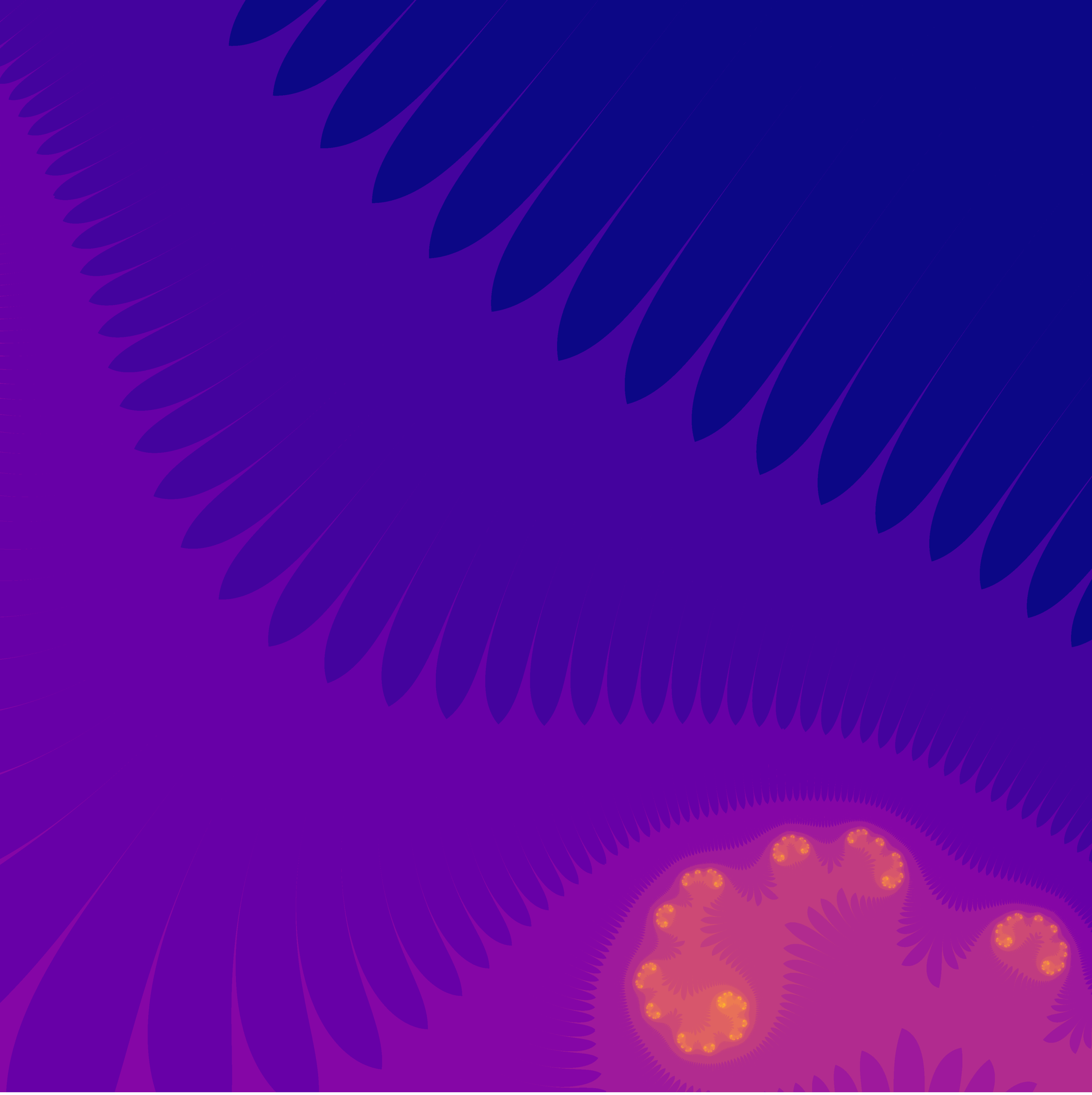


Cahier de calcul

échauffements, entraînements et approfondissements

Terminale Spécialité

1515 calculs

Page web du *Cahier de calcul*,
dernières versions

Ce cahier de calcul a été écrit collectivement par une équipe composée de professeurs en classes préparatoires et de professeurs en lycée.

Conception et coordination

Colas Bardavid

Aide à la coordination

Jérôme Trochon

Équipe des auteurs

Colas Bardavid
Romain Basson
Ménard Bourgade
Alain Camanes
Carole Chabanier
Mathilde Colin de Verdière
Geneviève Davion
Éliane Gayout
Christopher Goyet
Hélène Gros
Benjamin Groux
Jason Lapeyronnie
François Laurent
Steven Lu
Lionel Magnis
Quang-Thai Ngo
Anthony Ollivier
Alan Pellé
Nicolas Popoff
Jean-Philippe Spriet
Jérôme Trochon

Relecture

Rémy Allou, Van Bien Bui, Thibaut Deheuvels, Anne-Lucie Delvallez, Pierre Cauchois, Anne Foubert, Jérôme Gärtner, Éliane Gayout, William Gregory, Jonathan Harter, Marie Hézard, Sandrine et Hadrien Larôme, Landry Lavoine, Blaise Le Meaux, Arthur Meyer, Pedro Montoya, Inès Nebzry, Sébastien Pellerin

Illustrations

Le pictogramme de l'horloge a été créé par Ralf Schmitzer (The Noun Project).
Le pictogramme de la roue crantée a été créé par AFY Studio (The Noun Project).
Le pictogramme de la calculatrice a été créé par Sita Raisita (The Noun Project).
Le pictogramme du bateau a été créé par Mello (The Noun Project).

L'illustration de la couverture a été réalisée par Colas Bardavid, sur une idée de Yassine Patel, d'après les biomorphes de Clifford Pickover. Elle illustre les propriétés de certaines fonctions.

Version 1.5.2 — 2 août 2025

Sommaire

Équations différentielles

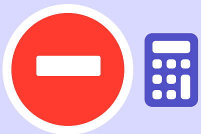
Intégration

Combinatoire et dénombrement

Probabilités

Géométrie dans l’espace

Dans tout ce livre, l'usage de la calculatrice
est strictement et formellement interdit.



Utiliser une calculatrice pour les exercices serait tout simplement absurde :
le but même de ce livre est de fournir à l'étudiant
un outil pour s'entraîner au calcul.

Introduction

Le calcul

Le calcul a parfois été délaissé par l'école.

On lui reprochait son côté rébarbatif, on disait que les calculatrices pouvaient s'en charger.
On lui préférait les activités de recherche, plus ludiques, plus intéressantes.
On déconseillait de donner aux élèves des fiches de calcul.

Certes, savoir chercher est essentiel ; mais, tout de même, ce faisant, on a formé des élèves à qui il manquait quelque chose de fondamental.

Les vertus du calcul

Le calcul a de nombreuses qualités, de nombreuses vertus.

- Le calcul est indispensable aux mathématiques.

  Sans calcul, les mathématiques seraient un paysage inerte, sans mouvement.
  C'est le calcul qui permet de transformer une expression $A(x)$ en une autre expression $B(x)$.
  C'est le calcul qui permet de montrer que deux quantités sont égales, que deux choses sont identiques.
  Quand on explore une situation mathématique, l'intuition est la boussole, c'est elle qui nous indique la direction à prendre. Mais c'est le calcul qui permet d'avancer, de passer d'une étape à la suivante.

- Le calcul permet de se familiariser avec les objets mathématiques compliqués.

  Certains objets mathématiques sont difficiles à appréhender. Qu'on pense par exemple aux vecteurs. On peut être dérouté la première fois qu'on doit raisonner avec les vecteurs. Dans ce cas, il est conseillé de beaucoup calculer avec les vecteurs. À force d'en faire, on s'y habitue ; à la fin, on n'est plus dérouté.

- Le calcul donne des idées.

  Face à un problème mathématique, être fort en calcul est très utile. On imagine rapidement ce qui va se passer, on peut prévoir « de tête » la direction globale du calcul et donc prendre une bonne direction.

- Le calcul est comme un échauffement mathématique.
- Le calcul est *a priori* une activité sans piège.

  Il suffit de suivre les règles méthodiquement.

- Le calcul peut même être ludique !

L'intérêt du calcul

C'est très simple.

Si vous voulez bien comprendre les mathématiques, le calcul est indispensable.

Quand on apprend à jouer au piano, faire des gammes est, de même, indispensable. Elles permettent de délier les doigts, elles permettent d'ancrer dans les mains des habitudes, des réflexes. Sans gamme, certains morceaux sont inabordables.

De même, la pratique du calcul permet de mieux comprendre les mathématiques.

Le cahier de calcul

Le cahier de calcul est l'outil idéal pour vous entraîner au calcul, **en toute autonomie**.

Il a été conçu par une large équipe de professeurs de mathématiques, en lycée et en classes préparatoires, tous soucieux de vous apporter **l'aide et les outils pour réussir**.

Pour profiter totalement de cet outil, **pratiquez régulièrement** : nous vous conseillons de faire (au moins) quinze minutes de calcul chaque jour.

Comment est-il organisé ?

Trois parties pour chaque fiche

Chaque fiche du cahier de calcul est divisée en trois parties :

- une première partie de calculs généraux, destinée à **vous entraîner sur les fondamentaux** ;
- la partie principale, qui porte sur le thème de **la fiche en question** ;
- une dernière partie, composée de **calculs plus avancés**, qui est prévue pour ceux qui veulent aller plus loin.

Des pictogrammes

Le temps de résolution de chaque calcul (incluant la longueur et la technicité du calcul) est symbolisé par :

- des bateaux ⛵ pour les exercices de calculs généraux ;
- des horloges 🕓 pour les exercices de la partie principale ;
- des roues crantées ⚙ pour les exercices plus avancés.

Des cadres pour les réponses

Vous êtes invité à écrire directement les réponses dans les cadres prévus à cet effet.

Une erreur ? Une remarque ?

Si jamais vous voyez une erreur d'énoncé ou de corrigé, ou bien si vous avez une remarque à faire, n'hésitez pas à nous écrire à l'adresse `cahierdecalcul@gmail.com`*. Merci en nous contactant de donner l'identifiant de la fiche, écrit en gris clair en haut à gauche de chaque fiche.*

Conventions suivies dans ce livre

Polynômes

Dans ce cahier de calcul, nous avons choisi de noter les polynômes avec la lettre « X ».

- Ainsi, au lieu de considérer, par exemple, la fonction
$$t \longmapsto 5t^4 - 3t^3 + 25t^2 + 10t - 1,$$
on considérera le polynôme
$$5X^4 - 3X^3 + 25X^2 + 10X - 1.$$
- On notera généralement les polynômes P ou Q. Par exemple, on peut poser $P = 5X^2 - 3X - 2$.
- Les polynômes peuvent être évalués en un nombre, comme les fonctions.
Ainsi, pour $t \in \mathbb{R}$, on peut considérer $P(t)$.
En reprenant l'exemple précédent, on a
$$P(1) = 5 \times 1^2 - 3 \times 1 - 2 = 0.$$
On dit alors que 1 *est une racine de* P.

Définition des variables

Dans certains exercices, nous avons choisi, par souci de clarté et de concision, de ne pas préciser à quel ensemble appartiennent les variables.

- Par exemple, on pourra demander de simplifier l'expression
$$\frac{2-x}{x+3} - \frac{1-x}{5-x}$$
sans préciser qui est la variable x.
- Dans ce cas, il faudra toujours considérer que la variable x est implicitement définie et appartient au bon ensemble.
- Dans l'exemple précédent, il est sous-entendu que x est un nombre réel différent de -3 et 5.

Bons calculs à vous !

Énoncés

Limites de fonctions

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 1.1

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Simplifier les expressions suivantes.

a) $\dfrac{x^3+x^2}{x}$ ....

c) $\dfrac{x^3+x^2+x^4}{x^2}$ ....

b) $x^3\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}\right)$ ....

Calcul 1.2

Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier les expressions suivantes.

a) $\mathrm{e}^{2x} \times \mathrm{e}^{-x}$ ....

c) $\dfrac{\mathrm{e}^{2x+1}}{\mathrm{e}^{-x}}$ ....

b) $\dfrac{\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{x}}$ ....

d) $\mathrm{e}^{x^2+x+1} \times \mathrm{e}^{-x^2+3x}$ ....

Fractions, polynômes et racines

Calcul 1.3 — Détection de forme indéterminée (I).

Pour chaque expression suivante, dire s'il s'agit d'une forme indéterminée, auquel cas on ne cherchera pas à calculer la limite et on écrira « FI » dans le cadre-réponse ; s'il ne s'agit pas d'une forme indéterminée, on donnera la limite en question.

a) $\mathrm{e}^x - x$, en $+\infty$ ....

c) $\dfrac{\ln(x)}{x}$, en $+\infty$ ....

b) $\mathrm{e}^x - x$, en $-\infty$ ....

d) $\dfrac{\ln(x)}{x}$, en 0^+ ....

Calcul 1.4 — Détection de forme indéterminée (II).

Même exercice.

a) $\dfrac{\cos(x)}{x}$, en 0^+ ....

c) $\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$, en $\dfrac{\pi}{2}^-$ ....

b) $\dfrac{\sin(x)}{x}$, en 0^+ ....

d) $\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$, en $\dfrac{\pi}{2}^+$ ....

Calcul 1.5

Déterminer les limites suivantes.

On mettra en facteur des termes dominants pour lever l'indétermination.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1}{x}$ ....

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3+1}{x^2-x}$ ....

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2-2}{x^2+x}$ ....

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+3}{x^2+x+1}$ ....

Calcul 1.6

Même exercice.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x}}{x+2}$ ....

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^4+3x^3}}{-2x^2+7}$ ....

Calcul 1.7

Déterminer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to0^+} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$ ....

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left((x+2)^2-x^2\right)$ ....

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}}$ ....

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\left(x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2-x(x+1)\right)$

Calcul 1.8

Chercher des facteurs communs afin de simplifier la fraction, pour lever l'indétermination, puis donner la limite des expressions suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$ ....

b) $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1}$ ....

c) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x+2}{x^2-4}$ ....

d) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{2x-1}{4x^2-1}$ ....

Calcul 1.9

Même exercice.

On cherchera au préalable à factoriser les polynômes au numérateur et au dénominateur.

a) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ ....

b) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x^2-x-6}{x^2+2x}$ ....

Calcul 1.10 — Une identité remarquable de degré 3.

En utilisant la formule

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2),$$

valable pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, déterminer les limites suivantes.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1}$ ....

b) $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x+2}$ ....

Calcul 1.11 — En utilisant la quantité conjuguée (I).

On souhaite déterminer la limite de $\sqrt{x^2+1} - x$ en $+\infty$.

a) A-t-on $\sqrt{x^2+1} - x = \dfrac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}$? ....

b) Développer $\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$ ....

c) En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ ....

Calcul 1.12 — En utilisant la quantité conjuguée (II).

En adaptant la technique précédente pour lever l'indétermination, calculer les limites suivantes.

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+x}-x}$ ....

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$ ....

Croissances comparées

Calcul 1.13 — En factorisant (I).

Calculer :

a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^3 e^x$ ....

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - x^8}{x+1}$ ....

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x-7}+3e^x}{e^x+x}$ ....

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+e^{2x}}{e^x+x}$ ....

Calcul 1.14

En posant $X = \dfrac{1}{x}$, déterminer les limites suivantes.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x e^{\frac{1}{x}}$ ....

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^3}$ ....

Calcul 1.15 — En factorisant (II).

Calculer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - \ln(x)$ ....

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\ln(x)}{x-\ln(x)}$ ....

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$ ....

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln(x))^2-7}{3+2\ln(x)}$ ....

Calcul 1.16 — Une limite classique.

Quelle est la limite de $x \mapsto x\ln(x)$ en 0^+ ?

(a) $+\infty$ (b) $-\infty$ (c) 0 (d) 1

....

Calcul 1.17 — Une puissance de puissance.

Pour $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, on définit $a^b = \mathrm{e}^{b\ln(a)}$.

a) Que vaut x^x pour $x = \dfrac{1}{2}$? ....

b) Que vaut x^x pour $x = \dfrac{1}{4}$? ....

c) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$ ....

Calcul 1.18

En mettant en facteur l'exponentielle, déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln(\mathrm{e}^x + 4x) - x)$ ....

Calcul 1.19

a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{\ln(x)} - \ln(x)\right)$ ....

b) En écrivant $x = \mathrm{e}^{\ln(x)}$, en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{\ln(x)}}}{x}$ ....

Autour du taux d'accroissement

Calcul 1.20 — Limites de taux d'accroissement.

Rappelons que si une fonction f est dérivable en a, alors on a $\boxed{\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a).}$

Par exemple, pour déterminer $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$, on introduit $f : x \longmapsto e^x$, et on reconnaît $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$. D'où

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = f'(0) = e^0 = 1.$$

En reconnaissant des taux d'accroissement, déterminer les limites suivantes.

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{x}$ ....

c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$ ....

b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ ....

d) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\ln(x)-\ln(2)}{x-2}$ ....

Calculs plus difficiles

Calcul 1.21 — Autour du taux d'accroissement de l'exponentielle.

On rappelle que $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$. Calculer :

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2} - 1}{x^2}$ ....

c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{x}$ ....

b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2} - 1}{x}$ ....

d) $\lim_{x\to +\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$ ....

Calcul 1.22 — D'autres taux d'accroissement.

En faisant apparaître des taux d'accroissement, déterminer les limites suivantes.

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\ln(1+2x)}$ ....

b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{\ln(1+x)}$ ....

Calcul 1.23 — Une limite farouche.

Déterminer $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^3 + \sqrt{x^4 + 2x^{\frac{7}{2}} + 1}} - \sqrt{x^3 + \sqrt{x^4 + x^{\frac{7}{2}} + 1}}$ ....

Calcul 1.24 — Une limite remarquable ?

On rappelle que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

a) Pour $a \neq 0$ fixé, déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+ax)}{x}$ ....

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} x \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$ ....

Pour $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, on définit a^x en posant $\boxed{a^x = \mathrm{e}^{x\ln(a)}.}$

c) Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$.

Si vous trouvez 1 ou $+\infty$, vous avez faux ! ....

Calcul 1.25 — Avec des formules de trigonométrie (I).

Pour ce calcul, il faut connaître les formules de duplication du sinus et du cosinus.

a) Exprimer $\cos(x)$ en fonction de $\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$ ....

b) En utilisant que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$, en déduire $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{x^2}$ ....

Calcul 1.26 — Avec des formules de trigonométrie (II).

Pour ce calcul, il faut connaître les formules de duplication du sinus et du cosinus.

Déterminer :

a) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin(2x)}{\sin(x)}$ ....

b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos(x)-\sin(x)}{\cos(2x)}$ ....

Réponses mélangées

$+\infty$	$+\infty$	1	1	FI	$+\infty$	3	$+\infty$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$x+1+x^2$	1	oui	
1	$-\infty$	3	2	1	$-\infty$	e^x	1	-1	0	$+\infty$	0	$-\infty$
x^2+1	$+\infty$	e^{2x}	e^{3x+1}	$+\infty$	1	a	$+\infty$	0	$\mathrm{e}^{-7}+3$	12		
$1-2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$	0	x^2+x	-2	c	$+\infty$	2	FI	e	$-\infty$	2		
$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$-\infty$	0	$\dfrac{1}{2}$	$+\infty$	0	$-\dfrac{1}{2}$	1	0	$\dfrac{1}{2}$	$+\infty$	0	$\dfrac{1}{2}$
$\dfrac{1}{4}$	0	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	-2	1	0	$-\dfrac{1}{2}$	$-\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{2}$	$-\infty$	$\dfrac{5}{2}$	FI	e^{4x+1}

► Réponses et corrigés page 154

Limites de suites

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 2.1 — Quelques équations.

Donner la solution dans $\mathbb{R}$ des équations suivantes.

a) $\dfrac{10}{3}x + \dfrac{5}{9} = 0$ ....

b) $\dfrac{3x+2}{-2x+3} = 1$ ....

c) $\dfrac{x+5}{x+2} = \dfrac{2x+5}{2x+1}$ ....

Calcul 2.2 — Quelques inéquations.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

On donnera la solution sous la forme d'un intervalle ou de la réunion de deux intervalles.

a) $\dfrac{2}{7}x - 6 > 0$ ....

b) $(2x-1)(2-3x) \leqslant 0$ ....

c) $\dfrac{2x-12}{1-x} \geqslant 0$ ....

d) $\dfrac{x^2-9}{x} \leqslant 0$ ....

Théorèmes de comparaison

Calcul 2.3 — Autour de $(-1)^n$.

Pour chacune des suites définies par les expressions suivantes, dire si « oui » ou « non », elle admet une limite (finie ou infinie).

a) $(-1)^n$ ....

b) $(-1)^{2n+1}$ .....

c) $n(-1)^n$ ....

d) $n + (-1)^n$ ....

e) $2n(-1)^n$ .....

f) $n(-1)^{2n}$ ......

g) $\cos((-1)^n\pi)$ ..

h) $\sin((-1)^n\pi)$ ..

Calcul 2.4

Quelle est la limite des suites définies par les expressions suivantes ?

a) $\left(\dfrac{13}{17}\right)^n \cos(n)$

(a) $-\infty$ (b) $\dfrac{13}{17}$ (c) 1 (d) 0 (e) $+\infty$

b) $(9 + (-1)^n) \times (0{,}2)^n$

(a) -10 (b) -2 (c) -1 (d) 0 (e) 1 (f) $1{,}8$

c) $\dfrac{n + \sin(n\pi/2)}{3n}$

(a) -1 (b) 0 (c) $1/3$ (d) $1/2$ (e) 1 (f) 3

Calcul 2.5

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère une suite réelle $(u_n)_n$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a^2 - a\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1 - \frac{a}{n} \leqslant u_n \leqslant a + \frac{a}{n}.$$

a) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} a + \dfrac{a}{n}$, en fonction de a

b) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} \left(a^2 - a\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) + 1 - \dfrac{a}{n}\right)$, en fonction de a

c) Pour quelle valeur de a le théorème des gendarmes permet-il d'affirmer que la suite $(u_n)_n$ converge ?

d) Dans ce cas, combien vaut alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$?

Calcul 2.6 — Des inégalités.

Soit la suite $(u_n)_n$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n}$.

a) Lequel des encadrements suivants est-il vérifié ?

(a) $1 \leqslant u_n \leqslant 1$

(b) $\dfrac{n+1}{n-1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n-1}{n+1}$

(c) $\dfrac{n-1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n+1}{n-1}$

(d) $\dfrac{n-1}{n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n+1}{n}$

(e) $\dfrac{n-2}{n-1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n+2}{n-1}$

b) Quelle est la limite de la suite $(u_n)_n$?

Calcul 2.7 — Une inégalité très costaude.

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère une suite réelle $(u_n)_n$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left(\frac{na+\sqrt{n}+n}{n}\right)^6 - 1 - \frac{a^6}{n} \leqslant u_n \leqslant \left(a+\frac{a}{n}\right)^6 + \frac{2an^2+7n+18}{n^2+n+1}.$$

a) Quel est le degré du polynôme $(X+1)^6 - X^6 - 2X - 1$? ....

On note $P = (X+1)^6 - X^6 - 2X - 1$. Calculer :

b) $P(0)$ ....

c) $P(-1)$ ....

d) $P\left(\dfrac{-1}{2}\right)$ .....

e) Déterminer a, b, c tels que $(X+1)^6 - X^6 - 2X - 1 = X(X+1)(2X+1)(aX^2+bX+c)$.

....

f) Pour quelles valeurs de a le théorème des gendarmes permet-il d'affirmer que la suite $(u_n)_n$ converge ?

....

g) Combien vaut alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ en fonction de a ? ....

Formes indéterminées

Calcul 2.8 — Reconnaître une forme indéterminée (I).

Pour chacune des suites définies par les expressions suivantes, dire si « oui » ou « non », elle présente une forme indéterminée.

a) n^2+3n+1 ....

b) $\sqrt{n}-n$ ....

c) $(1{,}001)^n \times \dfrac{1}{n^{19}}$ ....

d) $\dfrac{3}{2} + \dfrac{7}{n} + \dfrac{49}{n^2} + \dfrac{1}{8n^3}$ ....

Calcul 2.9 — Reconnaître une forme indéterminée (II).

Pour chacune des suites définies par les expressions suivantes, dire si « oui » ou « non », elle présente une forme indéterminée.

a) $\dfrac{\sqrt{2n^{-3}}}{n^2+5}$ ....

b) $\dfrac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\mathrm{e}^{-n}}$ ....

c) $\dfrac{\ln\left(\frac{1}{n}\right)}{3^{-n}}$ ....

d) $-4^{2n-1} \times \cos((-1)^n\pi)$ ...

Calculs de limites

Calcul 2.10

Déterminer les limites des suites définies par les expressions suivantes.

On pourra factoriser par le terme prépondérant pour lever les indéterminations.

a) $n\sqrt{\ln(n)} - \sqrt{n}\ln(n)^2$ ....

b) $\dfrac{2^n - \frac{1}{2^n}}{n^2 - \frac{1}{n^2}}$ ....

c) $\dfrac{5^n - 1}{10^n + 5}$ ....

d) $\dfrac{\sqrt{2}n - 1}{n + \sqrt{2}}$ ....

Calcul 2.11

Déterminer les limites des suites définies par les expressions suivantes.

On pourra factoriser par le terme prépondérant pour lever les indéterminations.

a) $\dfrac{3n^3 - n^2 - 17}{5n^3 + 9n^2 + n}$ ....

b) $\dfrac{(3-n)(2+\sqrt{n})}{9 - n^2}$ ....

c) $\dfrac{\left(\frac{8}{11}\right)^n}{\left(\frac{24}{121}\right)^n}$ ....

d) $8^{7n} - 56^n$ ....

Calcul 2.12 — Avec des radicaux.

Déterminer les limites des suites définies par les expressions suivantes.

Pour lever les indéterminations, on pourra utiliser la quantité conjuguée ou factoriser par les termes prépondérants.

a) $\sqrt{n+4} - \sqrt{n}$ ....

b) $\sqrt{n^2 + 2n} - n$ ....

c) $\dfrac{\sqrt{2n^2 - n + 1} - n}{2n + 12}$ ....

d) $\sqrt{2n + \sqrt{3n}} - \sqrt{2n}$ ....

Calcul 2.13

Calculer les limites des suites définies par les expressions suivantes.

a) $\dfrac{n\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + 3}{n\sqrt{n} - 2n}$ ....

b) $\dfrac{-3\exp(n) + 5\exp(3n)}{\exp(2n) - 4\exp(n)}$ ....

c) $\dfrac{7 - 5\sqrt{n}}{\sqrt{n} + \frac{2}{n}}$ ....

d) $\dfrac{n + \sin(n)}{-2n - 4\cos(n)}$ ....

Utiliser les quantificateurs

Calcul 2.14 — À partir d'un certain rang ?

a) Écrire avec les symboles $\forall$ et $\exists$ la phrase « la suite $(u_n)_n$ est croissante à partir d'un certain rang ».

....

b) On suppose que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

Peut-on en déduire, en général, que la suite $(u_n)_n$ est croissante à partir d'un certain rang ?

(a) Oui (b) Non

....

c) On suppose que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 2$ et que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < 2$.

Peut-on alors en déduire, en général, que la suite $(u_n)_n$ est croissante à partir d'un certain rang ?

(a) Oui (b) Non

....

Calculs plus difficiles

On peut lever certaines formes indéterminées en utilisant le taux d'accroissement. Par exemple, comme la fonction sinus est dérivable en 0, on sait que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(0+h)-\sin(0)}{h} = \sin'(0).$$

Comme $\sin' = \cos$, cela peut se réécrire

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1.}$$

Dans les exercices qui suivent, on pourra utiliser de telles considérations pour répondre aux questions.

Calcul 2.15 — Taux d'accroissement.

a) Calculer $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h}$ ....

b) Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1}{\frac{1}{n}}$ ....

c) Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)$ ....

Calcul 2.16 — Une limite remarquable.

On considère les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ et $v_n = \ln(u_n)$.

a) Calculer v_n ....

b) Calculer la limite de $(v_n)_n$ ....

c) En déduire la limite de $(u_n)_n$ ....

Si vous trouvez 1 *ou* $+\infty$, *vous vous êtes trompé.*

Calcul 2.17

Calculer les limites des suites définies par les expressions suivantes.

a) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}}$ ....

b) $\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n}$ ....

Réponses mélangées

non $\quad]1,6] \quad$ 1 $\quad$ 1 $\quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0, u_{n+1} \geqslant u_n \quad$ e $\quad a \quad +\infty \quad +\infty \quad 0$

c $\quad$ non $\quad$ oui $\quad 0 \quad$ b $\quad]21,+\infty[\quad -5 \quad -1, \dfrac{1}{2^6}-1$ et $0 \quad -\dfrac{1}{2}$

$a^2-a+1 \quad \left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right] \cup \left[\dfrac{2}{3}, +\infty\right[\quad$ oui $\quad$ c $\quad$ non $\quad 0 \quad (a,b,c)=(3,3,4)$

$1 \quad 1 \quad$ non $\quad \dfrac{1}{2} \quad 0 \quad$ non $\quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad \dfrac{-1}{6} \quad 0 \quad \sqrt{2}$

oui $\quad$ oui $\quad \dfrac{5}{2} \quad$ b $\quad$ d $\quad$ non $\quad 1 \quad +\infty \quad$ non $\quad$ oui $\quad$ oui

$\dfrac{3}{5} \quad \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \quad$ non $\quad \dfrac{1}{5} \quad$ oui $\quad n\ln(1+\dfrac{1}{n}) \quad \dfrac{\sqrt{2}-1}{2} \quad \left\{-1, \dfrac{-1}{2}, 0\right\}$

$+\infty \quad 0 \quad +\infty \quad +\infty \quad 5 \quad]-\infty,-3] \cup]0,3] \quad 1 \quad$ oui $\quad$ d

▶ Réponses et corrigés page 162

Propriétés algébriques du logarithme I

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 3.1 — Quelques simplifications.

Écrire sous forme d'une fraction irréductible les nombres suivants.

a) $\dfrac{36}{45}$ ..... b) $\dfrac{2}{7} \times \dfrac{28}{16}$. c) $\dfrac{\frac{9}{25}}{\frac{3}{10}}$ .... d) $\dfrac{10^3 \times 3^5}{6^4 \times 5^2}$

Calcul 3.2 — Quelques équations.

Résoudre les équations suivantes en donnant la valeur de leur solution.

a) $2x + 4 = 5x - 3$ ....

b) $x + \dfrac{1}{2} = 6x - 5$ ....

c) $\dfrac{4}{3}x - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}x + \dfrac{1}{2}$ ....

d) $\dfrac{5}{3}x = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{2}{5}$ ....

Propriétés du logarithme

Calcul 3.3

Simplifier les expressions suivantes.

a) $\ln(3) + \ln\left(\dfrac{1}{3}\right)$ b) $\ln(10) - \ln(2)$ c) $2\ln(\sqrt{7})$ ......

Calcul 3.4

Exprimer les quantités suivantes à l'aide de $\ln(2)$ et $\ln(3)$.

a) $\ln(32)$ ....

b) $\ln\left(\dfrac{1}{81}\right)$ ....

c) $\ln(12)$ ....

d) $3\ln(6) - 2\ln(4) - \ln(9)$ ....

e) $\ln(\sqrt{27})$ ....

f) $\ln(\sqrt{6})$ ....

Calcul 3.5 — Autour de la constante « e » d'Euler.

Simplifier les expressions suivantes.

a) $\ln\left(e^2\right)$ ....

b) $\ln\left(\dfrac{1}{e^{11}}\right)$ ....

c) $\ln(\sqrt{e})$ ....

d) $\ln(\sqrt{e^7})$ ....

Calcul 3.6 — Logarithme et fonction exponentielle.

Simplifier les expressions suivantes.

a) $e^{\ln(7)-\ln(5)}$ ....

b) $e^{3\ln(10)}$ ....

c) $e^{-\ln(\ln(3))}$ ....

Calcul 3.7 — Simplifications remarquables.

Simplifier les expressions suivantes.

a) $\ln\left(\sqrt{3}-1\right)+\ln\left(\sqrt{3}+1\right)$ ....

b) $\ln\left(\dfrac{1}{e^{-\ln(e^2)}}\right)$ ....

c) $\ln\left((\sqrt{2}-1)^{15}\right)+\ln\left((\sqrt{2}+1)^{15}\right)$ ....

d) $\ln(140)+\ln\left(\dfrac{6}{7}\right)-\ln(24)$ ....

Équations et inéquations

Calcul 3.8 — Bien défini ?

Indiquer pour quelles valeurs du nombre réel x les quantités suivantes sont bien définies.

a) $\ln(1+x)$ .....

b) $\ln\left(x^2-3x\right)$ ..

c) $\ln\left(\ln(x)\right)$ ....

Calcul 3.9

Quel est le signe de chacune des quantités suivantes ?

a) $\ln(2)$ ....

b) $\ln\left(\dfrac{1}{4}\right)$ ....

c) $\ln(0{,}8)$ ....

d) $\left(\ln(0{,}8)\right)^2$ ....

e) $\ln\left(0{,}8^2\right)$ ......

f) $\ln(3)-1$ .....

Calcul 3.10 — Bien défini ?

a) Pour quelles valeurs du réel x la quantité $\ln(1 - \ln(x))$ est-elle bien définie ? ....

b) Soit $x \in \,]0, 1[$. Quel est le signe de $\ln(1 - \ln(x))$? ....

> **Remarque**
> Pour les inéquations suivantes, on donnera les solutions sous la forme « $x \leqslant a$ », « $a < x < b$ », etc.

Calcul 3.11 — Des inéquations (I).

Résoudre les inéquations suivantes.

a) $\ln(5 + 2x) \geqslant 0$ ....

b) $\ln(x - 1) < 1$ ....

c) $\ln(x^2) \geqslant 0$ ....

d) $0 \leqslant \ln(2x + 5) \leqslant 2$ ....

Calcul 3.12 — Des inéquations (II).

Résoudre les inéquations suivantes.

a) $\ln(x + 3) > \ln(2x - 1)$ ....

b) $\ln(x) + \ln(x + 2) \leqslant \ln(3)$ ....

c) $\ln(x) + \ln(x - 1) \leqslant \ln(2)$ ....

d) $\ln(x^2) \leqslant 1$ ....

Calcul 3.13 — Des équations.

Résoudre les équations suivantes.

a) $\ln\left(\dfrac{x + 1}{3x - 5}\right) = 0$ ....

b) $\ln(x)^2 - 3\ln(x) + 2 = 0$ ....

Calcul 3.14 — Des inéquations (III).

Résoudre les inéquations suivantes.

a) $\ln(x)^2 \leqslant 1$ ....

b) $\ln(x^2 + 3) \geqslant 1$ ....

Calcul 3.15 — Une dernière inéquation.

Résoudre l'inéquation $\ln\left(\dfrac{x^2 + 3x}{4}\right) \leqslant 0$ ....

On donnera la solution sous la forme d'une union d'intervalles.

Calculs plus difficiles

Calcul 3.16 — Une somme de logarithmes.

a) Soit $k \geqslant 1$. Écrire $1 - \dfrac{1}{k}$ comme une fraction ....

b) Soit $k \geqslant 2$. Écrire $\ln\left(1 - \dfrac{1}{k}\right)$ comme une somme ou une différence de logarithmes.

....

c) Soit $n \geqslant 2$. Calculer $\ln\left(1 - \dfrac{1}{2}\right) + \ln\left(1 - \dfrac{1}{3}\right) + \cdots + \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$ ....

Calcul 3.17

Soit $x \in \mathbb{R}$. On admet que $x + \sqrt{x^2+1} > 0$ et on note $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

Simplifier l'expression $\mathrm{e}^{f(x)} - \mathrm{e}^{-f(x)}$ ....

Réponses mélangées

$1 < x \leqslant 2$	> 0	$2x$	< 0	> 0	$0 < x < \mathrm{e}$	-11	$1 < x < 1 + \mathrm{e}$	
$x = 3$	$\dfrac{7}{2}$	$\dfrac{11}{10}$	$\dfrac{15}{2}$	$\dfrac{6}{7}$	> 0	$\dfrac{1}{2} < x < 4$	$x = \dfrac{24}{55}$	< 0	0
$x < 0$ ou $x > 3$	$\ln(3) - \ln(2)$	$\dfrac{3}{2}\ln(3)$	1 000	$\dfrac{6}{5}$	$\dfrac{1}{2}$	$5\ln(2)$	$\dfrac{1}{2}\ln(2) + \dfrac{1}{2}\ln(3)$	
$\ln(2)$	$0 < x \leqslant 1$	$\dfrac{1}{2}$	$\ln(5)$	$\dfrac{k-1}{k}$	$x \geqslant 1$ ou $x \leqslant -1$	$-\ln(n)$		
$[-4, -3[\cup]0, 1]$	0	$-4\ln(3)$	2	$\dfrac{4}{5}$	$\ln(5)$	> 0	$x > 1$	tous les réels
2	$\dfrac{1}{\ln(3)}$	< 0	$\dfrac{7}{5}$	$\dfrac{7}{3}$	$\ln(7)$	$x = \mathrm{e}$ ou $x = \mathrm{e}^2$	$-2 \leqslant x \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^2 - 5}{2}$	
$x \in \left[-\sqrt{\mathrm{e}}, 0\right[\cup \left]0, \sqrt{\mathrm{e}}\right]$	$2\ln(2) + \ln(3)$	$\dfrac{1}{\mathrm{e}} \leqslant x \leqslant \mathrm{e}$	$x \geqslant -2$	$\ln(k-1) - \ln(k)$	$x > -1$			

▶ Réponses et corrigés page 168

Propriétés algébriques du logarithme II

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 4.1

Écrire le plus simplement possible les nombres suivants.

a) $\sqrt{45} - \sqrt{20}$ ...

b) $\dfrac{2}{\sqrt{3} - 1}$ ......

c) $2\sqrt{5} + \sqrt{45}$ ...

Calcul 4.2

Calculer les nombres suivants.

a) $\left|\dfrac{3}{2} \times \dfrac{8}{9}\right| + \left|\dfrac{7}{3} - 10\right|$ ....

b) $\left|\dfrac{1}{14} - \dfrac{4}{7}\right| - \left|\dfrac{6}{7} - \dfrac{5}{2}\right|$ ......

Propriétés algébriques du logarithme

Calcul 4.3

Exprimer les quantités suivantes en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(5)$.

a) $\ln(8)$ ....

b) $\ln(0{,}01)$ ....

c) $\ln(12) + \ln(9) - \ln(27)$ ....

d) $\ln\left(\sqrt{8}\right) - \ln(16) + \dfrac{3}{2}\ln(2)$ ......

Calcul 4.4 — Avec racines et puissances.

Exprimer les quantités suivantes en fonction de $\ln(3)$.

a) $\ln\left(4 + \sqrt{13}\right) + \ln\left(4 - \sqrt{13}\right)$ ....

b) $\ln\left((\sqrt{10} - 1)^5\right) + \ln\left((\sqrt{10} + 1)^5\right)$ ....

Calcul 4.5 — Des encadrements.

On donne $0{,}69 \leqslant \ln(2) \leqslant 0{,}70$ et $1{,}60 \leqslant \ln(5) \leqslant 1{,}61$. En déduire des encadrements de :

a) $\ln(0{,}2)$ ....

b) $\ln(10)$ ....

Calcul 4.6 — D'autres encadrements.

On donne $0{,}69 \leqslant \ln(2) \leqslant 0{,}70$ et $1{,}60 \leqslant \ln(5) \leqslant 1{,}61$. En déduire des encadrements de :

a) $\ln\left(\dfrac{8}{5}\right)$ ....

b) $\ln(5{,}12)$ ....

c) $\ln(25)\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$ ......

d) $\ln(5+\sqrt{5})+\ln(5-\sqrt{5})$

Avec la fonction exponentielle

Calcul 4.7 — Avec le nombre d'Euler e.

Simplifier les expressions suivantes.

a) $\ln(\mathrm{e}^5) - \ln(\mathrm{e}^2)$ ....

b) $\ln\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right) - \ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$ ....

c) $2\ln\left(\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}\right)$ ....

d) $\mathrm{e}^{\ln(5)-\ln(3)}$ ....

e) $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\ln(4)}$ ....

f) $\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}+3}\right) + \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}+3}{\mathrm{e}}\right)$ ....

Calcul 4.8 — Logarithme et exponentielle.

Simplifier les expressions suivantes.

a) $\exp(-\ln(\ln(2)))$ ....

b) $\ln\left(\sqrt{\mathrm{e}^6}\right)$ ....

c) $\ln\left(\sqrt{\exp\left(\dfrac{1}{3}\ln \mathrm{e}^{27}\right)}\right)$ ....

d) $\ln\left(\sqrt{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)$ ....

e) $\ln\left(\sqrt{\exp\left(-\ln(\sqrt{\mathrm{e}})\right)}\right)$ ....

f) $\exp\left(2\ln\left(\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}\right)\right)$ ....

Calcul 4.9

Soit $x \in \mathbb{R}$. À quelle expression est égal $\ln(\mathrm{e}^x + 1)$?

(a) $\ln(x) - 1$

(b) x

(c) $x + \ln\left(\mathrm{e}^{-x} + 1\right)$

(d) $\ln\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right)$

....

Équations et inéquations

Calcul 4.10

On considère l'équation $\ln(x-2)+\ln(x-1)=\ln(2)$.

a) Sur quel intervalle cette équation a-t-elle un sens ? ....

b) Donner la solution dans $\mathbb{R}$ de $\ln(x-2)+\ln(x-1)=\ln(2)$ ....

Calcul 4.11

Donner la solution dans $\mathbb{R}$ des équations suivantes.

a) $\ln(2x-1)=\ln(x+3)$ ....

b) $\ln(e^{2x}+3)=7$ ....

Calcul 4.12

On considère l'équation $\ln(x-1)+2\ln(x+1)-\ln\big(x^2-1\big)=1$.

a) Donner l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles cette équation a un sens .....

b) Simplifier l'expression $\ln(x-1)+2\ln(x+1)-\ln\big(x^2-1\big)$ ....

c) Donner l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de $\ln(x-1)+2\ln(x+1)-\ln\big(x^2-1\big)=1$.

....

Calcul 4.13

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $\ln(2^x)=\ln\big(4^{x+1}\big)$ ....

Calcul 4.14

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $(\ln(x))^2=\ln\big(x^2\big)-1$ ....

b) $(\ln(x))^2+\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$ ....

c) $(\ln(x-2))^2=2$ ....

Calcul 4.15 — Deux inéquations.

Soit un réel $p > 1$. Donner l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ des inéquations suivantes.

a) $\ln(x+1) > p$ ....

b) $\ln(px+1) \leqslant \ln(x+p)$ ....

Logarithmes dans d'autres bases

Pour tout réel $a > 1$, on définit *le logarithme de base a* par $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$.

Calcul 4.16 — Logarithme décimal.

Simplifier au maximum les nombres suivants.

a) $\log_{10}(100)$ ....

b) $\log_{10}(4) + \log_{10}(250)$ ....

c) $\log_{10}(120) - \log_{10}(12)$ ....

d) $5\log_{10}(2) - \log_{10}(3200)$ ....

Calcul 4.17 — Logarithme en d'autres bases.

Simplifier au maximum les nombres suivants.

a) $\log_3(3^{17})$ ....

b) $\log_6(4) + \log_6(9)$ ....

c) $\log_5(\sqrt{\mathrm{e}}) \times \ln(5)$ ....

d) $(1 + \log_2(0{,}25)) \times (\log_2(200) - \log_2(25))$ ....

Calculs plus difficiles

Calcul 4.18 — Une somme de logarithmes (I).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\ln\left(\dfrac{2}{1}\right) + \ln\left(\dfrac{3}{2}\right) + \ln\left(\dfrac{4}{3}\right) + \cdots + \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$ ....

Calcul 4.19 — Une somme de logarithmes (II).

Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(2^k)$ ....

Réponses mélangées

$5\sqrt{5}$ $\quad$ $\ln(3)$ $\quad$ $\dfrac{-1}{p} < x \leqslant 1$ $\quad$ 1 $\quad$ $\dfrac{-1}{4}$ $\quad$ $1{,}61 \leqslant \ln(5{,}12) \leqslant 1{,}70$ $\quad$ $10\ln(3)$ $\quad$ $x > \mathrm{e}^p - 1$

2 $\quad$ $2{,}98 \leqslant \ln(5+\sqrt{5}) + \ln(5-\sqrt{5}) \leqslant 3{,}01$ $\quad$ -3 $\quad$ 1 $\quad$ $-2{,}254 \leqslant \ln(25)\ln(\frac{1}{2}) \leqslant -2{,}208$

$]1,+\infty[$ $\quad$ -2 $\quad$ $]2,+\infty[$ $\quad$ 4 $\quad$ $2\ln(2)$ $\quad$ 9 $\quad$ $\ln(x+1)$ $\quad$ 3 $\quad$ $\dfrac{-8}{7}$

2 $\quad$ c $\quad$ $\ln(n+1)$ $\quad$ $-1{,}61 \leqslant \ln(0{,}2) \leqslant -1{,}60$ $\quad$ $\dfrac{1}{\ln(2)}$ $\quad$ $\sqrt{3}+1$ $\quad$ 2

$x = 2 + \mathrm{e}^{\sqrt{2}}$ ou $x = 2 + \mathrm{e}^{-\sqrt{2}}$ $\quad$ $4{,}5$ $\quad$ $-\ln(2)$ $\quad$ $\dfrac{5}{3}$ $\quad$ e $\quad$ $\dfrac{1}{4}$ $\quad$ $\dfrac{n(n+1)\ln(2)}{2}$ $\quad$ 2

$3\ln(2)$ $\quad$ $x = 1$ ou $x = \mathrm{e}$ $\quad$ $\dfrac{\ln(\mathrm{e}^7 - 3)}{2}$ $\quad$ 17 $\quad$ $2{,}29 \leqslant \ln(10) \leqslant 2{,}31$ $\quad$ -2 $\quad$ 3

$\dfrac{1}{2}$ $\quad$ 3 $\quad$ $\sqrt{5}$ $\quad$ $0{,}46 \leqslant \ln\left(\dfrac{8}{5}\right) \leqslant 0{,}50$ $\quad$ 3 $\quad$ $-2\ln(2) - 2\ln(5)$ $\quad$ 3 $\quad$ $\mathrm{e} - 1$ $\quad$ $\dfrac{3}{2}$

► Réponses et corrigés page 173

Dérivée du logarithme

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 5.1

Soient x et t des réels. Simplifier les écritures suivantes.

a) $e^{3x+1} \times e^{5x+2}$ ....

b) $(e^{2t-4})^5 \times e$ ....

c) $\dfrac{e^{2x+1} \times e^{5-8x}}{e^{2x+3}}$ ....

d) $\dfrac{e^{2x+5t} \times e^{4x-3t}}{e^{2t+6x}}$ ....

Calcul 5.2

Écrire les nombres suivants sous la forme $a\ln(b)$ où a et b sont des entiers et b est le plus petit possible.

a) $3\ln(2) + \ln(4)$ ....

b) $\ln(100) - \ln(28) + \ln(21) - \ln(3)$

c) $\ln(7 - 2\sqrt{6}) + \ln(7 + 2\sqrt{6})$ ......

d) $4\ln(9) - 2\ln(27) + 6\ln(\sqrt{3})$ .....

Remarque
Dans l'ensemble des calculs de cette fiche, on ne se souciera pas des domaines de définition et de dérivabilité.

Dérivation du logarithme népérien

Calcul 5.3 — Au même dénominateur (I).

Déterminer l'expression de $f'(x)$ sous la forme d'un quotient pour f définie par :

a) $f(x) = 2x + 1 - \ln(x)$ ....

b) $f(x) = 4\ln(x) - \dfrac{3}{x+1}$ .....

Calcul 5.4 — Au même dénominateur (II).

Déterminer l'expression de $f'(x)$ sous la forme d'un quotient pour f définie par :

a) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x} - 3x^2$ ......

b) $f(x) = e^x \times \ln(x)$ ....

Calcul 5.5 — Application des formules usuelles.

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $f(x) = x\ln(x) - x$ ……

b) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ ……

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{\ln(x)}$ ……

d) $f(x) = \sqrt{x}\ln(x)$ ……

Calcul 5.6 — Composition et logarithme.

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $f(x) = (\ln(x))^3$ ……

b) $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x)}$ ……

c) $f(x) = \sqrt{\ln(x)}$ ……

d) $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x)^4}$ ……

Fonctions de la forme ln(u)

Calcul 5.7 — Composition et logarithme (II).

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 7)$ ……

b) $f(x) = \ln(1 + \mathrm{e}^x)$ ……

c) $f(x) = \ln(1 - x^3)$ ……

d) $f(x) = \ln(\ln(x))$ ……

Calcul 5.8 — Au même dénominateur (III).

Déterminer l'expression de $f'(x)$ sous la forme d'un quotient pour f définie par :

a) $f(x) = 4x^2 + 1 - \ln(2x^2 + 3x + 7)$ ……

b) $f(x) = 3x + 1 + \ln(1 + \sqrt{x})$ ……

c) $f(x) = \ln(1 + x) - \ln(2x^2 + x + 1)$ ……

Calcul 5.9 — Logarithme d'un quotient.

On considère la fonction $f : \begin{cases}]3,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln\left(\dfrac{x-3}{x^2-2}\right). \end{cases}$ On admet que la fonction f est dérivable.

a) Soit $x \in]3,+\infty[$. Calculer $f'(x)$ ....

b) Que vaut $f'(4)$? ....

Calcul 5.10 — Compositions successives.

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ ...

b) $f(x) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$ .....

c) $f(x) = \ln(1 + e^{x^2+1})$ ....

d) $f(x) = \ln(\ln(\ln(x)))$ ....

Calcul 5.11 — Compositions successives (II).

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $f(x) = \ln(1 + x e^{x-x^3})$ ....

b) $f(x) = \ln(1 + \ln(1 + e^{x^2}))$ ....

Calculs plus difficiles

Calcul 5.12 — Détermination d'une équation différentielle.

Soit f une fonction définie, dérivable et strictement positive sur $]0,+\infty[$ telle que, pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = f(x)(1 - \ln(f(x))).$$

On pose $g = \ln(f)$. Donner une équation reliant g et g'. ....

Calcul 5.13 — Logarithme intégral.

On définit la fonction « li » (appelée *logarithme intégral*) sur $]1,+\infty[$ par $\mathrm{li}(\mathrm{e}) = 0$ et $\mathrm{li}'(x) = \dfrac{1}{\ln(x)}$.

a) Soit $x \in]1,+\infty[$. Calculer $\mathrm{li}''(x)$. ....

b) Soit $f : \begin{cases}]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \mathrm{li}(3x^2+x+2). \end{cases}$ Calculer $f'(x)$ ....

c) Soit $g : \begin{cases}]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \mathrm{li}(\mathrm{e}^x). \end{cases}$ Calculer $g'(x)$ ....

Calcul 5.14 — Exponentielle en base a.

Soit a un réel strictement positif. Pour tout réel x, on pose

$$a^x = \mathrm{e}^{x\ln(a)}.$$

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $f(x) = 2^x$ ....

b) $f(x) = 5^x$ ....

c) $f(x) = 3^{-x}$ ....

d) $f(x) = x^x$ ....

e) $f(x) = x^{\sqrt{x}}$ ....

f) $f(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ ....

Réponses mélangées

$\dfrac{2x\mathrm{e}^{x^2+1}}{1+\mathrm{e}^{x^2+1}}$ $\quad \dfrac{(1+x-3x^3)\mathrm{e}^{x-x^3}}{1+x\mathrm{e}^{x-x^3}}$ $\quad \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ $\quad g' = 1-g$ $\quad \dfrac{(2x-1)\ln(x)-x+1}{(\ln(x))^2}$

$\dfrac{\ln(x)+2}{2\sqrt{x}}$ $\quad \ln(x)$ $\quad \dfrac{2x-4}{x^2-4x+7}$ $\quad 2\ln(5)$ $\quad \dfrac{1}{x\ln(x)}$ $\quad -\dfrac{1}{x\ln(x)^2}$ $\quad \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$\dfrac{2x\mathrm{e}^{x^2}}{(1+\mathrm{e}^{x^2})(1+\ln(1+\mathrm{e}^{x^2}))}$ $\quad \dfrac{1}{2x\sqrt{\ln(x)}}$ $\quad 5\ln(3)$ $\quad \dfrac{16x^3+24x^2+52x-3}{2x^2+3x+7}$ $\quad -\ln(3)\times 3^{-x}$

$\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x+1}\right)\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ $\quad \ln(2)\times 2^x$ $\quad \dfrac{1}{x^2-1}$ $\quad -\dfrac{2x(x+2)}{(1+x)(2x^2+x+1)}$

$(1+\ln(x))\times x^x$ $\quad \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(\ln(x)+2)x^{\sqrt{x}}$ $\quad \dfrac{6x+6\sqrt{x}+1}{2(x+\sqrt{x})}$ $\quad -\dfrac{1}{x\ln(x)^2}$ $\quad \dfrac{1-\ln(x)-6x^3}{x^2}$

e^{-8x+3} $\quad \dfrac{2x-1}{x}$ $\quad \dfrac{1}{x\ln(x)\ln(\ln(x))}$ $\quad \dfrac{3\ln(x)^2}{x}$ $\quad \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$ $\quad -\dfrac{4}{x\ln(x)^5}$

$5\ln(2)$ $\quad \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$ $\quad \dfrac{(x\ln(x)+1)\mathrm{e}^x}{x}$ $\quad \dfrac{6x+1}{\ln(3x^2+x+2)}$ $\quad \mathrm{e}^{8x+3}$ $\quad 1$ $\quad \mathrm{e}^{10t-19}$

$-\dfrac{x^2-6x+2}{(x-3)(x^2-2)}$ $\quad 2\ln(5)$ $\quad \dfrac{4x^2+11x+4}{x(x+1)^2}$ $\quad -\dfrac{3x^2}{1-x^3}$ $\quad \ln(5)\times 5^x$ $\quad \dfrac{3}{7}$

► Réponses et corrigés page 179

Fonctions trigonométriques

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 6.1

Donner l'ensemble des solutions des équations suivantes.

a) $x - \dfrac{2x-5}{5} + \dfrac{x+2}{6} = 6 + \dfrac{x-1}{3}$ ....

b) $\left(\dfrac{3}{2}x + 1\right)(12 - x) - \dfrac{5}{2}(x^2 + 2) = -2(1 + 2x^2)$ ....

Calcul 6.2

Soient trois réels a, b et c. Simplifier les expressions suivantes.

a) $\dfrac{(a+b)^2 - c^2}{a+b+c}$ ....

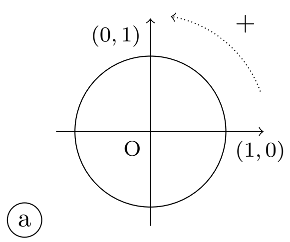
b) $\dfrac{a^2 + b^2 - c^2 + 2ab}{a^2 - b^2 + c^2 + 2ac}$ ....

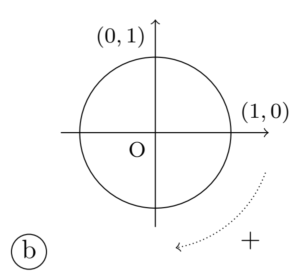
c) $\left(\dfrac{6a+1}{a^2 - 6a} + \dfrac{6a-1}{a^2+6a}\right)\dfrac{a^2 - 36}{a^2+1}$ ....

Révisions générales de trigonométrie

Entraînement 6.3 — Pour commencer.

Quel est le sens direct dans le cercle trigonométrique ?





....

Calcul 6.4 — Degrés et radians.

a) Parmi les propositions suivantes, laquelle est vraie ?

(a) π rad $= 1°$ (b) π rad $= 60°$ (c) π rad $= 180°$ (d) π rad $= \left(\dfrac{180}{\pi}\right)^{\circ}$

....

b) Parmi les propositions suivantes, laquelle est vraie ?

(a) $1° = \dfrac{\pi}{180}$ rad (b) $1° = \dfrac{\pi}{60}$ rad (c) $1° = \pi$ rad (d) $1° = 180\pi$ rad

....

Calcul 6.5 — Angles remarquables.

Donner la valeur de :

a) $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ ....

b) $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ ....

c) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ ....

d) $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ ....

Calcul 6.6 — Angles associés.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, exprimer en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ les expressions suivantes.

a) $\cos(-x)$ ......

b) $\sin(-x)$ ......

c) $\cos(\pi - x)$ ....

d) $\sin(\pi - x)$ ....

e) $\cos(\pi + x)$ ....

f) $\sin(\pi + x)$ ....

g) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ ..

h) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ ..

Calcul 6.7 — Des inégalités.

Choisir les bonnes réponses.

Plusieurs bonnes réponses sont possibles.

a) Pour $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a

(a) $\cos(x) \geqslant 0$

(b) $\sin(x) \geqslant 0$

(c) $\cos(x) \leqslant 0$

(d) $\sin(x) \leqslant 0$

....

b) Pour $x \in \left[\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right]$, on a

(a) $\cos(x) \geqslant 0$

(b) $\sin(x) \geqslant 0$

(c) $\cos(x) \leqslant 0$

(d) $\sin(x) \leqslant 0$

....

Calcul 6.8

Soit $x \in \mathbb{R}$. Parmi les expressions suivantes, laquelle est égale à $\cos^2(x)$?

(a) $\sqrt{1-\sin^2(x)}$

(b) $1+\sin^2(x)$

(c) $-1+\sin^2(x)$

(d) $1-\sin^2(x)$

....

Premiers calculs

Calcul 6.9

Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$.

a) A-t-on : (a) $\sin(x) \geqslant 0$ ou (b) $\sin(x) \leqslant 0$? ....

b) Calculer $\sin(x)$ ....

Calcul 6.10

Soit $k \in \mathbb{Z}$.

a) Soit $x = \dfrac{45\pi}{4} + 2k\pi$. Pour quelle valeur de k a-t-on $0 < x < 2\pi$? ....

b) Soit $x = \dfrac{71\pi}{6} + 2k\pi$. Pour quelle valeur de k a-t-on $-\pi < x \leqslant \pi$? ....

Calcul 6.11

Dans chacun des cas suivants, déterminer la mesure principale (celle appartenant à l'intervalle $]-\pi, \pi]$) corresponsant à la mesure donnée.

a) $\dfrac{152\pi}{5}$ ....

b) $-\dfrac{75\pi}{4}$ ....

c) $\dfrac{153\pi}{6}$ ....

Calcul 6.12

Donner la valeur de :

a) $\cos\left(\dfrac{11\pi}{4}\right)$ ....

b) $\sin\left(\dfrac{11\pi}{4}\right)$ ....

c) $\cos\left(\dfrac{10\pi}{3}\right)$ ....

d) $\sin\left(\dfrac{10\pi}{3}\right)$ ....

e) $\cos\left(\dfrac{19\pi}{2}\right)$ ....

f) $\sin\left(\dfrac{19\pi}{2}\right)$ ....

Autour des fonctions cosinus et sinus

Calcul 6.13

Parmi les affirmations suivantes portant sur la fonction cosinus, laquelle est correcte ?

(a) Sa courbe est symétrique par rapport à l'axe $(\mathrm{O}y)$.

(b) Sa courbe est symétrique par rapport à l'axe $(\mathrm{O}x)$.

(c) Sa courbe est symétrique par rapport à l'origine.

....

Calcul 6.14 — Croissante ou décroissante ?

Pour chacune des questions suivantes, choisir la réponse correcte.

a)

(a) La fonction sinus est croissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

(b) La fonction sinus est décroissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

....

b)

(a) La fonction sinus est croissante sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$

(b) La fonction sinus est décroissante sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$

....

c)

(a) La fonction $x \longmapsto \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ est croissante sur $[0, \pi]$

(b) La fonction $x \longmapsto \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ est croissante sur $\left[\dfrac{3\pi}{4}, \pi\right]$

....

Calcul 6.15 — Paire ou impaire ?

Pour chacune des fonctions f suivantes, choisir la réponse correcte parmi ces trois propositions :

(a) f est paire

(b) f est impaire

(c) f n'est ni paire ni impaire

a) $f : x \longmapsto \sin(2x)$ ....

b) $x \longmapsto 5 - 2\cos(x)$ ....

c) $f : x \longmapsto 4\cos(x)\sin(x)$ ....

d) $f : x \longmapsto x^2\cos(x)$ ....

Calcul 6.16 — Des périodes.

« Vrai » ou « faux » ?

a) La fonction $x \longmapsto \cos(x)$ est 4π-périodique ....

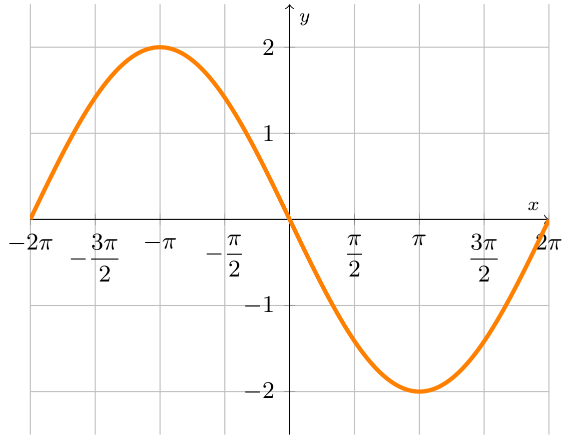
b) La fonction $x \longmapsto \sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$ est 2π-périodique ....

c) La fonction $x \longmapsto 3\sin(2\pi x)$ est 1-périodique ....

d) La fonction $x \longmapsto 4\cos(4x) - 1$ est $\dfrac{\pi}{2}$-périodique ....

Calcul 6.17 — Deux courbes.

a) Quelle est la fonction représentée par la courbe ci-contre ?



ⓐ $x \longmapsto \sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$

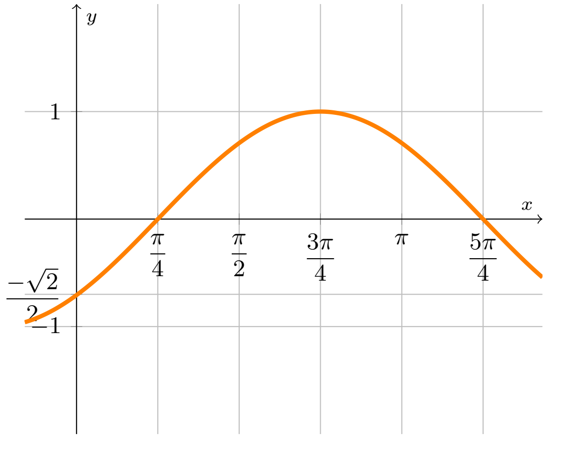
ⓑ $x \longmapsto -2\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$

ⓒ $x \longmapsto 2\cos(x)$

ⓓ $x \longmapsto \sin(2x)$

....

b) Quelle est la fonction représentée par la courbe ci-contre ?



ⓐ $x \longmapsto \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

ⓑ $x \longmapsto \cos\left(x - \dfrac{3\pi}{4}\right)$

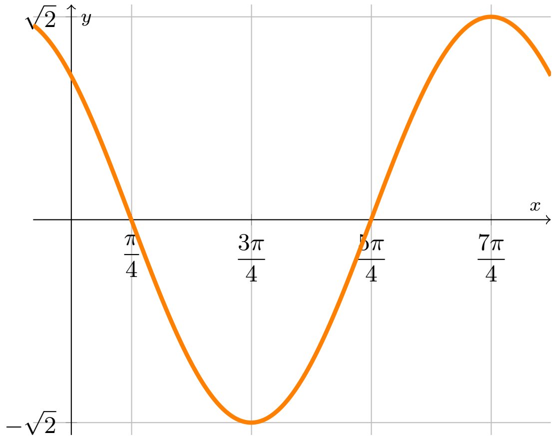
ⓒ $x \longmapsto \sin\left(x - \dfrac{3\pi}{4}\right)$

ⓓ $x \longmapsto \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

....

Calcul 6.18 — Deux autres courbes.

a) Quelle est la fonction représentée par cette courbe ?



(a) $x \longmapsto -\sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

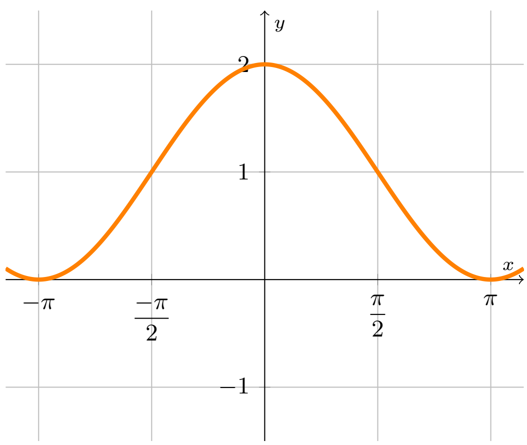
(b) $x \longmapsto \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

(c) $x \longmapsto \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{3\pi}{4}\right)$

(d) $x \longmapsto \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

....

b) Quelle est la fonction représentée par cette courbe ?



(a) $x \longmapsto 1 + \cos(x)$

(b) $x \longmapsto 2 - \sin(x)$

(c) $x \longmapsto 2\cos(x)$

(d) $x \longmapsto 1 + \cos^2(x)$

....

Équations et inéquations trigonométriques

Calcul 6.19

Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ les équations suivantes.

a) $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ ....

b) $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ....

c) $\cos(x) = \frac{1}{2}$ ....

Calcul 6.20

Résoudre dans $[0, 2\pi[$ les équations suivantes.

a) $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ....

b) $-\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ....

c) $\cos(3x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ....

Calcul 6.21

Résoudre dans $[0, 2\pi[$ les équations suivantes.

a) $\sin(x) = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)$ ....

b) $\sin^2(x) = \frac{1}{2}$ ....

c) $2\cos^2(x) + \cos(x) - 1 = 0$ ....

Calcul 6.22

Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ les inéquations suivantes.

a) $\cos(x) \geqslant \frac{1}{2}$ ....

b) $\sin(x) < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ....

c) $|\cos(x)| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ .....

d) $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geqslant 0$ ...

Calculs plus difficiles

Calcul 6.23 — Tangente.

Pour $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on pose $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

a) Calculer $\tan(0)$ ....

b) Calculer $\tan\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ ....

c) Calculer $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ ....

d) Calculer $\tan\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ ....

e) Pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, exprimer $1 + \tan^2(x)$ en fonction de $\cos(x)$ ....

Réponses mélangées

a et b	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{5}$	b	$-\cos(x)$	a	vrai	$-\sin(x)$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\left]-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right[$	$-\cos(x)$	$\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{a+b-c}{a+c-b}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left\{-\frac{9}{17}\right\}$		
$-\sin(x)$	0	$\cos(x)$	$\frac{12}{a}$	-6	$a+b-c$	-1	c et d	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	
vrai	b	b	$\left\{-\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{5}\right\}$	d	$\left\{-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right\}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$	b	
$\{10\}$	$-\frac{1}{2}$	-5	$\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$	$\left\{\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}\right\}$	a	$\left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$			
a	$\left]-\pi, -\frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$	$\sin(x)$	a	a	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos(x)$	c	
vrai	$\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$	a	faux	$\sin(x)$	$\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$	a	1	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	
b	$\sqrt{\frac{6+\sqrt{3}}{8}}$	$\left\{\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$	$\sqrt{3}$	0	$\left\{\frac{\pi}{18}, \frac{11\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{23\pi}{18}, \frac{25\pi}{18}, \frac{35\pi}{18}\right\}$	a	a	a	

► Réponses et corrigés page 184

Dérivation des fonctions trigonométriques

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 7.1

Développer les expressions suivantes.

a) $(x+y)(x^2-xy+y^2)$ ....

b) $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)$ .....

c) $(x-1)(x^2-1)(x^3-1)$ ....

Calcul 7.2

Factoriser les expressions suivantes.

a) $7a^2b-4ab^2$ ....

b) $a+1+b+ab$ ....

Calcul 7.3

Donner l'ensemble des solutions des équations suivantes.

a) $|x+2|=7$ ....

b) $|x+2|=|x-7|$ ....

Calculs de dérivées

Calcul 7.4

Dans chacun des cas suivants, donner la réponse correcte.

a) Soit $f : x \longmapsto \sin(x)+\cos(x)$. Alors, on a $f'(x) =$

ⓐ $2\cos(x)$ ⓑ $2\sin(x)$ ⓒ $\sin(x)-\cos(x)$ ⓓ $\cos(x)-\sin(x)$

....

b) Soit $f : x \longmapsto x\sin(x)$. Alors, on a $f'(x) =$

ⓐ $\sin(x)-x\cos(x)$ ⓑ $x\sin(x)-\cos(x)$ ⓒ $\sin(x)+x\cos(x)$ ⓓ $x\sin(x)+\cos(x)$

....

Calcul 7.5

Dans chacun des cas suivants, donner la réponse correcte.

a) Soit $f : x \longmapsto x^2\cos(x)$. Alors, on a $f'(x) =$

(a) $2x\cos(x) - x^2\sin(x)$

(b) $2x\cos(x) + x^2\sin(x)$

(c) $2x\sin(x) - x^2\cos(x)$

(d) $2x\sin(x) + x^2\cos(x)$

. . . .

b) Soit $f : x \longmapsto \dfrac{\sin x}{x}$. Alors, on a $f'(x) =$

(a) $\dfrac{x\cos(x) + \sin(x)}{x^2}$

(b) $\dfrac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2}$

(c) $\dfrac{x\sin(x) + \cos(x)}{x^2}$

(d) $\dfrac{x\sin(x) - \cos(x)}{x^2}$

. . . .

Calcul 7.6

Déterminer l'expression de la dérivée de chacune des fonctions suivantes.

a) $f : x \longmapsto \mathrm{e}^x\cos(x)$ . . . .

b) $f : x \longmapsto \cos(-5x+3)$ . . .

c) $f : x \longmapsto \cos(x^2)$ . . . .

Calcul 7.7

Sans tenir compte du domaine de définition, déterminer l'expression de la dérivée de chacune des fonctions suivantes.

a) $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{\sin(x)} + \cos(x)$ . . . .

b) $f : x \longmapsto 2\sqrt{\sin(x)} - 2\sqrt{\cos(x)}$ . . . .

c) $f : x \longmapsto (1+3\sin(2x))^4$ . . . .

Calcul 7.8

Sans tenir compte du domaine de définition, déterminer l'expression de la dérivée de chacune des fonctions suivantes.

a) $f : x \longmapsto \sin\left(\sqrt{x^2+5}\right)$ . . . .

b) $f : x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{\cos^2(3x)}$ . . . .

c) $f : x \longmapsto x^3\sqrt{\sin(x)}$ . . . .

Autres calculs

Calcul 7.9

On considère la fonction $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}\sin(x)$. Calculer $f''(x) + 2f'(x) + 2f(x)$ ....

Calcul 7.10

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $f : x \longmapsto x\sin(x)$. Calculer $xf(x) - 2f'(x) + xf''(x)$ ....

Calcul 7.11 — Des limites.

En utilisant la définition du nombre dérivé, déterminer les limites suivantes.

a) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{\sin(x) - \sin(a)}{x - a}$ où a est un réel ....

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$ ....

c) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)}{x - \frac{\pi}{3}}$ ....

Calculs plus difficiles

Calcul 7.12 — Une fonction mystérieuse.

On désigne par g la fonction définie sur $]-1,1[$ par

$$g(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

pour tout $x \in\,]-1,1[$. On ne cherchera pas à expliciter $g(x)$.

On considère alors la fonction composée h, définie sur $]-\pi, 0[$ par $h(x) = g(\cos(x))$.

a) Pour tout réel x de $]-\pi, 0[$, calculer $h'(x)$ ....

b) Calculer $h\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$ ....

c) Donner l'expression de $h(x)$ ....

Calcul 7.13 — Dérivée de la tangente.

La fonction tangente est définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Calculer une expression de la dérivée de la fonction tangente ....

Calcul 7.14 — Autour de la tangente.

Sans tenir compte du domaine de définition, déterminer l'expression de la dérivée de chacune des fonctions suivantes.

a) $f : x \longmapsto \tan(3x) + 2\tan(x)$ ....

b) $f : x \longmapsto 2\tan^2(x)$ ....

c) $f : x \longmapsto 8\sqrt{\tan(3x)} + \dfrac{4}{\sin^2(\sqrt{x})}$ ....

Réponses mélangées

$\dfrac{\cos(x)\cos(3x) + 6\sin(x)\sin(3x)}{\cos^3(3x)}$ (b) (a) $e^x(\cos(x) - \sin(x))$ 1

$x^3 + y^3$ 1 $3x^2\sqrt{\sin(x)} + \dfrac{x^3\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}$ $24\cos(2x)(1 + 3\sin(2x))^3$ 2

$-2x\sin(x^2)$ $\dfrac{4\tan(x)}{\cos^2(x)}$ $(1+a)(1+b)$ $x - 1$ 0 $\dfrac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}} + \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}}$

0 $\cos(x)e^{\sin(x)} - \sin(x)$ $x + \dfrac{\pi}{2}$ $\dfrac{x\cos\left(\sqrt{x^2+5}\right)}{\sqrt{x^2+5}}$ $\left\{\dfrac{5}{2}\right\}$

$\dfrac{12}{\cos^2(3x)\sqrt{\tan(3x)}} - \dfrac{4\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}\sin^3(\sqrt{x})}$ $5\sin(-5x+3)$ $\cos(a)$ $x^6 - x^5 - x^4 + x^2 + x - 1$

$\dfrac{1}{\cos^2(x)}$ $\{-9, 5\}$ $\dfrac{3}{\cos^2(3x)} + \dfrac{2}{\cos^2(x)}$ $-2\sin(x)$ (d) $ab(7a - 4b)$ (c)

► Réponses et corrigés page 189

Révisions sur la dérivation

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 8.1 — Quelques fractions.

Écrire les fractions suivantes sous la forme d'une fraction irréductible.

a) $\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}$ ....

b) $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{2}$ ....

c) $\dfrac{25}{15} - \dfrac{4}{3}$ ....

d) $\dfrac{16}{4} + \dfrac{2}{5}$ ....

Calcul 8.2

Développer les expressions suivantes et les ordonner en fonction des puissances décroissantes de x.

a) $(x-3)(x^2-2x+1)$ ....

b) $(x-2)(x^2+3x+4)$ ....

c) $(x+4)(x+5) - x^2(x+1)$ ...

d) $x^2+6x+9-(x-3)^2$ ....

Calcul 8.3 — Quelques dérivées élémentaires.

Donner les dérivées des fonctions suivantes.

a) $x \longmapsto 4x$ .....

b) $x \longmapsto 5x+3$.

c) $x \longmapsto \sqrt{x}$ ....

d) $x \longmapsto \mathrm{e}^{-3x}$ ...

e) $x \longmapsto \mathrm{e}$ ....

f) $x \longmapsto \dfrac{1}{x^5}$ .....

Utilisation des règles de dérivation

Calcul 8.4 — Combinaisons linéaires de fonctions élémentaires (I).

Donner les dérivées des fonctions suivantes.

a) $x \longmapsto 4x^3 + 5x^4$ ......

b) $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$ ....

c) $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$ ....

d) $x \longmapsto 3\mathrm{e}^{3x} + \dfrac{1}{x}$ ....

Calcul 8.5 — Combinaisons linéaires de fonctions élémentaires (II).

Donner les dérivées des fonctions suivantes.

a) $x \longmapsto \dfrac{e^{3x}}{3} + \dfrac{2}{x}$ ....

b) $x \longmapsto 3e^{2x} - (4x)^4$ ....

c) $x \longmapsto \dfrac{e^{3x}}{4} + \dfrac{3}{10}\ln(x) + 3\sqrt{x}$ ....

d) $x \longmapsto (e^{5x})^2 + \dfrac{2}{x} - (3x)^4$ ....

Calcul 8.6 — Produits et quotients de fonctions (I).

Donner les dérivées des fonctions suivantes.

a) $x \longmapsto (x+1)e^{2x}$ ......

b) $x \longmapsto (x+1)\ln(x)$ ....

c) $x \longmapsto (x^2+1)e^{3x}$ ....

Calcul 8.7 — Produits et quotients de fonctions (II).

Donner les dérivées des fonctions suivantes.

a) $x \longmapsto \dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}$ ....

b) $x \longmapsto \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$ ....

c) $x \longmapsto \dfrac{x^2 + 2xe^{x} + 1}{1+x^2}$ ....

Calcul 8.8 — Composition avec des fonctions linéaires (I).

Donner les dérivées des fonctions suivantes.

a) $x \longmapsto (3x+2)^2$ ....

c) $x \longmapsto \ln(12x+3)$ .....

b) $x \longmapsto \dfrac{1}{5x+2}$ ....

d) $x \longmapsto \dfrac{1}{(5-2x)^4}$ ......

Calcul 8.9 — Composition avec des fonctions linéaires (II).

Donner les dérivées des fonctions suivantes.

a) $x \longmapsto (3x+2)^2 e^{4x+5}$ ....

b) $x \longmapsto (x+e)^4 + 3(3x+2)^3$ ....

Dérivées secondes

Calcul 8.10

On considère la fonction $f : x \longmapsto x\ln(1+x)$. Déterminer :

a) l'expression de $f'(x)$ ..

b) l'expression de $f''(x)$ ..

Calcul 8.11

On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$. Déterminer :

a) l'expression de $f'(x)$ ..

b) l'expression de $f''(x)$ ..

Calcul 8.12

On considère la fonction $f : x \longmapsto x + 1 - \dfrac{x}{e^x}$. Déterminer :

a) l'expression de $f'(x)$ ..

b) l'expression de $f''(x)$ ..

Calculs plus difficiles

Calcul 8.13 — Calcul d'une somme par dérivation.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$.

a) Calculer $f'(x)$ sous la forme d'une somme ....

b) Pour $x \neq 1$, exprimer $f(x)$ sous la forme d'un quotient de polynômes.

On utilisera une formule du cours.

....

c) En déduire, pour $x \neq 1$, une expression de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$ sous forme de fraction.

....

Calcul 8.14 — Dérivées successives d'une inverse.

Étant donné une fonction f, on note (sous réserve d'existence) f', f'', f''' puis $f^{(4)}$, $f^{(5)}$, $f^{(6)}$, etc. les dérivées successives de f. En général, la dérivée n-ième est notée $f^{(n)}$.

On considère la fonction f définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par

$$f(x) = \frac{1}{3-2x}.$$

Déterminer les expressions de :

a) $f'(x)$ ....

b) $f''(x)$ ....

c) $f^{(3)}(x)$ ....

d) $f^{(4)}(x)$ ....

e) $f^{(5)}(x)$ ....

f) $f^{(n)}(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ....

Réponses mélangées

$$x \longmapsto 9\mathrm{e}^{3x} - \frac{1}{x^2} \qquad x \longmapsto \frac{3}{2}\left(\frac{\mathrm{e}^{3x}}{2} + \frac{1}{5x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \qquad x \longmapsto \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \qquad x \longmapsto \frac{4}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2}$$

$$x \longmapsto \frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} \qquad x \longmapsto 4 \qquad \frac{3! \times 2^3}{(3-2x)^4} \qquad x \longmapsto (3x^2+2x+3)\mathrm{e}^{3x} \qquad 12x \qquad x \longmapsto \mathrm{e}^{3x} - \frac{2}{x^2}$$

$$x \longmapsto \frac{2\mathrm{e}^x(x^3 - x^2 + x + 1)}{(1+x^2)^2} \qquad x \longmapsto \frac{8}{(5-2x)^5} \qquad \frac{2+x}{(1+x)^2} \qquad \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2} \qquad 1$$

$$x \longmapsto \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \qquad x \longmapsto -\frac{5}{(5x+2)^2} \qquad \frac{4! \times 2^4}{(3-2x)^5} \qquad \frac{22}{5} \qquad -x^3 + 9x + 20 \qquad \frac{5! \times 2^5}{(3-2x)^6}$$

$$x \longmapsto -\frac{5}{x^6} \qquad \frac{1}{12} \qquad x^3 + x^2 - 2x - 8 \qquad x \longmapsto -3\mathrm{e}^{-3x} \qquad \frac{\mathrm{e}^x - 1 + x}{\mathrm{e}^x} \qquad x \longmapsto \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

$$x \longmapsto 4x^2(3+5x) \qquad -\frac{3 - 2\ln(x)}{x^3} \qquad x \longmapsto \frac{4}{4x+1} \qquad x \longmapsto \ln(x) + \frac{x+1}{x} \qquad x \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$x \longmapsto 5 \qquad x^3 - 5x^2 + 7x - 3 \qquad x \longmapsto (2x+3)\mathrm{e}^{2x} \qquad x \longmapsto 2(3x+2)(6x+7)\mathrm{e}^{4x+5}$$

$$\frac{2-x}{\mathrm{e}^x} \qquad x \longmapsto 4(x+\mathrm{e})^3 + 27(3x+2)^2 \qquad \frac{n! \times 2^n}{(3-2x)^{n+1}} \qquad \frac{1-\ln(x)}{x^2} \qquad x \longmapsto 0$$

$$\frac{2^3}{(3-2x)^3} \qquad \frac{1}{3} \qquad \ln(1+x) + \frac{x}{1+x} \qquad x \longmapsto 6(3x+2) \qquad x \longmapsto 2\big(3\mathrm{e}^{2x} - 2^9 x^3\big)$$

$$x \longmapsto 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} \qquad x \longmapsto 2\left(5\mathrm{e}^{10x} - \frac{1}{x^2} - 2 \times 3^4 x^3\right) \qquad \frac{2}{(3-2x)^2}$$

► Réponses et corrigés page 192

Dérivée des fonctions composées

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 9.1 — Développer.

Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes.

a) $(2x+3)(3x-7)$ ...

b) $(9x-7)^2$ ....

c) $(x+1)^2(x-3)$ ....

d) $(x^2+3x+2)^2$ .....

Calcul 9.2 — Mettre au même dénominateur.

Mettre les expressions suivantes au même dénominateur, puis réduire et ordonner les numérateurs.

a) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{3-x}$ ....

b) $\dfrac{2x+3}{x-4}+\dfrac{3}{x-7}$ ....

c) $\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{2x+3}{x(x-4)}$ ....

Fonctions composées

Calcul 9.3 — Application des formules usuelles (I).

Déterminer l'expression de $f'(x)$, où f est définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par :

a) $f(x) = 2\mathrm{e}^{1-x^3}$ .....

b) $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{2x}}$ ....

c) $f(x) = \sqrt{1+\mathrm{e}^x}$ ....

d) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ ...

Calcul 9.4 — Application des formules usuelles (II).

Déterminer l'expression de $f'(x)$ où f est définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par :

a) $f(x) = (x^2 + \mathrm{e}x)^4$ ....

b) $f(x) = \left(\dfrac{x^2 - 2x + 3}{2}\right)^2$ ....

c) $f(x) = (4x^2 + 3x + 5)^3$ ....

d) $f(x) = (3x^2 - 5x + 7)^{-2}$ ....

Calcul 9.5 — Ensemble de dérivation.

On considère la fonction $f : \begin{cases} \left[-1, \frac{5}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{-2x^2 + 3x + 5}. \end{cases}$

a) Pour x dans le domaine de dérivabilité de f, que vaut $f'(x)$? ....

b) Sur quel intervalle la fonction f est-elle dérivable ?

(a) $\left[-1, \dfrac{5}{2}\right]$ (b) $\left]-1, \dfrac{5}{2}\right]$ (c) $\left[-1, \dfrac{5}{2}\right[$ (d) $\left]-1, \dfrac{5}{2}\right[$

....

Calcul 9.6 — Calcul numérique.

On considère la fonction $f : \begin{cases} \left[-3, -\frac{1}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x^3 + 2x^2 - 4x - 1}. \end{cases}$

On admet que la fonction f est dérivable sur son domaine de définition.

a) Que vaut $f'(-1)$? .... b) Que vaut $f'(-2)$? ....

Calcul 9.7 — Équation de tangente.

On considère la fonction $g : \begin{cases}]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \mathrm{e}^{x - \sqrt{x}}. \end{cases}$

a) Rappeler l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative d'une fonction f en un point d'abscisse a où elle est dérivable.....................

b) Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 1.

....

Calcul 9.8 — Une composition plus subtile.

a) On considère la fonction f définie, pour $x > 0$, par $f(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{x}}$.

Soit $x > 0$. Exprimer $f'(x)$ sous la forme d'un quotient ....

b) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{e^{x^2+x+1}}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $g'(x)$ sous la forme d'un quotient ....

