \text{i}$ a pour unique solution $-\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}\text{i}$.

L'équation $\dfrac{z+2}{z-1} = -\text{i}$ a pour unique solution $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}\text{i}$.

L'équation $\dfrac{z+2}{z-1} = 2$ a pour unique solution 4.

L'équation $\dfrac{z+2}{z-1} = -2$ a pour unique solution 0.

L'équation $\dfrac{z+2}{z-1} = 2\text{i}$ a pour unique solution $\dfrac{2}{5} - \dfrac{6}{5}\text{i}$.

L'équation $\dfrac{z+2}{z-1} = -2\text{i}$ a pour unique solution $\dfrac{2}{5} + \dfrac{6}{5}\text{i}$.

L'ensemble des solutions de l'équation initiale est donc $\left\{-\dfrac{1}{2}, 0, 4, \dfrac{2}{5} + \dfrac{6}{5}\text{i}, \dfrac{2}{5} - \dfrac{6}{5}\text{i}, -\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}\text{i}, -\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}\text{i}\right\}$.

....

Fiche n^{o} 10. Formule du binôme

Réponses

10.1 a) $\boxed{\dfrac{3}{4}}$

10.1 b) $\boxed{-\dfrac{6}{35}}$

10.1 c) $\boxed{\dfrac{22}{35}}$

10.1 d) $\boxed{-\dfrac{1}{6}}$

10.2 a) $\boxed{-\dfrac{1}{n(n-1)}}$

10.2 b) $\boxed{-\dfrac{4}{(n+1)(n-1)}}$

10.2 c) $\boxed{\dfrac{2n^2+2n-6}{(n+1)(n+3)}}$

10.2 d) $\boxed{-\dfrac{8}{(n+2)(n+4)}}$

10.3 a) $\boxed{1}$

10.3 b) $\boxed{3}$

10.3 c) $\boxed{3}$

10.3 d) $\boxed{1}$

10.3 e) $\boxed{1}$

10.3 f) $\boxed{4}$

10.3 g) $\boxed{6}$

10.3 h) $\boxed{4}$

10.3 i) $\boxed{1}$

10.4 a) $\boxed{20}$

10.4 b) $\boxed{720}$

10.4 c) $\boxed{450}$

10.4 d) $\boxed{\dfrac{25}{147}}$

10.5 a) $\boxed{120}$

10.5 b) $\boxed{120}$

10.5 c) $\boxed{495}$

10.5 d) $\boxed{495}$

10.6 a) $\boxed{n^2-n}$

10.6 b) $\boxed{n^3-n}$

10.6 c) $\boxed{n-1}$

10.6 d) $\boxed{\dfrac{2}{n^2-1}}$

10.7 a) $\boxed{1}$

10.7 b) $\boxed{n}$

10.7 c) $\boxed{\dfrac{n(n-1)}{2}}$

10.7 d) $\boxed{\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}}$

10.7 e) $\boxed{\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}}$

10.7 f) $\boxed{\dfrac{n(n-1)}{2}}$

10.7 g) $\boxed{n}$

10.7 h) $\boxed{1}$

10.8 a) $\boxed{x^3+3x^2+3x+1}$

10.8 b) $\boxed{\begin{array}{r} x^4-8x^3+24x^2 \\ -32x+16 \end{array}}$

10.8 c) $\boxed{\begin{array}{r} x^5+15x^4+90x^3 \\ +270x^2+405x+243 \end{array}}$

10.8 d) $\boxed{\begin{array}{r} x^6-3x^5+\dfrac{15}{4}x^4 \\ -\dfrac{5}{2}x^3+\dfrac{15}{16}x^2 \\ -\dfrac{3}{16}x+\dfrac{1}{64} \end{array}}$

10.9 a) $\boxed{3^5}$

10.9 b) $\boxed{4^6}$

10.9 c) $\boxed{\left(\dfrac{3}{2}\right)^7}$

10.9 d) $\boxed{2^8}$

10.10 a) $\boxed{3^n}$

10.10 b) $\boxed{4^n}$

10.10 c) $\boxed{\left(\dfrac{3}{2}\right)^n}$

10.10 d) $\boxed{2^n}$

10.11 a) $\boxed{0}$

10.11 b) $\boxed{0}$

10.11 c) $\boxed{\left(\dfrac{3}{2}\right)^7}$

10.11 d) $\boxed{256}$

10.12 a) $\boxed{0}$

10.12 b) $\boxed{0}$

10.12 c) $\boxed{\left(\dfrac{3}{2}\right)^n}$

10.12 d) $\boxed{(-2)^n}$

10.13 a) $\boxed{(a+1)^n}$

10.13 b) $\boxed{(2b)^n}$

10.13 c) $\boxed{\left(\dfrac{1}{a}+1\right)^n}$

10.13 d) $\boxed{(ab+b)^n}$

10.14 $\boxed{0}$

10.15 a) $\boxed{\mathcal{P}+\mathcal{I}}$

10.15 b) $\boxed{\mathcal{P}-\mathcal{I}}$

10.15 c) $\boxed{\begin{array}{c} \mathcal{P}=2^{n-1} \\ \mathcal{I}=2^{n-1} \end{array}}$

10.16 a) $\boxed{n(1+x)^{n-1}}$

10.16 b) $\boxed{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k}$

10.16 c) ...... $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1}}$

10.16 d) .... $\boxed{n2^{n-1}}$

10.17 a) .... $\boxed{1}$

10.17 b) .... $\boxed{N+1}$

10.17 c) .... $\boxed{N+1}$

10.17 d) .... $\boxed{\dfrac{N(N+1)}{2}}$

10.17 e) . $\boxed{\mathsf{S}(k,N)+\dbinom{N+1}{k}}$

10.17 f) .... $\boxed{\text{c}}$

10.17 g) .... $\boxed{0}$

10.17 h) .... $\boxed{\dbinom{N+1}{k+1}}$

Corrigés

10.1 a) On a $\dfrac{3\times 2\times 1}{4\times 3\times 2}+\dfrac{5\times 4\times 3}{6\times 5\times 4}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{4}$.

....

10.1 b) On a $\dfrac{4\times 3\times 2}{5\times 4\times 3}-\dfrac{6\times 5\times 4}{7\times 6\times 5}=\dfrac{2}{5}-\dfrac{4}{7}=\dfrac{14}{35}-\dfrac{20}{35}=\dfrac{-6}{35}$.

....

10.1 c) On a $\dfrac{4\times 3\times 2\times 1}{5\times 4\times 3\times 2}+\dfrac{6\times 5\times 4\times 3}{7\times 6\times 5\times 4}=\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{7}=\dfrac{7}{35}+\dfrac{15}{35}=\dfrac{22}{35}$.

....

10.1 d) On a $\dfrac{5\times 4\times 3\times 2}{6\times 5\times 4\times 3}-\dfrac{7\times 6\times 5\times 4}{8\times 7\times 6\times 5}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{6}-\dfrac{3}{6}=-\dfrac{1}{6}$.

....

10.2 a) On a $\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n-1}=\dfrac{n-1}{n(n-1)}-\dfrac{n}{n(n-1)}=\dfrac{-1}{n(n-1)}$.

....

10.2 b) On a

$$\begin{aligned}\frac{n-1}{n(n+1)}-\frac{n+1}{n(n-1)}&=\frac{(n-1)^2}{n(n+1)(n-1)}-\frac{(n+1)^2}{n(n+1)(n-1)}=\frac{((n-1)-(n+1))((n-1)+(n+1))}{n(n+1)(n-1)}\\&=\frac{-2\times 2n}{n(n+1)(n-1)}=\frac{-4}{(n+1)(n-1)}.\end{aligned}$$

....

10.2 c) On a

$$\begin{aligned}\frac{n(n-1)(n-2)}{(n+1)n(n-1)}+\frac{(n+2)(n+1)n}{(n+3)(n+2)(n+1)}&=\frac{n-2}{n+1}+\frac{n}{n+3}=\frac{(n-2)(n+3)}{(n+1)(n+3)}+\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+3)}\\&=\frac{n^2+3n-2n-6+n^2+n}{(n+1)(n+3)}=\frac{2n^2+2n-6}{(n+1)(n+3)}.\end{aligned}$$

....

10.2 d) On a

$$\begin{aligned}\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{(n+2)(n+1)n(n-1)}-\frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}&=\frac{n-2}{n+2}-\frac{n}{n+4}\\&=\frac{(n-2)(n+4)}{(n+2)(n+4)}-\frac{n(n+2)}{(n+2)(n+4)}\\&=\frac{n^2+4n-2n-8-n^2-2n}{(n+2)(n+4)}=\frac{-8}{(n+2)(n+4)}.\end{aligned}$$

....

10.3 g) On a $\dbinom{4}{2}=\dfrac{4\times 3}{2!}=6$.

....

10.4 a) On a $\dfrac{5!}{3!}=\dfrac{5\times 4\times 3!}{3!}=20$.

....

10.4 b) On a $\dfrac{10!}{7!} = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = 720.$

10.5 a) On a $\dbinom{10}{3} = \dfrac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 10 \times 3 \times 4 = 120.$

10.5 b) On a $\dbinom{10}{7} = \dbinom{10}{10-7} = \dbinom{10}{3} = 120.$

10.5 c) On a $\dbinom{12}{4} = \dfrac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 11 \times 5 \times 9 = 495.$

10.5 d) $\dbinom{12}{8} = \dbinom{12}{12-8} = \dbinom{12}{4} = 495.$

10.6 a) On a $\dfrac{n!}{(n-2)!} = \dfrac{n \times (n-1) \times (n-2)!}{(n-2)!} = n(n-1) = n^2 - n.$

10.6 b) On a $\dfrac{(n+1)!}{(n-2)!} = \dfrac{(n+1)n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = (n+1)n(n-1) = n^3 - n.$

10.6 c) On a $\dfrac{(n^2-1) \times n!}{(n+1)!} = \dfrac{(n-1)(n+1)n!}{(n+1)n!} = n - 1.$

10.6 d) On a

$$\begin{aligned}\frac{(n-1)!}{(n+1)!} + \frac{(n-2)!}{n!} &= \frac{(n-1)!}{(n+1)!} + \frac{(n+1)(n-2)!}{(n+1) \times n!} = \frac{(n-1)! + (n+1)(n-2)!}{(n+1)!} \\ &= \frac{(n-2)!(n-1+n+1)}{(n+1) \times n \times (n-1) \times (n-2)!} = \frac{2n}{(n+1) \times n \times (n-1)} = \frac{2}{n^2-1}.\end{aligned}$$

10.7 d) On a $\dbinom{n}{3} = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}.$

10.7 e) On a $\dbinom{n}{n-3} = \dbinom{n}{3} = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}.$

10.8 a) On a $(1+x)^3 = \displaystyle\sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} 1^{3-k} \times x^k = x^3 + 3x^2 + 3x + 1.$

10.8 b) On a $(2-x)^4 = \displaystyle\sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} 2^{4-k} \times (-x)^k = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16.$

10.8 c) On a $(x+3)^5 = \displaystyle\sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} 3^{5-k} \times x^k = x^5 + 15x^4 + 90x^3 + 270x^2 + 405x + 243.$

10.8 d) On a $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^6 = \displaystyle\sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{6-k} \times x^k = x^6 - 3x^5 + \frac{15}{4}x^4 - \frac{5}{2}x^3 + \frac{15}{16}x^2 - \frac{3}{16}x + \frac{1}{64}.$

10.9 a) On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} \times 1^k \times 2^{5-k} = (1+2)^5 = 3^5.$

10.9 b) On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}\times 3^{6-k}=\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}\times 3^{6-k}\times 1^{k}=(3+1)^{6}=4^{6}$.

10.9 c) On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}\times\frac{1}{2^{7-k}}=\sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{7-k}\times 1^{k}=\left(\frac{1}{2}+1\right)^{7}=\left(\frac{3}{2}\right)^{7}$.

10.9 d) On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}=\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}\times 1^{k}\times 1^{8-k}=2^{8}$.

10.10 a) On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times 1^{k}\times 2^{n-k}=(1+2)^{n}=3^{n}$.

10.10 b) On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times 3^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times 3^{n-k}\times 1^{k}=(3+1)^{n}=4^{n}$.

10.10 c) On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times\frac{1}{2^{n-k}}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\times 1^{k}=\left(\frac{1}{2}+1\right)^{n}=\left(\frac{3}{2}\right)^{n}$.

10.10 d) On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times 1^{k}\times 1^{n-k}=(1+1)^{n}=2^{n}$.

10.11 a) On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}\times(-1)^{k}=\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}\times(-1)^{k}\times 1^{5-k}=(-1+1)^{5}=0$.

10.11 b) On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}\times(-1)^{-k}=\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}\times\left(\frac{1}{-1}\right)^{k}\times 1^{6-k}=(-1+1)^{6}=0$.

10.11 c) On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}\times 2^{-k}=\sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\times 1^{7-k}=\left(\frac{1}{2}+1\right)^{7}=\left(\frac{3}{2}\right)^{7}$.

10.11 d) On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}\times(-3)^{8-k}=\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}\times(-3)^{8-k}\times 1^{k}=(-3+1)^{8}=(-2)^{8}=2^{8}=256$.

10.12 a) On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times(-1)^{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times(-1)^{k}\times 1^{n-k}=(-1+1)^{n}=0$.

10.12 b) On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times(-1)^{-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times\left(\frac{1}{-1}\right)^{-k}\times 1^{n-k}=(-1+1)^{n}=0$.

10.12 c) On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times 2^{-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\times 1^{n-k}=\left(\frac{1}{2}+1\right)^{n}=\left(\frac{3}{2}\right)^{n}$.

10.12 d) On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times(-3)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times(-3)^{n-k}\times 1^{k}=(-3+1)^{n}=(-2)^{n}$.

10.13 a) On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times a^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times a^k\times 1^{n-k} = (a+1)^n$.

10.13 b) On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b^{n-k}\times b^k = (b+b)^n = (2b)^n$.

10.13 c) On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{a}\right)^k\times 1^{n-k} = \left(\frac{1}{a}+1\right)^n$.

10.13 d) On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times a^kb^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times (ab)^kb^{n-k} = (ab+b)^n$.

10.14 On a $\displaystyle\binom{n+1}{k+1} - \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!\times(n+1-(k+1))!} - \frac{n+1}{k+1}\times\frac{n!}{k!\times(n-k)!} = 0$.

10.15 a) On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{\substack{k=0\\k \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k} + \sum_{\substack{k=0\\k \text{ impair}}}^{n}\binom{n}{k} = \mathcal{P}+\mathcal{I}$.

10.15 b) On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k = \sum_{\substack{k=0\\k \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k + \sum_{\substack{k=0\\k \text{ impair}}}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k = \sum_{\substack{k=0\\k \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k} - \sum_{\substack{k=0\\k \text{ impair}}}^{n}\binom{n}{k} = \mathcal{P}-\mathcal{I}$.

10.15 c) Pour commencer, remarquons, d'après la formule de Newton, que

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k\times 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

$$\text{et}\quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\times 1^{n-k} = (-1+1)^n = 0.$$

Les sommes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont donc les solutions du système : $\begin{cases}\mathcal{P}+\mathcal{I}=2^n\\ \mathcal{P}-\mathcal{I}=0\end{cases}$. Or, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{cases}\mathcal{P}+\mathcal{I}=2^n\\ \mathcal{P}-\mathcal{I}=0\end{cases} \iff \begin{cases}2\mathcal{P}=2^n\\ \mathcal{P}=\mathcal{I}\end{cases} \iff \mathcal{P}=\mathcal{I}=2^{n-1}.$$

D'où le résultat.

10.16 b) Pour $x\in\mathbb{R}$, la formule de Newton donne $\displaystyle f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times x^k\times 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$.

10.16 c) Pour $x\in\mathbb{R}$, on a donc $\displaystyle f'(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1}$.

10.16 d) Soit $x\in\mathbb{R}$. Des calculs précédents, on déduit que $\displaystyle n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1}$. Pour $x=1$, on obtient $\displaystyle n(1+1)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k\times 1^{k-1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k1^{k-1}$. D'où la formule : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

10.17 a) On a $\mathsf{S}(N,N) = \sum_{n=N}^{N} \binom{n}{N} = \binom{N}{N} = 1$.

10.17 b) On a $\mathsf{S}(0,N) = \sum_{n=0}^{N} \binom{n}{0} = \sum_{n=0}^{N} 1 = N+1$.

10.17 c) On a $\mathsf{S}(N-1,N) = \binom{N-1}{N-1} + \binom{N-1}{N} = N+1$.

10.17 d) On a $\mathsf{S}(N-2,N) = \binom{N-2}{N-2} + \binom{N-2}{N-1} + \binom{N-2}{N} = 1 + N - 1 + \dfrac{N(N-1)}{2} = \dfrac{N(N+1)}{2}$.

10.17 e) On a $\mathsf{S}(k,N+1) = \sum_{n=k}^{N+1} \binom{n}{k} = \sum_{n=k}^{N} \binom{n}{k} + \binom{N+1}{k} = \mathsf{S}(k,N) + \binom{N+1}{k}$.

10.17 g) On a

$$\begin{aligned}\mathsf{T}(k,N+1) - \mathsf{T}(k,N) &= \left(\mathsf{S}(k,N+1) - \binom{N+2}{k+1}\right) - \left(\mathsf{S}(k,N) - \binom{N+1}{k+1}\right) \\ &= \Big(\mathsf{S}(k,N+1) - \mathsf{S}(k,N)\Big) - \left(\binom{N+2}{k+1} - \binom{N+1}{k+1}\right).\end{aligned}$$

On a $\mathsf{S}(k,N+1) - \mathsf{S}(k,N) = \binom{N+1}{k}$. Mais, d'après la formule de Pascal : $\binom{N+2}{k+1} - \binom{N+1}{k+1} = \binom{N+1}{k}$.

Donc,

$$\mathsf{T}(k,N+1) - \mathsf{T}(k,N) = \binom{N+1}{k} - \binom{N+1}{k} = 0.$$

10.17 h) La suite $(\mathsf{T}(k,N))_{N\geqslant k}$ est constante, d'après ce qui précède. Or, on a

$$\mathsf{T}(k,k) = \binom{k}{k} - \binom{k+1}{k+1} = 0.$$

Donc, on a $\mathsf{T}(k,N) = 0$, pour $N \geqslant k$. Donc, on a $\mathsf{S}(k,N) = \sum_{n=k}^{N} \binom{n}{k} = \binom{N+1}{k+1}$.