Plusieurs opérations

Calcul 9.9 — Produit avec une fonction composée (I).

Déterminer l'expression sous forme factorisée de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $f(x) = (3x+5)e^{x^2+3}$ ....

b) $f(x) = (x-3)\sqrt{1+x^2}$ ....

Calcul 9.10 — Produit avec une fonction composée (II).

Déterminer l'expression sous forme factorisée de $f'(x)$ pour f définie, pour $x \in]0, +\infty[$, par :

a) $f(x) = x^2 e^{\sqrt{x}}$ ....

b) $f(x) = x \exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ....

Calcul 9.11 — Une dérivée seconde.

On considère la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto e^{x^2-5x+7} \end{cases}$.

Donner une expression de $f''(x)$ pour tout réel x ....

Calcul 9.12 — Produit de deux fonctions composées.

Déterminer l'expression sous forme factorisée de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $f(x) = \sqrt{1+x^2} \times e^{x^3}$ ....

b) $f(x) = \dfrac{e^{5-x^3}}{(x^2-2)^3}$ ....

Calcul 9.13 — Composition d'un produit ou d'un quotient.

Déterminer l'expression sous forme factorisée de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x-1}}$ ....

b) $f(x) = \exp\big((x^2+2x+3)\sqrt{x}\big)$ ....

c) $f(x) = \left(\dfrac{2x+5}{4x-1}\right)^2$ ....

Calcul 9.14 — Compositions successives.

Déterminer l'expression sous forme factorisée de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $f(x) = \exp(\sqrt{1-x^2})$ ....

b) $f(x) = (x + \exp(x^3))^4$ ....

Calculs plus difficiles

Calcul 9.15 — Un peu de calcul formel.

On considère une fonction f définie et quatre fois dérivable sur un intervalle I, et telle que

$$f' = 1 - f^2.$$

a) Exprimer f'' en fonction de f ....

b) Exprimer f''' en fonction de f ....

c) Exprimer f'''' en fonction de f ....

Calcul 9.16 — **Détermination d'une équation différentielle (I).**

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et soit f une fonction définie, dérivable, strictement positive sur $]0, +\infty[$ et vérifiant $f' = af - b\sqrt{f}$. On considère la fonction g définie par $g = \sqrt{f}$.

a) Exprimer f' en fonction de g et g' ....

b) Déterminer une équation reliant g et g' ....

Calcul 9.17 — **Détermination d'une équation différentielle (II).**

Soit f une fonction définie, deux fois dérivable, strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et telle que, pour tout $x > 0$,

$$x^2 f''(x) - 3xf'(x) + 4f(x) = 0.$$

On considère la fonction g définie, pour tout réel t, par $g(t) = f(\mathrm{e}^t)$.

a) Soit $t \in \mathbb{R}$. Calculer $g'(t)$ ....

b) Soit $t \in \mathbb{R}$. Calculer $g''(t)$ ....

c) Déterminer une équation reliant les fonctions g, g' et g'' ....

Réponses mélangées

$y = f'(a)(x-a) + f(a)$ $\quad 4(2x+\mathrm{e})(x^2+\mathrm{e}x)^3$ $\quad -2f + 2f^3$ $\quad 2gg'$ $\quad -\dfrac{44(2x+5)}{(4x-1)^3}$

$y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$ $\quad \dfrac{2x^3+3x^2+x-4}{x^3(x-4)}$ $\quad -\dfrac{x\exp(\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad \dfrac{1}{2}x(\sqrt{x}+4)\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$ $\quad 16f - 40f^3 + 24f^5$

$\dfrac{(5x^2+6x+3)\exp\big((x^2+2x+3)\sqrt{x}\big)}{2\sqrt{x}}$ $\quad$ d $\quad (x-1)(x^2-2x+3)$ $\quad \dfrac{x(3x^3+3x+1)\mathrm{e}^{x^3}}{\sqrt{1+x^2}}$

$3(8x+3)(4x^2+3x+5)^2$ $\quad \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ $\quad \dfrac{\mathrm{e}^x}{2\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}$ $\quad \dfrac{2x^2-8x-33}{(x-7)(x-4)}$ $\quad -\dfrac{3x(x^3-2x+2)\mathrm{e}^{5-x^3}}{(x^2-2)^4}$

$-\dfrac{5}{4}$ $\quad \dfrac{(2x-1)\mathrm{e}^x}{2x\sqrt{x}}$ $\quad \dfrac{2}{(3-x)(x-1)}$ $\quad \dfrac{(x-1)\exp\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$ $\quad g'' - 4g' + 4g = 0$ $\quad \dfrac{(2x-1)(x-1)}{\sqrt{1+x^2}}$

$-6x^2\mathrm{e}^{1-x^3}$ $\quad 0$ $\quad x^3 - x^2 - 5x - 3$ $\quad \dfrac{-2(6x-5)}{(3x^2-5x+7)^3}$ $\quad -\dfrac{2\mathrm{e}^{2x}}{(1+\mathrm{e}^{2x})^2}$ $\quad \dfrac{3-4x}{2\sqrt{-2x^2+3x+5}}$

$\dfrac{(x^2-2x-1)\sqrt{x-1}}{2(x-1)^2\sqrt{1+x^2}}$ $\quad -2 + 8f^2 - 6f^4$ $\quad 6x^2 - 5x - 21$ $\quad \dfrac{(2x+1)(2x^2+2x+1)\mathrm{e}^{x^2+x+1}}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$

$4(1+3x^2\exp(x^3))(x+\exp(x^3))^3$ $\quad \mathrm{e}^t f'(\mathrm{e}^t) + \mathrm{e}^{2t} f''(\mathrm{e}^t)$ $\quad (4x^2-20x+27)\mathrm{e}^{x^2-4x+7}$

$(6x^2+10x+3)\mathrm{e}^{x^2+3}$ $\quad \mathrm{e}^t f'(\mathrm{e}^t)$ $\quad 81x^2 - 126x + 49$ $\quad x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4$ $\quad g' = \dfrac{a}{2}g - \dfrac{b}{2}$

► Réponses et corrigés page 196

Convexité

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 10.1 — Des factorisations.

Factoriser les expressions suivantes.

a) $36 - (2x+3)^2$ ......

b) $(2x+1)(2x-5) + 4x^2 - 1$ ......

c) $(4x-2)(2-3x) + 1 - 4x^2$ ......

d) $(3-x^2) - x^2 - 2\sqrt{3}x - 3$ ......

Calcul 10.2 — Des systèmes.

Résoudre les systèmes d'inconnues x et y réelles suivants.

a) $\begin{cases} 3x - 4y = 34 \\ -2x + 5y = -39 \end{cases}$ ......

c) $\begin{cases} 9x - 6y = -23 \\ x + y = -2 \end{cases}$ ......

b) $\begin{cases} x + y = -2 \\ 11x - 7y = -40 \end{cases}$ ......

d) $\begin{cases} x + 4y = 7 \\ 6x - 12y = 69 \end{cases}$ ......

Reconnaître une fonction convexe

Calcul 10.3

Si f' est croissante sur I, alors ...

(a) f est positive

(b) f' est positive

(c) f est convexe

(d) f' est convexe

......

Calcul 10.4

Si f'' est positive sur I, alors ...

(a) f'' est croissante

(b) f est convexe

(c) f' est convexe

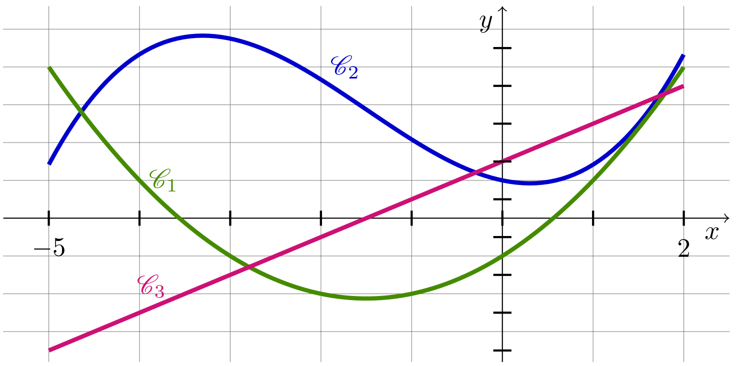
(d) f'' est convexe

......

Calcul 10.5 — Identification de courbes (I).

On considère f une fonction définie sur l'intervalle $[-5, 2]$.

On donne ci-dessous trois courbes : $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$. Elles correspondent aux fonctions f, f' et f'', et il faut déterminer quelle fonction correspond à quelle courbe.



a) $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ ou $\mathscr{C}_3$: quelle est la courbe de f ? ....

b) $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ ou $\mathscr{C}_3$: quelle est la courbe de f' ? ....

c) La fonction f est

(a) convexe sur $[-5, 2]$

(b) concave sur $[-5, -1]$

(c) convexe sur $\left[-\dfrac{1}{2}, 2\right]$

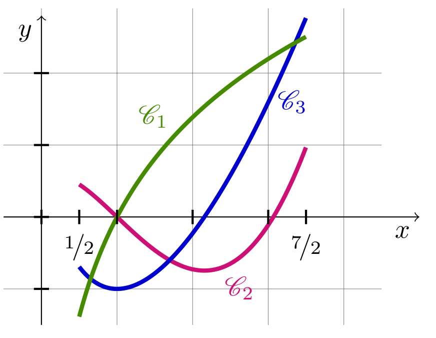
....

Calcul 10.6 — Identification de courbes (II).

On considère f une fonction définie sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{7}{2}\right]$.

On donne ci-contre trois courbes : $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$.

Elles correspondent aux fonctions f, f' et f'', et il faut deviner quelle fonction correspond à quelle courbe.



a) $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ ou $\mathscr{C}_3$: quelle est la courbe de f'' ? ....

b) $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ ou $\mathscr{C}_3$: quelle est la courbe de f ? ....

c) f est convexe sur ..

d) f est concave sur ..

Études calculatoires

Calcul 10.7 — En utilisant l'expression de la dérivée (I).

Dans chacun des cas suivants, déterminer les variations de f' et en déduire les intervalles sur lesquels f est convexe.

► Pour $f'(x) = x^3 + 2x$.

a) Variations de f' ....

b) Intervalles sur lesquels f est convexe ....

► Pour $f'(x) = \mathrm{e}^{2x} - \sqrt{7}$.

c) Variations de f' ....

d) Intervalles sur lesquels f est convexe ....

Calcul 10.8 — En utilisant l'expression de la dérivée (II).

Dans chacun des cas suivants, déterminer les variations de f' et en déduire les intervalles sur lesquels f est convexe.

► Pour $f'(x) = x^2 - 7x$.

a) Variations de f' ....

b) Intervalles sur lesquels f est convexe ....

► Pour $f'(x) = -(2x+6)^2$.

c) Variations de f' ....

d) Intervalles sur lesquels f est convexe ....

Calcul 10.9 — Des calculs de dérivée seconde (I).

Dans chacun des cas suivants, calculer $f''(x)$ et en déduire les intervalles sur lesquels f est convexe.

► Pour $f(x) = \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}$.

a) $f''(x)$ ....

b) Intervalles sur lesquels f est convexe

....

► Pour $f(x) = \mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}$.

c) $f''(x)$ ....

d) Intervalles sur lesquels f est convexe

....

Calcul 10.10 — Des calculs de dérivée seconde (II).

Dans chacun des cas suivants, calculer $f''(x)$ et en déduire les intervalles sur lesquels f est convexe.

► Pour $f(x) = -\mathrm{e}^{-3x^2+2}$.

a) $f''(x)$ ....

b) Intervalles sur lesquels f est convexe ....

► Pour $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1} - 2x$.

c) $f''(x)$ ....

d) Intervalles sur lesquels f est convexe ....

Calcul 10.11 — Des calculs de dérivée seconde (III).

Dans chacun des cas suivants, calculer $f''(x)$ et en déduire les intervalles sur lesquels f est convexe.

► Pour $f(x) = x^2 - x\ln(x)$.

a) $f''(x)$ ....

b) Intervalles sur lesquels f est convexe ....

► Pour $f(x) = 3x - \ln(x^2) + 2$.

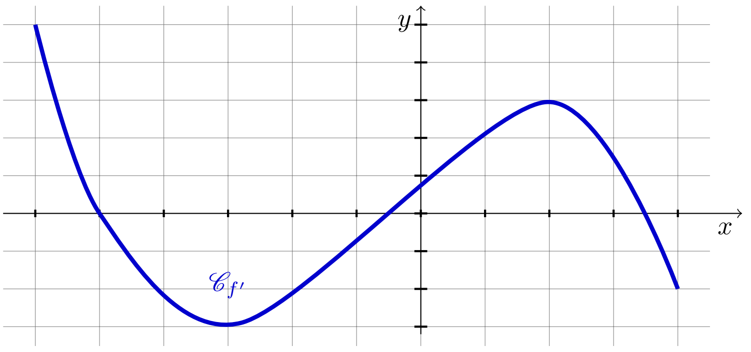
c) $f''(x)$ ....

d) Intervalles sur lesquels f est convexe ....

Études graphiques

Calcul 10.12

On considère f une fonction définie et dérivable sur $[-6, 4]$; on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
On donne ci-dessous la représentation graphique de sa dérivée f'.



a) f est convexe sur ....

b) f est concave sur ....

c) Déterminer l'abscisse des deux points d'inflexion de $\mathscr{C}_f$ ......

d) On note T_0 la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0. Quelle est la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à T_0 ?

- (a) au-dessus de T_0 sur $[-6, 0]$
- (b) au-dessous de T_0 sur $[-2, 2]$
- (c) au-dessus de T_0 sur $[-2, 2]$
- (d) au-dessous de T_0 sur $[0, 2]$

....

e) On note A et B les points de $\mathscr{C}_f$ d'abscisses respectives -1 et 1.
Quelle est la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la sécante (AB) ?

- (a) au-dessus de (AB) sur $[-3, 2]$
- (b) au-dessous de (AB) sur $[-1, 1]$
- (c) au-dessous de (AB) sur $[-3, 2]$
- (d) au-dessus de (AB) sur $[-1, 1]$

....

Calcul 10.13

On considère une fonction f, définie et dérivable sur $[-5, 5]$.

On donne le tableau de variations de sa dérivée f'.

x	-5		-2		2		5
variations de f'	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

La courbe représentative de f, notée $\mathscr{C}_f$, a deux points d'inflexion A et B.

On note x_{A} et x_{B} les abscisses respectives des points A et B. On convient que $x_{\mathrm{A}} < x_{\mathrm{B}}$.

a) f est convexe sur ....

b) f est concave sur ....

c) Déterminer x_{A} et x_{B} ....

On note T_{A} et T_{B} les tangentes à $\mathscr{C}_f$ respectivement aux points A et B.

d) Quelle est la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à T_{A} ?

(a) au-dessous de T_{A} sur $[-5, -2]$
(b) au-dessus de T_{A} sur $[-2, 2]$
(c) ni l'un ni l'autre
(d) les deux à la fois

....

e) Quelle est la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à T_{B} ?

(a) au-dessous de T_{B} sur $[-2, 2]$
(b) au-dessus de T_{B} sur $[2, 5]$
(c) ni l'un ni l'autre
(d) les deux à la fois

....

f) $\mathscr{C}_f$ est au-dessous de (AB) pour x dans ....

Calculs plus difficiles

Calcul 10.14 — Prouver des inégalités.

Soit la fonction f définie sur $]-2, +\infty[$ par

$$f(x) = \ln(x+2) + \frac{3}{x+2}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f et T la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -1.

a) Calculer $f'(x)$ ....

b) Calculer $f''(x)$ ....

c) f est convexe sur ....

d) Déterminer l'équation réduite de T ....

e) $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de T sur

(a) $[2, +\infty[$ (c) $]-2, 5]$ (e) $[-1, 6]$

(b) jamais (d) $]-2, 4]$

....

f) Soit $x \in]-2, 2]$.

Pour quelle expression $A(x)$ a-t-on $(x+2)\ln(x+2) \geqslant A(x)$?

(a) $A(x) = 1 - 2x$

(b) $A(x) = -1 - 3x - 2x^2$

(c) $A(x) = 3x - 2x^2$

....

Calcul 10.15 — Une étude théorique.

Soit f une fonction deux fois dérivable et convexe sur I. On pose

$$g : \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \mathrm{e}^{f(x)}. \end{cases}$$

a) Calculer $g'(x)$ en fonction de $f(x)$ et $f'(x)$.

....

b) Calculer $g''(x)$ en fonction de $f(x)$, $f'(x)$ et $f''(x)$.

....

c) Sur quel intervalle la fonction g est-elle convexe ?

(a) jamais

(b) une partie de I

(c) I

(d) on ne sait pas

....

Réponses mélangées

$-2x(x+\sqrt{3})$	-3 et 2	(c)	(c)	$\mathscr{C}_2$	(c)	$[-3,2]$	Décroissante sur $\left]-\infty,\frac{7}{2}\right]$ croissante sur $\left[\frac{7}{2},+\infty\right[$
$(x,y)=(-3,1)$	$\mathscr{C}_1$	$[-2,2]$	$\left[\dfrac{-1}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right]$	(d)	$(2x+1)(4x-6)$	(b)	
$]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$	$]-\infty,-3]$	Croissante sur $]-\infty,-3]$ décroissante sur $[-3,+\infty[$	$\big(f''(x)+f'(x)^2\big)\mathrm{e}^{f(x)}$				
$y=1-2x$	$\mathbb{R}$	$(3-2x)(9+2x)$	$\mathbb{R}$	$6(1-6x^2)\mathrm{e}^{-3x^2+2}$	$\dfrac{2}{x^2}$	-2 et 2	
(d)	$\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$	$[-6,-3]$ et $[2,4]$	$\mathscr{C}_2$	$[-2,2]$	$\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}$	$\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right[$	
$(x,y)=\left(10,-\dfrac{3}{4}\right)$	Croissante sur $\mathbb{R}$	$\left[\dfrac{7}{2},+\infty\right[$	Croissante sur $\mathbb{R}$	$[0,+\infty[$			
(b)	$\left]-\infty,\dfrac{-1}{\sqrt{3}}\right[$ et $\left]\dfrac{1}{\sqrt{3}},+\infty\right[$	$\mathbb{R}$	$(x,y)=\left(\dfrac{-7}{3},\dfrac{1}{3}\right)$	$]-2,4]$	$2-\dfrac{1}{x}$		
(c)	$\left[1,\dfrac{7}{2}\right]$	$\dfrac{4-x}{(x+2)^3}$	$f'(x)\mathrm{e}^{f(x)}$	(b)	$2\dfrac{3x^2-1}{(x^2+1)^3}$	$(2x-1)(3-8x)$	
$(x,y)=(2,-7)$	$[-5,-2]$ et $[2,5]$	(c)	$\left[\dfrac{1}{2},1\right]$	$\dfrac{x-1}{(x+2)^2}$	$\mathscr{C}_1$		

► Réponses et corrigés page 200

Primitives I

Remarque
Dans cette fiche, pour gagner en concision, on utilisera la notion informelle d'*expression*. On s'autorisera ainsi à dire, par exemple, qu'une primitive de l'expression $4x^3$ est l'expression x^4.

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 11.1 — Racines et fractions.

Effectuer les calculs suivants et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

a) $-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}$ ....

b) $\dfrac{\frac{1}{6}-1}{2-\frac{3}{5}}$ ....

c) $\dfrac{\sqrt{2}-\frac{1}{4\sqrt{2}}}{\sqrt{2}+\frac{1}{4\sqrt{2}}}$ ....

d) $\left(1-\dfrac{1}{3}\right)^2-\left(1+\dfrac{1}{3}\right)^2$ ....

Calcul 11.2

Donner les solutions dans $\mathbb{R}$ des équations suivantes.

a) $5x^2+10x-15=0$ ....

b) $2x^2-6x+\dfrac{9}{2}=0$ ....

c) $-(x-2)^2+2=0$ ....

d) $(3x-2)^2=(1-x)^2$ ....

Calcul 11.3 — Quelques calculs rapides (I).

Déterminer les primitives des expressions suivantes.

a) $3x^2-1$ ....

b) $-3x^{-4}-4x^{-5}$ ....

c) $\dfrac{1}{2}x^3-3x^5+2$ ....

d) $\dfrac{7}{3}(1+x+x^2)$ ....

Calcul 11.4 — Quelques calculs rapides (II).

Déterminer les primitives des expressions suivantes.

a) $\dfrac{1}{x^3}$ ....

b) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}+4x$ ....

c) $\dfrac{-2}{x^4}$ ....

d) $5e^x-6$ ....

Calcul 11.5 — Primitives de fractions rationnelles (I).

Déterminer les primitives des expressions suivantes.

a) $\dfrac{2}{(x-2)^2}$ ....

b) $\dfrac{6}{(2x-1)^3}$ ....

c) $-\dfrac{3}{(1+4x)^2}$ ....

d) $\dfrac{-9}{(x-7)^{10}}$ ....

Calcul 11.6 — Primitives de fractions rationnelles (II).

Déterminer les primitives des expressions suivantes.

a) $\dfrac{7}{(-x-3)^{-5}}$ ....

b) $\dfrac{6}{(3x-1)^{-3}} + \dfrac{2}{(x-2)^2}$ ....

Calcul 11.7

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ par $f(x) = \dfrac{3x^2+1}{(x^2-1)^3}$.

a) Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, calculer $\dfrac{1}{2(x-1)^3} - \dfrac{1}{2(x+1)^3}$ ....

b) En déduire l'expression, sous la forme d'une fraction, des primitives de f ....

Calcul 11.8 — Avec des fonctions composées (I).

Déterminer les primitives des expressions suivantes.

a) $x\mathrm{e}^{x^2}$ ....

b) $\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$ ....

c) $(x-1)^2$ ....

d) $(3x-2)^5$ ....

Calcul 11.9 — Avec des fonctions composées (II).

Déterminer les primitives des expressions suivantes.

a) $2x\mathrm{e}^{x^2+x-3} + \mathrm{e}^{x^2+x-3}$ ....

b) $5(3x^2-2)(x^3-2x+1)^4$ ....

c) $\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4x-5}}$ ....

Calcul 11.10 — Avec des fonctions composées (III).

Déterminer les primitives des expressions suivantes.

a) $-x\mathrm{e}^{-3x^2+1}+1$ ....

b) $5\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+1)^4$ ....

c) $\dfrac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+5)^2}$ ....

d) $\dfrac{\mathrm{e}^x+2x}{2\sqrt{\mathrm{e}^x+x^2}}$ ....

e) $\dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ ....

f) $(2\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-x})^2$ ....

Calcul 11.11 — Composée par une fonction affine.

On considère la fonction définie sur $]-1,+\infty]$ par $f(x)=\dfrac{-4}{\sqrt{x+1}}$.

a) Déterminer l'expression des primitives F de f ....

b) Déterminer une expression de la dérivée de $x\longmapsto F(2x+1)$ ....

c) Déterminer l'expression des primitives de la fonction $x\longmapsto f(2x+1)$ .....

Calcul 11.12

Déterminer les primitives des fonctions suivantes.

a) $x\longmapsto f(-3x+5)$ où $f(x)=\mathrm{e}^{-2x}$ ....

b) $x\longmapsto f(10x+1)$ où $f(x)=\dfrac{3}{x^2}$ ....

c) $x\longmapsto f(-x-3)$ où $f(x)=(4x+7)^5$ ....

d) $x\longmapsto f(4x-5)$ où $f(x)=\dfrac{2}{(2x-1)^2}$ ....

Calculs plus difficiles

Calcul 11.13 — Puissances divisées.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$.

a) Calculer $f_2(2)$ ....

b) Pour $n \geqslant 1$, calculer f_n' ....

c) Pour $n \in \mathbb{N}$, en déduire une primitive de f_n ....

Calcul 11.14

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$, on considère g_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g_n(x) = \dfrac{(x-a)^n}{n!}$.

a) Pour $n \geqslant 1$, calculer g_n' ....

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, en déduire une primitive de g_n ....

Réponses mélangées

$\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^6 + 2x + C$ $\quad \frac{1}{2}(3x-1)^4 - \frac{2}{x-2} + C$ $\quad \frac{1}{(x-7)^9} + C$ $\quad \mathrm{e}^{x^2+x-3} + C$

$x \mapsto \frac{1}{6}\mathrm{e}^{6x-10} + C$ $\quad x \mapsto \frac{-3}{10(10x+1)} + C$ $\quad 2$ $\quad \frac{-1}{\mathrm{e}^x + 5} + C$ $\quad x^3 - x + C$

$\frac{3}{4(4x+1)} + C$ $\quad x \mapsto \frac{1}{4(11-8x)} + C$ $\quad \frac{7}{3}\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) + C$ $\quad 2-\sqrt{2}$ et $2+\sqrt{2}$

$\frac{1}{3}(\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-x})^3 + C$ $\quad \frac{7}{9}$ $\quad (x^3 - 2x + 1)^5 + C$ $\quad 5\mathrm{e}^x - 6x + C$ $\quad x^{-3} + x^{-4} + C$

$\frac{-2}{x-2} + C$ $\quad (\mathrm{e}^x + 1)^5 + C$ $\quad f(x)$ $\quad -\frac{x}{(x^2-1)^2} + C$ $\quad g_{n+1}$ $\quad \frac{2}{3x^3} + C$ $\quad \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2} + C$

f_{n+1} $\quad -4\sqrt{2x+2} + C$ $\quad 2f(2x+1)$ $\quad g_{n-1}$ $\quad 2\sqrt{x} + 2x^2 + C$ $\quad \sqrt{x^2+4x-5} + C$

$-\frac{4}{3}$ $\quad f_{n-1}$ $\quad \frac{1}{18}(3x-2)^6 + C$ $\quad \frac{1}{3}(x-1)^3 + C$ $\quad \frac{1}{2}$ et $\frac{3}{4}$ $\quad \frac{-3}{2(2x-1)^2} + C$

$x \mapsto \frac{-1}{24}(4x+5)^6 + C$ $\quad -\frac{7}{6}(x+3)^6 + C$ $\quad \frac{-1}{2x^2} + C$ $\quad \sqrt{2x+1} + C$ $\quad \frac{3}{2}$ $\quad \mathrm{e}^{\sqrt{x}} + C$

$\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-3x^2+1} + x + C$ $\quad -8\sqrt{x+1} + C$ $\quad -\frac{3}{10}$ $\quad -\frac{25}{42}$ $\quad \sqrt{\mathrm{e}^x + x^2} + C$ $\quad -3$ et 1

► Réponses et corrigés page 205

Primitives II

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 12.1

Donner l'ensemble des solutions des inégalités suivantes sous la forme d'un intervalle.

a) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{3} < \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{4}$ ....

b) $\dfrac{-x}{3} + \dfrac{2}{5} \geqslant -x + \dfrac{1}{2}$ ....

c) $\dfrac{5x}{-3} + \dfrac{1}{4} > \dfrac{2x-1}{6}$ ....

d) $\dfrac{2x}{3} + \dfrac{1}{5} \leqslant \dfrac{x}{7} - \dfrac{3}{10}$ ....

Calcul 12.2

Donner l'ensemble des solutions des inégalités suivantes sous la forme d'un intervalle ou de la réunion de deux intervalles.

a) $6x^2 + x - 1 \leqslant 0$ ....

b) $2x^2 - 12x + 18 \leqslant 0$

c) $0 < 5x^2 - 2x - 1$ ..

d) $0 \leqslant -7x^2 + x + 1$ ..

Calculs de primitives

Calcul 12.3 — Primitives usuelles (I).

Donner l'expression des primitives des fonctions définies par les expressions suivantes sur l'intervalle I.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ avec $I = \mathbb{R}_+^*$ ....

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ avec $I = \mathbb{R}_-^*$ ....

c) Donner une expression des primitives de $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ valable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

....

Calcul 12.4 — Primitives usuelles (II).

Donner l'expression des primitives des fonctions définies par les expressions suivantes.

a) $f(x) = 2x^3 + 6x^2 - x + 1$ ....

b) $f(x) = -3e^x + x^2 - 2x$ ....

c) $f(x) = 2x^4 - 4e^x + \dfrac{1}{x^2}$ ....

Calcul 12.5 — Primitives usuelles (III).

Donner l'expression des primitives des fonctions définies par les expressions suivantes.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ ....

b) $f(x) = -3x^2 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ....

c) $f(x) = \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{3}{\sqrt{x}}$ ....

d) $f(x) = -\dfrac{2}{x^3} + \dfrac{2}{x^4} - \dfrac{2}{x^5} + \dfrac{2}{x}$ ....

Calcul 12.6 — Trouver une primitive particulière.

Donner l'expression de la primitive F de f telle que $F(a) = b$ dans les cas suivants.

a) $f(x) = 2x + 1$, $a = 1$ et $b = 0$ ....

b) $f(x) = \dfrac{2}{x}$, $a = 1$ et $b = 3$ ....

c) $f(x) = \dfrac{3}{x}$, $a = 2$ et $b = 0$ ....

d) $f(x) = x^2 - e^x + 3$, $a = 0$ et $b = \dfrac{1}{2}$ ....

Calcul 12.7 — Composition avec une fonction affine (I).

a) Donner l'expression des primitives de f définie par $f(x) = \exp(x)$ ....

En déduire l'expression des primitives des fonctions définies par les expressions suivantes.

b) $f_1(x) = \exp(2x+3)$ ....

c) $f_2(x) = \exp(-5x+2)$ ..

d) $f_3(x) = \exp\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\right)$.

e) $f_4(x) = \exp\left(\frac{-1}{3}x + 2\right)$

Calcul 12.8 — Composition avec une fonction affine (II).

a) Donner l'expression des primitives de f définie par $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ ....

En déduire l'expression des primitives des fonctions définies par les expressions suivantes.

b) $f_1(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{3x+5}}$ ......

c) $f_2(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\frac{2}{3}x - 4}}$ .....

d) $f_3(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\frac{6}{5}x - 3}}$ .....

e) $f_4(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}x}}$ ....

Calcul 12.9 — Composition avec une fonction affine (III).

a) Donner l'expression des primitives de f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ....

En déduire l'expression des primitives des fonctions définies par les expressions suivantes.

b) $f_1(x) = \dfrac{1}{x-3}$ ....

c) $f_2(x) = \dfrac{1}{2x+1}$ ....

d) $f_3(x) = \dfrac{1}{\frac{1}{7}x - 6}$ ....

e) $f_4(x) = \dfrac{1}{\frac{2}{3}x + 5}$ ....

Calcul 12.10 — Reconnaître les formules des dérivées usuelles (I).

Donner l'expression des primitives des fonctions définies par les expressions suivantes.

a) $f(x) = 2x\exp(x^2)$ ....

b) $f(x) = \dfrac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+1}}$ ....

Calcul 12.11 — Reconnaître les formules des dérivées usuelles (II).

Donner l'expression des primitives des fonctions définies par les expressions suivantes.

a) $f(x) = 6(8x-2) \times (4x^2 - 2x - 3)^5$ ....

b) $f(x) = -2 \times \dfrac{-12x+1}{(-6x^2+x)^3}$ ....

c) $f(x) = \dfrac{6x+5}{3x^2+5x-1}$ ....

Calcul 12.12 — Reconnaître les formules des dérivées usuelles (III).

Donner l'expression des primitives des fonctions définies par les expressions suivantes.

a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+2x}$ ....

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}(\sqrt{x})^4$ ....

c) $f(x) = \dfrac{\exp(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ ....

Calcul 12.13 — Reconnaître les formules des dérivées usuelles (IV).

Donner l'expression des primitives des fonctions définies par les expressions suivantes.

a) $f(x) = \dfrac{2x+1}{(3x^2+3x-9)^5}$ ....

b) $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}$ ....

c) $f(x) = \dfrac{1}{x\ln(3x)}$ ....

Calculs plus difficiles

Calcul 12.14 — Primitiver une fonction « inconnue ».

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \exp(x^2)$ et soit φ l'unique primitive de f qui s'annule en 0.

a) Calculer $\varphi'(2x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ ....

b) Donner l'expression de la dérivée de la fonction $x \longmapsto \varphi(2x)$ ....

c) Donner, en fonction de φ, une primitive de $x \longmapsto \exp\big((x+1)^2\big)$ ....

d) Donner, en fonction de φ, une primitive de $x \longmapsto \exp\big((3x+1)^2\big)$ ...

Réponses mélangées

$\dfrac{-1}{5}\exp(-5x+2)+C$ $\quad$ $\dfrac{1}{2}\exp(2x+3)+C$ $\quad$ $\dfrac{1}{2}\ln\big(|x^2+2x|\big)+C$

$\sqrt{x}+C$ $\quad$ $3\ln(|x|)-\dfrac{1}{2x^2}+6\sqrt{x}+C$ $\quad$ $\ln(|x|)+C$ $\quad$ $\dfrac{2}{5}(\sqrt{x})^5+C$ $\quad$ $\{3\}$

$\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{3x^3}+\dfrac{1}{2x^4}+2\ln(|x|)+C$ $\quad$ $\exp(x^2)+C$ $\quad$ $2\exp(4x^2)$ $\quad$ $3\ln(|x|)-3\ln(2)$

$\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{2}{3}x-4}+C$ $\quad$ $\dfrac{3}{2}\ln\left(\left|\dfrac{2}{3}x+5\right|\right)+C$ $\quad$ $(4x^2-2x-3)^6+C$ $\quad$ $\ln(-x)+C$

$\dfrac{1}{2}x^4+2x^3-\dfrac{1}{2}x^2+x+C$ $\quad$ $\exp(x)+C$ $\quad$ $-\dfrac{1}{x}$ $\quad$ $\dfrac{1}{2}\ln(|2x+1|)+C$ $\quad$ $\sqrt{x^2+3x+1}+C$

$-3\exp\left(\dfrac{-1}{3}x+2\right)+C$ $\quad$ $\dfrac{2}{5}x^5-4e^x-\dfrac{1}{x}+C$ $\quad$ $2\ln(|x|)+3$ $\quad$ $\ln(|x|)+C$

$\left]-\infty,\dfrac{1-\sqrt{6}}{5}\right[\cup\left]\dfrac{1+\sqrt{6}}{5},\infty\right[$ $\quad$ $7\ln\left(\left|\dfrac{1}{7}x-6\right|\right)+C$ $\quad$ $\left[\dfrac{3}{20},+\infty\right[$ $\quad$ $\dfrac{1}{3}\sqrt{3x+5}+C$

$\ln(|\ln(3x)|)+C$ $\quad$ $\exp(4x^2)$ $\quad$ x^2+x-2 $\quad$ $-x^3+\ln(|x|)+2\sqrt{x}+C$ $\quad$ $\dfrac{1}{3}x^3-e^x+3x+\dfrac{3}{2}$

$\left]-\infty,-\dfrac{21}{22}\right]$ $\quad$ $\ln(|x-3|)+C$ $\quad$ $\dfrac{1}{(-6x^2+x)^2}+C$ $\quad$ $\ln\big(|3x^2+5x-1|\big)+C$

$-\dfrac{1}{12}\dfrac{1}{(3x^2+3x-9)^4}+C$ $\quad$ $x\longmapsto\varphi(x+1)$ $\quad$ $x\longmapsto\dfrac{1}{3}\varphi(3x+1)$ $\quad$ $\left]-\infty,\dfrac{7}{2}\right[$

$2\sqrt{\ln(x)}+C$ $\quad$ $\dfrac{5}{6}\sqrt{\dfrac{6}{5}x-3}+C$ $\quad$ $-3e^x+\dfrac{1}{3}x^3-x^2+C$ $\quad$ $2\exp(\sqrt{x})+C$ $\quad$ $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}\right]$

$3\sqrt{\dfrac{2}{3}x}+C$ $\quad$ $\left[\dfrac{1-\sqrt{29}}{14},\dfrac{1+\sqrt{29}}{14}\right]$ $\quad$ $\ln(x)+C$ $\quad$ $\left]-\infty,\dfrac{5}{24}\right[$ $\quad$ $2\exp\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{3}\right)+C$

► Réponses et corrigés page 209

Primitives III

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 13.1 — Factorisations.

Soit x un réel. Factoriser les expressions suivantes (on pourra utiliser le discriminant).

a) $3x^2 - 18x + 24$ ....

b) $3x^2 - 18x + 24 + x^2 - 4x + 4$

c) $5x^4 - 10x^2 - 15$ ....

d) $x^3 + x^2 - 2x$ ....

Calcul 13.2 — Un peu de trigonométrie.

Soit x un réel. Transformer les expressions suivantes pour ne les exprimer qu'en fonction de $\cos(x)$.

a) $\cos(-x)$ ....

b) $\sin^2(x) - 1$ ....

c) $\sin^2(x) - 2\cos(-x - 13\pi)$ ....

d) $\sin^4(x) + \sin^2(x) - 2\cos(x)$ ....

Primitives de fonctions élémentaires

Calcul 13.3 — Fonctions élémentaires (I).

Déterminer l'expression d'une primitive des fonctions suivantes.

a) $x \longmapsto x^3 + 2$ ....

b) $x \longmapsto \dfrac{1}{3x}$ ....

c) $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ....

d) $x \longmapsto \dfrac{1}{x^5}$ ....

e) $x \longmapsto \dfrac{1}{x^{1/3}}$ ....

f) $x \longmapsto \dfrac{1}{e^{12x}}$ ....

Calcul 13.4 — Fonctions élémentaires (II).

Déterminer l'expression d'une primitive des fonctions suivantes.

a) $x \longmapsto e^3$ ....

b) $x \longmapsto 3e^{5x} - x^2$ ....

c) $x \longmapsto \dfrac{x^3 + 5x^2 - 4}{x^2}$ ...

d) $x \longmapsto 2\sin(2x)$ ....

e) $x \longmapsto 3\cos(3x + 5)$ ...

f) $x \longmapsto \sin(2 - 5x)$ .....

Primitives de formes remarquables

Dans les exercices suivants, on fera apparaître des expressions de la forme

$$nu'(x)u(x)^{n-1}, \ \frac{u'(x)}{u(x)} \text{ ou } u'(x)e^{u(x)}$$

pour primitiver les fonctions proposées.

Calcul 13.5 — Fonction puissance (I).

Déterminer l'expression d'une primitive des fonctions suivantes.

a) $x \longmapsto (2x + 1)(x^2 + x)^5$ .....

b) $x \longmapsto (2x+3)(x^2+3x+12)^{10}$

c) $x \longmapsto (x^2 + 1)(x^3 + 3x + 4)$.

d) $x \longmapsto \dfrac{8x^2}{(x^3 + 2)^3}$ ....

Calcul 13.6 — Fonction puissance (II).

Déterminer l'expression d'une primitive des fonctions suivantes.

a) $x \longmapsto (e^x + 1)^{-3}e^x$ ....

b) $x \longmapsto (e^x+1)(e^x+x)^{22}$

c) $x \longmapsto x\sqrt{1 - 2x^2}$ .....

d) $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ ....

Calcul 13.7 — Fonction puissance (III).

Déterminer l'expression d'une primitive des fonctions suivantes.

a) $x \longmapsto \sin(x)\cos(x)$ ....

b) $x \longmapsto \cos(x)\sin^5(x)$ ......

c) $x \longmapsto (3\sin(x)+2)^5\cos(x)$

d) $x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{(\cos(x) + 3)^2}$ ......

Calcul 13.8 — Fonction inverse (I).

Déterminer l'expression d'une primitive des fonctions suivantes.

a) $x \longmapsto \dfrac{1}{2x-3}$ ....

b) $x \longmapsto \dfrac{4x^3+3x^2}{x^4+x^3}$ ......

c) $x \longmapsto \dfrac{3x^2+4x}{x^3+2x^2+1}$ ...

d) $x \longmapsto \dfrac{5x^4+3x^2+1}{x^5+x^3+x+12}$

e) $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x+x}$ ....

f) $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$ ....

Calcul 13.9 — Fonction inverse (II).

Déterminer l'expression d'une primitive des fonctions suivantes.

a) $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}$ ......

b) $x \longmapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$ ....

c) $x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ ....

d) $x \longmapsto \dfrac{\sin^2(x)\cos(x)}{\sin^3(x)+5}$ ..

Calcul 13.10 — Fonction exponentielle.

Déterminer l'expression d'une primitive des fonctions suivantes.

a) $x \longmapsto \left(3x^2+\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{x^3+\ln(x)}$ ....

b) $x \longmapsto (x^2+x+5)\mathrm{e}^{x^3+\frac{3}{2}x^2+15x-12}$

c) $x \longmapsto \sin(x)\mathrm{e}^{-\cos(x)+3}$ ....

d) $x \longmapsto \exp(x)\exp(\mathrm{e}^x)$ ....

Primitives par décomposition

Calcul 13.11 — Un premier exemple de décomposition.

a) Déterminer l'expression d'une primitive de $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t}$ ....

b) Mettre sous forme de fraction $1-\dfrac{1}{1+t}$ ....

c) En déduire l'expression d'une primitive de $t \longmapsto \dfrac{t}{1+t}$ ....

Calcul 13.12 — Un second exemple de décomposition.

a) Déterminer l'expression d'une primitive de $x \longmapsto \dfrac{x}{1+x^2}$ ....

b) Simplifier l'expression $\dfrac{x}{1+x^2}+\dfrac{x^3}{1+x^2}$ ....

c) En déduire l'expression d'une primitive de $x \longmapsto \dfrac{x^3}{1+x^2}$ ....

Calcul 13.13 — Un troisième exemple de décomposition.

a) Écrire sous forme de fraction la quantité $\dfrac{1}{3-x}+\dfrac{1}{3+x}$ .... $\boxed{}$

b) En déduire l'expression d'une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{9-x^2}$ .... $\boxed{}$

Soit a un réel non nul.

c) Écrire sous forme de fraction la quantité $\dfrac{1}{a-x}+\dfrac{1}{a+x}$ .... $\boxed{}$

d) En déduire l'expression d'une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{a^2-x^2}$ .... $\boxed{}$

e) Déterminer l'expression d'une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{25-16x^2}$ .... $\boxed{}$

Calcul 13.14 — En autonomie.

En utilisant la stratégie des exercices précédents, déterminer l'expression d'une primitive des fonctions suivantes :

a) $x \longmapsto \dfrac{x+2}{x+1}$ .... $\boxed{}$

b) $x \longmapsto \dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$ .... $\boxed{}$

Calcul 13.15 — Une fraction de sinus.

a) Écrire sous forme de fraction la quantité $\dfrac{1}{2+\cos(x)}+\dfrac{1}{2-\cos(x)}$ .... $\boxed{}$

b) En déduire l'expression d'une primitive de $x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{3+\sin^2(x)}$ .... $\boxed{}$

Calculs plus difficiles

On note ψ (prononcer *psi*) la primitive s'annulant en 0 de la fonction

$$x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}.$$

Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}$, on a $\psi'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. On ne cherchera pas à calculer la fonction ψ.

Calcul 13.16 — Dérivation autour de ψ.

Déterminer l'expression de la dérivée des fonctions suivantes :

a) $x \longmapsto \psi(3x)$ .... $\boxed{}$

b) $x \longmapsto \psi(2x-3)$ ... $\boxed{}$

c) $x \longmapsto \psi(x^3)$ .... $\boxed{}$

d) $x \longmapsto \psi^2(x)$ .... $\boxed{}$

Calcul 13.17 — Calcul d'une primitive à l'aide de ψ (I).

Déterminer l'expression d'une primitive des fonctions suivantes. Cettte expression fera intervenir ψ.

a) $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{3}}{1+3x^2}$ .....

b) $x \longmapsto \dfrac{1}{9+x^2}$ ......

Calcul 13.18 — Calcul d'une primitive à l'aide de ψ (II).

a) Mettre le polynôme $x^2+10x+26$ sous forme canonique ....

b) En déduire l'expression, en fonction de ψ, d'une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+10x+26}$

Calcul 13.19 — Calcul d'une primitive à l'aide de ψ (III).

a) Mettre sous forme de fraction la quantité $\dfrac{2x}{x^2+9} - \dfrac{7}{x^2+9}$ ....

b) En déduire l'expression, en fonction de ψ, d'une primitive de $x \longmapsto \dfrac{2x-7}{x^2+9}$ ......

Calcul 13.20 — En autonomie.

Déterminer l'expression, en fonction de ψ, d'une primitive des fonctions suivantes :

a) $x \longmapsto \dfrac{3}{9x^2-12x+5}$ ..

b) $x \longmapsto \dfrac{x}{x^4+3}$ ....

Maintenant, on note φ (prononcer *phi*) la primitive sur $]-1,1[$ et s'annulant en 0 de la fonction

$$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ainsi, on a, pour $x \in \,]-1,1[$, $\varphi'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. On ne cherchera pas à calculer la fonction φ.

Calcul 13.21 — Dérivation.

Déterminer l'expression de la dérivée des fonctions suivantes :

a) $x \longmapsto \varphi(3x)$ ....

b) $x \longmapsto \varphi(2x-3)$ ....

c) $x \longmapsto \varphi(\sqrt{x})$ ....

d) $x \longmapsto \varphi^2(x^3)$ ....

Calcul 13.22 — Primitives.

Déterminer l'expression d'une primitive des fonctions suivantes. Cette expression fera intervenir φ. On pourra, comme dans la série d'exercices sur la fonction ψ, commencer par écrire les polynômes sous forme canonique.

a) $x \longmapsto \dfrac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$ ....

b) $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{25-16x^2}}$ ......

c) $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{-x^2-8x-15}}$.

d) $x \longmapsto \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}$ ....

Réponses mélangées

$x \longmapsto \psi(x+5)$ $\quad$ $x \longmapsto \frac{1}{4}\ln\frac{2-\cos x}{2+\cos x}$ $\quad$ $\frac{2x-7}{x^2+9}$ $\quad$ $x \longmapsto \frac{1}{5}\cos(2-5x)$ $\quad$ $x \longmapsto \frac{1}{6}\ln\left|\frac{3+x}{3-x}\right|$

$x \longmapsto \frac{-4/3}{(x^3+2)^2}$ $\quad$ $x \longmapsto \frac{3}{1+9x^2}$ $\quad$ $x \longmapsto \frac{3}{2}x^{2/3}$ $\quad$ $x \longmapsto -\frac{1}{6}(1-2x^2)^{3/2}$ $\quad$ $x \longmapsto \psi(\sqrt{3}x)$

$x \longmapsto \frac{2\psi(x)}{1+x^2}$ $\quad$ $-\cos^2(x)$ $\quad$ $x \longmapsto -\frac{1}{2(1+\mathrm{e}^x)^2}$ $\quad$ $\cos(x)$ $\quad$ $x \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$

$x \longmapsto \frac{(x^2+3x+12)^{11}}{11}$ $\quad$ $x \longmapsto \frac{(x^2+x)^6}{6}$ $\quad$ x $\quad$ $2(x-2)(2x-7)$ $\quad$ $x \longmapsto \ln(x^2+9)-\frac{7}{3}\psi\left(\frac{x}{3}\right)$

$x \longmapsto \frac{1}{3}\ln\left|\sin^3(x)+5\right|$ $\quad$ $x \longmapsto \frac{x^4}{4}+2x$ $\quad$ $x \longmapsto \frac{1}{3}\mathrm{e}^{x^3+\frac{3}{2}x^2+15x-12}$ $\quad$ $x \longmapsto \frac{3x^2}{1+x^6}$

$-\cos^2(x)+2\cos(x)+1$ $\quad$ $x \longmapsto \frac{1}{3}\ln|x|$ $\quad$ $x \longmapsto \frac{3}{5}\mathrm{e}^{5x}-\frac{x^3}{3}$ $\quad$ $x \longmapsto \frac{1}{\cos(x)+3}$

$x \longmapsto -\frac{\mathrm{e}^{-12x}}{12}$ $\quad$ $x \longmapsto x+\frac{1}{x+1}$ $\quad$ $x \longmapsto \ln|\mathrm{e}^x+x|$ $\quad$ $(x+5)^2+1$ $\quad$ $x \longmapsto \mathrm{e}^{-\cos(x)+3}$

$x \longmapsto -\frac{1}{2}\cos^2(x)$ $\quad$ $x \longmapsto \frac{x^2}{2}-\frac{\ln(1+x^2)}{2}$ $\quad$ $\frac{6}{9-x^2}$ $\quad$ $t \longmapsto t-\ln|1+t|$

$x \longmapsto \frac{\ln(1+x^2)}{2}$ $\quad$ $x \longmapsto x\mathrm{e}^{x^3}$ $\quad$ $x \longmapsto \mathrm{e}^3 x$ $\quad$ $x \longmapsto \frac{1}{3}\psi\left(\frac{x}{3}\right)$ $\quad$ $x \longmapsto \ln\left(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\right)$

$x \longmapsto \frac{6x^2\varphi(x^3)}{\sqrt{1-x^6}}$ $\quad$ $x \longmapsto \exp(\mathrm{e}^x)$ $\quad$ $x \longmapsto -\cos(2x)$ $\quad$ $x \longmapsto -\frac{1}{4x^4}$ $\quad$ $x \longmapsto \frac{1}{40}\ln\left|\frac{5+4x}{5-4x}\right|$

$x \longmapsto \frac{1}{2x^2-6x+5}$ $\quad$ $x \longmapsto \ln\left|x^4+x^3\right|$ $\quad$ $x \longmapsto -\ln|\cos(x)|$ $\quad$ $x \longmapsto \frac{1}{18}(3\sin(x)+2)^6$

$x \longmapsto \ln|\sin(x)|$ $\quad$ $x \longmapsto \frac{(x^3+3x+4)^2}{6}$ $\quad$ $\frac{t}{1+t}$ $\quad$ $x \longmapsto \sin(3x+5)$ $\quad$ $x \longmapsto \frac{1}{6}\sin^6(x)$

$x \longmapsto \varphi(x+4)$ $\quad$ $x \longmapsto \ln\left|x^5+x^3+x+2\right|$ $\quad$ $x \longmapsto \ln\left|x^3+2x^2+1\right|$ $\quad$ $x \longmapsto \psi(3x-2)$

$t \longmapsto \ln|1+t|$ $\quad$ $x \longmapsto 2\sqrt{x}$ $\quad$ $x \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{3}}\psi\left(\frac{x^2}{\sqrt{3}}\right)$ $\quad$ $x \longmapsto x+\ln|x+1|$ $\quad$ $x \longmapsto \frac{(\mathrm{e}^x+x)^{23}}{23}$

$x \longmapsto \frac{1}{3}\varphi(x^3)$ $\quad$ $x \longmapsto \ln\left|\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}\right|$ $\quad$ $x(x-1)(x+2)$ $\quad$ $x \longmapsto \frac{x^2}{2}+5x+\frac{4}{x}$

$5(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x^2+1)$ $\quad$ $x \longmapsto \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$ $\quad$ $x \longmapsto \frac{(\ln(x))^2}{2}$ $\quad$ $\frac{4}{4-\cos^2(x)}$

$x \longmapsto \frac{1}{4}\varphi\left(\frac{4x}{5}\right)$ $\quad$ $3(x-2)(x-4)$ $\quad$ $x \longmapsto \ln\sqrt{|2x-3|}$ $\quad$ $\frac{2a}{a^2-x^2}$ $\quad$ $x \longmapsto \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|$

$x \longmapsto \varphi(5x)$ $\quad$ $\cos^4(x)-3\cos^2(x)-2\cos(x)+2$ $\quad$ $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{-x^2+3x-2}}$

► Réponses et corrigés page 212

Équations différentielles I

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 14.1 — Calculs avec des exponentielles.

Simplifier les expressions suivantes.

a) $e^{\frac{3}{2}} \times e^{-\frac{7}{6}}$ ....

b) $\left(e^{-\frac{3}{4}}\right)^3 \times \left(e^{\frac{7}{25}}\right)^5$ ......

c) $e^{\frac{\pi}{2}} \times e^{-\frac{\pi}{3}}$ ....

d) $\dfrac{e^{3x+7} \times e^{2x+1}}{\left(e^{x+2/5}\right)^5}$ ....

Calcul 14.2 — Résolution d'équations du premier degré.

Donner la solution de chacune des équations suivantes, où x est l'inconnue réelle.

a) $7x - 8 = 21x - 12$ ....

b) $\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{2}{x}$ ....

c) $\dfrac{7x-23}{4x-1} = 5$ ....

d) $\dfrac{2x+3}{x-7} = \dfrac{2x-11}{x+9}$ ....

Équations différentielles homogènes

Calcul 14.3 — Formes générales.

Déterminer la forme générale des solutions des équations différentielles homogènes suivantes.

a) $y' = 2y$ ....

b) $y' + 7y = 0$ ....

c) $2y' - 3y = 0$ ....

d) $2y' + 3y = 8y + 9y'$

Calcul 14.4 — Équations homogènes avec condition (I).

Dans chacun des cas suivants, déterminer la solution f de l'équation différentielle donnée vérifiant la condition donnée.

a) $y' = -11y$ avec $f(0) = 5$ ....

b) $2y' - 3y = 2y + 3y'$ avec $f(0) = \pi$ ....

Calcul 14.5 — Équations homogènes avec condition (II).

Dans chacun des cas suivants, déterminer la solution f de l'équation différentielle donnée vérifiant la condition donnée.

a) $\dfrac{1}{2}y' + y = \dfrac{1}{3}y - y'$ avec $f(3) = \mathrm{e}^{-1}$ ....

b) $y' + \sqrt{2}y = 0$ avec $f(\sqrt{2}) = 1$ ....

Équations différentielles avec second membre

Calcul 14.6

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = y - 3$.

a) Déterminer une solution particulière constante de l'équation (E) ....

b) Déterminer la forme générale des solutions de l'équation $y' = y$ ....

c) Déterminer la forme générale des solutions de l'équation (E) ......

Calcul 14.7

On considère l'équation différentielle (E) : $\sqrt{2}y' = \sqrt{6}y - 1$.

a) Déterminer une solution particulière constante de l'équation (E) ....

b) Déterminer la forme générale des solutions de l'équation $\sqrt{2}y' = \sqrt{6}y$ ....

c) Déterminer la forme générale des solutions de l'équation (E) ......

Calcul 14.8 — En autonomie (I).

Déterminer la forme générale des solutions de l'équation différentielle : $13y' - 3y = 12y' + 2y + \dfrac{35}{9}$.

....

Calcul 14.9 — En autonomie (II).

Déterminer la fonction f solution de l'équation différentielle : $3y' - 7y = \dfrac{21}{25}$ telle que $f(2) = -5$.

....

Calculs plus difficiles

Calcul 14.10 — Une condition initiale intégrale.

Soit f la fonction solution de l'équation différentielle : $3y' - 4y = 0$ vérifiant la condition $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Déterminer f ....

Calcul 14.11 — Une équation intégrale.

Déterminer la fonction f continue vérifiant, pour tout réel x, $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + f(x) = 2$.

....

Réponses mélangées

$x \longmapsto C\mathrm{e}^{2x}$ $\quad x \longmapsto C\mathrm{e}^{\sqrt{3}x}$ $\quad -2$ $\quad \mathrm{e}^{6}$ $\quad \mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$ $\quad \dfrac{2}{7}$ $\quad x \longmapsto 5\mathrm{e}^{-11x}$ $\quad x \longmapsto \pi\mathrm{e}^{-5x}$

$\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}}$ $\quad x \longmapsto k\mathrm{e}^{5x} - \dfrac{7}{9}$ $\quad \mathrm{e}^{-\frac{17}{20}}$ $\quad x \longmapsto k\mathrm{e}^{x} + 3$ $\quad -\dfrac{18}{13}$ $\quad x \longmapsto C\mathrm{e}^{\sqrt{3}x} + \dfrac{1}{\sqrt{6}}$

$x \mapsto -\dfrac{122}{25}\mathrm{e}^{\frac{7x-14}{3}} - \dfrac{3}{25}$ $\quad x \longmapsto C\mathrm{e}^{3x/2}$ $\quad x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{6}}$ $\quad x \longmapsto 2\mathrm{e}^{-x}$ $\quad x \mapsto \dfrac{4}{3(\mathrm{e}^{4/3} - \mathrm{e}^{-4/3})}\mathrm{e}^{4x/3}$

$x \longmapsto C\mathrm{e}^{-7x}$ $\quad \dfrac{25}{23}$ $\quad x \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{3} - \frac{4}{9}x}$ $\quad x \longmapsto C\mathrm{e}^{-5x/7}$ $\quad x \longmapsto 3$ $\quad x \longmapsto \mathrm{e}^{2-\sqrt{2}x}$ $\quad x \longmapsto C\mathrm{e}^{x}$

► Réponses et corrigés page 218

Équations différentielles II

Prérequis

- Pour l'ensemble de la fiche, « résoudre une équation différentielle » signifie « donner la forme générale des solutions » de l'équation proposée.
- La dérivée d'une fonction composée $f = v \circ u$ est donnée par la formule

$$f' = (v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'.$$

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 15.1

Développer, réduire et ordonner suivant les puissances croissantes de x les expressions suivantes.

a) $(1-x)(-x^2+5x+2)$ ....

b) $(x-1)(x+2)(x-3)$ ....

c) $(1-2x)\left(x+\frac{3}{2}\right)(2x+2)$ ....

d) $(x^3+x-1-x^2)(x+1)$ ....

Calcul 15.2 — Des racines carrées.

Écrire sans racine carrée au dénominateur les expressions suivantes.

a) $\dfrac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}$ ....

b) $\left(\dfrac{5-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2$ ....

c) $\dfrac{1}{3+\sqrt{7}} - \dfrac{2}{5-\sqrt{3}}$ ....

d) $\dfrac{1}{\sqrt{15}}\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{15}}\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ .....

Équations différentielles du type $y' = ay + b$

Calcul 15.3 — Trouver l'équation différentielle connaissant une solution.

Quelle est l'équation différentielle dont la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \mathrm{e}^{4x} - \frac{1}{4} \end{cases}$ est solution ?

(a) $y' = 4y - \dfrac{1}{4}$

(b) $y' = \dfrac{-1}{4}y + 4$

(c) $y' = -4y - 2$

(d) $y' = 4y + 1$

....

Calcul 15.4

Quelle est la fonction qui est solution de l'équation différentielle $y' = -y + 3$?

ⓐ $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x - 3 \end{array}$ ⓑ $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -3e^{-x} + 3 \end{array}$ ⓒ $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -e^x + 3 \end{array}$

....

Calcul 15.5 — Résolution d'une équation différentielle (I).

On note (E) l'équation différentielle $y' = -\dfrac{2}{3}y + 5$.

a) Résoudre sur $\mathbb{R}$: $y' = -\dfrac{2}{3}y$ ....

b) Pour quelle valeur $K \in \mathbb{R}$ la fonction constante $x \longmapsto K$ est-elle solution de (E) ?

....

c) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$ ....

Calcul 15.6 — Résolution d'une équation différentielle (II).

On note (E) l'équation différentielle $\dfrac{2}{7}y' = \dfrac{1}{7}y + 2$.

a) Les solutions de (E) sont les solutions de

ⓐ $\dfrac{2}{7}y' = \dfrac{1}{7}y$

ⓑ $y' = -\dfrac{1}{7}y + \dfrac{12}{7}$

ⓒ $y' = \dfrac{1}{2}y + 7$

ⓓ $y' = \dfrac{1}{2}y + \dfrac{2}{7}$

Il y a une unique bonne réponse.

....

b) Résoudre sur $\mathbb{R}$: $y' = \dfrac{1}{2}y$ ....

c) Résoudre sur $\mathbb{R}$: $y' = \dfrac{1}{7}y$ ....

d) Déterminer une solution particulière de (E) ....

e) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$ ....

Calcul 15.7 — Résolution d'une équation différentielle (III).

On note (E) l'équation différentielle $4y' + \frac{2}{5}y - 1 = 0$.

a) Les solutions de (E) sont les solutions de

(a) $y' = \frac{1}{10}y - 3$ (b) $y' = -\frac{1}{10}y + \frac{1}{4}$ (c) $y' = -\frac{1}{20}y + \frac{1}{2}$ (d) $y' = \frac{1}{10}y + \frac{3}{4}$

Il y a une unique bonne réponse.

b) Déterminer une solution particulière de (E)

c) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$

Calcul 15.8 — En autonomie.

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

a) $3y' - 2y = 7$

b) $2y' - 3y = y' - 8$

c) $y' - \frac{1}{2}y = \frac{1}{3}y' + y + 1$

d) $\pi y' + 3y = y + \frac{\pi}{3}y' - \frac{\pi}{2}$

Avec des conditions initiales

Calcul 15.9

Pour chacune des équations différentielles suivantes, déterminer la solution sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition initiale indiquée.

a) $y' = 2y - 1$ et $y(0) = -4$

b) $\frac{1}{2}y' - y = 7$ et $y(1) = 0$

Calcul 15.10

Pour chacune des équations différentielles suivantes, déterminer la solution sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition initiale indiquée.

a) $5y - y' = 7$ et $y(-3) = 3$ ....

b) $3\pi y' - 2y = \pi$ et $y(0) = 0$ ....

Calcul 15.11 — Des conditions initiales variées.

Soient b et c des nombres réels.

a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $2y' + 3y = b$ ....

Pour chacune des équations différentielles suivantes, déterminer la solution sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition initiale indiquée.

b) $2y' + 3y = b$ et $y(0) = b$ ....

c) $2y' + 3y = b$ et $y(0) = c$ ....

d) $2y' + 3y = b$ et $y(c) = b$ ....

Équations différentielles du type $y' = ay + f$

Calcul 15.12

Quelle est l'équation différentielle dont la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{9} - \frac{2}{3}x \end{cases}$ est solution ?

(a) $y' = -y + x - 2$ (b) $y' = 3y + x^2 - 1$ (c) $y' = 3y + 2x - 1$ (d) $y' = 2y - 2x + 3$

....

Calcul 15.13

On note (E) l'équation différentielle $y' = 5y + 2x - 3$.

a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' = 5y$ ....

b) Déterminer le couple de réels (a, b) tel que $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto ax + b \end{cases}$ soit solution de (E) .

c) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$ ....

Calcul 15.14

On note (E) l'équation différentielle $y' + y = 2\mathrm{e}^{-x}$.

a) Déterminer l'unique réel a tel que $\varphi : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto ax\mathrm{e}^{-x} \end{array} \right.$ soit solution de (E) ....

b) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$ ....

Calcul 15.15

On note (E) l'équation différentielle $y' - 3y = 4\sin(x)$.

a) Parmi les expressions suivantes, déterminer celle qui définit une fonction solution de (E).

(a) $\dfrac{-4}{3}\cos(x)$ (c) $\dfrac{4}{5}\cos(x) - \dfrac{2}{5}\sin(x)$

(b) $\dfrac{-4}{3}\sin(x)$ (d) $\dfrac{-2}{5}\cos(x) - \dfrac{6}{5}\sin(x)$

....

b) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$ ....

c) Déterminer la solution de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y(0) = \sqrt{2}$ ....

Calcul 15.16

On note (E) l'équation différentielle $y' + 2y = \mathrm{e}^{-2x}\cos(x)$.

a) Parmi les expressions suivantes, déterminer celle qui définit une fonction solution de (E).

(a) $2\mathrm{e}^{-2x}\cos(x)$ (b) $\mathrm{e}^{-2x}\sin(x)$ (c) $-\mathrm{e}^{-2x}\sin(x)$ (d) $\mathrm{e}^{\cos(x)}$

....

b) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$ ....

c) Déterminer la solution de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y(0) = 1$ ....

Calcul 15.17

Déterminer une expression de f telle que la fonction $\varphi : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2\mathrm{e}^{x} + 3\mathrm{e}^{-x} \end{array} \right.$ soit solution de l'équation différentielle $(E) : 7y' + 3y = f(x)$, sur $\mathbb{R}$ ....

Calculs plus difficiles

Calcul 15.18 — Un peu de théorie.

Dans cet exercice, on présente une méthode de résolution des équations différentielles linéaires

$$y' + a(x)y = 0 \qquad \text{et} \qquad y' + a(x)y = b(x),$$

respectivement notées (H) et (E), où $a : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $b : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions.

On note A une primitive de la fonction a sur I.

a) Soit $f : x \longmapsto \exp\big(-A(x)\big)$. Calculer $f'(x)$ ....

b) Soit C un nombre réel. La fonction Cf est une solution de

(a) $y' + a(x)y = 0$ (b) $y' + a(x)y = b(x)$ (c) ni l'une ni l'autre

....

On note $k : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et dérivable sur I et on considère $\varphi = kf$.

On va déterminer à quelle condition portant sur k la fonction φ est une solution particulière de (E).

c) Calculer l'expression de la fonction φ' en fonction de k, k', a et A.

....

d) La fonction φ est une solution de (E) sur I si, et seulement si :

(a) pour tout $x \in I$, $k'(x) + a(x)k(x) = b(x)$

(b) pour tout $x \in I$, $k'(x)\mathrm{e}^{-A(x)} + a(x) = b(x)$

(c) pour tout $x \in I$, $k'(x)\mathrm{e}^{-A(x)} = b(x)$

....

e) Parmi les expressions suivantes, déterminer celle qui définit une fonction solution de l'équation différentielle $(E) : y' + y = \mathrm{e}^{-x}\cos(x)$

(a) $\mathrm{e}^{-x}\cos(x)$ (b) $\mathrm{e}^{x}\cos(x)$ (c) $\mathrm{e}^{\sin(x)}$ (d) $\mathrm{e}^{-x}\sin(x)$

....

Calcul 15.19 — Équation différentielle à coefficients variables.

On veut résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle

$$(E) : xy' - (1-2x^2)y = 2x^3$$

en utilisant la méthode de l'exercice précédent. On note (H) l'équation différentielle $xy' - (1-2x^2)y = 0$.

a) Déterminer une solution f, non nulle, de (H) sur $\mathbb{R}_+^*$ ....

On admet que l'ensemble des solutions de (H) est l'ensemble des fonctions Cf avec $C \in \mathbb{R}$.

b) Déterminer une solution particulière φ de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ ....

c) Résoudre alors (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ ....

Réponses mélangées

$14 - 5\sqrt{3}$ c $2 + 3x - 6x^2 + x^3$ $3 - x - 8x^2 - 4x^3$ $\frac{23}{22} - \frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{11}$

$\left(\frac{-2}{5}, \frac{13}{25}\right)$ $x \longmapsto C\mathrm{e}^{3x} + \frac{8}{3}$, où $C \in \mathbb{R}$ $x \longmapsto C\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}x} + \frac{15}{2}$, où $C \in \mathbb{R}$

$x \longmapsto C\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}x}$, où $C \in \mathbb{R}$ $x \longmapsto \frac{b}{3} + \frac{2b}{3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x}$ $x \longmapsto -\frac{2}{5}x + \frac{13}{25} + C\mathrm{e}^{5x}$, où $C \in \mathbb{R}$

b $\big(k'(x) - k(x)a(x)\big)\mathrm{e}^{-A(x)}$ $6 - 5x - 2x^2 + x^3$ $x \longmapsto \frac{b}{3} + \frac{2b}{3}\mathrm{e}^{\frac{3}{2}c}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x}$

a $x \longmapsto -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{\frac{2x}{3\pi}}$ $x \longmapsto -\frac{2}{5}\cos(x) - \frac{6}{5}\sin(x) + \big(\sqrt{2} + \frac{2}{5}\big)\mathrm{e}^{3x}$ $\frac{15}{2}$ $x \longmapsto \frac{5}{2}$

$-a(x)\mathrm{e}^{-A(x)}$ $x \longmapsto (\sin(x) + 1)\mathrm{e}^{-2x}$ $x \longmapsto x$ b $x \longmapsto C\mathrm{e}^{\frac{2}{3}x} - \frac{7}{2}$, où $C \in \mathbb{R}$

$x \longmapsto x\mathrm{e}^{-x^2}$ $x \longmapsto \frac{1}{2} - \frac{9}{2}\mathrm{e}^{2x}$ $x \longmapsto 20\mathrm{e}^{x} - 12\mathrm{e}^{-x}$ $x \longmapsto x + Cx\mathrm{e}^{-x^2}$ où $C \in \mathbb{R}$

$x \longmapsto C\mathrm{e}^{\frac{9}{4}x} - \frac{2}{3}$, où $C \in \mathbb{R}$ $-1 + x^4$ c $x \longmapsto (2x + C)\mathrm{e}^{-x}$, où $C \in \mathbb{R}$

$x \longmapsto -14$ $4\sqrt{5} - 9$ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ $x \longmapsto \frac{b}{3} + \big(c - \frac{b}{3}\big)\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x}$ b

$x \longmapsto \frac{7}{5} + \frac{8}{5}\mathrm{e}^{15}\mathrm{e}^{5x}$ $x \longmapsto C\mathrm{e}^{5x}$, où $C \in \mathbb{R}$ $x \longmapsto C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} - 14$, où $C \in \mathbb{R}$ d

$x \longmapsto C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$, où $C \in \mathbb{R}$ 2   c $x \longmapsto \frac{b}{3} + C\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x}$, où $C \in \mathbb{R}$ d

$x \longmapsto (\sin(x) + C)\mathrm{e}^{-2x}$, où $C \in \mathbb{R}$ d $x \longmapsto C\mathrm{e}^{-\frac{1}{10}x} + \frac{5}{2}$, où $C \in \mathbb{R}$ $x \longmapsto C\mathrm{e}^{\frac{1}{7}x}$, où $C \in \mathbb{R}$

$x \longmapsto -\frac{2}{5}\cos(x) - \frac{6}{5}\sin(x) + C\mathrm{e}^{3x}$, où $C \in \mathbb{R}$ $x \longmapsto -7 + 7\mathrm{e}^{-2}\mathrm{e}^{2x}$ $x \longmapsto C\mathrm{e}^{-\frac{3}{\pi}x} - \frac{\pi}{4}$, où $C \in \mathbb{R}$

► Réponses et corrigés page 220

Intégration I

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 16.1 — Des fractions.

Calculer, en donnant le résultat sous forme de fraction irréductible :

a) $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}$ ....

b) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}$ ....

c) $\dfrac{2}{3} - \dfrac{3}{2}$ ....

Calcul 16.2 — D'autres fractions.

Exprimer les nombres suivants sous la forme « $2^a 5^b$ » (avec $a, b \in \mathbb{Z}$).

a) $\dfrac{10^2}{5^4}$ ....

b) $\dfrac{1}{2^2 \times \frac{1}{5^2}}$ ......

c) $\dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{10}$ ....

Premières intégrales

Calcul 16.3

Calculer :

a) $\displaystyle\int_0^1 t \,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_0^1 2t^2 \,\mathrm{d}t$ ......

c) $\displaystyle\int_0^1 (-t+1) \,\mathrm{d}t$ ..

Calcul 16.4 — Une formule générale.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Combien vaut $\displaystyle\int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t$?

(a) $n+1$ (b) $n-1$ (c) $\dfrac{1}{n}$ (d) $\dfrac{1}{n+1}$ (e) $\dfrac{1}{n-1}$

....

Calcul 16.5 — Variations autour d'une puissance.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer :

a) $\displaystyle\int_{-1}^1 t^n \,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} t^n \,\mathrm{d}t$ ....

c) $\displaystyle 1 - \int_0^1 n t^n \,\mathrm{d}t$ ....

d) $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} t^n \,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 16.6

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{t^{2n}}{2^n}\,\mathrm{d}t$ ....

Secondes intégrales

Calcul 16.7 — Variations autour d'une fraction.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$ et soit $a > 0$. Calculer :

a) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}t$ ....

c) $\displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}t$ ....

d) $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \frac{1}{t^{2n}}\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 16.8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculer $\displaystyle\int_0^2 \left(\frac{t^3}{2}\right)^n \mathrm{d}t$ ....

b) Calculer $\displaystyle\int_0^{2^n} n t^{2n-1}\,\mathrm{d}t$ ....

Calculs plus difficiles

Calcul 16.9 — Une somme d'intégrales.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\int_0^2 2t\,\mathrm{d}t + \int_0^2 3t^2\,\mathrm{d}t + \int_0^2 4t^3\,\mathrm{d}t + \cdots + \int_0^2 (n+1)t^n\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 16.10 — Une fraction de fractions, integrée entre deux fractions.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Calculer $\displaystyle\frac{n}{\displaystyle\int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}t}$ ....

Réponses mélangées

$\dfrac{1}{n-1}\dfrac{a^{2n-2}-1}{a^{n-1}}$ $\quad \dfrac{1-(-1)^{n+1}}{n+1}$ $\quad \dfrac{1}{2}$ $\quad \dfrac{1}{n+1}$ $\quad 2^{2n^2-1}$ $\quad 2^{-1}5^{-1}$ $\quad \dfrac{1}{2}$ $\quad \dfrac{1}{(n+1)2^{n+1}}$

$\dfrac{\sqrt{2}}{2n+1}$ $\quad \dfrac{2}{3}$ $\quad \dfrac{1}{2n-1}\dfrac{2^n-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ $\quad \dfrac{2^{n+1}-1}{4^{n+1}(n+1)}$ $\quad \dfrac{2^{2n+1}}{3n+1}$ $\quad 2^2 5^{-2}$ $\quad$ d $\quad -\dfrac{5}{6}$

$\dfrac{1}{n-1}(2^{n-1}-1)$ $\quad \dfrac{1}{6}$ $\quad \dfrac{5}{6}$ $\quad 4(2^n-1)$ $\quad \dfrac{(-1)^n}{n-1}(2^{n-1}-1)$ $\quad 2^{-2}5^2$ $\quad \dfrac{(n-1)}{n^{n-2}(2^{n-1}-1)}$

► Réponses et corrigés page 225

Intégration II

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 17.1

Calculer et donner le résultat sous forme de fraction irréductible.

a) $3 \times \dfrac{2}{9}$ ....

b) $\dfrac{77}{15} \times \dfrac{10}{33}$ .....

c) $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{3}{4}-\frac{2}{5}}$ .....

Calcul 17.2

Calculer :

a) $1 - 3 \times \big(-5 - (-1)^2 \times 4\big)$ ....

b) $-1^3 \times 0{,}25 \times (-3)^3 \times 4$ ....

Calcul 17.3

Écrire sous la forme d'une seule puissance.

a) $\dfrac{2^8 + 2^8}{2^{12}}$ ....

b) $\dfrac{3^4 \times 27^3}{(9^{-1})^2}$ ....

c) $\dfrac{\big((-2)^{-4}\big)^{-1} \times 8^{-3}}{4^3 \times 16}$ ....

d) $\dfrac{(-5)^4 \times 15^8}{(3^2)^4}$ ....

Calcul 17.4

On note, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{-3x^2 + 2x - 1}{x^2 + 1}$. Calculer $f(x)$ dans chacun des cas suivants.

a) si $x = 1$ ......

b) si $x = -1$ ....

c) si $x = -2$ ....

Calculs d'intégrales

Calcul 17.5 — Fonctions usuelles (I).

Calculer :

a) $\displaystyle\int_2^5 \pi \,\mathrm{d}x$ ....

b) $\displaystyle\int_{-1}^3 u \,\mathrm{d}u$ ....

c) $\displaystyle\int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x$ ....

d) $\displaystyle\int_{-1}^0 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$ ....

Calcul 17.6 — Fonctions usuelles (II).

Calculer :

a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} 3t^3 \,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{x^4}{2} \,\mathrm{d}x$ ....

c) $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{1}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$ ....

d) $\displaystyle\int_{2}^{3} \frac{-3}{t^2} \,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 17.7 — Puissances.

Calculer :

a) $\displaystyle\int_{-2}^{1} (3x^2 - 5x + 1) \,\mathrm{d}x$ .....

b) $\displaystyle\int_{0}^{1} \left(\frac{x^4}{3} + \frac{1}{2}\right) \mathrm{d}x$ ....

c) $\displaystyle\int_{1}^{4} \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3}\right) \mathrm{d}x$ ....

Calcul 17.8 — Divers (I).

Calculer :

a) $\displaystyle\int_{0}^{1} \mathrm{e}^{4x} \,\mathrm{d}x$ ....

b) $\displaystyle\int_{0}^{1} \mathrm{e}^{4x-1} \,\mathrm{d}x$ ....

c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (2x+1)^2 \,\mathrm{d}x$ ....

d) $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{3}{\sqrt{2x+1}} \,\mathrm{d}x$ ....

Calcul 17.9 — Divers (II).

Calculer :

a) $\displaystyle\int_{0}^{1} 2x(x^2 - 1) \,\mathrm{d}x$ ....

b) $\displaystyle\int_{0}^{1} x\mathrm{e}^{x^2} \,\mathrm{d}x$ ....

c) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}}{t^2} \,\mathrm{d}t$ ....

d) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (4x-3)(4x^2 - 6x + 3)^3 \,\mathrm{d}x$ ....

Calcul 17.10 — Divers (III).

Calculer :

a) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \,\mathrm{d}x$ ....

b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \exp(t + \mathrm{e}^t) \,\mathrm{d}t$ ....

c) $\displaystyle\int_{3}^{4} \frac{x-1}{x^2(x-2)^2} \,\mathrm{d}x$ ....

d) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1-x^2}{(x^3 - 3x + 1)^3} \,\mathrm{d}x$ ....

Calculs plus difficiles

Calcul 17.11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^{2x} + 3e^x + 1}{(e^x + 1)^2}$.

a) À l'aide d'une identité remarquable, factoriser $e^{2x} + 2e^x + 1$ ....

b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ ....

Calcul 17.12 — Décomposition en éléments simples.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{2x^3 + 3x^2 + 3}{(x+1)^2}$.

a) Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{(x+1)^2}$. ....

b) En déduire $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ ....

Calcul 17.13 — Avec des valeurs absolues.

Calculer $\displaystyle\int_{-1}^2 \big(|x-1| - |4x+2|\big)\,dx$ ....

Calcul 17.14 — Intégrale dépendant d'un paramètre.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $\displaystyle\int_{-1}^x f(t)\,dt = -6x^3 - 8x^2 - 3x - 1$.

Calculer $F(x) = \displaystyle\int_x^2 f(t)\,dt$ ....

Réponses mélangées

$\frac{53}{8}$	$\frac{1}{4}\left(e^3 - \frac{1}{e}\right)$	$\frac{31}{10}$	$\frac{14}{9}$	$\frac{1}{4}(e^4 - 1)$	$6x^3 + 8x^2 + 3x - 86$	2^{-3}	$\frac{50}{21}$	$1 - \frac{1}{e}$			
$\frac{4}{27}$	$-\frac{1}{2}$	$(a,b,c) = (2,-1,4)$	5^{12}	$\frac{3}{2} - \frac{1}{e+1}$	2^{-15}	$e^e - e^{\frac{1}{e}}$	2	$-\frac{1}{2}$			
-1	28	$\frac{-17}{5}$	$\frac{1}{3}$	27	2	$\frac{39}{2}$	$\frac{-21}{2}$	$\frac{1}{2}(e-1)$	$\frac{14}{3}$	$-3\ 570$	-3
$\sqrt{2} - 1$	3^{17}	$\frac{17}{30}$	3π	$\frac{2}{3}$	4	$e - \sqrt{e}$	$9 - 3\sqrt{3}$	$\frac{5}{48}$	$(e^x + 1)^2$	$\frac{45}{4}$	

► Réponses et corrigés page 227

Intégration III

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 18.1 — Des équations.

Résoudre les équations suivantes, en donnant la valeur de l'unique solution.

a) $\dfrac{1}{2x-3} = 4$ ....

b) $\dfrac{2x+3}{x+1} = 1$ ....

c) $\dfrac{2x+3}{x-2} = 4$ ....

d) $\dfrac{5x+2}{2x+5} = 4$ ....

Calcul 18.2 — Des équations à paramètre.

Résoudre les équations suivantes, où m est un paramètre, en donnant la valeur de l'unique solution.

a) $\dfrac{1}{4x+5} = m$ où $m \neq 0$ .....

b) $\dfrac{x+2}{x-1} = m$ où $m \neq 1$ ......

c) $\dfrac{4x+1}{x+3} = 2m$ avec $m \neq 2$ ..

d) $\dfrac{x-1}{3x+3} = -m$ où $m \neq -\dfrac{1}{3}$.

Calculs d'intégrales

Calcul 18.3

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_0^2 \big(t^3 + \exp(t)\big)\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_1^5 \frac{3}{t}\,\mathrm{d}t$ ....

c) $\displaystyle\int_1^4 \frac{2}{t^2}\,\mathrm{d}t$ ....

d) $\displaystyle\int_2^4 \left(\frac{4}{t} + \frac{1}{t^3}\right)\mathrm{d}t$ ....

Calcul 18.4

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{4} 4\exp(2t+2)\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_{0}^{3} \frac{2}{5t+3}\,\mathrm{d}t$ ....

c) $\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{-2}{(t+4)^2}\,\mathrm{d}t$ ....

d) $\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{1}{2}\frac{1}{2t-3}\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 18.5

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{-2}^{4} \frac{2t+1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}} (t^2+1)\exp(2t^3+6t)\,\mathrm{d}t$ ....

c) $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{t+\frac{1}{2}}{\sqrt{2t^2+2t+1}}\,\mathrm{d}t$ ....

d) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{6}t}{(t^3+t^2+1)^4}\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 18.6

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{(\frac{t}{3}+1)^2}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t}{t^3+t^2-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t$ ....

c) $\displaystyle\int_{-4}^{-1} \frac{2t+5}{t^2+5t-1}\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 18.7

Calculer l'intégrale suivante.

$\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{t+1}{t^2+2t-2}\ln(t^2+2t-2)^3\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 18.8

Calculer les intégrales suivantes où n est un entier supérieur ou égal à 2.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n-1}}{t^n+2}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_0^1 t^{n-2}\exp(t^{n-1})\,\mathrm{d}t$ ....

c) $\displaystyle\int_2^3 t^{n-1}\sqrt{t^n+3}\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 18.9 — Calcul d'une intégrale par décomposition (I).

Trouver deux réels a et b qui rendent les égalités suivantes vraies.

a) $\displaystyle\frac{1}{t(t+1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t+1}$ ....

b) $\displaystyle\frac{1}{t(t+2)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t+2}$ ....

À l'aide des résultats précédents, calculer les intégrales suivantes.

c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t(t+1)}\,\mathrm{d}t$ ....

d) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{t(t+2)}\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 18.10 — Calcul d'une intégrale par décomposition (II).

Trouver deux réels a et b qui rendent les égalités suivantes vraies.

a) $\displaystyle\frac{t+3}{(t+1)(t+2)} = \frac{a}{t+1} + \frac{b}{t+2}$ ....

b) $\displaystyle\frac{t+2}{t(t-1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t-1}$ ....

À l'aide des résultats précédents, calculer les intégrales suivantes.

c) $\displaystyle\int_{-4}^{-3} \frac{t+3}{(t+1)(t+2)}\,\mathrm{d}t$ ....

d) $\displaystyle\int_2^3 \frac{t+2}{t(t-1)}\,\mathrm{d}t$ ....

Calculs plus difficiles

Calcul 18.11 — En forçant le dénominateur à apparaître.

a) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 \frac{t}{t+1}\,\mathrm{d}t$ en remplaçant au numérateur t par $(t+1)-1$.

....

Calculer les intégrales suivantes en suivant la même méthode.

b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{t}{t+5}\,\mathrm{d}t$ ....

c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{t}{2t+1}\,\mathrm{d}t$ ....

d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{t^2-t}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t$ ....

e) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2t^2-t-2}{2t^2+3t+1}\,\mathrm{d}t$ ....

Réponses mélangées

$3\ln(5)$ $\quad \dfrac{1}{6}\ln\left(\dfrac{23}{3}\right)$ $\quad \dfrac{3}{2}$ $\quad \dfrac{1-5m}{4m}$ $\quad 1+\ln\left(\dfrac{3}{7}\right)$ $\quad -2$ $\quad 3+\mathrm{e}^2$

$a=2$ et $b=-1$ $\quad 1+\ln\left(\dfrac{2}{5}\right)$ $\quad a=-2$ et $b=3$ $\quad \dfrac{3}{32}+4\ln(2)$ $\quad 2(\mathrm{e}^{10}-1)$

$\dfrac{2}{5}\ln(6)$ $\quad a=1$ et $b=-1$ $\quad \dfrac{1-3m}{1+3m}$ $\quad 1+\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)$ $\quad \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{41}-\sqrt{5}\right)$ $\quad 1+5\ln\left(\dfrac{6}{7}\right)$

$\dfrac{13}{486}$ $\quad 0$ $\quad \dfrac{1}{8}\ln(22)^4$ $\quad \dfrac{13}{8}$ $\quad \dfrac{1}{n-1}(\mathrm{e}-1)$ $\quad \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{3}{5}\right)$ $\quad -\dfrac{3}{5}$ $\quad \dfrac{m+2}{m-1}$

-6 $\quad \dfrac{1}{6}\left(\mathrm{e}^{\frac{13}{4}}-1\right)$ $\quad \ln\left(\dfrac{32}{9}\right)$ $\quad \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{6}{5}\right)$ $\quad \ln\left(\dfrac{8}{9}\right)$ $\quad \dfrac{1-6m}{2(m-2)}$ $\quad \ln\left(\dfrac{4}{3}\right)$

$a=\dfrac{1}{2}$ et $b=-\dfrac{1}{2}$ $\quad \dfrac{9}{20}$ $\quad \dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$ $\quad \ln(7)$ $\quad -\dfrac{\ln(7)}{4}$ $\quad \dfrac{2}{3n}\left((3^n+3)^{\frac{3}{2}}-(2^n+3)^{\frac{3}{2}}\right)$ $\quad \dfrac{11}{2}$

► Réponses et corrigés page 230

Intégration par parties I

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 19.1

Calculer $f'(x)$ pour chacune des fonctions f définies par les expressions suivantes.

On ne se souciera pas du domaine de dérivabilité.

a) $f(x) = x\mathrm{e}^x$ ....

b) $f(x) = x\ln(x)$ ....

c) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ ....

d) $f(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$ ....

e) $f(x) = \sqrt{4x^2+3}$ ....

f) $f(x) = \dfrac{1}{x^6+3}$ ....

Calcul 19.2

Factoriser puis simplifier chacune des expressions suivantes.

a) $(1-7x)(3x+5) - (9x+15)(x-4)$ ....

b) $x\mathrm{e}^x - 3\mathrm{e}^x$ ....

c) $3\ln(x) - \ln(x^2)$ ....

d) $\mathrm{e}^{2x} + 4\mathrm{e}^x + 4$ ....

Premières intégrations par parties

Calcul 19.3

Calculer à l'aide d'une intégration par parties :

a) $\displaystyle\int_0^1 t\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} t\ln(t)\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 19.4

Calculer à l'aide d'une intégration par parties :

a) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} t^2\ln(t)\,\mathrm{d}t$ ....

c) $\displaystyle\int_0^{10} (2t+1)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ ....

d) $\displaystyle\int_{\frac{-1}{3}}^{0} (4-3t)\mathrm{e}^{3t+1}\,\mathrm{d}t$ ....

Primitives du logarithme et de ses puissances

Calcul 19.5

Calculer à l'aide d'une intégration par parties :

a) $\displaystyle\int_1^5 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^x \ln(t)\,\mathrm{d}t$ avec $x > 0$ .....

c) $\displaystyle\int_1^5 (\ln(t))^2\,\mathrm{d}t$ ....

d) $\displaystyle\int_1^5 (\ln(t))^3\,\mathrm{d}t$ ....

Doubles intégrations par parties

Calcul 19.6

Calculer à l'aide de deux intégrations par parties :

a) $\displaystyle\int_0^1 t^2\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} t^2(\ln(t))^2\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 19.7

Calculer à l'aide de deux intégrations par parties :

a) $\displaystyle\int_0^1 t^2\mathrm{e}^{2t+1}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_1^7 \frac{(\ln(t))^2}{t^3}\,\mathrm{d}t$ ....

Intégrales paramétrées

Calcul 19.8

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

a) Calculer I_0 ....

b) Trouver a et b tels que $\dfrac{t}{1+t} = a + \dfrac{b}{1+t}$ ....

c) Calculer I_1 ....

d) Exprimer $I_{n+1} + I_n$ en fonction de n ....

e) En déduire la valeur de I_3 ....

Calculs plus difficiles

Calcul 19.9 — Limite et intégrations par parties (I).

Calculer $\lim_{x \to +\infty} \int_0^x t^3 e^{-\frac{t^2}{2\pi}} \, dt$ ....

Calcul 19.10 — Limite et intégrations par parties (II).

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathbb{R}$, on pose $I(n, A) = \int_0^A t^n e^{-t} \, dt$. On admet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence de :

$$J(n) = \lim_{A \to +\infty} \int_0^A t^n e^{-t} \, dt.$$

a) Calculer $J(0)$ ....

b) Exprimer $J(n+1)$ en fonction de $J(n)$ ....

c) En déduire une expression de $J(n)$ en fonction de n ....

Réponses mélangées

$\frac{1}{n+1}$ $\quad \frac{e^2+1}{4}$ $\quad \ln(x)$ $\quad \frac{5}{27}e^3 - \frac{2}{27}$ $\quad 5\ln(5)^2 - 10\ln(5) + 8$ $\quad n!$ $\quad x\ln(x) - x$

$J(n+1) = (n+1)J(n)$ $\quad \frac{5e}{3} - 2$ $\quad \frac{e^x(x-1)}{x^2}$ $\quad (e^x+2)^2$ $\quad 5\ln(5) - 4$ $\quad 2\pi^2$

$\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$ $\quad \frac{4x}{\sqrt{4x^2+3}}$ $\quad \frac{1}{98}\Big(-(\ln 7)^2 - \ln 7 + 24\Big)$ $\quad \frac{5}{6} - \ln(2)$ $\quad 5\ln(5)^3 - 15\ln(5)^2 + 30\ln(5) - 24$

$(3x+5)(13-10x)$ $\quad e - 2$ $\quad -\frac{6x^5}{(x^6+3)^2}$ $\quad \frac{1}{4}e^3 - \frac{1}{4}e$ $\quad \ln(2)$ $\quad a = 1$ et $b = -1$

$1 - \ln(2)$ $\quad e^x(x-3)$ $\quad 1$ $\quad 3 - 23e^{-10}$ $\quad 1$ $\quad \frac{2e^3+1}{9}$ $\quad (x+1)e^x$ $\quad \frac{e-2}{e}$ $\quad \ln(x) + 1$

► Réponses et corrigés page 233

Intégration par parties II

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 20.1 — Des logarithmes et des exponentielles.

Simplifier les expressions suivantes.

a) $\ln\left(\sqrt{e^5}\right) - 5 + \dfrac{1}{2}e^{\ln(5)}$ ....

b) $4\ln(2) - 2\ln(4)$ ....

c) $\dfrac{e \times \left(e^{-3}\right)^2}{e^2 \times \left(e^{-1}\right)^2}$ ....

d) $\left(e^{-6}\right)^2 \times \sqrt{e^{24}}$ ....

Calcul 20.2 — Un peu de dérivation.

Calculer $f'(x)$ pour f définie par les expressions suivantes.

a) $f(x) = (x+1)x$ ....

b) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ ....

c) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ ....

d) $f(x) = \sqrt{1-x}$ ....

Avec une seule intégration par parties

Calcul 20.3 — Deux premières intégration par parties.

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties.

a) $\displaystyle\int_1^2 \ln(x)\,dx$ ....

b) $\displaystyle\int_0^1 (x+1)e^{-x}\,dx$ ....

Calcul 20.4 — Avec un paramètre.

On considère un entier relatif a différent de -1.

Calculer, par intégration par parties, $\displaystyle\int_1^4 x^a \ln(x)\,dx$ ....

Calcul de primitives par intégration par parties

Calcul 20.5 — Un exemple guidé.

On considère les fonctions f et g définies, pour x dans $]-1,+\infty[$, par

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}} \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^x \frac{t}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t.$$

a) Soit $x > -1$. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $g(x)$ ...

b) Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ ......

c) Calculer $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$ .....

d) Calculer $g'(x)$, pour $x > -1$ ....

e) L'application g est-elle, « oui » ou « non », la primitive de f qui s'annule en 0 ? ....

Calcul 20.6 — Un deuxième exemple.

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$.

a) À l'aide d'une intégration par parties, déterminer l'expression de $F(x)$, où F est la primitive de f qui s'annule en 1.

On procèdera comme ci-dessus.

....

b) Pour a et b dans I, calculer $\displaystyle\int_a^b \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ ....

Calcul 20.7 — Un troisième exemple, avec un paramètre.

On considère un réel a et la fonction f_a définie sur $]a,+\infty[$ par $f_a(x) = \ln(x-a)$.

a) À l'aide d'une intégration par parties, déterminer la primitive F_a de f_a qui s'annule en $a+1$.

....

b) Calculer $I_a = \displaystyle\int_2^3 f_a(x)\,\mathrm{d}x$ ....

c) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_2^3 \ln\big(x^2-1\big)\,\mathrm{d}x$ ....

Avec plusieurs intégrations par parties successives

Calcul 20.8

Calculer les intégrales suivantes à l'aide de plusieurs intégrations par parties successives.

a) $\displaystyle\int_2^0 (x^2+1)\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$ ....

b) $\displaystyle\int_1^2 (x^2-2x+1)\mathrm{e}^{2x} \,\mathrm{d}x$ ...

Calcul 20.9

Calculer les intégrales suivantes à l'aide de plusieurs intégrations par parties successives.

a) $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(x^2+2x+1\right)^2\mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x$.

b) $\displaystyle\int_{-1}^0 \left(x^3-2x+1\right)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \,\mathrm{d}x$ ...

Calcul 20.10 — Un calcul d'intégrales classiques.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les intégrales

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x.$$

a) Exprimer J_{n+1} en fonction de I_n et I_{n+1} ....

b) À l'aide d'une intégration par parties, exprimer I_n en fonction de J_{n+1} et de n.

....

c) En déduire une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1} ......

d) Sachant que $I_1 = \dfrac{\pi}{4}$, calculer I_3 ....

e) Calculer I_4 ....

Calculs plus difficiles

Calcul 20.11

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \ln\big(1+\sqrt{x}\big)$.

À l'aide d'une intégration par parties, déterminer la primitive F de f qui s'annule en 1.

....

Calcul 20.12 — Une limite d'intégrales.

Pour $n, p \in \mathbb{N}$, on définit $f_{n,p}$ sur $]0,1]$ par $f_{n,p}(x) = \displaystyle\int_x^1 t^n (\ln(t))^p \,\mathrm{d}t$.

On considère également $I_{n,p} = \lim\limits_{x\to 0} f_{n,p}(x)$.

a) Calculer $I_{n,0}$ ....

b) Pour $p \geqslant 1$, exprimer $I_{n,p}$ en fonction de n, de p et de $I_{n,p-1}$ ....

c) En déduire l'expression de $I_{n,p}$ en fonction de n et de p ....

Réponses mélangées

0 $\quad 2x+1 \quad \dfrac{1}{(a+1)^2} - \dfrac{4^{a+1}}{(a+1)^2} + \dfrac{4^{a+1}}{a+1}\ln(4) \quad \dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}} \quad \dfrac{4}{3} - \dfrac{2}{3}\sqrt{2} \quad \dfrac{15\pi+44}{192}$

$1 \quad \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$ $\quad$ oui $\quad 3-3\mathrm{e}^2 \quad J_{n+1} = I_n - I_{n+1} \quad \dfrac{3\pi+8}{32} \quad \dfrac{1}{n+1}$

$(-1)^p \dfrac{p!}{(n+1)^{p+1}} \quad (3-a)\ln(3-a) - (2-a)\ln(2-a) - 1 \quad 2(\ln(x)-2)\sqrt{x} + 4$

$\dfrac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2} \quad I_{n,p} = -\dfrac{p}{n+1} I_{n,p-1} \quad I_n = \dfrac{1}{2^n} + 2nJ_{n+1} \quad \dfrac{2x-4}{3}\sqrt{1+x} + \dfrac{4}{3} \quad 0$

$2(\ln(b)-2)\sqrt{b} - 2(\ln(a)-2)\sqrt{a} \quad \mathrm{e}^{-5} \quad \dfrac{1}{(1-x)^2} \quad I_{n+1} = \dfrac{1}{n2^{n+1}} + \dfrac{2n-1}{2n} I_n$

$\dfrac{5\sqrt{2}-3\sqrt{6}}{6} \quad 24\mathrm{e} - 168\mathrm{e}^{-1} \quad (x-a)\ln(x-a) - (x-a-1) \quad 2\ln(2) - 1 \quad 2 - \dfrac{3}{\mathrm{e}}$

$\dfrac{\mathrm{e}^4 - \mathrm{e}^2}{4} \quad 10\ln(2) - 3\ln(3) - 2 \quad 144\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} - 86 \quad (x-1)\ln\big(1+\sqrt{x}\big) - \dfrac{1}{2}(x - 2\sqrt{x} + 1)$

► Réponses et corrigés page 237

Intégration des fonctions trigonométriques

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 21.1

Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser les expressions suivantes.

a) $(2x+1)(3x-2)-(x+1)(2x+1)$ ……

b) $(x-1)^2+(3-3x)(x-5)$ ……

c) x^2-6x+9 ……

d) $3x\mathrm{e}^{x+x^2}-6x^2\mathrm{e}^x$ ……

Calcul 21.2

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer l'expression de $f'(x)$ dans les cas suivants.

a) $f(x)=(x-1)(x+1)$ ……

b) $f(x)=-(1-x)^2$ ……

c) $f(x)=5\cos\left(-x+\dfrac{\pi}{7}\right)$ ……

d) $f(x)=\mathrm{e}^{3x}$ ……

Premières intégrales

Calcul 21.3 — Pour commencer.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(t)\,\mathrm{d}t$ ……

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos(t)\,\mathrm{d}t$ ……

c) $\displaystyle\int_0^{\pi} (\cos(t)-\sin(t))\,\mathrm{d}t$ ……

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\sin(t)+5\cos(t))\,\mathrm{d}t$ ……

Calcul 21.4 — Avec des bornes plus compliquées.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(t)\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\,\mathrm{d}t$ ....

c) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin(t)\,\mathrm{d}t$ ....

d) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{2\pi+\frac{\pi}{3}} \sin(t)\,\mathrm{d}t$ ....

e) $\displaystyle\int_{-\pi-\frac{2\pi}{3}}^{\frac{11\pi}{4}} \sin(t)\,\mathrm{d}t$ ....

f) $\displaystyle\int_{-\frac{9\pi}{4}}^{\frac{25\pi}{6}} \sin(t)\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 21.5 — Composition avec des fonctions affines.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-2\sin(-2t)-2)\,\mathrm{d}t$ .....

b) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(3t)\,\mathrm{d}t$ ....

c) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{6}}^{1} \cos\Big(3\pi t+\frac{\pi}{2}\Big)\,\mathrm{d}t$ ....

d) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{6}}^{1} \Big(3\cos(\pi t)+\frac{\pi}{2}\Big)\,\mathrm{d}t$ ......

Secondes intégrales

Calcul 21.6 — Reconnaître la dérivée d'une composée (I).

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} 2t\cos(t^2)\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t$ ....

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin(3t)\cos(3t)\,\mathrm{d}t$ ....

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\cos^2(t)\,\mathrm{d}t$ ....

e) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\sin^2(t)}\,\mathrm{d}t$ ....

f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(t)}{\cos^3(t)}\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 21.7 — Reconnaître la dérivée d'une composée (II).

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_0^{1} \mathrm{e}^t\sin(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{\sin(t)}\cos(t)\,\mathrm{d}t$ ....

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{-3\sin(2t)+1}\cos(2t)\,\mathrm{d}t$ ....

d) $\displaystyle\int_0^{1} t\mathrm{e}^{t^2}\cos(\mathrm{e}^{t^2})\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 21.8 — Une formule générale.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Combien vaut $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\sin^n(t)\,\mathrm{d}t$?

(a) n (b) $n+1$ (c) $n-1$ (d) $\dfrac{1}{n}$ (e) $\dfrac{1}{n+1}$ (f) $\dfrac{1}{n-1}$

....

Calcul 21.9 — À l'aide d'une intégration par parties (I).

Calculer les intégrales suivantes. On pourra intégrer par parties.

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos(t)\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\,\mathrm{d}t$ ....

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos(t)\,\mathrm{d}t$ ....

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (t^2+t+1)\sin(t)\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 21.10 — À l'aide d'une intégration par parties (II).

Calculer les intégrales suivantes. On pourra intégrer par parties.

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t\cos(t)\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t\sin(t)\,\mathrm{d}t$ ....

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{2t}\sin(t)\,\mathrm{d}t$ ....

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \mathrm{e}^{-2t}\sin(3t)\,\mathrm{d}t$ ....

Calculs plus difficiles

Calcul 21.11 — Intégrales de Wallis.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Calculer I_0 ....

b) Calculer I_1 ....

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer laquelle des relations suivantes est vraie.

(a) $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}I_n$ (b) $I_{n+2} = \dfrac{n}{n+1}I_n$ (c) $I_{n+2} = \dfrac{n+2}{n+1}I_n$ (d) $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n}I_n$

....

L'objectif des questions suivantes est de déterminer une formule générale pour I_{2n+1} et I_{2n}.

Dans ce but, pour les questions d), e), f) et g), on utilisera le résultat de la question c) et on ne cherchera pas à calculer les produits d'entiers intervenant lors de ces calculs.

d) Calculer I_2 ....

f) Calculer I_4 ....

e) Calculer I_3 ....

g) Calculer I_5 ....

Soit $n \in \mathbb{N}$.

h) Déterminer une expression de I_{2n+1} à l'aide de produits d'entiers ....

i) En déduire une expression de I_{2n+1} à l'aide de factorielles ....

j) Déterminer une expression de I_{2n} à l'aide de produits d'entiers ....

k) En déduire une expression de I_{2n} à l'aide de factorielles ....

Réponses mélangées

1 $\quad 3e^{3x}$ $\quad \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}$ $\quad 5\sin\left(-x + \frac{\pi}{7}\right)$ $\quad (x-3)^2$ $\quad \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$ $\quad 2(1-x)$

$(2x+1)(2x-3)$ $\quad \frac{\sin(e) - \sin(1)}{2}$ $\quad 3xe^x(e^{x^2} - 2x)$ $\quad \frac{3}{2\pi} + \frac{7\pi}{12}$ $\quad \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \times 1$ $\quad \frac{\pi - 2}{2}$

$\frac{e - e^{-2}}{6}$ $\quad \frac{\pi}{2}$ $\quad \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$ $\quad \frac{\pi}{2} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$ $\quad \frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2}$ $\quad 2(x-1)(-x+7)$ $\quad \frac{\pi^2}{4} - 2$ $\quad \frac{1}{6}$

a $\quad -2$ $\quad \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}$ $\quad -\frac{2}{3}$ $\quad \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}$ $\quad \frac{1}{3}$ $\quad 2$ $\quad e - 1$ $\quad -\frac{1}{3\pi}$ $\quad \cos(1) - \cos(e)$

$\frac{1}{4}$ $\quad 1$ $\quad 1$ $\quad 2x$ $\quad \frac{1 + 2e^{\pi}}{5}$ $\quad \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}$ $\quad \frac{\sqrt{2} + 1}{2}$ $\quad$ e $\quad 8$ $\quad \frac{1}{2}$ $\quad \sqrt{2}$

π $\quad \frac{e^{\frac{\pi}{2}} + 1}{2}$ $\quad \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$ $\quad 0$ $\quad 2 - \pi$ $\quad \sqrt{2}$ $\quad \frac{3 - 2e^{-\frac{\pi}{3}}}{13}$ $\quad \frac{2}{3} \times 1$ $\quad 0$

► Réponses et corrigés page 241

Cardinaux et coefficients binomiaux

Prérequis
Le cardinal d'un ensemble E est le nombre d'éléments de cet ensemble.
On le note $\mathsf{Card}(E)$.

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 22.1 — Des fractions de fractions.

Écrire sous forme d'une fraction irréductible :

a) $\dfrac{2}{\dfrac{1}{5}-\dfrac{7}{15}}$ ..

b) $\dfrac{\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{6}}{\dfrac{3}{5}-\dfrac{1}{6}}$ ....

c) $\dfrac{2-\dfrac{3}{7}}{\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{7}}$ ....

Calcul 22.2

Écrire les expressions suivantes sous la forme $a\sqrt{b}$, avec a et b entiers et où b est le plus petit possible.

a) $\sqrt{32}$ .....

b) $\sqrt{45}$ .....

c) $\sqrt{1200}$ ...

d) $\sqrt{432}$ ....

Cardinal et opérations ensemblistes

Calcul 22.3 — Formule d'inclusion-exclusion pour deux ensembles.

Soient A et B deux ensembles finis. On rappelle que

$$\boxed{\mathsf{Card}(A\cup B)=\mathsf{Card}(A)+\mathsf{Card}(B)-\mathsf{Card}(A\cap B).}$$

Cette formule est appelée formule d'inclusion-exclusion.

a) On suppose que $\mathsf{Card}(A)=5$, $\mathsf{Card}(B)=10$ et $\mathsf{Card}(A\cap B)=2$.
Déterminer $\mathsf{Card}(A\cup B)$ ....

b) On suppose que $\mathsf{Card}(A)=7$, $\mathsf{Card}(B)=8$ et $\mathsf{Card}(A\cup B)=12$.
Déterminer $\mathsf{Card}(A\cap B)$ ....

c) On suppose que $\mathsf{Card}(A)=3$, $\mathsf{Card}(A\cup B)=8$ et $\mathsf{Card}(A\cap B)=2$.
Déterminer $\mathsf{Card}(B)$ ....

Calcul 22.4 — **Des équations avec des cardinaux.**

Soient A et B deux ensembles finis.

a) On suppose que $\mathsf{Card}(B) = 2 \times \mathsf{Card}(A)$, que $\mathsf{Card}(A \cap B) = 4$ et que $\mathsf{Card}(A \cup B) = 8$.

Combien vaut $\mathsf{Card}(A)$? ....

b) On suppose que $\mathsf{Card}(A) = 3$, que $\mathsf{Card}(A \cup B) = 13$ et que $\mathsf{Card}(A \cap B) = 1$.

Combien vaut $\mathsf{Card}(B)$? ....

c) On suppose que $\mathsf{Card}(A \cap B) = 2$, que $\mathsf{Card}(A \cup B) = 9$ et $\mathsf{Card}(A) = \mathsf{Card}(B) - 5$.

Combien vaut $\mathsf{Card}(B)$? ....

Factorielle et coefficients binomiaux

Calcul 22.5 — **Des multiplications à foison.**

On rappelle que la factorielle de n est définie par $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Donner les valeurs des factorielles suivantes.

a) $1!$ ...

c) $3!$ ...

e) $5!$ ...

g) $7!$ ...

b) $2!$ ...

d) $4!$ ...

f) $6!$ ...

h) $0!$ ...

Calcul 22.6 — **Des simplifications à foison.**

Calculer les expressions suivantes.

La réponse attendue est un entier ou une fraction irréductible.

a) $\dfrac{5!}{3!}$ ....

d) $\dfrac{3! \times 6!}{4! \times 5!}$ ....

b) $\dfrac{101!}{99!}$ ....

e) $4! - 3!$ ....

c) $\dfrac{7!}{3!^2}$ ....

f) $7! - 6!$ ....

Calcul 22.7

Calculer les expressions suivantes.

La réponse attendue est une fraction irréductible.

a) $\dfrac{1}{5!} - \dfrac{1}{4!}$ ......

b) $\dfrac{3 \times 3!}{2^4} - \dfrac{5}{4!}$ ...

c) $\dfrac{7}{4!} - \dfrac{3 \times 3!^2}{6!}$.

Calcul 22.8 — Calcul littéral avec la factorielle (I).

On rappelle que les factorielles de deux entiers naturels consécutifs n et $n+1$ sont reliées par la formule :

$$(n+1)! = (n+1) \times n!$$

Soit n un entier naturel non nul. Simplifier les expressions suivantes.

a) $\dfrac{(n+2)!}{(n-1)!}$ ....

b) $\dfrac{(2n+2)!}{(2n)!}$ ...

c) $\dfrac{(n^2-1)n!}{(n+2)!}$ ..

Calcul 22.9 — Calcul littéral avec la factorielle (II).

Soit n un entier naturel non nul. Simplifier les expressions suivantes.

a) $\dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!}$ ....

b) $\dfrac{(n+1)!}{2^{2(n+1)}} - \dfrac{n!}{2^{2n}}$ ....

c) $\dfrac{1}{(n+1)!} + \dfrac{1}{(n+1)(n+1)!} - \dfrac{1}{n \times n!}$ ....

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$. Simplifier $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ ....

Calcul 22.10 — Calculs explicites de coefficients binomiaux.

Calculer les coefficients binomiaux suivants.

a) $\dbinom{4}{2}$ ....

c) $\dbinom{7}{3}$ ....

e) $\dbinom{45}{44}$ ....

b) $\dbinom{9}{8}$ ....

d) $\dbinom{125}{0}$ ......

f) $\dbinom{9}{3}$ ....

Calcul 22.11 — Calcul littéral avec le coefficient binomial.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. Simplifier les expressions suivantes.

a) $\dbinom{n}{1} + \dbinom{n}{3}$ ....

c) $\dbinom{n+1}{n} - \dbinom{n}{n-1}$ ....

b) $\dbinom{n}{2} + \dbinom{n}{3}$ ....

d) $\dfrac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}}$ ....

Dénombrement

Calcul 22.12 — Des fruits !

Une corbeille de fruits est composée de trois fruits. Pour la former, on dispose d'une pomme, d'une poire, d'une banane, d'un kiwi et d'une orange.

Combien y a-t-il de corbeilles possibles ? ....

Calcul 22.13 — Mains au poker.

On tire 5 cartes d'un jeu de 52 cartes ; on obtient ce que l'on appelle une main. On rappelle qu'un tel jeu est composé de 13 cartes de chacune des quatre couleurs (cœur, carreau, trèfle ou pique) et qu'il y a 3 figures (valet, dame et roi) pour chaque couleur.

Déterminer le nombre de mains vérifiant chacun des critères suivants.

On exprimera les réponses à l'aide de coefficients binomiaux, qu'on ne cherchera pas à calculer.

a) Cinq cartes quelconques ....

b) Cinq cartes d'une même couleur ....

c) Uniquement des figures ....

d) Deux piques, un cœur et deux carreaux ....

e) Exactement un trèfle ....

f) Au moins un valet ....

Indication : faire le lien avec les mains sans valet.

g) Au moins une dame et un neuf ....

Indication : faire le lien avec les mains sans dame et celles sans neuf.

h) Exactement deux rois et deux cœurs ....

Indication : on pourra distinguer les mains selon la présence ou non du roi de cœur.

Calcul 22.14 — Anagrammes (I).

On appelle *anagramme* d'un mot tout autre mot composé des mêmes lettres mais dans un ordre quelconque. Par exemple, le mot « MSCOIONIBNA » est une anagramme du mot « COMBINAISON ».

Combien les mots suivants ont-il d'anagrammes ?

On exprimera les réponses à l'aide de coefficients binomiaux, qu'on ne cherchera pas à calculer.

a) « MAISON » ....

b) « RADAR » ....

Calcul 22.15 — Anagrammes (II).

Combien les mots suivants ont-il d'anagrammes ?

a) « MISSISSIPPI » ....

b) « ABRACADABRA » ....

Calculs plus difficiles

Calcul 22.16 — Formule d'inclusion-exclusion pour trois ensembles.

On rappelle que si A et B sont deux ensembles finis, alors on a

$$\mathsf{Card}(A \cup B) = \mathsf{Card}(A) + \mathsf{Card}(B) - \mathsf{Card}(A \cap B).$$

Soient A, B et C trois ensembles finis. Donner une formule analogue pour $\mathsf{Card}(A \cup B \cup C)$

....

Calcul 22.17 — Monotonie d'une suite.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = 2^{-2n}\dbinom{2n}{n}$.

a) Simplifier le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ ....

b) La suite $\left((n+1)u_n^2\right)_{n \geqslant 0}$ est-elle : (a) croissante ? (b) décroissante ? ....

Calcul 22.18 — Produit d'entiers pairs consécutifs.

Soit n un entier naturel non nul. Expliciter le produit des entiers pairs consécutifs de 2 à $2n$ à l'aide d'une puissance de 2 et d'une factorielle.

$2 \times 4 \times \cdots \times (2n-2) \times 2n$ ....

Calcul 22.19 — Produit d'entiers impairs consécutifs.

Soit n un entier naturel non nul. On note respectivement I le produit des entiers impairs consécutifs de 1 à $2n+1$ et P le produit des entiers pairs consécutifs de 2 à $2n$:

$$I = 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1) \times (2n+1) \qquad \text{et} \qquad P = 2 \times 4 \times \cdots \times (2n-2) \times 2n.$$

a) Exprimer le produit $I \times P$ à l'aide d'une factorielle ....

b) En déduire une expression du produit I ....

Calcul 22.20 — Une somme remarquable.

Soient n et p deux entiers naturels, et $(a_k)_{k\geqslant 0}$ une suite de réels.

a) Si $p \leqslant n$, expliciter la somme $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}(a_k - a_{k+1})$ en fonction de a_{n+1} et a_p ....

b) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, simplifier la différence $\displaystyle\binom{p+k+1}{p+1} - \binom{p+k}{p+1}$ ....

On pourra utiliser la formule de Pascal.

c) En déduire une simplification de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{p+k}{p}$ ....

Réponses mélangées

6 $\quad 2(n+1)(2n+1)$ $\quad 140$ $\quad 1$ $\quad 20\sqrt{3}$ $\quad 10\ 100$ $\quad \dfrac{3}{2}$ $\quad 3$ $\quad \dfrac{(2n+1)!}{2^n n!}$ $\quad$ b

$\dbinom{p+k}{p}$ $\quad (2n+1)!$ $\quad 2$ $\quad 4\sqrt{2}$ $\quad 45$ $\quad 13$ $\quad 1$ $\quad \dbinom{13}{2}\dbinom{13}{1}\dbinom{13}{2}$ $\quad -\dfrac{1}{30}$

$\dbinom{5}{3} = 10$ $\quad \dfrac{n}{(n+1)!}$ $\quad 3\sqrt{5}$ $\quad \dfrac{15}{13}$ $\quad \dbinom{p+n+1}{p+1}$ $\quad 6! = 720$ $\quad 4\dbinom{13}{5}$ $\quad n(n+1)(n+2)$

$\dbinom{12}{5}$ $\quad 6$ $\quad \dbinom{5}{2}\dbinom{3}{2} = 30$ $\quad \dfrac{17}{120}$ $\quad \dfrac{-1}{n(n+1)(n+1)!}$ $\quad \dfrac{n\big(n^2-3n+8\big)}{6}$ $\quad \dfrac{(n-3)n!}{2^{2(n+1)}}$

$\dbinom{11}{5}\dbinom{6}{2}\dbinom{4}{2}\dbinom{2}{1}$ $\quad 18$ $\quad 5\ 040$ $\quad \dfrac{5}{2}$ $\quad 35$ $\quad 24$ $\quad 7$ $\quad 9$ $\quad \dbinom{52}{5} - \dbinom{48}{5}$

$\dfrac{2n+1}{2(n+1)}$ $\quad \dbinom{11}{4}\dbinom{7}{4}\dbinom{3}{2}$ $\quad \dfrac{n-1}{n+2}$ $\quad \dfrac{2(2n+1)}{n+1}$ $\quad 11$ $\quad 12\sqrt{3}$ $\quad a_p - a_{n+1}$

$1 \times 3 \times 12\dbinom{36}{2} + \dbinom{3}{2}\dbinom{12}{2}\dbinom{36}{1}$ $\quad \dbinom{52}{5} - 2\dbinom{48}{5} + \dbinom{44}{5}$ $\quad \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$ $\quad 1$ $\quad \dbinom{n+1}{3}$ $\quad \dbinom{13}{1}\dbinom{39}{4}$

$2^n n!$ $\quad \dbinom{52}{5}$ $\quad 8$ $\quad 4$ $\quad 1$ $\quad 720$ $\quad 4\ 320$ $\quad \dfrac{11}{12}$ $\quad 120$ $\quad 20$ $\quad 84$ $\quad -\dfrac{15}{2}$

► Réponses et corrigés page 245

Dénombrement I

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 23.1 — Des fractions.

Simplifier :

a) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{3}$ ....

b) $\dfrac{5}{7}-\left(\dfrac{2}{21}+\dfrac{5}{14}\right)$ ....

Calcul 23.2 — Un peu de factorielles (I).

On rappelle que la factorielle de n est définie par $n! = 1\times 2\times 3\times\cdots\times n$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.

Calculer, en simplifiant autant que possible :

a) $\dfrac{10!}{8!}$ ....

b) $\dfrac{10\times 8\times 6\times 4}{5!}$ ....

Calcul 23.3 — Un peu de factorielles (II).

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Simplifier :

a) $\dfrac{n!}{(n-2)!}$ ....

b) $\dfrac{(n-1)!}{(n+3)!}$ ....

c) $\dfrac{(n^2-1)n!}{(n+1)!}$ ....

d) $\dfrac{(3!)^4\times 4!}{2^7}$ ....

Des dénombrements élémentaires

Calcul 23.4 — Une corbeille de fruits.

Une corbeille de fruits est composée de pommes et/ou d'oranges et comporte cinq fruits.

a) Déterminer le nombre de corbeilles possibles ....

b) Déterminer le nombre de corbeilles comportant au moins une orange ....

c) Déterminer le nombre de corbeilles comportant plus d'oranges que de pommes ....

Remarque
Dans cette fiche, pour les exercices de dénombrement, quand les réponses seront des expressions faisant intervenir des coefficients binomiaux, des puissances, des produits ou des factorielles, on ne cherchera pas à les calculer explicitement.

Par exemple, si la réponse est

$$15 \times 14 \times 13 \quad \text{ou} \quad 26^4 \quad \text{ou} \quad \binom{10}{6},$$

on la laissera telle quelle.

Calcul 23.5 — Peinture.

Une maison possède trois chambres. Son propriétaire dispose de quinze couleurs de peinture possibles. On souhaite peindre les trois chambres de trois couleurs différentes.

Déterminer le nombre de façons d'associer une couleur à chaque chambre .....

Calcul 23.6 — Un aérodrome.

Les aérodromes de loisir sont identifiés par un code à quatre lettres. La première lettre indique la région du monde et la deuxième le pays.

Combien peut-on identifier d'aérodromes :

a) Si toutes les lettres de l'alphabet peuvent être utilisées ? ....

b) En Europe (la première lettre serait alors « E ») ? ....

c) En France (la deuxième lettre doit être « F ») ? ....

Calcul 23.7 — À l'hippodrome.

On organise une course de chevaux dans laquelle quinze chevaux participent. Déterminer :

a) Le nombre de tiercés dans l'ordre possibles ....

b) Le nombre de quintés dans l'ordre possibles ....

c) Le nombre de tiercés dans l'ordre dans lesquels le cheval « Étalon Noir » apparaît.

....

d) Le nombre de quintés dans l'ordre dans lesquels le cheval « Étalon Noir » n'est pas présent.

....

Calcul 23.8 — Une urne.

Une urne contient n boules. Elles sont rouges ou vertes, toutes de couleur unie et de même taille.

a) Déterminer le nombre d'urnes possibles ....

b) Déterminer le nombre d'urnes contenant au moins deux boules rouges ....

Calcul 23.9 — Un groupe d'amis.

Dans un ensemble de dix personnes dont trois garçons, on s'intéresse à un groupe d'amis comportant six personnes.

a) Déterminer le nombre de groupes possibles ....

b) Déterminer le nombre de groupes ne comportant pas de garçon.

....

c) Déterminer le nombre de groupes comportant au moins un garçon.

....

d) Déterminer le nombre de groupes comportant autant de garçons que de filles.

....

Calcul 23.10 — Un jeu de lettres.

Au Scrabble, on a tiré sept lettres différentes. Un mot est une succession de lettres. On ne tiendra pas compte du sens des mots.

Déterminer le nombre de mots de quatre lettres que l'on peut former ....

Calcul 23.11 — Un week-end entre amis.

Un groupe de sept amis part en week-end. Déterminer le nombre de façons de choisir un responsable de la vaisselle, un responsable du rangement et un responsable du ménage.

a) Si aucun membre ne peut cumuler plusieurs fonctions ....

b) Si un même membre peut cumuler plusieurs fonctions ....

c) Si un même membre ne peut cumuler au plus que deux fonctions ....

Calcul 23.12 — Des codes.

Un cadenas est sécurisé par un code à quatre chiffres. Calculer le nombre de codes :

a) En tout ....

b) Avec des chiffres tous différents ....

c) Avec des chiffres pairs uniquement ....

d) Se terminant par le chiffre « 9 » ....

e) Avec des chiffres tous différents et rangés dans l'ordre croissant ....

Calcul 23.13 — Anagrammes.

On s'intéresse aux anagrammes du mot « FICHE », qu'elles aient un sens, ou non.

Combien d'anagrammes peut-on former :

a) En tout ? ....

b) Si l'on commence par les voyelles ? ....

c) Si le mot se termine par un « E » ? ....

d) Si l'on souhaite qu'il y ait alternance entre les voyelles et les consonnes ? ....

Calcul 23.14 — Organisation d'un dressing.

On dispose de cinq jeans différents qu'on veut ranger dans un meuble à trois tiroirs.

Déterminer le nombre de façon de ranger ces jeans :

a) En tout ....

b) De sorte que tous les jeans soient dans le même tiroir ....

c) De sorte qu'un seul tiroir soit vide ....

d) De sorte qu'aucun tiroir ne reste vide ....

Calcul 23.15 — Une association.

Douze personnes constituent une association et doivent choisir un bureau, composé d'un président, d'un trésorier et d'un secrétaire.

Déterminer le nombre de bureaux :

a) En tout ....

b) Sachant que Pierre et Jean ne veulent pas siéger ensemble ....

c) Ne contenant pas les deux personnes les plus jeunes du groupe ..

d) Contenant le doyen et la personne la plus jeune du groupe ......

Calcul 23.16 — Pour les amateurs de poker.

Le poker se joue avec un jeu de 52 cartes, composé des cartes de 2 à 10 puis valet, dame, roi et as dans les quatre couleurs (carreau, cœur, pique et trèfle).

Déterminer le nombre de mains de cinq cartes :

a) En tout ....

b) Contenant un carré (une même carte dans les quatre couleurs)

....

c) Où toutes les cartes sont de la même couleur ....

d) Contenant au moins un roi ....

e) Contenant au plus un roi ....

f) Contenant trois rois et deux as ....

g) Contenant un full (deux cartes identiques et trois autres cartes identiques).

....

Calculs plus difficiles

Calcul 23.17

Soient p et n deux entiers naturels.

Déterminer le nombre de façons de ranger $p+n$ éléments en deux groupes de n éléments et p éléments respectivement.

....

Calcul 23.18 — Deux limites.

Soit p un entier naturel.

a) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\binom{n}{p}}{\binom{n}{p+1}}$ ....

b) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\binom{n}{p}}{2^n}$ ....

Réponses mélangées

$13\times12\times\binom{4}{3}\times\binom{4}{2}$ $\quad\binom{10}{6}-7$ $\quad7^3$ $\quad15\times14\times13$ $\quad26^3$ $\quad6$ $\quad3^5-3\times2^5+3$

3 $\quad n+1$ $\quad15\times14\times13\times12\times11$ $\quad3\times14\times13$ $\quad4\times\binom{13}{5}$ $\quad4!$ $\quad3\times2\times10$ $\quad10^3$

$\binom{4}{3}\times\binom{4}{2}$ $\quad90$ $\quad5!$ $\quad12\times11\times10$ $\quad10\times9\times8\times7$ $\quad7\times6\times5$ $\quad\binom{52}{5}$ $\quad n-1$

$\binom{52}{5}-\binom{48}{5}$ $\quad n(n-1)$ $\quad3\times2\times2$ $\quad\binom{10}{4}$ $\quad3\times(2^5-2)$ $\quad14\times13\times12\times11\times10$ $\quad0$

26^4 $\quad\binom{48}{5}+4\times\binom{48}{4}$ $\quad7$ $\quad2!\times3!$ $\quad\dfrac{1}{(n+3)(n+2)(n+1)n}$ $\quad0$ $\quad26^2$ $\quad10\times9\times8$

$\dfrac{11}{30}$ $\quad5^4$ $\quad3$ $\quad16$ $\quad13\times48$ $\quad7\times6\times5\times4$ $\quad243$ $\quad\dfrac{11}{42}$ $\quad\binom{n+p}{n}$ $\quad\binom{10}{6}$

$15\times14\times13$ $\quad\begin{array}{c}12\times11\times10\\-3\times2\times10\end{array}$ $\quad7^3-7$ $\quad3^5$ $\quad10^4$ $\quad\binom{3}{3}\times\binom{7}{3}$ $\quad5$ $\quad n-1$

► Réponses et corrigés page 253

Dénombrement II

Remarque
Dans cette fiche, on ne simplifiera pas entièrement les résultats qui sont des valeurs numériques. Par exemple, on pourra laisser tels quels des résultats comme $20 \times 19 \times 18$.

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 24.1

Exprimer les nombres suivants sans utiliser ni coefficients binomiaux, ni factorielles.

On pourra écrire les coefficients binomiaux à l'aide de factorielles puis faire les simplifications nécessaires.

a) $\dbinom{10}{3}$ ....

b) $\dbinom{n}{2}$ pour $n \geqslant 2$ ....

c) $\dbinom{n+2}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$ ....

d) $\dbinom{n+3}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}$ ....

Calcul 24.2 — Quelques fractions.

Calculer :

a) $\dfrac{\binom{10}{0}}{\binom{10}{1}}$ ....

b) $\dfrac{10!}{8!}$ ....

c) $\dfrac{5!}{7!}$ ....

d) $\dfrac{\binom{11}{5}}{\binom{10}{4}}$ ....

Calcul 24.3 — Des simplifications.

Simplifier les factorielles suivantes.

a) $\dfrac{(n+1)!}{(n+2)!}$ ....

b) $\dfrac{(n+1)!}{n!}$ ....

c) $\dfrac{((n+1)!)^2}{(n!)^2}$ ....

d) $\dfrac{(n+1)! \times (n+2)!}{n! \times (n+3)!}$ ....

Pour commencer

Calcul 24.4 — Quelques propriétés des coefficients binomiaux.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 4$. À quel réel est égal $\binom{n}{4}$?

ⓐ $\binom{n}{n-4}$ ⓑ $\binom{n-4}{4}$ ⓒ $\binom{n+4}{4}$ ⓓ $\binom{n+4}{n-4}$

....

b) À quel réel est égal $\binom{21}{3} + \binom{21}{4}$?

ⓐ $\binom{21}{4}$ ⓑ $\binom{22}{3}$ ⓒ $\binom{21}{3}$ ⓓ $\binom{22}{4}$

....

c) À quel réel est égal $\binom{n+2}{k+1} + \binom{n+2}{k}$?

ⓐ $\binom{n+1}{k+1}$ ⓑ $\binom{n+3}{k}$ ⓒ $\binom{n+3}{k+1}$ ⓓ $\binom{n+2}{k+1}$

....

Dénombrements : cas pratiques

Calcul 24.5 — Dénombrements de tous les jours.

a) J'ai deux pantalons, trois chemises et quatre chapeaux.

De combien de façons différentes puis-je m'habiller ? ....

b) J'ai six chansons préférées.

De combien de façons puis-je les écouter les unes après les autres (une seule fois chaque) ?

....

c) J'ai cinq pantalons différents et j'en choisis deux pour remplir ma valise.

De combien de façons puis-je la remplir ? ....

d) J'ai trois fléchettes (une rouge, une jaune et une verte), que je lance sur une cible possédant quatre secteurs différents. Combien de résultats différents puis-je obtenir (en supposant que je touche toujours l'un des secteurs) ?

....

Calcul 24.6 — Codes secrets.

a) Mon antivol a cinq roues crantées, chacune déterminant un entier de 0 à 9.

Combien y a-t-il de codes possibles pour mon antivol ? ....

b) Mon digicode est un mot de trois lettres différentes, parmi les lettres A, B, C, D, E.

Combien y a-t-il de digicodes possibles ? ....

c) Un numéro de téléphone est composé de dix chiffres de 0 à 9.

Combien y a-t-il de numéros de téléphone commençant par « 06 » ? ....

Calcul 24.7 — Nombre de tiercés.

Une course de chevaux a lieu à Longchamp : vingt chevaux sont au départ.

a) Combien y a-t-il de tiercés dans l'ordre ? ....

(c'est-à-dire si l'ordre d'arrivée des trois premiers chevaux compte)

b) Combien y a-t-il de tiercés dans le désordre ? ....

(c'est-à-dire si l'ordre d'arrivée des trois premiers chevaux ne compte pas)

Calcul 24.8 — Choisir des fromages.

a) J'ai cinq fromages différents, je décide d'en prendre un.

De combien de façons puis-je remplir mon assiette ? ....

b) J'ai cinq fromages différents, je décide d'en prendre trois.

De combien de façons puis-je remplir mon assiette ? ....

c) J'ai cinq fromages différents, de combien de façons puis-je remplir mon assiette ?

(Éventuellement, en n'en prenant aucun) ....

Calcul 24.9 — Fromage et dessert.

J'ai cinq fromages différents et trois desserts différents.

a) Je décide de prendre un fromage et un dessert.

De combien de façons puis-je remplir mon assiette ? ....

b) Je décide de prendre trois fromages et un dessert.

De combien de façons puis-je remplir mon assiette ? ....

c) Je peux prendre ce que je veux (y compris rien).

De combien de façons puis-je remplir mon assiette ? ....

Calcul 24.10 — Anagrammes.

a) Combien d'anagrammes peut-on former avec le mot « LAPIN » ? ....

b) Combien d'anagrammes peut-on former avec le mot « CAROT$_1$T$_2$E » ?

Les deux « T » sont distincts car numérotés T$_1$ et T$_2$ ....

c) Combien d'anagrammes peut-on former avec le mot « CAROTTE » ?

Les deux « T » sont identiques ....

Dénombrements : cas théoriques

Calcul 24.11 — Nombre de segments.

On considère n points A_1, A_2, ... , A_n deux à deux distincts.

Combien peut-on tracer de segments (non réduits à un point) dont les extrémités sont parmi ces points ?

....

Calcul 24.12 — Nombre de diagonales.

On considère un polygone régulier à n sommets, c'est-à-dire un polygone dont tous les côtés et tous les angles sont égaux.

Combien ce polygone possède-t-il de diagonales ?

....

Calculs plus difficiles

Calcul 24.13 — Palindromes.

Un *palindrome* est un mot qui est identique s'il est lu de la gauche vers la droite ou de la droite vers la gauche. Par exemple, « RESSASSER » est un palindrome ; « LAPIN » n'en est pas un.

On considèrera que « ZZZ » est un palindrome même s'il ne figure pas dans le dictionnaire.

a) Combien y a-t-il de palindromes de quatre lettres ? ....

b) Combien y a-t-il de palindromes de cinq lettres ? ....

Calcul 24.14 — Au poker.

a) Au poker, un *brelan* est une main de cinq cartes dont trois sont de même hauteur, et les deux autres différentes. Par exemple trois rois, un « 7 » et un « 2 » forment un brelan.

Avec un jeu de 52 cartes, combien de brelans peut-on former ?

....

b) Au poker, une *double paire* est une main de cinq cartes composée de deux couples de cartes de même hauteur (mais distinctes) et d'une cinquième carte différente. Par exemple deux rois, deux « 10 » et un « 7 » forment une double paire.

Avec un jeu de 52 cartes, combien de doubles paires peut-on former ?

....

Calcul 24.15 — Dénombrements de suites.

Quel est le nombre de suites strictement croissantes de p éléments à valeurs dans $[\![1, n]\!]$?

....

Réponses mélangées

24 $\qquad \dfrac{7!}{2}$ $\qquad 256$ $\qquad (n+1)^2$ $\qquad 120$ $\qquad 26^2$ $\qquad \dfrac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}$ $\qquad \dfrac{11}{5}$

$n+1$ $\qquad 60$ $\qquad 10^5$ $\qquad 10 \times 9 = 90$ $\qquad 30$ $\qquad$ (c) $\qquad \binom{13}{1} \times \binom{4}{3} \times \binom{12}{2} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1}$

(d) $\qquad \dfrac{n(n-3)}{2}$ $\qquad 32$ $\qquad \dfrac{1}{42}$ $\qquad 15$ $\qquad 10^8$ $\qquad n+2$ $\qquad \binom{20}{3}$ $\qquad \dfrac{n+1}{n+3}$

10 $\qquad \dfrac{n(n-1)}{2}$ $\qquad 720$ $\qquad \dfrac{1}{(n+2)}$ $\qquad \binom{13}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{11}{1} \times \binom{4}{1}$ $\qquad 20 \times 19 \times 18$

26^3 $\qquad$ (a) $\qquad 5!$ $\qquad 7!$ $\qquad \binom{n}{p}$ $\qquad 64$ $\qquad 10$ $\qquad 5$ $\qquad \dfrac{1}{10}$ $\qquad \dfrac{n(n-1)}{2}$

► Réponses et corrigés page 258

Généralités sur les probabilités

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 25.1

Écrire sous forme d'un produit de puissances de nombres premiers les expressions suivantes.

a) $27^2 \times 12$ .....

b) $\dfrac{49 \times 64}{14}$ ......

c) $\dfrac{81 \times 51}{17}$ ......

Calcul 25.2

Soit x un nombre réel. Factoriser les expressions suivantes.

a) $x^2 - 2x + 1$ ....

b) $x^2 - 6x + 9$ ....

c) $x^4 - 1$ ....

d) $2x^2 + 24x + 72$ ....

Calculs de probabilités

Calcul 25.3

Soit X une variable aléatoire qui prend les valeurs $-\dfrac{3}{2}$, 0, 2 et 3. On suppose que

$$\mathrm{P}\big(X = -\frac{3}{2}\big) = \frac{1}{10}, \quad \mathrm{P}(X = 0) = \frac{1}{5} \quad \text{et} \quad \mathrm{P}(X = 2) = \frac{1}{5}.$$

Déterminer :

a) $\mathrm{P}(X = 3)$ ....

b) $\mathrm{P}(X \leqslant 1)$ ....

c) $\mathrm{P}(X \geqslant 3)$ ....

d) $\mathrm{P}(X < 0)$ ....

Calcul 25.4 — Un double hasard.

Une élève dispose de deux paquets de cartes :

- un paquet dont les cartes sont numérotées de 1 à 32 ;
- un paquet dont les cartes sont numérotées de 1 à 52.

Elle choisit un des deux paquets au hasard, puis elle tire une carte de ce paquet.

On définit les événements :

T : « L'élève choisit le paquet de 32 cartes »
S : « Elle tire la carte numéro 7 ».

a) En utilisant l'énoncé, déterminer (sans justification) $\mathrm{P}(T)$ ....

b) En utilisant l'énoncé, déterminer (sans justification) $\mathrm{P}_T(S)$ ....

c) En utilisant l'énoncé, déterminer (sans justification) $\mathrm{P}_{\overline{T}}(S)$ ....

d) Exprimer $\mathrm{P}(S)$ en fonction de $\mathrm{P}_T(S)$ et $\mathrm{P}_{\overline{T}}(S)$ ....

e) Calculer $\mathrm{P}(S)$ ....

Calcul 25.5 — Une question de cours.

Une professeure pose une question à un élève et elle lui demande de choisir la réponse parmi trois réponses possibles, une seule étant juste. L'élève ne connaît que 60 % de son cours.

- Si la question est dans la partie du cours qu'il connaît, il répond juste.
- Sinon, il choisit aléatoirement la réponse parmi les 3 proposées.

On définit les événements :

C : « La question fait partie du cours que l'élève connaît »
J : « L'élève répond juste à la question ».

a) En utilisant l'énoncé, déterminer (sans justification) $\mathrm{P}_C(J)$ ....

b) En utilisant l'énoncé, déterminer (sans justification) $\mathrm{P}_{\overline{C}}(J)$ ....

c) Exprimer $\mathrm{P}(J)$ en fonction de $\mathrm{P}_C(J)$ et $\mathrm{P}_{\overline{C}}(J)$ ....

d) Calculer $\mathrm{P}(J)$ ....

Calcul 25.6 — Une urne et des boules.

Une urne contient trois boules dont deux sont rouges et une est noire.

On tire, sans remise, deux boules de l'urne. On définit les événements :

R_1 : « La première boule tirée est rouge »
R_2 : « La seconde boule tirée est rouge ».

a) En utilisant l'énoncé, déterminer (sans justification) $\mathrm{P}(R_1)$ ....

b) En utilisant l'énoncé, déterminer (sans justification) $\mathrm{P}_{R_1}(R_2)$ ....

c) En utilisant l'énoncé, déterminer (sans justification) $\mathrm{P}_{\overline{R_1}}(R_2)$ ....

d) Exprimer $\mathrm{P}(R_2)$ en fonction de $\mathrm{P}_{R_1}(R_2)$ et $\mathrm{P}_{\overline{R_1}}(R_2)$ ....

e) Calculer $\mathrm{P}(R_2)$ ....

Calcul 25.7 — Tirages de cartes.

Une élève dispose d'un paquet de dix cartes numérotées de 1 à 10.

Elle tire aléatoirement une carte du paquet.

a) Déterminer la probabilité qu'elle ne tire pas un 7 ....

b) Déterminer la probabilité qu'elle tire un nombre pair ....

On définit les événements :

R : « Elle tire une carte dont le numéro est pair »
T : « Elle tire une carte dont le numéro est un multiple de 3 ».

c) Exprimer $\mathrm{P}(R \cup T)$ en fonction de $\mathrm{P}(R)$ et de $\mathrm{P}(T)$ ....

d) Calculer $\mathrm{P}(R \cap T)$ ....

e) Calculer la probabilité que le nombre tiré soit pair ou un multiple de 3 ....

L'élève tire maintenant aléatoirement, successivement et sans remise deux cartes du paquet.

On cherche la probabilité p que le numéro de la première carte soit inférieur à celui de la deuxième.

f) Déterminer le nombre de tirages distincts pouvant être obtenus ....

g) Si la 1^{re} carte tirée est numérotée 1, déterminer le nombre de tirages favorables .....

h) Si la 1^{re} carte tirée est numérotée 2, déterminer le nombre de tirages favorables .....

i) En généralisant, déterminer le nombre total de tirages favorables ....

j) Déterminer p ....

k) Reprendre la question précédente avec un paquet de dix-sept cartes ....

Calculs d'espérances et de variances

Calcul 25.8

Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par

k	-2	-1	0	1	2
$\mathrm{P}(X = k)$	$1/10$	$1/5$	$1/2$	$1/10$	$1/10$

Déterminer :

a) $\mathrm{P}(X \leqslant 0)$ ....

b) $\mathrm{P}(X < 2)$ ....

c) $\mathrm{E}(X)$ ....

d) $\mathrm{V}(X)$ ....

Calcul 25.9 — Trois urnes.

Une élève se trouve face à trois urnes numérotées de 1 à 3.

- L'urne 1 contient une unique boule numérotée 1.
- L'urne 2 contient deux boules numérotées 1 et 2.
- L'urne 3 contient trois boules numérotées 1, 2 et 3.

L'élève choisit aléatoirement, avec la même probabilité, une des trois urnes, puis tire une boule de l'urne. On note X le numéro de la boule tirée.

Déterminer :

a) $\mathrm{P}(X = 3)$ ....

b) $\mathrm{P}(X = 2)$ ....

c) $\mathrm{P}(X = 1)$ ....

d) $\mathrm{E}(X)$ ....

e) $\mathrm{V}(X)$ ....

Calcul 25.10

Soit $p > 0$. On considère X une variable aléatoire dont la loi est donnée par

k	$-3/2$	0	$5/2$
$\mathrm{P}(X = k)$	$1/4$	$1/2$	p

Déterminer :

a) p ....

b) $\mathrm{E}(X)$ ....

c) $\mathrm{V}(X)$ ....

Calcul 25.11

Soit $\alpha > 0$. On considère X une variable aléatoire dont la loi est donnée par

k	1	2	3	4
$\mathrm{P}(X = k)$	α	2α	3α	4α

Déterminer :

a) α ....

b) $\mathrm{E}(X)$ ....

c) $\mathrm{V}(X)$ ....

Fonctions et sommes de variables aléatoires

Calcul 25.12

Soit X une variable aléatoire d'espérance 12 et de variance 4. On pose $Y = 3X + 4$. Déterminer :

a) l'espérance de Y ....

b) la variance de Y ....

Calcul 25.13

Soit X une variable aléatoire d'espérance 3 et de variance 5. On pose $Y = \dfrac{-X + 2}{5}$. Déterminer :

a) l'espérance de Y ....

b) la variance de Y ....

Calcul 25.14

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{4}{5}$. On pose $Y = 10X - 3$.

Déterminer :

a) l'espérance de Y ....

b) la variance de Y ....

c) les valeurs prises par Y ....

d) $\mathrm{P}(Y = 7)$ ....

Calcul 25.15

Soit X une variable aléatoire dont loi est donnée par

k	-5	10
$\mathrm{P}(X = k)$	$2/3$	$1/3$

On pose $Y = \dfrac{X+5}{15}$. Déterminer :

a) l'ensemble des valeurs prises par Y ....

b) $\mathrm{P}(Y = 0)$ ....

Calcul 25.16 — Des lancers de dés.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère un dé équilibré dont les six faces sont numérotées de 1 à 6.

Le dé est lancé successivement n fois. On note $X_1, \ldots, X_n$ les résultats des lancers successifs et indépendants.

a) Déterminer l'espérance de X_1 ....

b) Déterminer la variance de X_1 ....

On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k = X_1 + \cdots + X_n$ la somme des n résultats obtenus.

c) Déterminer l'espérance de S_n ....

d) Déterminer la variance de S_n ....

Calcul 25.17

Soit X une variable aléatoire d'espérance 3 et de variance 5. On pose $Y = X^2$.

a) Exprimer $\mathrm{V}(X)$ en fonction de $\mathrm{E}(X^2)$ et de $\mathrm{E}(X)$ ....

b) En déduire $\mathrm{E}(Y)$ ....

Calculs plus difficiles

Calcul 25.18

Soit X une variable aléatoires à valeurs dans $\{0, 1\}$.

Déterminer $\mathrm{E}(X) - \mathrm{E}(X^2)$ ....

Calcul 25.19

Soit X une variable aléatoire réelle. On note

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{E}\big((X-x)^2\big). \end{array} \right.$$

a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer l'expression $f(x)$ et l'écrire sous la forme d'un trinôme

b) Déterminer le point en lequel f atteint son minimum ....

c) Exprimer le minimum de f en fonction de $\mathrm{V}(X)$ ....

Calcul 25.20 — Une variable aléatoire centrée réduite.

Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $m \in \mathbb{R}$ et soit $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$.

On considère $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes d'espérance m et de variance σ^2 et on pose

$$S_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left(\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) - n \times m\right).$$

a) Déterminer l'espérance de S_n ....

b) Déterminer la variance de S_n ....

Réponses mélangées

1	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{5}$	0 et 1	$\mathrm{V}(X)$	$\frac{21}{832}$	$\frac{2}{3}$	$\mathrm{E}(X)$	$\frac{1}{10}$
$\frac{9}{10}$	$\frac{35}{12}$	-3 et 7	$\mathrm{P}_C(J)\,\mathrm{P}(C) + \mathrm{P}_{\overline{C}}(J)\,\mathrm{P}(\overline{C})$	$\frac{7n}{2}$	8	45	0	$\frac{1}{32}$	$\frac{11}{18}$		
$x^2 - 2\,\mathrm{E}(X)x + \mathrm{E}(X^2)$	$2^5 \times 7$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\mathrm{P}_T(S)\,\mathrm{P}(T) + \mathrm{P}_{\overline{T}}(S)\,\mathrm{P}(\overline{T})$	$\frac{1}{5}$	3	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{10}$			
$-\frac{1}{10}$	$\mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$	$\frac{109}{100}$	9	$\frac{17}{36}$	36	90	3^5	0	5	$\frac{7}{2}$	
$\frac{3}{2}$	$(x-1)^2$	$(x-3)^2$	$\frac{33}{16}$	$2(x+6)^2$	16	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	
$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{35n}{12}$	40	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\mathrm{P}(R) + \mathrm{P}(T) - \mathrm{P}(R \cap T)$	$\frac{2}{3}$	1
$2^2 \times 3^7$	1	$\frac{7}{10}$	$\mathrm{P}_{R_1}(R_2)\,\mathrm{P}(R_1) + \mathrm{P}_{\overline{R_1}}(R_2)\,\mathrm{P}(\overline{R_1})$	$\frac{5}{18}$	14	$(x-1)(x+1)(x^2+1)$	$\frac{1}{2}$				

► Réponses et corrigés page 261

Autour de la loi binomiale

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 26.1 — Développement d'expressions polynomiales.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes.

a) $(x^2+3x+1)(2x^2-x-2)$ ....

b) $(x^3-x^2+4)(x^2-x+1)$ ....

c) $(2x+1)^2(x^2+3x-2)$ ....

d) $(x+1)(x+2)(x^2-3x+1)$ ....

Calcul 26.2 — Factorisation d'expressions polynomiales.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser les expressions suivantes.

a) $4x^2-9$ ....

b) $9x^2+6x+1$ ....

c) x^2-3x+2 ....

d) $(x^2+3x)(x-2)+x(x+3)$ ....

Premiers calculs

Calcul 26.3 — Définition de la loi binomiale.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $p \in [0,1]$. Soit X une variable aléatoire de loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ et soit $k \in [\![0,n]\!]$. Quelle est l'expression correcte pour $\mathrm{P}(X=k)$?

(a) $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{k-n}$ (b) $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ (c) $\binom{n}{k}(1-p)^k p^{k-n}$ (d) $\binom{n}{k}(1-p)^k p^{n-k}$

....

Calcul 26.4 — Valeurs particulières.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $p \in [0,1]$. Soit X une variable aléatoire de loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.

Calculer les probabilités suivantes.

a) $\mathrm{P}(X=0)$ ....

b) $\mathrm{P}(X=n)$ ....

c) $\mathrm{P}(X=1)$ ....

d) $\mathrm{P}(X=n-1)$ .....

e) $\mathrm{P}(X=2)$ ....

f) $\mathrm{P}(X=n-2)$ .....

Calcul 26.5 — Cas $p=\dfrac{1}{2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit X une variable aléatoire de loi binomiale $\mathscr{B}\left(n,\dfrac{1}{2}\right)$.

Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Calculer les expressions suivantes.

a) $\mathrm{P}(X=k)$ ....

b) $\mathrm{P}(X=0)-\mathrm{P}(X=n)$ ....

c) $\mathrm{P}(X=k)-\mathrm{P}(X=n-k)$ ......

d) $\mathrm{P}(X\leqslant 1)$ ....

Calcul 26.6 — Cas $p=\dfrac{1}{4}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit X une variable aléatoire de loi binomiale $\mathscr{B}\left(n,\dfrac{1}{4}\right)$.

Pour chacune des questions suivantes, choisir la bonne réponse parmi les propositions.

a) Que vaut $\mathrm{P}(X=0)$?

(a) 0 (b) $\dfrac{1}{4^n}$ (c) $\dfrac{3}{4^n}$ (d) $\dfrac{3^n}{4^n}$

....

b) Que vaut $\mathrm{P}(X=n)$?

(a) 0 (b) $\dfrac{1}{4^n}$ (c) $\dfrac{3}{4^n}$ (d) $\dfrac{3^n}{4^n}$

....

c) Que vaut $\mathrm{P}(X=1)$?

(a) $\dfrac{n}{4^n}$ (b) $\dfrac{3n}{4^n}$ (c) $\dfrac{3^{n-1}}{4^n}$ (d) $\dfrac{3^{n-1}n}{4^n}$

....

Reconnaître une loi binomiale

Entraînement 26.7 — Détermination des paramètres d'une loi binomiale.

Dans chacune des situations suivantes, la variable aléatoire X suit une loi binomiale.

Donner le couple (n, p) de ses paramètres.

a) On lance cinq fois une pièce de monnaie équilibrée et on note X le nombre de « pile » obtenus.

b) On lance trois dés équilibrés à six faces et on note X le nombre de « 1 » obtenus

c) Une urne contient deux boules bleues, cinq boules vertes et une boule jaune, indiscernables au toucher. On tire successivement, avec remise, six boules de cette urne et on note X le nombre de boules bleues obtenues.

Entraînement 26.8 — Lancer de dés.

Soit un entier $n \geqslant 2$. On lance successivement n dés équilibrés à six faces. Dans chacun des cas suivants, la variable aléatoire X suit-elle une loi binomiale ?

Si X ne suit pas une loi binomiale, on écrira « non » dans le cadre-réponse.
Sinon, on donnera le couple (n, p) tel que X suive la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$.

a) X est le résultat du premier lancer

b) X est la somme des chiffres affichés par les dés

c) X est le nombre de « 6 » obtenus

d) X est le nombre de chiffres pairs obtenus

Entraînement 26.9 — Tirages dans une urne.

Une urne contient trois boules rouges et cinq boules bleues, indiscernables au toucher. Dans chacun des cas suivants, la variable aléatoire X suit-elle une loi binomiale ?

Si X ne suit pas une loi binomiale, on écrira « non » dans le cadre-réponse.
Sinon, on donnera le couple (n, p) tel que X suive la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$.

a) On tire successivement 4 boules avec remise et on note X le nombre de boules rouges tirées.

b) On tire successivement 4 boules sans remise et on note X le nombre de boules rouges tirées.

Espérance, variance

Calcul 26.10 — Propriétés de l'espérance.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $p \in [0,1]$. Soit X une variable aléatoire de loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.

Calculer les espérances suivantes.

a) $\mathrm{E}(X)$ ....

b) $\mathrm{E}(3X)$ ....

c) $\mathrm{E}(3X+1)$ ....

d) $\mathrm{E}(5X-2)$ ....

Calcul 26.11 — Propriétés de la variance.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $p \in [0,1]$. Soit X une variable aléatoire de loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.

Calculer les variances suivantes.

a) $\mathrm{V}(X)$ ....

b) $\mathrm{V}(3X)$ ....

c) $\mathrm{V}(3X+1)$ ....

d) $\mathrm{V}(5X-2)$ ....

Calcul 26.12 — Fréquence d'apparition.

On lance 100 fois un dé équilibré à six faces. On note respectivement X le nombre d'apparitions du « 1 » et Y la fréquence d'apparition du « 1 », c'est-à-dire $Y = \dfrac{X}{100}$.

a) Donner l'espérance de X ....

b) Donner l'espérance de Y ....

c) Donner la variance de X ....

d) Donner la variance de Y ....

Calcul 26.13 — Variable centrée réduite.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$. Soit X une variable aléatoire de loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$. On note

$$Y = \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}.$$

a) Donner l'espérance de Y ....

b) Donner la variance de Y ....

Mise en œuvre pratique

Calcul 26.14 — Relecture d'un texte.

Un texte comporte 10 erreurs. Lors de sa relecture, un correcteur relève chaque erreur indépendamment avec une probabilité $p = 0{,}9$. Pour tout $k \in [\![1, 10]\!]$, on note $X_k = 1$ si la k-ième erreur a été corrigée après relecture, $X_k = 0$ sinon.

On note enfin $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}$ le nombre d'erreurs corrigées après la relecture.

a) Donner la loi de X_1 ......

b) Donner la loi de X ....

Calculer les probabilités suivantes.

c) $\mathrm{P}(X = 0)$ ....

d) $\mathrm{P}(X = 1)$ ....

e) $\mathrm{P}(X = 2)$ ....

f) $\mathrm{P}(X = 9)$ ....

g) $\mathrm{P}(X = 10)$ ....

h) Calculer $\mathrm{E}(X)$ ....

On suppose maintenant que le texte est soumis à deux relectures indépendantes.

i) Calculer $\mathrm{P}(X_1 = 0)$ dans ce cas ....

j) Donner la loi de X dans ce cas ....

k) Calculer alors $\mathrm{E}(X)$. ....

Calcul 26.15 — Tirages dans une urne.

Une urne contient trois boules rouges et cinq boules bleues, indiscernables au toucher. On tire successivement, avec remise, 10 boules de cette urne. On note X le nombre de boules rouges tirées.

a) Calculer $\mathrm{P}(X = 0)$ ....

b) En déduire une expression de $\mathrm{P}(X \geqslant 1)$ ....

c) De même, donner une expression de $\mathrm{P}(X \geqslant 2)$ ....

d) Donner une expression de la probabilité conditionnelle $\mathrm{P}_{(X \geqslant 1)}(X \geqslant 2)$ ....

Calculs plus difficiles

Calcul 26.16 — Réponses au hasard dans un QCM.

Dans une interrogation de mathématiques, un questionnaire à choix multiples comporte n questions.

Pour chaque question, quatre réponses sont possibles et une seule d'entre elles est correcte. Une bonne réponse rapporte 3 points, une mauvaise réponse retire 1 point, l'absence de réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

a) Un élève A n'a pas révisé avant l'interrogation et ne connaît pas du tout son cours. Il décide de répondre à toutes les questions, en choisissant au hasard la réponse.

On note X le nombre de bonnes réponses qu'il obtient. Quelle est l'espérance de X ? ....

b) On note N la note finale de l'élève A. Quelle est l'espérance de N ? ....

Calcul 26.17 — Étude d'un sondage.

Lors d'un scrutin, des électeurs doivent choisir entre deux candidats A et B. Avant le vote, un institut de sondage appelle $n = 500$ personnes et leur demande leur intention de vote afin d'estimer la proportion inconnue p d'électeurs qui donneront leur voix au candidat A.

On note X le nombre de personnes interrogées lors du sondage qui voteront pour le candidat A. On admet que X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$.

On rappelle l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : si Y est une variable aléatoire d'espérance μ et de variance V alors, pour tout réel $\delta > 0$, on a $\mathrm{P}(|Y - \mu| \geqslant \delta) \leqslant \dfrac{V}{\delta^2}$.

a) Soit $\delta > 0$. Donner un majorant de la probabilité $\mathrm{P}\left(\left|\dfrac{X}{n} - p\right| \geqslant \delta\right)$.

....

b) A-t-on $p(1-p) \leqslant \dfrac{1}{4}$? ....

c) Soit $\alpha \in \,]0, 1[$. Donner une valeur de δ pour laquelle on a $\mathrm{P}\left(\left|\dfrac{X}{n} - p\right| \geqslant \delta\right) \leqslant \alpha$.

....

d) En déduire un intervalle I tel que $\mathrm{P}\big(p \in I\big) \geqslant 1 - \alpha$.

Un tel intervalle est appelé intervalle de confiance pour p au niveau $1 - \alpha$.

....

e) À l'issue du sondage, sur les 500 personnes interrogées, 220 personnes ont indiqué qu'elles voteront pour le candidat A.

Donner un intervalle de confiance pour p au niveau $95\,\%$ ....

Réponses mélangées

$\left(\dfrac{5}{8}\right)^{10}$ $\quad$ $4x^4+16x^3+5x^2-5x-2$ $\quad$ $np(1-p)$ $\quad$ $\mathscr{B}(10;\ 0{,}9)$ $\quad$ $(0{,}1)^{10}$ $\quad$ $\dfrac{1-7\times\left(\frac{5}{8}\right)^{10}}{1-\left(\frac{5}{8}\right)^{10}}$

$\dfrac{1}{6}$ $\quad$ $(0{,}9)^9$ $\quad$ $\dfrac{n(n-1)}{2}p^{n-2}(1-p)^2$ $\quad$ $\left(6,\dfrac{1}{4}\right)$ $\quad$ 0 $\quad$ 1 $\quad$ $1-\left(\dfrac{5}{8}\right)^{10}$ $\quad$ $\mathscr{B}(10;\ 0{,}99)$

$3np$ $\quad$ non $\quad$ $\dfrac{1}{2\sqrt{n\alpha}}$ $\quad$ $9\times(0{,}1)^9$ $\quad$ $5np-2$ $\quad$ $\left(n,\dfrac{1}{2}\right)$ $\quad$ $]0{,}34\ ,\ 0{,}54[$ $\quad$ $\left(5,\dfrac{1}{2}\right)$

$x(x+3)(x-1)$ $\quad$ $\left(3,\dfrac{1}{6}\right)$ $\quad$ p^n $\quad$ np $\quad$ $0{,}01$ $\quad$ $\dfrac{1}{720}$ $\quad$ non $\quad$ 0 $\quad$ $45\times(0{,}9)^2\times(0{,}1)^8$

$x^5-2x^4+2x^3+3x^2-4x+4$ $\quad$ $\dfrac{p(1-p)}{n\delta^2}$ $\quad$ $\left]\dfrac{X}{n}-\dfrac{1}{2\sqrt{n\alpha}},\ \dfrac{X}{n}+\dfrac{1}{2\sqrt{n\alpha}}\right[$ $\quad$ b $\quad$ $\left(4,\dfrac{3}{8}\right)$ $\quad$ $25np(1-p)$

$\dfrac{n}{4}$ $\quad$ $np^{n-1}(1-p)$ $\quad$ 9 $\quad$ $(0{,}9)^{10}$ $\quad$ $\dfrac{50}{3}$ $\quad$ 0 $\quad$ oui $\quad$ $\dfrac{n(n-1)}{2}p^2(1-p)^{n-2}$

$(1-p)^n$ $\quad$ $(3x+1)^2$ $\quad$ $\dbinom{n}{k}\dfrac{1}{2^n}$ $\quad$ $9{,}9$ $\quad$ $2x^4+5x^3-3x^2-7x-2$ $\quad$ $9np(1-p)$ $\quad$ $3np+1$

$1-7\times\left(\dfrac{5}{8}\right)^{10}$ $\quad$ non $\quad$ d $\quad$ $9np(1-p)$ $\quad$ $\dfrac{125}{9}$ $\quad$ $(2x-3)(2x+3)$ $\quad$ x^4-6x^2-3x+2

$\left(n,\dfrac{1}{6}\right)$ $\quad$ $\mathscr{B}(\,0{,}9\,)$ $\quad$ $(x-1)(x-2)$ $\quad$ $np(1-p)^{n-1}$ $\quad$ 0 $\quad$ $\dfrac{n+1}{2^n}$ $\quad$ b $\quad$ d

► Réponses et corrigés page 267

Droites dans l'espace

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 27.1 — Des sommes de puissances.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes.

a) $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n$.

b) $3 + 3^2 + \cdots + 3^n$ ....

c) $1 + 2^2 + 2^4 + 2^6 \cdots + 2^{2n}$ ..

d) $1 + \mathrm{e} + \mathrm{e}^2 + \cdots + \mathrm{e}^n$ ....

Calcul 27.2

Résoudre les inéquations suivantes.

On attend la solution sous la forme d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalles.

a) $|x - 3| \leqslant 4$ ....

b) $|2x + 1| \geqslant 5$ ....

c) $|-x + 3| \leqslant 7$ ....

Remarque
Dans toute la fiche, on travaille dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Vecteurs dans l'espace

Calcul 27.3 — Sont-ils colinéaires ?

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ suivants sont-ils colinéaires, « oui » ou « non » ?

a) $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ....

b) $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ ....

c) $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \sqrt{3}-1 \\ 2 \\ 2\sqrt{3}-4 \end{pmatrix}$ .....

d) $\vec{u}\begin{pmatrix} \mathrm{e} \\ 1 \\ \mathrm{e}^2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ....

e) $\vec{u}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^2 \\ 1 \\ \mathrm{e}^{-1} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^3 \\ \mathrm{e} \\ 1 \end{pmatrix}$ ....

Calcul 27.4 — Coplanarité (I).

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ suivants sont-ils coplanaires, « oui » ou « non » ?

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix}$ ....

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$ ....

Calcul 27.5 — Coplanarité (II).

Dans chacun des cas suivants, les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\4\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}$ sont-ils coplanaires, « oui » ou « non » ?

a) $\vec{w}\begin{pmatrix}18\\3\\-4\end{pmatrix}$ ....

b) $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$ ....

Calcul 27.6 — Coplanarité à paramètre.

Déterminer la valeur de m pour que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ suivants soient coplanaires.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\3\\m\end{pmatrix}$ ....

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}m\\1\\-3\end{pmatrix}$ ....

Calcul 27.7

a) Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$ sont-ils coplanaires ? ....

b) Déterminer un triplet (a, b, c) tel que $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$ ....

Points dans l'espace

Calcul 27.8 — Une question d'alignement (I).

On considère les points $\mathrm{A}(1, -2, 1)$, $\mathrm{B}(3, -1, 2)$, $\mathrm{C}(a, b, 0)$, $\mathrm{E}(0, 4, 3)$, et $\mathrm{F}(-4, x, 1)$.

a) Déterminer (a, b) pour que les points $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ soient alignés ....

b) Déterminer x pour que (AB) et (EF) soient parallèles ....

Calcul 27.9 — Une question d'alignement (II).

On considère les points $A(-2, 1, 1)$, $B(1, 3, 2)$, $C(a, 5, 2)$ et $D(-5, 0, b)$.

a) Peut-on déterminer a pour que A, B, C soient alignés ?

Si oui, préciser la valeur de a ....

b) Peut-on déterminer b pour que A, B, D soient alignés ?

Si oui, préciser la valeur de b ....

c) Peut-on déterminer (a, b) pour que B, C, D soient alignés ?

Si oui, préciser la valeur de (a, b) ....

Calcul 27.10 — Coplanarité de points (I).

Dans chacun des cas suivants, les points A, B, C, D sont-ils coplanaires, « oui » ou « non » ?

a) $A(2, -1, 3)$, $B(2, 1, 1)$, $C(5, 0, 3)$ et $D(8, 1, 4)$ ....

b) $A(2, 2, 0)$, $B(1, 1, -1)$, $C(0, 6, 2)$ et $D(1, 1, -1)$ ....

c) $A(1, -7, 1)$, $B(5, 2, -2)$, $C(7, 3, 0)$ et $D(1, 2, -8)$ ....

Calcul 27.11 — Coplanarité de points (II).

Soient $A(2, 1, 3)$, $B(4, 2, 2)$, $C(-2, -2, 2)$ et $D(a, 2, 3)$. On suppose que A, B, C, D sont coplanaires.

Déterminer la valeur de a ....

Droites dans l'espace

Calcul 27.12 — Une mise en jambes.

On considère la droite (d) passant par $A(1, 2, 3)$ et dirigée par le vecteur $\vec{k}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

a) Donner la réprésentation paramétrique de (d) ....

Dire (« oui » ou « non ») si les points suivants appartiennent à (d).

b) $C(1, 2, 4)$ ....

c) $E(1, 0, 3)$ ....

Déterminer les valeurs du réel x pour que les points suivants appartiennent à (d).

d) $D(1, 2, x)$ ....

e) $F(x, 2, 3)$ ....

Calcul 27.13 — Une deuxième mise en jambes.

Soit $A(1, 6, -3)$. On considère la droite (d) passant par A et dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$.

Déterminer, dans chacun des cas suivants et quand cela est possible, les valeurs des réels x et y pour que le point considéré appartienne à la droite (d).

a) $B(1, 6, x)$ ....

b) $C(2, 4, x)$ ....

c) $D(1, 5, x)$ ....

d) $E(x, x^2, y)$ ....

Calcul 27.14 — Intersections.

Soit $A(1, 6, -3)$. On considère la droite (d) passant par A et dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$.

Dans chacun des cas suivants, déterminer les points d'intersection de (d) avec les droites suivantes, définies par un point et un vecteur directeur.

a) $B(2, 6, -2)$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ ....

b) $C(11, 10, 7)$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ ....

c) $D(8, 13, 4)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}$ ....

d) $E(5, 2, -3)$ et $\vec{a}\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}$ ....

Calculs plus difficiles

Calcul 27.15

On considère la droite (d) définie par le point $\mathrm{A}(1,-2,-3)$ et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

a) Déterminer les valeurs du paramètre m pour que l'intersection de (d) et de la droite (d') définie par le point $\mathrm{B}(6,-5,m)$ et le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$ ne soit pas vide, et préciser alors les coordonnées du ou des point(s) d'intersection ....

b) Déterminer les valeurs du paramètre m pour que l'intersection de (d) et de la droite (d') définie par $\mathrm{B}\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}$ et le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\0\\m\end{pmatrix}$ ne soit pas vide ....

Réponses mélangées

$\dfrac{4^{n+1}-1}{3}$ non 3 oui $\varnothing$ non non 1 7 oui $\varnothing$ oui

$[-1,7]$ $2^{n+1}-1$ non impossible oui $x=2$ $\dfrac{\mathrm{e}^{n+1}-1}{\mathrm{e}-1}$ $(2,-2)$ et $(-4,-8)$

non -3 $m=4$, $\mathrm{M}(4,1,0)$ $(0,-1,1)$ $\mathrm{M}(-1,10,-5)$ $\mathrm{A}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+t\,\vec{k}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

oui $m=\dfrac{3}{8}$ -2 oui $\dfrac{7}{2}$ non $\varnothing$ oui $[-4,10]$ $3\times\dfrac{3^n-1}{2}$

$]-\infty,-3]\cup[2,+\infty[$ $(5,2)$ non $(-1,-3)$ oui non $x\in\mathbb{R}$ non

► Réponses et corrigés page 272

Produit scalaire dans l'espace

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 28.1 — Évaluation d'un polynôme.

On considère le polynôme $P = X^2 + \frac{1}{2}X + \frac{1}{3}$.

Donner les valeurs exactes de :

a) $P(1)$ ....

b) $P(-4)$ ....

c) $P\left(\frac{3}{2}\right)$ ....

d) $P\left(\sqrt{2}\right)$ ....

Calcul 28.2 — Des suites entrelacées.

Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ les suites telles que $u_0 = v_0 = w_0 = 4$ et telles que, pour tout entier $n \geqslant 0$:

$$u_{n+1} = u_n + n + 1, \ v_{n+1} = v_n + n, \ w_{n+1} = w_n - n + 1.$$

Calculer :

a) u_1 ..

b) u_3 ..

c) v_3 ...

d) w_3 ..

Remarque
Dans toute cette fiche, l'espace est muni d'un repère orthonormé.

Vecteurs orthogonaux

Calcul 28.3 — Test d'orthogonalité.

On considère les vecteurs suivants :

$$\vec{a}\begin{pmatrix}0\\3\\-4\end{pmatrix} \qquad \vec{b}\begin{pmatrix}14\\-1\\-8\end{pmatrix} \qquad \vec{c}\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix} \qquad \vec{d}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$$

Dans chacun des cas suivants, dire si « oui » ou « non » les vecteurs proposés sont orthogonaux.

a) $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ....

b) $\vec{a}$ et $\vec{c}$ ....

c) $\vec{a}$ et $\vec{d}$ ....

d) $\vec{b}$ et $\vec{c}$ ....

e) $\vec{b}$ et $\vec{d}$ ....

f) $\vec{c}$ et $\vec{d}$ ....

Calcul 28.4 — Avec des racines.

On considère les vecteurs suivants :

$$\vec{a}\begin{pmatrix}4\\-\sqrt{6}\\3\sqrt{2}\end{pmatrix}\qquad \vec{b}\begin{pmatrix}-2\\\sqrt{3}+\sqrt{6}\\1-3\sqrt{2}\end{pmatrix}\qquad \vec{c}\begin{pmatrix}2\\\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}\qquad \vec{d}\begin{pmatrix}-2\sqrt{3}\\3-\sqrt{2}\\\sqrt{3}+\sqrt{6}\end{pmatrix}$$

Dans chacun des cas suivants, dire si « oui » ou « non » les vecteurs proposés sont orthogonaux.

a) $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ....

b) $\vec{a}$ et $\vec{c}$ ....

c) $\vec{a}$ et $\vec{d}$ ....

d) $\vec{b}$ et $\vec{c}$ ....

e) $\vec{b}$ et $\vec{d}$ ....

f) $\vec{c}$ et $\vec{d}$ ....

Calcul 28.5 — Avec un paramètre (I).

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des réels t tels que $\vec{v}$ et $\vec{w}$ soient orthogonaux.

a) $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\2t\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}t+3\\3\\4\end{pmatrix}$ ......

b) $\vec{v}\begin{pmatrix}2t\\2+t\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}t\\2-t\\-1\end{pmatrix}$ ...

Calcul 28.6 — Avec un paramètre (II).

Dans chaque cas, déterminer l'ensemble des réels t tels que $\vec{v}$ et $\vec{w}$ soient orthogonaux.

a) $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\t\\t\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}t\\1\\t\end{pmatrix}$ ....

b) $\vec{v}\begin{pmatrix}t-1\\t+2\\t-3\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}t+1\\t+2\\3-t\end{pmatrix}$ ...