Fiche n° 11. Calcul matriciel I

Réponses

11.1 a) $\boxed{20}$

11.1 b) $\boxed{0}$

11.1 c) $\boxed{40}$

11.1 d) $\boxed{6\sqrt{2}+18}$

11.2 a) $\boxed{(2,3)}$

11.2 b) $\boxed{(-4,-3)}$

11.2 c) $\boxed{(3,2)}$

11.2 d) $\boxed{(1,2,0)}$

11.3 a) $\boxed{\text{a}}$

11.3 b) $\boxed{\text{b}}$

11.3 c) $\boxed{\text{a}}$

11.3 d) $\boxed{\text{b}}$

11.3 e) $\boxed{\text{a}}$

11.3 f) $\boxed{\text{b}}$

11.4 a) $\boxed{\text{b}}$

11.4 b) $\boxed{\text{b}}$

11.4 c) $\boxed{\text{a}}$

11.4 d) $\boxed{\text{a}}$

11.4 e) $\boxed{\text{a}}$

11.4 f) $\boxed{\text{b}}$

11.5 a) $\boxed{\begin{pmatrix}1\\12\end{pmatrix}}$

11.5 b) $\boxed{\begin{pmatrix}-9\\-10\end{pmatrix}}$

11.5 c) $\boxed{\begin{pmatrix}-8\\2\end{pmatrix}}$

11.5 d) $\boxed{\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}}$

11.5 e) $\boxed{\begin{pmatrix}-4\\-12\end{pmatrix}}$

11.5 f) $\boxed{\begin{pmatrix}-10\\-22\end{pmatrix}}$

11.6 a) $\boxed{\begin{pmatrix}-3\\-1\\7\end{pmatrix}}$

11.6 b) $\boxed{\begin{pmatrix}-6\\-13\\18\end{pmatrix}}$

11.6 c) $\boxed{\begin{pmatrix}-9\\-14\\25\end{pmatrix}}$

11.6 d) $\boxed{\begin{pmatrix}-3\\4\\4\end{pmatrix}}$

11.6 e) $\boxed{\begin{pmatrix}-7\\-15\\19\end{pmatrix}}$

11.6 f) $\boxed{\begin{pmatrix}-3\\-12\\11\end{pmatrix}}$

11.7 a) $\boxed{\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}}$

11.7 b) $\boxed{\begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix}}$

11.7 c) $\boxed{\begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix}}$

11.7 d) $\boxed{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}}$

11.7 e) $\boxed{\begin{pmatrix}4 & 5 & 6\end{pmatrix}}$

11.7 f) $\boxed{\begin{pmatrix}7 & 8 & 9\end{pmatrix}}$

11.8 a) $\boxed{(-1,1)}$

11.8 b) $\boxed{(2,2)}$

11.9 a) $\boxed{\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)}$

11.9 b) $\boxed{\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},-\sqrt{3}\right)}$

11.10 a) $\boxed{-1}$

11.10 b) $\boxed{-2}$

11.11 a) $\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

11.11 b) $\boxed{-2}$

11.12 a) $\boxed{\left(9,\frac{-1}{2}\right)}$

11.12 b) $\boxed{(-2,3)}$

11.12 c) $\boxed{\left(\frac{-4}{3},\frac{-5}{12}\right)}$

11.12 d) $\boxed{\left(\frac{5}{14},\frac{1}{7}\right)}$

11.13 $\boxed{3}$

11.14 $\boxed{2^n\times\begin{pmatrix}1 & -6 & 12\end{pmatrix}}$

11.15 a) $\boxed{(12)}$

11.15 b) $\boxed{\frac{-1}{10}}$

11.16 a) $\boxed{\begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix}}$

11.16 b) $\boxed{\begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix}}$

11.16 c) $\boxed{\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}}$

11.16 d) $\boxed{4}$

11.16 e) $\boxed{\begin{pmatrix}0\\-11\\14\end{pmatrix}}$

Corrigés

11.1 a) On a $P(-1)=-(-1)^3+3\times(-1)^2-4\times(-1)+12=1+3+4+12=20$.

11.1 b) On a $P(3)=-3^3+3\times 3^2-4\times 3+12=-27+27-12+12=0$.

11.1 c) On a $P(-2) = -(-2)^3 + 3 \times (-2)^2 - 4 \times (-2) + 12 = 8 + 12 + 8 + 12 = 40$.

11.1 d) On a $P(-\sqrt{2}) = -(-\sqrt{2})^3 + 3 \times (-\sqrt{2})^2 - 4 \times (-\sqrt{2}) + 12 = 2\sqrt{2} + 6 + 4\sqrt{2} + 12 = 6\sqrt{2} + 18$.

11.2 a) On résout le système en faisant des combinaisons linéaires entre les lignes. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x + y = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} 5x = 10 \\ 3x + y = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y + 6 = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 3 \\ x = 2. \end{cases}$$

11.2 b) On résout le système en faisant des combinaisons linéaires entre les lignes. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{cases} -3x + 2y = 6 \\ 4x - 5y = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} -12x + 8y = 24 \\ 12x - 15y = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} -7y = 21 \\ 12x - 15y = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -3 \\ 12x + 45 = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -3 \\ x = -4. \end{cases}$$

11.2 c) On résout le système en faisant des combinaisons linéaires entre les lignes. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{cases} -x + 5y = x + 3y - 2 \\ 3x - y = 2x + y - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x + 2y = -2 \\ x - 2y = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} -x = -3 \\ x - 2y = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3 \\ -2y + 3 = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3 \\ y = 2. \end{cases}$$

11.2 d) On résout le système par combinaisons. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{cases} -4x + y + 3z = -2 \\ 5x - 2y + z = 1 \\ 3x + y + 5z = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x - \frac{1}{4}y - \frac{3}{4}z = \frac{1}{2} \\ 5x - 2y + z = 1 \\ 3x + y + 5z = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x - \frac{1}{4}y - \frac{3}{4}z = \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4}y + \frac{19}{4}z = -\frac{3}{2} \\ \frac{7}{4}y + \frac{29}{4}z = \frac{7}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x - \frac{1}{4}y - \frac{3}{4}z = \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4}y + \frac{19}{4}z = -\frac{3}{2} \\ \frac{55}{3}z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - \frac{1}{4}y = \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4}y = -\frac{3}{2} \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 0. \end{cases}$$

11.3 a) Dans chacun des cas, le produit est possible si le nombre de lignes de la matrice B est égal au nombre de colonnes de la matrice A, c'est-à-dire trois. Ici B a trois lignes donc le produit peut être effectué et le résultat est une matrice de dimension 2×1.

On procède de la même manière pour les questions suivantes.

11.5 a) On a $AB = \begin{pmatrix} 1 \times (-5) + 3 \times 2 \\ -2 \times (-5) + 1 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \end{pmatrix}$.

11.5 b) On a $AC = \begin{pmatrix} 1 \times 3 + 3 \times (-4) \\ -2 \times 3 + 1 \times (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -10 \end{pmatrix}$.

11.5 c) On a $A(B+C) = AB + AC = \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + (-9) \\ 12 + (-10) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On procède de la même manière pour les questions suivantes.

11.6 a) On procède comme dans l'exercice précédent.

11.7 a) On effectue dans chacun des cas le produit matriciel et on remarque que le résultat est égal à l'une des lignes ou colonnes de P.

11.8 a) On a $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \times \alpha + 1 \times \beta \\ 1 \times \alpha + 1 \times \beta \\ -1 \times \alpha + 0 \times \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha + \beta \\ -\alpha \end{pmatrix}$. On obtient l'égalité $\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha + \beta \\ -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

En identifiant les coefficients en première et troisième lignes des deux matrices, on en déduit que $(\alpha, \beta) = (-1, 1)$. On vérifie enfin que les coefficients en deuxième ligne sont égaux : $\alpha + \beta = 0$.

....

11.8 b) On a $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times \alpha + (-1) \times \beta & \alpha \times 3 + \beta \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - \beta & 3\alpha + 4\beta \end{pmatrix}$. On obtient l'égalité $\begin{pmatrix} \alpha - \beta & 3\alpha + 4\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 14 \end{pmatrix}$. En identifiant les coefficients en première colonne, on en déduit que $\alpha = \beta$. Ainsi, $3\alpha + 4\beta = 7\alpha$ donc $\alpha = 7$ en identifiant les coefficients en deuxième colonne. Enfin, $(\alpha, \beta) = (2, 2)$.

....

11.9 a) On a $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times \alpha + (-1) \times \beta \\ 1 \times \alpha + (-2) \times \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha - \beta \\ \alpha - 2\beta \end{pmatrix}$. Puis, on procède comme précédemment.

....

11.9 b) On a $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\alpha & 4\alpha \\ -2\beta & 4\beta \end{pmatrix}$. Puis, on procède comme précédemment.

....

11.10 a) On a $AB = \begin{pmatrix} \alpha^2 - 1 \\ 1 + \alpha \end{pmatrix}$. De l'égalité $AB = \begin{pmatrix} \alpha^2 - 1 \\ 1 + \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on déduit que $\alpha^2 - 1 = 0$ et $1 + \alpha = 0$. La deuxième équation nous donne $\alpha = -1$ et on vérifie qu'il s'agit d'une solution de la première équation.

....

11.10 b) On a $AB = \begin{pmatrix} 2\alpha + 4 \\ 8 + 4\alpha \end{pmatrix}$. De l'égalité $AB = \begin{pmatrix} 2\alpha + 4 \\ 8 + 4\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on déduit que $2\alpha + 4 = 0$ et $8 + 4\alpha$.

Ces deux équations sont équivalentes et leur résolution nous donne $\alpha = -2$.

....

11.11 a) On a $AB = \begin{pmatrix} 2\alpha^2 - 1 \\ \dfrac{2}{\sqrt{2}} - 2\alpha \end{pmatrix}$. Comme $AB = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on trouve le système d'équations $\begin{cases} 2\alpha^2 - 1 = 0, \\ \dfrac{2}{\sqrt{2}} - 2\alpha = 0 \end{cases}$.

La deuxième équation donne $\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, et on vérifie que cette valeur est bien solution de la première.

....

11.11 b) On a $AB = \begin{pmatrix} \alpha^2 + 2(2\alpha + 2) \\ -\alpha + 2\alpha + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 + 4\alpha + 4 \\ \alpha + 2 \end{pmatrix}$. Puis, on raisonne comme précédemment.

....

11.12 a) On a $AB = \begin{pmatrix} -\alpha + 8 \\ 3 + 2\beta \end{pmatrix}$. Comme $AB = B$, en identifiant les coefficients en première ligne, on cherche α tel que $-\alpha + 8 = -1$, d'où $\alpha = 9$. Avec la deuxième ligne, on cherche β tel que $2\beta + 3 = 2$, d'où $\beta = \dfrac{-1}{2}$.

....

11.12 b) On a $AB = \begin{pmatrix} -2\alpha - 2\beta \\ 2\alpha + \beta \end{pmatrix}$. Comme $AB = B$, en raisonnant ligne par ligne, on cherche à résoudre le système d'équations $\begin{cases} -2\alpha - 2\beta = -2 \\ 2\alpha + \beta = -1 \end{cases}$. En ajoutant la deuxième ligne à la première, on obtient $\begin{cases} -\beta = -3 \\ 2\alpha + \beta = -1 \end{cases}$ puis, en résolvant la première équation et en substituant le résultat dans la deuxième, on obtient $\alpha = -2$ et $\beta = 3$.

....

11.12 c) On procède de la même manière qu'à l'exercice précédent. Le produit matriciel est $AB = \begin{pmatrix} -6\alpha - 5 \\ 12\beta + 10 \end{pmatrix}$.

L'identification des coefficients nous donne $\alpha = \dfrac{-4}{3}$ et $\beta = \dfrac{-5}{12}$.

....

11.12 d) Le produit matriciel est $AB = \begin{pmatrix} 2\alpha + 2\beta \\ 6\alpha - \beta \end{pmatrix}$. L'identification des coefficients nous ramène à résoudre le système d'équations $\begin{cases} 2\alpha + 2\beta = 1 \\ 6\alpha - \beta = 2 \end{cases}$. Sa résolution nous donne $\alpha = \dfrac{5}{14}$ et $\beta = \dfrac{1}{7}$.

....

11.13 Le produit matriciel est $AB = \begin{pmatrix} -\alpha^2 - \alpha \\ -5\alpha + \alpha^2 \end{pmatrix}$. L'identification des coefficients nous ramène à résoudre le système d'équations $\begin{cases} \alpha^2 - \alpha = -12 \\ \alpha^2 - 5\alpha = -6 \end{cases}$. En additionnant les deux lignes du système, on obtient l'équation $-6\alpha = -18$ d'où $\alpha = 3$. On vérifie que 3 est bien solution du système.

....

11.14 On a

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^{n-2} & -2^{n-1} & 2^n \\ 2^{n-1} & 2^n & -2^{n+1} \\ 2^n & -2^{n+1} & 2^{n+2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 \times 2^{n-2} - 2 \times 2^{n-1} + 1 \times 2^n & -4 \times 2^{n-1} - 2 \times 2^n - 1 \times 2^{n+1} & 4 \times 2^n + 2 \times 2^{n+1} + 1 \times 2^{n+2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^n - 2^n + 2^n & -2^{n+1} - 2^{n+1} - 2^{n+1} & 2^{n+2} + 2^{n+2} + 2^{n+2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^n & -3 \times 2^{n+1} & 3 \times 2^{n+2} \end{pmatrix} = 2^n \times \begin{pmatrix} 1 & -6 & 12 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

....

11.15 a) On a $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (12)$.

....

11.15 b) On a $\begin{pmatrix} \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5\alpha + 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = (10\alpha + 1)$. La résolution de l'équation $10\alpha + 1 = 0$ nous donne finalement $\alpha = -\dfrac{1}{10}$.

....

11.16 a) On a $C_1 = A \times E_1 = \begin{pmatrix} 1 \times 1 - 2 \times 0 + 2 \times 0 \\ 5 \times 1 + 1 \times 0 - 1 \times 0 \\ 3 \times 1 + 4 \times 0 + 2 \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On remarque (et ce n'est pas un hasard) que $A \times E_1$ est la première colonne de A.

On effectue les calculs de la même manière pour les deux questions suivantes.

....

11.16 d) D'après les questions précédentes, on a : $-2C_1 + 3C_2 + \alpha C_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -10 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\alpha \\ -\alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 + 2\alpha \\ -7 - \alpha \\ 6 + 2\alpha \end{pmatrix}$.

En identifiant les coefficients, on en déduit que $\alpha = 4$.

....

11.16 e) On a $\alpha = 4$. En effectuant le produit matriciel, on obtient $A \times \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -11 \\ 14 \end{pmatrix}$.

....

Fiche n° 12. Calcul matriciel II

Réponses

12.1 a) .... $\boxed{\dfrac{19}{6}}$

12.1 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{6}}$

12.1 c) .... $\boxed{\dfrac{7}{2}}$

12.2 a) .... $\boxed{\dfrac{-x^2+2x+6}{(x+1)(x+2)}}$

12.2 b) .... $\boxed{\dfrac{x+2}{x+1}}$

12.2 c) .... $\boxed{\dfrac{-11x+1}{2x(1-x)}}$

12.3 a) .... $\boxed{\dfrac{27}{8}}$

12.3 b) .... $\boxed{\dfrac{11}{8}}$

12.4 a) .... $\boxed{\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}}$

12.4 b) .... $\boxed{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}}$

12.4 c) .... $\boxed{\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}}$

12.5 a) .... $\boxed{\begin{pmatrix} \frac{51}{28} & \frac{16}{3} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{8} \end{pmatrix}}$

12.5 b) .... $\boxed{\begin{pmatrix} -\frac{19}{28} & -\frac{8}{3} \\ \frac{7}{2} & -\frac{9}{8} \end{pmatrix}}$

12.6 a) .... $\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$

12.6 b) .... $\boxed{\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}$

12.6 c) .... $\boxed{\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}$

12.6 d) .... $\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$

12.7 a) .... $\boxed{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}}$

12.7 b) ...... $\boxed{\begin{pmatrix} \frac{72}{5} & \frac{48}{5} \\ -\frac{48}{5} & -\frac{32}{5} \end{pmatrix}}$

12.8 a) ...... $\boxed{\begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 4 & 3 & 5 \\ 20 & 17 & 17 \end{pmatrix}}$

12.8 b) .... $\boxed{\begin{pmatrix} 9 & 8 & 16 \\ 7 & 1 & 11 \\ 8 & 3 & 15 \end{pmatrix}}$

12.9 a) .. $\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

12.9 b) . $\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

12.9 c) .. $\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

12.9 d) .. $\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

12.10 .... $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$

12.11 a) .... $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$

12.11 b) ... $\boxed{R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{5}{2} & -3 \end{pmatrix}}$

Corrigés

12.2 c) On a

$$\frac{1-2x}{2x} - \frac{x+4}{1-x} = \frac{(1-2x)(1-x)}{2x(1-x)} - \frac{(x+4)2x}{(1-x)2x} = \frac{(1-2x)(1-x)-2x(x+4)}{2x(1-x)}$$
$$= \frac{1-x-2x+2x^2-2x^2-8x}{2x(1-x)} = \frac{-11x+1}{2x(1-x)}.$$

12.3 a) On a les équivalences suivantes :

$$\frac{2x}{3}+\frac{1}{4}=\frac{5}{2} \iff 12\cdot\frac{2x}{3}+12\cdot\frac{1}{4}=12\cdot\frac{5}{2} \iff 8x+3=30 \iff 8x=27 \iff x=\frac{27}{8}.$$

12.3 b) On a les équivalences suivantes :

$$\frac{3}{2x+1}=\frac{4}{5} \iff 15=4(2x+1) \iff \frac{15}{4}=2x+1 \iff 2x=\frac{15}{4}-1 \iff 2x=\frac{11}{4} \iff x=\frac{11}{8}.$$

12.6 a) On a $A\times B=\begin{pmatrix}3&-6\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&4\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\times(-2)+(-6)\times(-1) & 3\times 4+(-6)\times 2\\ 1\times(-2)+(-2)\times(-1) & 1\times 4+(-2)\times 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

12.6 b) On a $B\times A=\begin{pmatrix}-2&4\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-6\\1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\times 3+4\times 1 & -2\times(-6)+4\times(-2)\\ -1\times 3+2\times 1 & -1\times(-6)+2\times(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&4\\-1&2\end{pmatrix}$.

12.8 a) On a $A\times B=\begin{pmatrix}1&-1&2\\1&0&1\\2&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2+6 & 2-3+2 & 3-1+4\\ 1+0+3 & 2+0+1 & 3+0+2\\ 2+6+12 & 4+9+4 & 6+3+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&1&6\\4&3&5\\20&17&17\end{pmatrix}$.

12.8 b) On a $B\times A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&2\\1&0&1\\2&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2+6 & -1+0+9 & 2+2+12\\ 2+3+2 & -2+0+3 & 4+3+4\\ 3+1+4 & -3+0+6 & 6+1+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&8&16\\7&1&11\\8&3&15\end{pmatrix}$.

12.10 On a $A^2=A\times A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$ et $A^3=A\times A^2=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}$ et $A^4=A\times A^3=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix}$. On conjecture que $A^n=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.

Ceci peut se démontrer par récurrence.