Autour de la bilinéarité du produit scalaire

Calcul 28.7

Soient $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs. Exprimer chacun des produits scalaires en fonction de $\|\vec{v}\|$, $\|\vec{w}\|$ et $\vec{v}\cdot\vec{w}$.

a) $2\vec{v}\cdot(3\vec{w}-\vec{v})$ ....

b) $(\vec{v}+2\vec{w})\cdot(3\vec{w}-\vec{v})$ ....

c) $(3\vec{v}-\vec{w})\cdot(2\vec{v}+3\vec{w})$ ...

d) $(\vec{v}+3\vec{w})\cdot(3\vec{w}-\vec{v})$ ....

Calcul 28.8

Soient $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs. Exprimer chacun des carrés scalaires en fonction de $\|\vec{v}\|$, $\|\vec{w}\|$ et $\vec{v}\cdot\vec{w}$.

a) $\|\vec{v}+2\vec{w}\|^2$ ....

b) $\|3\vec{v}-\vec{w}\|^2$ ....

c) $\left\|2\vec{v}+\sqrt{3}\,\vec{w}\right\|^2$ ....

d) $\left\|2\vec{v}-\sqrt{5}\,\vec{w}\right\|^2$ ....

Calcul 28.9 — Avec des vecteurs orthogonaux.

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs orthogonaux deux à deux et tels que : $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$, $\|\vec{v}\| = 1$ et $\|\vec{w}\| = 3$.

Calculer :

a) $(2\vec{v} - 3\vec{w}) \cdot (3\vec{v} + 2\vec{w})$ ……

b) $(2\vec{v} - 3\vec{w}) \cdot (3\vec{u} + 2\vec{w})$ ……

c) $(\vec{u} + \vec{w}) \cdot (2\vec{u} - 2\vec{w})$ ……

d) $\|2\vec{v} + 3\vec{w}\|^2$ ……

e) $\left\|\sqrt{2}\,\vec{u} + \vec{w}\right\|^2$ ……

f) $\|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\|^2$ ……

Équations cartésiennes de plans

Calcul 28.10

Dans chaque cas, donner une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$.

a) $A(2, 5, 6)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ……

b) $A(1, -2, 3)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ……

c) $A(2, -4, 5)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ ……

Calcul 28.11

On considère les points $A(1, 0, 2)$ et $B(2, 1, 0)$. Indiquer l'équation du plan passant par A et perpendiculaire à la droite (AB) parmi celles proposées ci-dessous :

(a) $x + 2z + 3 = 0$

(b) $x + y - 2z + 3 = 0$

(c) $x + y + 2z - 5 = 0$

(d) $x + 2z - 5 = 0$

……

Calcul 28.12

On considère les plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$ et $\mathcal{P}_4$ d'équations respectives :

$$\mathcal{P}_1 : x + y + z + 3 = 0, \quad \mathcal{P}_2 : 2x - y + 5 = 0, \quad \mathcal{P}_3 : x - 2y + z - 3 = 0, \quad \mathcal{P}_4 : x + 2y + z + 2 = 0.$$

Dans chacun des cas suivants, dire si « oui » ou « non » les plans proposés sont perpendiculaires.

a) $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ……

b) $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_3$ ……

c) $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_4$ ……

d) $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ ……

e) $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_4$ ……

f) $\mathcal{P}_3$ et $\mathcal{P}_4$ ……

Projetés orthogonaux et calculs de distances

Calcul 28.13 — Distance d'un point à une droite.

On considère les points $A(3,4,12)$, $B(3,0,2)$ et $C(1,2,3)$. On souhaite déterminer la distance du point A à la droite (BC).

a) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BC}$ ....

b) Donner une représentation paramétrique de la droite (BC) ....

c) Donner une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{BC}$

....

d) Déterminer les coordonnées de H, le projeté orthogonal de A sur (BC). ....

e) Calculer la longueur AH ....

Calcul 28.14 — Avec une représentation paramétrique.

Soit d la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 5 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

On souhaite déterminer la distance du point $A(5,0,3)$ à la droite d.

a) Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$ perpendiculaire à d passant par A ..

b) Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point A sur la droite d ...

c) Déterminer la longueur AH ....

Calcul 28.15 — Avec un peu d'analyse.

Soit d la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t+1 \\ y = 2 \\ z = 2-t \end{cases}$ pour $t \in \mathbb{R}$.

On souhaite déterminer la distance du point $\mathrm{A}(2,4,0)$ à la droite d.

À tout réel t, on associe le point M de d de coordonnées $\mathrm{M}(t+1, 2, 2-t)$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui, à tout réel t, associe $f(t) = \mathrm{AM}$.

a) Calculer $f(t)$ ....

b) Calculer $f'(t)$ ....

c) Déterminer la distance de A à d ....

Calcul 28.16 — Distance d'un point à un plan.

Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne $x - 3y + 2z + 3 = 0$.

On souhaite déterminer la distance du point $\mathrm{A}(2,4,0)$ au plan $\mathcal{P}$.

Soit H le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$.

a) Donner une représentation paramétrique de la droite (AH) ....

Déterminer :

b) les coordonnées de H .....

c) la distance de A à $\mathcal{P}$ .....

Calculs plus difficiles

Calcul 28.17 — Cas général.

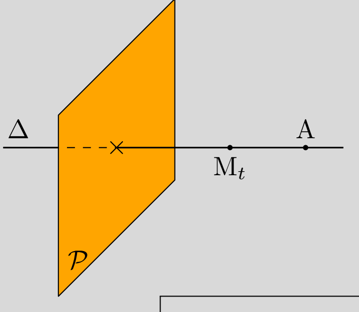
Soient $\mathrm{A}(x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{A}}, z_{\mathrm{A}})$ un point et $\mathcal{P}$ le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$, où a, b, c et d sont des réels avec a, b et c non simultanément nuls.

On souhaite déterminer la distance de A au plan $\mathcal{P}$.

Soit Δ la droite perpendiculaire à $\mathcal{P}$ passant par A.

À tout réel t, on associe le point $\mathrm{M}_t(x_{\mathrm{A}} + at, y_{\mathrm{A}} + bt, z_{\mathrm{A}} + ct)$.

On admet que la droite Δ est l'ensemble des points M_t avec t réel.

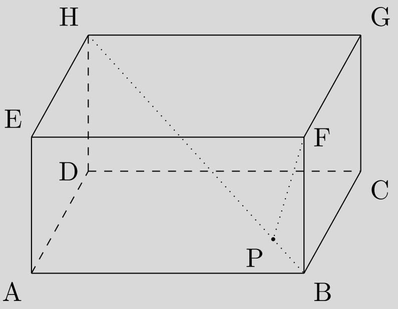


a) Soit t un réel, exprimer la longueur AM_t en fonction de t, a, b et c ....

b) En utilisant l'équation de $\mathcal{P}$, déterminer le réel t_{H} tel que $\mathrm{M}_{t_{\mathrm{H}}}$ appartienne à $\mathcal{P}$.

c) En déduire la distance de A à $\mathcal{P}$ ....

Calcul 28.18 — En perdant les repères.



Soit ABCDEFGH un pavé droit avec $AE = EH = 1$ et $AB = 2$.

Soit P le projeté orthogonal de F sur la droite (BH).

On se propose de calculer la distance du point F à la droite (BH).

a) Exprimer $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BH}$ en fonction des longueurs BP et BH ....

b) Calculer BH à l'aide du théorème de Pythagore ....

c) Calculer $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BH}$ en décomposant $\overrightarrow{BH}$ en une somme de vecteurs qui sont ou bien orthogonaux à $\overrightarrow{BF}$, ou bien colinéaires à $\overrightarrow{BF}$ ....

d) En déduire BP ....

e) En déduire la distance de F à (BH) à l'aide du théorème de Pythagore ....

Calcul 28.19 — Une aire de triangle.

On considère les points $A(1,1,1)$, $B(4,2,2)$ et $C(2,3,3)$. On souhaite calculer l'aire du triangle ABC.

a) Donner une représentation paramétrique de (BC) ....

b) Déterminer la distance de A à (BC) ....

c) En déduire l'aire de ABC ....

Réponses mélangées

$\sqrt{2t^2-6t+9}$ $\quad -48 \quad \frac{11}{6} \quad \mathrm{H}\left(\frac{4}{3},\frac{5}{3},\frac{8}{3}\right)$ $\quad$ oui $\quad$ non $\quad \|\vec{v}\|^2+4\|\vec{w}\|^2+4\,\vec{v}\cdot\vec{w}$

$\frac{5\sqrt{3}}{3} \quad \frac{7\sqrt{3}}{3} \quad \left\{-5-\sqrt{31},-5+\sqrt{31}\right\} \quad -2x+2y+z-14=0$ $\quad$ oui $\quad 5x+6y+14=0$

$10 \quad 4\|\vec{v}\|^2+3\|\vec{w}\|^2+4\sqrt{3}\,\vec{v}\cdot\vec{w}$ $\quad$ non $\quad \mathrm{H}\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2},1\right) \quad 9\|\vec{w}\|^2-\|\vec{v}\|^2$

$-\frac{ax_{\mathrm{A}}+by_{\mathrm{A}}+cz_{\mathrm{A}}+d}{a^2+b^2+c^2} \quad x+2y-z-2=0 \quad -14 \quad 13$ $\quad$ non $\quad$ non $\quad \begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$

$\left\{-\frac{8}{5}\right\} \quad 4\|\vec{v}\|^2+5\|\vec{w}\|^2-4\sqrt{5}\,\vec{v}\cdot\vec{w}$ $\quad$ b $\quad \mathrm{AM}_t=|t|\sqrt{a^2+b^2+c^2} \quad 1 \quad 4\sqrt{5}$

$6\|\vec{v}\|^2-3\|\vec{w}\|^2+7\,\vec{v}\cdot\vec{w} \quad \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad 2x-y+2z-10=0 \quad \frac{43}{3}$ $\quad$ oui $\quad$ non

oui $\quad \mathrm{BP}\times\mathrm{BH} \quad \begin{cases}x=3-2t\\y=2t\\z=2+t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$ $\quad$ oui $\quad$ non $\quad 9\|\vec{v}\|^2+\|\vec{w}\|^2-6\,\vec{v}\cdot\vec{w}$

$\frac{10}{3} \quad \frac{5\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ oui $\quad$ oui $\quad 4 \quad 5$ $\quad$ oui $\quad$ non $\quad \begin{cases}x=2+t\\y=4-3t\\z=2t\end{cases},\ t\in\mathbb{R} \quad 12$

$6\,\vec{v}\cdot\vec{w}-2\|\vec{v}\|^2 \quad 2x-y+2z-11=0$ $\quad$ non $\quad \mathrm{H}(-1,4,4) \quad \frac{\sqrt{14}}{2} \quad \frac{\sqrt{6}}{6} \quad 85$

$\begin{cases}x=4-2t\\y=2+t\\z=2+t\end{cases},\ t\in\mathbb{R} \quad \frac{2t-3}{\sqrt{2t^2-6t+9}} \quad \{-1,1\} \quad \mathrm{PF}=\frac{\sqrt{30}}{6} \quad -54 \quad 7$ $\quad$ oui

$6\|\vec{w}\|^2-\|\vec{v}\|^2+\vec{v}\cdot\vec{w}$ $\quad$ oui $\quad \sqrt{6} \quad \frac{|ax_{\mathrm{A}}+by_{\mathrm{A}}+cz_{\mathrm{A}}+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \quad \frac{7}{3}+\frac{1}{2}\sqrt{2} \quad \{-5,0\}$

► Réponses et corrigés page 276

Plans et sphères dans l'espace

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 29.1 — Intersection de droites dans le plan.

Déterminer l'intersection éventuelle des droites déterminées par les équations suivantes.

Il s'agit de résoudre des systèmes de deux équations à deux inconnues.

a) $2x + y + 5 = 0$ et $y = -2x + 4$ ...

b) $2x - 2y = 1$ et $y = x - \dfrac{1}{2}$ ....

c) $2x + y + 3 = 0$ et $y = -3x + 6$ ..

Calcul 29.2 — Signe d'un trinôme.

Résoudre les inéquations suivantes.

On donnera les solutions sous la forme d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalles.

a) $(2x - 3)(x + 1) > 0$ ....

b) $(5 - 2x)(3 + x) > 0$ ....

c) $\dfrac{2x + 1}{x - 5} \leqslant 0$ ....

Remarque
Dans toute la fiche, on travaille dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Autour des équations cartésiennes

Calcul 29.3 — Pour s'échauffer (I).

Pour chacune des équations cartésiennes de plan suivantes, donner un point appartenant à ce plan.

a) $x + 2y = 3$ ....

b) $y - 3z = 4$ ....

c) $x = 6$ ....

d) $x + y - 2z = 18$ ....

Calcul 29.4 — Pour s'échauffer (II).

Déterminer une équation du plan passant par le point $A(1,2,1)$ et normal au vecteur indiqué.

a) $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ ....

b) $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}$ ....

c) $\overrightarrow{n_3}\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}$ ....

Calcul 29.5 — Pour s'échauffer (III).

Pour chacune des équations cartésiennes de plan suivantes, donner un vecteur normal à ce plan.

a) $x + 2y = 3$ ....

b) $y - 3z = 4$ ....

c) $x = 6$ ....

d) $x + y - 2z = 18$ ....

Calcul 29.6 — Des vecteurs remarquables.

En déterminant un vecteur orthogonal aux deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, déterminer une équation du plan passant par $A(1,2,3)$ et dirigé par les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Dans chacun des cas, on pourra remarquer qu'il existe un vecteur orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ « remarquable ».

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ ....

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ ....

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ ....

d) $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\2\\-5\end{pmatrix}$ ....

Calcul 29.7 — Vecteurs orthogonaux à deux vecteurs.

Dans chacun des cas suivants, déterminer un vecteur $\vec{n}$ orthogonal aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On cherchera un vecteur $\vec{n}$ de la forme $\vec{n}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}$.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ ....

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ ....

Calcul 29.8 — Équations cartésiennes de plan (I).

Déterminer une équation cartésienne du plan passant par $\mathrm{A}(1,2,-3)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ci-dessous. On commencera par déterminer un vecteur $\vec{n}$ orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\2\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}$ ....

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}$ ....

Calcul 29.9 — Équations cartésiennes de plan (II).

Déterminer une équation cartésienne du plan passant par $\mathrm{A}(1,2,-3)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ci-dessous. On commencera par déterminer un vecteur $\vec{n}$ orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\1\\-5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-2\\-5\end{pmatrix}$ ....

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\8\\3\end{pmatrix}$ ....

Avec des points

Calcul 29.10 — Équation de plan (I).

Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation cartésienne du plan défini par les points $\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C}$ de la forme $ax+by+cz=1$.

Il s'agit de résoudre des systèmes de trois équations à trois inconnues.

a) $\mathrm{A}(1,0,1)$, $\mathrm{B}(2,-1,0)$ et $\mathrm{C}(3,-2,0)$ ....

b) $\mathrm{A}(1,0,1)$, $\mathrm{B}(2,-1,0)$ et $\mathrm{C}(3,-2,2)$ ....

c) $\mathrm{A}(1,0,1)$, $\mathrm{B}(2,-1,1)$ et $\mathrm{C}(3,-1,1)$ ....

Calcul 29.11 — Équation de plan (II).

On considère les points $\mathrm{A}(\alpha,0,0)$, $\mathrm{B}(0,\beta,0)$ et $\mathrm{C}(0,0,\gamma)$ où α,β,γ sont trois réels non nuls.

Déterminer une équation cartésienne du plan défini par les points $\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C}$ de la forme $ax+by+cz=1$.

....

Calcul 29.12 — Plan médiateur.

Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par le milieu du segment [AB] et orthogonal à (AB).

a) $A(2,0,0)$ et $B(-4,0,0)$ ....

b) $A(2,1,-3)$ et $B(4,-1,-3)$ ....

Intersections

Calcul 29.13 — Intersection d'une droite et d'un plan (I).

On considère la droite (d) définie par le point $A(1,2,-1)$ et le vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'intersection de (d) et de $\mathcal{P}$.

On utilisera une représentation paramétrique de la droite.

a) $\mathcal{P} : x + 2y = 6$ ....

b) $\mathcal{P} : x + y + 2z = 8$ ....

c) $\mathcal{P} : 2x - z = 4$ ....

Calcul 29.14 — Intersection d'une droite et d'un plan (II).

On considère la droite (d) définie par le point $A(1,2,-1)$ et le vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'intersection de (d) et de $\mathcal{P}$.

a) $\mathcal{P} : x - y + 2z = 6$ ....

b) $\mathcal{P} : 2x - z = 3$ ....

Calcul 29.15 — Intersection de deux plans (I).

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'intersection des deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

On attend pour la réponse un point et un vecteur directeur de la droite d'intersection.

a) $\mathcal{P}_1 : x = 1$ et $\mathcal{P}_2 : y = -1$ ....

b) $\mathcal{P}_1 : x + z = 1$ et $\mathcal{P}_2 : z = -1$ ......

c) $\mathcal{P}_1 : x + 2y = 1$ et $\mathcal{P}_2 : x = -1$ .....

Calcul 29.16 — Intersection de deux plans (II).

Même exercice.

a) $\mathcal{P}_1 : x + y - 2z = 6$ et $\mathcal{P}_2 : y + z = 12$ ....

b) $\mathcal{P}_1 : x + y - 2z = 6$ et $\mathcal{P}_2 : x - y + z = 12$ ....

c) $\mathcal{P}_1 : 2x + y - 2z = 10$ et $\mathcal{P}_2 : x - 2y + z = -5$ ...

d) $\mathcal{P}_1 : 3x - 2y - 6z = 5$ et $\mathcal{P}_2 : 2x - 3y + 5z = 0$ ..

Calcul 29.17 — Intersection de trois plans.

Dans chacun des cas suivants, déterminer les coordonnées du point d'intersection des plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$.

a) $\mathcal{P}_1 : x + y = 1$, $\mathcal{P}_2 : y - z = 0$ et $\mathcal{P}_3 : x - z = 3$ ....

b) $\mathcal{P}_1 : x + y + 2z = 1$, $\mathcal{P}_2 : y - z = 2$ et $\mathcal{P}_3 : y + 3z = 4$ ....

c) $\mathcal{P}_1 : x + 2y - 3z = 14$, $\mathcal{P}_2 : x - y - z = 28$ et $\mathcal{P}_3 : y + 4z = 0$ ....

Sphères

Calcul 29.18 — Équations de sphère.

Dans chacun des cas suivants, donner l'équation de la sphère de centre Ω et de rayon R.

On donnera l'équation sous forme développée et ordonnée.

a) $\Omega(1, 2, 3)$ et $R = 7$ ....

b) $\Omega(1, -2, 1)$ et $R = 2$ ....

Calcul 29.19 — Éléments caractéristiques d'une sphère (I).

Identifier les ensembles définis par l'équation cartésienne ci-dessous. En particulier s'il s'agit de sphères, préciser leur centre Ω et leur rayon R.

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ....

b) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 3z + 10 = 0$ ....

c) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + 1 = 0$ ....

Calcul 29.20 — **Éléments caractéristiques d'une sphère (II).**

Les équations suivantes décrivent des sphères. Déterminer leur centre Ω et leur rayon R.

a) $x^2 + y^2 + z^2 - x - 3y + z - \dfrac{5}{4} = 0$ ....

b) $x^2 + y^2 + z^2 - 2\cos(\alpha)x - 2\sin(\alpha)y - 3 = 0$ ....

Calcul 29.21 — **Intersection d'une droite et d'une sphère.**

On s'intéresse à l'intersection d'une droite et d'une sphère.

a) Donner l'équation cartésienne de la sphère $\mathcal{S}$ de centre $\Omega(1,2,1)$ et de rayon $R = 1$.

....

b) Donner une représentation paramétrique de la droite (d) passant par $\mathrm{A}(1,1,1)$ et dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$.

....

c) Déterminer les deux points d'intersection de (d) et $\mathcal{S}$ ..

Calcul 29.22 — **Intersections.**

En suivant le même plan de résolution que dans l'exercice précédent, déterminer l'intersection de la sphère $\mathcal{S}$ de l'exercice précédent avec les droites suivantes.

a) (d_2) définie par $\mathrm{B}(3,5,-2)$ et dirigée par $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$ ....

b) (d_3) définie par $\mathrm{C}\left(2,4,1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et dirigée par $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ ......

Calculs plus difficiles

Calcul 29.23

Déterminer l'intersection des plans suivants.

a) $\mathcal{P}_1 : 2x + 3y - 4z = 12$, $\mathcal{P}_2 : x + 3y - 5z = -18$ et $\mathcal{P}_3 : -x + 2y - 3z = 6$ ....

b) $\mathcal{P}_1 : x - 2y + 3z = 12$, $\mathcal{P}_2 : 2x - 3y + 2z = -18$ et $\mathcal{P}_3 : 5x - 8y + 7z = -24$ ......

Calcul 29.24

Même exercice.

a) $\mathcal{P}_1 : 2x - 4y + z = 1$, $\mathcal{P}_2 : x - 2y + z = -2$ et $\mathcal{P}_3 : 3x - 6y + 2z = 6$ ....

b) $\mathcal{P}_1 : 2x - 4y + z = 5$, $\mathcal{P}_2 : x - 2y + z = -10$ et $\mathcal{P}_3 : x + 3y - z = 10$ ....

Réponses mélangées

$\Omega(0,0,0)$ et $R=2$ $\quad$ $A(6,0,0)$ $\quad$ $x^2+y^2+z^2-2x-4y-2z+5=0$ $\quad$ $A(0,4,0)$

$\{A(3,-6,-25)\}$ $\quad$ $\vec{n}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ -\frac{5}{3}\\ 1\end{pmatrix}$ $\quad$ $A(3,4,0)$, $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$ $\quad$ $\{M(-4,52,34)\}$ $\quad$ $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

$\varnothing$ $\quad$ $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ $\quad$ $3x-2y+4z=-13$ $\quad$ $\Omega\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$ et $R=2$ $\quad$ $\varnothing$ $\quad$ $z=1$

$2x+3y=8$ $\quad$ $\varnothing$ $\quad$ $\Omega(\cos(\alpha),\sin(\alpha),0)$ et $R=2$ $\quad$ $\varnothing$ $\quad$ $x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z+2=0$

la droite définie par $A(-72,-42,0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\4\\1\end{pmatrix}$ $\quad$ $A(2,-1,-1)$ $\quad$ $\{M(9,-21)\}$ $\quad$ $y=2$

$A(9,-3,0)$, $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{cases} x = t+1 \\ y = -t+1 \\ z = 3t+1 \end{cases}$ où t décrit $\mathbb{R}$ $\quad$ $\varnothing$ $\quad$ $A\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$, $\vec{u}\begin{pmatrix}28\\27\\5\end{pmatrix}$

$A(18,0,0)$ $\quad$ $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-35=0$ $\quad$ $A(-1,1,0)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$A(1,-1,0)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $\quad$ $x=1$ $\quad$ $x-2y+4z=-15$ $\quad$ $A(3,0,0)$ $\quad$ $2x-y+3z=-9$

$\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\quad$ $A(2,0,-1)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $\quad$ $y=2$ $\quad$ $\Omega(-1,2,3)$ et $R=\sqrt{13}$ $\quad$ $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ $\quad$ $z=1$

$\left\{I\left(\frac{11}{4},\frac{1}{4},\frac{5}{2}\right)\right\}$ $\quad$ $A\left(-\frac{5}{2},\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)$ $\quad$ $x+y=1$ $\quad$ $A(-6,12,0)$, $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$ $\quad$ $x+y=1$

$z=3$ $\quad$ $M\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2},1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\quad$ la droite $\quad$ (d) $\quad$ $]-\infty,-1[\,\cup\left]\frac{3}{2},+\infty\right[$ $\quad$ $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=1$

$\{I(0,3,-3)\}$ $\quad$ $x=1$ $\quad$ $M_1(1,1,1)$ et $M_2\left(\frac{9}{11},\frac{13}{11},\frac{5}{11}\right)$ $\quad$ $\left[-\frac{1}{2},5\right[$ $\quad$ $x=-1$

$x-y=3$ $\quad$ $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix}$ $\quad$ $3x-2y+2z=-7$ $\quad$ $A(25,-4,1)$ $\quad$ $\left\{I\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2},2\right)\right\}$ $\quad$ $\left]-3,\frac{5}{2}\right[$

► Réponses et corrigés page 282

Réponses et corrigés

Fiche n° 1. Limites de fonctions

Réponses

1.1 a) .... $\boxed{x^2+x}$

1.1 b) .... $\boxed{x^2+1}$

1.1 c) .... $\boxed{x+1+x^2}$

1.2 a) .... $\boxed{\mathrm{e}^x}$

1.2 b) .... $\boxed{\mathrm{e}^{2x}}$

1.2 c) .... $\boxed{\mathrm{e}^{3x+1}}$

1.2 d) .... $\boxed{\mathrm{e}^{4x+1}}$

1.3 a) .... $\boxed{\text{FI}}$

1.3 b) .... $\boxed{+\infty}$

1.3 c) .... $\boxed{\text{FI}}$

1.3 d) .... $\boxed{-\infty}$

1.4 a) .... $\boxed{+\infty}$

1.4 b) .... $\boxed{\text{FI}}$

1.4 c) .... $\boxed{+\infty}$

1.4 d) .... $\boxed{-\infty}$

1.5 a) .... $\boxed{+\infty}$

1.5 b) .... $\boxed{-\infty}$

1.5 c) .... $\boxed{3}$

1.5 d) .... $\boxed{0}$

1.6 a) .... $\boxed{1}$

1.6 b) .... $\boxed{-\frac{1}{2}}$

1.7 a) .... $\boxed{-\infty}$

1.7 b) .... $\boxed{+\infty}$

1.7 c) .... $\boxed{0}$

1.7 d) .... $\boxed{-\infty}$

1.8 a) .... $\boxed{2}$

1.8 b) .... $\boxed{+\infty}$

1.8 c) .... $\boxed{-\frac{1}{4}}$

1.8 d) .... $\boxed{\frac{1}{2}}$

1.9 a) .... $\boxed{-2}$

1.9 b) .... $\boxed{\frac{5}{2}}$

1.10 a) .... $\boxed{3}$

1.10 b) .... $\boxed{12}$

1.11 a) .... $\boxed{\text{oui}}$

1.11 b) .... $\boxed{1}$

1.11 c) .... $\boxed{0}$

1.12 a) .... $\boxed{2}$

1.12 b) .... $\boxed{\frac{1}{2}}$

1.13 a) .... $\boxed{0}$

1.13 b) .... $\boxed{+\infty}$

1.13 c) .... $\boxed{\mathrm{e}^{-7}+3}$

1.13 d) .... $\boxed{+\infty}$

1.14 a) .... $\boxed{+\infty}$

1.14 b) .... $\boxed{0}$

1.15 a) .... $\boxed{+\infty}$

1.15 b) .... $\boxed{1}$

1.15 c) .... $\boxed{-1}$

1.15 d) .... $\boxed{+\infty}$

1.16 .... $\boxed{\text{c}}$

1.17 a) .... $\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

1.17 b) .... $\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

1.17 c) .... $\boxed{1}$

1.18 .... $\boxed{0}$

1.19 a) .... $\boxed{-\infty}$

1.19 b) .... $\boxed{0}$

1.20 a) .... $\boxed{0}$

1.20 b) .... $\boxed{1}$

1.20 c) .... $\boxed{1}$

1.20 d) .... $\boxed{\frac{1}{2}}$

1.21 a) .... $\boxed{1}$

1.21 b) .... $\boxed{0}$

1.21 c) .... $\boxed{2}$

1.21 d) .... $\boxed{1}$

1.22 a) .... $\boxed{\frac{1}{2}}$

1.22 b) .... $\boxed{0}$

1.23 .... $\boxed{\frac{1}{4}}$

1.24 a) .... $\boxed{a}$

1.24 b) .... $\boxed{1}$

1.24 c) .... $\boxed{\mathrm{e}}$

1.25 a) .... $\boxed{1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$

1.25 b) .... $\boxed{-\frac{1}{2}}$

1.26 a) .... $\boxed{-2}$

1.26 b) .... $\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

Corrigés

1.1 a) On a $\dfrac{x^3+x^2}{x} = \dfrac{x(x^2+x)}{x} = x^2+x$.

1.2 a) On a $\mathrm{e}^{2x} \times \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{2x-x} = \mathrm{e}^{x}$.

1.2 b) On a $\dfrac{\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{x}} = \mathrm{e}^{3x-x} = \mathrm{e}^{2x}$.

1.2 c) On a $\dfrac{\mathrm{e}^{2x+1}}{\mathrm{e}^{-x}} = \mathrm{e}^{2x+1-(-x)} = \mathrm{e}^{3x+1}$.

1.3 b) On a $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x} = 0$, d'où le résultat.

1.3 d) Attention à ne pas tomber dans le piège !

Ce n'est pas une forme indéterminée puisqu'on a $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$, d'où le résultat par quotient.

1.4 a) On a $\lim\limits_{x\to 0^+} \cos(x) = 1$, d'où le résultat par quotient.

1.4 b) On a $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin(x) = 0$, il s'agit donc d'une forme indéterminée.

1.4 c) On a $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \sin(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \cos(x) = 0^+$, d'où le résultat par quotient.

1.4 d) Comme ci-dessus, mais cette fois-ci on a $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \cos(x) = 0^-$.

1.5 a) On simplifie $\dfrac{x^2+1}{x} = x + \dfrac{1}{x}$ et on en déduit la limite.

1.5 b) On factorise par les termes dominants en écrivant

$$\frac{x^3+1}{x^2-x} = \frac{x^3\left(1+\dfrac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{1}{x}\right)} = \frac{x\left(1+\dfrac{1}{x^3}\right)}{1-\dfrac{1}{x}}.$$

On en déduit la limite.

1.5 c) On factorise par les termes dominants en écrivant

$$\frac{3x^2-2}{x^2+x} = \frac{x^2\left(3-\dfrac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)} = \frac{3-\dfrac{2}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x}}.$$

On en déduit la limite.

1.5 d) On factorise par les termes dominants en écrivant

$$\frac{x+3}{x^2+x+1} = \frac{x\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)} = \frac{1+\dfrac{3}{x}}{x\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}.$$

On en déduit la limite.

....

1.6 a) On met en facteur les termes dominants. On trouve :

$$\frac{\sqrt{x^2+x}}{x+2} = \frac{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}}{x\left(1+\dfrac{2}{x}\right)} = \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}{x\left(1+\dfrac{2}{x}\right)} = \frac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}{1+\dfrac{2}{x}}.$$

On en déduit la limite.

....

1.6 b) On procède comme ci-dessus en mettant x^4 en facteur dans la racine et x^2 en facteur au dénominateur.

....

1.7 a) On met au même dénominateur en écrivant $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x-1}{x^2}$. On en déduit le résultat par quotient.

....

1.7 b) On y voit plus clair en développant : on a $(x+2)^2 - x^2 = 4x+4$; on en déduit le résultat. On pouvait aussi factoriser en reconnaissant l'expression $a^2 - b^2$.

....

1.7 c) En l'absence d'idée, on peut mettre au même dénominateur et simplifier. Il est plus judicieux de multiplier « en haut et en bas » par x. On écrit

$$\frac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x}} = \frac{1-\dfrac{1}{x}}{\sqrt{x}+1},$$

et on en déduit le résultat.

....

1.7 d) On développe

$$\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 - x(x+1) = x^2 + 2\sqrt{x} + \frac{1}{x} - x^2 - x = x\left(\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} - 1\right).$$

On en déduit le résultat.

....

1.8 a) On a $\dfrac{x^2-1}{x-1} = \dfrac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x+1$. Donc, $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} x+1 = 2$.

....

1.8 b) On a $\dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1} = \dfrac{(x+1)(x-1)}{(x-1)^2} = \dfrac{x+1}{x-1}$. On en déduit le résultat.

....

1.8 c) On a $\dfrac{x+2}{x^2-4} = \dfrac{x+2}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{1}{x-2}$. Donc, $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{x+2}{x^2-4} = \lim_{x\to -2} \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{4}$.

....

1.8 d) On a $\dfrac{2x-1}{4x^2-1} = \dfrac{2x-1}{(2x-1)(2x+1)} = \dfrac{1}{2x+1}$. On en déduit le résultat.

....

1.9 a) Le polynôme $x^2 - 3x + 2$ s'annule en 1 et 2, ainsi on a $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$. On en déduit

$$\frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x+1}{x-2},$$

puis la limite demandée.

....

1.9 b) Le polynôme $x^2 - x - 6$ s'annule en 3 et -2, ainsi on a $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$. On en déduit

$$\frac{x^2-x-6}{x^2+2x} = \frac{(x-3)(x+2)}{x(x+2)} = \frac{x-3}{x},$$

puis la limite demandée.

....

1.10 a) On a $\dfrac{x^3-1}{x-1} = \dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = x^2+x+1$. On en déduit le résultat.

....

1.10 b) On note que $-8 = (-2)^3$, donc on applique la formule avec $a = x$ et $b = -2$. On a

$$\frac{x^3+8}{x+2} = \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2} = x^2 - 2x + 4.$$

On en déduit le résultat.

....

1.11 a) On a simplement multiplié « en haut et en bas » par $\sqrt{x^2+1}+x$.

....

1.11 b) On reconnaît une identité remarquable du type $(a-b)(a+b)$, ce qui donne

$$(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x) = \sqrt{x^2+1}^{\,2} - x^2 = x^2+1-x^2 = 1.$$

....

1.11 c) C'est direct grâce au calcul précédent.

....

1.12 a) On utilise le conjugué en écrivant

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+x}-x} = \frac{\sqrt{x^2+x}+x}{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)} = \frac{\sqrt{x^2+x}+x}{x} = \sqrt{1+\frac{1}{x}}+1.$$

On en déduit la limite.

....

1.12 b) On utilise le conjugué :

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}.$$

Ce n'est pas tout à fait fini : on factorise au dénominateur

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x(1+\frac{1}{\sqrt{x}})}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1}.$$

On en déduit le résultat.

....

1.13 a) C'est direct, par croissance comparée.

1.13 b) On met en facteur les termes dominants en écrivant

$$\frac{e^x - x^8}{x+1} = \frac{e^x}{x} \times \frac{1 - \dfrac{x^8}{e^x}}{1 + \dfrac{1}{x}}.$$

Or, par croissance comparée, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^8}{e^x} = 0$ et donc on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1 - \dfrac{x^8}{e^x}}{1 + \dfrac{1}{x}} = 1$. Toujours par croissance comparée, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} = \dfrac{e^x}{x} = +\infty$. On conclut par produit de limites.

1.13 c) Les exponentielles se simplifient quand on écrit :

$$\frac{e^{x-7} + 3e^x}{e^x + x} = \frac{e^x(e^{-7} + 3)}{e^x\left(1 + \dfrac{x}{e^x}\right)} = \frac{e^{-7} + 3}{1 + \dfrac{x}{e^x}}.$$

Or, par croissance comparée, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$. On en déduit le résultat.

1.13 d) On simplifie par e^x et on procède comme ci-dessus.

1.14 a) On a $\lim\limits_{x\to0^+} x e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$, par croissance comparée.

1.14 b) On a $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^3} = \lim\limits_{X\to+\infty} X^3 e^{-X} = 0$, par croissance comparée.

1.15 a) On factorise par x^2 en écrivant $x^2 - \ln(x) = x^2\left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x^2}\right)$.

Or, par croissance comparée, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0$. On en déduit la limite.

1.15 b) On factorise par x « en haut et en bas » et on conclut comme ci-dessus.

1.15 c) On a $\dfrac{\ln(x) - \sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} = \dfrac{\sqrt{x}\left(\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}} - 1\right)}{\sqrt{x} \times \sqrt{1 + \dfrac{1}{x}}} = \dfrac{\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{x}}}$. Or, par croissance comparée, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0$.

On en déduit la limite.

1.15 d) On factorise par $\ln(x)$ « en haut et en bas ».

1.16 C'est un cas de croissance comparée.

1.17 a) Grâce à la définition, on a

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\ln(2)} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\ln(2)}} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln(\sqrt{2})}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

On peut retenir que, avec cette définition, on a, pour $x > 0$, $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.

1.17 b) C'est un calcul similaire.

1.17 c) Par croissance comparée, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$. On obtient le résultat par passage à l'exponentielle, ce qui est possible par continuité de la fonction exponentielle : on a

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{x\ln(x)} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

1.18 On a

$$\ln(\mathrm{e}^x + 4x) = \ln\big(\mathrm{e}^x(1 + 4x\mathrm{e}^{-x})\big) = \ln(\mathrm{e}^x) + \ln\big(1 + 4x\mathrm{e}^{-x}\big) = x + \ln\big(1 + 4x\mathrm{e}^{-x}\big).$$

Ainsi, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln(\mathrm{e}^x + 4x) - x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\big(1 + 4x\mathrm{e}^{-x}\big)$.

Or, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$ par croissance comparée. Donc, finalement, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln(\mathrm{e}^x + 4x) - x) = \ln(1) = 0$.

1.19 a) On factorise : $\sqrt{\ln(x)} - \ln(x) = \sqrt{\ln(x)}\Big(1 - \sqrt{\ln(x)}\Big)$, et on en déduit la limite par produit de limites.

1.19 b) On a $\dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{\ln(x)}}}{x} = \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{\ln(x)}}}{\mathrm{e}^{\ln(x)}} = \mathrm{e}^{\sqrt{\ln(x)} - \ln(x)}$. On conclut avec la question précédente.

1.20 a) On reconnaît le taux d'accroissement de cos en 0. Puisque cos est dérivable en 0, on a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - \cos(0)}{x - 0} = \cos'(0) = -\sin(0) = 0.$$

1.20 b) On introduit $f(x) = \ln(1 + x)$ et on raisonne comme à la question précédente. Puisque la fonction f est dérivable en 0, on a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0).$$

Comme on a $f'(x) = \dfrac{1}{1 + x}$, on a $f'(0) = 1$. D'où le résultat.

1.20 c) On reconnaît le taux d'accroissement de sin en 0. Puisque la fonction sin est dérivable en 0, on a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \sin'(0) = \cos(0) = 1.$$

1.20 d) On procède comme ci-dessus.

1.21 a) On a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{x^2} - 1}{x^2} = \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^X - 1}{X} = 1$, d'après le rappel.

1.21 b) On écrit $\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{x} = x \times \dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{x^2}$ et on utilise la question précédente pour effectuer un produit de limites.

1.21 c) On écrit $\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{x} = 2\,\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{2x}$. Or, on a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{2x} = \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{X}-1}{X} = 1$. On en déduit la limite.

1.21 d) On écrit $x(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1) = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}$. Or, on a $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{X}-1}{X} = 1$.

1.22 a) On écrit $\dfrac{x}{\ln(1+2x)} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2x}{\ln(1+2x)}$. Or, on a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2x)}{2x} = \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1$. On conclut par quotient de limites.

1.22 b) On fait apparaître des taux d'accroissement :

$$\frac{1-\cos(x)}{\ln(1+x)} = \frac{1-\cos(x)}{x} \times \frac{1}{\frac{\ln(1+x)}{x}}.$$

On conclut en remarquant qu'il s'agit de taux d'accroissement dont on peut calculer la limite.

1.23 Notons $f(x)$ l'expression dont on cherche la limite.

On utilise une première fois la technique de la quantité conjuguée pour écrire

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt{x^3+\sqrt{x^4+2x^{\frac{7}{2}}+1}} - \sqrt{x^3+\sqrt{x^4+x^{\frac{7}{2}}+1}}\right)\left(\sqrt{x^3+\sqrt{x^4+2x^{\frac{7}{2}}+1}} + \sqrt{x^3+\sqrt{x^4+x^{\frac{7}{2}}+1}}\right)}{\sqrt{x^3+\sqrt{x^4+2x^{\frac{7}{2}}+1}} + \sqrt{x^3+\sqrt{x^4+x^{\frac{7}{2}}+1}}}.$$

Au numérateur, on utilise la formule « $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ » ; les termes en x^3 se simplifient. On trouve

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^4+2x^{\frac{7}{2}}+1} - \sqrt{x^4+x^{\frac{7}{2}}+1}}{\sqrt{x^3+\sqrt{x^4+2x^{\frac{7}{2}}+1}} + \sqrt{x^3+\sqrt{x^4+x^{\frac{7}{2}}+1}}}.$$

Le numérateur est toujours une forme indéterminée ! On applique une deuxième fois la technique de la quantité conjuguée. Des simplifications similaires conduisent à trouver

$$f(x) = \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\left(\sqrt{x^3+\sqrt{x^4+2x^{\frac{7}{2}}+1}} + \sqrt{x^3+\sqrt{x^4+x^{\frac{7}{2}}+1}}\right)\left(\sqrt{x^4+2x^{\frac{7}{2}}+1} + \sqrt{x^4+x^{\frac{7}{2}}+1}\right)}.$$

On met en facteur les termes dominants dans chaque racine, et un facteur global $x^{\frac{7}{2}}$ apparaît au dénominateur. Après simplification, on en déduit la limite.

1.24 a) En posant $X = ax$, on trouve

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+ax)}{x} = a \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+ax)}{ax} = a \lim_{X\to 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = a.$$

1.24 b) En posant $X = \dfrac{1}{x}$, on trouve

$$\lim_{x\to +\infty} x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{X\to 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1.$$

1.24 c) On a

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \mathrm{e}^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}.$$

Or, on a trouvé à la question précédente que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = 1$. On obtient le résultat par passage à l'exponentielle, ce qui est possible par continuité de la fonction exponentielle.

....

1.25 a) On utilise la formule (appelée *formule de duplication*) : $\cos(x) = \cos\left(2\times\dfrac{x}{2}\right) = 1-2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

....

1.25 b) D'après la question précédente, on a

$$\frac{\cos(x)-1}{x^2} = -\frac{2\sin^2(\frac{x}{2})}{x^2}.$$

Or, en utilisant l'indication de l'énoncé, on a

$$\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2(\frac{x}{2})}{x^2} = \lim_{x\to0}\frac{2\sin^2(\frac{x}{2})}{4\times\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\lim_{X\to0}\left(\frac{\sin(X)}{X}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

....

1.26 a) On utilise une formule de duplication : $\dfrac{\sin(2x)}{\sin(x)} = \dfrac{2\sin(x)\cos(x)}{\sin(x)} = 2\cos(x)$. On en déduit la limite.

....

1.26 b) On a $\dfrac{\cos(x)-\sin(x)}{\cos(2x)} = \dfrac{\cos(x)-\sin(x)}{\cos^2(x)-\sin^2(x)} = \dfrac{1}{\cos(x)+\sin(x)}$. On en déduit la limite.

....

Fiche n° 2. Limites de suites

Réponses

2.1 a) .... $\boxed{\dfrac{-1}{6}}$

2.1 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{5}}$

2.1 c) .... $\boxed{\dfrac{5}{2}}$

2.2 a) .... $\boxed{]21,+\infty[}$

2.2 b) .... $\boxed{\left]-\infty,\dfrac{1}{2}\right]\cup\left[\dfrac{2}{3},+\infty\right[}$

2.2 c) .... $\boxed{]1,6]}$

2.2 d) .... $\boxed{]-\infty,-3]\cup]0,3]}$

2.3 a) .... $\boxed{\text{non}}$

2.3 b) .... $\boxed{\text{oui}}$

2.3 c) .... $\boxed{\text{non}}$

2.3 d) .... $\boxed{\text{oui}}$

2.3 e) .... $\boxed{\text{non}}$

2.3 f) .... $\boxed{\text{oui}}$

2.3 g) .... $\boxed{\text{oui}}$

2.3 h) .... $\boxed{\text{oui}}$

2.4 a) .... $\boxed{\text{d}}$

2.4 b) .... $\boxed{\text{d}}$

2.4 c) .... $\boxed{\text{c}}$

2.5 a) .... $\boxed{a}$

2.5 b) .... $\boxed{a^2-a+1}$

2.5 c) .... $\boxed{1}$

2.5 d) .... $\boxed{1}$

2.6 a) .... $\boxed{\text{c}}$

2.6 b) .... $\boxed{1}$

2.7 a) .... $\boxed{5}$

2.7 b) .... $\boxed{0}$

2.7 c) .... $\boxed{0}$

2.7 d) .... $\boxed{0}$

2.7 e) .... $\boxed{(a,b,c)=(3,3,4)}$

2.7 f) .... $\boxed{\left\{-1,\dfrac{-1}{2},0\right\}}$

2.7 g) .... $\boxed{-1,\ \dfrac{1}{2^6}-1\text{ et }0}$

2.8 a) .... $\boxed{\text{non}}$

2.8 b) .... $\boxed{\text{oui}}$

2.8 c) .... $\boxed{\text{oui}}$

2.8 d) .... $\boxed{\text{non}}$

2.9 a) .... $\boxed{\text{non}}$

2.9 b) .... $\boxed{\text{oui}}$

2.9 c) .... $\boxed{\text{non}}$

2.9 d) .... $\boxed{\text{non}}$

2.10 a) .... $\boxed{+\infty}$

2.10 b) .... $\boxed{+\infty}$

2.10 c) .... $\boxed{0}$

2.10 d) .... $\boxed{\sqrt{2}}$

2.11 a) .... $\boxed{\dfrac{3}{5}}$

2.11 b) .... $\boxed{0}$

2.11 c) .... $\boxed{+\infty}$

2.11 d) .... $\boxed{+\infty}$

2.12 a) .... $\boxed{0}$

2.12 b) .... $\boxed{1}$

2.12 c) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}$

2.12 d) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}$

2.13 a) .... $\boxed{0}$

2.13 b) .... $\boxed{+\infty}$

2.13 c) .... $\boxed{-5}$

2.13 d) .... $\boxed{-\dfrac{1}{2}}$

2.14 a) .... $\boxed{\exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n>n_0, u_{n+1}\geqslant u_n}$

2.14 b) .... $\boxed{\text{b}}$

2.14 c) .... $\boxed{\text{b}}$

2.15 a) .... $\boxed{1}$

2.15 b) .... $\boxed{0}$

2.15 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

2.16 a) .... $\boxed{n\ln(1+\dfrac{1}{n})}$

2.16 b) .... $\boxed{1}$

2.16 c) .... $\boxed{\text{e}}$

2.17 a) .... $\boxed{1}$

2.17 b) .... $\boxed{+\infty}$

Corrigés

2.1 a) On a les équivalences suivantes :

$$\frac{10}{3}x + \frac{5}{9} = 0 \iff \frac{10}{3}x = -\frac{5}{9} \iff x = \frac{-5}{3 \times 10} = \frac{-1}{3 \times 2} = \frac{-1}{6}.$$

....

2.1 b) Avant de commencer, il faut remarquer que x ne peut pas prendre la valeur $\frac{3}{2}$.

On a les équivalences suivantes :

$$\frac{3x+2}{-2x+3} = 1 \iff 3x + 2 = -2x + 3 \iff 3x + 2x = 3 - 2 \iff 5x = 1 \iff x = \frac{1}{5}.$$

....

2.2 a) On a les équivalences suivantes :

$$\frac{2}{7}x - 6 > 0 \iff \frac{2}{7}x > 6 \iff x > 6 \times \frac{7}{2} \iff x > 21.$$

....

2.2 b) Le produit $(2x-1)(2-3x)$ est négatif ou nul lorsque les facteurs sont de signes contraires. On a

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$2x - 1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$2 - 3x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$(2x-1)(2-3x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit l'équivalence : $(2x-1)(2-3x) \leqslant 0 \iff x \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, +\infty\right[$.

....

2.2 c) Un quotient est positif lorsque le numérateur et le dénominateur sont de même signe.

Avec la condition $x \neq 1$, il faut étudier les signes du numérateur et du dénominateur, ce qu'on résume par :

x	$-\infty$		1		6		$+\infty$
$2x - 12$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$1 - x$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$\dfrac{2x-12}{1-x}$		$-$	||	$+$	0	$-$	

On en déduit l'équivalence : $\dfrac{2x-12}{1-x} \geqslant 0 \iff x \in]1, 6]$.

....

2.2 d) On factorise le numérateur $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$ et on procède avec un tableau de signes.

....

2.3 a) La suite $(-1)^n$ prend alternativement les valeurs -1 et 1. Elle est donc divergente et n'a pas de limite.

....

2.3 b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2n+1$ est impair. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^{2n+1} = -1$, qui a pour limite -1.

....

2.3 c) La série alterne : les termes de rang pair $u_{2n} = 2n(-1)^{2n} = 2n$ tendent vers $+\infty$. et les termes de rang impair $u_{2n+1} = (2n+1)(-1)^{2n+1} = (2n+1) \times (-1)$ tendent vers $-\infty$. La suite est donc divergente.

....

2.3 d) Par comparaison, $n + (-1)^n \geqslant n - 1$ qui tend vers $+\infty$.

2.3 e) La suite alterne entre $2n$ et $-2n$ donc diverge et n'admet pas de limite.

2.3 f) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'exposant $2n$ est pair. Donc $(-1)^{2n} = 1$ et la suite $n(-1)^{2n} = n$ tend vers $+\infty$.

2.3 g) Pour les termes de rang pair, on a $\cos((-1)^n\pi) = \cos(\pi) = -1$. Et pour les termes de rang impair, on a $\cos((-1)^n\pi) = \cos(-\pi) = -1$. La suite est donc constante de valeur -1.

2.3 h) Pour les termes de rang pair, on a $\sin((-1)^n\pi) = \sin(\pi) = 0$. Et pour les termes de rang impair, on a $\sin((-1)^n\pi) = \sin(-\pi) = 0$. La suite est donc constante de valeur 0.

2.4 a) On a $\frac{13}{17} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{13}{17}\right)^n = 0$. D'un autre côté, on a l'encadrement $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$ donc, par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{13}{17}\right)^n \cos(n) = 0$.

2.4 b) On recommence l'encadrement $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ et donc $9 - 1 \leqslant 9 + (-1)^n \leqslant 9 + 1$. Finalement, on a $8 \times (0{,}2)^n \leqslant (9 + (-1)^n) \times (0{,}2)^n \leqslant 10 \times (0{,}2)^n$ et les deux suites de gauche et de droite tendent vers 0 (car $0{,}2 < 1$). Donc le théorème des gendarmes donne que $\lim\limits_{n\to\infty} (9 + (-1)^n) \times (0{,}2)^n = 0$.

2.4 c) On a $-1 \leqslant \sin(n\pi/2) \leqslant 1$ donc, après calcul, on a

$$\frac{n-1}{3n} \leqslant \frac{n + \sin(n\pi/2)}{3n} \leqslant \frac{n+1}{3n}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3}$, par le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n + \sin(n\pi/2)}{3n} = \frac{1}{3}$.

2.5 c) Pour que le théorème des gendarmes s'applique, il faut que les limites des termes de gauche et de droite soient égales. Donc, il faut que $a^2 - a + 1 = a$. Or, on a $a^2 - 2a + 1 = 0 \iff (a-1)^2 = 0 \iff a = 1$.

2.6 a) Si n impair alors $\frac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n} = \frac{n-1}{n-(-1)} = \frac{n-1}{n+1}$. Si n pair alors $\frac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n} = \frac{n+1}{n-(+1)} = \frac{n+1}{n-1}$. Or, pour tout entier $n > 1$, on a $\frac{n-1}{n+1} \leqslant \frac{n+1}{n-1}$.

2.6 b) On a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n-1} = 1$. Par le théorème des gendarmes, la suite $(u_n)_n$ tend donc vers 1.

2.7 a) Le polynôme $(X+1)^6$ est de degré 6 et son coefficient dominant vaut 1. Donc, le polynôme $(X+1)^6 - X^6$ est de degré au plus 5 : il y a « chute de degré » car les termes en X^6 se simplifient.

Le polynôme $(X+1)^6 - X^6 - 2X - 1$ est de degré 5. Son coefficient « en X^5 » vaut, après calcul, 6.

2.7 e) On calcule :

$$(X+1)^6 - X^6 - 2X - 1 = 4X + 15X^2 + 20X^3 + 15X^4 + 6X^5$$
$$X(X+1)(2X+1)(aX^2 + bX + c) = cX + (b+3c)X^2 + (a+3b+2c)X^3 + (3a+2b)X^4 + 2aX^5.$$

En identifiant les termes « en X », on trouve $c = 4$; en identifiant les termes « en X^5 », on trouve $a = 3$; enfin, en identifiant les termes « en X^2 », on trouve $b + 3c = 15$ et donc $b = 15 - 3c = 15 - 12 = 3$.

2.7 f) On vérifie que la suite définie par $\left(\dfrac{na+\sqrt{n}+n}{n}\right)^6 - 1 - \dfrac{a^6}{n}$ admet $(a+1)^6 - 1$ comme limite. De même, la suite $\left(a+\dfrac{a}{n}\right)^6 + \dfrac{2an^2+7n+18}{n^2+n+1}$ admet $a^6 + 2a$ comme limite. Pour appliquer le théorème des gendarmes, il faut donc que $(a+1)^6 - 1 = a^6 + 2a$. D'après la question précédente, il n'y a donc que ces trois valeurs possibles pour a qui sont -1, $\dfrac{-1}{2}$ et 0.

2.7 g) Pour $a = -1$, on trouve une limite valant -1 ; pour $a = \dfrac{-1}{2}$, on trouve une limite valant $\dfrac{1}{2^6} - 1$; pour $a = 0$, on trouve une limite valant 0.

2.8 a) Non. En effet, on a $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to\infty} 3n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 + 3n + 1 = +\infty$.

2.9 c) On remarque que $\dfrac{1}{3^{-n}} = 3^n$ et donc que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{3^{-n}} = +\infty$ et $\ln\left(\dfrac{1}{n}\right) = -\ln(n)$, qui tend vers $-\infty$.

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln\left(\frac{1}{n}\right)}{3^{-n}} = \lim\limits_{n\to\infty} 3^n \ln\left(\dfrac{1}{n}\right) = -\infty$.

2.9 d) Il suffit de remarquer que $(-1)^n\pi = \pm\pi$ donc $\cos((-1)^n\pi) = -\pi$ pour tout n entier.

2.10 a) On factorise par le terme dominant $n\sqrt{\ln(n)}$, ce qui donne

$$n\sqrt{\ln(n)}\left(1 - \frac{\sqrt{\ln(n)}^3}{\sqrt{n}}\right) = n\sqrt{\ln(n)}\left(1 - \sqrt{\frac{\ln(n)^3}{n}}\right).$$

Pour montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n)^3}{n} = 0$, on peut procéder de la manière suivante. On a

$$\frac{\ln(n)^3}{n} = 27\frac{\left(\frac{1}{3}\ln(n)\right)^3}{n} = 27\frac{\left(\ln(\sqrt[3]{n})\right)^3}{n} = 27\left(\frac{\ln(\sqrt[3]{n})}{\sqrt[3]{n}}\right)^3.$$

Comme $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n} = +\infty$ et comme $\lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{\ln(u)}{u} = 0$, par composition des limites, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(\sqrt[3]{n})}{\sqrt[3]{n}} = 0$, ce qui permet de conclure.

2.10 b) On factorise par les termes dominants 2^n et n^2, ce qui donne $\dfrac{2^n\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)}{n^2\left(1-\left(\frac{1}{n}\right)^4\right)}$.

On conclut en montrant que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n^2} = +\infty$. Pour cela, on écrit

$$\ln\left(\frac{2^n}{n^2}\right) = n\ln(2) - 2\ln(n) = n\left(\ln(2) - 2\frac{\ln(n)}{n}\right).$$

Comme $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$ et $\ln(2) > 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(\dfrac{2^n}{n^2}\right) = +\infty$. On conclut en raisonnant par composition des limites, grâce à $\lim\limits_{u\to+\infty} \exp(u) = +\infty$.

2.10 c) En factorisant par 5^n, on obtient $\dfrac{5^n - 1}{10^n + 5} = \dfrac{5^n(1 - \frac{1}{5^n})}{5^n(\frac{10^n}{5^n} + \frac{5}{5^n})} = \dfrac{1 - \frac{1}{5^n}}{\left(\frac{10}{5}\right)^n + \frac{1}{5^{n-1}}} = \dfrac{1 - \frac{1}{5^n}}{2^n + \frac{1}{5^{n-1}}}$.

2.10 d) En factorisant par n, pour $n \geqslant 1$, on a $\dfrac{n(\sqrt{2} - 1/n)}{n(1 + \sqrt{2}/n)} = \dfrac{\sqrt{2} - 1/n}{1 + \sqrt{2}/n}$.

2.11 a) En factorisant le numérateur et le dénominateur par n^3, on trouve $\dfrac{n^3(3 - \frac{1}{n} - \frac{17}{n^3})}{n^3(5 + \frac{9}{n} + \frac{1}{n^2})} = \dfrac{3 - \frac{1}{n} - \frac{17}{n^3}}{5 + \frac{9}{n} + \frac{1}{n^2}}$.

2.11 b) On peut par exemple factoriser le dénominateur pour simplifier l'expression étudiée ; on trouve

$$\frac{(3-n)(2+\sqrt{n})}{9-n^2} = \frac{(3-n)(2+\sqrt{n})}{(3-n)(3+n)} = \frac{2+\sqrt{n}}{3+n}.$$

Puis, en factorisant, on a $\dfrac{2+\sqrt{n}}{3+n} = \dfrac{n\left(\frac{2}{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n\left(\frac{3}{n}+1\right)} = \dfrac{\frac{2}{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{3}{n}+1}$, ce qui permet de trouver la limite.

2.11 c) On lève l'indétermination en écrivant $\left(\dfrac{8}{11}\right)^n \times \left(\dfrac{121}{24}\right)^n = \left(\dfrac{8\times 11^2}{11\times 3\times 8}\right)^n = \left(\dfrac{11}{3}\right)^n$.

2.11 d) Pour lever la forme indéterminée, on factorise par 8^{7n}, ce qui donne

$$8^{7n} - 56^n = 8^{7n}\left(1-\frac{56^n}{8^{7n}}\right) = 8^{7n}\left(1-\left(\frac{56}{8^7}\right)^n\right).$$

On conclut en remarquant que $8^7 > 56$.

2.12 a) On utilise la quantité conjuguée pour lever l'indétermination :

$$\sqrt{n+4}-\sqrt{n} = \frac{\sqrt{n+4}-\sqrt{n}}{1} = \frac{\left(\sqrt{n+4}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+4}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+4}+\sqrt{n}\right)} = \frac{n+4-n}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n}}.$$

2.12 b) On a

$$\sqrt{n^2+2n}-n = \frac{\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)}{\sqrt{n^2+2n}+n} = \frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n} = \frac{2n}{n\sqrt{1+\frac{2}{n}}+n} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}.$$

2.12 c) On factorise par n^2 dans la racine, puis par n sur tout le numérateur :

$$\frac{\sqrt{2n^2-n+1}-n}{2n+12} = \frac{\sqrt{n^2(2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})}-n}{2n+12} = \frac{n(\sqrt{2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}-1)}{n(2+\frac{12}{n})} = \frac{\sqrt{2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}-1}{2+\frac{12}{n}}.$$

2.12 d) On utilise la quantité conjuguée pour lever l'indétermination :

$$\begin{aligned}\sqrt{2n+\sqrt{3n}}-\sqrt{2n} &= \frac{\left(\sqrt{2n+\sqrt{3n}}-\sqrt{2n}\right)\left(\sqrt{2n+\sqrt{3n}}+\sqrt{2n}\right)}{\sqrt{2n+\sqrt{3n}}+\sqrt{2n}} = \frac{2n+\sqrt{3n}-2n}{\sqrt{2n+\sqrt{3n}}+\sqrt{2n}}\\ &= \frac{\sqrt{n}\sqrt{3}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{2+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}}}+\sqrt{2}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}}}+\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

2.13 a) On écrit $\dfrac{n\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+3}{n\sqrt{n}-2n} = \dfrac{n\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+\frac{3}{n}\right)}{n(\sqrt{n}-2)} = \dfrac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+\frac{3}{n}}{\sqrt{n}-2}$; on en déduit l'encadrement

$$\frac{-1+\frac{3}{n}}{\sqrt{n}-2} \leqslant \frac{(-1)^n+\frac{3}{n}}{\sqrt{n}-2} \leqslant \frac{1+\frac{3}{n}}{\sqrt{n}-2}.$$

2.13 b) En factorisant le numérateur et le dénominateur par e^{2n}, on obtient $\dfrac{-3\mathrm{e}^n+5\mathrm{e}^{3n}}{\mathrm{e}^{2n}-4\mathrm{e}^n} = \dfrac{-3\mathrm{e}^{-n}+5\mathrm{e}^n}{1-4\mathrm{e}^{-n}}$.

2.14 a) Être croissant à partir du rang n_0 veut dire que tous les termes de la suite sont supérieurs au précédent à partir de n_0. Ceci s'écrit : $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ u_{n+1} \geqslant u_n$.

2.14 b) Non, une suite peut tendre vers $+\infty$ sans être croissante. La suite $(u_n)_n$ définie par $u_n = n + (-1)^n$ fournit un contre-exemple. On a en effet $u_{2n} = 2n + (-1)^{2n} = 2n + 1$ et $u_{2n+1} = (2n+1) + (-1)^{2n+1} = 2n$. Donc, on a $u_{2n} > u_{2n+1}$, ce qui montre que $(u_n)_n$ n'est pas croissante.

Mais, comme on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n - 1$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

2.14 c) Pour la même raison que précédemment, la suite peut « se rapprocher en oscillant » vers sa limite.

La suite $(u_n)_n$ définie par $u_n = 2 - \dfrac{1}{n}$ si n est pair et $u_n = 2 - \dfrac{1}{n^2}$ si n est impair fournit un contre-exemple.

2.15 a) Comme $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$, on a $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h} = \ln'(1) = \dfrac{1}{1} = 1$.

2.15 b) On a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et $\cos' = -\sin$. On a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(0+h) - \cos(0)}{h} = \cos'(0) = -\sin(0) = 0.$$

2.15 c) On remarque que $n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right) = \dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}$ et on reconnaît un taux d'accroissement.

2.16 b) On a $v_n = \ln(u_n) = n\ln(1 + \dfrac{1}{n}) = \dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}$. Donc, $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$.

2.16 c) On finit par $u_n = \mathrm{e}^{v_n}$, ce qui donne $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{e}^{v_n} = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$, par continuité de l'exponentielle.

2.17 a) On a $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}} = \mathrm{e}^{\sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ et $\sqrt{n}\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{n}{\sqrt{n}}\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$.

2.17 b) On a $\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n} = \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$ et $n\ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = \sqrt{n}\,\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}}$.

Fiche nº 3. Propriétés algébriques du logarithme I

Réponses

3.1 a) $\boxed{\dfrac{4}{5}}$

3.1 b) $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

3.1 c) $\boxed{\dfrac{6}{5}}$

3.1 d) $\boxed{\dfrac{15}{2}}$

3.2 a) $\boxed{\dfrac{7}{3}}$

3.2 b) $\boxed{\dfrac{11}{10}}$

3.2 c) $\boxed{\dfrac{6}{7}}$

3.2 d) $\boxed{x = \dfrac{24}{55}}$

3.3 a) $\boxed{0}$

3.3 b) $\boxed{\ln(5)}$

3.3 c) $\boxed{\ln(7)}$

3.4 a) $\boxed{5\ln(2)}$

3.4 b) $\boxed{-4\ln(3)}$

3.4 c) $\boxed{2\ln(2) + \ln(3)}$

3.4 d) $\boxed{\ln(3) - \ln(2)}$

3.4 e) $\boxed{\dfrac{3}{2}\ln(3)}$

3.4 f) $\boxed{\dfrac{1}{2}\ln(2) + \dfrac{1}{2}\ln(3)}$

3.5 a) $\boxed{2}$

3.5 b) $\boxed{-11}$

3.5 c) $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

3.5 d) $\boxed{\dfrac{7}{2}}$

3.6 a) $\boxed{\dfrac{7}{5}}$

3.6 b) $\boxed{1\ 000}$

3.6 c) $\boxed{\dfrac{1}{\ln(3)}}$

3.7 a) $\boxed{\ln(2)}$

3.7 b) $\boxed{2}$

3.7 c) $\boxed{0}$

3.7 d) $\boxed{\ln(5)}$

3.8 a) $\boxed{x > -1}$

3.8 b) $\boxed{x < 0 \text{ ou } x > 3}$

3.8 c) $\boxed{x > 1}$

3.9 a) $\boxed{> 0}$

3.9 b) $\boxed{< 0}$

3.9 c) $\boxed{< 0}$

3.9 d) $\boxed{> 0}$

3.9 e) $\boxed{< 0}$

3.9 f) $\boxed{> 0}$

3.10 a) $\boxed{0 < x < \mathrm{e}}$

3.10 b) $\boxed{> 0}$

3.11 a) $\boxed{x \geqslant -2}$

3.11 b) $\boxed{1 < x < 1 + \mathrm{e}}$

3.11 c) $\boxed{x \geqslant 1 \text{ ou } x \leqslant -1}$

3.11 d) $\boxed{-2 \leqslant x \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^2 - 5}{2}}$

3.12 a) $\boxed{\dfrac{1}{2} < x < 4}$

3.12 b) $\boxed{0 < x \leqslant 1}$

3.12 c) $\boxed{1 < x \leqslant 2}$

3.12 d) $\boxed{x \in [-\sqrt{\mathrm{e}}, 0[\cup]0, \sqrt{\mathrm{e}}]}$

3.13 a) $\boxed{x = 3}$

3.13 b) $\boxed{x = \mathrm{e} \text{ ou } x = \mathrm{e}^2}$

3.14 a) $\boxed{\dfrac{1}{\mathrm{e}} \leqslant x \leqslant \mathrm{e}}$

3.14 b) $\boxed{\text{tous les réels}}$

3.15 $\boxed{[-4, -3[\cup]0, 1]}$

3.16 a) $\boxed{\dfrac{k-1}{k}}$

3.16 b) $\boxed{\ln(k-1) - \ln(k)}$

3.16 c) $\boxed{-\ln(n)}$

3.17 $\boxed{2x}$

Corrigés

3.1 a) On a $\dfrac{36}{45} = \dfrac{9 \times 4}{9 \times 5} = \dfrac{4}{5}$.

3.1 b) On a $\dfrac{2}{7} \times \dfrac{28}{16} = \dfrac{2}{7} \times \dfrac{4 \times 7}{16} = \dfrac{2 \times 4}{16} = \dfrac{1}{2}$.

3.1 c) On a $\dfrac{\frac{9}{25}}{\frac{3}{10}} = \dfrac{9}{25} \times \dfrac{10}{3} = \dfrac{3 \times 3}{5 \times 5} \times \dfrac{2 \times 5}{3} = \dfrac{6}{5}$.

....

3.1 d) On a $\dfrac{10^3 \times 3^5}{6^4 \times 5^2} = \dfrac{2^3 \times 5^3 \times 3^5}{2^4 \times 3^4 \times 5^2} = \dfrac{5 \times 3}{2} = \dfrac{15}{2}$.

....

3.2 c) On a les équivalences suivantes :

$$\frac{4}{3}x - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}x + \frac{1}{2} \iff \frac{8}{6}x - \frac{1}{6}x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \iff \frac{7}{6}x = 1 \iff x = \frac{6}{7}.$$

....

3.2 d) On a les équivalences suivantes :

$$\frac{5}{3}x = \frac{3}{4}x + \frac{2}{5} \iff \frac{20}{12}x - \frac{9}{12}x = \frac{2}{5} \iff \frac{11}{12}x = \frac{2}{5} \iff x = \frac{2}{5} \times \frac{12}{11} \iff x = \frac{24}{55}.$$

....

3.3 a) On a $\ln(3) + \ln\left(\dfrac{1}{3}\right) = \ln(3) - \ln(3) = 0$.

....

3.3 b) On a $\ln(10) - \ln(2) = \ln\left(\dfrac{10}{2}\right) = \ln(5)$.

....

3.3 c) On a $2\ln\left(\sqrt{7}\right) = \ln\left(\sqrt{7}^2\right) = \ln(7)$.

....

3.4 a) On a $\ln(32) = \ln(2^5) = 5\ln(2)$.

....

3.4 b) On a $\ln\left(\dfrac{1}{81}\right) = -\ln(81) = -\ln(3^4) = -4\ln(3)$.

....

3.4 c) On a $\ln(12) = \ln(2^2 \times 3) = \ln(2^2) + \ln(3) = 2\ln(2) + \ln(3)$.

....

3.4 e) On a $\ln(\sqrt{27}) = \dfrac{1}{2}\ln(27) = \dfrac{1}{2}\ln(3^2) = \dfrac{3}{2}\ln(3)$.

....

3.5 a) On a $\ln\left(\mathrm{e}^2\right) = 2\ln(\mathrm{e}) = 2 \times 1 = 2$.

....

3.5 c) On a $\ln(\sqrt{\mathrm{e}}) = \dfrac{1}{2}\ln(\mathrm{e}) = \dfrac{1}{2}$.

....

3.6 a) On a $\mathrm{e}^{\ln(7)-\ln(5)} = \mathrm{e}^{\ln\left(\frac{7}{5}\right)} = \dfrac{7}{5}$.

....

3.6 b) On a $\mathrm{e}^{3\ln(10)} = \mathrm{e}^{\ln\left(10^3\right)} = 10^3 = 1\ 000$.

....

3.7 a) On a $\ln\left(\sqrt{3}-1\right) + \ln\left(\sqrt{3}+1\right) = \ln\left((\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)\right)$. Or (par identité remarquable), on a

$$(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1) = \sqrt{3}^2 - 1^2 = 3 - 1 = 2.$$

Donc $\ln\left(\sqrt{3}-1\right) + \ln\left(\sqrt{3}+1\right) = \ln(2)$.

....

3.7 c) On a

$$\ln\big((\sqrt{2}-1)^{15}\big)+\ln\big((\sqrt{2}+1)^{15}\big)=15\ln(\sqrt{2}-1)+15\ln(\sqrt{2}+1)=15\ln\big((\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)\big)=15\ln(1)=0.$$

3.8 a) Le réel $\ln(1+x)$ est bien défini si, et seulement si, $1+x>0$, autrement dit si, et seulement si, $x>-1$.

3.8 b) On doit résoudre $x^2-3x>0$. On factorise $x^2-3x=x(x-3)$. Comme le signe de ce trinôme est >0 à l'extérieur des racines (qui sont 0 et 3), on a l'équivalence suivante :

$$x^2-3x>0 \iff x<0 \quad \text{ou} \quad x>3.$$

3.8 c) Déjà il faut que $x>0$. Puis on doit résoudre $\ln(x)>0$, ce qui revient à $x>1$.

3.9 a) On a $2>1$ donc $\ln(2)>0$.

3.9 f) On a $3>\mathrm{e}$ donc $\ln(3)>1$ donc $\ln(3)-1>0$.

3.10 b) On a $\ln(x)<0$ donc $1-\ln(x)>1$ et donc $\ln(1-\ln(x))>0$.

3.11 a) On a les équivalences suivantes :

$$\ln(5+2x)\geqslant 0 \iff 5+2x\geqslant 1 \iff 2x\geqslant -4 \iff x\geqslant -2.$$

3.11 b) On a les équivalences suivantes :

$$\ln(x-1)<1 \iff 0<x-1<\mathrm{e} \iff 1<x<1+\mathrm{e}.$$

3.11 c) On a les équivalences suivantes :

$$\ln(x^2)\geqslant 0 \iff x^2\geqslant 1 \iff x\geqslant 1 \quad \text{ou} \quad x\leqslant -1.$$

3.11 d) On a les équivalences suivantes :

$$0\leqslant \ln(2x+5)\leqslant 2 \iff 1\leqslant 2x+5\leqslant \mathrm{e}^2 \iff -4\leqslant 2x\leqslant \mathrm{e}^2-5 \iff -2\leqslant x\leqslant \frac{\mathrm{e}^2-5}{2}.$$

3.12 a) Déjà, pour que les termes soient bien définis, il faut que $x+3>0$ et $2x-1>0$, c'est-à-dire il faut que $x>\frac{1}{2}$. Puis, pour tout $x>\frac{1}{2}$, on a les équivalences suivantes :

$$\ln(x+3)>\ln(2x-1) \iff x+3>2x-1 \iff 4>x.$$

3.12 b) Déjà, pour que les termes soient bien définis, il faut que $x > 0$ et $x+2 > 0$, c'est-à-dire il faut que $x > 0$. Puis, pour tout $x > 0$, on a les équivalences suivantes :

$$\ln(x) + \ln(x+2) \leqslant \ln(3) \iff \ln\big(x(x-2)\big) \leqslant \ln(3) \iff x(x+2) \leqslant 3 \iff x^2 + 2x - 3 \leqslant 0.$$

Après calcul du discriminant, on trouve que les racines de ce trinôme sont -3 et 1. Donc, on a l'équivalence

$$x^2 + 2x - 3 \leqslant 0 \iff -3 \leqslant x \leqslant 1.$$

Comme $x > 0$, on obtient donc comme ensemble de solutions : $]0, 1]$.

3.12 c) Déjà, pour que les termes soient bien définis, il faut que $x > 0$ et $x-1 > 0$, c'est-à-dire il faut que $x > 1$. Puis, pour tout $x > 1$, on a les équivalences suivantes :

$$\ln(x) + \ln(x-1) \leqslant \ln(2) \iff \ln\big(x(x-1)\big) \leqslant \ln(2) \iff x(x-1) \leqslant 2 \iff x^2 - x - 2 \leqslant 0.$$

Après calcul du discriminant, on trouve que les racines de ce trinôme sont -1 et 2. Donc, on a l'équivalence

$$x^2 - x - 2 \leqslant 0 \iff -1 \leqslant x \leqslant 2.$$

Comme $x > 1$, on obtient donc comme ensemble de solutions : $]1, 2]$.

3.12 d) Pour que $\ln(x^2)$ soit bien défini, il faut que $x^2 > 0$, autrement dit, il faut que $x \neq 0$. Puis, pour tout $x \neq 0$, on a les équivalences suivantes :

$$\ln(x^2) \leqslant 1 \iff x^2 \leqslant \mathrm{e} \iff -\sqrt{\mathrm{e}} \leqslant x \leqslant \sqrt{\mathrm{e}}.$$

3.13 a) On a les équivalences suivantes :

$$\ln\left(\frac{x+1}{3x-5}\right) = 0 \iff \frac{x+1}{3x-5} = 1 \iff x+1 = 3x-5 \iff 6 = 2x \iff x = 3.$$

3.13 b) On pose $y = \ln(x)$ et on résout l'équation $y^2 - 3y + 2 = 0$; ses solutions (qu'on trouve en calculant le discriminant) sont $y_1 = \dfrac{3-1}{2} = 1$ et $y_2 = \dfrac{3+1}{2} = 2$. Donc, on a les équivalences suivantes :

$$\ln(x)^2 - 3\ln(x) + 2 = 0 \iff \Big(\ln(x) = 1 \text{ ou } \ln(x) = 2\Big) \iff \Big(x = \mathrm{e} \text{ ou } x = \mathrm{e}^2\Big).$$

3.14 a) On a les équivalences suivantes :

$$\ln(x)^2 \leqslant 1 \iff -1 \leqslant \ln(x) \leqslant 1 \iff \mathrm{e}^{-1} \leqslant \mathrm{e}^{\ln(x)} \leqslant \mathrm{e} \iff \frac{1}{\mathrm{e}} \leqslant x \leqslant \mathrm{e}.$$

3.14 b) On a l'équivalence suivante :

$$\ln(x^2+3) \geqslant 1 \iff x^2 + 3 \geqslant \mathrm{e}.$$

Or, on a $x^2 + 3 \geqslant 3$ et $\mathrm{e} \approx 2,7$ donc l'inégalité $x^2 + 3 \geqslant \mathrm{e}$ est vérifiée pour tout réel x.

3.15 On a les équivalences suivantes :

$$\ln\left(\frac{x^2+3x}{4}\right) \leqslant 0 \iff 0 < \frac{x^2+3x}{4} \leqslant 1 \iff 0 < x^2+3x \leqslant 4 \iff \left(x^2+3x > 0 \text{ et } x^2+3x-4 \leqslant 0\right).$$

Or, on a les équivalences suivantes :

$$x^2+3x > 0 \iff x(x+3) > 0 \iff x < -3 \text{ ou } x > 0.$$

De plus, après calcul des racines par le discriminant, on a également les équivalences suivantes :

$$x^2+3x-4 \leqslant 0 \iff (x+4)(x-1) \leqslant 0 \iff -4 \leqslant x \leqslant 1.$$

On obtient donc les équivalences suivantes :

$$\ln\left(\frac{x^2+3x}{4}\right) \leqslant 0 \iff \left(x < -3 \text{ ou } x > 0\right) \quad \text{et} \quad -4 \leqslant x \leqslant 1 \iff x \in [-4,-3[\,\cup\,]0,1].$$

3.16 c) En utilisant la question précédente, on remarque que :

$$\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{3}\right) = \ln(1) - \ln(2) + \ln(2) - \ln(3) = -\ln(3).$$

De même :

$$\underbrace{\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{3}\right)}_{-\ln(3)} + \ln\left(1-\frac{1}{4}\right) = -\ln(3) + \ln(3) - \ln(4) = -\ln(4)$$

et ainsi de suite.

3.17 On a

$$\mathrm{e}^{f(x)} = x + \sqrt{x^2+1} \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^{-f(x)} = \frac{1}{\mathrm{e}^{f(x)}} = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

donc on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{f(x)} - \mathrm{e}^{-f(x)} &= x + \sqrt{x^2+1} - \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \\
&= \frac{(x+\sqrt{x^2+1})^2 - 1}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2 + 2x\sqrt{x^2+1} + (x^2+1) - 1}{x+\sqrt{x^2+1}} \\
&= \frac{2x^2 + 2x\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{x+\sqrt{x^2+1}} = 2x.
\end{aligned}$$

Fiche n° 4. Propriétés algébriques du logarithme II

Réponses

4.1 a) .... $\boxed{\sqrt{5}}$

4.1 b) .... $\boxed{\sqrt{3}+1}$

4.1 c) .... $\boxed{5\sqrt{5}}$

4.2 a) .... $\boxed{9}$

4.2 b) .... $\boxed{\dfrac{-8}{7}}$

4.3 a) .... $\boxed{3\ln(2)}$

4.3 b) .... $\boxed{-2\ln(2)-2\ln(5)}$

4.3 c) .... $\boxed{2\ln(2)}$

4.3 d) .... $\boxed{-\ln(2)}$

4.4 a) .... $\boxed{\ln(3)}$

4.4 b) .... $\boxed{10\ln(3)}$

4.5 a) .... $\boxed{-1{,}61 \leqslant \ln(0{,}2) \leqslant -1{,}60}$

4.5 b) .... $\boxed{2{,}29 \leqslant \ln(10) \leqslant 2{,}31}$

4.6 a) .... $\boxed{0{,}46 \leqslant \ln\left(\dfrac{8}{5}\right) \leqslant 0{,}50}$

4.6 b) .... $\boxed{1{,}61 \leqslant \ln(5{,}12) \leqslant 1{,}70}$

4.6 c) .... $\boxed{-2{,}254 \leqslant \ln(25)\ln(\dfrac{1}{2}) \leqslant -2{,}208}$

4.6 d) ... $\boxed{2{,}98 \leqslant \ln(5+\sqrt{5})+\ln(5-\sqrt{5}) \leqslant 3{,}01}$

4.7 a) .... $\boxed{3}$

4.7 b) .... $\boxed{\dfrac{3}{2}}$

4.7 c) .... $\boxed{3}$

4.7 d) .... $\boxed{\dfrac{5}{3}}$

4.7 e) .... $\boxed{2}$

4.7 f) .... $\boxed{1}$

4.8 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{\ln(2)}}$

4.8 b) .... $\boxed{3}$

4.8 c) .... $\boxed{4{,}5}$

4.8 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{4}}$

4.8 e) .... $\boxed{\dfrac{-1}{4}}$

4.8 f) .... $\boxed{2}$

4.9 c

4.10 a) .... $\boxed{]2,+\infty[}$

4.10 b) .... $\boxed{3}$

4.11 a) .... $\boxed{4}$

4.11 b) .... $\boxed{\dfrac{\ln(e^7-3)}{2}}$

4.12 a) .... $\boxed{]1,+\infty[}$

4.12 b) .... $\boxed{\ln(x+1)}$

4.12 c) .... $\boxed{e-1}$

4.13 .... $\boxed{-2}$

4.14 a) .... $\boxed{e}$

4.14 b) .... $\boxed{x=1 \text{ ou } x=e}$

4.14 c) .... $\boxed{x=2+e^{\sqrt{2}} \text{ ou } x=2+e^{-\sqrt{2}}}$

4.15 a) .... $\boxed{x > e^p - 1}$

4.15 b) .... $\boxed{\dfrac{-1}{p} < x \leqslant 1}$

4.16 a) .... $\boxed{2}$

4.16 b) .... $\boxed{3}$

4.16 c) .... $\boxed{1}$

4.16 d) .... $\boxed{-2}$

4.17 a) .... $\boxed{17}$

4.17 b) .... $\boxed{2}$

4.17 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

4.17 d) .... $\boxed{-3}$

4.18 .... $\boxed{\ln(n+1)}$

4.19 .... $\boxed{\dfrac{n(n+1)\ln(2)}{2}}$

Corrigés

4.1 a) On calcule $\sqrt{45}-\sqrt{20}=\sqrt{9\times 5}-\sqrt{4\times 5}=\sqrt{9}\times\sqrt{5}-\sqrt{4}\times\sqrt{5}=3\times\sqrt{5}-2\times\sqrt{5}=(3-2)\sqrt{5}=\sqrt{5}$.

....

4.1 b) En utilisant la quantité conjuguée : $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\dfrac{2(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}^2-1^2}=\dfrac{2(\sqrt{3}+1)}{2}=\sqrt{3}+1$.

....

4.1 c) On a $2\sqrt{5}+\sqrt{45}=2\sqrt{5}+\sqrt{9\times 5}=2\sqrt{5}+\sqrt{9}\times\sqrt{5}=2\sqrt{5}+3\times\sqrt{5}=5\sqrt{5}$.

....

4.2 a) On a $\left|\dfrac{3}{2}\times\dfrac{8}{9}\right|+\left|\dfrac{7}{3}-10\right|=\left|\dfrac{3\times 8}{2\times 9}\right|+\left|\dfrac{7}{3}-\dfrac{30}{3}\right|=\left|\dfrac{1\times 4}{1\times 3}\right|+\left|\dfrac{7-30}{3}\right|=\left|\dfrac{4}{3}\right|+\left|\dfrac{-23}{3}\right|=\dfrac{4}{3}+\dfrac{23}{3}=\dfrac{27}{3}=9$.

....

4.2 b) On a $\left|\dfrac{1}{14}-\dfrac{4}{7}\right|-\left|\dfrac{6}{7}-\dfrac{5}{2}\right|=\left|\dfrac{1-8}{14}\right|-\left|\dfrac{12}{14}-\dfrac{35}{14}\right|=\left|\dfrac{-7}{14}\right|-\left|\dfrac{-23}{14}\right|=\dfrac{7}{14}-\dfrac{23}{14}=\dfrac{-16}{14}=\dfrac{-8}{7}$.

....

4.3 a) On a $\ln(8)=\ln(2^3)=3\ln(2)$.

....

4.3 b) On a $0{,}01=10^{-2}=2^{-2}\times 5^{-2}$. Donc, on a

$$\ln(0{,}01)=\ln\left(2^{-2}\times 5^{-2}\right)=\ln\left(2^{-2}\right)+\ln\left(5^{-2}\right)=-2\ln(2)-2\ln(5).$$

....

4.3 c) On a $\ln(12)+\ln(9)-\ln(27)=\ln(3\times 4)+\ln(3^2)-\ln(3^3)=\ln(3)+\ln(2^2)+2\ln(3)-3\ln(3)=2\ln(2)$.

....

4.3 d) En utilisant le fait que $\ln\left(\sqrt{x}\right)=\dfrac{1}{2}\ln(x)$, on obtient

$$\ln\left(\sqrt{8}\right)-\ln(16)+\frac{3}{2}\ln(2)=\frac{1}{2}\ln\left(2^3\right)-\ln\left(2^4\right)+\frac{3}{2}\ln(2)=\frac{3}{2}\ln(2)-4\ln(2)+\frac{3}{2}\ln(2)=-\ln(2).$$

....

4.4 a) On a $\ln\left(4+\sqrt{13}\right)+\ln\left(\sqrt{4}-\sqrt{13}\right)=\ln\left(\left(4+\sqrt{13}\right)\times\left(4-\sqrt{13}\right)\right)=\ln\left(4^2-\sqrt{13}^2\right)=\ln(3)$.

....