12.11 a) La matrice identité $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ est une matrice possible pour N. Vérifions s'il existe ou non d'autres solutions. Soit $N=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$. On a $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$.

Donc, on a les équivalences : $\begin{cases}a+3b=1\\2a+4b=2\\c+3d=3\\2c+4d=4\end{cases} \iff \begin{cases}a+3b=1\\2b=0\\c+3d=3\\2c+4d=4\end{cases} \iff \begin{cases}a=1\\b=0\\c+3d=3\\2d=2\end{cases} \iff \begin{cases}a=1\\b=0\\c=0\\d=1\end{cases}$.

Ainsi $N=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ est la seule solution possible.

12.11 b) Soit $R=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ telle que $K\times R=J$. On a, $\begin{pmatrix}2&0\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a&2b\\a-c&b-d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$.

Donc, on a les équivalences $\begin{cases}2a=1\\2b=2\\a-c=3\\b-d=4\end{cases} \iff \begin{cases}a=\frac{1}{2}\\b=1\\c=a-3\\d=b-4\end{cases} \iff \begin{cases}a=\frac{1}{2}\\b=1\\c=-\frac{5}{2}\\d=-3\end{cases}$. Ainsi $R=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&1\\-\frac{5}{2}&-3\end{pmatrix}$.

Fiche n° 13. Matrices inversibles

Réponses

13.1 a) .... $\boxed{x(x-1)(x+1)}$

13.1 b) .... $\boxed{2(x-2)(x-3)}$

13.1 c) .... $\boxed{(x-11)(x+11)}$

13.1 d) .... $\boxed{(x-1)(x+1)(x+9)}$

13.1 e) .... $\boxed{(x+2)(x-2)(x^2+9)}$

13.1 f) .... $\boxed{(x-1)(x+1)(2x+5)}$

13.2 a) .... $\boxed{1+\sqrt{3}}$

13.2 b) .... $\boxed{\dfrac{3\sqrt{5}+5}{4}}$

13.3 a) .... $\boxed{\sqrt{14}+2}$

13.3 b) .... $\boxed{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$

13.4 a) .... $\boxed{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$

13.4 b) .... $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$

13.4 c) .... $\boxed{\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}$

13.5 .... $\boxed{\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{b} \\ \dfrac{1}{c} & -\dfrac{a}{bc} \end{pmatrix}}$

13.6 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}}$

13.6 b) .... $\boxed{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -\dfrac{3}{2} & -\dfrac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

13.7 .... $\boxed{\text{Non}}$

13.8 a) .... $\boxed{2\mathrm{I}_3}$

13.8 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}(A-\mathrm{I}_3)}$

13.8 c) .... $\boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{-3}{2} & \frac{-5}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$

13.9 a) .... $\boxed{\begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{-4}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{7}{3} & \frac{-4}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}}$

13.9 b) .... $\boxed{\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}}$

13.10 a) .... $\boxed{A}$

13.10 b) .... $\boxed{\text{non}}$

13.11 a) .... $\boxed{\begin{pmatrix} 4x-2y+z \\ 2x-y+2z \\ -x+2y+2z \end{pmatrix}}$

13.11 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}$

13.11 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}}$

13.11 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}$

13.11 e) .... $\boxed{\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}}$

13.12 .... $\boxed{\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}}$

13.13 a) .... $\boxed{(a^2+b^2)\,\mathrm{I}_2}$

13.13 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{a^2+b^2}Q}$

13.14 .... $\boxed{\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}}$

13.15 a) .... $\boxed{2\mathrm{I}_3}$

13.15 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}Q}$

13.15 c) .... $\boxed{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

13.15 d) .... $\boxed{PD^nP^{-1}}$

13.15 e) .. $\boxed{\begin{pmatrix} \dfrac{3^n+(-1)^n}{2} & \dfrac{(-1)^n-3^n}{2} & \dfrac{3^n-(-1)^n}{2} \end{pmatrix}}$

13.16 a) .... $\boxed{\text{b}}$

13.16 b) .... $\boxed{\text{e}}$

13.16 c) .... $\boxed{\text{e}}$

Corrigés

13.1 d) Le premier terme se factorise par x^2, ce qui donne $x^3+9x^2=x^2(x+9)$, puis $(x+9)$ devient un facteur commun de l'expression de départ.

....

13.1 e) On pose $X=x^2$ puis on résout l'équation $X^2+5X-36$ du second degré en X.

On obtient $x^4+5x^2-36=(x^2-4)(x^2+9)$. Le premier facteur se factorise encore.

....

13.1 f) L'expression $2x^3+5x^2$ peut s'écrire sous la forme $(2x+5)x^2$ et $(2x+5)$ devient un facteur commun de l'expression de départ.

....

13.3 b) On multiplie numérateur et dénominateur par $(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{3})$.

....

13.4 b) On utilise la formule $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ quand $ad-bc\neq 0$.

....

13.5 Pour commencer, remarquons que $b\neq 0$ et $c\neq 0$ car $bc\neq 0$.

Dans cet exercice, n'utilisons pas la formule mentionnée ci-dessus, mais utilisons plutôt la technique des coefficients indéterminés. Posons $A=\begin{pmatrix} a & c \\ b & 0 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$ puis résolvons $AB=\mathrm{I}_2$ d'inconnues les coefficients de B.

L'équation $AB=\mathrm{I}_2$ devient $\begin{pmatrix} aa'+cb' & ac'+cd' \\ a'b & bc' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ce qui donne un système de quatre équations par identification des coefficients. On obtient $a'=0$, $c'=\dfrac{1}{b}$, $b'=\dfrac{1}{c}$ et $d'=-\dfrac{a}{bc}$.

....

13.6 a) Pour cette question, présentons deux techniques possibles pour calculer l'inverse d'une matrice.

Première méthode.

C'est la technique des coefficients indéterminés. On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.
L'égalité $AB = \mathrm{I}_3$ est équivalente au système

$$\begin{cases} 3a+g &= 1 \\ 3b+h &= 0 \\ 3c+i &= 0 \\ 2d &= 0 \\ 2e &= 1 \\ 2f &= 0 \\ \frac{1}{2}g &= 0 \\ \frac{1}{2}h &= 0 \\ \frac{1}{2}i &= 1. \end{cases}$$

On ne le fait pas ici, mais on retrouve ensuite chacun des coefficients de B, en partant de la dernière ligne du système et en remontant. On trouverait $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{-2}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Deuxième méthode.

Une deuxième méthode possible, plus subtile, est de résoudre un système à trois inconnues. L'idée de base est de partir de l'équivalence suivante quand la matrice A est inversible :

$$(E_1) : A \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff (E_2) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Puis, on résout l'équation (E_1). Pour commencer, on réécrit (E_1) sous la forme d'un système, de la façon suivante :

$$A \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3x \quad + z = a \\ \quad 2y \quad = b \\ \quad \frac{1}{2}z = c. \end{cases}$$

On résout ce dernier système d'inconnues x, y et z en fonction des paramètres a, b, c. Après simplification dans les deux dernières équations, on obtient les solutions

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}(a-2c) \\ y = \frac{1}{2}b \\ z = 2c, \end{cases} \text{, ce qu'on écrit} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(a-2c) \\ \frac{1}{2}b \\ 2c \end{pmatrix}.$$

On arrive au cœur de la méthode, qui consiste à remarquer que $\begin{pmatrix} \frac{1}{3}(a-2c) \\ \frac{1}{2}b \\ 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{-2}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Ainsi, on a

$$A \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{-2}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Comme on a aussi

$$A \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

on en déduit que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{-2}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bilan.

En pratique, on préférera la deuxième méthode à la première. Une troisième méthode est exposée plus loin.

13.7 Posons $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Supposer $AB = \mathrm{I}_3$ implique que $4i = 0$ et $5i = 1$, ce qui n'est pas possible, donc A n'est pas inversible.

....

13.8 a) On obtient $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ -3 & -2 & 3 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$, d'où $A^2 - A = 2\mathrm{I}_3$.

....

13.8 b) La matrice $A^2 - A$ vaut $2\mathrm{I}_3$ donc $A \times \dfrac{1}{2}(A - \mathrm{I}_3) = \mathrm{I}_3$, d'où $A^{-1} = \dfrac{1}{2}(A - \mathrm{I}_3)$.

....

13.9 a) La matrice $A^2 + 2A$ vaut $3\,\mathrm{I}_3$ donc $A \times \dfrac{1}{3}(A + 2\mathrm{I}_3) = \mathrm{I}_3$, d'où $A^{-1} = \dfrac{1}{3}(A + 2\mathrm{I}_3)$.

....

13.9 b) La matrice $A^2 - A - 2\,\mathrm{I}_3$ vaut 0_3 donc $A \times \dfrac{1}{2}(A - \mathrm{I}_3) = \mathrm{I}_3$, d'où $A^{-1} = \dfrac{1}{2}(A - \mathrm{I}_3)$.

....

13.10 a) Pour calculer A^3, commençons par calculer A^2 puis multiplions le résultat obtenu par A.

On obtient $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, puis $A^3 = A$.

....

13.10 b) Si A était inversible, alors on aurait $A^3 \times A^{-1} = A^2 \times A \times A^{-1} = A^2 \times \mathrm{I}_3 = A^2$ et $A \times A^{-1} = \mathrm{I}_3$.

Or, on a calculé précédemment A^3 et trouvé $A^3 = A$. Donc on obtient $A^2 = \mathrm{I}_3$. Or, par calcul direct on peut vérifier que $A^2 \neq \mathrm{I}_3$. On en conclut que A est non inversible.

....

13.11 b) L'équation $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est équivalente à $\begin{pmatrix} 4x - 2y + z \\ 2x - y + 2z \\ -x + 2y + 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ce qui, par identification des coefficients, est équivalent au système

$$\begin{cases} 4x - 2y + z = 1 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ -x + 2y + 2z = 0. \end{cases}$$

Pour résoudre ce système, on peut isoler y dans la deuxième équation et substituer y dans les deux autres. La fin de la résolution se fait ensuite aisément.

....

13.11 e) Nous avons résolu aux questions précédentes trois équations dont les membres de droite sont chacune des trois colonnes de la matrice identité :

$$A \times \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \times \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \times \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

En juxtaposant les 3 solutions obtenues aux questions précédentes, on obtient une matrice $B = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

On vérifie alors, par produit matriciel, que $AB = \mathrm{I}_3$.

Remarque.
Cette méthode fonctionne de manière générale. Il s'agit donc d'une troisième méthode du calcul de l'inverse.

....

13.12 Pour résoudre le système, on peut isoler x dans la première équation puis le remplacer dans les deux autres. On obtient

$$\begin{cases} x & = & a+y-z \\ a+y-z+2y+z & = & b \\ a+y-z+y+2z & = & c. \end{cases}$$

Après simplification dans les deux dernières équations, on obtient un système équivalent :

$$\begin{cases} x & = & a+y-z \\ y & = & \dfrac{1}{3}(b-a) \\ z & = & c-a-2y \end{cases}$$

On remplace y par sa valeur dans la dernière équation pour obtenir z puis on remplace y et z dans la première pour obtenir x :

$$\begin{cases} x & = & a+b-c \\ y & = & \frac{1}{3}(-a+b) \\ z & = & \frac{1}{3}(-a-2b+3c). \end{cases}$$

Or, si A inversible, on a $A\times\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\times\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. On en déduit que $A^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

....

13.13 b) On a $PQ = (a^2+b^2)\mathrm{I}_2$. Si $(a,b)\neq(0,0)$ alors $(a^2+b^2)\neq 0$, d'où P est inversible et $P^{-1} = \dfrac{1}{a^2+b^2}Q$.

....

13.15 d) On pourrait effectuer une démonstration par récurrence. L'hérédité utilise le fait que

$$PD^nP^{-1}\times PDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$

....

13.15 e) La matrice D étant diagonale, sa puissance se calcule aisément : on a $D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

....

13.16 a) Voici une explication informelle. Dans une multiplication de deux matrices, on associe les lignes de la première aux colonnes de la seconde. Pour conserver le même résultat, une transformation sur les lignes de la première doit être associée à une transformation sur les colonnes de la seconde.

Ici, l'échange sur les lignes d'une matrice entraîne le même échange sur les colonnes de son inverse.

....

13.16 b) Pour compenser une multiplication par 2, on multiplie par $\frac{1}{2}$. L'action effectuée sur une ligne de la matrice aura son action compensatrice sur la colonne correspondante de l'inverse.

....

Fiche nº 14. Congruences

Réponses

14.1 a) .... $\boxed{1}$

14.1 b) .... $\boxed{3}$

14.2 a) .... $\boxed{5^6}$

14.2 b) .... $\boxed{7^{-4}}$

14.2 c) .... $\boxed{3^{34}}$

14.2 d) ..... $\boxed{(-4)^{-15}}$

14.2 e) ...... $\boxed{(-3)^{-6}}$

14.2 f) .... $\boxed{4^{210}}$

14.3 .... $\boxed{\dfrac{1}{3}}$

14.4 a) . $\boxed{1 \text{ modulo } 2}$

14.4 b) . $\boxed{2 \text{ modulo } 5}$

14.4 c) .. $\boxed{4 \text{ modulo } 7}$

14.4 d) $\boxed{1 \text{ modulo } 11}$

14.5 a) . $\boxed{4 \text{ modulo } 7}$

14.5 b) . $\boxed{2 \text{ modulo } 7}$

14.5 c) .. $\boxed{6 \text{ modulo } 7}$

14.6 a) $\boxed{1 \text{ modulo } 11}$

14.6 b) $\boxed{9 \text{ modulo } 10}$

14.7 a) .... $\boxed{4}$

14.7 b) .... $\boxed{7}$

14.8 a) .... $\boxed{4}$

14.8 b) .... $\boxed{4}$

14.8 c) .... $\boxed{2}$

14.9 a) .... $\boxed{3}$

14.9 b) .... $\boxed{x \equiv 4\ [5]}$

14.10 a) .... $\boxed{4}$

14.10 b) ... $\boxed{x \equiv 4\ [5]}$

14.11 a) .... $\boxed{5}$

14.11 b) ... $\boxed{x \equiv 6\ [7]}$

14.11 c) .... $\boxed{7}$

14.11 d) ... $\boxed{x \equiv 8\ [9]}$

14.12 a) .... $\boxed{9}$

14.12 b) .... $\boxed{6}$

14.12 c) .... $\boxed{6}$

14.12 d) .... $\boxed{9}$

14.12 e) .... $\boxed{8}$

14.13 .... $\boxed{1}$

14.14 .... $\boxed{3}$

14.15 .... $\boxed{0}$

14.16 .... $\boxed{0}$

14.17 a) .... $\boxed{6}$

14.17 b) ... $\boxed{n \equiv 0\ [6]}$

14.18 a) .... $\boxed{4}$

14.18 b) ... $\boxed{n \equiv 0\ [4]}$

Corrigés

14.1 a) On a $115 = 6 \times 19 + 1$, donc le reste dans la division de 115 par 6 est 1.

14.1 b) On a $115 = 7 \times 16 + 3$, donc le reste dans la division de 115 par 7 est 3.

14.2 c) On a $(3^6)^7 \times 3^{-8} = 3^{42} \times 3^{-8} = 3^{34}$.

14.2 d) On a $(-4)^5 \times ((-4)^2)^{-10} = (-4)^5 \times (-4)^{-20} = (-4)^{-15}$.

14.2 e) On a $\dfrac{(-3)^6 \times (-3)^{-5}}{(-3)^7} = \dfrac{(-3)^1}{(-3)^7} = (-3)^{-6}$.

14.2 f) On a $((4^5)^6)^7 = (4^{5\times 6})^7 = (4^{30})^7 = 4^{30\times 7} = 4^{210}$.

14.3 On a $4 - \dfrac{2}{14} = 4 - \dfrac{1}{7} = \dfrac{27}{7}$. Donc, $\dfrac{\dfrac{81}{63}}{4 - \dfrac{2}{14}} = \dfrac{\dfrac{81}{63}}{\dfrac{27}{7}} = \dfrac{81}{63} \times \dfrac{7}{27} = \dfrac{9 \times 9}{9 \times 7} \times \dfrac{7}{9 \times 3} = \dfrac{1}{3}$.

14.4 a) On a $3^2 = 4 \times 2 + 1$. Donc $3^2 \equiv 1\ [2]$.

14.4 b) On a $3^3 = 27 = 5 \times 5 + 2$. Donc $3^3 \equiv 2\ [5]$.

14.4 c) On a $3^2 = 9 \equiv 2$ [7]. Donc, $3^4 = (3^2)^2 \equiv 2^2$ [7]. Donc, $3^4 \equiv 4$ [7].

14.4 d) On a $3^2 = 9 \equiv -2$ [11]. Donc, $3^4 = (3^2)^2 \equiv (-2)^2$ [11], donc $3^4 \equiv 4$ [11]. Donc, $3^5 = 3^4 \times 3 \equiv 4 \times 3$ [11]. Donc, $3^5 \equiv 12$ [11] et donc $3^5 \equiv 1$ [11].

14.5 a) On a $3^3 = 27 = 3 \times 7 + 6$. Donc, $3^3 \equiv 6[7] \equiv -1[7]$. Donc, $3^{10} = (3^3)^3 \times 3 \equiv (-1)^3 \times 3[7] \equiv -3[7] \equiv 4[7]$.

14.5 b) On a $3^{10} \equiv -3[7]$. Donc $3^{20} \equiv (-3)^2[7] \equiv 9[7] \equiv 2[7]$.

14.5 c) On a $3^3 \equiv -1[7]$. Donc $3^{45} = (3^3)^{15} \equiv (-1)^{15}[7] \equiv -1[7] \equiv 6[7]$.

14.6 a) On a $12 \equiv 1$ [11]. Donc $12^7 \equiv 1^7$ [11] $\equiv 1$ [11].

14.6 b) On a $99 \equiv -1$ [10]. Donc $99^5 \equiv (-1)^5$ [10] $\equiv -1$ [10] $\equiv 9$ [10].

14.7 a) On a $12 \equiv 2$ [5] et $2^4 = 16 = 3 \times 5 + 1 \equiv 1$ [5]. Donc, on a $12^{14} \equiv 2^{14}$ [5] $\equiv (2^4)^3 \times 2^2$ [5] $\equiv 1^3 \times 4$ [5] $\equiv 4$ [5].

14.7 b) On vérifie que $3^4 = 81 \equiv 1$ [10]. On a $103 = 10 \times 10 + 3$, donc : $103 \equiv 3$ [10].

Donc $103^{15} \equiv 3^{15}$ [10] $\equiv (3^4)^3 \times 3^3$ [10] $\equiv 1^3 \times 27$ [10] $\equiv 7$ [10].

14.8 a) On a $3^3 = 27 \equiv -1[7]$ et $3^{100} = (3^3)^{33} \times 3$. Donc $3^{100} \equiv (-1)^{33} \times 3[7] \equiv -3[7] \equiv 4[7]$.