4.4 b) On a $\ln\left((\sqrt{10}-1)^5\right)+\ln\left((\sqrt{10}+1)^5\right)=5\ln\left((\sqrt{10}-1)(\sqrt{10}+1)\right)=5\ln(9)=10\ln(3)$.

....

4.5 a) On a $\ln(0{,}2)=\ln\left(\dfrac{1}{5}\right)=-\ln(5)$ donc $-1{,}61\leqslant-\ln(5)\leqslant-1{,}60$.

....

4.5 b) Comme $\ln(10)=\ln(2\times 5)=\ln(2)+\ln(5)$, on a $0{,}69+1{,}60\leqslant\ln(2)+\ln(5)\leqslant 0{,}70+1{,}61$ et donc

$$2{,}29\leqslant\ln(10)\leqslant 2{,}31.$$

....

4.6 a) On a $\ln\left(\frac{8}{5}\right) = \ln(8) - \ln(5)$. Or, $\ln(8) = \ln(2^3) = 3\ln(2)$ donc $2{,}07 \leqslant \ln(8) \leqslant 2{,}10$.

De plus, on a $-1{,}61 \leqslant -\ln(5) \leqslant -1{,}60$. Ainsi, on a $2{,}07 - 1{,}61 \leqslant \ln(8) - \ln(5) \leqslant 2{,}10 - 1{,}60$ et finalement

$$0{,}46 \leqslant \ln\left(\frac{8}{5}\right) \leqslant 0{,}50.$$

4.6 b) On a $\ln(5{,}12) = \ln\left(\frac{512}{100}\right) = \ln\left(\frac{2^9}{2^2 \times 5^2}\right) = \ln\left(2^7\right) - \ln\left(5^2\right) = 7\ln(2) - 2\ln(5)$.

Or, on a $4{,}83 \leqslant 7\ln(2) \leqslant 4{,}90$ et $-3{,}22 \leqslant -2\ln(5) \leqslant -3{,}20$. Finalement, on a ainsi

$$4{,}83 - 3{,}22 \leqslant 7\ln(2) - 2\ln(5) \leqslant 4{,}90 - 3{,}20 \qquad \text{donc} \qquad 1{,}61 \leqslant \ln(5{,}12) \leqslant 1{,}70.$$

4.6 c) Comme $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$ et $\ln(25) = 2\ln(5)$, on utilise les encadrements

$$0{,}69 \leqslant \ln(2) \leqslant 0{,}70 \qquad \text{et} \qquad 3{,}2 \leqslant \ln(25) \leqslant 3{,}22.$$

Attention, les nombres doivent être positifs pour multiplier membre à membre. On obtient

$$0{,}69 \times 3{,}2 \leqslant \ln(2)\ln(25) \leqslant 0{,}7 \times 3{,}22$$

ce qui donne $-2{,}254 \leqslant \ln(25)\ln\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant -2{,}208$.

4.6 d) On a

$$\begin{aligned}\ln(5+\sqrt{5}) + \ln(5-\sqrt{5}) &= \ln\big((5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})\big) = \ln(5^2-5) = \ln(20)\\ &= \ln(4\times 5) = \ln(2^2) + \ln(5) = 2\ln(2) + \ln(5).\end{aligned}$$

Comme $1{,}38 \leqslant 2\ln(2) \leqslant 1{,}4$ et $1{,}6 \leqslant \ln(5) \leqslant 1{,}61$, on a ainsi $1{,}38 + 1{,}6 \leqslant 2\ln(2) + \ln(5) \leqslant 1{,}4 + 1{,}61$ et donc

$$2{,}98 \leqslant 2\ln(2) + \ln(5) \leqslant 3{,}01.$$

4.7 a) On a $\ln(e^5) - \ln(e^2) = 5\ln(e) - 2\ln(e) = 5 - 2 = 3$.

4.7 b) On a $\ln\left(\sqrt{e}\right) - \ln\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2}\ln(e) - (-1)\ln(e) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$.

4.7 c) On a $2\ln\left(e\sqrt{e}\right) = 2\left(\ln(e) + \ln\left(\sqrt{e}\right)\right) = 2\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3$.

4.7 d) On a $e^{\ln(5)-\ln(3)} = e^{\ln\left(\frac{5}{3}\right)} = \frac{5}{3}$.

4.7 e) On a $e^{\frac{1}{2}\ln(4)} = e^{\ln\left(\sqrt{4}\right)} = \sqrt{4} = 2$.

4.7 f) On a $\ln\left(\frac{e^2}{e+3}\right) + \ln\left(\frac{e+3}{e}\right) = \ln\left(\frac{e^2}{e+3} \times \frac{e+3}{e}\right) = \ln\left(\frac{e^2}{e}\right) = \ln(e) = 1$.

4.8 a) On a $\exp(-\ln(\ln(2))) = \exp\left(\ln\left(\frac{1}{\ln(2)}\right)\right) = \frac{1}{\ln(2)}$.

4.8 b) On a $\ln\left(\sqrt{e^6}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(e^6\right) = \frac{1}{2} \times 6 = 3$.

4.8 c) On a $\ln\left(\sqrt{\exp\left(\frac{1}{3}\ln \mathrm{e}^{27}\right)}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\exp\left(\frac{1}{3}\times 27\right)\right) = \frac{1}{2}\ln(\exp(9)) = \frac{1}{2}\times 9 = 4{,}5.$

....

4.8 d) On a $\ln\left(\sqrt{\sqrt{\mathrm{e}}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\ln(\mathrm{e}) = \frac{1}{4}\times 1 = \frac{1}{4}.$

....

4.8 e) On a $\ln\left(\sqrt{\exp\left(-\ln(\sqrt{\mathrm{e}})\right)}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\exp\left(-\ln(\sqrt{\mathrm{e}})\right)\right) = -\frac{1}{2}\ln(\sqrt{\mathrm{e}}) = -\frac{1}{4}\ln(\mathrm{e}) = -\frac{1}{4}.$

....

4.8 f) On calcule

$$\begin{aligned}
\exp\left(2\ln\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)\right) &= \exp\left(\ln\left((\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}})^2\right)\right)\\
&= \left(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2\\
&= \left(\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2 - 2\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}\right) + \left(\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2\\
&= 3+\sqrt{5}-2\sqrt{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}+3-\sqrt{5}\\
&= 6-2\sqrt{3^2-5} = 6-2\sqrt{4} = 6-4 = 2.
\end{aligned}$$

....

4.9 On factorise par e^x en remarquant que $1 = \mathrm{e}^0 = \mathrm{e}^{x-x} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x}$. Donc,

$$\ln(\mathrm{e}^x+1) = \ln\left(\mathrm{e}^x\times 1+\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x}\right) = \ln\left(\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^{-x})\right) = \ln(\mathrm{e}^x)+\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right) = x+\ln\left(\mathrm{e}^{-x}+1\right).$$

....

4.10 a) On doit avoir $x-2>0$ (donc $x>2$) et $x-1>0$ (donc $x>1$). Ainsi, l'équation a un sens quand $x>2$.

....

4.10 b) Soit $x>2$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\ln(x-2)+\ln(x-1)=\ln(2) &\iff \ln((x-2)(x-1))=\ln(2) \iff (x-2)(x-1)=2 \iff x^2-3x=0\\
&\iff x(x-3)=0 \iff x=0 \text{ ou } x=3.
\end{aligned}$$

Comme on a $x>2$, la seule solution est 3.

....

4.11 a) Pour commencer, on remarque que l'équation n'est définie que si $2x-1>0$ et $x+3>0$. Il faut donc que $x>\frac{1}{2}$. On a alors, pour $x>\frac{1}{2}$, les équivalences suivantes :

$$\ln(2x-1)=\ln(x+3) \iff 2x-1=x+3 \iff x=4.$$

....

4.11 b) On a les équivalences suivantes :

$$\ln(\mathrm{e}^{2x}+3)=7 \iff \mathrm{e}^{2x}+3=\mathrm{e}^7 \iff \mathrm{e}^{2x}=\mathrm{e}^7-3 \iff x=\frac{\ln(\mathrm{e}^7-3)}{2}.$$

....

4.12 a) Soit $x\in\mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes

$$\text{l'équation a un sens pour } x \iff \begin{cases} x-1>0\\ x+1>0\\ x^2-1>0\end{cases} \iff \begin{cases} x>1\\ x>-1\\ x^2>1\end{cases} \iff x>1.$$

....

4.12 b) Soit $x > 1$. On a

$$\begin{aligned}\ln(x-1) + 2\ln(x+1) - \ln\left(x^2-1\right) &= \ln(x-1) + \ln\left((x+1)^2\right) - \ln\left(x^2-1\right)\\ &= \ln\left(\frac{(x-1)(x+1)^2}{x^2-1}\right) = \ln(x+1).\end{aligned}$$

4.12 c) Soit $x > 1$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}\ln(x-1) + 2\ln(x+1) - \ln\left(x^2-1\right) = 1 &\iff \ln(x+1) = 1 \iff \ln(x+1) = \ln(\mathrm{e})\\ &\iff x+1 = \mathrm{e} \iff x = \mathrm{e} - 1.\end{aligned}$$

On a bien $\mathrm{e} - 1 > 1$ car on sait que $\mathrm{e} \approx 2{,}71$.

4.13 On a les équivalences suivantes :

$$\ln(2^x) = \ln\left(4^{x+1}\right) \iff x\ln(2) = (x+1)\ln\left(2^2\right) \iff x = 2(x+1) \iff x = -2.$$

4.14 a) Pour $x > 0$, on a les équivalences suivantes :

$$(\ln(x))^2 = \ln\left(x^2\right) - 1 \iff (\ln(x))^2 - 2\ln(x) + 1 = 0 \iff (\ln(x)-1)^2 = 0 \iff \ln(x) = 1 \iff x = \mathrm{e}.$$

4.14 b) Pour $x > 0$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}(\ln(x))^2 + \ln\left(\frac{1}{x}\right) = 0 &\iff (\ln(x))^2 - \ln(x) = 0\\ &\iff \ln(x)(\ln(x)-1) = 0 \iff \ln(x) = 0 \text{ ou } \ln(x) = 1 \iff x = 1 \text{ ou } x = \mathrm{e}.\end{aligned}$$

4.14 c) Pour $x > 2$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}(\ln(x-2))^2 = 2 &\iff \ln(x-2) = \sqrt{2} \text{ ou } \ln(x-2) = -\sqrt{2}\\ &\iff x - 2 = \mathrm{e}^{\sqrt{2}} \text{ ou } x - 2 = \mathrm{e}^{-\sqrt{2}}\\ &\iff x = 2 + \mathrm{e}^{\sqrt{2}} \text{ ou } x = 2 + \mathrm{e}^{-\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

4.15 a) Pour $x > -1$, on a les équivalences suivantes :

$$\ln(x+1) > p \iff x + 1 > \mathrm{e}^p \iff x > \mathrm{e}^p - 1.$$

4.15 b) Pour que cette équation ait un sens, il faut avoir $px + 1 > 0$ (donc $x > \dfrac{-1}{p}$) et $x + p > 0$ (donc $x > -p$). Comme $p > 1$, ces deux conditions se réduisent à $x > \dfrac{-1}{p}$. Pour $x > \frac{-1}{p}$, on a les équivalences suivantes :

$$\ln(px+1) \leqslant \ln(x+p) \iff px + 1 \leqslant x + p \iff px - x \leqslant p - 1 \iff x(p-1) \leqslant p - 1 \iff x \leqslant 1.$$

4.16 a) On simplifie $\log_{10}(100) = \dfrac{\ln(100)}{\ln(10)} = \dfrac{\ln(10^2)}{\ln(10)} = \dfrac{2\ln(10)}{\ln(10)} = 2$.

4.16 b) On a $\log_{10}(4) + \log_{10}(250) = \dfrac{\ln(4)}{\ln(10)} + \dfrac{\ln(250)}{\ln(10)} = \dfrac{\ln(4) + \ln(250)}{\ln(10)} = \dfrac{\ln(4 \times 250)}{\ln(10)} = \dfrac{3\ln(10)}{\ln(10)} = 3$.

4.16 c) On a $\log_{10}(120) - \log_{10}(12) = \dfrac{\ln(120)}{\ln(10)} - \dfrac{\ln(12)}{\ln(10)} = \dfrac{\ln(120) - \ln(12)}{\ln(10)} = \dfrac{\ln(120/12)}{\ln(10)} = \dfrac{\ln(10)}{\ln(10)} = 1.$

4.16 d) On a

$$\begin{aligned}5\log_{10}(2) - \log_{10}(3200) &= 5\frac{\ln(2)}{\ln(10)} - \frac{\ln(3200)}{\ln(10)} = \frac{\ln(2^5)}{\ln(10)} - \frac{\ln(3200)}{\ln(10)} = \frac{\ln(32) - \ln(3200)}{\ln(10)}\\ &= \frac{\ln(32/3200)}{\ln(10)} = \frac{\ln(1/100)}{\ln(10)} = \frac{\ln(10^{-2})}{\ln(10)} = -2\frac{\ln(10)}{\ln(10)} = -2.\end{aligned}$$

4.17 a) On calcule $\log_3\left(3^{17}\right) = \dfrac{\ln(3^{17})}{\ln(3)} = \dfrac{17\ln(3)}{\ln(3)} = 17.$

4.17 b) On a $\log_6(4) + \log_6(9) = \dfrac{\ln(4)}{\ln(6)} + \dfrac{\ln(9)}{\ln(6)} = \dfrac{\ln(4) + \ln(9)}{\ln(6)} = \dfrac{\ln(4 \times 9)}{\ln(6)} = \dfrac{\ln(6^2)}{\ln(6)} = 2\dfrac{\ln(6)}{\ln(6)} = 2.$

4.17 c) On a $\log_5(\sqrt{\mathrm{e}}) \times \ln(5) = \dfrac{\ln(\sqrt{\mathrm{e}})}{\ln(5)} \times \ln(5) = \dfrac{1}{2}\ln(\mathrm{e}) = \dfrac{1}{2}.$

4.17 d) On a

$$\begin{aligned}(1 + \log_2(0{,}25))(\log_2(200) - \log_2(25)) &= \left(1 + \frac{\ln(2^{-2})}{\ln(2)}\right)\left(\frac{\ln(200)}{\ln(2)} - \frac{\ln(25)}{\ln(2)}\right) = (1-2)\frac{\ln(200) - \ln(25)}{\ln(2)}\\ &= -\frac{\ln(200/25)}{\ln(2)} = -\frac{\ln(8)}{\ln(2)} = -\frac{\ln(2^3)}{\ln(2)} = -3.\end{aligned}$$

4.18 Pour tous $a, b > 0$, on a $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$. On en déduit la formule

$$\ln(a_1) + \ln(a_2) + \cdots + \ln(a_n) = \ln(a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n).$$

On a donc

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{2}{1}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) &= \ln\left(\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \cdots \times \frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(\frac{2 \times 3 \times \ldots \times n \times (n+1)}{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n}\right)\\ &= \ln\left(\frac{n+1}{1}\right) = \ln(n+1).\end{aligned}$$

4.19 On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(2^k\right) = \sum_{k=1}^{n} k\ln(2) = \ln(2)\sum_{k=1}^{n} k = \ln(2) \times \frac{n \times (n+1)}{2} = \frac{n(n+1)\ln(2)}{2}.$

Fiche n° 5. Dérivée du logarithme

Réponses

5.1 a) $\boxed{e^{8x+3}}$

5.1 b) $\boxed{e^{10t-19}}$

5.1 c) $\boxed{e^{-8x+3}}$

5.1 d) $\boxed{1}$

5.2 a) $\boxed{5\ln(2)}$

5.2 b) $\boxed{2\ln(5)}$

5.2 c) $\boxed{2\ln(5)}$

5.2 d) $\boxed{5\ln(3)}$

5.3 a) $\boxed{\dfrac{2x-1}{x}}$

5.3 b) $\boxed{\dfrac{4x^2+11x+4}{x(x+1)^2}}$

5.4 a) $\boxed{\dfrac{1-\ln(x)-6x^3}{x^2}}$

5.4 b) $\boxed{\dfrac{(x\ln(x)+1)e^x}{x}}$

5.5 a) $\boxed{\ln(x)}$

5.5 b) $\boxed{\dfrac{1-\ln(x)}{x^2}}$

5.5 c) $\boxed{\dfrac{(2x-1)\ln(x)-x+1}{(\ln(x))^2}}$

5.5 d) $\boxed{\dfrac{\ln(x)+2}{2\sqrt{x}}}$

5.6 a) $\boxed{\dfrac{3\ln(x)^2}{x}}$

5.6 b) $\boxed{-\dfrac{1}{x\ln(x)^2}}$

5.6 c) $\boxed{\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln(x)}}}$

5.6 d) $\boxed{-\dfrac{4}{x\ln(x)^5}}$

5.7 a) $\boxed{\dfrac{2x-4}{x^2-4x+7}}$

5.7 b) $\boxed{\dfrac{e^x}{1+e^x}}$

5.7 c) $\boxed{-\dfrac{3x^2}{1-x^3}}$

5.7 d) $\boxed{\dfrac{1}{x\ln(x)}}$

5.8 a) $\boxed{\dfrac{16x^3+24x^2+52x-3}{2x^2+3x+7}}$

5.8 b) $\boxed{\dfrac{6x+6\sqrt{x}+1}{2(x+\sqrt{x})}}$

5.8 c) $\boxed{-\dfrac{2x(x+2)}{(1+x)(2x^2+x+1)}}$

5.9 a) $\boxed{-\dfrac{x^2-6x+2}{(x-3)(x^2-2)}}$

5.9 b) $\boxed{\dfrac{3}{7}}$

5.10 a) $\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}}$

5.10 b) $\boxed{\dfrac{1}{x^2-1}}$

5.10 c) $\boxed{\dfrac{2xe^{x^2+1}}{1+e^{x^2+1}}}$

5.10 d) $\boxed{\dfrac{1}{x\ln(x)\ln(\ln(x))}}$

5.11 a) $\boxed{\dfrac{(1+x-3x^3)e^{x-x^3}}{1+xe^{x-x^3}}}$

5.11 b) $\boxed{\dfrac{2xe^{x^2}}{(1+e^{x^2})(1+\ln(1+e^{x^2}))}}$

5.12 $\boxed{g'=1-g}$

5.13 a) .... $\boxed{-\dfrac{1}{x\ln(x)^2}}$

5.13 b) .... $\boxed{\dfrac{6x+1}{\ln(3x^2+x+2)}}$

5.13 c) .... $\boxed{\dfrac{e^x}{x}}$

5.14 a) .... $\boxed{\ln(2)\times 2^x}$

5.14 b) .... $\boxed{\ln(5)\times 5^x}$

5.14 c) .... $\boxed{-\ln(3)\times 3^{-x}}$

5.14 d) .... $\boxed{(1+\ln(x))\times x^x}$

5.14 e) .... $\boxed{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(\ln(x)+2)x^{\sqrt{x}}}$

5.14 f) .... $\boxed{\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x+1}\right)\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x}$

Corrigés

5.1 a) On a $e^{3x+1}\times e^{5x+2}=e^{3x+1+5x+2}=e^{8x+3}$.

5.1 b) On a $(e^{2t-4})^5\times e=e^{5(2t-4)+1}=e^{10t-19}$.

5.1 c) On a $\dfrac{e^{2x+1}\times e^{5-8x}}{e^{2x+3}}=e^{2x+1+5-8x-2x-3}=e^{-8x+3}$.

5.1 d) On a $\dfrac{e^{2x+5t}\times e^{4x-3t}}{e^{2t+6x}}=e^{2x+5t+4x-3t-2t-6x}=e^0=1$.

5.2 a) On a $3\ln(2)+\ln(4)=3\ln(2)+\ln(2^2)=3\ln(2)+2\ln(2)=5\ln(2)$.

5.2 b) On a $\ln(100)-\ln(28)+\ln(21)-\ln(3)=\ln(5^2\times 2^2)-\ln(7\times 2^2)+\ln(3\times 7)-\ln(3)$.

Ainsi, $\ln(100)-\ln(28)+\ln(21)-\ln(15)=2\ln(2)+2\ln(5)-2\ln(2)-\ln(7)+\ln(3)+\ln(7)-\ln(3)=2\ln(5)$.

5.2 c) On a

$$\begin{aligned}\ln(7-2\sqrt{6})+\ln(7+2\sqrt{6})&=\ln((7-2\sqrt{6})(7+2\sqrt{6}))=\ln\left(7^2-(2\sqrt{6})^2\right)\\&=\ln(49-24)=\ln(25)=\ln(5^2)=2\ln(5).\end{aligned}$$

5.2 d) On a

$$\begin{aligned}4\ln(9)-2\ln(27)+6\ln(\sqrt{3})&=4\ln(3^2)-2\ln(3^3)+6\times\frac{1}{2}\ln(3)\\&=8\ln(3)-6\ln(3)+3\ln(3)=5\ln(3).\end{aligned}$$

5.3 a) On a $f'(x)=2-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x-1}{x}$.

5.3 b) On a $f'(x)=\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{(x+1)^2}=\dfrac{4+8x+4x^2+3x}{x(x+1)^2}=\dfrac{4x^2+11x+4}{x(x+1)^2}$.

5.4 a) On a $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\times x-\ln(x)\times 1}{x^2}-6x=\dfrac{1-\ln(x)-6x^3}{x^2}$.

5.4 b) On a $f'(x)=e^x\times\dfrac{1}{x}+e^x\times\ln(x)=e^x\left(\dfrac{1}{x}+\ln(x)\right)=\dfrac{(x\ln(x)+1)e^x}{x}$.

5.5 a) On a $f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln(x)$.

5.5 b) On a $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2} = \dfrac{1 - \ln(x)}{x^2}$.

5.5 c) On a $f'(x) = \dfrac{(2x-1)\ln(x) - (x^2 - x) \times \frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \dfrac{(2x-1)\ln(x) - x + 1}{(\ln(x))^2}$.

5.5 d) On a $f'(x) = \sqrt{x} \times \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{\sqrt{x}}\ln(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{2}{\sqrt{x}}\ln(x) = \dfrac{\ln(x) + 2}{2\sqrt{x}}$.

5.6 a) On utilise la formule $(u^3)' = 3u'u^2$.

5.6 b) On utilise la formule $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$.

5.6 c) On utilise la formule $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

5.6 d) On utilise la formule $\left(\dfrac{1}{u^4}\right)' = -\dfrac{4u'}{u^5}$.

5.7 a) On utilise la formule $(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$.

5.8 a) On a $f'(x) = 8x - \dfrac{4x+3}{2x^2+3x+7} = \dfrac{16x^3 + 24x^2 + 56x - 4x - 3}{2x^2+3x+7} = \dfrac{16x^3 + 24x^2 + 52x - 3}{2x^2+3x+7}$.

5.8 b) On a $f'(x) = 3 + \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}} = 3 + \dfrac{1}{2(x+\sqrt{x})} = \dfrac{6x + 6\sqrt{x} + 1}{2(x+\sqrt{x})}$.

5.8 c) On a $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{4x+1}{2x^2+x+1} = \dfrac{2x^2 + x + 1 - (4x+1)(1+x)}{(1+x)(2x^2+x+1)} = -\dfrac{2x(x+2)}{(1+x)(2x^2+x+1)}$.

5.9 a) Pour $x > 3$, on pose $u(x) = \dfrac{x-3}{x^2-2}$. On a $u'(x) = \dfrac{1 \times (x^2-2) - (x-3) \times 2x}{(x^2-2)^2} = \dfrac{-x^2+6x-2}{(x^2-2)^2}$.

Ainsi, on a $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{-x^2+6x-2}{(x^2-2)^2} \times \dfrac{x^2-2}{x-3} = -\dfrac{x^2-6x+2}{(x-3)(x^2-2)}$.

Il est aussi possible d'utiliser le fait que, pour tout réel $x > 3$, on a $\ln\left(\dfrac{x-3}{x^2-2}\right) = \ln(x-3) - \ln(x^2-2)$.

5.10 a) On a $f'(x) = \dfrac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \dfrac{\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

5.10 c) Pour tout réel x, on pose $u(x) = \mathrm{e}^{x^2+1}$. On a $u'(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2+1}$. Ainsi, $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{2x\mathrm{e}^{x^2+1}}{1+\mathrm{e}^{x^2+1}}$.

5.11 a) Pour $x > -1$, on pose $u(x) = 1 + x\mathrm{e}^{x-x^3}$. On a $u'(x) = \mathrm{e}^{x-x^3} + x \times (1-3x^2)\mathrm{e}^{x-x^3} = (1+x-3x^3)\mathrm{e}^{x-x^3}$.

On a $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{(1+x-3x^3)\mathrm{e}^{x-x^3}}{1+x\mathrm{e}^{x-x^3}}$.

5.11 b) Pour tout réel x, on pose $u(x) = 1 + \ln(1 + \mathrm{e}^{x^2})$. On a $u'(x) = \dfrac{2x\mathrm{e}^{x^2}}{1 + \mathrm{e}^{x^2}}$. On a

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x\mathrm{e}^{x^2}}{(1 + \mathrm{e}^{x^2})(1 + \ln(1 + \mathrm{e}^{x^2}))}.$$

5.12 On a $g' = \dfrac{f'}{f}$. Or, pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = f(x)(1 - \ln(f(x))$ et donc $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = 1 - \ln(f(x))$, c'est-à-dire $g'(x) = 1 - g(x)$.

5.13 a) On utilise la formule $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$.

5.13 b) On a $f'(x) = (6x + 1)\,\mathrm{li}'(3x^2 + x + 2) = \dfrac{6x + 1}{\ln(3x^2 + x + 2)}$.

5.13 c) On a $g'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\ln(\mathrm{e}^x)} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$.

5.14 a) On a $f(x) = \mathrm{e}^{x\ln(2)}$ et donc $f'(x) = \ln(2)\mathrm{e}^{x\ln(2)} = \ln(2) \times 2^x$.

5.14 b) On a $f(x) = \mathrm{e}^{x\ln(5)}$ et donc $f'(x) = \ln(5)\mathrm{e}^{x\ln(5)} = \ln(5) \times 5^x$.

5.14 c) On a $f(x) = \mathrm{e}^{-x\ln(3)}$ et donc $f'(x) = -\ln(3)\mathrm{e}^{-x\ln(3)} = -\ln(3) \times 3^{-x}$.

5.14 d) On a $f(x) = \mathrm{e}^{x\ln(x)}$. Pour tout $x > 0$, on pose $u(x) = x\ln(x)$. On a $u'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} = \ln(x) + 1$. Ainsi, $f'(x) = u'(x)\exp(u(x)) = (\ln(x) + 1)\mathrm{e}^{x\ln(x)} = (\ln(x) + 1)x^x$.

5.14 e) On a $f(x) = \exp(\sqrt{x}\ln(x))$. Pour tout $x \in \,]0, +\infty[$, on pose $u(x) = \sqrt{x}\ln(x)$. On a

$$u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln(x) + \sqrt{x} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}(\ln(x) + 2).$$

Ainsi, $f'(x) = u'(x)\exp(u(x)) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(\ln(x) + 2)x^{\sqrt{x}}$.

5.14 f) On a $f(x) = \exp\left(x\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\right)$. Pour tout réel $x > 0$, on pose $u(x) = x\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$. On a

$$u'(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x \times \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x + 1}.$$

Ainsi, $f'(x) = u'(x)\exp(u(x)) = \left(\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x + 1}\right)\exp\left(x\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\right) = \left(\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x + 1}\right)\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$.

Fiche nº 6. Fonctions trigonométriques

Réponses

6.1 a) .... $\boxed{\{10\}}$

6.1 b) .... $\boxed{\left\{-\dfrac{9}{17}\right\}}$

6.2 a) .... $\boxed{a+b-c}$

6.2 b) .... $\boxed{\dfrac{a+b-c}{a+c-b}}$

6.2 c) .... $\boxed{\dfrac{12}{a}}$

6.3 .... $\boxed{a}$

6.4 a) .... $\boxed{c}$

6.4 b) .... $\boxed{a}$

6.5 a) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

6.5 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

6.5 c) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

6.5 d) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

6.6 a) .... $\boxed{\cos(x)}$

6.6 b) .... $\boxed{-\sin(x)}$

6.6 c) .... $\boxed{-\cos(x)}$

6.6 d) .... $\boxed{\sin(x)}$

6.6 e) .... $\boxed{-\cos(x)}$

6.6 f) .... $\boxed{-\sin(x)}$

6.6 g) .... $\boxed{\sin(x)}$

6.6 h) .... $\boxed{\cos(x)}$

6.7 a) .... $\boxed{a \text{ et } b}$

6.7 b) .... $\boxed{c \text{ et } d}$

6.8 .... $\boxed{d}$

6.9 a) .... $\boxed{a}$

6.9 b) .... $\boxed{\sqrt{\dfrac{6+\sqrt{3}}{8}}}$

6.10 a) .... $\boxed{-5}$

6.10 b) .... $\boxed{-6}$

6.11 a) .... $\boxed{\dfrac{2\pi}{5}}$

6.11 b) .... $\boxed{-\dfrac{3\pi}{4}}$

6.11 c) .... $\boxed{-\dfrac{\pi}{2}}$

6.12 a) .... $\boxed{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

6.12 b) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

6.12 c) .... $\boxed{-\dfrac{1}{2}}$

6.12 d) .... $\boxed{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

6.12 e) .... $\boxed{0}$

6.12 f) .... $\boxed{-1}$

6.13 .... $\boxed{a}$

6.14 a) .... $\boxed{a}$

6.14 b) .... $\boxed{a}$

6.14 c) .... $\boxed{b}$

6.15 a) .... $\boxed{b}$

6.15 b) .... $\boxed{a}$

6.15 c) .... $\boxed{b}$

6.15 d) .... $\boxed{a}$

6.16 a) .... $\boxed{\text{vrai}}$

6.16 b) .... $\boxed{\text{faux}}$

6.16 c) .... $\boxed{\text{vrai}}$

6.16 d) .... $\boxed{\text{vrai}}$

6.17 a) .... $\boxed{b}$

6.17 b) .... $\boxed{b}$

6.18 a) .... $\boxed{a}$

6.18 b) .... $\boxed{a}$

6.19 a) .... $\boxed{\left\{-\dfrac{\pi}{5}, \dfrac{\pi}{5}\right\}}$

6.19 b) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right\}}$

6.19 c) .... $\boxed{\left\{-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right\}}$

6.20 a) .... $\boxed{\left\{\dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right\}}$

6.20 b) .... $\boxed{\left\{\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right\}}$

6.20 c) ... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{18}, \dfrac{11\pi}{18}, \dfrac{13\pi}{18}, \dfrac{23\pi}{18}, \dfrac{25\pi}{18}, \dfrac{35\pi}{18}\right\}}$

6.21 a) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right\}}$

6.21 b) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}\right\}}$

6.21 c) .... $\boxed{\left\{\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}\right\}}$

6.22 a) .... $\boxed{\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]}$

6.22 b) .... $\boxed{\left]-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right[}$

6.22 c) ...... $\boxed{\left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]}$

6.22 d) ...... $\boxed{\left]-\pi, -\frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]}$

6.23 a) .... $\boxed{0}$

6.23 b) .... $\boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}$

6.23 c) .... $\boxed{1}$

6.23 d) .... $\boxed{\sqrt{3}}$

6.23 e) .... $\boxed{\frac{1}{\cos^2(x)}}$

Corrigés

6.1 b) On a les équivalences suivantes :

$$\left(\frac{3}{2}x+1\right)(12-x)-\frac{5}{2}(x^2+2) = -2(1+2x^2) \iff (3x+2)(12-x)-5(x^2+2) = -4(1+2x^2)$$
$$\iff -3x^2+34x+24-5x^2-10 = -4-8x^2$$
$$\iff 34x = -18 \iff x = -\frac{9}{17}.$$

....

6.2 a) On a $\dfrac{(a+b)^2-c^2}{a+b+c} = \dfrac{(a+b+c)(a+b-c)}{a+b+c} = a+b-c$.

....

6.2 b) On a $\dfrac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2-b^2+c^2+2ac} = \dfrac{a^2+2ab+b^2-c^2}{a^2+2ac+c^2-b^2} = \dfrac{(a+b)^2-c^2}{(a+c)^2-b^2} = \dfrac{(a+b+c)(a+b-c)}{(a+c+b)(a+c-b)} = \dfrac{a+b-c}{a+c-b}$.

....

6.2 c) On a

$$\left(\frac{6a+1}{a^2-6a}+\frac{6a-1}{a^2+6a}\right)\frac{a^2-36}{a^2+1} = \left(\frac{6a+1}{a(a-6)}+\frac{6a-1}{a(a+6)}\right)\frac{(a+6)(a-6)}{a^2+1}$$
$$= \left(\frac{(6a+1)(a+6)}{a(a-6)(a+6)}+\frac{(6a-1)(a-6)}{a(a-6)(a+6)}\right)\frac{(a+6)(a-6)}{a^2+1}$$
$$= \left(\frac{6a^2+37a+6+6a^2-37a+6}{a}\right)\frac{1}{a^2+1} = \left(\frac{12a^2+12}{a}\right)\frac{1}{a^2+1} = \frac{12}{a}.$$

....

6.4 a) Un angle de π radians fait 180°.

....

6.4 b) Un angle de 1° fait $\dfrac{\pi}{180}$ rad.

....

6.9 b) On sait que $\cos^2(x)+\sin^2(x) = 1$ donc on a $\sin^2(x) = 1-\cos^2(x) = 1-\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}\right)^2 = \dfrac{6+\sqrt{3}}{8}$.

Or, on a $\sin(x) \geqslant 0$ et donc $\sin(x) = \sqrt{\dfrac{6+\sqrt{3}}{8}}$.

....

6.10 a) On a les équivalences suivantes :

$$0 < \frac{45\pi}{4}+2k\pi < 2\pi \iff -\frac{45\pi}{4} < 2k\pi < -\frac{37\pi}{4} \iff -\frac{45}{8} < k < -\frac{37}{8} \iff -5-\frac{5}{8} < k < -5+\frac{3}{8} \iff k = -5.$$

....

6.10 b) Soit $k \in \mathbb{Z}$. On a les équivalences suivantes :

$$-\pi < \frac{71\pi}{6} + 2k\pi \leqslant \pi \iff -\frac{77\pi}{6} < 2k\pi \leqslant -\frac{65\pi}{6} \iff -\frac{77}{12} < k \leqslant -\frac{65}{12} \iff -6 - \frac{5}{12} < k \leqslant -6 + \frac{7}{12}$$
$$\iff k = -6.$$

6.11 a) On cherche l'entier relatif k tel que $-\pi < \frac{152\pi}{5} + 2k\pi \leqslant \pi$. Soit $k \in \mathbb{Z}$. On a les équivalences suivantes :

$$-\frac{157\pi}{5} < 2k\pi \leqslant -\frac{147\pi}{5} \iff -\frac{157}{10} < k \leqslant -\frac{147}{10} \iff k = -15.$$

La mesure principale de $\frac{152\pi}{5}$ est donc $\frac{152\pi}{5} - 15 \times 2\pi = \frac{152\pi}{5} - \frac{150\pi}{5} = \frac{2\pi}{5}$.

6.11 b) De même, soit $k \in \mathbb{Z}$. On a les équivalences suivantes :

$$-\pi < 2k\pi - \frac{75\pi}{4} \leqslant \pi \iff \frac{71\pi}{4} < 2k\pi \leqslant \frac{79\pi}{4} \iff \frac{71}{8} < k \leqslant \frac{79}{8} \iff k = 9.$$

La mesure principale de $-\frac{75\pi}{4}$ est donc $-\frac{75\pi}{4} + 9 \times 2\pi = -\frac{75\pi}{4} + \frac{72\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$.

6.11 c) De même, on a l'équivalence : $-\pi < \frac{153\pi}{6} + 2k\pi \leqslant \pi \iff k = -13$.

La mesure principale de $\frac{153\pi}{6}$ est donc $\frac{153\pi}{6} - 13 \times 2\pi = \frac{153\pi - 156\pi}{6} = -\frac{\pi}{2}$.

6.12 a) On reconnaît que $\frac{11\pi}{4} = \frac{8\pi + 3\pi}{4} = 2\pi + \frac{3\pi}{4}$. On a donc $\cos\left(\frac{11\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

6.12 b) De même, on a $\sin\left(\frac{11\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

6.12 c) On reconnaît que $\frac{10\pi}{3} = \frac{12\pi - 2\pi}{3} = 4\pi - \frac{2\pi}{3}$. On a donc $\cos\left(\frac{10\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$.

6.12 e) On reconnaît que $\frac{19\pi}{2} = \frac{20\pi - \pi}{2} = 10\pi - \frac{\pi}{2}$. On a donc $\cos\left(\frac{19\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) = 0$.

6.13 La fonction cosinus est paire, donc sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

6.14 c) La fonction cos est croissante sur $[\pi, 2\pi]$, donc croissante sur $\left[\pi, \frac{5\pi}{4}\right]$. La fonction $x \longmapsto \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ est donc croissante sur $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$.

6.15 b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(-x) = 5 - 2\cos(-x) = 5 - 2\cos(x) = f(x)$.

6.15 c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(-x) = 4\cos(-x)\sin(-x) = 4\cos(x)(-\sin(x)) = -4\cos(x)\sin(x) = -f(x)$.

6.15 d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(-x) = (-x)^2\cos(-x) = x^2\cos(x) = f(x)$.

6.16 a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos(x + 4\pi) = \cos(x + 2\pi + 2\pi) = \cos(x + 2\pi) = \cos(x)$.

6.16 b) On note $f : x \longmapsto \sin\left(\frac{x}{2}\right)$. On a

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{et} \qquad f\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

La fonction f n'est donc pas 2π-périodique.

6.16 c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x+1) = 3\sin(2\pi(x+1)) = 3\sin(2\pi x + 2\pi) = 3\sin(2\pi x) = f(x)$.

6.16 d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 4\cos\left(4\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) - 1 = 4\cos(4x + 2\pi) - 1 = 4\cos(4x) - 1 = f(x)$.

6.17 a) La fonction recherchée atteint la valeur 2 et s'annule en 0, il s'agit donc de $x \longmapsto -2\sin\left(\frac{x}{2}\right)$.

6.17 b) La fonction recherchée s'annule en $\frac{\pi}{4}$, il s'agit donc de $x \longmapsto \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$.

6.18 a) La fonction recherchée s'annule en $\frac{\pi}{4}$, il s'agit donc de $x \longmapsto -\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

6.18 b) La fonction recherchée atteint les valeurs 0 et 2, il s'agit donc de $x \longmapsto 1 + \cos(x)$.

6.19 a) Dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$, les seuls nombres ayant le même cosinus que $\frac{\pi}{5}$ sont $-\frac{\pi}{5}$ et $\frac{\pi}{5}$. L'équation $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ admet donc deux solutions dans cet intervalle : $\left\{-\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{5}\right\}$.

6.19 b) On a $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Or, dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$, les seuls nombres ayant le même sinus que $\frac{\pi}{4}$ sont $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$. Les solutions de l'équation dans $]-\pi, \pi]$ sont donc : $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$.

6.20 a) On procède comme précédemment en constatant que $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

6.20 b) On procède comme précédemment en constatant que $-\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff \cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)$.

6.20 c) De même, dans l'intervalle $]0, 6\pi]$, les solutions de l'équation $\cos(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ sont $\frac{\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$, $\frac{13\pi}{6}$, $\frac{23\pi}{6}$, $\frac{25\pi}{6}$ et $\frac{35\pi}{6}$. L'ensemble des solutions de l'équation $\cos(3x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dans l'intervalle $]0, 2\pi]$ est donc

$$\left\{\frac{\pi}{18}, \frac{11\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{23\pi}{18}, \frac{25\pi}{18}, \frac{35\pi}{18}\right\}.$$

6.21 a) De même, on a $\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$. Les solutions dans $[0, 2\pi[$ sont donc $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$.

6.21 b) Soit $x \in [0, 2\pi[$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \sin^2(x) = \frac{1}{2} &\iff \sin(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } \sin(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \iff \sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } \sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\iff x \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}. \end{aligned}$$

6.21 c) Soit $x \in [0, 2\pi[$. On note $t = \cos(x)$. L'équation $2t^2 + t - 1 = 0$ est une équation du second degré, dont le discriminant vaut 9 et les solutions sont -1 et $\dfrac{1}{2}$. On a donc les équivalences suivantes :

$$2\cos^2(x) + \cos(x) - 1 = 0 \iff \cos(x) = -1 \text{ ou } \cos(x) = \frac{1}{2} \iff x \in \left\{ \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3} \right\}.$$

....

6.22 a) On a $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$. Par lecture sur le cercle trigonométrique, les réels de l'intervalle $]-\pi, \pi]$ dont le cosinus est supérieur à $\dfrac{1}{2}$ sont ceux compris entre $-\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{\pi}{3}$.

....

6.22 b) De même, on a $\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ donc, par lecture sur le cercle trigonométrique, les réels de l'intervalle $]-\pi, \pi]$ dont le sinus est inférieur à $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sont ceux compris entre $-\dfrac{2\pi}{3}$ et $-\dfrac{\pi}{3}$.

....

6.22 c) Soit $x \in]-\pi, \pi]$. On a l'équivalence

$$|\cos(x)| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \iff -\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \cos(x) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Or, on a $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Un raisonnement similaire au précédent permet alors de conclure.

....

6.22 d) On utilise le fait que, dans l'intervalle $\left]-\dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$, l'ensemble des solutions de l'inéquation $\sin(t) \geqslant 0$ est $\left]-\dfrac{5\pi}{4}, -\pi\right] \cup \left[0, \dfrac{3\pi}{4}\right]$.

....

6.23 a) On a $\tan(0) = \dfrac{\sin(0)}{\cos(0)} = \dfrac{0}{1} = 0$. On procède de même dans les questions suivantes.

....

6.23 e) Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $1 + \tan^2(x) = 1 + \dfrac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$.

....

Fiche n° 7. Dérivation des fonctions trigonométriques

Réponses

7.1 a) $x^3 + y^3$

7.1 b) $x - 1$

7.1 c) $x^6 - x^5 - x^4 + x^2 + x - 1$

7.2 a) $ab(7a - 4b)$

7.2 b) $(1 + a)(1 + b)$

7.3 a) $\{-9, 5\}$

7.3 b) $\left\{\dfrac{5}{2}\right\}$

7.4 a) d

7.4 b) c

7.5 a) a

7.5 b) b

7.6 a) $e^x(\cos(x) - \sin(x))$

7.6 b) $5\sin(-5x + 3)$

7.6 c) $-2x\sin(x^2)$

7.7 a) $\cos(x)e^{\sin(x)} - \sin(x)$

7.7 b) $\dfrac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}} + \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}}$

7.7 c) $24\cos(2x)(1 + 3\sin(2x))^3$

7.8 a) $\dfrac{x\cos\left(\sqrt{x^2+5}\right)}{\sqrt{x^2+5}}$

7.8 b) $\dfrac{\cos(x)\cos(3x) + 6\sin(x)\sin(3x)}{\cos^3(3x)}$

7.8 c) $3x^2\sqrt{\sin(x)} + \dfrac{x^3\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}$

7.9 0

7.10 $-2\sin(x)$

7.11 a) $\cos(a)$

7.11 b) 1

7.11 c) 2

7.12 a) 1

7.12 b) 0

7.12 c) $x + \dfrac{\pi}{2}$

7.13 $\dfrac{1}{\cos^2(x)}$

7.14 a) $\dfrac{3}{\cos^2(3x)} + \dfrac{2}{\cos^2(x)}$

7.14 b) $\dfrac{4\tan(x)}{\cos^2(x)}$

7.14 c) $\dfrac{12}{\cos^2(3x)\sqrt{\tan(3x)}} - \dfrac{4\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}\sin^3(\sqrt{x})}$

Corrigés

7.1 a) On a $(x+y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 - x^2y + xy^2 + x^2y - xy^2 + y^3 = x^3 + y^3$.

7.1 b) On a $\left(x - \dfrac{1}{x}\right)\left(1 - \dfrac{1}{x+1}\right) = \dfrac{x^2-1}{x}\dfrac{x+1-1}{x+1} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x}\dfrac{x}{x+1} = x - 1$.

7.1 c) On a $(x-1)(x^2-1)(x^3-1) = (x^3 - x^2 - x + 1)(x^3 - 1) = x^6 - x^5 - x^4 + x^2 + x - 1$.

7.2 a) On a $7a^2b - 4ab^2 = ab \times 7a - ab \times 4b = ab(7a - 4b)$.

7.2 b) On a $a + 1 + b + ab = a + 1 + b(1 + a) = (a + 1)(1 + b)$.

7.3 a) On a les équivalences suivantes : $|x + 2| = 7 \iff x + 2 = 7$ ou $x + 2 = -7 \iff x = 5$ ou $x = -9$.

7.3 b) On a les équivalences suivantes :

$$|x + 2| = |x - 7| \iff x + 2 = x - 7 \text{ ou } x + 2 = -(x - 7) \iff 2 = -7 \text{ ou } 2x = 7 - 2 \iff x = \frac{5}{2}.$$

7.4 b) En notant $u(x) = x$ et $v(x) = \sin(x)$, on a $f(x) = u(x) \times v(x)$, $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \cos(x)$. Donc, on a $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = \sin(x) + x\cos(x)$.

7.5 a) En notant $u(x) = x^2$ et $v(x) = \cos(x)$, on a $f(x) = u(x) \times v(x)$, $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = -\sin(x)$. Donc, on a $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 2x\cos(x) - x^2\sin(x)$.

7.5 b) En notant $u(x) = \sin(x)$ et $v(x) = x$, on a $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$, $u'(x) = \cos(x)$ et $v'(x) = 1$. Donc, on a

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2}.$$

7.6 b) En notant $u(x) = \cos(x)$ et $v(x) = -5x + 3$, on a $f(x) = u \circ v(x)$, $u'(x) = -\sin(x)$ et $v'(x) = -5$. Donc, on a $f'(x) = v'(x) \times u'(v(x)) = -5 \times (-\sin(-5x + 3)) = 5\sin(-5x + 3)$.

7.6 c) En notant $u(x) = \cos(x)$ et $v(x) = x^2$, on a $f(x) = u \circ v(x)$, $u'(x) = -\sin(x)$ et $v'(x) = 2x$. Donc, on a $f'(x) = v'(x) \times u'(v(x)) = 2x \times (-\sin(x^2)) = -2x\sin(x^2)$.

7.7 a) Il faut utiliser la dérivée de la fonction composée $x \longmapsto \mathrm{e}^{u(x)}$, qui est $x \longmapsto u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$.

7.7 b) Il faut utiliser la dérivée de la fonction composée $x \longmapsto \sqrt{u(x)}$, qui est $x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

7.7 c) Il faut utiliser la dérivée de la fonction puissance $x \longmapsto (u(x))^n$, qui est $x \longmapsto nu'(x)(u(x))^{n-1}$.

7.8 a) En notant $u(x) = \sin(x)$ et $v(x) = \sqrt{x^2 + 5}$, on a $f(x) = u \circ v(x)$, $u'(x) = \cos(x)$ et $v'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 5}}$. On a donc $f'(x) = v'(x) \times u'(v(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 5}}\cos\left(\sqrt{x^2 + 5}\right)$.

7.8 b) En notant $u(x) = \sin(x)$ et $v(x) = \cos^2(3x)$, on a $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$, $u'(x) = \cos(x)$ et

$$v'(x) = 2 \times (-3\sin(3x)) \times \cos(3x) = -6\sin(3x)\cos(3x),$$

en utilisant des dérivées de composées.

7.9 On a $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}\sin(x) + \mathrm{e}^{-x}\cos(x)$ et $f''(x) = -2\mathrm{e}^{-x}\cos(x)$. Donc,

$$f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = -2\mathrm{e}^{-x}\cos(x) - 2\mathrm{e}^{-x}\sin(x) + 2\mathrm{e}^{-x}\cos(x) + 2\mathrm{e}^{-x}\sin(x) = 0.$$

7.10 On a $f'(x) = \sin(x) + x\cos(x)$ et $f''(x) = 2\cos(x) - x\sin(x)$. Donc,

$$xf(x) - 2f'(x) + xf''(x) = x^2\sin(x) - 2(\sin(x) + x\cos(x)) + x(2\cos(x) - x\sin(x)) = -2\sin(x).$$

7.11 a) La fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sin'(x) = \cos(x)$. Par définition du nombre dérivé, on a donc $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin(x) - \sin(a)}{x - a} = \sin'(a) = \cos(a)$.

7.11 b) On applique le résultat précédent avec $a = 0$.

7.11 c) Quand x tend vers $\dfrac{\pi}{3}$, $t = 2x - \dfrac{2\pi}{3}$ tend vers 0. Donc, d'après la question précédente, $\dfrac{\sin(t)}{t}$ tend vers 1. Ainsi, $\dfrac{\sin\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)}{x - \frac{\pi}{3}} = \dfrac{2\sin(t)}{t}$ admet une limite égale à 2.

7.12 a) Pour tout $x \in \left]-\pi, 0\right[$, on a

$$h'(x) = f'(x) \times g'(f(x)) = -\sin(x) \times \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(x)}} = \frac{-\sin(x)}{\sqrt{\sin^2(x)}} = \frac{-\sin(x)}{|\sin(x)|}.$$

Or, sur $\left]-\pi, 0\right[$, on a $-\sin(x) = |\sin(x)|$, donc $h'(x) = 1$.

7.12 b) On a $h\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = g(0) = 0$.

7.12 c) Puisque $h'(x) = 1$, on en déduit qu'il existe un réel b tel que, pour tout $x \in \left]-\pi, 0\right[$, $h(x) = x + b$. Or, $h\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$, donc $-\dfrac{\pi}{2} + b = 0$ et $b = \dfrac{\pi}{2}$. Par conséquent, on a $h(x) = x + \dfrac{\pi}{2}$.

7.13 En notant $u(x) = \sin(x)$ et $v(x) = \cos(x)$, on a $u'(x) = \cos(x)$ et $v'(x) = -\sin(x)$ donc

$$\tan'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{\cos(x)\cos(x) + \sin(x)\sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

On remarque qu'on a aussi $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$.

7.14 a) On a $f'(x) = 3\tan'(3x) + 2\tan'(x)$. On utilise alors le calcul précédent.

7.14 b) On a $f'(x) = 2 \times 2\tan'(x)\tan(x)$.

7.14 c) La dérivée de $x \longmapsto \sqrt{\tan(3x)}$ est $x \longmapsto \dfrac{3\tan'(3x)}{2\sqrt{\tan(3x)}}$. La dérivée de $x \longmapsto \dfrac{1}{\sin^2(\sqrt{x})} = \sin(\sqrt{x})^{-2}$ est

$$x \longmapsto -2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos(\sqrt{x}) \times \sin^{-3}(\sqrt{x}).$$

Fiche n$^{\text{o}}$ 8. Révisions sur la dérivation

Réponses

8.1 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{12}}$

8.1 b) .... $\boxed{1}$

8.1 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{3}}$

8.1 d) .... $\boxed{\dfrac{22}{5}}$

8.2 a) .... $\boxed{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}$

8.2 b) .... $\boxed{x^3 + x^2 - 2x - 8}$

8.2 c) .... $\boxed{-x^3 + 9x + 20}$

8.2 d) .... $\boxed{12x}$

8.3 a) .... $\boxed{x \longmapsto 4}$

8.3 b) .... $\boxed{x \longmapsto 5}$

8.3 c) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}$

8.3 d) .... $\boxed{x \longmapsto -3\mathrm{e}^{-3x}}$

8.3 e) .... $\boxed{x \longmapsto 0}$

8.3 f) .... $\boxed{x \longmapsto -\dfrac{5}{x^6}}$

8.4 a) .... $\boxed{x \longmapsto 4x^2(3 + 5x)}$

8.4 b) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}}$

8.4 c) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}}$

8.4 d) .... $\boxed{x \longmapsto 9\mathrm{e}^{3x} - \dfrac{1}{x^2}}$

8.5 a) .... $\boxed{x \longmapsto \mathrm{e}^{3x} - \dfrac{2}{x^2}}$

8.5 b) .... $\boxed{x \longmapsto 2\left(3\mathrm{e}^{2x} - 2^9x^3\right)}$

8.5 c) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{3x}}{2} + \dfrac{1}{5x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)}$

8.5 d) .... $\boxed{x \longmapsto 2\left(5\mathrm{e}^{10x} - \dfrac{1}{x^2} - 2 \times 3^4x^3\right)}$

8.6 a) .... $\boxed{x \longmapsto (2x + 3)\mathrm{e}^{2x}}$

8.6 b) .... $\boxed{x \longmapsto \ln(x) + \dfrac{x+1}{x}}$

8.6 c) .... $\boxed{x \longmapsto (3x^2 + 2x + 3)\mathrm{e}^{3x}}$

8.7 a) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{(1 + \mathrm{e}^x)^2}}$

8.7 b) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{4}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2}}$

8.7 c) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{2\mathrm{e}^x(x^3 - x^2 + x + 1)}{(1 + x^2)^2}}$

8.8 a) .... $\boxed{x \longmapsto 6(3x + 2)}$

8.8 b) .... $\boxed{x \longmapsto -\dfrac{5}{(5x + 2)^2}}$

8.8 c) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{4}{4x + 1}}$

8.8 d) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{8}{(5 - 2x)^5}}$

8.9 a) .... $\boxed{x \longmapsto 2(3x + 2)(6x + 7)\mathrm{e}^{4x+5}}$

8.9 b) .... $\boxed{x \longmapsto 4(x + \mathrm{e})^3 + 27(3x + 2)^2}$

8.10 a) .... $\boxed{\ln(1 + x) + \dfrac{x}{1 + x}}$

8.10 b) .... $\boxed{\dfrac{2 + x}{(1 + x)^2}}$

8.11 a) .... $\boxed{\dfrac{1 - \ln(x)}{x^2}}$

8.11 b) .... $\boxed{-\dfrac{3 - 2\ln(x)}{x^3}}$

8.12 a) .... $\boxed{\dfrac{\mathrm{e}^x - 1 + x}{\mathrm{e}^x}}$

8.12 b) .... $\boxed{\dfrac{2-x}{\mathrm{e}^x}}$

8.13 a) .... $\boxed{x \longmapsto 1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}}$

8.13 b) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}}$

8.13 c) .... $\boxed{\dfrac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}}$

8.14 a) .... $\boxed{\dfrac{2}{(3-2x)^2}}$

8.14 b) .... $\boxed{\dfrac{2^3}{(3-2x)^3}}$

8.14 c) .... $\boxed{\dfrac{3!\times 2^3}{(3-2x)^4}}$

8.14 d) .... $\boxed{\dfrac{4!\times 2^4}{(3-2x)^5}}$

8.14 e) .... $\boxed{\dfrac{5!\times 2^5}{(3-2x)^6}}$

8.14 f) .... $\boxed{\dfrac{n!\times 2^n}{(3-2x)^{n+1}}}$

Corrigés

8.3 e) Cette fonction est constante !

....

8.4 a) En notant f la fonction, on a $f'(x) = 4\times 3x^2 + 5\times 4x^3 = 4x^2(3+5x)$.

....

8.5 a) En notant f la fonction et en utilisant les dérivées des fonctions élémentaires, on a

$$f'(x) = \frac{1}{3}\times 3\mathrm{e}^{3x} + 2\times\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \mathrm{e}^{3x} - \frac{2}{x^2}.$$

....

8.5 b) En notant f la fonction et en utilisant les dérivées des fonctions élémentaires, on a

$$f'(x) = 3\times 2\mathrm{e}^{2x} - 4^4\times 4x^3 = 2\big(3\mathrm{e}^{2x} - 2\times 4^4x^3\big) = 2\big(3\mathrm{e}^{2x} - 2\times 2^8x^3\big) = 2\big(3\mathrm{e}^{2x} - 2^9x^3\big).$$

....

8.5 c) En notant f la fonction et en utilisant les dérivées des fonctions élémentaires, on a

$$f'(x) = \frac{3}{4}\mathrm{e}^{3x} + \frac{3}{10}\times\frac{1}{x} + 3\times\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\left(\frac{\mathrm{e}^{3x}}{2} + \frac{1}{5x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

....

8.5 d) En notant f la fonction et en utilisant les propriétés de la fonction exponentielle, on a

$$f(x) = \mathrm{e}^{10x} + \frac{2}{x} - 3^4x^4.$$

En utilisant les dérivées des fonctions élémentaires, on a

$$f'(x) = 10\mathrm{e}^{10x} - \frac{2}{x^2} - 3^4\times 4x^3 = 2\left(5\mathrm{e}^{10x} - \frac{1}{x^2} - 2\times 3^4x^3\right).$$

....

8.6 a) En notant f la fonction et en utilisant les dérivées des fonctions élémentaires, on a

$$f'(x) = 1\times\mathrm{e}^{2x} + (x+1)\times 2\mathrm{e}^{2x} = (1+2(x+1))\mathrm{e}^{2x} = (2x+3)\mathrm{e}^{2x}.$$

....

8.6 b) En notant f la fonction et en utilisant les dérivées des fonctions élémentaires, on a

$$f'(x) = 1\times\ln(x) + (x+1)\times\frac{1}{x} = \ln(x) + \frac{x+1}{x}.$$

....

8.6 c) En notant f la fonction et en utilisant les dérivées des fonctions élémentaires, on a

$$f'(x) = 2x\mathrm{e}^{3x} + (x^2+1) \times 3\mathrm{e}^{3x} = (2x + 3(x^2+1))\mathrm{e}^{3x} = (3x^2+2x+3)\mathrm{e}^{3x}.$$

8.7 a) En notant f la fonction et en utilisant les dérivées des fonctions élémentaires, on a

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x) - \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} = \frac{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x)}{(1+\mathrm{e}^x)^2} = \frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}.$$

8.7 b) En notant f la fonction, f est un quotient et sa dérivée vaut

$$f'(x) = \frac{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}) - (\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})}{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2} = \frac{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2 - (\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})^2}{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2} = \frac{4\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x}}{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2} = \frac{4}{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2}.$$

8.7 c) En notant f la fonction et en utilisant les règles habituelles sur la dérivation, on a

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(2x + 2(\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x) + 0)\big(1+x^2\big) - (x^2+2x\mathrm{e}^x+1)2x}{(1+x^2)^2} \\
&= \frac{(2x + 2(x+1)\mathrm{e}^x)(1+x^2) - 2x(x^2+2x\mathrm{e}^x+1)}{(1+x^2)^2} \\
&= 2\frac{x + (x+1)\mathrm{e}^x + x^3 + x^2(x+1)\mathrm{e}^x - x^3 - 2x^2\mathrm{e}^x - x}{(1+x^2)^2} \\
&= 2\frac{\mathrm{e}^x(x+1+x^3+x^2-2x^2)}{(1+x^2)^2} \\
&= 2\mathrm{e}^x\frac{x^3-x^2+x+1}{(1+x^2)^2}.
\end{aligned}$$

8.8 a) La dérivée de $x \longmapsto 3x+2$ est $x \longmapsto 3$ et la dérivée de $u \longmapsto u^2$ est $u \longmapsto 2u$. Ainsi, en notant f la fonction demandée, on a $f'(x) = 2 \times 3 \times (3x+2) = 6(3x+2)$.

8.8 b) En notant f la fonction demandée, on a $f'(x) = 5 \times \left(-\dfrac{1}{(5x+2)^2}\right) = -\dfrac{5}{(5x+2)^2}$.

8.8 c) En notant f la fonction demandée, on a $f'(x) = 12 \times \dfrac{1}{12x+3} = \dfrac{12}{3(4x+1)} = \dfrac{4}{4x+1}$.

8.9 a) Par composition, la dérivée de $x \longmapsto (3x+2)^2$ est $x \longmapsto 3 \times 2(3x+2)$. Par composition aussi, la dérivée de $x \longmapsto \mathrm{e}^{4x+5}$ est $x \longmapsto 4\mathrm{e}^{4x+5}$. En notant f la fonction, on a donc

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 6(3x+2)\mathrm{e}^{4x+5} + (3x+2)^2 \times 4 \times \mathrm{e}^{4x+5} \\
&= 2(3x+2)(3+2(3x+2))\mathrm{e}^{4x+5} \\
&= 2(3x+2)(6x+7)\mathrm{e}^{4x+5}.
\end{aligned}$$

8.9 b) Par composition, la dérivée de $x \longmapsto (x+\mathrm{e})^4$ est $x \longmapsto 4(x+\mathrm{e})^3$. Par composition aussi, la dérivée de $x \longmapsto (3x+2)^3$ est $x \longmapsto 3 \times 3(3x+2)^2$.

En notant f la fonction, on a donc $f'(x) = 4(x+\mathrm{e})^3 + 3 \times 9(3x+2)^2 = 4(x+\mathrm{e})^3 + 27(3x+2)^2$.

8.10 a) On pose $u(x) = x$ et $v(x) = \ln(1+x)$ et on utilise la formule donnant la dérivée d'un produit.

8.10 b) La fonction $g : x \longmapsto \dfrac{x}{1+x}$ est un quotient dont la dérivée vaut :

$$g'(x) = \frac{1 \times (x+1) - x \times 1}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}.$$

La fonction h, définie par l'expression $h(x) = \ln(1+x)$, est la composée entre la fonction logarithme et une fonction affine dont la dérivée vaut

$$h'(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Ainsi, la dérivée de la fonction f' vaut $f''(x) = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{(1+x)^2} = \dfrac{1+x+1}{(1+x)^2} = \dfrac{2+x}{(1+x)^2}$.

....

8.11 a) En notant f la fonction et en utilisant les règles habituelles sur la dérivation, on a

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

....

8.11 b) La fonction f' est un quotient de fonctions. Ainsi, on a

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \times x^2 - (1 - \ln(x)) \times 2x}{(x^2)^2} = \frac{-x - 2x(1 - \ln(x))}{x^4} = -x\frac{1 + 2 - 2\ln(x)}{x^4} = -\frac{3 - 2\ln(x)}{x^3}.$$

....

8.12 a) On a $f'(x) = 1 + 0 - \dfrac{1 \times \mathrm{e}^x - x \times \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2} = 1 - \dfrac{1-x}{\mathrm{e}^x} = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1 + x}{\mathrm{e}^x}$.

....

8.12 b) La fonction f' est un quotient de fonctions dérivables, donc

$$f''(x) = \frac{(\mathrm{e}^x - 0 + 1) \times \mathrm{e}^x - (\mathrm{e}^x - 1 + x) \times \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2} = \frac{\mathrm{e}^x + 1 - \mathrm{e}^x + 1 - x}{\mathrm{e}^x} = \frac{2-x}{\mathrm{e}^x}.$$

....

8.13 a) On dérive chacune des fonctions de la somme. On obtient ainsi $f'(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} kx^{k-1}$.

....

8.13 b) Le nombre $f(x)$ est la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $x \neq 1$. D'après le cours, on a donc

$$1 + x + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}.$$

....

8.13 c) En utilisant la formule précédente, on a, pour $x \neq 1$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-(n+1)x^{n+1-1}(1-x) - (-1) \times (1 - x^{n+1})}{(1-x)^2} = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + (1 - x^{n+1})}{(1-x)^2} \\ &= \frac{-(n+1)x^n + (n+1)x^{n+1} + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

....

8.14 f) On conjecture cette formule en généralisant les calculs précédents.

Plus formellement, cette propriété se démontrerait par récurrence sur n.

....

Fiche nº 9. Dérivée des fonctions composées

Réponses

9.1 a) .... $\boxed{6x^2 - 5x - 21}$

9.1 b) .... $\boxed{81x^2 - 126x + 49}$

9.1 c) .... $\boxed{x^3 - x^2 - 5x - 3}$

9.1 d) .... $\boxed{x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4}$

9.2 a) .... $\boxed{\dfrac{2}{(3-x)(x-1)}}$

9.2 b) .... $\boxed{\dfrac{2x^2 - 8x - 33}{(x-7)(x-4)}}$

9.2 c) .... $\boxed{\dfrac{2x^3 + 3x^2 + x - 4}{x^3(x-4)}}$

9.3 a) .... $\boxed{-6x^2\mathrm{e}^{1-x^3}}$

9.3 b) .... $\boxed{-\dfrac{2\mathrm{e}^{2x}}{(1+\mathrm{e}^{2x})^2}}$

9.3 c) .... $\boxed{\dfrac{\mathrm{e}^x}{2\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}}$

9.3 d) .... $\boxed{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}$

9.4 a) .... $\boxed{4(2x+\mathrm{e})(x^2+\mathrm{e}x)^3}$

9.4 b) .... $\boxed{(x-1)(x^2-2x+3)}$

9.4 c) .... $\boxed{3(8x+3)(4x^2+3x+5)^2}$

9.4 d) .... $\boxed{\dfrac{-2(6x-5)}{(3x^2-5x+7)^3}}$

9.5 a) .... $\boxed{\dfrac{3-4x}{2\sqrt{-2x^2+3x+5}}}$

9.5 b) .... $\boxed{\text{d}}$

9.6 a) .... $\boxed{-\dfrac{5}{4}}$

9.6 b) .... $\boxed{0}$

9.7 a) .... $\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$

9.7 b) .... $\boxed{y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}}$

9.8 a) .... $\boxed{\dfrac{(2x-1)\mathrm{e}^x}{2x\sqrt{x}}}$

9.8 b) .... $\boxed{\dfrac{(2x+1)(2x^2+2x+1)\mathrm{e}^{x^2+x+1}}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}}$

9.9 a) .... $\boxed{(6x^2+10x+3)\mathrm{e}^{x^2+3}}$

9.9 b) .... $\boxed{\dfrac{(2x-1)(x-1)}{\sqrt{1+x^2}}}$

9.10 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}x(\sqrt{x}+4)\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}$

9.10 b) .... $\boxed{\dfrac{(x-1)\exp\left(\frac{1}{x}\right)}{x}}$

9.11 .... $\boxed{(4x^2-20x+27)\mathrm{e}^{x^2-4x+7}}$

9.12 a) .... $\boxed{\dfrac{x(3x^3+3x+1)\mathrm{e}^{x^3}}{\sqrt{1+x^2}}}$

9.12 b) .... $\boxed{-\dfrac{3x(x^3-2x+2)\mathrm{e}^{5-x^3}}{(x^2-2)^4}}$

9.13 a) .... $\boxed{\dfrac{(x^2-2x-1)\sqrt{x-1}}{2(x-1)^2\sqrt{1+x^2}}}$

9.13 b) .... $\boxed{\dfrac{(5x^2+6x+3)\exp\big((x^2+2x+3)\sqrt{x}\big)}{2\sqrt{x}}}$

9.13 c) .... $\boxed{-\dfrac{44(2x+5)}{(4x-1)^3}}$

9.14 a) .... $\boxed{-\dfrac{x\exp(\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x^2}}}$

9.14 b) .... $\boxed{4(1+3x^2\exp(x^3))(x+\exp(x^3))^3}$

9.15 a) .... $\boxed{-2f + 2f^3}$

9.15 b) .... $\boxed{-2 + 8f^2 - 6f^4}$

9.15 c) .... $\boxed{16f - 40f^3 + 24f^5}$

9.16 a) .... $\boxed{2gg'}$

9.16 b) .... $\boxed{g' = \dfrac{a}{2}g - \dfrac{b}{2}}$

9.17 a) .... $\boxed{e^t f'(e^t)}$

9.17 b) .... $\boxed{e^t f'(e^t) + e^{2t} f''(e^t)}$

9.17 c) .... $\boxed{g'' - 4g' + 4g = 0}$

Corrigés

9.1 a) On a $(2x+3)(3x-7) = 2x \times 3x + 2x \times (-7) + 3 \times 3x + 3 \times (-7) = 6x^2 - 14x + 9x - 21 = 6x^2 - 5x - 21$.

9.1 b) On a $(9x-7)^2 = (9x)^2 - 2 \times 9x \times 7 + 7^2 = 81x^2 - 126x + 49$.

9.1 c) On a $(x+1)^2(x-3) = (x^2+2x+1)(x-3) = x^3 - 3x^2 + 2x^2 - 6x + x - 3 = x^3 - x^2 - 5x - 3$.

9.1 d) On a $(x^2+3x+2)^2 = x^4 + 2x^2(3x+2) + (3x+2)^2 = x^4 + 6x^3 + 4x^2 + 9x^2 + 12x + 4$.

9.2 a) On a $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{3-x} = \dfrac{3-x+x-1}{(x-1)(3-x)} = \dfrac{2}{(3-x)(x-1)}$.

9.2 b) On a $\dfrac{2x+3}{x-4} + \dfrac{3}{x-7} = \dfrac{(2x+3)(x-7)+3(x-4)}{(x-4)(x-7)} = \dfrac{2x^2-14x+3x-21+3x-12}{(x-4)(x-7)} = \dfrac{2x^2-8x-33}{(x-7)(x-4)}$.

9.2 c) On a $\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{2x+3}{x(x-4)} = \dfrac{x-4+(2x+3)x^2}{x^3(x-4)} = \dfrac{2x^3+3x^2+x-4}{x^3(x-4)}$.

9.3 a) On utilise le fait que $(e^u)' = u' \times e^u$.

9.3 b) On utilise le fait que $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$.

9.3 c) On utilise le fait que $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

9.3 d) On utilise aussi le fait que $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

9.4 a) On utilise le fait que $(u^4)' = 4u' \times u^3$.

9.4 b) On utilise le fait que $(u^2)' = 2uu'$.

9.4 c) On utilise le fait que $(u^3)' = 3u' \times u^2$.

9.4 d) On utilise le fait que $(u^{-2})' = -2u' \times u^{-3}$.

9.6 a) Pour tout réel $x \in \left[-3, -\frac{1}{2}\right]$, on a $f'(x) = \dfrac{3x^2+4x-4}{2\sqrt{x^3+2x^2-4x-1}}$. Ainsi, on a

$$f'(-1) = \frac{3\times(-1)^2+4\times(-1)-4}{2\sqrt{(-1)^3+2\times(-1)^2-4\times(-1)-1}} = \frac{3-4-4}{2\times\sqrt{-1+2+4-1}} = -\frac{5}{4}.$$

9.6 b) Pour tout réel $x \in \left[-3, -\frac{1}{2}\right]$, on a $f'(x) = \dfrac{3x^2+4x-4}{2\sqrt{x^3+2x^2-4x-1}}$. Ainsi, on a

$$f'(-2) = \frac{3\times(-2)^2+4\times(-2)-4}{2\sqrt{(-2)^3+2\times(-2)^2-4\times(-2)-1}} = \frac{12-8-4}{2\times\sqrt{-8+8+8-1}} = 0.$$

9.7 b) On a $g(1) = \mathrm{e}^0 = 1$. De plus, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $g'(x) = \left(1-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\mathrm{e}^{x-\sqrt{x}}$ et donc $g'(1) = \dfrac{1}{2}$.
L'équation de la tangente cherchée est donc $y = \dfrac{1}{2}(x-1)+1$ et donc $y = \dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$ sous forme réduite.

9.8 a) On a $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x\sqrt{x}-\mathrm{e}^x\times\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = \dfrac{\frac{\mathrm{e}^x\sqrt{x}\times2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}-\frac{\mathrm{e}^x}{2\sqrt{x}}}{x} = \dfrac{(2x-1)\mathrm{e}^x}{2x\sqrt{x}}$.

9.8 b) On remarque que, pour tout réel x, $g(x) = f(x^2+x+1)$ et donc $g'(x) = (2x+1)f'(x^2+x+1)$.
On utilise alors l'expression de f' trouvée lors de la question précédente.

9.9 a) On a $f'(x) = 3\mathrm{e}^{x^2+3}+(3x+5)\times2x\mathrm{e}^{x^2+3} = (6x^2+10x+3)\mathrm{e}^{x^2+3}$.

9.9 b) On a $f'(x) = \sqrt{1+x^2}+(x-3)\times\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{1+x^2+x(x-3)}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{2x^2-3x+1}{\sqrt{1+x^2}}$.
Par ailleurs, les racines de $2x^2-3x+1$ sont 1 et $\dfrac{1}{2}$. Ainsi, on a $2x^2-3x+1 = 2(x-1)\left(x-\dfrac{1}{2}\right) = (x-1)(2x-1)$ et $f'(x) = \dfrac{(2x-1)(x-1)}{\sqrt{1+x^2}}$.

9.10 a) On a $f'(x) = 2x\mathrm{e}^{\sqrt{x}}+x^2\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\sqrt{x}} = 2x\mathrm{e}^{\sqrt{x}}+\times\dfrac{x\sqrt{x}}{2}\mathrm{e}^{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2}x(\sqrt{x}+4)\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$.

9.10 b) On a $f'(x) = \exp\left(\dfrac{1}{x}\right)+x\times\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\exp\left(\dfrac{1}{x}\right) = \left(x-\dfrac{1}{x}\right)\exp\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{(x-1)\exp\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$.

9.11 Pour tout réel x, on a $f'(x) = (2x-5)\mathrm{e}^{x^2-5x+7}$ et

$$f''(x) = 2\mathrm{e}^{x^2-5x+7}+(2x-5)^2\mathrm{e}^{x^2-5x+7} = (4x^2-20x+27)\mathrm{e}^{x^2-5x+7}.$$

9.12 a) On a $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{e}^{x^3}+3x^2\sqrt{1+x^2}\mathrm{e}^{x^3} = \dfrac{x\mathrm{e}^{x^3}+3x^2(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{x(3x^3+3x+1)\mathrm{e}^{x^3}}{\sqrt{1+x^2}}$.

9.12 b) On a

$$f'(x) = \frac{-3x^2\mathrm{e}^{5-x^3}\times(x^2-2)^3-\mathrm{e}^{5-x^3}\times6x(x^2-2)^2}{(x^2-2)^6} = -\frac{3((x^2-2)x^2+2x)\mathrm{e}^{5-x^3}}{(x^2-2)^4} = -\frac{3x(x^3-2x+2)\mathrm{e}^{5-x^3}}{(x^2-2)^4}.$$

9.13 a) Pour tout $x > 1$, on pose $u(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$. On a $u'(x) = \dfrac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$. Donc,

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{(x^2-2x-1)\sqrt{x-1}}{2(x-1)^2\sqrt{x^2+1}}.$$

9.13 b) Pour tout $x > 0$, on pose $u(x) = (x^2+2x+3)\sqrt{x}$. On a $u'(x) = (2x+2)\sqrt{x} + \dfrac{x^2+2x+3}{2\sqrt{x}} = \dfrac{5x^2+6x+3}{2\sqrt{x}}$. Donc,

$$f'(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)} = \frac{(5x^2+6x+3)\exp\big((x^2+2x+3)\sqrt{x}\big)}{2\sqrt{x}}.$$

9.13 c) Pour tout $x \neq \dfrac{1}{4}$, on pose $u(x) = \dfrac{2x+5}{4x-1}$. On a $u'(x) = \dfrac{2(4x-1)-4(2x+5)}{(4x-1)^2} = -\dfrac{22}{(4x-1)^2}$. Donc,

$$f'(x) = 2u'(x)u(x) = 2 \times \left(-\frac{22}{(4x-1)^2}\right) \times \frac{2x+5}{4x-1} = -\frac{44(2x+5)}{(4x-1)^3}.$$

9.14 a) Pour tout $x \in \,]-1,1[$, on pose $u(x) = \sqrt{1-x^2}$. On a $u'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. Donc,

$$f'(x) = u'(x)\exp(u(x)) = -\frac{x\exp(\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x^2}}.$$

9.14 b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $u(x) = x + \exp(x^3)$. On a $u'(x) = 1 + 3x^2\exp(x^3)$. Donc,

$$f'(x) = 4u'(x)u(x)^3 = 4(1+3x^2\exp(x^3))(x+\exp(x^3))^3.$$

9.15 a) On a $f'' = (1-f^2)' = -2ff' = -2f(1-f^2) = -2f+2f^3$.

9.15 b) On a $f''' = (-2f+2f^3)' = -2f' + 6f'f^2 = -2(1-f^2) + 6(1-f^2)f^2 = -2+8f^2-6f^4$.

9.16 a) On a $g = \sqrt{f}$ et donc $f = g^2$. Ainsi, $f' = 2gg'$.

9.16 b) Puisque $f' = af - b\sqrt{f}$, alors $2gg' = ag^2 - bg$. f étant strictement positive, g l'est également, et on peut donc diviser cette égalité par g. On obtient alors $g' = \dfrac{a}{2}g - \dfrac{b}{2}$.

9.17 c) En posant $x = \mathrm{e}^t$, on a, pour tout réel t,

$$\mathrm{e}^{2t}f''(\mathrm{e}^{2t}) - 3\mathrm{e}^t f'(\mathrm{e}^t) + 4f(\mathrm{e}^t) = 0.$$

Comme, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $g(t) = f(\mathrm{e}^t)$, on en déduit, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g'(t) = \mathrm{e}^t f'(\mathrm{e}^t)$.
Soit $t \in \mathbb{R}$. On a donc $f'(\mathrm{e}^t) = \mathrm{e}^{-t}g'(t)$. De même, on a $f''(t) = \mathrm{e}^{-2t}g''(t) - \mathrm{e}^{-t}f'(\mathrm{e}^t) = \mathrm{e}^{-2t}(g''(t) - g'(t))$.
On a donc

$$\mathrm{e}^{2t} \times \mathrm{e}^{-2t}(g''(t) - g'(t)) - 3\mathrm{e}^t \times \mathrm{e}^{-t}g'(t) + 4g(t) = 0.$$

Autrement dit, on a $g''(t) - g'(t) - 3g'(t) + 4g(t) = 0$, et donc on a $g'' - 4g' + 4g = 0$.

Fiche nº 10. Convexité

Réponses

10.1 a) $\boxed{(3-2x)(9+2x)}$

10.1 b) $\boxed{(2x+1)(4x-6)}$

10.1 c) $\boxed{(2x-1)(3-8x)}$

10.1 d) $\boxed{-2x(x+\sqrt{3})}$

10.2 a) $\boxed{(x,y)=(2,-7)}$

10.2 b) $\boxed{(x,y)=(-3,1)}$

10.2 c) $\boxed{(x,y)=\left(\frac{-7}{3},\frac{1}{3}\right)}$

10.2 d) $\boxed{(x,y)=\left(10,-\frac{3}{4}\right)}$

10.3 $\boxed{\text{c}}$

10.4 $\boxed{\text{b}}$

10.5 a) $\boxed{\mathscr{C}_2}$

10.5 b) $\boxed{\mathscr{C}_1}$

10.5 c) $\boxed{\text{c}}$

10.6 a) $\boxed{\mathscr{C}_1}$

10.6 b) $\boxed{\mathscr{C}_2}$

10.6 c) $\boxed{\left[1,\frac{7}{2}\right]}$

10.6 d) $\boxed{\left[\frac{1}{2},1\right]}$

10.7 a) $\boxed{\text{Croissante sur } \mathbb{R}}$

10.7 b) $\boxed{\mathbb{R}}$

10.7 c) $\boxed{\text{Croissante sur } \mathbb{R}}$

10.7 d) $\boxed{\mathbb{R}}$

10.8 a) Décroissante sur $\left]-\infty,\frac{7}{2}\right]$ croissante sur $\left[\frac{7}{2},+\infty\right[$

10.8 b) $\boxed{\left[\frac{7}{2},+\infty\right[}$

10.8 c) Croissante sur $]-\infty,-3]$ décroissante sur $[-3,+\infty[$

10.8 d) $\boxed{]-\infty,-3]}$

10.9 a) $\boxed{e^x+e^{-x}}$

10.9 b) $\boxed{\mathbb{R}}$

10.9 c) $\boxed{e^x-e^{-x}}$

10.9 d) $\boxed{[0,+\infty[}$

10.10 a) $\boxed{6(1-6x^2)e^{-3x^2+2}}$

10.10 b) $\boxed{\left[\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right]}$

10.10 c) $\boxed{2\frac{3x^2-1}{(x^2+1)^3}}$

10.10 d) $\boxed{\left]-\infty,\frac{-1}{\sqrt{3}}\right[\text{ et } \left]\frac{1}{\sqrt{3}},+\infty\right[}$

10.11 a) $\boxed{2-\frac{1}{x}}$

10.11 b) $\boxed{\left[\frac{1}{2},+\infty\right[}$

10.11 c) $\boxed{\frac{2}{x^2}}$

10.11 d) $\boxed{]-\infty,0[\text{ et }]0,+\infty[}$

10.12 a) $\boxed{[-3,2]}$

10.12 b) $\boxed{[-6,-3] \text{ et } [2,4]}$

10.12 c) $\boxed{-3 \text{ et } 2}$

10.12 d) $\boxed{\text{c}}$

10.12 e) $\boxed{\text{b}}$

10.13 a) $\boxed{[-2,2]}$

10.13 b) .... $\boxed{[-5,-2] \text{ et } [2,5]}$

10.13 c) .... $\boxed{-2 \text{ et } 2}$

10.13 d) .... $\boxed{\text{d}}$

10.13 e) .... $\boxed{\text{c}}$

10.13 f) .... $\boxed{[-2,2]}$

10.14 a) .... $\boxed{\dfrac{x-1}{(x+2)^2}}$

10.14 b) .... $\boxed{\dfrac{4-x}{(x+2)^3}}$

10.14 c) .... $\boxed{]-2,4]}$

10.14 d) .... $\boxed{y=1-2x}$

10.14 e) .... $\boxed{\text{d}}$

10.14 f) .... $\boxed{\text{b}}$

10.15 a) .... $\boxed{f'(x)\mathrm{e}^{f(x)}}$

10.15 b) .... $\boxed{\big(f''(x)+f'(x)^2\big)\mathrm{e}^{f(x)}}$

10.15 c) .... $\boxed{\text{c}}$

Corrigés

10.1 a) On a

$$\begin{aligned}36-(2x+3)^2 &= 6^2-(2x+3)^2\\ &= (6-(2x+3))(6+(2x+3))\\ &= (6-2x-3)(6+2x+3) = (3-2x)(9+2x).\end{aligned}$$

10.1 b) On a

$$\begin{aligned}(2x+1)(2x-5)+4x^2-1 &= (2x+1)(2x-5)+((2x)^2-1)\\ &= (2x+1)(2x-5)+(2x-1)(2x+1)\\ &= (2x+1)(2x-5+2x-1) = (2x+1)(4x-6).\end{aligned}$$

10.1 c) On a

$$\begin{aligned}(4x-2)(2-3x)+1-4x^2 &= 2(2x-1)(2-3x)+1-(2x)^2\\ &= 2(2x-1)(2-3x)+(1-2x)(1+2x)\\ &= (2x-1)(4-6x-(1+2x))\\ &= (2x-1)(4-6x-1-2x) = (2x-1)(3-8x).\end{aligned}$$

10.1 d) On a

$$\begin{aligned}(3-x^2)-x^2-2\sqrt{3}x-3 &= (\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)-(x+\sqrt{3})^2\\ &= (x+\sqrt{3})\big(\sqrt{3}-x-(x+\sqrt{3})\big)\\ &= (x+\sqrt{3})(-2x) = -2x(x+\sqrt{3}).\end{aligned}$$

10.5 c) On utilise les variations de f'. D'après la courbe de f', on sait que f' est décroissante sur $\left[-5,-\dfrac{3}{2}\right]$ et croissante sur $\left[-\dfrac{3}{2},2\right]$.

10.6 c) On utilise le signe de f'' déterminé avec la courbe $\mathscr{C}_1$: la fonction f'' est positive sur $\left[1,\dfrac{7}{2}\right]$.

10.6 d) On utilise le signe de f'' déterminé avec la courbe $\mathscr{C}_1$: la fonction f'' est négative sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

10.7 a) On connaît les variations des fonctions de référence $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^3 \end{cases}$ et $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x \end{cases}$, toutes les deux croissantes sur $\mathbb{R}$. La fonction f' est donc croissante sur $\mathbb{R}$.

10.7 c) On connaît les variations des fonctions de référence $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2x \end{cases}$ et $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \mathrm{e}^x \end{cases}$, toutes les deux croissantes sur $\mathbb{R}$. La fonction composée f' est donc croissante sur $\mathbb{R}$.

10.8 a) On factorise $f'(x) = x(x-7)$, sous la forme $a(x-x_1)(x-x_2)$ avec $a > 0$. Alors, f' est décroissante sur $\left]-\infty, \frac{x_1+x_2}{2}\right] = \left]-\infty, \frac{7}{2}\right]$, puis croissante sur $\left[\frac{x_1+x_2}{2}, +\infty\right[= \left[\frac{7}{2}, +\infty\right[$.