14.8 b) On a $524 = 5 \times 104 + 4$. Donc $524 \equiv 4$ [5] $\equiv -1$ [5]. Donc $524^{425} \equiv (-1)^{425}$ [5] $\equiv -1$ [5] $\equiv 4$ [5].

14.8 c) On a $3 \equiv 3[11]$, $3^2 \equiv 9[11]$, $3^3 \equiv 27[11] \equiv 5[11]$ et $3^4 \equiv 15[11] \equiv 4[11]$, $3^5 \equiv 12[11] \equiv 1[11]$.

D'où $3^{1\,515} = (3^5)^{303} \equiv 1^{303}[11] \equiv 1[11]$. De même $4^5 \equiv 1[11]$. Donc, $4^{1\,515} \equiv 1[11]$. D'où $3^{1\,515} + 4^{1\,515} \equiv 2[11]$.

14.9 a) Après essai avec 1, on trouve que $3 \times 2 \equiv 1$ [5] : un inverse modulo 5 de 2 est 3.

14.9 b) On a les équivalences $2x \equiv 3$ [5] $\iff$ $3 \times 2x \equiv 3 \times 3$ [5] $\iff$ $x \equiv 9$ [5] $\iff$ $x \equiv 4$ [5].

14.10 a) Après essai avec 1, 2 et 3, on trouve que $4 \times 4 \equiv 1$ [5] : un inverse modulo 5 de 4 est 4.

14.10 b) On a les équivalences $9x \equiv 1$ [5] $\iff$ $4x \equiv 1[5]$ $\iff$ $4 \times 4x \equiv 4$ [5] $\iff$ $x \equiv 4$ [5].

14.11 a) Après essai avec 1, 2, 3 et 4, on trouve que $3 \times 5 \equiv 1$ [7] : un inverse modulo 7 de 3 est 5.

14.11 c) Après essai avec 1, 2, 3, 4, 5 et 6, on trouve que $4 \times 7 \equiv 1$ [9] : un inverse modulo 9 de 4 est 7.

14.12 a) On a $7^2 = 49 \equiv -1[10]$. Donc $7^{1\,010} = (7^2)^{505} \equiv (-1)^{505}$ [10] $\equiv -1[10] \equiv 9$ [10].

14.12 b) On a $92 \equiv 2\ [10]$. Donc $92^5 \equiv 2^5\ [10] \equiv 32\ [10] \equiv 2\ [10]$.
Donc $92^{32} = (92^5)^5 \times 92^5 \times 92^2 \equiv 2^5 \times 2 \times 2^2\ [10] \equiv 16\ [10] \equiv 6\ [10]$: le dernier chiffre de 92^{32} est 6.

14.12 c) On a $204 \equiv 4\ [10]$. Donc $204^5 \equiv 4^5\ [10] \equiv 1024\ [10] \equiv 4\ [10]$. Donc $204^{25} \equiv 4\ [10]$.
Or, $204^{402} = (204^{25})^{16} \times 204^2$. On a donc

$$204^{402} \equiv 4^{16} \times 4^2\ [10] \equiv (4^5)^3 \times 4 \times 4^2\ [10] \equiv 4^3 \times 4 \times 4^2\ [10] \equiv 4^5 \times 4\ [10] \equiv 4^2\ [10] \equiv 16\ [10] \equiv 6\ [10].$$

Ainsi, le dernier chiffre de 204^{402} est 6.

14.12 d) On a $919 \equiv 9\ [10] \equiv -1\ [10]$. Donc $919^{199} \equiv (-1)^{199}\ [10] \equiv -1\ [10]$ car 199 est impair.

Donc $919^{199} \equiv 9\ [10]$: le dernier chiffre de 919^{199} est 9.

14.12 e) *Dans cette solution, toutes les congruences sont faites modulo* 10*, ce qui sera sous-entendu.*
Comme $4\ 242 \equiv 2$, il suffit de calculer $2^{4\,343}$ modulo 10.
Première solution. On a $2^5 = 32 \equiv 2$. Donc, $2^{25} = (2^5)^5 \equiv 2^5 \equiv 2$.
Or, $4\ 343 = 173 \times 25 + 18$. Donc, on a $2^{4\,343} = (2^5)^{173} \times 2^{18} \equiv 2^{173} \times 2^{18}$.
De plus, on a $18 = 5 \times 3 + 3$ donc $2^{18} = (2^5)^3 \times 2^3 \equiv 2^3 \times 2^3 = 2^6 = 64 \equiv 4$.
Et, on a $173 = 25 \times 6 + 23$ donc $2^{173} = (2^{25})^6 \times 2^{23} \equiv 2^6 \times 2^{23}$.
On a $2^6 = 64 \equiv 4$. Comme $23 = 5 \times 4 + 3$, on a $2^{23} = (2^5)^4 \times 2^3 \equiv 2^4 \times 2^3 = 2^7 = 128 \equiv 8$.
Donc, $2^{173} \equiv 2^6 \times 2^{23} \equiv 4 \times 8 = 32 \equiv 2$. Donc, $2^{173} \times 2^{18} \equiv 2 \times 4 = 8$.
Seconde solution. On a $2^3 = 8$ et $2^7 = 128 \equiv 8$. On en déduit (par récurrence) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^{4n+3} \equiv 8$.
Or, on a $4\ 343 = 4 \times 1\ 085 + 3$. Donc, $4\ 242^{4\,343} \equiv 8$.

14.13 On a $5^2 = 25 \equiv -1\ [13]$. Donc $5^4 \equiv 1\ [13]$. D'où $5^{4n} = (5^4)^n \equiv 1\ [13]$. Autrement dit, pour tout n entier naturel, le reste de la division euclidienne de 5^{4n} par 13 est 1.

14.14 On a $3^2 \equiv -1[10]$. Donc $3^{4n+1} = (3^2)^{2n} \times 3 \equiv (-1)^{2n} \times 3\ [10] \equiv 3\ [10]$: le dernier chiffre de 3^{4n+1} est 3.

14.15 On a $3 \equiv -2$ donc $3^{4n+3} \equiv (-2)^{4n+3}\ [5] \equiv -2^{4n+3}\ [5]$ car $4n+3$ est impair. Donc, $2^{4n+3} + 3^{4n+3} \equiv 0\ [5]$.
Autrement dit, $a = 0$ convient.

14.16 On a $4^3 = 64 \equiv 9\ [11] \equiv 3^2\ [11]$. Donc

$$4^{3n+5} \equiv (4^3)^n \times 4^3 \times 4^2\ [11] \equiv 3^{2n} \times 9 \times 16\ [11] \equiv 3^{2n} \times 144\ [11] \equiv 3^{2n}\ [11] \text{ car } 144 \equiv 1\ [11].$$

En plus, $3^5 = 243 \equiv 1\ [11]$. Donc, $3^{2n+10} \equiv 3^{2n} \times (3^5)^2\ [11] \equiv 3^{2n}\ [11]$. On en déduit donc $4^{3n+5} - 3^{2n+10} \equiv 0\ [11]$.

14.17 b) On a les équivalences : $3^n - 1$ est divisible par 7 $\iff$ $3^n - 1 \equiv 0[7]$ $\iff$ $3^n \equiv 1\ [7]$.

Par division euclidienne de n par 6, fixons $k \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant r < 6$ tels que $n = 6k + r$. On a $3^n = (3^6)^k \times 3^r \equiv 3^r\ [7]$.
Puis, on vérifie que $3^n \equiv 1\ [7] \iff 3^r \equiv 1\ [7] \iff r = 0$. Ainsi, $3^n - 1$ est divisible par 7 $\iff$ $n \equiv 0\ [6]$.

14.18 b) On a les équivalences : $2^n - 1$ est divisible par 5 $\iff$ $2^n - 1 \equiv 0\ [5]$ $\iff$ $2^n \equiv 1\ [5]$.

Par division euclidienne de n par 4, on fixe $k \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant r < 4$ tels que $n = 4k + r$. On a $2^n = (2^4)^k \times 2^r \equiv 2^r\ [5]$.
Puis, on a $2^n \equiv 1[5] \iff 2^r \equiv 1\ [5] \iff r = 0$. Ainsi, $2^n - 1$ est divisible par 5 $\iff$ $n \equiv 0\ [4]$.