10.8 c) On a $f'(x) = -4x^2 - 24x - 36$: on reconnaît une fonction polynomiale de degré 2, pour laquelle on a « $\frac{-b}{2a} = -3$ » et « $a < 0$ ». La fonction f' est donc croissante sur $]-\infty, -3]$ puis décroissante sur $[-3, +\infty[$.

10.9 a) On a $f'(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$, puis $f''(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$.

10.9 b) Soit x un réel. On a $\mathrm{e}^x > 0$ et $\mathrm{e}^{-x} > 0$, donc $f''(x) > 0$.

10.9 c) On a $f'(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$, puis $f''(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$.

10.9 d) On a les équivalences suivantes :

$$\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}^{-x} \iff \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{-x}} \geqslant 1 \iff \mathrm{e}^{2x} \geqslant 1 \iff 2x \geqslant \ln(1) \iff 2x \geqslant 0.$$

Donc f'' est positive sur $[0, +\infty[$ et négative sur $]-\infty, 0]$.

10.10 a) On a $f'(x) = -\mathrm{e}^{-3x^2+2}(-6x) = 6x\mathrm{e}^{-3x^2+2}$ et $f''(x) = 6\mathrm{e}^{-3x^2+2} + 6x(-6x)\mathrm{e}^{-3x^2+2} = 6(1-6x^2)\mathrm{e}^{-3x^2+2}$.

10.10 b) On a les équivalences suivantes

$$f''(x) \geqslant 0 \iff 6(1-6x^2)\mathrm{e}^{-3x^2+2} \geqslant 0 \iff 1 - 6x^2 \geqslant 0 \iff \frac{1}{6} \geqslant x^2 \iff \frac{1}{\sqrt{6}} \geqslant |x|.$$

Donc $f''(x) \geqslant 0$ si, et seulement si, $x \in \left[\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right]$.

10.10 c) On a $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} - 2$, puis

$$f''(x) = \frac{-2(x^2+1)^2 + 2x(x^2+1) \times 2 \times 2x}{(x^2+1)^4} - 0 = \frac{-2(x^2+1) + 8x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{6x^2 - 2}{(x^2+1)^3} = 2\frac{3x^2-1}{(x^2+1)^3}.$$

10.10 d) On a les équivalences suivantes

$$f''(x) \geqslant 0 \iff 2\frac{3x^2-1}{(x^2+1)^3} \geqslant 0 \iff 3x^2-1 \geqslant 0 \iff x^2 - \frac{1}{3} \geqslant 0 \iff \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \geqslant 0.$$

Donc $f''(x) \geqslant 0$ si, et seulement si, $x \in \left]-\infty, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right]$ ou $x \in \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right[$.

....

10.11 a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a $f'(x) = 2x - \ln(x) - \frac{x}{x} = 2x - \ln(x) - 1$, puis $f''(x) = 2 - \frac{1}{x} - 0 = 2 - \frac{1}{x}$.

....

10.11 b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a les équivalences suivantes

$$f''(x) \geqslant 0 \iff 2 - \frac{1}{x} \geqslant 0 \iff 2 \geqslant \frac{1}{x} \iff x \geqslant \frac{1}{2}.$$

....

10.11 c) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a $f'(x) = 3 - \frac{2x}{x^2} + 0 = 3 - \frac{2}{x}$. Puis $f''(x) = 0 + \frac{2}{x^2} = \frac{2}{x^2}$.

....

10.11 d) Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on a l'équivalence $f''(x) \geqslant 0 \iff \frac{2}{x^2} \geqslant 0$. Cette inégalité est vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, donc pour $x \in \left]-\infty, 0\right[$ et $x \in \left]0, +\infty\right[$.

....

10.12 a) La courbe $\mathscr{C}_{f'}$ indique que f' est croissante uniquement sur $[-3, 2]$. Donc f est convexe sur $[-3, 2]$.

....

10.12 b) La courbe $\mathscr{C}_{f'}$ indique que f' est décroissante uniquement sur $[-6, -3]$ et sur $[2, -4]$. Donc f est concave sur $[-6, -3]$ et $[2, 4]$.

....

10.12 d) On a f convexe sur $[-3, 2]$ donc $\mathscr{C}_f$ est au-dessus des tangentes pour les points d'abscisses appartenant à $[-3, 2]$. On a bien $0 \in [-3, 2]$, d'où la conclusion.

....

10.12 e) On a $-1 \in [-3, 2]$, $1 \in [-3, 2]$ et f convexe sur $[-3, 2]$. Donc, la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessous des sécantes pour les points d'abscisses appartenant à $[-1, 1]$.

....

10.13 a) D'après le tableau de variations de f', la fonction f' est croissante uniquement sur $[-2, 2]$, donc f est convexe sur $[-2, 2]$.

....

10.13 b) D'après le tableau de variations de f', f' est décroissante uniquement sur $[-5, -2]$ et sur $[2, 5]$, donc f est concave sur $[-5, -2]$ et $[2, 5]$.

....

10.14 a) On a $f'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{3}{(x+2)^2} = \frac{x+2-3}{(x+2)^2} = \frac{x-1}{(x+2)^2}$.

....

10.14 b) On a $f''(x) = \frac{(x+2)^2 - (x-1) \times 2(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{x+2-2(x-1)}{(x+2)^3} = \frac{x+2-2x+2}{(x+2)^3} = \frac{4-x}{(x+2)^3}$.

....

10.14 c) On a $f''(x) \geqslant 0 \iff \frac{4-x}{(x+2)^3} \geqslant 0$. On a $x \in \left]-2, +\infty\right[$, donc $x+2 > 0$ et $(x+2)^3 > 0$.

Finalement, on a les équivalences $\frac{4-x}{(x+2)^3} \geqslant 0 \iff 4 - x \geqslant 0 \iff x \leqslant 4$.

La fonction f est donc convexe sur $\left]-2, 4\right]$.

....

10.14 d) On a $f'(-1) = \dfrac{-1-1}{(-1+2)^2} = -2$ et $f(-1) = \ln(-1+2) + \dfrac{3}{-1+2} = 3$. L'équation réduite de T est donc

$$y = -2(x-(-1)) + 3 = -2x - 2 + 3 = -2x + 1.$$

....

10.14 e) On a f convexe sur $]-2, 4]$ et $-1 \in]-2, 4]$, donc $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de T sur $]-2, 4]$.

....

10.14 f) Soit $x \in]-2, 2]$. On a $x \in]-2, 4]$ et $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de T sur $]-2, 4]$. On a les équivalences suivantes :

$$f(x) \geqslant -2x + 1 \iff \ln(x+2) + \frac{3}{x+2} \geqslant -2x + 1 \iff \ln(x+2) \geqslant \frac{(-2x+1)(x+2) - 3}{x+2}.$$

On a $x \in]-2, 2]$ donc $x + 2 > 0$. On a donc les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\ln(x+2) \geqslant \frac{(-2x+1)(x+2) - 3}{x+2} &\iff (x+2)\ln(x+2) \geqslant (-2x+1)(x+2) - 3 \\
&\iff (x+2)\ln(x+2) \geqslant -2x^2 + x - 4x + 2 - 3 \\
&\iff (x+2)\ln(x+2) \geqslant -1 - 3x - 2x^2.
\end{aligned}$$

....

10.15 b) On a $g''(x) = f''(x)\mathrm{e}^{f(x)} + f'(x)\mathrm{e}^{f(x)} \times f'(x) = (f''(x) + f'(x)^2)\mathrm{e}^{f(x)}$.

....

10.15 c) Soit $x \in I$. On a $f''(x) \geqslant 0$ car f est convexe sur I.

Donc, on a $f''(x) + f'(x)^2 \geqslant 0$, et donc $(f''(x) + f'(x)^2)\mathrm{e}^{f(x)} \geqslant 0$. Donc $g''(x) \geqslant 0$ et g est convexe sur I.

....

Fiche n° 11. Primitives I

Réponses

11.1 a) $\boxed{-\dfrac{3}{10}}$

11.1 b) $\boxed{-\dfrac{25}{42}}$

11.1 c) $\boxed{\dfrac{7}{9}}$

11.1 d) $\boxed{-\dfrac{4}{3}}$

11.2 a) $\boxed{-3 \text{ et } 1}$

11.2 b) $\boxed{\dfrac{3}{2}}$

11.2 c) $\boxed{2-\sqrt{2} \text{ et } 2+\sqrt{2}}$

11.2 d) $\boxed{\dfrac{1}{2} \text{ et } \dfrac{3}{4}}$

11.3 a) $\boxed{x^3 - x + C}$

11.3 b) $\boxed{x^{-3} + x^{-4} + C}$

11.3 c) $\boxed{\dfrac{1}{8}x^4 - \dfrac{1}{2}x^6 + 2x + C}$

11.3 d) $\boxed{\dfrac{7}{3}\left(x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}\right) + C}$

11.4 a) $\boxed{\dfrac{-1}{2x^2} + C}$

11.4 b) $\boxed{2\sqrt{x} + 2x^2 + C}$

11.4 c) $\boxed{\dfrac{2}{3x^3} + C}$

11.4 d) $\boxed{5e^x - 6x + C}$

11.5 a) $\boxed{\dfrac{-2}{x-2} + C}$

11.5 b) $\boxed{\dfrac{-3}{2(2x-1)^2} + C}$

11.5 c) $\boxed{\dfrac{3}{4(4x+1)} + C}$

11.5 d) $\boxed{\dfrac{1}{(x-7)^9} + C}$

11.6 a) $\boxed{-\dfrac{7}{6}(x+3)^6 + C}$

11.6 b) $\boxed{\dfrac{1}{2}(3x-1)^4 - \dfrac{2}{x-2} + C}$

11.7 a) $\boxed{f(x)}$

11.7 b) $\boxed{-\dfrac{x}{(x^2-1)^2} + C}$

11.8 a) $\boxed{\dfrac{1}{2}e^{x^2} + C}$

11.8 b) $\boxed{\sqrt{2x+1} + C}$

11.8 c) $\boxed{\dfrac{1}{3}(x-1)^3 + C}$

11.8 d) $\boxed{\dfrac{1}{18}(3x-2)^6 + C}$

11.9 a) $\boxed{e^{x^2+x-3} + C}$

11.9 b) $\boxed{(x^3 - 2x + 1)^5 + C}$

11.9 c) $\boxed{\sqrt{x^2 + 4x - 5} + C}$

11.10 a) $\boxed{\dfrac{1}{6}e^{-3x^2+1} + x + C}$

11.10 b) $\boxed{(e^x + 1)^5 + C}$

11.10 c) $\boxed{\dfrac{-1}{e^x + 5} + C}$

11.10 d) $\boxed{\sqrt{e^x + x^2} + C}$

11.10 e) $\boxed{e^{\sqrt{x}} + C}$

11.10 f) $\boxed{\dfrac{1}{3}(e^{2x} + e^{-x})^3 + C}$

11.11 a) $\boxed{-8\sqrt{x+1} + C}$

11.11 b) $\boxed{2f(2x+1)}$

11.11 c) $\boxed{-4\sqrt{2x+2} + C}$

11.12 a) $\boxed{x \mapsto \dfrac{1}{6}e^{6x-10} + C}$

11.12 b) $\boxed{x \mapsto \dfrac{-3}{10(10x+1)} + C}$

11.12 c) $\boxed{x \mapsto \dfrac{-1}{24}(4x+5)^6 + C}$

11.12 d) $\boxed{x \mapsto \dfrac{1}{4(11-8x)} + C}$

11.13 a) $\boxed{2}$

11.13 b) $\boxed{f_{n-1}}$

11.13 c) $\boxed{f_{n+1}}$

11.14 a) $\boxed{g_{n-1}}$

11.14 b) $\boxed{g_{n+1}}$

Corrigés

11.1 a) On a $-\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{6} = -\dfrac{10}{30} + \dfrac{6}{30} - \dfrac{5}{30} = -\dfrac{9}{30} = -\dfrac{3}{10}$.

11.1 b) On a $\dfrac{\frac{1}{6} - 1}{2 - \frac{3}{5}} = \dfrac{\frac{1}{6} - \frac{6}{6}}{\frac{10}{5} - \frac{3}{5}} = \dfrac{\frac{-5}{6}}{\frac{7}{5}} = \dfrac{-5}{6} \times \dfrac{5}{7} = -\dfrac{25}{42}$.

11.1 c) On a $\dfrac{\sqrt{2}-\frac{1}{4\sqrt{2}}}{\sqrt{2}+\frac{1}{4\sqrt{2}}} = \dfrac{\frac{8}{4\sqrt{2}}-\frac{1}{4\sqrt{2}}}{\frac{8}{4\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{2}}} = \dfrac{\frac{7}{4\sqrt{2}}}{\frac{9}{4\sqrt{2}}} = \dfrac{7}{4\sqrt{2}} \times \dfrac{4\sqrt{2}}{9} = \dfrac{7}{9}$.

11.1 d) On a $\left(1-\dfrac{1}{3}\right)^2 - \left(1+\dfrac{1}{3}\right)^2 = \left(1-\dfrac{1}{3}-1-\dfrac{1}{3}\right)\left(1-\dfrac{1}{3}+1+\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{2}{3}\times 2 = -\dfrac{4}{3}$.

11.2 a) On calcule le discriminant de l'équation : il vaut $10^2 - 4\times 5\times(-15) = 400$. Les deux solutions de l'équation sont donc $\dfrac{-10-\sqrt{400}}{2\times 5} = \dfrac{-10-20}{10} = -3$ et $\dfrac{-10+\sqrt{400}}{2\times 5} = \dfrac{-10+20}{10} = 1$.

11.2 b) Cette équation est équivalente à $4x^2-12x+9=0$. On reconnaît une identité remarquable ; en factorisant, on obtient $(2x-3)^2=0$. On en déduit que $2x-3=0$ et enfin $x=\dfrac{3}{2}$.

11.2 c) On a les équivalences $(x-2)^2 = 2 \iff x-2=\sqrt{2}$ ou $x-2=-\sqrt{2} \iff x = 2-\sqrt{2}$ ou $x=2+\sqrt{2}$.

11.2 d) L'équation est équivalente à $(3x-2)^2-(1-x)^2=0$; en factorisant à l'aide de la troisième identité remarquable, on obtient l'équation équivalente $(4x-3)(2x-1)=0$, dont les solutions sont $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{3}{4}$.

11.3 a) L'expression d'une primitive de x^n est $\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$. Donc, une primitive de $3x^2$ est $3\times\dfrac{1}{3}x^3 = x^3$. L'expression d'une primitive de $3x^2-1$ est donc x^3-x+C où C désigne une constante réelle.

11.3 b) Comme précédemment l'expression d'une primitive de x^{-4} est $\dfrac{-1}{3}x^{-3}$ et on en déduit qu'une primitive de $-3x^{-4}$ est $-3\times\dfrac{-1}{3}x^{-3} = x^{-3}$. L'expression d'une primitive de $-3x^{-4}-4x^{-5}$ est donc $x^{-3}+x^{-4}+C$.

11.4 a) Puisque $\dfrac{1}{x^3} = x^{-3}$, on procède comme dans l'exercice précédent.

11.4 b) L'expression d'une primitive de $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ est $\sqrt{x}$ donc une primitive de $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est $2\sqrt{x}$.

11.4 c) On procède comme précédemment. L'expression d'une primitive de $\dfrac{-2}{x^4}$ est $\dfrac{2}{3x^3}+C$.

11.4 d) L'expression d'une primitive de e^x est e^x donc l'expression d'une primitive de $5\mathrm{e}^x-6$ est $5\mathrm{e}^x-6x+C$.

11.5 a) On reconnaît une expression de la forme $2\dfrac{u'}{u^2}$ où $u(x)=x-2$. Par conséquent, les primitives de $\dfrac{2}{(x-2)^2}$ sont les expressions $\dfrac{-2}{u(x)}+C$, c'est-à-dire $\dfrac{-2}{x-2}+C$.

11.5 b) On reconnaît une expression de la forme $\dfrac{u'}{u^n}$ où $u(x)=2x-1$.

11.6 a) On remarque que $\dfrac{7}{(-x-3)^{-5}} = 7(-x-3)^5$ et on reconnaît une expression de la forme $nu'u^n$ où $u(x)=-x-3$ et $n=6$. Ainsi, l'expression des primitives de $\dfrac{7}{(-x-3)^{-5}}$ est $-\dfrac{7}{6}(x+3)^6+C$.

11.7 a) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. En mettant ces deux fractions au même dénominateur, on obtient :

$$\frac{1}{2(x-1)^3} - \frac{1}{2(x+1)^3} = \frac{(x+1)^3 - (x-1)^3}{2\big((x+1)(x-1)\big)^3} = \frac{6x^2+2}{2(x^2-1)^3} \quad \text{en développant puis en réduisant au numérateur}$$
$$= \frac{3x^2+1}{(x^2-1)^3} = f(x).$$

11.7 b) Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{2(x-1)^3}$ est $x \mapsto \dfrac{-1}{4(x-1)^2}$; une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{2(x+1)^3}$ est $x \mapsto \dfrac{-1}{4(x+1)^2}$. Donc, les expressions des primitives de f sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ sont $\dfrac{-1}{4(x-1)^2} - \dfrac{-1}{4(x+1)^2} + C = -\dfrac{x}{(x^2-1)^2} + C$.

11.8 a) À un facteur près, on reconnaît une expression de la forme $u'\mathrm{e}^u$ où $u(x) = x^2$, dont une primitive est e^u.

11.8 b) On reconnaît une expression de la forme $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ où $u(x) = 2x+1$, dont une primitive est $\sqrt{u}$.

11.8 c) On reconnaît une expression de la forme $u'u^{n-1}$ où $u(x) = x-1$ et $n = 3$, dont une primitive est $\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$.

11.8 d) À un facteur près, on reconnaît une expression de la forme $nu'u^{n-1}$ où $u(x) = 3x-2$ et $n = 6$. Ainsi, les primitives cherchées sont de la forme $\dfrac{1}{18}(3x-2)^6 + C$.

11.9 a) On factorise l'expression $2x\mathrm{e}^{x^2+x-3} + \mathrm{e}^{x^2+x-3} = (2x+1)\mathrm{e}^{x^2+x-3}$. On reconnaît des expressions de la forme $u'\mathrm{e}^u$ où $u(x) = x^2+x-3$. Les primitives de $x \mapsto 2x\mathrm{e}^{x^2+x-3} + \mathrm{e}^{x^2+x-3}$ sont donc les $x \mapsto \mathrm{e}^{x^2+x-3} + C$.

11.9 b) On reconnaît une expression de la forme $nu'u^{n-1}$ où $u(x) = x^3 - 2x + 1$ et $n = 5$.

11.9 c) À un facteur près, on reconnaît une expression de la forme $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ où $u(x) = x^2 + 4x - 5$.

11.10 a) On reconnaît une expression de la forme $u'\mathrm{e}^u$ où $u(x) = -3x^2 + 1$.

11.10 b) On reconnaît une expression de la forme $nu'u^{n-1}$ où $u(x) = \mathrm{e}^x + 1$ et $n = 5$.

11.10 c) On reconnaît une expression de la forme $\dfrac{-u'}{u^2}$ où $u'(x) = \mathrm{e}^x + 5$.

11.10 d) On reconnaît une expression de la forme $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ où $u(x) = \mathrm{e}^x + x^2$.

11.10 e) On reconnaît une expression de la forme $u'\mathrm{e}^u$ où $u(x) = \sqrt{x}$.

11.10 f) On reconnaît une expression de la forme $nu'u^{n-1}$ où $u(x) = \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-x}$ et $n = 3$.

11.11 a) On reconnaît une expression de la forme $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ où $u(x) = x + 1$.

11.11 b) L'expression de la fonction dérivée de $x \mapsto F(2x+1)$ est $F'(2x+1) \times 2 = 2F'(2x+1)$. Or $F' = f$. On a donc $2F'(2x+1) = 2f(2x+1)$.

11.11 c) D'après ce qui précède, les primitives de $x \mapsto f(2x+1)$ sont donc les fonctions

$$\frac{1}{2}F(2x+1) = -4\sqrt{2x+1+1} + C = -4\sqrt{2x+2} + C.$$

11.12 a) On reconnaît une expression de la forme e^u où $u(x) = -2x$.

11.12 b) On reconnaît une expression de la forme $u(x)^n$ où $n = -2$.

11.12 c) On reconnaît une expression de la forme $nu'u^{n-1}$ où $u(x) = 4x+7$ et $n = 6$.

11.12 d) On reconnaît une expression de la forme $\dfrac{-u'}{u^2}$ où $u(x) = 2x - 1$.

11.13 b) On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = \dfrac{nx^{n-1}}{n!} = \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} = f_{n-1}(x)$.

11.13 c) D'après la question précédente, une expression des primitives de f_n est $f_{n+1} + C$ où $C \in \mathbb{R}$.

11.14 a) Soit un entier $n \geqslant 1$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g_n'(x) = \dfrac{n(x-a)^{n-1}}{n!} = \dfrac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} = g_{n-1}(x)$.

11.14 b) D'après la question précédente, une expression des primitives de g_n est $g_{n+1} + C$ où $C \in \mathbb{R}$.

Fiche n° 12. Primitives II

Réponses

12.1 a) .... $\boxed{\left]-\infty, \frac{7}{2}\right[}$

12.1 b) .... $\boxed{\left[\frac{3}{20}, +\infty\right[}$

12.1 c) .... $\boxed{\left]-\infty, \frac{5}{24}\right[}$

12.1 d) .... $\boxed{\left]-\infty, -\frac{21}{22}\right]}$

12.2 a) .... $\boxed{\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right]}$

12.2 b) .... $\boxed{\{3\}}$

12.2 c) .... $\boxed{\left]-\infty, \frac{1-\sqrt{6}}{5}\right[\cup \left]\frac{1+\sqrt{6}}{5}, \infty\right[}$

12.2 d) .... $\boxed{\left[\frac{1-\sqrt{29}}{14}, \frac{1+\sqrt{29}}{14}\right]}$

12.3 a) .... $\boxed{\ln(x) + C}$

12.3 b) .... $\boxed{\ln(-x) + C}$

12.3 c) .... $\boxed{\ln(|x|) + C}$

12.4 a) .... $\boxed{\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + C}$

12.4 b) .... $\boxed{-3e^x + \frac{1}{3}x^3 - x^2 + C}$

12.4 c) .... $\boxed{\frac{2}{5}x^5 - 4e^x - \frac{1}{x} + C}$

12.5 a) .... $\boxed{-\frac{1}{x}}$

12.5 b) .... $\boxed{-x^3 + \ln(|x|) + 2\sqrt{x} + C}$

12.5 c) .... $\boxed{3\ln(|x|) - \frac{1}{2x^2} + 6\sqrt{x} + C}$

12.5 d) .... $\boxed{\frac{1}{x^2} - \frac{2}{3x^3} + \frac{1}{2x^4} + 2\ln(|x|) + C}$

12.6 a) .... $\boxed{x^2 + x - 2}$

12.6 b) .... $\boxed{2\ln(|x|) + 3}$

12.6 c) .... $\boxed{3\ln(|x|) - 3\ln(2)}$

12.6 d) .... $\boxed{\frac{1}{3}x^3 - e^x + 3x + \frac{3}{2}}$

12.7 a) .... $\boxed{\exp(x) + C}$

12.7 b) .... $\boxed{\frac{1}{2}\exp(2x+3) + C}$

12.7 c) .... $\boxed{\frac{-1}{5}\exp(-5x+2) + C}$

12.7 d) .... $\boxed{2\exp\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\right) + C}$

12.7 e) .... $\boxed{-3\exp\left(\frac{-1}{3}x + 2\right) + C}$

12.8 a) .... $\boxed{\sqrt{x} + C}$

12.8 b) .... $\boxed{\frac{1}{3}\sqrt{3x+5} + C}$

12.8 c) .... $\boxed{\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{3}x - 4} + C}$

12.8 d) .... $\boxed{\frac{5}{6}\sqrt{\frac{6}{5}x - 3} + C}$

12.8 e) .... $\boxed{3\sqrt{\frac{2}{3}x} + C}$

12.9 a) .... $\boxed{\ln(|x|) + C}$

12.9 b) .... $\boxed{\ln(|x-3|) + C}$

12.9 c) .... $\boxed{\frac{1}{2}\ln(|2x+1|) + C}$

12.9 d) .... $\boxed{7\ln\left(\left|\frac{1}{7}x - 6\right|\right) + C}$

12.9 e) .... $\boxed{\frac{3}{2}\ln\left(\left|\frac{2}{3}x + 5\right|\right) + C}$

12.10 a) .... $\boxed{\exp(x^2) + C}$

12.10 b) .... $\boxed{\sqrt{x^2+3x+1} + C}$

12.11 a) .... $\boxed{(4x^2-2x-3)^6 + C}$

12.11 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{(-6x^2+x)^2} + C}$

12.11 c) .... $\boxed{\ln\big(|3x^2+5x-1|\big) + C}$

12.12 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\ln\big(|x^2+2x|\big) + C}$

12.12 b) .... $\boxed{\dfrac{2}{5}(\sqrt{x})^5 + C}$

12.12 c) .... $\boxed{2\exp(\sqrt{x}) + C}$

12.13 a) .... $\boxed{-\dfrac{1}{12}\dfrac{1}{(3x^2+3x-9)^4} + C}$

12.13 b) .... $\boxed{2\sqrt{\ln(x)} + C}$

12.13 c) .... $\boxed{\ln(|\ln(3x)|) + C}$

12.14 a) .... $\boxed{\exp(4x^2)}$

12.14 b) .... $\boxed{2\exp(4x^2)}$

12.14 c) .... $\boxed{x \longmapsto \varphi(x+1)}$

12.14 d) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{1}{3}\varphi(3x+1)}$

Corrigés

12.2 a) L'expression $6x^2+x-1$, qui est du second degré, est de discriminant $1^2-4\times 6\times(-1)=25$; elle possède deux racines : $\dfrac{-1-5}{12} = -\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{-1+5}{12} = \dfrac{1}{3}$. Le coefficient devant « x^2 » est positif ; ainsi, $6x^2+x-1$ est positif en dehors des racines et négatif à l'intérieur. Ainsi, l'ensemble des solutions est $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}\right]$.

12.2 b) On a l'équivalence suivante : $2x^2-12x+18 \leqslant 0 \iff x^2-6x+9 \leqslant 0$. Or, on a $x^2-6x+9=(x-3)^2$. Ainsi, l'inégalité $x^2-6x+9 \leqslant 0$ n'est vraie que pour $x=3$.

12.3 c) On utilise le fait que $|x| = x$ si $x > 0$ et $|x| = -x$ si $x < 0$.

12.4 a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, une primitive de $x \longmapsto x^n$ est $x \longmapsto \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$. On utilise également le fait qu'une primitive d'une somme est la somme des primitives de chacun des termes de la somme.

12.4 c) Pour tout $n \geqslant 2$, une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$ est $x \longmapsto \dfrac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$.

12.5 a) La dérivée de $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est $x \longmapsto -\dfrac{1}{x^2}$

12.5 b) Une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est $x \longmapsto 2\sqrt{x}$.

12.6 a) La fonction F est une primitive de f donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $F(x) = x^2+x+C$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. De plus, on a les équivalences suivantes : $F(1) = 0 \iff 1^2+1+C=0 \iff C=-2$. Donc, on a $F(x) = x^2+x-2$.

12.6 b) On applique la même méthode que précédemment.

12.7 b) La fonction f_1 est de la forme $x \longmapsto f(2x+3)$ donc ses primitives sont de la forme $x \longmapsto \frac{1}{2}F(2x+3)+C$, où F est une primitive de f. On utilise une des primitives trouvées précédemment, par exemple $F(x) = \exp(x)$.

12.8 e) La fonction f_4 est de la forme $x \longmapsto 2f\left(\frac{2}{3}x\right)$ donc ses primitives sont de la forme $x \longmapsto 2\times\frac{3}{2}F\left(\frac{2}{3}x\right)+C$, où F est une primitive de f.

12.10 a) La fonction f est de la forme $u'\exp(u)$ donc ses primitives sont de la forme $\exp(u) + C$.

12.10 b) La fonction f est de la forme $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ donc ses primitives sont de la forme $\sqrt{u} + C$.

12.11 a) La fonction f est de la forme $6u'u^5$ donc ses primitives sont de la forme $u^6 + C$.

12.11 b) La fonction f est de la forme $-2\frac{u'}{u^3}$ donc ses primitives sont de la forme $\frac{1}{u^2} + C$.

12.11 c) La fonction f est de la forme $\frac{u'}{u}$ donc ses primitives sont de la forme $\ln(|u|) + C$.

12.12 a) On procède comme dans l'exercice précédent. La fonction f est de la forme $\frac{1}{2}\frac{u'}{u}$.

12.12 b) La fonction f est de la forme $\frac{2}{5}5u'u^4$, où $u(x) = \sqrt{x}$.

12.12 c) La fonction f est de la forme $2u'\exp(u)$, où $u(x) = \sqrt{x}$.

12.13 a) On procède comme dans l'exercice précédent. La fonction f est de la forme $\frac{1}{3} \times \frac{-1}{4} \times (-4)u'u^{-5}$.

12.13 b) La fonction f est de la forme $2u'\frac{1}{2\sqrt{u}}$, où $u(x) = \ln(x)$.

12.13 c) La fonction f est de la forme $\frac{u'}{u}$, où $u(x) = \ln(3x)$; en effet, on a $u'(x) = \frac{3}{3x} = \frac{1}{x}$.

12.14 a) La fonction φ est une primitive de f donc $\varphi'(x) = f(x)$. Ainsi, $\varphi'(2x) = f(2x) = \exp((2x)^2) = \exp(4x^2)$.

12.14 b) On utilise le fait que la dérivée de la fonction φ est f.

12.14 c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\exp((x+1)^2) = f(x+1)$ et une primitive de $x \longmapsto f(x+1)$ est $x \longmapsto \varphi(x+1)$.

12.14 d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\exp((3x+1)^2) = f(3x+1) = \frac{1}{3}\times 3f(3x+1)$. Ainsi, une primitive de $x \longmapsto 3f(3x+1)$ est la fonction $x \longmapsto \varphi(3x+1)$.

Fiche n° 13. Primitives III

Réponses

13.1 a) .... $\boxed{3(x-2)(x-4)}$

13.1 b) .... $\boxed{2(x-2)(2x-7)}$

13.1 c) .... $\boxed{5(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x^2+1)}$

13.1 d) .... $\boxed{x(x-1)(x+2)}$

13.2 a) .... $\boxed{\cos(x)}$

13.2 b) .... $\boxed{-\cos^2(x)}$

13.2 c) .... $\boxed{-\cos^2(x)+2\cos(x)+1}$

13.2 d) .... $\boxed{\cos^4(x)-3\cos^2(x)-2\cos(x)+2}$

13.3 a) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{x^4}{4}+2x}$

13.3 b) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{1}{3}\ln|x|}$

13.3 c) .... $\boxed{x \longmapsto 2\sqrt{x}}$

13.3 d) .... $\boxed{x \longmapsto -\dfrac{1}{4x^4}}$

13.3 e) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{3}{2}x^{2/3}}$

13.3 f) .... $\boxed{x \longmapsto -\dfrac{\mathrm{e}^{-12x}}{12}}$

13.4 a) .... $\boxed{x \longmapsto \mathrm{e}^3 x}$

13.4 b) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{3}{5}\mathrm{e}^{5x}-\dfrac{x^3}{3}}$

13.4 c) .... $\boxed{x \longmapsto \frac{x^2}{2}+5x+\frac{4}{x}}$

13.4 d) .... $\boxed{x \longmapsto -\cos(2x)}$

13.4 e) .... $\boxed{x \longmapsto \sin(3x+5)}$

13.4 f) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{1}{5}\cos(2-5x)}$

13.5 a) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{(x^2+x)^6}{6}}$

13.5 b) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{(x^2+3x+12)^{11}}{11}}$

13.5 c) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{(x^3+3x+4)^2}{6}}$

13.5 d) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{-4/3}{(x^3+2)^2}}$

13.6 a) .... $\boxed{x \longmapsto -\dfrac{1}{2(1+\mathrm{e}^x)^2}}$

13.6 b) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{(\mathrm{e}^x+x)^{23}}{23}}$

13.6 c) .... $\boxed{x \longmapsto -\dfrac{1}{6}(1-2x^2)^{3/2}}$

13.6 d) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{(\ln(x))^2}{2}}$

13.7 a) .... $\boxed{x \longmapsto -\dfrac{1}{2}\cos^2(x)}$

13.7 b) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{1}{6}\sin^6(x)}$

13.7 c) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{1}{18}(3\sin(x)+2)^6}$

13.7 d) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{1}{\cos(x)+3}}$

13.8 a) .... $\boxed{x \longmapsto \ln\sqrt{|2x-3|}}$

13.8 b) .... $\boxed{x \longmapsto \ln\left|x^4+x^3\right|}$

13.8 c) .... $\boxed{x \longmapsto \ln\left|x^3+2x^2+1\right|}$

13.8 d) .... $\boxed{x \longmapsto \ln\left|x^5+x^3+x+2\right|}$

13.8 e) .... $\boxed{x \longmapsto \ln|\mathrm{e}^x+x|}$

13.8 f) .... $\boxed{x \longmapsto \ln\left(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\right)}$

13.9 a) .... $\boxed{x \longmapsto \ln\left|\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}\right|}$

13.9 b) .... $\boxed{x \longmapsto \ln|\sin(x)|}$

13.9 c) .... $\boxed{x \longmapsto -\ln|\cos(x)|}$

13.9 d) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{1}{3}\ln\left|\sin^3(x)+5\right|}$

13.10 a) .... $\boxed{x \longmapsto x\mathrm{e}^{x^3}}$

13.10 b) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{x^3+\frac{3}{2}x^2+15x-12}}$

13.10 c) .... $\boxed{x \longmapsto \mathrm{e}^{-\cos(x)+3}}$

13.10 d) .... $\boxed{x \longmapsto \exp(\mathrm{e}^x)}$

13.11 a) .... $\boxed{t \longmapsto \ln|1+t|}$

13.11 b) .... $\boxed{\dfrac{t}{1+t}}$

13.11 c) .... $\boxed{t \longmapsto t-\ln|1+t|}$

13.12 a) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x^2)}{2}}$

13.12 b) .... $\boxed{x}$

13.12 c) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{\ln(1+x^2)}{2}}$

13.13 a) .... $\boxed{\dfrac{6}{9-x^2}}$

13.13 b) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{1}{6}\ln\left|\frac{3+x}{3-x}\right|}$

13.13 c) .... $\boxed{\dfrac{2a}{a^2-x^2}}$

13.13 d) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right|}$

13.13 e) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{1}{40}\ln\left|\dfrac{5+4x}{5-4x}\right|}$

13.14 a) .... $\boxed{x \longmapsto x+\ln|x+1|}$

13.14 b) .... $\boxed{x \longmapsto x+\dfrac{1}{x+1}}$

13.15 a) .... $\boxed{\dfrac{4}{4-\cos^2(x)}}$

13.15 b) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{2-\cos x}{2+\cos x}}$

13.16 a) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{3}{1+9x^2}}$

13.16 b) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{1}{2x^2-6x+5}}$

13.16 c) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{3x^2}{1+x^6}}$

13.16 d) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{2\psi(x)}{1+x^2}}$

13.17 a) .... $\boxed{x \longmapsto \psi(\sqrt{3}x)}$

13.17 b) .... $\boxed{x \longmapsto \frac{1}{3}\psi\left(\frac{x}{3}\right)}$

13.18 a) .... $\boxed{(x+5)^2+1}$

13.18 b) .... $\boxed{x \longmapsto \psi(x+5)}$

13.19 a) .... $\boxed{\dfrac{2x-7}{x^2+9}}$

13.19 b) .... $\boxed{x \longmapsto \ln(x^2+9)-\dfrac{7}{3}\psi\left(\dfrac{x}{3}\right)}$

13.20 a) .... $\boxed{x \longmapsto \psi(3x-2)}$

13.20 b) .... $\boxed{x \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{3}}\psi\left(\frac{x^2}{\sqrt{3}}\right)}$

13.21 a) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{3}{\sqrt{1-9x^2}}}$

13.21 b) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{-x^2+3x-2}}}$

13.21 c) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}}$

13.21 d) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{6x^2\varphi(x^3)}{\sqrt{1-x^6}}}$

13.22 a) .... $\boxed{x \longmapsto \varphi(5x)}$

13.22 b) .... $\boxed{x \longmapsto \frac{1}{4}\varphi\left(\frac{4x}{5}\right)}$

13.22 c) .... $\boxed{x \longmapsto \varphi(x+4)}$

13.22 d) .... $\boxed{x \longmapsto \frac{1}{3}\varphi(x^3)}$

Corrigés

13.4 a) La fonction est constante !

13.5 a) On reconnaît une forme $x \longmapsto u'(x)u(x)^5$, où $u : x \longmapsto x^2 + x$.

13.5 b) On reconnaît une forme $x \longmapsto u'(x)u(x)^{10}$, où $u : x \longmapsto x^2 + 3x + 12$.

13.5 c) On reconnaît une forme $x \longmapsto \dfrac{1}{3}u'(x)u(x)$, où $u : x \longmapsto x^3 + 3x + 4$.

13.5 d) On reconnaît une forme $x \longmapsto \dfrac{8}{3}u'(x)u(x)^{-3}$, où $u : x \longmapsto x^3 + 2$.

13.6 a) On reconnaît une forme $x \longmapsto u'(x)u(x)^{-3}$, où $u : x \longmapsto \mathrm{e}^x + 1$.

13.6 b) On reconnaît une forme $x \longmapsto u'(x)u(x)^{22}$, où $u : x \longmapsto \mathrm{e}^x + x$.

13.6 c) On reconnaît une forme $x \longmapsto \dfrac{-1}{4}u'(x)u(x)^{1/2}$, où $u : x \longmapsto 1 - 2x^2$.

13.6 d) On reconnaît une forme $x \longmapsto u'(x)u(x)$, où $u : x \longmapsto \ln(x)$.

13.7 a) On reconnaît une forme $x \longmapsto u'(x)u(x)$, où $u : x \longmapsto \cos(x)$.

13.7 b) On reconnaît une forme $x \longmapsto u'(x)u(x)^5$, où $u : x \longmapsto \sin(x)$.

13.7 c) On reconnaît une forme $x \longmapsto \dfrac{1}{3}u'(x)u(x)^5$, où $u : x \longmapsto 3\sin(x) + 2$.

13.7 d) On reconnaît une forme $x \longmapsto u'(x)u(x)^{-2}$, où $u : x \longmapsto \cos(x) + 3$.

13.8 b) On reconnaît une forme $x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$, où $u : x \longmapsto x^4 + x^3$.

13.8 c) On reconnaît une forme $x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$, où $u : x \longmapsto x^3 + 2x^2 + 1$.

13.8 d) On reconnaît une forme $x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$, où $u : x \longmapsto x^5 + x^3 + x + 12$.

13.8 e) On reconnaît une forme $x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$, où $u : x \longmapsto \mathrm{e}^x + x$.

13.8 f) On reconnaît une forme $x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$, où $u : x \longmapsto \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$. Les valeurs absolues n'ont pas été utilisées ici car la somme de deux exponentielles est une quantité toujours positive.

13.9 a) On reconnaît une forme $x \longmapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$, où $u : x \longmapsto \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$.

13.9 b) On reconnaît une forme $x \longmapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$, où $u : x \longmapsto \sin(x)$.

13.9 c) On reconnaît une forme $x \longmapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$, où $u : x \longmapsto \cos(x)$.

13.9 d) On reconnaît une forme $x \longmapsto \frac{1}{3}\frac{u'(x)}{u(x)}$, où $u : x \longmapsto \sin^3(x) + 5$.

13.10 a) On reconnaît une forme $x \longmapsto u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$, où $u : x \longmapsto x^3 + \ln(x)$. On remarque que $\mathrm{e}^{x^3+\ln(x)} = x\mathrm{e}^{x^3}$.

13.10 b) On reconnaît une forme $x \longmapsto \frac{1}{3}u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$, où $u : x \longmapsto x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 15x - 12$.

13.10 c) On reconnaît une forme $x \longmapsto u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$, où $u : x \longmapsto -\cos(x) + 3$.

13.10 d) On reconnaît une forme $x \longmapsto u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$, où $u : x \longmapsto \mathrm{e}^x$.

13.11 a) On reconnaît une forme $x \longmapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$, où $u : x \longmapsto 1 + x$.

13.11 c) On décompose $\frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}$, puis on additionne des primitives de chacun de ces termes.

13.12 a) On reconnaît une forme $x \longmapsto \frac{1}{2}\frac{u'(x)}{u(x)}$, où $u : x \longmapsto 1 + x^2$. Les valeurs absolues n'ont pas été utilisées car $1 + x^2$ est une quantité toujours positive.

13.12 c) On décompose $\frac{x^3}{1+x^2} = x - \frac{x}{1+x^2}$ puis on additionne des primitives de chacun de ces termes.

13.13 b) On décompose $\frac{1}{9-x^2} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3-x} + \frac{1}{3+x}\right)$ puis on additionne des primitives de chacun de ces termes.

13.13 d) On décompose $\frac{1}{a-x^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a-x} + \frac{1}{a+x}\right)$ puis on additionne des primitives de chacun de ces termes.

13.13 e) On écrit $\frac{1}{25-16x^2} = \frac{1}{16} \times \frac{1}{(5/4)^2 - x^2}$, puis on utilise la question précédente pour calculer une primitive de la fonction.

13.14 a) On décompose $\frac{x+2}{x+1} = \frac{x+1+1}{x+1} = 1 + \frac{1}{x+1}$ puis on primitive chacun des termes.

13.14 b) On décompose $\frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2-1}{(x+1)^2} = 1 - \frac{1}{(x+1)^2}$ puis on primitive chacun des termes.

13.15 b) On décompose

$$\frac{\sin(x)}{3+\sin^2(x)} = \frac{\sin(x)}{4-\cos^2(x)} = \frac{1}{4}\left[\frac{\sin(x)}{2+\cos(x)} + \frac{\sin(x)}{2-\cos(x)}\right],$$

puis on additionne des primitives de chacun des termes.

Comme $\cos(x) \in [-1,1]$, les quantités $2+\cos(x)$ et $2-\cos(x)$ sont positives donc on n'a pas utilisé les valeurs absolues.

....

13.16 a) On utilise la dérivée d'une fonction composée.

....

13.16 b) On utilise la dérivée d'une fonction composée pour obtenir

$$2\psi(2x-3) = 2\frac{1}{1+(2x-3)^2} = \frac{2}{4x^2-12x+10} = \frac{1}{2x^2-6x+5}.$$

....

13.16 c) On utilise la dérivée d'une fonction composée pour obtenir

$$3x^2\psi'(x^3) = 3x^2\frac{1}{1+(x^3)^2} = \frac{3x^2}{1+x^6}.$$

....

13.16 d) On utilise la dérivée d'une puissance :

$$2\psi'(x)\psi(x) = 2\times\frac{1}{1+x^2}\times\psi(x).$$

....

13.17 a) On reconnaît une expression de la forme $x \longmapsto u'(x)\psi'(u(x))$ avec $u : x \longmapsto \sqrt{3}x$.

....

13.17 b) On transforme l'expression pour reconnaître une fonction de la forme $x \longmapsto u'(x)\psi'(u(x))$:

$$\frac{1}{9+x^2} = \frac{1/9}{1+\frac{x^2}{9}} = \frac{1}{3}\frac{1/3}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}.$$

....

13.18 a) On a $x^2+10x+26 = (x+5)^2-25+26 = 1+(x+5)^2$.

....

13.18 b) On reconnaît une fonction de la forme $x \longmapsto u'(x)\psi'(u(x))$:

$$\frac{1}{x^2+10x+26} = \frac{1}{1+(x+5)^2}.$$

....

13.19 b) Comme la dérivée de $x \longmapsto x^2+9$ est $x \longmapsto 2x$, alors une primitive de $x \longmapsto \dfrac{2x}{x^2+9}$ est $x \longmapsto \ln(x^2+9)$.

Comme $\dfrac{7}{x^2+9} = \dfrac{\frac{7}{9}}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} = \dfrac{7}{3}\times\dfrac{\frac{1}{3}}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}$, une primitive de $x \longmapsto \dfrac{7}{x^2+9}$ est $x \longmapsto \dfrac{1}{3}\psi\left(\dfrac{x}{3}\right)$.

On conclut en remarquant que la primitive d'une somme est égale à la somme des primitives et en remarquant que

$$\frac{2x-7}{x^2+9} = \frac{2x}{x^2+9} - \frac{7}{x^2+9}.$$

....

13.20 a) On commence par utiliser la technique de mise sous forme canonique des trinômes :

$$9x^2 - 12x + 5 = (3x-2)^2 - 4 + 5 = 1 + (3x-2)^2.$$

On reconnaît alors une fonction de la forme $x \longmapsto u'(x)\psi'\big(u(x)\big)$:

$$\frac{3}{9x^2 - 12x + 5} = \frac{3}{1 + (3x-2)^2}.$$

....

13.20 b) On transforme l'expression pour reconnaître une fonction de la forme $x \longmapsto u'(x)\psi'\big(u(x)\big)$:

$$\frac{x}{3 + x^4} = \frac{x/3}{1 + \frac{(x^2)^2}{3}} = \frac{x/3}{1 + \left(\frac{x^2}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{\frac{2x}{\sqrt{3}}}{1 + \left(\frac{x^2}{\sqrt{3}}\right)^2}.$$

....

13.21 b) On utilise la dérivée d'une fonction composée pour obtenir

$$2\varphi'(2x-3) = 2\frac{1}{\sqrt{1-(2x-3)^2}} = \frac{2}{\sqrt{-4x^2+12x-8}} = \frac{1}{\sqrt{-x^2+3x-2}}.$$

....

13.21 c) On utilise la dérivée d'une fonction composée pour obtenir

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}\varphi'(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}.$$

....

13.21 d) On utilise la dérivée d'une fonction composée :

$$2\big(3x^2\big)\varphi'(x^3)\varphi(x^3) = 6x^2 \times \frac{1}{\sqrt{1-(x^3)^2}}\varphi(x).$$

....

13.22 a) On reconnaît une expression de la forme $x \longmapsto u'(x)\varphi'(u(x))$ où $u : x \longmapsto 5x$.

....

13.22 b) On commence par transformer l'expression pour reconnaître la forme $x \longmapsto u'(x)\varphi'(u(x))$. On écrit

$$\frac{1}{\sqrt{25-16x^2}} = \frac{1/5}{\sqrt{1-\frac{16}{25}x^2}} = \frac{1}{4} \times \frac{4/5}{\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}x\right)^2}}.$$

....

13.22 c) On utilise la méthode de mise sous forme canonique des trinômes et on écrit

$$-x^2 - 8x - 15 = -(x^2 + 8x + 15) = -\big[(x+4)^2 - 16 + 15\big] = 1 - (x+4)^2.$$

On reconnaît ainsi une expression de la forme $x \longmapsto u'(x)\varphi'(u(x))$, à savoir :

$$\frac{1}{\sqrt{-x^2-8x-15}} = \frac{1}{\sqrt{1-(x+4)^2}}.$$

....

13.22 d) On transforme l'expression pour reconnaître une fonction de la forme $x \longmapsto u'(x)\varphi'(u(x))$. Dans ce cas, la fonction $u : x \longmapsto x^3$ convient et on peut écrire :

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}} = \frac{1}{3} \times \frac{3x^2}{\sqrt{1-(x^3)^2}}.$$

....

Fiche n° 14. Équations différentielles I

Réponses

14.1 a) .... $\boxed{e^{\frac{1}{3}}}$

14.1 b) .... $\boxed{e^{-\frac{17}{20}}}$

14.1 c) .... $\boxed{e^{\frac{\pi}{6}}}$

14.1 d) .... $\boxed{e^{6}}$

14.2 a) .... $\boxed{\frac{2}{7}}$

14.2 b) .... $\boxed{-2}$

14.2 c) .... $\boxed{-\frac{18}{13}}$

14.2 d) .... $\boxed{\frac{25}{23}}$

14.3 a) .... $\boxed{x \longmapsto Ce^{2x}}$

14.3 b) .... $\boxed{x \longmapsto Ce^{-7x}}$

14.3 c) .... $\boxed{x \longmapsto Ce^{3x/2}}$

14.3 d) .... $\boxed{x \longmapsto Ce^{-5x/7}}$

14.4 a) .... $\boxed{x \longmapsto 5e^{-11x}}$

14.4 b) .... $\boxed{x \longmapsto \pi e^{-5x}}$

14.5 a) .... $\boxed{x \longmapsto e^{\frac{1}{3}-\frac{4}{9}x}}$

14.5 b) .... $\boxed{x \longmapsto e^{2-\sqrt{2}x}}$

14.6 a) .... $\boxed{x \longmapsto 3}$

14.6 b) .... $\boxed{x \longmapsto Ce^{x}}$

14.6 c) .... $\boxed{x \longmapsto ke^{x}+3}$

14.7 a) .... $\boxed{x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{6}}}$

14.7 b) .... $\boxed{x \longmapsto Ce^{\sqrt{3}x}}$

14.7 c) ... $\boxed{x \longmapsto Ce^{\sqrt{3}x}+\frac{1}{\sqrt{6}}}$

14.8 .... $\boxed{x \longmapsto ke^{5x}-\frac{7}{9}}$

14.9 .. $\boxed{x \mapsto -\frac{122}{25}e^{\frac{7x-14}{3}}-\frac{3}{25}}$

14.10 $\boxed{x \mapsto \frac{4}{3(e^{4/3}-e^{-4/3})}e^{4x/3}}$

14.11 .... $\boxed{x \longmapsto 2e^{-x}}$

Corrigés

14.1 a) On a $e^{\frac{3}{2}} \times e^{-\frac{7}{6}} = e^{\frac{3}{2}-\frac{7}{6}} = e^{\frac{9-7}{6}} = e^{\frac{2}{6}} = e^{\frac{1}{3}}$.

....

14.1 b) On a $\left(e^{-\frac{3}{4}}\right)^3 \times \left(e^{\frac{7}{25}}\right)^5 = e^{-\frac{9}{4}} \times e^{\frac{7}{5}} = e^{-\frac{9}{4}+\frac{7}{5}} = e^{\frac{-45+28}{20}} = e^{-\frac{17}{20}}$.

....

14.1 c) On a $e^{\frac{\pi}{2}} \times e^{-\frac{\pi}{3}} = e^{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}} = e^{\frac{3\pi-2\pi}{6}} = e^{\frac{\pi}{6}}$.

....

14.1 d) On a $\dfrac{e^{3x+7} \times e^{2x+1}}{(e^{x+2/5})^5} = \dfrac{e^{5x+8}}{e^{5x+2}} = e^{5x+8-5x-2} = e^{6}$.

....

14.2 b) Soit $x \in \mathbb{R}$ différent de 0 et de -1. On a les équivalences suivantes (en multipliant par $x(x+1)$) :

$$\frac{1}{x+1} = \frac{2}{x} \iff x = 2(x+1) \iff x = -2.$$

....

14.3 a) D'après le cours, les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions du type $x \longmapsto Ce^{ax}$, où C parcourt $\mathbb{R}$. Ici, comme a vaut 2, on trouve que les solutions sont les fonctions $x \longmapsto Ce^{2x}$.

....

14.4 a) D'après le cours, les solutions de l'équation $y' = -11y$ sont les fonctions du type $x \longmapsto Ce^{-11x}$, où C parcourt $\mathbb{R}$. La condition $f(0) = 5$ impose que $Ce^{-11\times 0} = 5$ et donc que $C = 5$.

....

14.4 b) L'équation différentielle donnée est équivalente à l'équation $y' = -5y$ dont les solutions sont les fonctions $x \longmapsto Ce^{-5x}$, où $C \in \mathbb{R}$. La condition $f(0) = \pi$ impose que $Ce^{-5\times 0} = \pi$ et donc que $C = \pi$.

14.5 a) L'équation différentielle donnée est équivalente à l'équation $y' = -\frac{4}{9}y$ dont les solutions sont les fonctions $x \longmapsto C\mathrm{e}^{-\frac{4}{9}x}$, où C parcourt $\mathbb{R}$. Comme $f(3) = \mathrm{e}^{-1}$, on a $C\mathrm{e}^{-\frac{4}{9}\times 3} = \mathrm{e}^{-1}$ et donc $C = \mathrm{e}^{-1} \times \mathrm{e}^{\frac{4}{3}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$.

14.5 b) L'équation différentielle donnée est équivalente à l'équation $y' = -\sqrt{2}y$ dont les solutions sont les fonctions $x \longmapsto C\mathrm{e}^{-\sqrt{2}x}$, où C parcourt $\mathbb{R}$. Comme $f(\sqrt{2}) = 1$, on a $C\mathrm{e}^{-\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = 1$ et donc $C = \mathrm{e}^{2}$.

14.6 a) Si f est une solution constante de l'équation différentielle (E), alors f' est nulle. La fonction f vérifie donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 = f(x) - 3$ et donc $f(x) = 3$.

14.6 c) D'après le cours, les solutions de (E) s'obtiennent en ajoutant la solution constante avec la solution générale de l'équation homogène associée à (E).

14.7 a)

Première solution.
Si f est une solution constante de l'équation différentielle (E), alors f' est nulle.
La fonction f vérifie donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 = \sqrt{6}f(x) - 1$ et donc $f(x) = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

Deuxième solution.
En général, on peut remarquer qu'une solution constante de l'équation différentielle $ay' = by + c$ est la fonction $x \longmapsto -\frac{c}{b}$. Ici, comme $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{6}$ et $c = -1$, on trouve qu'une solution constante de l'équation est $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{6}}$.

14.8 L'équation donnée est équivalente à $y' = 5y + \frac{35}{9}$. L'équation sans terme constant associée est $y' = 5y$ dont les solutions sont les fonctions $x \longmapsto C\mathrm{e}^{5x}$, où C parcourt $\mathbb{R}$.

On leur ajoute la solution particulière constante $x \longmapsto -\frac{7}{9}$.

14.9 Pour commencer, on trouve que les solutions de cette équation sont les fonctions $x \longmapsto C\mathrm{e}^{\frac{7}{3}x} - \frac{3}{25}$, où C parcourt $\mathbb{R}$. Comme $f(2) = -5$, on a $C\mathrm{e}^{\frac{14}{3}} = \frac{3}{25} - 5 = -\frac{122}{25}$ donc $C = -\frac{122}{25}\mathrm{e}^{-\frac{14}{3}}$.

14.10 Soit f une solution du problème posé. Fixons $C \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = C\mathrm{e}^{\frac{4}{3}x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On a alors $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = C\left[\frac{3}{4}\mathrm{e}^{\frac{4}{3}x}\right]_{-1}^{1} = \frac{3}{4}C\left(\mathrm{e}^{\frac{4}{3}} - \mathrm{e}^{-\frac{4}{3}}\right)$. Comme $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$, on a $C\left(\mathrm{e}^{\frac{4}{3}} - \mathrm{e}^{-\frac{4}{3}}\right) = \frac{4}{3}$ et donc

$$C = \frac{4}{3(\mathrm{e}^{4/3} - \mathrm{e}^{-4/3})}.$$

14.11 On pose $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. La fonction g est la primitive de f qui s'annule en 0 et l'on a : $g' = f$.

Ainsi, g est solution de l'équation différentielle $y' + y = 2$. Fixons donc $C \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = C\mathrm{e}^{-x} + 2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Comme $g(0) = 0$, on a $C = -2$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g(x) = -2\mathrm{e}^{-x} + 2$ et $f(x) = g'(x) = 2\mathrm{e}^{-x}$.

Fiche n° 15. Équations différentielles II

Réponses

15.1 a) ...... $\boxed{2+3x-6x^2+x^3}$

15.1 b) ...... $\boxed{6-5x-2x^2+x^3}$

15.1 c) ...... $\boxed{3-x-8x^2-4x^3}$

15.1 d) ...... $\boxed{-1+x^4}$

15.2 a) ...... $\boxed{4\sqrt{5}-9}$

15.2 b) ...... $\boxed{14-5\sqrt{3}}$

15.2 c) ...... $\boxed{\dfrac{23}{22}-\dfrac{\sqrt{7}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{11}}$

15.2 d) ...... $\boxed{-\dfrac{\sqrt{3}}{3}}$

15.3 ...... d

15.4 ...... b

15.5 a) ...... $\boxed{x \longmapsto C\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}x},\text{ où } C\in\mathbb{R}}$

15.5 b) ...... $\boxed{\dfrac{15}{2}}$

15.5 c) ...... $\boxed{x \longmapsto C\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}x}+\dfrac{15}{2},\text{ où } C\in\mathbb{R}}$

15.6 a) c

15.6 b) ...... $\boxed{x \longmapsto C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x},\text{ où } C\in\mathbb{R}}$

15.6 c) ...... $\boxed{x \longmapsto C\mathrm{e}^{\frac{1}{7}x},\text{ où } C\in\mathbb{R}}$

15.6 d) ...... $\boxed{x \longmapsto -14}$

15.6 e) ...... $\boxed{x \longmapsto C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}-14,\text{ où } C\in\mathbb{R}}$

15.7 a) ...... b

15.7 b) ...... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{5}{2}}$

15.7 c) ...... $\boxed{x \longmapsto C\mathrm{e}^{-\frac{1}{10}x}+\dfrac{5}{2},\text{ où } C\in\mathbb{R}}$

15.8 a) ...... $\boxed{x \longmapsto C\mathrm{e}^{\frac{2}{3}x}-\dfrac{7}{2},\text{ où } C\in\mathbb{R}}$

15.8 b) ...... $\boxed{x \longmapsto C\mathrm{e}^{3x}+\dfrac{8}{3},\text{ où } C\in\mathbb{R}}$

15.8 c) ...... $\boxed{x \longmapsto C\mathrm{e}^{\frac{9}{4}x}-\dfrac{2}{3},\text{ où } C\in\mathbb{R}}$

15.8 d) ...... $\boxed{x \longmapsto C\mathrm{e}^{-\frac{3}{\pi}x}-\dfrac{\pi}{4},\text{ où } C\in\mathbb{R}}$

15.9 a) ...... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{1}{2}-\dfrac{9}{2}\mathrm{e}^{2x}}$

15.9 b) ...... $\boxed{x \longmapsto -7+7\mathrm{e}^{-2}\mathrm{e}^{2x}}$

15.10 a) ...... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{7}{5}+\dfrac{8}{5}\mathrm{e}^{15}\mathrm{e}^{5x}}$

15.10 b) ...... $\boxed{x \longmapsto -\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}\mathrm{e}^{\frac{2x}{3\pi}}}$

15.11 a) ...... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{b}{3}+C\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x},\text{ où } C\in\mathbb{R}}$

15.11 b) ...... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{b}{3}+\dfrac{2b}{3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x}}$

15.11 c) ...... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{b}{3}+\left(c-\dfrac{b}{3}\right)\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x}}$

15.11 d) ...... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{b}{3}+\dfrac{2b}{3}\mathrm{e}^{\frac{3}{2}c}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x}}$

15.12 c

15.13 a) ...... $\boxed{x \longmapsto C\mathrm{e}^{5x},\text{ où } C\in\mathbb{R}}$

15.13 b) ...... $\boxed{\left(\dfrac{-2}{5},\dfrac{13}{25}\right)}$

15.13 c) ...... $\boxed{x \longmapsto -\dfrac{2}{5}x+\dfrac{13}{25}+C\mathrm{e}^{5x}\text{ , où } C\in\mathbb{R}}$

15.14 a) ...... $\boxed{2}$

15.14 b) ...... $\boxed{x \longmapsto (2x+C)\mathrm{e}^{-x}\text{ , où } C\in\mathbb{R}}$

15.15 a) ...... d

15.15 b) .... $\boxed{\begin{array}{r} x \longmapsto -\dfrac{2}{5}\cos(x) - \dfrac{6}{5}\sin(x) \\ +C\mathrm{e}^{3x},\text{ où } C \in \mathbb{R} \end{array}}$

15.15 c) .... $\boxed{\begin{array}{r} x \longmapsto -\dfrac{2}{5}\cos(x) - \dfrac{6}{5}\sin(x) \\ +\big(\sqrt{2} + \dfrac{2}{5}\big)\mathrm{e}^{3x} \end{array}}$

15.16 a) .... $\boxed{b}$

15.16 b) ..... $\boxed{x \longmapsto (\sin(x) + C)\mathrm{e}^{-2x},\text{ où } C \in \mathbb{R}}$

15.16 c) .... $\boxed{x \longmapsto (\sin(x) + 1)\mathrm{e}^{-2x}}$

15.17 .... $\boxed{x \longmapsto 20\mathrm{e}^{x} - 12\mathrm{e}^{-x}}$

15.18 a) .... $\boxed{-a(x)\mathrm{e}^{-A(x)}}$

15.18 b) .... $\boxed{a}$

15.18 c) .... $\boxed{\big(k'(x) - k(x)a(x)\big)\mathrm{e}^{-A(x)}}$

15.18 d) .... $\boxed{c}$

15.18 e) .... $\boxed{d}$

15.19 a) .... $\boxed{x \longmapsto x\mathrm{e}^{-x^2}}$

15.19 b) .... $\boxed{x \longmapsto x}$

15.19 c) .... $\boxed{x \longmapsto x + Cx\mathrm{e}^{-x^2}\text{ où } C \in \mathbb{R}}$

Corrigés

15.3 On a $f'(x) = 4\mathrm{e}^{4x}$. Donc $\dfrac{1}{4}f'(x) = \mathrm{e}^{4x} = f(x) + \dfrac{1}{4}$. Finalement, on a $f'(x) = 4f(x) + 1$.

....

15.5 a) On a une équation différentielle du type $y' = ay$, avec $a = -\dfrac{2}{3}$. D'après le cours, les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $\left\{\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto C\mathrm{e}^{ax} \end{array}\right.$, où C est une constante réelle. Ici, on a $a = -\dfrac{2}{3}$; les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions $\left\{\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto C\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}x} \end{array}\right.$, quand C parcourt $\mathbb{R}$.

....

15.5 b) Soit $K \in \mathbb{R}$. Notons $\varphi : \left\{\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto K \end{array}\right.$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = 0$; donc, on a les équivalences suivantes :

$$\varphi \text{ solution de } (E) \iff 0 = -\frac{2}{3}K + 5 \iff K = -5 \times \frac{-3}{2} = \frac{15}{2}.$$

....

15.8 a) Pour commencer, remarquons qu'on a l'équivalence $3y' - 2y = 7 \iff y' = \dfrac{2}{3}y + \dfrac{7}{3}$.

D'après le cours, les solutions de $y' = \dfrac{2}{3}y$ sont les fonctions $\left\{\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto C\mathrm{e}^{\frac{2}{3}x} \end{array}\right.$, où $C \in \mathbb{R}$. Une solution particulière constante de $y' = \dfrac{2}{3}y + \dfrac{7}{3}$ est $\left\{\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{-7}{2} \end{array}\right.$. Donc, les solutions sont les $x \longmapsto C\mathrm{e}^{\frac{2}{3}x} - \dfrac{7}{2}$, quand C parcourt $\mathbb{R}$.

....

15.9 a) Les solutions de l'équation différentielle $y' = 2y - 1$ sont les fonctions $\left\{\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto C\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{2} \end{array}\right.$, où $C \in \mathbb{R}$. De plus, on a les équivalences suivantes :

$$y(0) = -4 \iff C\mathrm{e}^{0} + \frac{1}{2} = -4 \iff C = -4 - \frac{1}{2} = \frac{-9}{2}.$$

....

15.9 b) Pour commencer, remarquons qu'on a l'équivalence $\frac{1}{2}y' - y = 7 \iff y' = 2y + 14$. Les solutions de l'équation différentielle $y' = 2y + 14$ sont donc les fonctions $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto C\mathrm{e}^{2x} - 7 \end{cases}$, où $C \in \mathbb{R}$. De plus, on a les équivalences suivantes :

$$y(1) = 0 \iff C\mathrm{e}^2 - 7 = 0 \iff C = 7\mathrm{e}^{-2}.$$

15.11 a) Pour commencer, remarquons qu'on a l'équivalence $2y' + 3y = b \iff y' = -\frac{3}{2}y + \frac{b}{2}$.

Les solutions de $y' = -\frac{3}{2}y + \frac{b}{2}$ sont donc les fonctions $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{b}{3} + C\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x} \end{cases}$, quand C parcourt $\mathbb{R}$.

15.11 b) Grâce à question a), écrivons y : $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{b}{3} + C\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x} \end{cases}$, avec $C \in \mathbb{R}$. On a alors l'équivalence

$$\frac{b}{3} + C\mathrm{e}^0 = b \iff C = b - \frac{b}{3} = \frac{2b}{3}.$$

15.11 c) Grâce à question a), écrivons y : $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{b}{3} + C\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x} \end{cases}$, avec $C \in \mathbb{R}$. On a alors l'équivalence

$$\frac{b}{3} + C\mathrm{e}^0 = c \iff C = c - \frac{b}{3}.$$

15.11 d) Grâce à question a), écrivons y : $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{b}{3} + C\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x} \end{cases}$, avec $C \in \mathbb{R}$. On a alors l'équivalence

$$\frac{b}{3} + C\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}c} = b \iff C\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}c} = b - \frac{b}{3} = \frac{2b}{3} \iff C = \frac{2b}{3}\mathrm{e}^{\frac{3}{2}c}.$$

15.13 b) On a $\varphi'(x) = a$, et φ est solution de (E). Donc, on a les équivalences suivantes :

$$\varphi'(x) = 5\varphi(x) + 2x - 3 \iff a = 5(ax + b) + 2x - 3 \iff (5a + 2)x + 5b - a - 3 = 0.$$

Pour que l'équation soit vérifiée, il faut et il suffit que (a, b) soit solution du système $\begin{cases} 5a + 2 = 0 \\ -a + 5b - 3 = 0 \end{cases}$. Or, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{cases} 5a + 2 = 0 \\ -a + 5b - 3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -\frac{2}{5} \\ 5b = a = 3 + 3 - \frac{2}{5} = \frac{13}{5} \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{-2}{5} \\ b = \frac{13}{25}. \end{cases}$$

15.14 a) On a $\varphi'(x) = a(\mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x}) = a(1 - x)\mathrm{e}^{-x}$. Donc, on a les équivalences suivantes :

$$\varphi'(x) + \varphi(x) = 2\mathrm{e}^{-x} \iff a(1 - x)\mathrm{e}^{-x} + ax\mathrm{e}^{-x} = 2\mathrm{e}^{-x} \iff a\mathrm{e}^{-x} = 2\mathrm{e}^{-x} \iff a = 2.$$

15.14 b) Pour commencer, remarquons qu'on a l'équivalence $y' + y = 2e^{-x} \iff y' = -y + 2e^{-x}$.

Les solutions de $y' = -y$ sont les fonctions $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto Ce^{-x} \end{cases}$, où $C \in \mathbb{R}$. De plus, une solution particulière de (E) est φ : $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2xe^{-x} \end{cases}$. Donc, les solutions de (E) sont les fonctions $x \longmapsto (2x + C)e^{-x}$, quand C parcourt $\mathbb{R}$.

....

15.15 b) Pour commencer, remarquons qu'on a l'équivalence $y' - 3y = 4\sin(x) \iff y' = 3y + 4\sin(x)$.

Les solutions de $y' = 3y$ sont donc les fonctions $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto Ce^{3x} \end{cases}$, quand C parcourt $\mathbb{R}$. De plus, une solution particulière de (E) est f : $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{-2}{5}\cos(x) - \frac{6}{5}\sin(x). \end{cases}$

Donc, les solutions de (E) sont les fonctions $x \longmapsto -\dfrac{2}{5}\cos(x) - \dfrac{6}{5}\sin(x) + Ce^{3x}$, quand C parcourt $\mathbb{R}$.

....

15.15 c) Fixons C tel que la solution cherchée s'écrive $y(x) = -\dfrac{2}{5}\cos(x) - \dfrac{6}{5}\sin(x) + Ce^{3x}$. On a les équivalences suivantes :

$$y(0) = \sqrt{2} \iff -\frac{2}{5} \times 1 - \frac{6}{5} \times 0 + C \times 1 = \sqrt{2} \iff -\frac{2}{5} + C = \sqrt{2} \iff C = \sqrt{2} + \frac{2}{5}.$$

La solution cherchée est $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto -\frac{2}{5}\cos(x) - \frac{6}{5}\sin(x) + \left(\sqrt{2} + \frac{2}{5}\right)e^{3x}. \end{cases}$

....

15.16 b) Pour commencer, remarquons qu'on a l'équivalence $y' + 2y = e^{-2x}\cos(x) \iff y' = -2y + e^{-2x}\cos(x)$.

Les solutions de $y' = -2y$ sont donc les fonctions $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto Ce^{-2x} \end{cases}$, quand C parcourt $\mathbb{R}$. Comme une solution particulière de (E) est $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto e^{-2x}\sin(x) \end{cases}$, les solutions de (E) sont donc les fonctions

$$\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto (\sin(x) + C)e^{-2x} \end{cases}, \text{ quand } C \text{ parcourt } \mathbb{R}.$$

....

15.16 c) Fixons $C \in \mathbb{R}$ tel que la solution cherchée s'écrive $y(x) = (\sin(x) + C)e^{-2x}$. On a alors les équivalences suivantes

$$y(0) = 1 \iff (0 + C) \times 1 = 1 \iff C = 1.$$

La solution cherchée est la fonction $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto (\sin(x) + 1)e^{-2x}. \end{cases}$

....

15.17 On a $\varphi'(x) = 2e^{x} - 3e^{-x}$. Ainsi, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \varphi \text{ solution de } (E) &\iff \text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ 7\varphi'(x) + 3\varphi(x) = f(x) \\ &\iff \text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ 7(2e^{x} - 3e^{-x}) + 3(2e^{x} + 3e^{-x}) = f(x) \\ &\iff \text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ f(x) = 20e^{x} - 12e^{-x}. \end{aligned}$$

....

15.18 c) Comme pour tout $x \in I$, on a $\varphi(x) = k(x)f(x)$, en dérivant, on obtient

$$\varphi'(x) = k'(x)f(x) + k(x)f'(x) = k'(x)e^{-A(x)} + k(x)\big(-a(x)e^{-A(x)}\big) = \big(k'(x) - k(x)a(x)\big)e^{-A(x)}.$$

....

15.18 d) Soit $x \in I$. On a les équivalence suivantes :

$$\varphi'(x) + a(x)\varphi(x) = b(x) \iff \big(k'(x) - k(x)a(x)\big)\mathrm{e}^{-A(x)} + k(x)a(x)\mathrm{e}^{-A(x)} = b(x) \iff k'(x)\mathrm{e}^{-A(x)} = b(x).$$

....

15.18 e) On applique les différentes étapes des questions précédentes.

Pour commencer, on identifie $a : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 1 \end{cases}$. Une primitive simple de a est $A : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x \end{cases}$.

On pose ensuite, d'après la question a), la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \exp\big(-A(x)\big) \end{cases}$. On a donc $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$.

On pose $\varphi = kf$. On a alors l'équivalence

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ k'(x)\mathrm{e}^{-x} = b(x) = \mathrm{e}^{-x}\cos(x) \iff \text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ k'(x) = \cos(x).$$

Donc $k = \sin + D$, où D est une constante réelle. Donc, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = k(x)f(x) = (\sin(x) + D)\mathrm{e}^{-x}$.

La solution d correspond au choix de la constante $D = 0$.

....

15.19 a) Pour commencer, on a l'équivalence $xy' - (1 - 2x^2)y = 0 \iff y' + \left(\dfrac{-1}{x} + 2x\right)y = 0$.

On note $a : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{-1}{x} + 2x \end{cases}$. Une primitive de a sur $\mathbb{R}_+^*$ est $A : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto -\ln(x) + x^2 \end{cases}$.

Une solution de (H) est donc f définie par $f(x) = \mathrm{e}^{-A(x)} = \mathrm{e}^{\ln(x) - x^2} = x\mathrm{e}^{-x^2}$, pour $x > 0$.

....

15.19 b) Pour commencer, on écrit (E) sous la forme $y'(x) + a(x)y = b(x)$: on a l'équivalence

$$xy' - (1 - 2x^2)y = 2x^3 \iff y' + \big(\frac{-1}{x} + 2x\big)y = 2x^2.$$

On considère donc $b : x \longmapsto 2x^2$ et la fonction φ définie par $\varphi(x) = k(x)f(x)$, pour $x > 0$, où k est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

D'après l'exercice précédent, φ est solution de (E) si, et seulement si, pour tout $x > 0$, $k'(x)\mathrm{e}^{-A(x)} = b(x)$.

Or, on a les équivalences suivantes : $k'(x)\mathrm{e}^{-A(x)} = b(x) \iff k'(x)x\mathrm{e}^{-x^2} = 2x^2 \iff k'(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2}$. On reconnaît une expression de la forme $u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$; on en déduit qu'il existe $D \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > 0$, $k(x) = \mathrm{e}^{x^2} + D$.

Une solution particulière φ de (E) est donc définie (pour $D = 0$) par $\varphi(x) = k(x)f(x) = \mathrm{e}^{x^2} \times x\mathrm{e}^{-x^2} = x$.

....

15.19 c) On sait que φ est une solution particulière de (E). On a donc, pour tout $x > 0$,

$$x\varphi'(x) - (1 - 2x^2)\varphi(x) = 2x^3.$$

Soit maintenant g une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et soit $x > 0$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} xg'(x) - (1 - 2x^2)g(x) = 2x^3 &\iff xg'(x) - (1 - 2x^2)g(x) = x\varphi'(x) - (1 - 2x^2)\varphi(x) \\ &\iff x(g'(x) - \varphi'(x)) - (1 - 2x^2)(g(x) - \varphi(x)) = 0 \\ &\iff x(g - \varphi)'(x) - (1 - 2x^2)(g - \varphi)(x) = 0\,. \end{aligned}$$

Donc, $g - \varphi$ est solution de (H) : elle est de la forme $g - \varphi = Cf$ avec $C \in \mathbb{R}$. Les solutions de (E) sont donc les fonctions $x \longmapsto \varphi(x) + Cf(x) = x + Cx\mathrm{e}^{-x^2}$, quand C parcourt $\mathbb{R}$.

....

Fiche n° 16. Intégration I

Réponses

16.1 a) .... $\boxed{\dfrac{5}{6}}$

16.1 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{6}}$

16.1 c) .... $\boxed{-\dfrac{5}{6}}$

16.2 a) .... $\boxed{2^2 5^{-2}}$

16.2 b) .... $\boxed{2^{-2} 5^2}$

16.2 c) .... $\boxed{2^{-1} 5^{-1}}$

16.3 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

16.3 b) .... $\boxed{\dfrac{2}{3}}$

16.3 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

16.4 .... $\boxed{\text{d}}$

16.5 a) .... $\boxed{\dfrac{1-(-1)^{n+1}}{n+1}}$

16.5 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{(n+1)2^{n+1}}}$

16.5 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{n+1}}$

16.5 d) .... $\boxed{\dfrac{2^{n+1}-1}{4^{n+1}(n+1)}}$

16.6 .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{2n+1}}$

16.7 a)...... $\boxed{\dfrac{1}{n-1}(2^{n-1}-1)}$

16.7 b)..... $\boxed{\dfrac{(-1)^n}{n-1}(2^{n-1}-1)}$

16.7 c)...... $\boxed{\dfrac{1}{n-1}\,\dfrac{a^{2n-2}-1}{a^{n-1}}}$

16.7 d)...... $\boxed{\dfrac{1}{2n-1}\,\dfrac{2^n-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}$

16.8 a)............... $\boxed{\dfrac{2^{2n+1}}{3n+1}}$

16.8 b) .... $\boxed{2^{2n^2-1}}$

16.9 .... $\boxed{4(2^n-1)}$

16.10 .... $\boxed{\dfrac{(n-1)}{n^{n-2}(2^{n-1}-1)}}$

Corrigés

16.2 c) On a $\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{10}=2\times\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{10}=\dfrac{1}{10}=\dfrac{1}{2\times 5}=2^{-1}5^{-1}$.

16.3 c) On a $\displaystyle\int_0^1(-t+1)\,\mathrm{d}t=1-\int_0^1 t\,\mathrm{d}t=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

16.4 On a $\displaystyle\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t=\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}-\frac{0}{n+1}=\frac{1}{n+1}$.

16.5 c) On a $\displaystyle 1-\int_0^1 nt^n\,\mathrm{d}t=1-n\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t=1-n\times\frac{1}{n+1}=1-\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1}$.

16.5 d) On a $\displaystyle\int_{\frac14}^{\frac12} t^n\,\mathrm{d}t=\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_{\frac14}^{\frac12}=\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{4^{n+1}}\right)=\frac{2^{n+1}-1}{(n+1)4^{n+1}}$.

16.6 On a $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}}\frac{t^{2n}}{2^n}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2^n}\left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^{\sqrt{2}}=\frac{1}{2^n}\,\frac{\sqrt{2}^{2n+1}}{2n+1}=\frac{1}{2^n}\,\frac{\sqrt{2}^{2n}\sqrt{2}}{2n+1}=\frac{1}{2^n}\,\frac{2^n\sqrt{2}}{2n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2n+1}$.

16.7 a) On a $\displaystyle\int_{\frac12}^1\frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}t=\int_{\frac12}^1 t^{-n}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{t^{-n+1}}{-n+1}\right]_{\frac12}^1=\frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{t^{n-1}}\right]_1^{\frac12}=\frac{1}{n-1}(2^{n-1}-1)$.

16.7 b) On a

$$\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} t^{-n}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{-n+1}}{-n+1}\right]_{-1}^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{t^{n-1}}\right]_{-\frac{1}{2}}^{-1}$$
$$= \frac{(-1)^{n-1}}{n-1}(1-2^{n-1}) = \frac{(-1)^n}{n-1}(2^{n-1}-1).$$

16.7 c) On a $\displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{t^{n-1}}\right]_a^{\frac{1}{a}} = \frac{1}{n-1}\left(a^{n-1} - \frac{1}{a^{n-1}}\right) = \frac{1}{n-1}\frac{a^{2n-2}-1}{a^{n-1}}.$

16.7 d) On a $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \frac{1}{t^{2n}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2n-1}\left[\frac{1}{t^{2n-1}}\right]_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{2n-1}\left(\sqrt{2}^{2n-1}-1\right) = \frac{1}{2n-1}\left(\frac{2^n}{\sqrt{2}}-1\right) = \frac{1}{2n-1}\frac{2^n-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$

16.9 Pour commencer, on peut écrire

$$\int_0^2 2t\,\mathrm{d}t + \int_0^2 3t^2\,\mathrm{d}t + \int_0^2 4t^3\,\mathrm{d}t + \cdots + \int_0^2 (n+1)t^n\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \int_0^2 (k+1)t^k\,\mathrm{d}t$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \left[t^{k+1}\right]_0^2$$
$$= \sum_{k=1}^{n} 2^{k+1} = 2\sum_{k=1}^{n} 2^k.$$

Or, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2 \times \frac{2^n-1}{2-1} = 2^{n+1}-2$. Donc, la somme cherchée vaut $2(2^{n+1}-2) = 4(2^n-1)$.

16.10 Pour commencer, remarquons que

$$\int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{-n+1}}{-n+1}\right]_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{t^{n-1}}\right]_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2n}} = \frac{1}{n-1}\left((2n)^{n-1} - n^{n-1}\right) = \frac{n^{n-1}}{n-1}\left(2^{n-1}-1\right).$$

Ainsi, on trouve

$$\frac{n}{\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}t} = \frac{n(n-1)}{n^{n-1}(2^{n-1}-1)} = \frac{(n-1)}{n^{n-2}(2^{n-1}-1)}.$$

Fiche n° 17. Intégration II

Réponses

17.1 a) $\boxed{\dfrac{2}{3}}$

17.1 b) $\boxed{\dfrac{14}{9}}$

17.1 c) $\boxed{\dfrac{50}{21}}$

17.2 a) $\boxed{28}$

17.2 b) $\boxed{27}$

17.3 a) $\boxed{2^{-3}}$

17.3 b) $\boxed{3^{17}}$

17.3 c) $\boxed{2^{-15}}$

17.3 d) $\boxed{5^{12}}$

17.4 a) $\boxed{-1}$

17.4 b) $\boxed{-3}$

17.4 c) $\boxed{\dfrac{-17}{5}}$

17.5 a) $\boxed{3\pi}$

17.5 b) $\boxed{4}$

17.5 c) $\boxed{\dfrac{1}{3}}$

17.5 d) $\boxed{1-\dfrac{1}{\mathrm{e}}}$

17.6 a) $\boxed{\dfrac{45}{4}}$

17.6 b) $\boxed{\dfrac{31}{10}}$

17.6 c) $\boxed{2}$

17.6 d) $\boxed{-\dfrac{1}{2}}$

17.7 a) $\boxed{\dfrac{39}{2}}$

17.7 b) $\boxed{\dfrac{17}{30}}$

17.7 c) $\boxed{\dfrac{53}{8}}$

17.8 a) $\boxed{\dfrac{1}{4}(\mathrm{e}^4-1)}$

17.8 b) $\boxed{\dfrac{1}{4}\left(\mathrm{e}^3-\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)}$

17.8 c) $\boxed{\dfrac{14}{3}}$

17.8 d) $\boxed{9-3\sqrt{3}}$

17.9 a) $\boxed{-\dfrac{1}{2}}$

17.9 b) $\boxed{\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}-1)}$

17.9 c) $\boxed{\mathrm{e}-\sqrt{\mathrm{e}}}$

17.9 d) $\boxed{-3\ 570}$

17.10 a) $\boxed{\sqrt{2}-1}$

17.10 b) $\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{e}}-\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}}$

17.10 c) $\boxed{\dfrac{5}{48}}$

17.10 d) $\boxed{\dfrac{4}{27}}$

17.11 a) $\boxed{(\mathrm{e}^x+1)^2}$

17.11 b) $\boxed{\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{\mathrm{e}+1}}$

17.12 a) $\boxed{(a,b,c)=(2,-1,4)}$

17.12 b) $\boxed{2}$

17.13 $\boxed{\dfrac{-21}{2}}$

17.14 $\boxed{6x^3+8x^2+3x-86}$

Corrigés

17.5 b) On a $\displaystyle\int_{-1}^{3} u\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^2}{2}\right]_{-1}^{3} = \frac{3^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4.$

17.5 d) On a $\displaystyle\int_{-1}^{0} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^x\right]_{-1}^{0} = \mathrm{e}^0 - \mathrm{e}^{-1} = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}.$

17.6 a) On a $\displaystyle\int_{-1}^{2} 3t^3\,\mathrm{d}t = 3\left[\frac{t^4}{4}\right]_{-1}^{2} = 3\times\left(\frac{2^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4}\right) = \frac{45}{4}.$

17.6 b) On a $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{x^4}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{1}^{2} x^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{x^5}{5}\right]_{1}^{2} = \frac{31}{10}.$

17.6 c) On a $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \Big[2\sqrt{x}\Big]_1^4 = 2\sqrt{4} - 2\sqrt{1} = 4 - 2 = 2.$

17.6 d) On a $\displaystyle\int_2^3 \frac{-3}{t^2}\,\mathrm{d}t = 3\int_2^3 \frac{-1}{t^2}\,\mathrm{d}t = 3\left[\frac{1}{t}\right]_2^3 = 3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = 3 \times \frac{-1}{6} = -\frac{1}{2}.$

17.7 a) On a

$$\int_{-2}^1 (3x^2 - 5x + 1)\,\mathrm{d}x = \left[x^3 - \frac{5x^2}{2} + x\right]_{-2}^1 = \left(1^3 - \frac{5}{2} + 1\right) - \left((-2)^3 - 5 \times \frac{(-2)^2}{2} + (-2)\right) = \frac{-1}{2} + 20 = \frac{39}{2}.$$

17.7 b) On a $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{x^4}{3} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^5}{15} + \frac{x}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{15} + \frac{1}{2} = \frac{17}{30}.$

17.7 c) On a $\displaystyle\int_1^4 \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3}\right)\mathrm{d}x = \left[4\sqrt{x} - \frac{1}{x} - 2x^{-2}\right]_1^4 = \left(4\sqrt{4} - \frac{1}{4} - 2 \times 4^{-2}\right) - (4 \times 1 - 1 - 2) = \frac{53}{8}.$

17.8 a) On a $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{4x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^1 4\mathrm{e}^{4x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\Big[\mathrm{e}^{4x}\Big]_0^1 = \frac{1}{4}\big(\mathrm{e}^4 - 1\big).$

17.8 b) On a $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{4x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\Big[\mathrm{e}^{4x-1}\Big]_0^1 = \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^3 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right).$

17.8 c) On a $\displaystyle\int_{-1}^1 (2x+1)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\Big[(2x+1)^3\Big]_{-1}^1 = \frac{1}{6}\big(3^3 - (-1)^3\big) = \frac{14}{3}.$

17.8 d) On a $\displaystyle\int_1^4 \frac{3}{\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x = 3\int_1^4 \frac{2}{2\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x = 3\Big[\sqrt{2x+1}\Big]_1^4 = 3(\sqrt{9} - \sqrt{3}) = 9 - 3\sqrt{3}.$

17.9 a) On a $\displaystyle\int_0^1 2x(x^2-1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\big[(x^2-1)^2\big]_0^1 = -\frac{1}{2}.$

17.9 b) On a $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 2x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big[\mathrm{e}^{x^2}\Big]_0^1 = \frac{1}{2}(\mathrm{e} - 1).$

17.9 c) On a $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}}{t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_1^2 \left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}\,\mathrm{d}t = -\Big[\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}\Big]_1^2 = -(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} - \mathrm{e}^1) = \mathrm{e} - \sqrt{\mathrm{e}}.$

17.9 d) On a

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 (4x-3)(4x^2-6x+3)^3\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{8}\int_{-1}^1 4(8x-6)(4x^2-6x+3)^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\big[(4x^2-6x+3)^4\big]_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{8}(1^4 - 13^4) = -3\ 570.\end{aligned}$$

17.10 a) On a $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \Big[\sqrt{x^2+1}\Big]_0^1 = \sqrt{2} - 1.$

17.10 b) On a $\displaystyle\int_{-1}^1 \mathrm{e}^{t+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^1 \mathrm{e}^t \times \mathrm{e}^{\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t = \Big[\mathrm{e}^{\mathrm{e}^t}\Big]_{-1}^1 = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^1} - \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-1}} = \mathrm{e}^{\mathrm{e}} - \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}.$

17.10 c) On a $\displaystyle\int_3^4 \frac{x-1}{x^2(x-2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{2}\int_3^4 \frac{-(2x-2)}{(x^2-2x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{2}\left[\frac{1}{x^2-2x}\right]_3^4 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{48}.$

17.10 d) On a $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1-x^2}{(x^3-3x+1)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\int_{-1}^{0}(-2)\times(3x^2-3)(x^3-3x+1)^{-3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\Big[(x^3-3x+1)^{-2}\Big]_{-1}^{0} = \frac{4}{27}$.