Fiche n° 15. PGCD

Réponses

15.1 a) $\boxed{-\dfrac{13}{48}}$

15.1 b) $\boxed{\dfrac{6}{11}}$

15.2 a) $\boxed{\dfrac{3x^2-5x+1}{x^3}}$

15.2 b) $\boxed{\dfrac{11x^2+2x-1}{2(x-2)(5x+3)}}$

15.3 a) $\boxed{\{1,2,3,4,5,6,10,12,15,20,30,60\}}$

15.3 b) $\boxed{\{1,2,3,4,6,8,12,16,24,32,48,96\}}$

15.4 a) $\boxed{2^2\times 3^2}$

15.4 b) $\boxed{2\times 3^2\times 5}$

15.4 c) $\boxed{18}$

15.5 a) $\boxed{2^2\times 3\times 5^2}$

15.5 b) $\boxed{2\times 3^4\times 5}$

15.5 c) $\boxed{30}$

15.6 a) $\boxed{2\times 3^2\times 5\times 17}$

15.6 b) $\boxed{2\times 5\times 7\times 13}$

15.6 c) $\boxed{10}$

15.7 a) $\boxed{2\times 3^2\times 5^2}$

15.7 b) $\boxed{2\times 3^2\times 17}$

15.7 c) $\boxed{18}$

15.8 $\boxed{105}$

15.9 a) $\boxed{506}$

15.9 b) $\boxed{21}$

15.10 a) $\boxed{\text{oui}}$

15.10 b) $\boxed{\text{oui}}$

15.11 a) $\boxed{(34,11)}$

15.11 b) $\boxed{(33,-8)}$

15.12 $\boxed{(2,-3)}$

15.13 a) $\boxed{-2}$

15.13 b) $\boxed{x\equiv -1\ [15]}$

15.14 a) $\boxed{-16}$

15.14 b) $\boxed{x\equiv 30\ [55]}$

15.15 a) $\boxed{-9}$

15.15 b) $\boxed{x\equiv 11\ [25]}$

15.16 a) $\boxed{5}$

15.16 b) $\boxed{7}$

15.17 a) $\boxed{(-5,1)}$

15.17 b) $\boxed{(-6,1)}$

15.17 c) $\boxed{(30,-6,1)}$

Corrigés

15.1 b) On a $\left(\dfrac{25}{15}-\dfrac{11}{12}\right)\times\dfrac{8}{11}=\left(\dfrac{5}{3}-\dfrac{11}{12}\right)\times\dfrac{8}{11}=\left(\dfrac{20}{12}-\dfrac{11}{12}\right)\times\dfrac{8}{11}=\dfrac{9}{12}\times\dfrac{8}{11}=\dfrac{9\times 2}{3\times 11}=\dfrac{18}{33}=\dfrac{6}{11}$.

15.2 a) On a $\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{9x-1}{x^3}=\dfrac{3\times x^2}{x\times x^2}+\dfrac{4\times x}{x^2\times x}-\dfrac{9x-1}{x^3}=\dfrac{3x^2+4x-9x+1}{x^3}=\dfrac{3x^2-5x+1}{x^3}$.

15.2 b) On a

$$\begin{aligned}\frac{3x+1}{2x-4}-\frac{2x-1}{5x+3}&=\frac{(3x+1)(5x+3)-(2x-1)(2x-4)}{(2x-4)(5x+3)}=\frac{15x^2+14x+3-4x^2+10x-4}{2(x-2)(5x+3)}\\&=\frac{11x^2+24x-1}{2(x-2)(5x+3)}.\end{aligned}$$

15.4 c) Comme $36=2^2\times 3^2$ et $90=2\times 3^2\times 5$, on obtient $\mathrm{PGCD}(36,90)=2\times 3\times 3=18$.

15.5 a) On a $300=3\times 100=3\times 10^2=2^2\times 3\times 5^2$.

15.5 b) On a $810=10\times 81=2\times 5\times 3^4=2\times 3^4\times 5$.

15.5 c) On obtient donc $\mathrm{PGCD}(300, 810) = 2 \times 3 \times 5 = 30$.

15.6 a) On a $1\ 530 = 34 \times 45 = 2 \times 17 \times 5 \times 9 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 17$.

15.6 b) On a $910 = 35 \times 26 = 2 \times 5 \times 7 \times 13$.

15.7 a) On a $450 = 5 \times 9 \times 10 = 2 \times 3^2 \times 5^2$.

15.7 b) On a $306 = 17 \times 18 = 17 \times 2 \times 9 = 2 \times 3^2 \times 17$.

15.8 Comme 15 divise a, fixons $k \in \mathbb{N}$ tel que $a = 15k$.

Comme $90 < a < 120$, on a $90 < 15k < 120$ et donc $6 < k < 8$. Donc, on a $k = 7$.

15.9 a) On a $1\ 518 = 3 \times 506 + 0$. D'où $\mathrm{PGCD}(1\ 518, 506) = 506$.

15.9 b) On a $6\ 069 = 13 \times 441 + 336$; puis $441 = 1 \times 336 + 105$; puis $336 = 3 \times 105 + 21$; puis $105 = 5 \times 21 + 0$.

Donc, $\mathrm{PGCD}(441, 6\ 069) = 21$.

15.10 a) On a $11\ 011 = 38 \times 285 + 181$; puis $285 = 1 \times 181 + 104$; puis $181 = 1 \times 104 + 67$; puis $104 = 1 \times 67 + 37$; puis $67 = 1 \times 37 + 30$; puis $37 = 1 \times 30 + 7$; puis $30 = 4 \times 7 + 2$; puis $7 = 3 \times 2 + 1$; puis $2 = 2 \times 1 + 0$.

Donc, $\mathrm{PGCD}(11\ 011, 285) = 1$.

15.10 b) On a $7\ 875 = 22 \times 352 + 131$; puis $352 = 2 \times 131 + 90$; puis $131 = 1 \times 90 + 41$; puis $90 = 2 \times 41 + 8$; puis $41 = 5 \times 8 + 1$; puis $8 = 8 \times 1 + 0$.

Donc, $\mathrm{PGCD}(7\ 875, 352) = 1$.

15.11 a) On effectue l'algorithme d'Euclide : on a $105 = 3 \times 34 + 3$; puis $34 = 11 \times 3 + 1$.

On remonte l'algorithme d'Euclide pour trouver un couple d'entiers de Bézout. On a $1 = 34 - 11 \times 3$; puis $3 = 105 - 3 \times 34$. Donc, on a $1 = 34 - 11(105 - 3 \times 34) = 34 + 33 \times 34 - 11 \times 105 = 34 \times 34 - 105 \times 11$.

15.11 b) On effectue l'algorithme d'Euclide : on a $210 = 4 \times 51 + 6$; puis $51 = 8 \times 6 + 3$.

On remonte ensuite l'algorithme d'Euclide pour trouver un couple d'entiers de Bézout. On a $3 = 51 - 8 \times 6$; puis $6 = 210 - 4 \times 51$. Donc, on a $3 = 51 - 8 \times (210 - 4 \times 51) = 51 + 32 \times 51 - 8 \times 210 = 51 \times 33 - 210 \times 8$.

15.12 On a $2a - 3b = 2(3n + 2) - 3(2n + 1) = 6n + 4 - 6n - 3 = 1$.

15.13 a) Pour trouver un inverse de 7 modulo 15, on cherche une relation de Bézout : on a $15 - 2 \times 7 = 1$.

Donc, $-2 \times 7 \equiv 1[15]$. Autrement dit, -2 est un inverse de 7 modulo 15.

15.13 b) Pour résoudre l'équation $7x \equiv 8\ [15]$, utilise un inverse de 7 modulos 15. On a les équivalences

$$7x \equiv 8\ [15] \iff -2 \times 7 \times x \equiv -16\ [15] \iff x \equiv -16\ [15] \equiv -1\ [15].$$

....

15.14 a) Pour trouver un inverse de 7 modulo 15, on cherche une relation de Bézout à l'aide de l'algorithme d'Euclide. On a $55 = 2 \times 24 + 7$; puis $24 = 3 \times 7 + 3$; puis $7 = 2 \times 3 + 1$.

Donc, en remontant l'algorithme d'Euclide, on a $1 = 7 - 2 \times 3$; puis $3 = 24 - 3 \times 7$; puis $7 = 55 - 2 \times 24$. D'où $3 = 24 - 3(55 - 2 \times 24) = 7 \times 24 - 3 \times 55$. Et $1 = 55 - 24 \times 2 - 2 \times (7 \times 24 - 3 \times 55) = 7 \times 55 - 16 \times 24$.

Ainsi, -16 est un inverse de 24 modulo 55.

....

15.15 a) Pour trouver un inverse de 11 modulo 25, on cherche une relation de Bézout à l'aide de l'algorithme d'Euclide. On a $25 = 2 \times 11 + 3$; puis $11 = 3 \times 3 + 2$; puis $3 = 1 \times 2 + 1$.

En remontant l'algorithme d'Euclide, on a $1 = 3 - 1 \times 2$; puis $2 = 11 - 3 \times 3$; puis $3 = 25 - 2 \times 11$.

D'où $2 = 11 - 3(25 - 2 \times 11) = 7 \times 11 - 3 \times 25$ et $1 = 25 - 2 \times 11 - 1 \times (7 \times 11 - 3 \times 25) = 4 \times 25 - 9 \times 11$.

Ainsi, -9 est un inverse de 11 modulo 25.

....

15.16 a) On calcule (par exemple grâce à une décompoisition en nombres premiers) : $\mathrm{PGCD}(30, 105) = 15$.

Donc, on a $\mathrm{PGCD}(30, 105, 245) = \mathrm{PGCD}(15, 245)$. On calcule ce dernier PGCD, par exemple grâce à une décomposition en nombres premiers. On trouve $\mathrm{PGCD}(30, 105, 245) = \mathrm{PGCD}(15, 245) = 5$.

....

15.16 b) Grâce à l'algorithme d'Euclide, on calcule $\mathrm{PGCD}(1\ 365, 1\ 925) = 35$, puis $\mathrm{PGCD}(35, 273) = 7$.

On en déduit $\mathrm{PGCD}(1\ 365, 1\ 925, 273) = \mathrm{PGCD}(35, 273) = 7$.

....

15.17 a) On effectue l'algorithme d'Euclide : on a $231 = 5 \times 42 + 21$. D'où $21 = -5 \times 42 + 1 \times 231$.

....

15.17 b) On effectue l'algorithme d'Euclide : on a $133 = 6 \times 21 + 7$. D'où $7 = -6 \times 21 + 1 \times 133$.

....

15.17 c) On a $21 = -5 \times 42 + 1 \times 231$ et $7 = -6 \times 21 + 1 \times 133$.

Donc,

$$7 = -6 \times (-5 \times 42 + 1 \times 231) + 1 \times 133 = 30 \times 42 - 6 \times 231 + 1 \times 133.$$

....