....

17.11 a) On a $\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^{x}+1 = (\mathrm{e}^{x})^2+2\mathrm{e}^{x}+1 = (\mathrm{e}^{x}+1)^2$.

....

17.11 b) On a

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{2x}+3\mathrm{e}^{x}+1}{(\mathrm{e}^{x}+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^{x}+1+\mathrm{e}^{x}}{(\mathrm{e}^{x}+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{(\mathrm{e}^{x}+1)^2+\mathrm{e}^{x}}{(\mathrm{e}^{x}+1)^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 \frac{(\mathrm{e}^{x}+1)^2}{(\mathrm{e}^{x}+1)^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{x}}{(\mathrm{e}^{x}+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{-\mathrm{e}^{x}}{(\mathrm{e}^{x}+1)^2}\,\mathrm{d}x = \Big[x\Big]_0^1 - \left[\frac{1}{\mathrm{e}^{x}+1}\right]_0^1\\ &= 1 - \frac{1}{\mathrm{e}^1+1} + \frac{1}{\mathrm{e}^0+1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{\mathrm{e}+1}.\end{aligned}$$

....

17.12 a) On a $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{(x+1)^2} = \dfrac{(ax+b)(x+1)^2+c}{(x+1)^2} = \dfrac{ax^3+(2a+b)x^2+(a+2b)x+b+c}{(x+1)^2}$.

Par identification avec l'expression de $f(x)$, on obtient le système d'équations $\begin{cases} a &= 2\\ 2a+b &= 3\\ a+2b &= 0\\ b+c &= 3\end{cases}$.

On résout alors ce système et on obtient : $a=2$, $b=-1$ et $c=4$.

....

17.12 b) On a $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(2x-1+\frac{4}{(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x = \left[x^2-x-\frac{4}{x+1}\right]_0^1 = 2$.

....

17.13 À l'aide d'un tableau, on détermine l'expression de $\big(|x-1|-|4x+2|\big)$ sur chacun des intervalles $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2},1\right]$ et $[1,2]$:

x	-1 … $-1/2$	$-1/2$ … 1	1 … 2
$\lvert x-1\rvert$	$1-x$	$1-x$ 0	$x-1$
$\lvert 4x+2\rvert$	$-4x-2$ 0	$4x+2$	$4x+2$
$\lvert x-1\rvert-\lvert 4x+2\rvert$	$3x+3$	$-5x-1$	$-3x-3$

On décompose alors l'intégrale demandée en utilisant la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2}\big(|x-1|-|4x+2|\big)\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{\frac{-1}{2}}\big(|x-1|-|4x+2|\big)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{-1}{2}}^{1}\big(|x-1|-|4x+2|\big)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2}\big(|x-1|-|4x+2|\big)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{-1}^{\frac{-1}{2}}(3x+3)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{-1}{2}}^{1}(-5x-1)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2}(-3x-3)\,\mathrm{d}x\\ &= 3\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^{\frac{-1}{2}} - \left[\frac{5x^2}{2}+x\right]_{\frac{-1}{2}}^{1} - 3\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{1}^{2} = \frac{-21}{2}.\end{aligned}$$

....

17.14 Soit G une primitive de f sur $[-1,x]$. On a $\displaystyle\int_{-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = G(x)-G(-1) = -6x^3-8x^2-3x-1$. Donc, on a $G(x)-G(-1) = -6x^3-8x^2-3x-1$.

En dérivant par rapport à x, on obtient $G'(x) = -18x^2-16x-3$, c'est-à-dire $f(x) = -18x^2-16x-3$.

Donc, $\displaystyle F(x) = \int_x^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^2(-18t^2-16t-3)\,\mathrm{d}t = -\Big[6t^3+8t^2+3t\Big]_x^2 = 6x^3+8x^2+3x-86$.

....

Fiche n° 18. Intégration III

Réponses

18.1 a) $\boxed{\dfrac{13}{8}}$

18.1 b) $\boxed{-2}$

18.1 c) $\boxed{\dfrac{11}{2}}$

18.1 d) $\boxed{-6}$

18.2 a) $\boxed{\dfrac{1-5m}{4m}}$

18.2 b) $\boxed{\dfrac{m+2}{m-1}}$

18.2 c) $\boxed{\dfrac{1-6m}{2(m-2)}}$

18.2 d) $\boxed{\dfrac{1-3m}{1+3m}}$

18.3 a) $\boxed{3+\mathrm{e}^2}$

18.3 b) $\boxed{3\ln(5)}$

18.3 c) $\boxed{\dfrac{3}{2}}$

18.3 d) $\boxed{\dfrac{3}{32}+4\ln(2)}$

18.4 a) $\boxed{2(\mathrm{e}^{10}-1)}$

18.4 b) $\boxed{\dfrac{2}{5}\ln(6)}$

18.4 c) $\boxed{-\dfrac{3}{5}}$

18.4 d) $\boxed{-\dfrac{\ln(7)}{4}}$

18.5 a) $\boxed{\ln(7)}$

18.5 b) $\boxed{\dfrac{1}{6}\left(\mathrm{e}^{\frac{13}{4}}-1\right)}$

18.5 c) $\boxed{\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{41}-\sqrt{5}\right)}$

18.5 d) $\boxed{\dfrac{13}{486}}$

18.6 a) $\boxed{\dfrac{9}{20}}$

18.6 b) $\boxed{\dfrac{1}{6}\ln\left(\dfrac{23}{3}\right)}$

18.6 c) $\boxed{0}$

18.7 $\boxed{\dfrac{1}{8}\ln(22)^4}$

18.8 a) $\boxed{\dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)}$

18.8 b) $\boxed{\dfrac{1}{n-1}(\mathrm{e}-1)}$

18.8 c) $\boxed{\dfrac{2}{3n}\left((3^n+3)^{\frac{3}{2}}-(2^n+3)^{\frac{3}{2}}\right)}$

18.9 a) $\boxed{a=1 \text{ et } b=-1}$

18.9 b) $\boxed{a=\dfrac{1}{2} \text{ et } b=-\dfrac{1}{2}}$

18.9 c) $\boxed{\ln\left(\dfrac{4}{3}\right)}$

18.9 d) $\boxed{\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{6}{5}\right)}$

18.10 a) $\boxed{a=2 \text{ et } b=-1}$

18.10 b) $\boxed{a=-2 \text{ et } b=3}$

18.10 c) $\boxed{\ln\left(\dfrac{8}{9}\right)}$

18.10 d) $\boxed{\ln\left(\dfrac{32}{9}\right)}$

18.11 a) $\boxed{1+\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)}$

18.11 b) $\boxed{1+5\ln\left(\dfrac{6}{7}\right)}$

18.11 c) $\boxed{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{3}{5}\right)}$

18.11 d) $\boxed{1+\ln\left(\dfrac{3}{7}\right)}$

18.11 e) $\boxed{1+\ln\left(\dfrac{2}{5}\right)}$

Corrigés

18.1 a) On a, pour $x \neq \dfrac{3}{2}$, les équivalences suivantes : $\dfrac{1}{2x-3}=4 \iff 1=4(2x-3) \iff 1=8x-12$.

18.1 b) Pour $x \neq -1$, on a l'équivalence suivante : $\dfrac{2x+3}{x+1}=1 \iff 2x+3=x+1$.

18.2 a) Si $x \neq -\dfrac{5}{4}$, comme $m \neq 0$, on a les équivalences suivantes :

$$\frac{1}{4x+5} = m \iff 1 = 4mx + 5m \iff 1 - 5m = 4mx \iff x = \frac{1-5m}{4m}.$$

18.2 b) Si $x \neq 1$, comme $m \neq 1$ et donc $m - 1 \neq 0$, on a les équivalences suivantes :

$$\frac{x+2}{x-1} = m \iff x + 2 = mx - m \iff 2 + m = mx - x \iff 2 + m = x(m-1) \iff x = \frac{2+m}{m-1}.$$

18.3 a) Une primitive de $t \mapsto t^3 + \exp(t)$ est $t \mapsto \dfrac{1}{4}t^4 + \exp(t)$ donc

$$\int_0^2 \big(t^3 + \exp(t)\big)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{4}t^4 + \exp(t)\right]_0^2 = \left(\frac{1}{4}2^4 + \exp(2)\right) - \left(\frac{1}{4}0^4 + \exp(0)\right) = 3 + \exp(2).$$

18.3 b) On procède comme précédemment, sachant qu'une primitive de $t \mapsto \dfrac{3}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $t \mapsto 3\ln(t)$.

18.3 c) Une primitive de $t \mapsto \dfrac{2}{t^2}$ est $t \mapsto \dfrac{-2}{t}$.

18.3 d) Une primitive de $t \mapsto \dfrac{4}{t} + \dfrac{1}{t^3}$ est $t \mapsto 4\ln(t) - \dfrac{1}{2t^2}$.

18.4 a) Une primitive de $t \mapsto \exp(2t+2)$ est $t \mapsto \dfrac{1}{2}\exp(2t+2)$. On trouve alors $2\Big[\exp(2t+2)\Big]_{-1}^{4}$.

18.4 b) On procède comme précédemment. On trouve $\dfrac{2}{5}\Big[\ln(|5t+3|)\Big]_0^3$.

18.4 c) On trouve $\left[\dfrac{2}{t+4}\right]_{-2}^{1}$.

18.4 d) On trouve $\dfrac{1}{4}\Big[\ln(|2t-3|)\Big]_{-2}^{1}$.

18.5 a) L'intégrande est de la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(t) = t^2 + t + 1$. Une primitive est donc $\ln(|u|)$.

18.5 b) L'intégrande est de la forme $\dfrac{1}{6}u'\exp(u)$ avec $u(t) = 2t^3 + 6t$. Une primitive est donc $\dfrac{1}{6}\exp(u)$.

18.5 c) L'intégrande est de la forme $\dfrac{\frac{1}{4}u'}{\sqrt{u}}$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{2}\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, avec $u(t) = 2t^2 + 2t + 1$. Une primitive est $\dfrac{1}{2}\sqrt{u}$.

18.5 d) L'intégrande est de la forme $\dfrac{1}{12}\dfrac{u'}{u^4}$ avec $u(t) = t^3 + t^2 + 1$. Une primitive est donc $\dfrac{-1}{36}\dfrac{1}{u^3}$.

18.6 a) On procède comme à l'exercice précédent. L'intégrande est de la forme $3u'u^{-2}$.

18.6 b) L'intégrande est de la forme $\dfrac{1}{6}\dfrac{u'}{u}$. Une primitive est donc $\dfrac{1}{6}\ln(|u|)$.

18.6 c) L'intégrande est de la forme $\dfrac{u'}{u}$. Une primitive est donc $\ln(|u|)$.

18.7 On pose $u(t) = \ln(t^2 + 2t - 2)$ pour tout $t \in [1, 4]$ (on peut vérifier que sur cet intervalle $t^2 + 2t - 2 > 0$). La fonction u est de la forme $\ln(v)$ donc $u' = \dfrac{v'}{v}$. Ainsi $u'(t) = \dfrac{2t+2}{t^2+2t-2}$.

L'intégrande est donc de la forme $\dfrac{1}{2}u'u^3$. Une primitive est donc $\dfrac{1}{2}\dfrac{u^4}{4}$.

18.8 a) L'intégrande est de la forme $\dfrac{\frac{1}{n}u'}{u}$. On trouve $\dfrac{1}{n}\Big[\ln(t^n + 2)\Big]_0^1$.

18.8 b) L'intégrande est de la forme $\dfrac{1}{n-1}u' \exp(u)$. On trouve donc $\dfrac{1}{n-1}\Big[\exp(t^{n-1})\Big]_0^1$.

18.8 c) L'intégrande est de la forme $\dfrac{1}{n}u'\sqrt{u}$. On trouve $\dfrac{2}{3n}\Big[(t^n + 3)^{\frac{3}{2}}\Big]_2^3$.

18.9 a) On a $\dfrac{a}{t} + \dfrac{b}{t+1} = \dfrac{at + a + tb}{t(t+1)}$. Il suffit donc de trouver a et b tels que $at + a + tb = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En prenant $t = 0$, on trouve $a = 1$. En prenant $t = -1$, on trouve $b = -1$. On vérifie que ces valeurs conviennent.

18.9 c) D'après ce qui précède, on a

$$\int_1^2 \frac{1}{t(t+1)}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = \Big[\ln(t) - \ln(t+1)\Big]_1^2 = \ln(2) - \ln(3) - (\ln(1) - \ln(2)).$$

18.10 a) On a $\dfrac{a}{t+1} + \dfrac{b}{t+2} = \dfrac{at + 2a + bt + b}{(t+1)(t+2)}$. Il suffit donc de trouver a et b tels que $at + 2a + bt + b = t + 3$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En prenant $t = -1$, on trouve $a = 2$. En prenant $t = -2$, on trouve $b = -1$.

18.10 c) D'après ce qui précède,

$$\int_{-4}^{-3} \frac{t+3}{(t+1)(t+2)}\,\mathrm{d}t = \int_{-4}^{-3}\left(\frac{2}{t+1} + \frac{-1}{t+2}\right)\mathrm{d}t = \Big[2\ln(|t+1|) - \ln(|t+2|)\Big]_{-4}^{-3} = (2\ln(2) - \ln(1)) - (2\ln(3) - \ln(2)).$$

18.11 a) On a

$$\int_1^2 \frac{t}{t+1}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \frac{t+1-1}{t+1}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \frac{t+1}{t+1} - \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 1 - \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t = \Big[t - \ln(t+1)\Big]_1^2 = 2 - \ln(3) - 1 + \ln(2).$$

18.11 b) On a $\displaystyle\int_1^2 \frac{t}{t+5}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \frac{t+5}{t+5} - \frac{5}{t+5}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 1 - \frac{5}{t+5}\,\mathrm{d}t.$

18.11 c) On a $\dfrac{t}{2t+1} = \dfrac{1}{2}\dfrac{2t}{2t+1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2t+1}{2t+1} - \dfrac{1}{2t+1}\right) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{2t+1}\right).$

18.11 d) On a $\dfrac{t^2 - t}{t^2+t+1} = \dfrac{t^2 - t + (2t+1) - (2t+1)}{t^2+t+1} = \dfrac{t^2+t+1}{t^2+t+1} - \dfrac{2t+1}{t^2+t+1} = 1 - \dfrac{2t+1}{t^2+t+1}.$

18.11 e) On a $\dfrac{2t^2 - t - 2}{2t^2+3t+1} = \dfrac{2t^2 - t - 2 + (4t+3) - (4t+3)}{2t^2+3t+1} = \dfrac{2t^2+3t+1}{2t^2+3t+1} - \dfrac{4t+3}{2t^2+3t+1} = 1 - \dfrac{4t+3}{2t^2+3t+1}.$

Fiche n° 19. Intégration par parties I

Réponses

19.1 a) .... $\boxed{(x+1)e^x}$

19.1 b) .... $\boxed{\ln(x)+1}$

19.1 c) .... $\boxed{\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}}$

19.1 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}}$

19.1 e) .... $\boxed{\dfrac{4x}{\sqrt{4x^2+3}}}$

19.1 f) .... $\boxed{-\dfrac{6x^5}{(x^6+3)^2}}$

19.2 a) ... $\boxed{(3x+5)(13-10x)}$

19.2 b) .... $\boxed{e^x(x-3)}$

19.2 c) .... $\boxed{\ln(x)}$

19.2 d) .... $\boxed{(e^x+2)^2}$

19.3 a) .... $\boxed{1}$

19.3 b) .... $\boxed{\dfrac{e^2+1}{4}}$

19.4 a) .... $\boxed{\dfrac{e-2}{e}}$

19.4 b) .... $\boxed{\dfrac{2e^3+1}{9}}$

19.4 c) .... $\boxed{3-23e^{-10}}$

19.4 d) .... $\boxed{\dfrac{5e}{3}-2}$

19.5 a) .... $\boxed{5\ln(5)-4}$

19.5 b) .... $\boxed{x\ln(x)-x}$

19.5 c) .. $\boxed{5\ln(5)^2-10\ln(5)+8}$

19.5 d) .. $\boxed{\begin{array}{r}5\ln(5)^3-15\ln(5)^2\\+30\ln(5)-24\end{array}}$

19.6 a) .... $\boxed{e-2}$

19.6 b) .... $\boxed{\dfrac{5}{27}e^3-\dfrac{2}{27}}$

19.7 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{4}e^3-\dfrac{1}{4}e}$

19.7 b) . $\boxed{\begin{array}{l}\dfrac{1}{98}\Big(-(\ln 7)^2\\ \qquad -\ln 7+24\Big)\end{array}}$

19.8 a) .... $\boxed{\ln(2)}$

19.8 b) ...... $\boxed{a=1 \text{ et } b=-1}$

19.8 c) .... $\boxed{1-\ln(2)}$

19.8 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{n+1}}$

19.8 e) .... $\boxed{\dfrac{5}{6}-\ln(2)}$

19.9 .... $\boxed{2\pi^2}$

19.10 a) .... $\boxed{1}$

19.10 b) .... $\boxed{\begin{array}{r}J(n+1)\\=(n+1)J(n)\end{array}}$

19.10 c) .... $\boxed{n!}$

Corrigés

19.3 a) On choisit $u'(t)=e^t$ et $v(t)=t$. On a

$$\int_0^1 te^t\,dt=\Big[te^t\Big]_0^1-\int_0^1 e^t\,dt=e-\Big[e^t\Big]_0^1=e-(e-1)=1.$$

19.3 b) On a

$$\int_1^e t\ln(t)\,dt=\left[\frac{t^2}{2}\ln(t)\right]_1^e-\int_1^e\frac{t^2}{2}\times\frac{1}{t}\,dt=\frac{e^2}{2}-\int_1^e\frac{t}{2}\,dt$$

$$=\frac{e^2}{2}-\left[\frac{t^2}{4}\right]_1^e=\frac{2e^4}{4}-\left(\frac{e^2}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{e^2+1}{4}.$$

19.4 a) On a

$$\int_1^e\frac{\ln(t)}{t^2}\,dt=\left[\ln(t)\times\frac{-1}{t}\right]_1^e-\int_1^e-\frac{1}{t^2}\,dt=\frac{-1}{e}-\left[\frac{1}{t}\right]_1^e$$

$$=-\frac{2}{e}+1=\frac{e-2}{e}.$$

19.4 b) On a

$$\int_1^{\mathrm{e}} t^2 \ln(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\ln(t)\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{t^3}{3} \times \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{\mathrm{e}^3}{3} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{t^2}{3}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^3}{3} - \left[\frac{t^3}{9}\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{e}^3}{3} - \left(\frac{\mathrm{e}^3}{9} - \frac{1}{9}\right) = \frac{2\mathrm{e}^3+1}{9}.$$

19.4 c) On a

$$\int_0^{10} (2t+1)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-(2t+1)\times \mathrm{e}^{-t}\right]_0^{10} - \int_0^{10} -2\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -21\mathrm{e}^{-10} + 1 - \left[2\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{10}$$
$$= -21\mathrm{e}^{-10} + 1 - 2\mathrm{e}^{-10} + 2 = 3 - 23\mathrm{e}^{-10}.$$

19.4 d) On a

$$\int_{\frac{-1}{3}}^{0} (4-3t)\mathrm{e}^{3t+1}\,\mathrm{d}t = \left[(4-3t)\times\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3t+1}\right]_{\frac{-1}{3}}^{0} - \int_{\frac{-1}{3}}^{0} -3\times\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3t+1}\,\mathrm{d}t = \left(\frac{4}{3}\mathrm{e} - \frac{5}{3}\right) - \int_{\frac{-1}{3}}^{0} -\mathrm{e}^{3t+1}\,\mathrm{d}t$$
$$= \left(\frac{4}{3}\mathrm{e} - \frac{5}{3}\right) + \left[\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3t+1}\right]_{\frac{-1}{3}}^{0} = \left(\frac{4}{3}\mathrm{e} - \frac{5}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\mathrm{e} - \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3}\mathrm{e} - 2.$$

19.5 a) On a

$$\int_1^5 1\times\ln(t)\,\mathrm{d}t = \left[t\ln(t)\right]_1^5 - \int_1^5 t\times\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = 5\ln(5) - \int_1^5 1\,\mathrm{d}t = 5\ln(5) - (5-1) = 5\ln(5) - 4.$$

19.5 b) On a

$$\int_{\mathrm{e}}^{x} 1\times\ln(t)\,\mathrm{d}t = \left[t\ln(t)\right]_{\mathrm{e}}^{x} - \int_{\mathrm{e}}^{x} t\times\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = x\ln(x) - \mathrm{e} - \int_{\mathrm{e}}^{x} 1\,\mathrm{d}t = x\ln(x) - \mathrm{e} - (x-\mathrm{e}) = x\ln(x) - x.$$

19.5 c) On a

$$\int_1^5 \ln(t)\ln(t)\,\mathrm{d}t = \left[(t\ln(t)-t)\times\ln(t)\right]_1^5 - \int_1^5 (t\ln(t)-t)\times\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = (5\ln(5)-5)\ln(5) - \int_1^5 \ln(t) - 1\,\mathrm{d}t$$
$$= 5\ln(5)^2 - 5\ln(5) - \underbrace{\int_1^5 \ln(t)\,\mathrm{d}t}_{\substack{\text{calculé}\\ \text{précédemment}}} + \int_1^5 1\,\mathrm{d}t$$
$$= 5\ln(5)^2 - 5\ln(5) - (5\ln(5)-4) + 4 = 5\ln(5)^2 - 10\ln(5) + 8.$$

19.5 d) On a

$$\int_1^5 \ln(t)\times\ln(t)^2\,\mathrm{d}t = \left[(t\ln(t)-t)\times\ln(t)^2\right]_1^5 - \int_1^5 (t\ln(t)-t)\times\frac{2}{t}\ln(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= (5\ln(5)-5)\ln(5)^2 - \int_1^5 2\ln(t)^2 - 2\ln(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= 5\ln(5)^3 - 5\ln(5)^2 - 2\underbrace{\int_1^5 \ln(t)^2\,\mathrm{d}t}_{\substack{\text{calculé}\\ \text{précédemment}}} + 2\underbrace{\int_1^5 \ln(t)\,\mathrm{d}t}_{\substack{\text{calculé}\\ \text{précédemment}}} = 5\ln(5)^3 - 15\ln(5)^2 + 30\ln(5) - 24.$$

19.6 a) On a

$$\int_0^1 t^2\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \Big[t^2\mathrm{e}^t\Big]_0^1 - \int_0^1 2t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \mathrm{e} - \left(\Big[2t\mathrm{e}^t\Big]_0^1 - \int_0^1 2\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right)$$
$$= \mathrm{e} - \Big[2t\mathrm{e}^t\Big]_0^1 + \Big[2\mathrm{e}^t\Big]_0^1 = \mathrm{e} - 2\mathrm{e} + 2\mathrm{e} - 2 = \mathrm{e} - 2.$$

19.6 b) On a

$$\int_1^{\mathrm{e}} t^2(\ln(t))^2\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\times(\ln t)^2\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{t^3}{3}\times 2\frac{1}{t}\ln(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^3}{3} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{2t^2}{3}\ln(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{\mathrm{e}^3}{3} - \left(\left[\frac{2t^3}{9}\times\ln t\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{2t^3}{9}\times\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\right) = \frac{\mathrm{e}^3}{3} - \left(\frac{2\mathrm{e}^3}{9} - \frac{2}{9}\int_1^{\mathrm{e}} t^2\,\mathrm{d}t\right)$$
$$= \frac{\mathrm{e}^3}{3} - \frac{2\mathrm{e}^3}{9} + \frac{2}{9}\left[\frac{t^3}{3}\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{e}^3}{9} + \frac{2}{9}\left(\frac{\mathrm{e}^3}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{3\mathrm{e}^3}{27} + \frac{2\mathrm{e}^3}{27} - \frac{2}{27} = \frac{5}{27}\mathrm{e}^3 - \frac{2}{27}.$$

19.7 a) On a

$$\int_0^1 t^2\mathrm{e}^{2t+1}\,\mathrm{d}t = \left[t^2\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t+1}\right]_0^1 - \int_0^1 2t\times\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\mathrm{e}^3 - \int_0^1 t\times\mathrm{e}^{2t+1}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2}\mathrm{e}^3 - \left(\left[\frac{1}{2}t\mathrm{e}^{2t+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t+1}\,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^3 - \left[\frac{1}{2}t\mathrm{e}^{2t+1}\right]_0^1 + \left[\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2t+1}\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{2}\mathrm{e}^3 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^3 + \frac{1}{4}\mathrm{e}^3 - \frac{1}{4}\mathrm{e} = \frac{1}{4}\mathrm{e}^3 - \frac{1}{4}\mathrm{e}.$$

19.7 b) On a

$$\int_1^7 \ln(t)^2\times\frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t = \int_1^7 \ln(t)^2\times t^{-3}\,\mathrm{d}t = \left[(\ln t)^2\times\frac{t^{-2}}{-2}\right]_1^7 - \int_1^7 \frac{2}{t}\ln(t)\times\frac{t^{-2}}{-2}\,\mathrm{d}t$$
$$= \left[(\ln t)^2\times\frac{-1}{2t^2}\right]_1^7 + \int_1^7 \frac{1}{2}\frac{2}{t^3}\ln(t)\,\mathrm{d}t = (\ln 7)^2\times\frac{-1}{98} + \int_1^7 \frac{1}{t^3}\ln(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= (\ln 7)^2\times\frac{-1}{98} + \left[\frac{-1}{2t^2}\times\ln t\right]_1^7 - \int_1^7 \frac{-1}{2t^2}\times\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = (\ln 7)^2\times\frac{-1}{98} - \frac{1}{98}\times\ln 7 + \int_1^7 \frac{1}{2t^3}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{-1}{98}(\ln 7)^2 - \frac{1}{98}\times\ln 7 + \left[-\frac{1}{4t^2}\right]_1^7 = \frac{-1}{98}(\ln 7)^2 - \frac{1}{98}\ln 7 + \left(-\frac{1}{196} + \frac{1\times 49}{4\times 49}\right)$$
$$= \frac{-1}{98}(\ln 7)^2 - \frac{1}{98}\ln 7 + \frac{24}{98} = \frac{1}{98}\big(-(\ln 7)^2 - \ln 7 + 24\big).$$

19.8 a) On a $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln(1+t)\Big]_0^1 = \ln(2).$

19.8 c) On a $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t = 1 - \Big[\ln(1+t)\Big]_0^1 = 1 - \ln(2).$

19.8 d) Soit $n\in\mathbb{N}$, on a

$$I_{n+1} + I_n = \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^{n+1}+t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^1 \frac{t^n(1+t)}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

19.8 e) Comme $I_{n+1} + I_n = \dfrac{1}{n+1}$, on a $I_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} - I_n$. On en déduit

$$I_3 = \frac{1}{3} - I_2 = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2} - I_1\right) = -\frac{1}{6} + I_1 = -\frac{1}{6} + \big(1 - \ln(2)\big) = \frac{5}{6} - \ln(2).$$

19.9 Soit $x > 0$. Pour commencer, on calcule

$$\begin{aligned}\int_0^x t^3 e^{-\frac{t^2}{2\pi}}\,dt &= \int_0^x t^2 \times t e^{-\frac{t^2}{2\pi}}\,dt = \int_0^x t^2 \times \pi \frac{2t}{2\pi} e^{-\frac{t^2}{2\pi}}\,dt \\ &= \left[t^2 \times \left(-\pi e^{-\frac{t^2}{2\pi}}\right)\right]_0^x - \int_0^x 2t \times \left(-\pi e^{-\frac{t^2}{2\pi}}\right) dt = -\pi x^2 e^{-\frac{x^2}{2\pi}} + \int_0^x 2\pi t e^{-\frac{t^2}{2\pi}}\,dt \\ &= -\pi x^2 e^{-\frac{x^2}{2\pi}} + \left[-2\pi^2 e^{-\frac{t^2}{2\pi}}\right]_0^x = -\pi x^2 e^{-\frac{x^2}{2\pi}} - 2\pi^2 e^{-\frac{x^2}{2\pi}} + 2\pi^2 = -\pi e^{-\frac{x^2}{2\pi}}\left(x^2 + 2\pi\right) + 2\pi^2.\end{aligned}$$

Or, par croissance comparée, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} -\pi e^{-\frac{x^2}{2\pi}}\left(x^2 + 2\pi\right) = 0$. Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_0^x t^3 e^{-\frac{t^2}{2\pi}} = 2\pi^2$.

19.10 a) Soit $A \in \mathbb{R}$. On a $I(0, A) = \displaystyle\int_0^A e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}\right]_0^A = 1 - e^{-A}$. Or, on a $\lim\limits_{A\to+\infty} 1 - e^{-A} = 1$.

Ainsi $\lim\limits_{A\to+\infty} \displaystyle\int_0^A t^0 e^{-t}\,dt = 1$. D'ou $J(0) = 1$.

19.10 b) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}J(n+1) &= \lim_{A\to+\infty} \int_0^A t^{n+1} e^{-t}\,dt \\ &= \lim_{A\to+\infty} \left(\left[t^{n+1} \times (-e^{-t})\right]_0^A - \int_0^A (n+1)t^n \times (-e^{-t})\,dt\right) \\ &= \lim_{A\to+\infty} \left(\left[-A^{n+1} e^{-A}\right] + \int_0^A (n+1)t^n e^{-t}\,dt\right) \\ &= \lim_{A\to+\infty} \left[-A^{n+1} e^{-A}\right] + (n+1) \lim_{A\to+\infty} \int_0^A t^n e^{-t}\,dt \\ &= (n+1)J(n)\end{aligned}$$

car $\lim\limits_{A\to+\infty} A^{n+1} e^{-A} = 0$, par croissance comparée.

19.10 c) Comme $J(0) = 1$ et que pout tout $n \in \mathbb{N}$, $J(n+1) = (n+1)J(n)$, on en déduit que $J(1) = 1$, puis $J(2) = 2$, $J(3) = 6$, puis $J(4) = 24$. On conjecture que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J(n) = n!$

Ceci se démontre par récurrence.

Fiche n° 20. Intégration par parties II

Réponses

20.1 a) .... $\boxed{0}$

20.1 b) .... $\boxed{0}$

20.1 c) .... $\boxed{e^{-5}}$

20.1 d) .... $\boxed{1}$

20.2 a) .... $\boxed{2x+1}$

20.2 b) .... $\boxed{\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}}$

20.2 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{(1-x)^2}}$

20.2 d) .... $\boxed{\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}}$

20.3 a) .... $\boxed{2\ln(2)-1}$

20.3 b) .... $\boxed{2-\dfrac{3}{e}}$

20.4 .... $\boxed{\dfrac{1}{(a+1)^2}-\dfrac{4^{a+1}}{(a+1)^2}+\dfrac{4^{a+1}}{a+1}\ln(4)}$

20.5 a) .... $\boxed{\dfrac{2x-4}{3}\sqrt{1+x}+\dfrac{4}{3}}$

20.5 b) .... $\boxed{\dfrac{4}{3}-\dfrac{2}{3}\sqrt{2}}$

20.5 c) .... $\boxed{\dfrac{5\sqrt{2}-3\sqrt{6}}{6}}$

20.5 d) .... $\boxed{\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}}$

20.5 e) .... $\boxed{\text{oui}}$

20.6 a) .... $\boxed{2(\ln(x)-2)\sqrt{x}+4}$

20.6 b) .... $\boxed{2(\ln(b)-2)\sqrt{b}-2(\ln(a)-2)\sqrt{a}}$

20.7 a) .... $\boxed{(x-a)\ln(x-a)-(x-a-1)}$

20.7 b) . $\boxed{(3-a)\ln(3-a)-(2-a)\ln(2-a)-1}$

20.7 c) .... $\boxed{10\ln(2)-3\ln(3)-2}$

20.8 a) .... $\boxed{3-3e^2}$

20.8 b) .... $\boxed{\dfrac{e^4-e^2}{4}}$

20.9 a) .... $\boxed{24e-168e^{-1}}$

20.9 b) .... $\boxed{144e^{-\frac{1}{2}}-86}$

20.10 a) .... $\boxed{J_{n+1}=I_n-I_{n+1}}$

20.10 b) .... $\boxed{I_n=\dfrac{1}{2^n}+2nJ_{n+1}}$

20.10 c) .... $\boxed{I_{n+1}=\dfrac{1}{n2^{n+1}}+\dfrac{2n-1}{2n}I_n}$

20.10 d) .... $\boxed{\dfrac{3\pi+8}{32}}$

20.10 e) .... $\boxed{\dfrac{15\pi+44}{192}}$

20.11 .... $\boxed{(x-1)\ln\big(1+\sqrt{x}\big)-\dfrac{1}{2}(x-2\sqrt{x}+1)}$

20.12 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{n+1}}$

20.12 b) .... $\boxed{I_{n,p}=-\dfrac{p}{n+1}I_{n,p-1}}$

20.12 c) .... $\boxed{(-1)^p\dfrac{p!}{(n+1)^{p+1}}}$

Corrigés

20.3 a) On a, en posant $u(x)=x$ et $v(x)=\ln(x)$,

$$\int_1^2 \ln(x)\,dx=\int_1^2 u'(x)v(x)\,dx=u(2)v(2)-u(1)v(1)-\int_1^2 u(x)v'(x)\,dx=2\ln(2)-\int_1^2 dx=2\ln(2)-1.$$

20.3 b) On a, en posant $u(x) = x+1$ et $v(x) = -\mathrm{e}^{-x}$,

$$\int_0^1 (x+1)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(1)v(1) - u(0)v(0) - \int_0^1 u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = -2\mathrm{e}^{-1} + 1 + \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 2 - \frac{3}{\mathrm{e}}.$$

20.4 On a, en posant $u(x) = \dfrac{x^{a+1}}{a+1}$ et $v(x) = \ln(x)$,

$$\begin{aligned}\int_1^4 x^a \ln(x)\,\mathrm{d}x &= \int_1^4 u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = u(4)v(4) - u(1)v(1) - \int_1^4 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{4^{a+1}}{a+1}\ln(4) - \int_1^4 \frac{x^a}{a+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{(a+1)^2} - \frac{4^{a+1}}{(a+1)^2} + \frac{4^{a+1}}{a+1}\ln(4).\end{aligned}$$

20.5 a) On a, en posant $u(t) = t$ et $v(t) = 2\sqrt{1+t}$,

$$\begin{aligned}g(x) &= \int_0^x u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = u(x)v(x) - u(0)v(0) - \int_0^x u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t \\ &= 2x\sqrt{1+x} - 2\int_0^x \sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t = 2x\sqrt{1+x} - \frac{4}{3}(1+x)\sqrt{1+x} + \frac{4}{3} = \frac{2x-4}{3}\sqrt{1+x} + \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

20.5 b) On a $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = g(1) = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{2}$.

20.5 c) On a $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = g\Big(\frac{1}{2}\Big) - g\Big(-\frac{1}{2}\Big) = \frac{5\sqrt{2} - 3\sqrt{6}}{6}$.

20.5 d) Pour $x > -1$, on a $g'(x) = \dfrac{2}{3}\sqrt{1+x} + \dfrac{2x-4}{6\sqrt{1+x}} = \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$.

20.5 e) Oui, car $g(0) = 0$ et, pour tout $x > -1$, on a $g'(x) = f(x)$.

Ceci n'est bien entendu pas un hasard puisque, pour toute fonction continue f définie sur un intervalle I et pour tout élément a de I, l'application g définie sur I par $g(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

20.6 a) Par intégration par parties, on a

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = 2\ln(x)\sqrt{x} - \int_1^x \frac{2\sqrt{t}}{t}\,\mathrm{d}t = 2(\ln(x) - 2)\sqrt{x} + 4.$$

20.6 b) On a $\displaystyle\int_a^b \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = 2(\ln(b) - 2)\sqrt{b} - 2(\ln(a) - 2)\sqrt{a}$.

20.7 a) Les applications $x \longmapsto x - a$ et $x \longmapsto \ln(x-a)$ sont dérivables et de dérivées continues respectivement égales à $x \longmapsto 1$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{x-a}$ sur $]a, +\infty[$. Ainsi, une intégration par parties donne, pour $x > a$:

$$F_a(x) = \int_{a+1}^x f_a(t)\,\mathrm{d}t = (x-a)\ln(x-a) - \int_{a+1}^x \mathrm{d}t = (x-a)\ln(x-a) - (x-a-1).$$

20.7 b) On a $\displaystyle\int_2^3 f_a(x)\,\mathrm{d}x = F_a(3) - F_a(2) = (3-a)\ln(3-a) - (2-a)\ln(2-a) - 1$.

20.7 c) Pour x dans $[2,3]$, on a $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ et $\ln\big(x^2-1\big) = (x+1) + (x-1)$. On a donc $\displaystyle\int_2^3 \ln\big(x^2-1\big)\,\mathrm{d}x = \int_2^3 \ln(x+1)\,\mathrm{d}x + \int_2^3 \ln(x-1)\,\mathrm{d}x = I_{-1} + I_1 = 10\ln(2) - 3\ln(3) - 2$.

20.8 a) On a, en posant $u(x) = x^2 + 1$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$,

$$\begin{aligned}\int_2^0 \left(x^2+1\right)\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \int_2^0 u(x)v''(x)\,\mathrm{d}x &= \Big[u(x)v'(x)\Big]_2^0 - \int_2^0 u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[u(x)v'(x)\Big]_2^0 - \left(\Big[u'(x)v(x)\Big]_2^0 - \int_2^0 u''(x)v(x)\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \Big[u(x)v'(x) - u'(x)v(x)\Big]_2^0 + \int_2^0 u''(x)v(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[\left(x^2+1\right)\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x\Big]_2^0 + \int_2^0 2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 1 - \mathrm{e}^2 + 2\left(1-\mathrm{e}^2\right) = 3 - 3\mathrm{e}^2.\end{aligned}$$

20.8 b) On a, en posant $u(x) = (x-1)^2$ et $v(x) = \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}$,

$$\begin{aligned}\int_1^2 \left(x^2-2x+1\right)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 u(x)v''(x)\,\mathrm{d}x &= \Big[u(x)v'(x) - u'(x)v(x)\Big]_1^2 + \int_1^2 u''(x)v(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{(x-1)^2\mathrm{e}^{2x}}{2} - \frac{(x-1)\mathrm{e}^{2x}}{2}\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^4 - \mathrm{e}^2}{4}.\end{aligned}$$

20.9 a) On a, en posant $u(x) = (x+1)^4$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-x}$,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \left(x^2+2x+1\right)^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 u(x)v^{(4)}(x)\,\mathrm{d}x &= \Big[u(x)v^{(3)}(x)\Big]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 u'(x)v^{(3)}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[u(x)v^{(3)}(x) - u'(x)v''(x)\Big]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 u''(x)v''(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[u(x)v^{(3)}(x) - u'(x)v''(x) + u''(x)v'(x)\Big]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 u^{(3)}(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[u(x)v^{(3)}(x) - u'(x)v''(x) + u''(x)v'(x) - u^{(3)}(x)v(x)\Big]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 u^{(4)}(x)v(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[-(x+1)^4\mathrm{e}^{-x} - 4(x+1)^3\mathrm{e}^{-x} - 12(x+1)^2\mathrm{e}^{-x} - 24(x+1)\mathrm{e}^{-x}\Big]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 24\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= 24\mathrm{e} - 168\mathrm{e}^{-1}.\end{aligned}$$

20.9 b) On a, en posant $u(x) = x^3 - 2x + 1$ et $v(x) = 8\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0 \left(x^2+2x+1\right)^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 u(x)v^{(3)}(x)\,\mathrm{d}x &= \Big[u(x)v''(x)\Big]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 u'(x)v''(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[u(x)v''(x) - u'(x)v'(x)\Big]_{-1}^0 + \int_{-1}^0 u''(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[u(x)v''(x) - u'(x)v'(x) + u''(x)v(x)\Big]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 u^{(3)}(x)v(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[2\left(x^3-2x+1\right)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 4\left(3x^2-2\right)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + 48x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\Big]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 48\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = 144\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} - 86.\end{aligned}$$

20.10 a) On a

$$J_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{(1+x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = I_n - I_{n+1}.$$

20.10 b) Les applications $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$ sont dérivables et de dérivées continues respectivement égales à $x \longmapsto 1$ et $x \longmapsto -\dfrac{2nx}{(1+x^2)^{n+1}}$ sur $[0,1]$. Ainsi, une intégration par parties donne

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{(1+x^2)^n}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{2nx^2}{(1+x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2^n} + 2nJ_{n+1}.$$

20.10 c) Sachant que $J_{n+1} = I_n - I_{n+1}$, on obtient $I_n = \dfrac{1}{2^n} + 2nJ_{n+1} = \dfrac{1}{2^n} + 2n(I_n - I_{n+1})$. Ce qui donne $I_{n+1} = \dfrac{1}{n2^{n+1}} + \dfrac{2n-1}{2n} I_n$.

20.10 d) Comme $I_1 = \dfrac{\pi}{4}$, on trouve $I_2 = \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2}I_1 = \dfrac{\pi+2}{8}$. Puis $I_3 = \dfrac{1}{2\times 2^3} + \dfrac{3}{4}I_2 = \dfrac{3\pi+8}{32}$.

20.10 e) Comme $I_3 = \dfrac{3\pi+8}{32}$, on trouve $I_4 = \dfrac{1}{3\times 2^4} + \dfrac{5}{6}I_3 = \dfrac{15\pi+44}{192}$.

20.11 Les applications $x \longmapsto x-1$ et $x \longmapsto \ln\bigl(1+\sqrt{x}\bigr)$ sont dérivables et de dérivées continues respectivement égales à $x \longmapsto 1$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}\bigl(1+\sqrt{x}\bigr)}$ sur $]0,+\infty[$. Ainsi, pour x dans $]0,+\infty[$, une intégration par parties donne

$$\begin{aligned}
F(x) = \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^x \ln\bigl(1+\sqrt{t}\bigr)\,\mathrm{d}t &= \Bigl[(t-1)\ln\bigl(1+\sqrt{t}\bigr)\Bigr]_1^x - \int_1^x \frac{t-1}{2\sqrt{t}\bigl(1+\sqrt{t}\bigr)}\,\mathrm{d}t \\
&= (x-1)\ln\bigl(1+\sqrt{x}\bigr) - \int_1^x \frac{\bigl(\sqrt{t}-1\bigr)\bigl(\sqrt{t}+1\bigr)}{2\sqrt{t}\bigl(1+\sqrt{t}\bigr)}\,\mathrm{d}t \\
&= (x-1)\ln\bigl(1+\sqrt{x}\bigr) - \frac{1}{2}\int_1^x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t = (x-1)\ln\bigl(1+\sqrt{x}\bigr) - \frac{1}{2}(x - 2\sqrt{x} + 1).
\end{aligned}$$

20.12 a) Pour x dans $]0,1]$, on a $f_{n,0}(x) = \displaystyle\int_x^1 t^n\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_x^1 = \frac{1}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{n+1}$. D'où,

$$I_{n,0} = \lim_{x\to 0} f_{n,p}(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}.$$

20.12 b) Pour x dans $]0,1]$, on calcule $f_{n,p}(x)$ à l'aide d'une intégration par parties dans laquelle on dérive la partie logarithmique et on intègre la partie polynomiale. On a donc

$$f_{n,p}(x) = \int_x^1 t^n(\ln(t))^p\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}(\ln(t))^p\right]_x^1 - \int_x^1 \frac{t^{n+1}}{n+1}\,\frac{p(\ln(t))^{p-1}}{t}\,\mathrm{d}t = -\frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln(x))^p - \frac{p}{n+1}f_{n,p-1}(x).$$

D'où, par passage à la limite lorsque x tend vers 0 : $I_{n,p} = -\dfrac{p}{n+1}I_{n,p-1}$.

20.12 c) Par une récurrence sur l'entier naturel p, on a $I_{n,p} = (-1)^p\dfrac{p!}{(n+1)^{p+1}}$. Montrons-le.

- En effet, cette expression est vraie pour $p=0$, puisque $I_{n,0} = \dfrac{1}{n+1} = (-1)^0\dfrac{0!}{(n+1)^{0+1}}$.
- De plus, si $I_{n,p-1} = (-1)^{p-1}\dfrac{(p-1)!}{(n+1)^p}$, alors $I_{n,p} = -\dfrac{p}{n+1}I_{n,p-1} = (-1)^p\dfrac{p!}{(n+1)^{p+1}}$, car $p! = p\times(p-1)!$.

Fiche n° 21. Intégration des fonctions trigonométriques

Réponses

21.1 a) $\boxed{(2x+1)(2x-3)}$

21.1 b) $\boxed{2(x-1)(-x+7)}$

21.1 c) $\boxed{(x-3)^2}$

21.1 d) $\boxed{3x\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^{x^2}-2x)}$

21.2 a) $\boxed{2x}$

21.2 b) $\boxed{2(1-x)}$

21.2 c) $\boxed{5\sin\left(-x+\dfrac{\pi}{7}\right)}$

21.2 d) $\boxed{3\mathrm{e}^{3x}}$

21.3 a) $\boxed{2}$

21.3 b) $\boxed{\sqrt{2}}$

21.3 c) $\boxed{-2}$

21.3 d) $\boxed{8}$

21.4 a) $\boxed{0}$

21.4 b) $\boxed{0}$

21.4 c) $\boxed{\sqrt{2}}$

21.4 d) $\boxed{\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}}$

21.4 e) $\boxed{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}}$

21.4 f) $\boxed{\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}}$

21.5 a) $\boxed{2-\pi}$

21.5 b) $\boxed{-\dfrac{2}{3}}$

21.5 c) $\boxed{-\dfrac{1}{3\pi}}$

21.5 d) $\boxed{\dfrac{3}{2\pi}+\dfrac{7\pi}{12}}$

21.6 a) $\boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

21.6 b) $\boxed{\dfrac{1}{4}}$

21.6 c) $\boxed{\dfrac{1}{6}}$

21.6 d) $\boxed{\dfrac{1}{3}}$

21.6 e) $\boxed{1}$

21.6 f) $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

21.7 a) $\boxed{\cos(1)-\cos(\mathrm{e})}$

21.7 b) $\boxed{\mathrm{e}-1}$

21.7 c) $\boxed{\dfrac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-2}}{6}}$

21.7 d) $\boxed{\dfrac{\sin(\mathrm{e})-\sin(1)}{2}}$

21.8 $\boxed{\text{e}}$

21.9 a) $\boxed{\dfrac{\pi-2}{2}}$

21.9 b) $\boxed{1}$

21.9 c) $\boxed{\dfrac{\pi^2}{4}-2}$

21.9 d) $\boxed{\pi}$

21.10 a) $\boxed{\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}-1}{2}}$

21.10 b) $\boxed{\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}+1}{2}}$

21.10 c) $\boxed{\dfrac{1+2\mathrm{e}^{\pi}}{5}}$

21.10 d) $\boxed{\dfrac{3-2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}}}{13}}$

21.11 a) $\boxed{\dfrac{\pi}{2}}$

21.11 b) $\boxed{1}$

21.11 c) $\boxed{\text{a}}$

21.11 d) $\boxed{\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\pi}{2}}$

21.11 e) $\boxed{\dfrac{2}{3}\times 1}$

21.11 f) $\boxed{\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\pi}{2}}$

21.11 g) $\boxed{\dfrac{4}{5}\times\dfrac{2}{3}\times 1}$

21.11 h) $\boxed{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k+1}}$

21.11 i) $\boxed{\dfrac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}}$

21.11 j) $\boxed{\displaystyle\frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}}$

21.11 k) $\boxed{\dfrac{\pi}{2}\dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2}}$

Corrigés

21.1 b) On a

$$(x-1)^2+(3-3x)(x-5) = (x-1)^2-3(x-1)(x-5) = (x-1)(x-1-3(x-5))$$
$$= (x-1)(-2x+14) = 2(x-1)(-x+7).$$

21.1 d) On a $3x\mathrm{e}^{x+x^2}-6x^2\mathrm{e}^x = 3x\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{x^2}-3\times 2x\times x\mathrm{e}^x = 3x\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^{x^2}-2x)$.

21.2 b) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=-u(x)^2$ où $u(x)=(1-x)$. Les fonctions u et f sont dérivables en tant que fonctions polynomiales et on a $u'(x)=-1$, donc $f'(x)=-2u(x)u'(x)=2(1-x)$.

21.3 c) On a $\displaystyle\int_0^{\pi}(\cos(t)-\sin(t))\,\mathrm{d}t = \Big[\sin(t)+\cos(t)\Big]_0^{\pi} = 0-1-(0+1)=-2$.

21.4 d) On a

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{2\pi+\frac{\pi}{3}}\sin(t)\,\mathrm{d}t = \Big[-\cos(t)\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{2\pi+\frac{\pi}{3}} = -\cos\Big(2\pi+\frac{\pi}{3}\Big)-\Big(-\cos\Big(\frac{\pi}{6}\Big)\Big)$$
$$= -\cos\Big(\frac{\pi}{3}\Big)+\cos\Big(\frac{\pi}{6}\Big) = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

21.4 f) On a

$$\int_{-\frac{9\pi}{4}}^{\frac{25\pi}{6}}\sin(t)\,\mathrm{d}t = \Big[-\cos(t)\Big]_{-\frac{9\pi}{4}}^{\frac{25\pi}{6}} = -\cos\Big(4\pi+\frac{\pi}{6}\Big)+\cos\Big(-2\pi-\frac{\pi}{4}\Big) = -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}.$$

21.5 c) On a

$$\int_{-\frac{1}{6}}^{1}\cos\Big(3\pi t+\frac{\pi}{2}\Big)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin\big(3\pi t+\frac{\pi}{2}\big)}{3\pi}\right]_{-\frac{1}{6}}^{1} = \frac{1}{3\pi}\Big(\sin\Big(3\pi+\frac{\pi}{2}\Big)-\sin\Big(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\Big)\Big) = \frac{1}{3\pi}(-1-0) = -\frac{1}{3\pi}.$$

21.5 d) On a

$$\int_{-\frac{1}{6}}^{1}\Big(3\cos(\pi t)+\frac{\pi}{2}\Big)\,\mathrm{d}t = 3\int_{-\frac{1}{6}}^{1}\cos(\pi t)\,\mathrm{d}t+\frac{\pi}{2}\int_{-\frac{1}{6}}^{1}\mathrm{d}t = 3\left[\frac{\sin(\pi t)}{\pi}\right]_{-\frac{1}{6}}^{1}+\frac{\pi}{2}\Big(1-\Big(-\frac{1}{6}\Big)\Big)$$
$$= 3\frac{\sin(\pi)-\sin(-\frac{\pi}{6})}{\pi}+\frac{\pi}{2}\frac{7}{6} = \frac{3}{2\pi}+\frac{7\pi}{12}.$$

21.6 a) On pose, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $u(t)=t^2$, alors $u'(t)=2t$. On a donc

$$\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}2t\cos(t^2)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}u'(t)\cos(u(t))\,\mathrm{d}t = \Big[\sin(u(t))\Big]_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = \sin\Big(\Big(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Big)^2\Big)-\sin(0^2) = \sin\Big(\frac{\pi}{4}\Big) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

21.6 c) On pose, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $u(t)=\sin(3t)$, alors $u'(t)=3\cos(3t)$. On a donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin(3t)\cos(3t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}}u(t)u'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\left[\frac{(u(t))^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\sin^2(\frac{\pi}{2})-\sin^2(0)}{6} = \frac{1}{6}.$$

21.6 f) On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u(t) = \cos(t)$, alors $u'(t) = -\sin(t)$. On a donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(t)}{\cos^3(t)}\,\mathrm{d}t = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} u'(t)(u(t))^{-3}\,\mathrm{d}t = -\left[\frac{(u(t))^{-2}}{-2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos^2(\frac{\pi}{4})} - \frac{1}{\cos^2(0)}\right) = \frac{1}{2}(2-1) = \frac{1}{2}.$$

....

21.7 c) On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u(t) = -3\sin(2t) + 1$, alors $u'(t) = -6\cos(2t)$. On a donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{-3\sin(2t)+1}\cos(2t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{6}\left[\mathrm{e}^{u(t)}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{6}(\mathrm{e}^{-3\sin(\frac{\pi}{2})+1} - \mathrm{e}^{-3\sin(0)+1}) = \frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-2}}{6}.$$

....

21.7 d) On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u(t) = \mathrm{e}^{t^2}$, alors $u'(t) = \mathrm{e}^{t^2} \times 2t$. On a donc

$$\int_0^1 t\mathrm{e}^{t^2}\cos(\mathrm{e}^{t^2})\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^1 \cos(u(t))u'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\Big[\sin(u(t))\Big]_0^1 = \frac{1}{2}(\sin(\mathrm{e}^{1^2}) - \sin(\mathrm{e}^{0^2})) = \frac{\sin(\mathrm{e}) - \sin(1)}{2}.$$

....

21.8 On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u(t) = \sin(t)$, alors $u'(t) = \cos(t)$. On a donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\sin^n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (u(t))^n u'(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{(u(t))^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin^{n+1}(\frac{\pi}{2}) - \sin^{n+1}(0)}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

....

21.9 b) On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u(t) = t$ et $v'(t) = \sin(t)$, alors $u'(t) = 1$ et $v(t) = -\cos(t)$. En intégrant par parties, on obtient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\,\mathrm{d}t = \Big[t(-\cos(t))\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \times (-\cos(t))\,\mathrm{d}t = 0 - 0 + \Big[\sin(t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1.$$

....

21.9 c) On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u(t) = t^2$ et $v'(t) = \cos(t)$, alors $u'(t) = 2t$ et $v(t) = \sin(t)$. En intégrant par parties, on obtient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos(t)\,\mathrm{d}t = \Big[t^2\sin(t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t\sin(t)\,\mathrm{d}t = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 0 - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\,\mathrm{d}t.$$

D'après la question précédente, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\,\mathrm{d}t = 1$, donc $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{4} - 2$.

Si la question précédente n'avait pas été là, nous aurions enchaîné deux intégrations par parties.

....

21.10 d) Notons l'intégrale à calculer $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \mathrm{e}^{-2t}\sin(3t)\,\mathrm{d}t$.

On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u(t) = \mathrm{e}^{-2t}$ et $v'(t) = \sin(3t)$, alors $u'(t) = -2\mathrm{e}^{-2t}$ et $v(t) = -\dfrac{\cos(3t)}{3}$.

En intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned} I &= \left[\mathrm{e}^{-2t}\left(-\frac{\cos(3t)}{3}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{6}} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} -2\mathrm{e}^{-2t}\left(-\frac{\cos(3t)}{3}\right)\mathrm{d}t = -\frac{1}{3}(0-1) - \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \mathrm{e}^{-2t}\cos(3t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \mathrm{e}^{-2t}\cos(3t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Une autre intégration par parties avec $a(t) = \mathrm{e}^{-2t}$, $b'(t) = \cos(3t)$, $a'(t) = -2\mathrm{e}^{-2t}$, $b(t) = \dfrac{\sin(3t)}{3}$ donne

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \mathrm{e}^{-2t}\cos(3t)\,\mathrm{d}t &= \left[\mathrm{e}^{-2t}\frac{\sin(3t)}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} -2\mathrm{e}^{-2t}\frac{\sin(3t)}{3}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{3}(\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}} - 0) + \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \mathrm{e}^{-2t}\sin(3t)\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}}}{3} + \frac{2}{3}I. \end{aligned}$$

En regroupant les deux calculs, on obtient $I = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}}}{3} + \frac{2}{3}I\right) = \frac{1}{3} - \frac{2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}}}{9} - \frac{4}{9}I$, donc $I + \frac{4}{9}I = \frac{1}{3} - \frac{2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}}}{9}$, donc $\frac{13}{9}I = \frac{1}{3} - \frac{2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}}}{9}$, d'où $I = \frac{9}{13}\left(\frac{1}{3} - \frac{2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}}}{9}\right) = \frac{1}{13}(3 - 2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}}) = \frac{3 - 2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}}}{13}$.

21.11 c) On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u(t) = \cos^{n+1}(t)$ et $v'(t) = \cos(t)$, alors $u'(t) = (n+1)\cos^n(t)(-\sin(t))$ et $v(t) = \sin(t)$. En intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t = \Big[\cos^{n+1}(t)\sin(t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)\cos^n(t)(-\sin(t))\sin(t)\,\mathrm{d}t \\ &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\sin^2(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Or, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$, donc

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)(1 - \cos^2(t))\,\mathrm{d}t = (n+1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2}(t)\,\mathrm{d}t\right) \\ &= (n+1)(I_n - I_{n+2}). \end{aligned}$$

Donc $I_{n+2} + (n+1)I_{n+2} = (n+1)I_{n+1}$, d'où $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$, donc $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n$.

21.11 f) D'après le résultat de la question c), on a $I_4 = \frac{3}{4}I_2 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}$.

21.11 g) D'après le résultat de la question c), on a $I_5 = \frac{4}{5}I_3 = \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \times 1$.

21.11 h) À l'aide des résultats des questions e) et g), on conjecture que

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1} \times \frac{2n-4}{2n-3} \times \cdots \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \times 1 = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}.$$

Le résultat se prouve alors par récurrence.

21.11 i) L'idée est de compléter le dénominateur avec le produit des nombres pairs de 2 à $2n$ afin d'obtenir $1 \times 2 \times \cdots \times 2n \times (2n+1) = (2n+1)!$, ce qui donne

$$I_{2n+1} = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{2k+1} \times \frac{2k}{2k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{4k^2}{2k(2k+1)} = \frac{4^n}{(2n+1)!}\prod_{k=1}^{n} k^2 = \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

21.11 j) À l'aide des résultats des questions d) et f), on conjecture que

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \times \frac{2n-5}{2n-4} \times \cdots \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}.$$

Le résultat se prouve alors par récurrence.

21.11 k) L'idée est de compléter le numérateur avec le produit des nombres pairs de 2 à $2n$ afin d'obtenir $1 \times 2 \times \cdots \times (2n-1) \times 2n = (2n)!$, ce qui donne

$$I_{2n} = \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} = \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{2k-1}{2k} \times \frac{2k}{2k}\right) = \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)2k}{4k^2} = \frac{\pi}{2}\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}.$$

Fiche n° 22. Cardinaux et coefficients binomiaux

Réponses

22.1 a) $-\dfrac{15}{2}$

22.1 b) $\dfrac{15}{13}$

22.1 c) $\dfrac{5}{2}$

22.2 a) $4\sqrt{2}$

22.2 b) $3\sqrt{5}$

22.2 c) $20\sqrt{3}$

22.2 d) $12\sqrt{3}$

22.3 a) 13

22.3 b) 3

22.3 c) 7

22.4 a) 4

22.4 b) 11

22.4 c) 8

22.5 a) 1

22.5 b) 2

22.5 c) 6

22.5 d) 24

22.5 e) 120

22.5 f) 720

22.5 g) $5\,040$

22.5 h) 1

22.6 a) 20

22.6 b) $10\,100$

22.6 c) 140

22.6 d) $\dfrac{3}{2}$

22.6 e) 18

22.6 f) $4\,320$

22.7 a) $-\dfrac{1}{30}$

22.7 b) $\dfrac{11}{12}$

22.7 c) $\dfrac{17}{120}$

22.8 a) $n(n+1)(n+2)$

22.8 b) $2(n+1)(2n+1)$

22.8 c) $\dfrac{n-1}{n+2}$

22.9 a) $\dfrac{n}{(n+1)!}$

22.9 b) $\dfrac{(n-3)n!}{2^{2(n+1)}}$

22.9 c) $\dfrac{-1}{n(n+1)(n+1)!}$

22.9 d) $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$

22.10 a) 6

22.10 b) 9

22.10 c) 35

22.10 d) 1

22.10 e) 45

22.10 f) 84

22.11 a) $\dfrac{n\big(n^2-3n+8\big)}{6}$

22.11 b) $\dbinom{n+1}{3}$

22.11 c) 1

22.11 d) $\dfrac{2(2n+1)}{n+1}$

22.12 $\dbinom{5}{3}=10$

22.13 a) $\dbinom{52}{5}$

22.13 b) $4\dbinom{13}{5}$

22.13 c) $\dbinom{12}{5}$

22.13 d) $\dbinom{13}{2}\dbinom{13}{1}\dbinom{13}{2}$

22.13 e) $\dbinom{13}{1}\dbinom{39}{4}$

22.13 f) $\dbinom{52}{5}-\dbinom{48}{5}$

22.13 g) $\dbinom{52}{5}-2\dbinom{48}{5}+\dbinom{44}{5}$

22.13 h) $1\times 3\times 12\dbinom{36}{2}+\dbinom{3}{2}\dbinom{12}{2}\dbinom{36}{1}$

22.14 a) $6!=720$

22.14 b) $\dbinom{5}{2}\dbinom{3}{2}=30$

22.15 a) $\dbinom{11}{4}\dbinom{7}{4}\dbinom{3}{2}$

22.15 b) $\dbinom{11}{5}\dbinom{6}{2}\dbinom{4}{2}\dbinom{2}{1}$

22.16 voir corrigé

22.17 a) $\dfrac{2n+1}{2(n+1)}$

22.17 b) .... $\boxed{\text{b}}$

22.18 .... $\boxed{2^n n!}$

22.19 a)........... $\boxed{(2n+1)!}$

22.19 b)........... $\boxed{\dfrac{(2n+1)!}{2^n n!}}$

22.20 a)........... $\boxed{a_p - a_{n+1}}$

22.20 b)........... $\boxed{\dbinom{p+k}{p}}$

22.20 c)........ $\boxed{\dbinom{p+n+1}{p+1}}$

Corrigés

22.1 a) Puisque $\frac{1}{5} - \frac{7}{15} = \frac{3-7}{15} = -\frac{4}{15}$, on a $\dfrac{2}{\frac{1}{5} - \frac{7}{15}} = -2 \times \frac{15}{4} = -\frac{15}{2}$.

22.1 b) On a $\dfrac{\frac{2}{3} - \frac{1}{6}}{\frac{3}{5} - \frac{1}{6}} = \dfrac{\frac{4-1}{6}}{\frac{18-5}{30}} = \frac{1}{2} \times \frac{30}{13} = \frac{15}{13}$.

22.1 c) On a $\dfrac{2 - \frac{3}{7}}{\frac{1}{5} + \frac{3}{7}} = \dfrac{\frac{14-3}{7}}{\frac{7+15}{35}} = \frac{11}{7} \times \frac{35}{22} = \frac{5}{2}$.

22.2 a) On a $\sqrt{32} = \sqrt{2 \times 4^2} = 4\sqrt{2}$.

22.2 b) On a $\sqrt{45} = \sqrt{5 \times 3^2} = 3\sqrt{5}$.

22.2 c) On a $\sqrt{1200} = \sqrt{3 \times 20^2} = 20\sqrt{3}$.

22.2 d) On a $432 = 2^4 \times 3^3$, donc $\sqrt{432} = \sqrt{4^2 \times 3^2 \times 3} = 4 \times 3 \times \sqrt{3} = 12\sqrt{3}$.

22.3 b) On a $\mathsf{Card}(A \cap B) = \mathsf{Card}(A) + \mathsf{Card}(B) - \mathsf{Card}(A \cup B) = 7 + 8 - 12 = 3$.

22.3 c) On a $\mathsf{Card}(B) = \mathsf{Card}(A \cup B) + \mathsf{Card}(A \cap B) - \mathsf{Card}(A) = 8 + 2 - 3 = 7$.

22.4 a) D'après la formule d'inclusion-exclusion, on a

$$8 = \mathsf{Card}(A \cup B) = \mathsf{Card}(A) + \mathsf{Card}(B) - \mathsf{Card}(A \cap B) = 3\,\mathsf{Card}(A) - 4 \quad \text{donc} \quad \mathsf{Card}(A) = \frac{8+4}{3} = 4.$$

22.4 b) D'après la formule d'inclusion-exclusion, on a

$$13 = \mathsf{Card}(A \cup B) = \mathsf{Card}(A) + \mathsf{Card}(B) - \mathsf{Card}(A \cap B) = 3 + \mathsf{Card}(B) - 1 \quad \text{donc} \quad \mathsf{Card}(B) = 11.$$

22.4 c) D'après la formule d'inclusion-exclusion, on a

$$9 = \mathsf{Card}(A \cup B) = \mathsf{Card}(A) + \mathsf{Card}(B) - \mathsf{Card}(A \cap B) = 2\,\mathsf{Card}(B) - 5 - 2$$

d'où $\mathsf{Card}(B) = \dfrac{9+7}{2} = 8$ et par suite $\mathsf{Card}(A) = \mathsf{Card}(B) - 5 = 3$.

22.5 h) Attention ! Par convention, on a $0! = 1$. Grâce à cette convention, on a $1! = 1 \times 0!$

22.6 a) Par définition de la factorielle, on a $\dfrac{5!}{3!} = \dfrac{5 \times 4 \times 3!}{3!} = 5 \times 4 = 20$.

22.6 b) Par définition de la factorielle, on a $\dfrac{101!}{99!} = \dfrac{101 \times 100 \times 99!}{99!} = 101 \times 100 = 10\ 100$.

22.6 c) Par définition de la factorielle et sachant que $3! = 6$, on a $\dfrac{7!}{3!^2} = \dfrac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!^2} = 7 \times 5 \times 4 = 140$.

22.6 d) Par définition de la factorielle, on a $\dfrac{3! \times 6!}{4! \times 5!} = \dfrac{3! \times 6 \times 5!}{4 \times 3! \times 5!} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$.

22.6 e) Par définition de la factorielle, on a $4! - 3! = 4 \times 3! - 3! = (4-1)3! = 3 \times 6 = 18$.

22.6 f) Par définition de la factorielle, on a $7! - 6! = 7 \times 6! - 6! = (7-1)6! = 6 \times 720 = 4\ 320$.

22.7 a) On commence ici par déterminer d'éventuels facteurs communs entre les dénominateurs afin de regrouper les fractions de façon optimale. En l'occurence $5! = 5 \times 4!$, ainsi

$$\frac{1}{5!} - \frac{1}{4!} = \frac{1-5}{5!} = \frac{-4}{5 \times 4 \times 3!} = -\frac{1}{5 \times 6} = -\frac{1}{30}.$$

22.7 b) Selon le même principe, ayant $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 3 \times 2^3$, un dénominateur commun est 3×2^4, d'où

$$\frac{3 \times 3!}{2^4} - \frac{5}{4!} = \frac{3^2 \times 6 - 2 \times 5}{3 \times 2^4} = \frac{2(27-5)}{3 \times 2^4} = \frac{22}{3 \times 2^3} = \frac{11}{12}.$$

22.7 c) De la même façon, puisque $6! = 6 \times 5 \times 4!$, on a

$$\frac{7}{4!} - \frac{3 \times 3!^2}{6!} = \frac{7 \times 6 \times 5 - 3 \times 6^2}{6!} = \frac{6(35-18)}{6!} = \frac{17}{5!} = \frac{17}{120}.$$

22.8 a) Par définition de la factorielle et sachant $n \geqslant 1$, on a

$$\frac{(n+2)!}{(n-1)!} = \frac{(n+2)(n+1)n \times (n-1)!}{(n-1)!} = n(n+1)(n+2).$$

22.8 b) Par définition de la factorielle, on a $\dfrac{(2n+2)!}{(2n)!} = \dfrac{(2n+2)(2n+1) \times (2n)!}{(2n)!} = 2(n+1)(2n+1)$.

22.8 c) Par définition de la factorielle, on a $\dfrac{(n^2-1)n!}{(n+2)!} = \dfrac{(n-1)(n+1) \times n!}{(n+2)(n+1) \times n!} = \dfrac{n-1}{n+2}$.

22.9 a) Puisque $(n+1)! = (n+1) \times n!$, on $\dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!} = \dfrac{n+1-1}{(n+1)!} = \dfrac{n}{(n+1)!}$.

22.9 b) Puisque $(n+1)! = (n+1) \times n!$ et $2^{2(n+1)} = 4 \times 2^{2n}$, on a

$$\frac{(n+1)!}{2^{2(n+1)}} - \frac{n!}{2^{2n}} = \frac{(n+1) \times n! - 4 \times n!}{2^{2(n+1)}} = \frac{(n-3)n!}{2^{2(n+1)}}.$$

22.9 c) Puisque $(n+1)! = (n+1) \times n!$, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n \times n!} &= \frac{1}{(n+1) \times n!} + \frac{1}{(n+1)^2 \times n!} - \frac{1}{n \times n!} \\ &= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)^2 \times n!} \\ &= \frac{n^2 + n + n - \left(n^2 + 2n + 1\right)}{n(n+1) \times (n+1)!} = \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!}.\end{aligned}$$

22.9 d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)!}{n!} \times \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{(n+1) \times n!}{n!} \times \frac{n^n}{(n+1) \times (n+1)^n} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

22.10 a) Par définition, on a $\dbinom{4}{2} = \dfrac{4!}{2! \times (4-2)!} = \dfrac{4 \times 3 \times 2!}{2!^2} = \dfrac{4 \times 3}{2} = 6.$

On peut aussi retenir que, pour tout $n \geqslant 2$, on a $\dbinom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$. Ainsi, on a $\dbinom{4}{2} = \dfrac{4 \times 3}{2} = 6.$

Plus généralement, pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$.

22.10 b) Par définition, on a $\dbinom{9}{8} = \dfrac{9!}{8! \times (9-8)!} = \dfrac{9 \times 8!}{8! \times 1!} = 9.$

On peut aussi retenir que, pour tout $n \geqslant 1$, on a $\dbinom{n}{1} = \dbinom{n}{n-1} = n$. Ainsi, on a $\dbinom{9}{8} = 9$.

22.10 c) Par définition, on a $\dbinom{7}{3} = \dfrac{7!}{3!(7-3)!} = \dfrac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3! \times 4!} = 7 \times 5 = 35.$

22.10 d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\dbinom{n}{0} = \dbinom{n}{n} = 1.$

22.10 f) Par définition, on a $\dbinom{9}{3} = \dfrac{9!}{3!(9-3)!} = \dfrac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{3! \times 6!} = \dfrac{9 \times 8 \times 7}{3!} = 3 \times 4 \times 7 = 84.$

22.11 a) Par définition, sachant $n \geqslant 3$, on a

$$\begin{aligned}\binom{n}{1} + \binom{n}{3} &= n + \frac{n!}{3!(n-3)!} = n + \frac{n(n-1)(n-2) \times (n-3)!}{3!(n-3)!} = n + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \\ &= \frac{6n + n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n\Big(6 + (n-1)(n-2)\Big)}{6} = \frac{n\left(n^2 - 3n + 8\right)}{6}.\end{aligned}$$

22.11 b) On peut procéder comme à la question précédente. Toutefois ici il est plus intéressant de penser à la formule de Pascal, qui donne directement

$$\binom{n}{2} + \binom{n}{3} = \binom{n+1}{3} = \frac{n(n+1)(n-1)}{6}.$$

22.11 c) Comme on a $\binom{k}{1} = \binom{k}{k-1} = k$, pour tout $k \geqslant 1$, on a ici $\binom{n+1}{n} - \binom{n}{n-1} = (n+1) - n = 1$.

22.11 d) Par définition, on a

$$\frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{\frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2}}{\frac{(2n)!}{n!^2}} = \frac{(2n+2)(2n+1)\times(2n)!}{\big((n+1)\times n!\big)^2} \times \frac{n!^2}{(2n)!} = \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{n+1}.$$

22.12 On dispose de cinq fruits, et on doit en choisir trois pour former une corbeille. Il s'agit donc de choisir 3 éléments dans un ensemble de cardinal 5, soit $\binom{5}{3} = 10$ choix.

22.13 a) On choisit cinq cartes parmi un ensemble de 52 cartes : il y a $\binom{52}{5}$ choix possibles.

22.13 b) Cinq cartes d'une même couleur s'obtiennent en choisissant :

- une couleur, soit 4 choix possibles ;
- cinq cartes parmi les treize cartes d'une même couleur, soit $\binom{13}{5}$ choix possibles.

Ainsi, le nombre total de possibilités est égal à $4 \times \binom{13}{5}$.

22.13 c) Puisqu'il y a 12 figures dans le jeu, on obtient $\binom{12}{5}$ possibilités.

22.13 d) Pour obtenir une telle main, on choisit deux piques (on a $\binom{13}{2}$ choix), puis un cœur (on a $\binom{13}{1}$ choix) et enfin deux carreaux (on a $\binom{13}{2}$ choix). Ainsi, le nombre total de possibilités est égal à $\binom{13}{2}\binom{13}{1}\binom{13}{2}$.

22.13 e) Pour obtenir une telle main, on choisit

- une carte de trèfle : on a $\binom{13}{1}$ choix possibles ;
- puis quatre cartes parmi les $52 - 13 = 39$ cartes qui ne sont pas des trèfles : on a $\binom{39}{4}$ choix possibles ;

Ainsi, le nombre total de possibilités est égal à $\binom{13}{1}\binom{39}{4}$.

22.13 f) Notons A l'ensemble des mains avec au moins un valet et Ω l'ensemble de toutes les mains possibles.

Commençons par déterminer le nombre de mains ne contenant aucun valet (c'est-à-dire le cardinal du complémentaire de A dans Ω). Une telle main s'obtient en choisissant cinq cartes parmi les $52 - 4 = 48$ cartes qui ne sont pas des valets : on a $\binom{48}{5}$ possibilités. On a alors $\mathsf{Card}(A) = \mathsf{Card}(\Omega) - \mathsf{Card}(\bar{A}) = \binom{52}{5} - \binom{48}{5}$.

22.13 g) Notons B l'ensemble des mains avec au moins une dame, notons C l'ensemble des mains avec au moins un neuf, et notons Ω l'ensemble de toutes les mains possibles. Le nombre de mains recherché correspond alors à $\mathsf{Card}(B \cap C)$. Or, on a

$$\mathsf{Card}(B \cap C) = \mathsf{Card}(\Omega) - \mathsf{Card}\left(\overline{B \cap C}\right) = \mathsf{Card}(\Omega) - \mathsf{Card}\left(\bar{B} \cup \bar{C}\right).$$

Or, la formule d'inclusion-exclusion donne

$$\mathsf{Card}\left(\bar{B} \cup \bar{C}\right) = \mathsf{Card}\left(\bar{B}\right) + \mathsf{Card}\left(\bar{C}\right) - \mathsf{Card}\left(\bar{B} \cap \bar{C}\right).$$

On en déduit en combinant ces deux formules :

$$\mathsf{Card}(B \cap C) = \mathsf{Card}(\Omega) - \mathsf{Card}\left(\bar{B}\right) - \mathsf{Card}\left(\bar{C}\right) + \mathsf{Card}\left(\bar{B} \cap \bar{C}\right).$$

D'une part, comme à la question précédente, on obtient $\mathsf{Card}\left(\bar{B}\right) = \mathsf{Card}\left(\bar{C}\right) = \dbinom{48}{5}$.

D'autre part, un élément de $\bar{B} \cap \bar{C}$ est une main ne contenant ni dame ni neuf, ce qui revient à choisir cinq cartes parmi 44 ($= 52 - 2 \times 4$), et donc $\mathsf{Card}\left(\bar{B} \cap \bar{C}\right) = \dbinom{44}{5}$.

Au total, le nombre de mains avec au moins une dame et un neuf vaut $\mathsf{Card}(B \cap C) = \dbinom{52}{5} - 2\dbinom{48}{5} + \dbinom{44}{5}$.

....

22.13 h) Notons D (respectivement E) l'ensemble des mains avec exactement deux rois et deux cœurs dont le roi de cœur (respectivement sans le roi de cœur), et encore Ω l'ensemble de toutes les mains possibles. Le nombre de mains recherché correspond alors à $\mathsf{Card}(D \cup E) = \mathsf{Card}(D) + \mathsf{Card}(E)$, car les ensembles D et E sont disjoints par construction. D'une part, pour obtenir une main avec exactement deux rois et deux cœurs dont le roi de cœur, on choisit :

- le roi de cœur, soit 1 choix possible ;
- un autre roi parmi les 3 rois restants, soit 3 choix possibles ;
- une autre carte de cœur parmi les 12 restantes, soit 12 choix possibles ;
- deux autres cartes parmi les 36, qui ne sont ni un roi ni un cœur, soit $\dbinom{36}{2}$ choix possibles.

Au total, le nombre de possibilités est égal à $\mathsf{Card}(D) = 1 \times 3 \times 12\dbinom{36}{2}$. D'autre part, de façon similaire, on a $\mathsf{Card}(E) = \dbinom{3}{2}\dbinom{12}{2}\dbinom{36}{1}$. Donc, le nombre cherché vaut $1 \times 3 \times 12\dbinom{36}{2} + \dbinom{3}{2}\dbinom{12}{2}\dbinom{36}{1}$.

....

22.14 a) Le mot « MAISON » est formé de 6 lettres distinctes. Ainsi, se donner une anagramme de ce mot équivaut à se donner une permutation de ces 6 lettres. Il y a donc $6!$ anagrammes.

....

22.14 b) Le mot « RADAR » est un mot de cinq lettres formé de deux R, deux A et un D. Ainsi, pour se donner une anagramme du mot « RADAR », on peut :

- choisir la position des deux lettres R, parmi les cinq positions possibles, soit $\dbinom{5}{2}$ choix ;
- choisir la position des deux lettres A, parmi les trois positions possibles restantes, soit $\dbinom{3}{2}$ choix ;
- il reste alors une seule position possible pour placer la lettre D.

Au total, le nombre de possibilités est égal à $\dbinom{5}{2} \times \dbinom{3}{2} \times 1 = \dfrac{5 \times 4}{2} \times 3 \times 1 = 30$.

....

22.15 a) On commence par remarquer que le mot « Mississippi » est formé de onze lettres, dont quatre I, quatre S, deux P et un M. Ainsi, pour se donner une anagramme du mot « Mississippi », on peut :

- choisir la position des quatre lettres I, parmi les onze positions possibles, soit $\binom{11}{4}$ choix ;
- choisir la position des quatre lettres S, parmi les sept positions possibles restantes, soit $\binom{7}{4}$ choix ;
- choisir la position des deux lettres P, parmi les trois positions possibles restantes, soit $\binom{3}{2}$ choix ;
- il reste alors une seule position possible pour placer la lettre M.

Au total, le nombre de possibilités est égal à $\binom{11}{4} \times \binom{7}{4} \times \binom{3}{2} \times 1 = 330 \times 35 \times 3 \times 1$.

....

22.15 b) On procède comme à la question précédente, en remarquant que le mot « abracadabra » est formé de onze lettres, dont cinq A, deux B, deux R, un C et un D. Le nombre d'anagramme du mot « abracadabra » vaut

$$\binom{11}{5}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{1} \times 1 = 462 \times 15 \times 6 \times 2 \times 1.$$

....

22.16 D'après la formule d'inclusion-exclusion pour deux ensembles,

$$\mathsf{Card}(A \cup B \cup C) = \mathsf{Card}\Big((A \cup B) \cup C\Big) = \mathsf{Card}(A \cup B) + \mathsf{Card}(C) - \mathsf{Card}\Big((A \cup B) \cap C\Big).$$

Or, on a aussi

$$\mathsf{Card}(A \cup B) = \mathsf{Card}(A) + \mathsf{Card}(B) - \mathsf{Card}(A \cap B) \qquad \text{et} \qquad \mathsf{Card}\Big((A \cup B) \cap C\Big) = \mathsf{Card}\Big((A \cap C) \cup (B \cap C)\Big).$$

À nouveau, d'après la formule d'inclusion-exclusion pour deux ensembles,

$$\begin{aligned}\mathsf{Card}\Big((A \cap C) \cup (B \cap C)\Big) &= \mathsf{Card}(A \cap C) + \mathsf{Card}(B \cap C) - \mathsf{Card}\Big((A \cap C) \cap (B \cap C)\Big)\\ &= \mathsf{Card}(A \cap C) + \mathsf{Card}(B \cap C) - \mathsf{Card}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

Au total, on a donc

$$\begin{aligned}&\mathsf{Card}(A \cup B \cup C)\\ &= \mathsf{Card}(A) + \mathsf{Card}(B) - \mathsf{Card}(A \cap B) + \mathsf{Card}(C) - \Big(\mathsf{Card}(A \cap C) + \mathsf{Card}(B \cap C) - \mathsf{Card}(A \cap B \cap C)\Big)\\ &= \mathsf{Card}(A) + \mathsf{Card}(B) + \mathsf{Card}(C) - \mathsf{Card}(A \cap B) - \mathsf{Card}(A \cap C) - \mathsf{Card}(B \cap C) + \mathsf{Card}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

....

22.17 a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a déjà vu que $\dfrac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \dfrac{2(2n+1)}{n+1}$. Donc, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{-2n-2}\binom{2n+2}{n+1}}{2^{-2n}\binom{2n}{n}} = \frac{1}{2^2} \times \frac{2(2n+1)}{n+1} = \frac{2n+1}{2(n+1)}.$$

....

22.17 b) Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = (n+1)u_n^2$. Remarquons que la suite $(v_n)_{n \geqslant 0}$ est à valeurs strictement positives et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après le calcul précédent,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+2)u_{n+1}^2}{(n+1)u_n^2} = \frac{n+2}{n+1} \times \left(\frac{2n+1}{2(n+1)}\right)^2 = \frac{(n+2)(2n+1)^2}{4(n+1)^3} = \frac{4n^3 + 12n^2 + 9n + 2}{4n^3 + 12n^2 + 12n + 4} < 1,$$

Ainsi, la suite $(v_n)_{n \geqslant 0}$ est décroissante.

....

22.18 Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned} 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n-2) \times 2n &= (2\times 1) \times (2 \times 2) \times (2 \times 3) \times \cdots \times (2(n-1)) \times 2n \\ &= \underbrace{(2 \times 2 \times 2 \times \cdots \times 2 \times 2)}_{n \text{ facteurs}} \times (1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n) \\ &= 2^n n!. \end{aligned}$$

....

22.19 a) Par définition de I et P, le produit $I \times P$ est le produit des entiers consécutifs de 1 à $2n+1$. Donc,

$$I \times P = (2n+1)!.$$

....

22.19 b) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on sait que $P = 2^n n!$ (calcul précédent). Ainsi, P est non nul et

$$I = \frac{I \times P}{P} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}.$$

....

22.20 a) Pour tous entiers naturels n et p avec $p \leqslant n$, on a

$$\sum_{k=p}^{n} (a_k - a_{k+1}) = (a_p \underbrace{- a_{p+1}) + (a_{p+1}}_{\text{simplification}} \underbrace{- a_{p+2}) + (a_{p+2}}_{\text{simplification}} - a_{p+3}) + \cdots + (a_{n-1} \underbrace{- a_n) + (a_n}_{\text{simplification}} - a_{n+1}).$$

On observe alors une simplification des termes de proche en proche. On a donc $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_p - a_{n+1}$.

....

22.20 b) Rappelons la formule de Pascal : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on a

$$\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} = \binom{n+1}{j}.$$

En appliquant cette formule pour $n = p+k$ et $k = p+1$, avec $p \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$ non nul, il vient

$$\binom{p+k}{p} + \binom{p+k}{p+1} = \binom{p+k+1}{p+1} \quad \text{et donc} \quad \binom{p+k+1}{p+1} - \binom{p+k}{p+1} = \binom{p+k}{p}.$$

....

22.20 c) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \binom{p+k}{p} &= \binom{p}{p} + \sum_{k=1}^{n} \binom{p+k}{p} \\ &= \binom{p}{p} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{p+k+1}{p+1} - \binom{p+k}{p+1} \right) \\ &= \binom{p}{p} + \binom{p+n+1}{p+1} - \binom{p+1}{p+1} \\ &= \binom{p+n+1}{p+1}, \end{aligned}$$

d'après les deux calculs précédents, et sachant que $\binom{p}{p} = \binom{p+1}{p+1} = 1$.

....

Fiche n° 23. Dénombrement I

Réponses

23.1 a) .... $\boxed{\dfrac{11}{30}}$

23.1 b) .... $\boxed{\dfrac{11}{42}}$

23.2 a) .... $\boxed{90}$

23.2 b) .... $\boxed{16}$

23.3 a) .... $\boxed{n(n-1)}$

23.3 b) . $\boxed{\dfrac{1}{(n+3)(n+2)(n+1)n}}$

23.3 c) .... $\boxed{n-1}$

23.3 d) .... $\boxed{243}$

23.4 a) .... $\boxed{6}$

23.4 b) .... $\boxed{5}$

23.4 c) .... $\boxed{3}$

23.5 .... $\boxed{15\times 14\times 13}$

23.6 a) .... $\boxed{26^4}$

23.6 b) .... $\boxed{26^3}$

23.6 c) .... $\boxed{26^2}$

23.7 a) .... $\boxed{15\times 14\times 13}$

23.7 b) .. $\boxed{15\times 14\times 13\times 12\times 11}$

23.7 c) .... $\boxed{3\times 14\times 13}$

23.7 d) .. $\boxed{14\times 13\times 12\times 11\times 10}$

23.8 a) .... $\boxed{n+1}$

23.8 b) .... $\boxed{n-1}$

23.9 a) .... $\boxed{\dbinom{10}{6}}$

23.9 b) .... $\boxed{7}$

23.9 c) .... $\boxed{\dbinom{10}{6}-7}$

23.9 d) .... $\boxed{\dbinom{3}{3}\times\dbinom{7}{3}}$

23.10 .... $\boxed{7\times 6\times 5\times 4}$

23.11 a) .... $\boxed{7\times 6\times 5}$

23.11 b) .... $\boxed{7^3}$

23.11 c) .... $\boxed{7^3-7}$

23.12 a) .... $\boxed{10^4}$

23.12 b) ...... $\boxed{10\times 9\times 8\times 7}$

23.12 c) .... $\boxed{5^4}$

23.12 d) .... $\boxed{10^3}$

23.12 e) .... $\boxed{\dbinom{10}{4}}$

23.13 a) .... $\boxed{5!}$

23.13 b) .... $\boxed{2!\times 3!}$

23.13 c) .... $\boxed{4!}$

23.13 d) .... $\boxed{3\times 2\times 2}$

23.14 a) .... $\boxed{3^5}$

23.14 b) .... $\boxed{3}$

23.14 c) .... $\boxed{3\times(2^5-2)}$

23.14 d) ..... $\boxed{3^5-3\times 2^5+3}$

23.15 a) .... $\boxed{12\times 11\times 10}$

23.15 b) ..... $\boxed{\begin{array}{c}12\times 11\times 10\\ -3\times 2\times 10\end{array}}$

23.15 c) .... $\boxed{10\times 9\times 8}$

23.15 d) .... $\boxed{3\times 2\times 10}$

23.16 a) .... $\boxed{\dbinom{52}{5}}$

23.16 b) .... $\boxed{13\times 48}$

23.16 c) .... $\boxed{4\times\dbinom{13}{5}}$

23.16 d) ...... $\boxed{\dbinom{52}{5}-\dbinom{48}{5}}$

23.16 e) ... $\boxed{\dbinom{48}{5}+4\times\dbinom{48}{4}}$

23.16 f) .... $\boxed{\dbinom{4}{3}\times\dbinom{4}{2}}$

23.16 g) .. $\boxed{13\times 12\times\dbinom{4}{3}\times\dbinom{4}{2}}$

23.17 .... $\boxed{\dbinom{n+p}{n}}$

23.18 a) .... $\boxed{0}$

23.18 b) .... $\boxed{0}$

Corrigés

23.1 a) On a $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{15}{30}+\dfrac{6}{30}-\dfrac{10}{30}=\dfrac{11}{30}$.

23.1 b) On a $\dfrac{5}{7}-\left(\dfrac{2}{21}+\dfrac{5}{14}\right)=\dfrac{30}{42}-\dfrac{4}{42}-\dfrac{15}{42}=\dfrac{11}{42}$.

23.2 a) On a $\dfrac{10!}{8!} = \dfrac{10 \times 9 \times 8!}{8!} = 90$.

23.2 b) On a $\dfrac{10 \times 8 \times 6 \times 4}{5!} = \dfrac{2 \times 5 \times 2 \times 4 \times 2 \times 3 \times 2 \times 2}{5!} = 2^4 = 16$.

23.3 a) On a $\dfrac{n!}{(n-2)!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = n(n-1)$.

23.3 c) On a $\dfrac{(n^2-1)n!}{(n+1)!} = \dfrac{(n-1)(n+1)n!}{(n+1)!} = \dfrac{(n-1)(n+1)!}{(n+1)!} = n-1$.

23.3 d) On a $\dfrac{(3!)^4 \times 4!}{2^7} = \dfrac{(3 \times 2)^4 \times 4 \times 3 \times 2}{2^7} = \dfrac{3^5 \times 2^7}{2^7} = 3^5 = 243$.

23.4 a) Une corbeille est entièrement déterminée par son nombre de pommes. Comme celui-ci peut valoir 0, 1, 2, 3, 4 ou 5, on en déduit qu'il y a 6 corbeilles possibles.

23.4 b) On retire au nombre total la corbeille qui ne contient pas d'orange. Il y a donc 5 possibilités.

23.4 c) Pour contenir plus d'oranges que de pommes, la corbeille doit contenir au moins trois oranges. Elle en contiendra alors trois, quatre ou cinq. Il y a donc 3 possibilités.

23.5 Pour la première chambre, il y a quinze couleurs possibles, pour la deuxième quatorze et pour la troisième treize. On en déduit qu'il y a $15 \times 14 \times 13 = 2\ 730$ possibilités.

23.6 a) Un tel code est un quadruplet des 26 lettres de l'alphabet. Il y en a 26^4.

23.6 b) La première lettre doit être un « E », il reste donc trois lettres à choisir en tenant compte de l'ordre et en autorisant les répétitions. Un tel code est un triplet des 26 lettres de l'alphabet. Il y en a 26^3.

23.6 c) Comme le pays est fixé, la région du monde l'est aussi. Donc, la première lettre est fixée. Ainsi, il reste deux lettres à choisir en tenant compte de l'ordre et en autorisant les répétitions ; il s'agit d'un couple des 26 lettres de l'alphabet. Il y en a 26^2.

23.7 a) Un tiercé est une liste d'éléments distincts de trois chevaux parmi les quinze. Il y en a $15 \times 14 \times 13 = 2\ 940$.

23.7 b) De même que précédemment, il y a $15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 = 360\ 360$ quintés possibles.

23.7 c) Il y a 3 places possibles pour « Étalon Noir ». Ensuite, il reste 14×13 façons de placer les deux autres chevaux. En tout, il y a $3 \times 14 \times 13 = 546$ tiercés possibles dans lesquels le cheval « Étalon Noir » apparaît.

23.7 d) Il reste 14 chevaux, on a donc $14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 = 240\ 240$ quintés possibles.

23.8 a) Le nombre de boules rouges, qui détermine entièrement l'urne, peut varier entre 0 et n. On en déduit qu'il y a $n+1$ urnes possibles.

23.8 b) On retire du résultat précédent les urnes qui ne conviennent pas : celle contenant une seule boule rouge et celle qui n'en contient aucune. On obtient $n-1$ urnes possibles.

23.9 a) Un tel groupe d'amis correspond à une partie de six personnes parmi les dix. Il y en a $\binom{10}{6} = 210$.

23.9 b) Un groupe d'amis ne comportant pas de garçon est une combinaison de six personnes parmi les sept filles. Il y en a $\binom{7}{6} = 7$.

23.9 c) On retire au nombre total de groupes le nombre de groupes ne comportant pas de garçon. On obtient $\binom{10}{6} - 7 = 203$ groupes.

23.9 d) Un tel groupe est constitué de trois filles et de trois garçons, il y en a $\binom{3}{3} \times \binom{7}{3} = 35$.

23.10 Un mot de quatre lettres est une liste ordonnée d'éléments distincts des sept lettres tirées. Il y en a $7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$.

23.11 a) Si aucun membre ne peut cumuler plusieurs fonctions, il y a 7 choix pour le responsable de la vaisselle et 6 pour le rangement puis 5 pour le ménage. En tout, $7 \times 6 \times 5 = 210$.

23.11 b) Si un membre peut cumuler plusieurs fonctions, le choix des responsables est un triplet des sept membres du groupe. Il y en a $7^3 = 343$.

23.11 c) Pour déterminer le nombre de groupes de responsables où un même membre peut cumuler au plus deux fonctions, il faut retirer du total les groupes où un même membre peut cumuler les trois fonctions. Il y a 7 tels groupes de responsables, ce qui donne $7^3 - 7 = 336$ groupes de responsables possibles.

23.12 a) Un code est un quadruplet des dix chiffres de 0 à 9. Il y en a $10^4 = 10\ 000$.

23.12 b) Un tel code est une liste d'éléments distincts de quatre chiffres parmi les dix chiffres. Il y en a $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5\ 040$.

23.12 c) Un code avec des chiffres pairs est un quadruplet des cinq éléments de $\{2, 4, 6, 8, 0\}$. Il y en a $5^4 = 625$.

23.12 d) Si un code se termine par 9, il reste à choisir un triplet de trois chiffres. Il y a donc $10^3 = 1\ 000$ codes se terminant par le chiffre 9.

23.12 e) Étant donnés 4 entiers différents, il n'y a qu'une seule façon de les ranger dans l'ordre croissant. Il y a donc autant de codes avec des chiffres tous différents rangés dans l'ordre croissant que de combinaisons de 4 éléments parmi 10. Il y a donc $\binom{10}{4} = 210$.

23.13 a) Une anagramme du mot « Fiche » est une permutation des cinq lettres, toutes différentes, de ce mot. Il y en a $5! = 120$.

23.13 b) L'anagramme commence par les voyelles, il y a $2! = 2$ façons de les placer en première et deuxième positions. De même, il y a $3!$ façons de placer les consonnes ensuite. On obtient $2! \times 3! = 12$ possibilités.

....

23.13 c) Si le mot se termine par un « E », il faut permuter les quatre autres lettres pour former les quatre premières lettres de l'anagramme. Il y a donc $4! = 24$ possibilités.

....

23.13 d) Si l'on souhaite qu'il y ait alternance entre les voyelles et les consonnes, l'anagramme ne peut que commencer par une consonne.

Pour la première lettre, il y a donc 3 possibilités, 2 pour la deuxième, il reste deux consonnes pour la troisième lettre, ensuite la quatrième lettre est automatiquement la voyelle restante et la dernière lettre est la consonne restante.

En tout, on obtient $3 \times 2 \times 2 = 12$ possibilités.

....

23.14 a) À chaque jean, on associe un tiroir, le nombre de rangements est donc un 5-uplet des 3 tiroirs.

Il y en a $3^5 = 243$.

....

23.14 b) Il s'agit là de choisir le tiroir où l'on mettra tous les jeans : on a 3 possibilités.

....

23.14 c) On a 3 façons de choisir le tiroir qui restera vide. Sachant cela, on a $2^5 = 32$ possibilités de mettre les jeans dans les deux tiroirs restants. À ces 2^5 possibilités, il faut retirer les deux possibilités où l'un des deux tiroirs sera vide. En tout, il y a $2^5 - 2$ possibilités de ranger les pantalons sachant que le tiroir choisi est le seul vide.

Au total, il y a donc $3 \times (2^5 - 2) = 90$ possibilités.

....

23.14 d) Il suffit de retirer aux 3^5 possibilités les possibilités où exactement un tiroir est vide et où deux tiroirs sont vides. On a vu qu'il y a $3 \times (2^5 - 2)$ cas où il y a exactement un tiroir vide et il y a 3 cas où il y a deux tiroirs vides. On obtient $3^5 - 3 \times (2^5 - 2) - 3 = 3^5 - 3 \times 2^5 + 3 = 150$ possibilités.

....

23.15 a) Un bureau est une liste d'éléments distincts de trois personnes parmi les douze membres de l'association, il y en a $12 \times 11 \times 10 = 1\ 320$.

....

23.15 b) On retire du nombre total de bureaux possibles le nombre de bureaux où Pierre et Jean siègent ensemble.

Pour constituer un bureau où Pierre et Jean siègent ensemble, il faut déterminer le rôle de Pierre : 3 possibilités, déterminer le rôle de Jean : 2 possibilités restantes et choisir le dernier membre : 10 choix.

En tout, on obtient $3 \times 2 \times 10$ bureaux où Pierre et Jean siègent ensemble, ce qui donne $12 \times 11 \times 10 - 3 \times 2 \times 10 = 1\ 260$ bureaux où Pierre et Jean ne siégeront pas ensemble.

....

23.15 c) Le bureau sera dans ce cas une liste d'éléments distincts de trois membres parmi les dix restants.

Il y en a $10 \times 9 \times 8 = 720$.

....

23.15 d) Pour constituer un bureau où le doyen et le plus jeune du groupe (le « benjamin ») siègent ensemble, il faut déterminer le rôle du doyen (on a 3 possibilités), déterminer le rôle du benjamin (on a 2 possibilités restantes) et choisir le dernier membre (il y a 10 choix).

En tout, on obtient $3 \times 2 \times 10 = 60$ bureaux où le doyen et le plus jeune du groupe siègent ensemble.

....

23.16 a) Choisir une main revient à choisir une partie à cinq éléments de l'ensemble des 52 cartes. Il y en a $\dbinom{52}{5} = \dfrac{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48}{5!} = 2\ 598\ 960$ choix possibles.

23.16 b) Il y a 13 carrés possibles (un par type de carte). Pour chacun de ces carrés possibles, il reste une carte à choisir parmi les 48 cartes qu'il reste. En tout, il y a donc $13 \times 48 = 624$ carrés possibles.

23.16 c) Il y a quatre couleurs. Comme il y a 13 cartes de chaque couleur, pour chacune de ces couleurs, il y a $\dbinom{13}{5}$ mains de cette couleur. En tout, il y a $4 \times \dbinom{13}{5} = 4 \times \dfrac{13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9}{5!} = 5\ 148$ mains unicolores.

23.16 d) Calculons d'abord le nombre de mains ne contenant pas de roi. Il y en a $\dbinom{48}{5} = 1\ 712\ 304$.

Le nombre de mains contenant au moins un roi est donc $\dbinom{52}{5} - \dbinom{48}{5} = 2\ 598\ 960 - 1\ 712\ 304 = 886\ 656$.

23.16 e) On ajoute le nombre de mains ne contenant aucun roi et le nombre de mains qui en contiennent exactement un.

- Pour les mains ne contenant qu'un roi : on a 4 choix pour le roi, il reste à choisir 4 cartes parmi les 48 cartes qui ne sont pas des rois, ce qui donne $4 \times \dbinom{48}{4} = 778\ 320$.
- Pour les mains ne contenant aucun roi, il y en a $\dbinom{48}{5}$.

En tout, il y a $\dbinom{48}{5} + 4 \times \dbinom{48}{4} = 1\ 712\ 304 + 778\ 320 = 2\ 490\ 624$ telles mains.

23.16 f) On a $\dbinom{4}{3} = 4$ façons de choisir les rois. À chacune de ces façons, il y a $\dbinom{4}{2} = 6$ façons de choisir les deux as. Au total, il y a $\dbinom{4}{3} \times \dbinom{4}{2} = 24$ façons de choisir trois rois et deux as.

23.16 g) On a 13 façons de choisir la figure qui sera répétée 3 fois et 12 façons de choisir la figure qui sera répétée 2 fois. Ensuite, comme pour la question précédente, il y a 24 façons d'obtenir un full avec ces deux figures choisies. En tout $13 \times 12 \times \dbinom{4}{3} \times \dbinom{4}{2} = 3\ 744$ fulls possibles.

23.17 Il y a $\dbinom{n+p}{n}$ façons de choisir les n éléments pour constituer un groupe de n éléments. À partir de là, les p éléments restant constituent le groupe à p éléments.

On a donc $\dbinom{n+p}{n} = \dbinom{n+p}{p}$ façons de constituer ces deux groupes.

23.18 a) On a $\dfrac{\binom{n}{p}}{\binom{n}{p+1}} = \dfrac{\frac{n!}{p!(n-p)!}}{\frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!}} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} \times \dfrac{(p+1)! \times (n-p-1)!}{n!} = \dfrac{p+1}{(n-p)}$. Donc, $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\binom{n}{p}}{\binom{n}{p+1}} = 0$.

23.18 b) On a $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \dfrac{1}{p!} n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)$. Ce produit est une expression polynomiale de degré p en n. Or, pour tout entier k, on a $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^k}{2^n} = 0$ par croissance comparée. Par somme, $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\binom{n}{p}}{2^n} = 0$.

Fiche n° 24. Dénombrement II

Réponses

24.1 a) .... $\boxed{120}$

24.1 b) .... $\boxed{\dfrac{n(n-1)}{2}}$

24.1 c) .... $\boxed{n+2}$

24.1 d) .. $\boxed{\dfrac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}}$

24.2 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{10}}$

24.2 b) .... $\boxed{10 \times 9 = 90}$

24.2 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{42}}$

24.2 d) .... $\boxed{\dfrac{11}{5}}$

24.3 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{(n+2)}}$

24.3 b) .... $\boxed{n+1}$

24.3 c) .... $\boxed{(n+1)^2}$

24.3 d) .... $\boxed{\dfrac{n+1}{n+3}}$

24.4 a) .... $\boxed{a}$

24.4 b) .... $\boxed{d}$

24.4 c) .... $\boxed{c}$

24.5 a) .... $\boxed{24}$

24.5 b) .... $\boxed{720}$

24.5 c) .... $\boxed{10}$

24.5 d) .... $\boxed{64}$

24.6 a) .... $\boxed{10^5}$

24.6 b) .... $\boxed{60}$

24.6 c) .... $\boxed{10^8}$

24.7 a) .... $\boxed{20 \times 19 \times 18}$

24.7 b) .... $\boxed{\dbinom{20}{3}}$

24.8 a) .... $\boxed{5}$

24.8 b) .... $\boxed{10}$

24.8 c) .... $\boxed{32}$

24.9 a) .... $\boxed{15}$

24.9 b) .... $\boxed{30}$

24.9 c) .... $\boxed{256}$

24.10 a) .... $\boxed{5!}$

24.10 b) .... $\boxed{7!}$

24.10 c) .... $\boxed{\dfrac{7!}{2}}$

24.11 .... $\boxed{\dfrac{n(n-1)}{2}}$

24.12 .... $\boxed{\dfrac{n(n-3)}{2}}$

24.13 a) .... $\boxed{26^2}$

24.13 b) .... $\boxed{26^3}$

24.14 a) . $\boxed{\dbinom{13}{1} \times \dbinom{4}{3} \times \dbinom{12}{2} \times \dbinom{4}{1} \times \dbinom{4}{1}}$

24.14 b) .. $\boxed{\dbinom{13}{2} \times \dbinom{4}{2} \times \dbinom{4}{2} \times \dbinom{11}{1} \times \dbinom{4}{1}}$

24.15 .... $\boxed{\dbinom{n}{p}}$

Corrigés

24.1 b) On a $\dbinom{n}{2} = \dfrac{n!}{2! \times (n-2)!} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

....

24.1 c) On a $\dbinom{n+2}{n+1} = \dfrac{(n+2)!}{(n+1)! \times 1!} = n+2$. On pouvait aussi utiliser la formule de symétrie des coefficients binomiaux : pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$, on a $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{n-k}$. Ainsi, on a $\dbinom{n+2}{n+1} = \dbinom{n+2}{1} = n+2$.

....

24.1 d) On a $\dbinom{n+3}{n} = \dfrac{(n+3)!}{n! \times 3!} = \dfrac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3!} = \dfrac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}$.

....

24.2 c) On a $\dfrac{5!}{7!} = \dfrac{1}{6 \times 7} = \dfrac{1}{42}$.

....

24.2 d) On a $\dfrac{\binom{11}{5}}{\binom{10}{4}} = \dfrac{11!}{5! \times 6!} \times \dfrac{4! \times 6!}{10!} = \dfrac{11}{5}$.

Cette propriété est vraie de façon générale : pour tous $k, n \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leqslant k \leqslant n$, on a

$$\frac{n+1}{k+1} \times \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

24.5 a) On peut faire un arbre où chaque embranchement correspond à un choix. J'ai 2 choix de pantalons, 3 choix de chemises et 4 choix de chapeaux. Au total, j'ai $2 \times 3 \times 4 = 24$ choix.

24.5 b) C'est une permutation de 6 éléments : il y a $6! = 720$ façons différentes d'écouter les six chansons.

24.5 c) Il y a $\binom{5}{2} = 10$ façons de choisir deux pantalons parmi cinq.

24.5 d) Chaque fléchette a 4 possibilités pour sa zone d'arrivée. Les 3 fléchettes sont différentes. On a donc $4^3 = 64$ tirages possibles différents.

24.6 a) Pour chaque roue, on a 10 possibilités. L'ordre compte et il peut y avoir des répétitions. Ainsi, au total, il y a 10^5 possibilités.

24.6 b) L'ordre compte et il n'y a pas de répétition possible. On a donc $5 \times 4 \times 3 = 60$ possibilités.

24.6 c) Pour chacun des huit chiffres qui manquent, on a 10 possibilités. L'ordre compte et il peut y avoir des répétitions. On a donc 10^8 possibilités.

24.7 a) On peut réfléchir en pensant à un arbre : il y a 20 possibilités de choix pour l'arrivée du premier cheval ; puis (donc multiplication) 19 possibilités de choix pour l'arrivée du premier cheval ; puis (donc multiplication) 18 possibilités de choix pour l'arrivée du troisième cheval.

24.7 b) Il s'agit de prendre un groupe de trois chevaux parmi les vingt ; il y a donc $\binom{20}{3}$ tiercés dans le désordre.

24.8 b) Il y a $\binom{5}{3} = 10$ façons possibles de choisir trois fromages parmi cinq.

24.8 c) Je dois choisir une partie de cet ensemble de cinq fromages. Comme le nombre de parties d'un ensemble à n élements est 2^n, j'ai $2^5 = 32$ choix possibles.

24.9 a) J'ai 5 choix pour le fromage et 3 choix pour le dessert. Au total, j'ai $3 \times 5 = 15$ choix.

24.9 b) J'ai $\binom{5}{3}$ choix pour les fromages et 3 choix pour le dessert. Au total, j'ai $\binom{5}{3} \times 3 = 10 \times 3 = 30$ choix.

24.9 c) Je dois choisir une partie de cet ensemble de huit « choses à manger ». Comme le nombre de parties d'un ensemble à n élements est 2^n, j'ai $2^8 = 256$ choix possibles.

24.10 a) Une anagramme du mot « Lapin », c'est une permutation des cinq lettres de ce mot. Donc il y en a 5!

24.10 b) Une anagramme de ce mot est une permutation de ses sept lettres (toutes différentes). Il y en a donc 7!

24.10 c) Par rapport à la question précédente, il y a deux fois plus d'anagrammes du mot « CAROT$_1$T$_2$E » que d'anagrammes du mot « CAROTTE ».

En effet, à chaque anagramme de cette question, par exemple « TARCOTE », correspondent deux anagrammes de la question précédente, par exemple « T$_1$ARCOT$_2$E » et « T$_2$ARCOT$_1$E ».

24.11 Tracer un segment est équivalent à choisir les deux points qui en seront les extrémités. Cela revient à choisir deux éléments parmi n car l'ordre du choix des points n'a pas d'importance.

Il y a donc $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$ façons de choisir deux points parmi les n, et autant de segments possibles.

24.12 Chaque sommet est relié à « presque » tous les autres par des diagonales : c'est le cas pour tous les points sauf pour lui-même et ses deux voisins. Chaque sommet a donc exactement $n-3$ diagonales qui partent de lui. Il y a donc en tout $n(n-3)$ diagonales.

Mais chaque diagonale a été comptée deux fois. Le nombre de diagonales est donc exactement $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

24.13 a) On n'a le choix que des deux premières lettres, les autres sont imposées « en miroir ».

Par exemple « AB $\cdot\cdot$ » donne le seul et unique mot « ABBA » qui soit un palindrome.

Ainsi, il y a 26×26 palindromes possibles.

24.13 b) On n'a le choix que des trois premières lettres, les deux dernières sont imposées « en miroir ».

Par exemple « ABC $\cdot\cdot$ » donne le seul et unique mot « ABCBA » qui soit un palindrome.

Ainsi, il y a $26 \times 26 \times 26$ palindromes possibles.

24.14 a) On choisit une hauteur parmi les 13 possibles (par exemple les rois), puis on choisit trois des quatre cartes de cette hauteur (trois des quatre rois), puis on choisit deux autres hauteurs, différentes entre elles et de celle déjà choisie, parmi les 12 restantes (tout sauf les rois) et dans chaque hauteur (par exemple les sept et les deux), on choisit une carte parmi les quatre.

24.14 b) On choisit deux hauteurs parmi les 13 possibles (par exemple les rois et les dix) puis on choisit deux des quatre cartes de chaque hauteur (deux des quatre rois et deux des quatre dix) puis on choisit une autre hauteur différente parmi les 11 restantes (tout sauf les rois et les dix) et on choisit une carte parmi les quatre.

24.15 Créer une telle suite strictement croissante $u_1 < u_2 < \cdots < u_p$, c'est choisir p éléments distincts parmi n et les ordonner par ordre strictement croissant. Comme il n'y a qu'une seule façon de le faire, il y a $\binom{n}{p}$ telles suites strictement croissantes.

Fiche n° 25. Généralités sur les probabilités

Réponses

25.1 a) $\boxed{2^2 \times 3^7}$

25.1 b) $\boxed{2^5 \times 7}$

25.1 c) $\boxed{3^5}$

25.2 a) $\boxed{(x-1)^2}$

25.2 b) $\boxed{(x-3)^2}$

25.2 c) $\boxed{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$

25.2 d) $\boxed{2(x+6)^2}$

25.3 a) $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

25.3 b) $\boxed{\dfrac{3}{10}}$

25.3 c) $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

25.3 d) $\boxed{\dfrac{1}{10}}$

25.4 a) $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

25.4 b) $\boxed{\dfrac{1}{32}}$

25.4 c) $\boxed{\dfrac{1}{52}}$

25.4 d) $\boxed{\mathrm{P}_T(S)\,\mathrm{P}(T) + \mathrm{P}_{\overline{T}}(S)\,\mathrm{P}(\overline{T})}$

25.4 e) $\boxed{\dfrac{21}{832}}$

25.5 a) $\boxed{1}$

25.5 b) $\boxed{\dfrac{1}{3}}$

25.5 c) $\boxed{\mathrm{P}_C(J)\,\mathrm{P}(C) + \mathrm{P}_{\overline{C}}(J)\,\mathrm{P}(\overline{C})}$

25.5 d) $\boxed{\dfrac{11}{15}}$

25.6 a) $\boxed{\dfrac{2}{3}}$

25.6 b) $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

25.6 c) $\boxed{1}$

25.6 d) $\boxed{\mathrm{P}_{R_1}(R_2)\,\mathrm{P}(R_1) + \mathrm{P}_{\overline{R_1}}(R_2)\,\mathrm{P}(\overline{R_1})}$

25.6 e) $\boxed{\dfrac{2}{3}}$

25.7 a) $\boxed{\dfrac{9}{10}}$

25.7 b) $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

25.7 c) $\boxed{\mathrm{P}(R) + \mathrm{P}(T) - \mathrm{P}(R \cap T)}$

25.7 d) $\boxed{\dfrac{1}{10}}$

25.7 e) $\boxed{\dfrac{7}{10}}$

25.7 f) $\boxed{90}$

25.7 g) $\boxed{9}$

25.7 h) $\boxed{8}$

25.7 i) $\boxed{45}$

25.7 j) $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

25.7 k) $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

25.8 a) $\boxed{\dfrac{4}{5}}$

25.8 b) $\boxed{\dfrac{9}{10}}$

25.8 c) $\boxed{-\dfrac{1}{10}}$

25.8 d) $\boxed{\dfrac{109}{100}}$

25.9 a) $\boxed{\dfrac{1}{9}}$

25.9 b) $\boxed{\dfrac{5}{18}}$

25.9 c) $\boxed{\dfrac{11}{18}}$

25.9 d) $\boxed{\dfrac{3}{2}}$

25.9 e) $\boxed{\dfrac{17}{36}}$

25.10 a) $\boxed{\dfrac{1}{4}}$

25.10 b) $\boxed{\dfrac{1}{4}}$

25.10 c) $\boxed{\dfrac{33}{16}}$

25.11 a) $\boxed{\dfrac{1}{10}}$

25.11 b) $\boxed{3}$

25.11 c) $\boxed{1}$

25.12 a) $\boxed{40}$

25.12 b) $\boxed{36}$

25.13 a) $\boxed{-\dfrac{1}{5}}$

25.13 b) $\boxed{\dfrac{1}{5}}$

25.14 a) $\boxed{5}$

25.14 b) $\boxed{16}$

25.14 c) $\boxed{-3 \text{ et } 7}$

25.14 d) $\boxed{\dfrac{4}{5}}$

25.15 a) $\boxed{0 \text{ et } 1}$

25.15 b) .... $\boxed{\dfrac{2}{3}}$

25.16 a) .... $\boxed{\dfrac{7}{2}}$

25.16 b) .... $\boxed{\dfrac{35}{12}}$

25.16 c) .... $\boxed{\dfrac{7n}{2}}$

25.16 d) .... $\boxed{\dfrac{35n}{12}}$

25.17 a) .... $\boxed{\mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2}$

25.17 b) .... $\boxed{14}$

25.18 .... $\boxed{0}$

25.19 a) . $\boxed{x^2 - 2\,\mathrm{E}(X)x + \mathrm{E}(X^2)}$

25.19 b) .... $\boxed{\mathrm{E}(X)}$

25.19 c) .... $\boxed{\mathrm{V}(X)}$

25.20 a) .... $\boxed{0}$

25.20 b) .... $\boxed{1}$

Corrigés

25.3 a) La somme des probabilités vaut 1.

25.3 b) On a $\mathrm{P}(X \leqslant 1) = \mathrm{P}\left(X = -\dfrac{3}{2}\right) + \mathrm{P}(X = 0)$.

25.3 c) On a $\mathrm{P}(X \geqslant 3) = \mathrm{P}(X = 3)$.

25.3 d) On a $\mathrm{P}(X < 0) = \mathrm{P}\left(X = -\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{1}{10}$.

25.4 a) Chaque paquet a la même probabilité d'être choisi.

25.4 b) Sachant que le paquet contient 32 cartes, une seule carte porte le numéro 7.

25.4 c) Sachant que le paquet contient 52 cartes, une seule carte porte le numéro 7.

25.4 d) On utilise la formule des probabilités totales ou une représentation avec un arbre.

25.4 e) On a $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{32} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{52} = \dfrac{21}{832}$.

25.5 c) On utilise la formule des probabilités totales ou une représentation avec un arbre.

25.5 d) On a $\dfrac{60}{100} \times 1 + \dfrac{40}{100} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{3 \times 3 + 2}{3 \times 5} = \dfrac{11}{15}$.

25.6 b) Sachant qu'une boule rouge a été tirée, il reste une boule rouge et une boule noire dans l'urne.

25.6 c) Sachant qu'une boule noire a été tirée, il reste uniquement deux boules rouges dans l'urne.

25.6 d) On utilise la formule des probabilités totales ou une représentation avec un arbre.

25.6 e) On a $\dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} \times 1 = \dfrac{2}{3}$.

25.7 a) Il y a une unique carte numérotée 7 dans le paquet de 10 cartes, donc en notant S l'événement « Tirer un 7 », $\mathrm{P}(\overline{S}) = 1 - \mathrm{P}(S) = 1 - \dfrac{1}{10}$.

25.7 b) Tirer un nombre pair correspond à tirer un 2, un 4, un 6, un 8 ou un 10.

25.7 d) Seul 6 est un nombre inférieur à 10 qui soit multiple de 3 et pair.

25.7 e) On a $\mathrm{P}(R \cup T) = \mathrm{P}(R) + \mathrm{P}(T) - \mathrm{P}(R \cap T) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{10} - \dfrac{1}{10} = \dfrac{7}{10}$.

25.7 f) Il y a 10 possibilités pour la première carte, puis seulement 9 possibilités pour la seconde.

25.7 g) Pour que le numéro de la seconde carte soit supérieur à 1, il y a 9 possibilités.

25.7 h) Pour que le numéro de la seconde carte soit supérieur à 1, il y a 8 possibilités.

25.7 i) Pour les tirages favorables :

- si la première carte tirée est un 1, il y a 9 cartes possibles pour la seconde ;
- si la première carte tirée est un 2, il y a 8 cartes possibles pour la seconde ;
- ...
- si la première carte tirée est un 8, il y a 1 carte possible pour la seconde ;
- si la première carte tirée est un 9, il y a 0 carte possible pour la seconde.

Le nombre de tirages favorables est donc égal à $1 + \cdots + 9 = \displaystyle\sum_{k=1}^{9} k = \frac{9 \times 10}{2}$.

25.7 j) Toutes les cartes ont la même probabilité d'être tirées. On utilise donc un modèle d'équiprobabilité. Ainsi, on a $p = \dfrac{45}{90}$.

On aurait également pu remarquer que, lorsqu'on tire deux cartes, soit elles sont ordonnées par ordre croissant, soit elles le sont par ordre décroissant et il y a autant de tirages dans un sens que dans l'autre.

25.7 k) Le nombre de tirages possibles est 17×16. En reprenant le calcul précédent, le nombre de tirages favorables est $\displaystyle\sum_{k=1}^{16} k = \frac{16 \times 17}{2}$. La probabilité vaut donc $\dfrac{1}{2}$. On remarque qu'elle est indépendante du nombre de cartes dans le paquet !

25.8 a) On a $\mathrm{P}(X \leqslant 0) = \mathrm{P}(X = -2) + \mathrm{P}(X = -1) + \mathrm{P}(X = 0) = \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{5}$.

25.8 b) On a $\mathrm{P}(X < 2) = \mathrm{P}(X = -2) + \mathrm{P}(X = -1) + \mathrm{P}(X = 0) + \mathrm{P}(X = 1) = \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{10} = \dfrac{9}{10}$.

25.8 c) D'après la définition de l'espérance, on a

$$\mathrm{E}(X) = -2 \times \frac{1}{10} - 1 \times \frac{1}{5} + 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{10} + 2 \times \frac{1}{10} = \frac{-2 - 2 + 1 + 2}{10} = -\frac{1}{10}.$$

25.8 d) D'après la définition de la variance, on a

$$\begin{aligned} V(X) &= \left(-2+\frac{1}{10}\right)^2 \times \frac{1}{10} + \left(-1+\frac{1}{10}\right)^2 \times \frac{1}{5} + \left(0+\frac{1}{10}\right)^2 \times \frac{1}{2} + \left(1+\frac{1}{10}\right)^2 \times \frac{1}{10} + \left(2+\frac{1}{10}\right)^2 \times \frac{1}{10} \\ &= \frac{19^2 + 2\times 9^2 + 5 + 11^2 + 21^2}{10^2 \times 10} = \frac{361+162+5+121+441}{10^2\times 10} = \frac{1\,090}{10^2\times 10} = \frac{109}{10^2}. \end{aligned}$$

À noter que les carrés se calculent relativement vite. Par exemple, on a

$$19^2 = (10+9)^2 = 10^2 + 2\times 10\times 9 + 9^2 = 100+180+81 = 361.$$

25.9 a) On dessine un arbre et la probabilité recherchée vaut : $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{9}$.

25.9 b) On dessine un arbre et la probabilité recherchée vaut : $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3} = \dfrac{3+2}{18} = \dfrac{5}{18}$.

25.9 c) On dessine un arbre et la probabilité recherchée vaut : $\dfrac{1}{3}\times 1+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3} = \dfrac{6+3+2}{18} = \dfrac{11}{18}$.

25.9 d) En utilisant la loi de X déterminée précédemment et la définition de l'espérance, on trouve

$$E(X) = 1\times\frac{11}{18} + 2\times\frac{5}{18} + 3\times\frac{1}{9} = \frac{11+10+6}{18} = \frac{3}{2}.$$

25.9 e) En utilisant la loi de X déterminée précédemment et la définition de la variance, on trouve

$$\begin{aligned} V(X) &= \left(1-\frac{3}{2}\right)^2 \times\frac{11}{18} + \left(2-\frac{3}{2}\right)^2\times\frac{5}{18} + \left(3-\frac{3}{2}\right)^2\times\frac{1}{9} = \frac{(2-3)^2\times 11 + (4-3)^2\times 5 + (6-3)^2\times 2}{4\times 18} \\ &= \frac{11+5+18}{4\times 18} = \frac{17}{36}. \end{aligned}$$

25.10 a) Comme $\big([X=-3/2],[X=0],[X=1/3]\big)$ forme un système complet d'événements, on a

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+p = 1 \quad \text{donc} \quad p = \frac{1}{4}.$$

25.10 b) D'après la définition de l'espérance, on a $E(X) = -\dfrac{3}{2}\times\dfrac{1}{4} + 0\times\dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{2}\times\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}$.

25.10 c) D'après la définition de la variance, on a $V(X) = \left(-\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{4}\right)^2\dfrac{1}{4} + \left(0-\dfrac{1}{4}\right)^2\dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{4}\right)^2\dfrac{1}{4} = \dfrac{33}{16}$.

25.11 a) Comme $\big([X=1],[X=2],[X=3],[X=4]\big)$ forme un système complet d'événements, on a

$$\alpha+2\alpha+3\alpha+4\alpha = 1 \quad \text{donc} \quad \alpha(1+2+3+4) = 1 \quad \text{donc} \quad \alpha\frac{4\times 5}{2} = 1 \quad \text{donc} \quad \alpha = \frac{1}{10}.$$

25.11 b) D'après la définition de l'espérance, on a

$$E(X) = \sum_{i=1}^{4} i\,P(X=i) = \sum_{i=1}^{4} i\times\frac{i}{10} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{4} i^2 = \frac{1}{10}\times\frac{4(4+1)(2\times 4+1)}{6} = \frac{4\times 5\times 9}{10\times 6} = 3.$$

25.11 c) D'après la définition de la variance, on a

$$\mathrm{V}(X) = (1-3)^2\frac{1}{10} + (2-3)^2\frac{2}{10} + (3-3)^2\frac{3}{10} + (4-3)^2\frac{4}{10} = \frac{4}{10} + \frac{2}{10} + \frac{4}{10} = 1.$$

25.12 a) D'après la linéarité de l'espérance, on a $\mathrm{E}(Y) = 3\,\mathrm{E}(X) + 4$.

25.12 b) D'après les propriétés de la variance, on a $\mathrm{V}(Y) = 3^2\,\mathrm{V}(X)$.

25.13 a) D'après la linéarité de l'espérance, on a $\mathrm{E}(Y) = \dfrac{-\mathrm{E}(X)+2}{5}$.

25.13 b) D'après les propriétés de la variance, on a $\mathrm{V}(Y) = \left(-\dfrac{1}{5}\right)^2\mathrm{V}(X)$.

25.14 a) D'après la linéarité de l'espérance, on a $\mathrm{E}(Y) = 10\,\mathrm{E}(X) - 3 = 10\times\dfrac{4}{5} - 3$.

25.14 b) D'après les propriétés de la variance, on a $\mathrm{V}(Y) = 10^2\,\mathrm{V}(X) = 10^2\times\dfrac{4}{5}\left(1-\dfrac{4}{5}\right)$.

25.14 c) Si X prend la valeur 0, alors Y prend la valeur -3. Si X prend la valeur 1, alors Y prend la valeur 7.

25.14 d) On a $\mathrm{P}(Y=7) = \mathrm{P}(X=1) = \dfrac{4}{5}$.

25.15 a) Si X prend la valeur -5, alors Y prend la valeur 0. Si X prend la valeur 10, alors Y prend la valeur 1.

25.15 b) On a $\mathrm{P}(Y=1) = \mathrm{P}(X=10) = \dfrac{1}{3}$. Ainsi, $\mathrm{P}(Y=0) = 1 - \mathrm{P}(Y=1) = \dfrac{2}{3}$.

25.16 a) On a $\mathrm{E}(X_1) = \displaystyle\sum_{k=1}^{6} k\times\frac{1}{6} = \frac{1}{6}\times\frac{6(6+1)}{2}$.

25.16 b) On a

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X_1) &= \sum_{k=1}^{6}\left(k-\frac{7}{2}\right)^2\frac{1}{6} = \frac{1}{6}\left[\sum_{k=1}^{6}\left(k^2-7k+\frac{49}{4}\right)\right]\\ &= \frac{1}{6}\left(\sum_{k=1}^{6}k^2 - 7\sum_{k=1}^{6}k + 6\times\frac{49}{4}\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{6\times7\times13}{6} - 7\times\frac{6\times7}{2} + 6\times\frac{49}{4}\right)\\ &= \frac{7\times13}{6} - \frac{3\times7^2}{6} + \frac{49}{4} = -\frac{56}{6} + \frac{49}{4} = \frac{-112+147}{12} = \frac{35}{12}.\end{aligned}$$

25.16 c) En utilisant la linéarité de l'espérance, on a $\mathrm{E}(S_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\mathrm{E}(X_k) = \sum_{k=1}^{n}\frac{7}{2}$.

25.16 d) Comme les variables aléatoires sont indépendantes, on a $\mathrm{V}(S_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\mathrm{V}(X_k) = \sum_{k=1}^{n}\frac{35}{12}$.

25.17 a) D'après la linéarité de l'espérance, on a

$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}((X - \mathrm{E}(X))^2) = \mathrm{E}(X^2 - 2X\,\mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(X)^2) = \mathrm{E}(X^2) - 2\,\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(X)^2.$$

25.17 b) On a $\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(X^2) = \mathrm{V}(X) + \mathrm{E}(X)^2 = 5 + 3^2 = 14$.

25.18 Comme X est à valeurs dans $\{0, 1\}$, on a $X^2 = X$. Ainsi, $\mathrm{E}(X) - \mathrm{E}(X^2) = \mathrm{E}(X) - \mathrm{E}(X) = 0$.

25.19 a) En utilisant la linéarité de l'espérance, on trouve $f(x) = \mathrm{E}(X^2 - 2xX + x^2) = \mathrm{E}(X^2) - 2x\,\mathrm{E}(X) + x^2$.

25.19 b) La fonction f est une fonction trinôme dont le coefficient dominant vaut 1. La fonction f atteint donc son minimum en $x_0 = -\dfrac{-2\,\mathrm{E}(X)}{2}$.

25.19 c) Le minimum de f vaut alors $f(x_0) = \mathrm{E}\big((X - \mathrm{E}(X))^2\big) = \mathrm{V}(X)$.

25.20 a) On utilise la linéarité de l'espérance. On trouve

$$\mathrm{E}(S_n) = \mathrm{E}\left(\frac{1}{\sqrt{n}\sigma}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k - nm\right)\right) = \frac{\sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(X_k) - nm}{\sqrt{n}\sigma} = \frac{nm - nm}{\sqrt{n}\sigma}.$$

25.20 b) Comme $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, d'après les propriétés de la variance, on a

$$\mathrm{V}(S_n) = \frac{1}{(\sqrt{n}\sigma)^2} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{V}(X_k) = \frac{n\sigma^2}{n\sigma^2}.$$

Fiche n° 26. Autour de la loi binomiale

Réponses

26.1 a) $2x^4+5x^3-3x^2-7x-2$

26.1 b) $x^5-2x^4+2x^3+3x^2-4x+4$

26.1 c) $4x^4+16x^3+5x^2-5x-2$

26.1 d) x^4-6x^2-3x+2

26.2 a) $(2x-3)(2x+3)$

26.2 b) $(3x+1)^2$

26.2 c) $(x-1)(x-2)$

26.2 d) $x(x+3)(x-1)$

26.3 (b)

26.4 a) $(1-p)^n$

26.4 b) p^n

26.4 c) $np(1-p)^{n-1}$

26.4 d) $np^{n-1}(1-p)$

26.4 e) $\dfrac{n(n-1)}{2}p^2(1-p)^{n-2}$

26.4 f) $\dfrac{n(n-1)}{2}p^{n-2}(1-p)^2$

26.5 a) $\dbinom{n}{k}\dfrac{1}{2^n}$

26.5 b) 0

26.5 c) 0

26.5 d) $\dfrac{n+1}{2^n}$

26.6 a) (d)

26.6 b) (b)

26.6 c) (d)

26.7 a) $\left(5, \dfrac{1}{2}\right)$

26.7 b) $\left(3, \dfrac{1}{6}\right)$

26.7 c) $\left(6, \dfrac{1}{4}\right)$

26.8 a) non

26.8 b) non

26.8 c) $\left(n, \dfrac{1}{6}\right)$

26.8 d) $\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$

26.9 a) $\left(4, \dfrac{3}{8}\right)$

26.9 b) non

26.10 a) np

26.10 b) $3np$

26.10 c) $3np+1$

26.10 d) $5np-2$

26.11 a) $np(1-p)$

26.11 b) $9np(1-p)$

26.11 c) $9np(1-p)$

26.11 d) $25np(1-p)$

26.12 a) $\dfrac{50}{3}$

26.12 b) $\dfrac{1}{6}$

26.12 c) $\dfrac{125}{9}$

26.12 d) $\dfrac{1}{720}$

26.13 a) 0

26.13 b) 1

26.14 a) $\mathscr{B}(\,0{,}9\,)$

26.14 b) $\mathscr{B}(10;\ 0{,}9)$

26.14 c) $(0{,}1)^{10}$

26.14 d) $9\times(0{,}1)^9$

26.14 e) $45\times(0{,}9)^2\times(0{,}1)^8$

26.14 f) $(0{,}9)^9$

26.14 g) $(0{,}9)^{10}$

26.14 h) 9

26.14 i) $0{,}01$

26.14 j) $\mathscr{B}(10;\ 0{,}99)$

26.14 k) $9{,}9$

26.15 a) $\left(\dfrac{5}{8}\right)^{10}$

26.15 b) $1-\left(\dfrac{5}{8}\right)^{10}$

26.15 c) $1-7\times\left(\dfrac{5}{8}\right)^{10}$

26.15 d) $\dfrac{1-7\times\left(\frac{5}{8}\right)^{10}}{1-\left(\frac{5}{8}\right)^{10}}$

26.16 a) $\dfrac{n}{4}$

26.16 b) 0

26.17 a) $\dfrac{p(1-p)}{n\delta^2}$

26.17 b) oui

26.17 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{2\sqrt{n\alpha}}}$

26.17 d) .. $\boxed{\left]\dfrac{X}{n}-\dfrac{1}{2\sqrt{n\alpha}}, \dfrac{X}{n}+\dfrac{1}{2\sqrt{n\alpha}}\right[}$

26.17 e) .... $\boxed{]0{,}34\ ,\ 0{,}54[}$

Corrigés

26.1 a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$(x^2+3x+1)(2x^2-x-2) = 2x^4 - x^3 - 2x^2 + 6x^3 - 3x^2 - 6x + 2x^2 - x - 2 = 2x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 7x - 2\,.$$

....

26.2 a) On a $4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2 = (2x-3)(2x+3)$ d'après l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

....

26.2 b) On reconnaît une identité remarquable : on a $9x^2 + 6x + 1 = (3x)^2 + 2 \times (3x) \times 1 + 1^2 = (3x+1)^2$.

....

26.2 c) L'expression $x^2 - 3x + 2$ est une expression polynomiale du second degré. Le discriminant associé vaut $(-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1$ et les racines associées sont $\dfrac{-(-3)-\sqrt{1}}{2 \times 1} = 1$ et $\dfrac{-(-3)+\sqrt{1}}{2 \times 1} = 2$.

....

26.2 d) On a $(x^2+3x)(x-2) + x(x+3) = x(x+3)(x-2) + x(x+3) = x(x+3)(x-2+1) = x(x+3)(x-1)$.

....

26.3 D'après la formule du cours, on a $\mathrm{P}(X=k) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

....

26.4 a) Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on a $\mathrm{P}(X=k) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. En particulier, pour $k=0$, on obtient $\mathrm{P}(X=0) = \dbinom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} = 1 \times 1 \times (1-p)^n = (1-p)^n$. On procède de même dans les calculs suivants.

....

26.5 a) On a $\mathrm{P}(X=k) = \dbinom{n}{k}\left(\dfrac{1}{2}\right)^k\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^{n-k} = \dbinom{n}{k}\left(\dfrac{1}{2}\right)^k\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-k} = \dbinom{n}{k}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k+n-k} = \dbinom{n}{k}\dfrac{1}{2^n}$.

....

26.5 b) On a $\mathrm{P}(X=0) = \dbinom{n}{0}\dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2^n}$ et $\mathrm{P}(X=n) = \dbinom{n}{n}\dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2^n}$ donc $\mathrm{P}(X=0) - \mathrm{P}(X=n) = 0$.

....

26.5 c) De même, on a $\mathrm{P}(X=k) = \dbinom{n}{k}\dfrac{1}{2^n}$ et $\mathrm{P}(X=n-k) = \dbinom{n}{n-k}\dfrac{1}{2^n} = \dbinom{n}{k}\dfrac{1}{2^n}$ d'après la propriété de symétrie des coefficients binomiaux, donc $\mathrm{P}(X=k) - \mathrm{P}(X=n-k) = 0$.

....

26.5 d) L'événement $\{X \leqslant 1\}$ est la réunion des deux événements incompatibles $\{X=0\}$ et $\{X=1\}$. On a donc $\mathrm{P}(X \leqslant 1) = \mathrm{P}(\{X=0\} \cup \{X=1\}) = \mathrm{P}(X=0) + \mathrm{P}(X=1) = \dbinom{n}{0}\dfrac{1}{2^n} + \dbinom{n}{1}\dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1+n}{2^n}$.

....

26.6 a) Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on a $\mathrm{P}(X=k) = \dbinom{n}{k}\left(\dfrac{1}{4}\right)^k\left(1-\dfrac{1}{4}\right)^{n-k}$. En particulier, pour $k=0$, on a $\mathrm{P}(X=0) = \dbinom{n}{0}\left(\dfrac{1}{4}\right)^0\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-0} = 1 \times 1 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = \dfrac{3^n}{4^n}$. On procède de même dans les calculs suivants.

26.7 a) On peut considérer le lancer d'une pièce de monnaie comme une épreuve de Bernoulli (expérience à deux issues : succès et échec), dans laquelle l'événement « obtenir pile » représente le succès. Puisque la variable aléatoire X compte le nombre de succès lorsqu'on répète indépendamment cette épreuve, elle suit une loi binomiale. L'épreuve étant répétée 5 fois et la probabilité d'un succès étant $\frac{1}{2}$, X suit la loi binomiale de paramètre $\left(5, \frac{1}{2}\right)$.

26.7 b) On peut considérer le lancer d'un dé à six faces comme une épreuve de Bernoulli, dans laquelle l'événement « obtenir 1 » représente le succès. Puisque la variable aléatoire X compte le nombre de succès lorsqu'on répète indépendamment cette épreuve, elle suit une loi binomiale. L'épreuve étant répétée 3 fois et la probabilité d'un succès étant $\frac{1}{6}$, X suit la loi binomiale de paramètre $\left(3, \frac{1}{6}\right)$.

26.7 c) On peut considérer le tirage d'une boule de l'urne comme une épreuve de Bernoulli, dans laquelle l'événement « obtenir une boule bleue » représente le succès. Puisque la variable aléatoire X compte le nombre de succès lorsqu'on répète 6 fois l'expérience, elle suit la loi binomiale de paramètre $\left(6, \frac{1}{4}\right)$.

26.8 a) Comme la variable aléatoire X ne peut pas prendre la valeur 0, X ne suit pas une loi binomiale.

26.8 b) Comme la variable aléatoire X ne peut pas prendre la valeur 0, X ne suit pas une loi binomiale.

26.8 c) On peut considérer le lancer d'un dé à six faces comme une épreuve de Bernoulli, dans laquelle l'événement « obtenir 6 » représente le succès. Puisque la variable aléatoire X compte le nombre de succès lorsqu'on répète indépendamment cette épreuve, elle suit une loi binomiale. L'épreuve étant répétée n fois et la probabilité d'un succès étant $\frac{1}{6}$, X suit la loi binomiale de paramètre $\left(n, \frac{1}{6}\right)$.

26.8 d) On peut considérer le lancer d'un dé à six faces comme une épreuve de Bernoulli, dans laquelle l'événement « obtenir un nombre pair » représente le succès. Puisque la variable aléatoire X compte le nombre de succès lorsqu'on répète indépendamment cette épreuve, elle suit une loi binomiale. L'épreuve étant répétée n fois et la probabilité d'un succès étant $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, X suit la loi binomiale de paramètre $\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

26.9 b) Intuitivement : les tirages n'étant ici plus indépendants, X ne représente pas le nombre de succès lors de la répétition indépendante d'une même épreuve de Bernoulli et donc X ne suit pas une loi binomiale.

26.10 a) D'après le cours, on a $\mathrm{E}(X) = np$.

26.10 b) D'après le cours, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{E}(aX) = a\,\mathrm{E}(X)$. On a donc $\mathrm{E}(3X) = 3\,\mathrm{E}(X) = 3np$.

26.10 c) On sait que, pour $a, b \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{E}(aX+b) = a\,\mathrm{E}(X)+b$. Ici, on a donc $\mathrm{E}(3X+1) = 3\,\mathrm{E}(X)+1 = 3np+1$.

26.10 d) De même, on a $\mathrm{E}(5X-2) = 5\,\mathrm{E}(X) - 2 = 5np - 2$.

26.11 a) D'après le cours, on a $\mathrm{V}(X) = np(1-p)$.

26.11 b) D'après le cours, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{V}(aX) = a^2\,\mathrm{V}(X)$. On a donc $\mathrm{V}(3X) = 9\,\mathrm{V}(X) = 9np(1-p)$.

26.11 c) On sait que, pour $a, b \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{V}(aX+b) = a^2\,\mathrm{V}(X)$. Donc, $\mathrm{V}(3X+1) = 9\,\mathrm{V}(X) = 9np(1-p)$.

26.11 d) De même, on a $\mathrm{V}(5X-2) = 25\,\mathrm{V}(X) = 25np(1-p)$.

26.12 a) On peut considérer le lancer d'un dé à six faces comme une épreuve de Bernoulli, pour laquelle l'événement « obtenir 1 » représente le succès. Puisque la variable aléatoire X compte le nombre de succès lorsqu'on répète indépendamment cette épreuve, elle suit une loi binomiale. L'épreuve étant répétée 100 fois et la probabilité d'un succès étant $\dfrac{1}{6}$, X suit la loi binomiale de paramètre $\left(100, \dfrac{1}{6}\right)$. On a donc $\mathrm{E}(X) = \dfrac{100}{6} = \dfrac{50}{3}$.

26.12 b) D'après les propriétés de l'espérance, on a $\mathrm{E}(Y) = \dfrac{1}{100}\,\mathrm{E}(X) = \dfrac{1}{100} \times \dfrac{100}{6} = \dfrac{1}{6}$.

26.12 c) Puisque X suit la loi binomiale de paramètre $\left(100, \dfrac{1}{6}\right)$, on a $\mathrm{V}(X) = 100 \times \dfrac{1}{6} \times \dfrac{5}{6} = \dfrac{500}{36} = \dfrac{125}{9}$.

26.12 d) D'après les propriétés de la variance, on a $\mathrm{V}(Y) = \dfrac{1}{100^2}\,\mathrm{V}(X) = \dfrac{1}{100^2}\dfrac{500}{36} = \dfrac{5}{3\,600} = \dfrac{1}{720}$.

26.13 a) D'après les propriétés de l'espérance, on a $\mathrm{E}(Y) = \dfrac{1}{\sqrt{np(1-p)}}(\mathrm{E}(X) - np) = 0$ car $\mathrm{E}(X) = np$.

26.13 b) On a $\mathrm{V}(Y) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{np(1-p)}}\right)^2 \mathrm{V}(X) = \dfrac{1}{np(1-p)}\,\mathrm{V}(X) = 1$ car $\mathrm{V}(X) = np(1-p)$.

26.14 a) Puisque la variable aléatoire X_1 ne peut prendre que les valeurs 0 et 1, sa loi est la loi de Bernoulli de paramètre $\mathrm{P}(X_1 = 1) = p = 0{,}9$.

26.14 b) La variable aléatoire X est la somme de 10 variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre $p = 0{,}9$. Donc, X suit la loi binomiale de paramètre $(10;\ 0{,}9)$.

26.14 c) Puisque X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(10,\ 0{,}9)$, on a $\mathrm{P}(X = k) = \dbinom{10}{k}(0{,}9)^k(1-0{,}9)^{10-k}$ pour tout $k \in [\![0, 10]\!]$. En particulier, pour $k = 0$, on obtient $\mathrm{P}(X = 0) = \dbinom{10}{0}(0{,}9)^0(0{,}1)^{10} = (0{,}1)^{10}$.

26.14 h) D'après la formule de l'espérance d'une loi binomiale, on a $\mathrm{E}(X) = 10 \times 0{,}9 = 9$.

26.14 i) Pour $j \in \{1, 2\}$, on note A_j l'événement : « le j-ième relecteur a corrigé la première erreur ». Les événements A_1 et A_2 sont indépendants, donc leurs contraires $\overline{A_1}$ et $\overline{A_2}$ le sont aussi. On a ainsi

$$\mathrm{P}(X_1 = 0) = \mathrm{P}(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = \mathrm{P}(\overline{A_1})\,\mathrm{P}(\overline{A_2}) = 0{,}1 \times 0{,}1 = 0{,}01\,.$$

26.14 j) La variable aléatoire X est la somme de 10 variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre $p = 0{,}99$, donc X suit la loi binomiale de paramètre $(10;\ 0{,}99)$.

26.14 k) D'après la formule de l'espérance d'une loi binomiale, on a $\mathrm{E}(X) = 10 \times 0{,}99 = 9{,}9$.

26.15 a) La variable aléatoire X suit la loi $\mathscr{B}\big(10, \frac{3}{8}\big)$. Donc, on a $\mathrm{P}(X=0) = \binom{10}{0}\left(\frac{3}{8}\right)^0\left(1-\frac{3}{8}\right)^{10-0} = \left(\frac{5}{8}\right)^{10}$.

26.15 b) Les événements $\{X \geqslant 1\}$ et $\{X = 0\}$ étant contraires, on a $\mathrm{P}(X \geqslant 1) = 1 - \mathrm{P}(X=0) = 1 - \left(\frac{5}{8}\right)^{10}$.

26.15 c) Les événements $\{X \geqslant 2\}$ et $\{X \leqslant 1\}$ étant contraires, on a $\mathrm{P}(X \geqslant 2) = 1 - \mathrm{P}(X \leqslant 1)$. Or, l'événement $\{X \leqslant 1\}$ est la réunion des deux événements incompatibles $\{X = 0\}$ et $\{X = 1\}$. On a donc

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X \leqslant 1) &= \mathrm{P}\big(\{X=0\}\cup\{X=1\}\big) = \mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)\\ &= \left(\frac{5}{8}\right)^{10} + \binom{10}{1}\left(\frac{3}{8}\right)^1\left(\frac{5}{8}\right)^9 = \left(\frac{5}{8}\right)^{10} + \frac{30}{8}\left(\frac{5}{8}\right)^9 = \left(\frac{5}{8}\right)^{10} + 6\left(\frac{5}{8}\right)^{10} = 7\left(\frac{5}{8}\right)^{10}.\end{aligned}$$

Donc, $\mathrm{P}(X \geqslant 2) = 1 - 7 \times \left(\frac{5}{8}\right)^{10}$.

26.15 d) On a $\mathrm{P}_{(X\geqslant 1)}(X \geqslant 2) = \dfrac{\mathrm{P}(\{X\geqslant 2\}\cap\{X\geqslant 1\})}{\mathrm{P}(X\geqslant 1)} = \dfrac{\mathrm{P}(X\geqslant 2)}{\mathrm{P}(X\geqslant 1)} = \dfrac{1-7\times\left(\frac{5}{8}\right)^{10}}{1-\left(\frac{5}{8}\right)^{10}}$.

26.16 a) Pour commencer, il faut montrer que X suit la loi $\mathscr{B}\big(n, \frac{1}{4}\big)$. Puis, on en déduit que $\mathrm{E}(X) = \frac{n}{4}$.

26.16 b) Puisque chacune des X bonnes réponses rapporte 3 points et chacune des $n - X$ mauvaises réponses retire 1 point, la note est $N = 3 \times X - 1 \times (n - X) = 4X - n$. Donc, $\mathrm{E}(N) = 4\,\mathrm{E}(X) - n = 4\frac{n}{4} - n = 0$.

26.17 a) On a $\mathrm{E}(X) = np$ et $\mathrm{V}(X) = np(1-p)$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geqslant \delta\right) = \mathrm{P}(|X - np| \geqslant n\delta) \leqslant \frac{np(1-p)}{(n\delta)^2} = \frac{p(1-p)}{n\delta^2}.$$

26.17 b) La fonction polynôme du second degré $t \longmapsto t(1-t)$ atteint son maximum en « $\frac{-b}{2a}$ », qui ici vaut $\frac{1}{2}$, et pour lequel elle vaut $\frac{1}{4}$.

26.17 c) D'après ce qui précède, pour que l'inégalité $\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geqslant \delta\right) \leqslant \alpha$ soit vraie, il suffit d'avoir $\frac{p(1-p)}{n\delta^2} \leqslant \alpha$. Or, d'après le résultat admis, cela est réalisé si on a $\frac{1}{4n\delta^2} \leqslant \alpha$, c'est-à-dire si $\delta^2 \geqslant \frac{1}{4n\alpha}$.

On peut donc choisir $\delta = \dfrac{1}{2\sqrt{n\alpha}}$.

26.17 d) D'après ce qui précède, on a $\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geqslant \frac{1}{2\sqrt{n\alpha}}\right) \leqslant \alpha$, donc on a $\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| < \frac{1}{2\sqrt{n\alpha}}\right) \geqslant 1 - \alpha$.

Or, on a

$$\left|\frac{X}{n} - p\right| < \frac{1}{2\sqrt{n\alpha}} \iff -\frac{1}{2\sqrt{n\alpha}} < p - \frac{X}{n} < \frac{1}{2\sqrt{n\alpha}} \iff \frac{X}{n} - \frac{1}{2\sqrt{n\alpha}} < p < \frac{X}{n} + \frac{1}{2\sqrt{n\alpha}}.$$

Finalement, on a $\mathrm{P}\left(p \in \left]\frac{X}{n} - \frac{1}{2\sqrt{n\alpha}}, \frac{X}{n} + \frac{1}{2\sqrt{n\alpha}}\right[\right) \geqslant 1 - \alpha$.

26.17 e) Avec les données numériques, on a ici $\frac{X}{n} = \frac{220}{500} = 0{,}44$, $\alpha = 0{,}05$ et $\frac{1}{2\sqrt{n\alpha}} = \frac{1}{2\sqrt{25}} = 0{,}1$. L'intervalle I obtenu à la question précédente est donc l'intervalle $\left]0{,}34\ ,\ 0{,}54\right[$.

Fiche n° 27. Droites dans l'espace

Réponses

27.1 a) .... $\boxed{2^{n+1}-1}$

27.1 b) .... $\boxed{3\times\dfrac{3^n-1}{2}}$

27.1 c) .... $\boxed{\dfrac{4^{n+1}-1}{3}}$

27.1 d) .... $\boxed{\dfrac{\mathrm{e}^{n+1}-1}{\mathrm{e}-1}}$

27.2 a) .... $\boxed{[-1,7]}$

27.2 b) .. $\boxed{]-\infty,-3]\cup[2,+\infty[}$

27.2 c) .... $\boxed{[-4,10]}$

27.3 a) .... $\boxed{\text{non}}$

27.3 b) .... $\boxed{\text{oui}}$

27.3 c) .... $\boxed{\text{oui}}$

27.3 d) .... $\boxed{\text{non}}$

27.3 e) .... $\boxed{\text{oui}}$

27.4 a) .... $\boxed{\text{oui}}$

27.4 b) .... $\boxed{\text{non}}$

27.5 a) .... $\boxed{\text{oui}}$

27.5 b) .... $\boxed{\text{non}}$

27.6 a) .... $\boxed{3}$

27.6 b) .... $\boxed{7}$

27.7 a) .... $\boxed{\text{non}}$

27.7 b) .... $\boxed{(0,-1,1)}$

27.8 a) .... $\boxed{(-1,-3)}$

27.8 b) .... $\boxed{x=2}$

27.9 a) .... $\boxed{\text{non}}$

27.9 b) .... $\boxed{\text{non}}$

27.9 c) .... $\boxed{(5,2)}$

27.10 a) .... $\boxed{\text{non}}$

27.10 b) .... $\boxed{\text{oui}}$

27.10 c) .... $\boxed{\text{oui}}$

27.11 .... $\boxed{\dfrac{7}{2}}$

27.12 a) ... $\boxed{\mathrm{A}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+t\vec{k}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}$

27.12 b) .... $\boxed{\text{oui}}$

27.12 c) .... $\boxed{\text{non}}$

27.12 d) .... $\boxed{x\in\mathbb{R}}$

27.12 e) .... $\boxed{1}$

27.13 a) .... $\boxed{-3}$

27.13 b) .... $\boxed{-2}$

27.13 c) .... $\boxed{\text{impossible}}$

27.13 d) .. $\boxed{(2,-2)\text{ et }(-4,-8)}$

27.14 a) .... $\boxed{\varnothing}$

27.14 b) ...... $\boxed{\mathrm{M}(-1,10,-5)}$

27.14 c) .... $\boxed{\varnothing}$

27.14 d) .... $\boxed{\varnothing}$

27.15 a) .... $\boxed{m=4,\ \mathrm{M}(4,1,0)}$

27.15 b) .... $\boxed{m=\dfrac{3}{8}}$

Corrigés

27.1 a) C'est la somme des termes d'une suite géométrique de raison 2 entre les rangs 0 et n.

27.1 b) C'est la somme des termes d'une suite géométrique de raison 3 entre les rangs 1 et n : on a

$$\sum_{k=1}^{n}3^k=3\sum_{k=0}^{n-1}3^k=3\times\frac{3^n-1}{2}.$$

27.1 c) Observons que $2^{2k}=4^k$ pour tout entier k. On calcule donc la somme des termes d'une suite géométrique de raison 4 entre les rangs 0 et n.

27.1 d) On calcule donc la somme des termes d'une suite géométrique de raison e entre les rangs 0 et n.

27.2 a) On a les équivalences : $|x-3|\leqslant 4 \iff -4\leqslant x-3\leqslant 4 \iff -1\leqslant x\leqslant 7$.

27.2 b) On a les équivalences : $|2x+1| \geqslant 5 \iff \big(2x+1 \geqslant 5 \text{ ou } 2x+1 \leqslant -5\big) \iff x \geqslant 2 \text{ ou } x \leqslant -3$.

....

27.2 c) On a les équivalences : $|-x+3| \leqslant 7 \iff |x-3| \leqslant 7 \iff -7 \leqslant x-3 \leqslant 7 \iff -4 \leqslant x \leqslant 10$.

....

27.3 a) Ces deux vecteurs étant non nuls, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel λ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$, ce qui signifie $2 = \lambda \times (-1), 4 = \lambda \times 3$ et $-6 = \lambda \times 2$. Comme $\dfrac{2}{-1} \neq \dfrac{4}{3}$, un tel nombre réel λ ne peut pas exister.

....

27.4 a) Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ n'étant pas colinéaires, les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe deux réels α et β vérifiant $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$, ce qui donne un système de trois équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ 2\alpha + \beta = 3 \\ \alpha + 2\beta = 3. \end{cases}$$

Ici, il y a une solution évidente $\alpha = \beta = 1$.

....

27.4 b) Le système à résoudre s'écrit $\begin{cases} -2\alpha + \beta = 1 \\ \alpha + \beta = 1 \\ 3\alpha + \beta = -3 \end{cases}$. Les deux premières équations donnent $\alpha = 0$ et $\beta = 1$, or le couple $(0, 1)$ ne vérifie pas la troisième équation. Il n'y a donc pas de solution au système considéré.

....

27.5 a) On a $\vec{w} = \dfrac{7}{3}\vec{u} - \dfrac{19}{3}\vec{v}$. Donc, les vecteurs considérés sont coplanaires.

....

27.6 a) Toujours la même démarche : le système à résoudre s'écrit $\begin{cases} \alpha - \beta = & 0 \\ 2\alpha + \beta = & 3 \\ \alpha + 2\beta = m \end{cases}$. Les deux premières équations donnent $\alpha = \beta = 1$; d'où, en reportant dans la troisième, $m = 3$.

....

27.6 b) On trouve comme ci-dessus $\vec{w} = -2\vec{u} + 3\vec{v}$ pour $m = 7$.

....

27.7 b) Là encore, il s'agit d'un système de trois équations à trois inconnues (a, b et c) à résoudre.

....

27.8 a) On cherche (a, b) de telle sorte que le vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ soit colinéaire au vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, c'est-à-dire qu'on cherche un scalaire λ tel que $\begin{pmatrix} a-1 \\ b+2 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ce qui donne $\lambda = -1$ puis $a = -1$ et $b = -3$.

....

27.8 b) On cherche x de telle sorte que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ soient colinéaires, ce qui est réalisé si, et seulement si, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = -2\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ et $x = 2$.

....

27.9 a) Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ne sont jamais colinéaires !

....

27.9 c) Il suffit de regarder la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$.

....

27.10 a) Pour commencer, remarquons que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ne sont pas colinéaires.

On cherche (α, β) vérifiant $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$: ce système n'admet pas de solution.

27.10 b) Les points sont bien coplanaires : en effet, on a $B = D$!

27.10 c) On trouve $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \dfrac{27}{7}\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \dfrac{18}{7}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

27.11 On cherche α, β vérifiant $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$. Les deux dernières équations permettent de trouver α et β, d'où l'unique valeur de a convenable en reportant dans la première équation.

27.12 a) Une représentation paramétrique de la droite est $\mathrm{A}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t\,\overrightarrow{k}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, ce qui donne le point C pour $t = 1$.

27.12 b) Une représentation paramétrique de la droite est $\mathrm{A}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t\,\overrightarrow{k}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, ce qui donne le point C pour $t = 1$.

27.12 d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, le point $\mathrm{D}(1, 2, x)$ appartient à (d).

27.13 a) La relation $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = t\overrightarrow{u}$ donne $t = 0$ pour les deux premières équations et impose $x = -3$ pour la troisième.

27.13 b) Cette fois-ci, on trouve $t = 1$; d'où $x = -2$.

27.13 c) La relation $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = t\overrightarrow{u}$ impose $1 + t = 1$ et $6 - 2t = 5$; comme ces deux équations sont incompatibles, aucun x ne peut convenir.

27.13 d) Si $\overrightarrow{\mathrm{AE}} = t\overrightarrow{u}$, alors on a $\begin{cases} x = 1 + t \\ x^2 = 6 - 2t \\ y = -3 + t \end{cases}$. Les deux premières équations entraînent $(1+t)^2 = 6 - 2t$, d'où $t = 1$ ou $t = -5$. Pour $t = 1$ on trouve $x = 2$ et $y = -2$, pour $t = -5$ on trouve $x = -4$ et $y = -8$.

27.14 a) La première droite est décrite par la représentation paramétrique $\mathrm{A} + t\overrightarrow{u}$, la seconde par $\mathrm{B} + s\overrightarrow{v}$. Chercher leur intersection c'est chercher (s, t) vérifiant

$$\begin{cases} 1 + t = 2 + s \\ 6 - 2t = 6 + s \\ -3 + t = -2 - s. \end{cases}$$

Or, ce système de trois équations à deux inconnues n'a pas de solution, ce qui signifie concrètement que les droites ne se coupent pas : elles ne sont pas coplanaires.

27.14 b) On cherche (s, t) vérifiant

$$\begin{cases} 1 + t = 11 + s \\ 6 - 2t = 10 \\ -3 + t = 7 + s, \end{cases}$$

ce qui donne $t = -2$ et $s = -12$. On calcule ensuite les coordonnées du point d'intersection.

Fiche n° 28. Produit scalaire dans l'espace

Réponses

28.1 a) $\boxed{\dfrac{11}{6}}$

28.1 b) $\boxed{\dfrac{43}{3}}$

28.1 c) $\boxed{\dfrac{10}{3}}$

28.1 d) $\boxed{\dfrac{7}{3} + \dfrac{1}{2}\sqrt{2}}$

28.2 a) $\boxed{5}$

28.2 b) $\boxed{10}$

28.2 c) $\boxed{7}$

28.2 d) $\boxed{4}$

28.3 a) $\boxed{\text{non}}$

28.3 b) $\boxed{\text{oui}}$

28.3 c) $\boxed{\text{non}}$

28.3 d) $\boxed{\text{oui}}$

28.3 e) $\boxed{\text{oui}}$

28.3 f) $\boxed{\text{oui}}$

28.4 a) $\boxed{\text{non}}$

28.4 b) $\boxed{\text{non}}$

28.4 c) $\boxed{\text{oui}}$

28.4 d) $\boxed{\text{oui}}$

28.4 e) $\boxed{\text{oui}}$

28.4 f) $\boxed{\text{oui}}$

28.5 a) $\boxed{\left\{-\dfrac{8}{5}\right\}}$

28.5 b) $\boxed{\{-1, 1\}}$

28.6 a) $\boxed{\{-5, 0\}}$

28.6 b) $\boxed{\left\{-5-\sqrt{31}, -5+\sqrt{31}\right\}}$

28.7 a) $\boxed{6\,\vec{v}\cdot\vec{w} - 2\,\|\vec{v}\|^2}$

28.7 b) $\boxed{6\,\|\vec{w}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 + \vec{v}\cdot\vec{w}}$

28.7 c) $\boxed{6\,\|\vec{v}\|^2 - 3\,\|\vec{w}\|^2 + 7\,\vec{v}\cdot\vec{w}}$

28.7 d) $\boxed{9\,\|\vec{w}\|^2 - \|\vec{v}\|^2}$

28.8 a) $\boxed{\|\vec{v}\|^2 + 4\,\|\vec{w}\|^2 + 4\,\vec{v}\cdot\vec{w}}$

28.8 b) $\boxed{9\,\|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 - 6\,\vec{v}\cdot\vec{w}}$

28.8 c) $\boxed{4\,\|\vec{v}\|^2 + 3\|\vec{w}\|^2 + 4\sqrt{3}\,\vec{v}\cdot\vec{w}}$

28.8 d) $\boxed{4\,\|\vec{v}\|^2 + 5\|\vec{w}\|^2 - 4\sqrt{5}\,\vec{v}\cdot\vec{w}}$

28.9 a) $\boxed{-48}$

28.9 b) $\boxed{-54}$

28.9 c) $\boxed{-14}$

28.9 d) $\boxed{85}$

28.9 e) $\boxed{13}$

28.9 f) $\boxed{12}$

28.10 a) $\boxed{2x - y + 2z - 11 = 0}$

28.10 b) $\boxed{2x - y + 2z - 10 = 0}$

28.10 c) $\boxed{5x + 6y + 14 = 0}$

28.11 $\boxed{\text{b}}$

28.12 a) $\boxed{\text{non}}$

28.12 b) $\boxed{\text{oui}}$

28.12 c) $\boxed{\text{non}}$

28.12 d) $\boxed{\text{non}}$

28.12 e) $\boxed{\text{oui}}$

28.12 f) $\boxed{\text{non}}$

28.13 a) $\boxed{\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$

28.13 b) $\boxed{\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2t \\ z = 2 + t \end{cases},\quad t \in \mathbb{R}}$

28.13 c) .... $\boxed{-2x+2y+z-14=0}$

28.13 d) .... $\boxed{\mathrm{H}(-1,4,4)}$

28.13 e) .... $\boxed{4\sqrt{5}}$

28.14 a) .... $\boxed{x+2y-z-2=0}$

28.14 b) .... $\boxed{\mathrm{H}\left(\frac{4}{3},\frac{5}{3},\frac{8}{3}\right)}$

28.14 c) .... $\boxed{\frac{7\sqrt{3}}{3}}$

28.15 a) .... $\boxed{\sqrt{2t^2-6t+9}}$

28.15 b) .... $\boxed{\frac{2t-3}{\sqrt{2t^2-6t+9}}}$

28.15 c) .... $\boxed{\frac{3\sqrt{2}}{2}}$

28.16 a) .... $\boxed{\begin{cases} x=2+t \\ y=4-3t \\ z=2t \end{cases},\ t\in\mathbb{R}}$

28.16 b) .... $\boxed{\mathrm{H}\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2},1\right)}$

28.16 c) .... $\boxed{\frac{\sqrt{14}}{2}}$

28.17 a) .... $\boxed{\mathrm{AM}_t=|t|\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

28.17 b) .... $\boxed{-\frac{ax_{\mathrm{A}}+by_{\mathrm{A}}+cz_{\mathrm{A}}+d}{a^2+b^2+c^2}}$

28.17 c) .... $\boxed{\frac{|ax_{\mathrm{A}}+by_{\mathrm{A}}+cz_{\mathrm{A}}+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$

28.18 a) .... $\boxed{\mathrm{BP}\times\mathrm{BH}}$

28.18 b) .... $\boxed{\sqrt{6}}$

28.18 c) .... $\boxed{1}$

28.18 d) .... $\boxed{\frac{\sqrt{6}}{6}}$

28.18 e) .... $\boxed{\mathrm{PF}=\frac{\sqrt{30}}{6}}$

28.19 a) .... $\boxed{\begin{cases} x=4-2t \\ y=2+t \\ z=2+t \end{cases},\ t\in\mathbb{R}}$

28.19 b) .... $\boxed{\frac{5\sqrt{3}}{3}}$

28.19 c) .... $\boxed{\frac{5\sqrt{2}}{2}}$

Corrigés

28.1 a) On a $P(1)=1^2+\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{3}=\frac{6}{6}+\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{11}{6}$.

28.1 b) On a $P(-4)=(-4)^2+\frac{1}{2}\times(-4)+\frac{1}{3}=\frac{48}{3}+\frac{-6}{3}+\frac{1}{3}=\frac{43}{3}$.

28.1 c) On a $P\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}+\frac{1}{3}=\frac{9}{4}+\frac{3}{4}+\frac{1}{3}=\frac{12}{4}+\frac{1}{3}=3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$.

28.1 d) On a $P(\sqrt{2})=\left(\sqrt{2}\right)^2+\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{3}=2+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\sqrt{2}=\frac{7}{3}+\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

28.2 a) On a $u_1=u_0+0+1=5$.

28.2 b) On a $u_2=u_1+1+1=7$, d'où $u_3=u_2+2+1=10$.

28.2 c) On a $v_1=v_0+0=4$, d'où $v_2=v_1+1=5$ et $v_3=v_2+2=7$.

28.2 d) On a $w_1 = w_0 - 0 + 1 = 5$, d'où $w_2 = w_1 - 1 + 1 = 5$ et $w_3 = w_2 - 2 + 1 = 4$.

28.3 a) On a $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \times 14 + 3 \times (-1) + (-4) \times (-8) = 29$. Comme $\vec{a} \cdot \vec{b} \neq 0$, $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont pas orthogonaux.

28.3 b) On a $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \times 2 + 3 \times 4 + (-4) \times 3 = 0$, on a ainsi montré que $\vec{a}$ et $\vec{c}$ sont orthogonaux.

28.4 a) Remarquons pour commencer que $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$ et qu'ainsi $\sqrt{2} \times \sqrt{6} = 2\sqrt{3}$ et $\sqrt{3} \times \sqrt{6} = 3\sqrt{2}$.

On a $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \times (-2) + \left(-\sqrt{6}\right) \times \left(\sqrt{3} + \sqrt{6}\right) + 3\sqrt{2} \times \left(1 - 3\sqrt{2}\right) = -8 - 3\sqrt{2} - 6 + 3\sqrt{2} - 18 = -32$.

On a montré que $\vec{a} \cdot \vec{b} \neq 0$ donc que $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont pas orthogonaux.

28.4 b) On a $\vec{a} \cdot \vec{c} = 4 \times 2 + \left(-\sqrt{6}\right) \times \sqrt{3} + 3\sqrt{2} \times 1 = 8 - 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 8 \neq 0$.

28.4 c) On a
$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{d} &= \left[4 \times \left(-2\sqrt{3}\right)\right] + \left[\left(-\sqrt{6}\right) \times \left(3 - \sqrt{2}\right)\right] + \left[3\sqrt{2} \times \left(\sqrt{3} + \sqrt{6}\right)\right] \\ &= \left[-8\sqrt{3}\right] + \left[-3\sqrt{6} + \sqrt{6} \times \sqrt{2}\right] + \left[3\sqrt{2} \times \sqrt{3} + 3\sqrt{2} \times \sqrt{6}\right] \\ &= \left[-8\sqrt{3}\right] + \left[-3\sqrt{6} + 2\sqrt{3}\right] + \left[3\sqrt{6} + 6\sqrt{3}\right] = 0.\end{aligned}$$

28.4 d) On a $\vec{b} \cdot \vec{c} = -2 \times 2 + \left(\sqrt{3} + \sqrt{6}\right) \times \sqrt{3} + \left(1 - 3\sqrt{2}\right) \times 1 = -4 + 3 + 3\sqrt{2} + 1 - 3\sqrt{2} = 0$.

28.4 e) On a
$$\begin{aligned}\vec{b} \cdot \vec{d} &= \left[-2 \times \left(-2\sqrt{3}\right)\right] + \left[\left(\sqrt{3} + \sqrt{6}\right) \times \left(3 - \sqrt{2}\right)\right] + \left[\left(1 - 3\sqrt{2}\right) \times \left(\sqrt{3} + \sqrt{6}\right)\right] \\ &= \left[4\sqrt{3}\right] + \left[3\sqrt{3} - \sqrt{3} \times \sqrt{2} + 3\sqrt{6} - \sqrt{6} \times \sqrt{2}\right] + \left[\sqrt{3} + \sqrt{6} - 3\sqrt{2} \times \sqrt{3} - 3\sqrt{2} \times \sqrt{6}\right] \\ &= \left[4\sqrt{3}\right] + \left[3\sqrt{3} - \sqrt{6} + 3\sqrt{6} - 2\sqrt{3}\right] + \left[\sqrt{3} + \sqrt{6} - 3\sqrt{6} - 6\sqrt{3}\right] = 0.\end{aligned}$$

28.4 f) On a $\vec{c} \cdot \vec{d} = 2 \times (-2\sqrt{3}) + \sqrt{3} \times \left(3 - \sqrt{2}\right) + 1 \times \left(\sqrt{3} + \sqrt{6}\right) = -4\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - \sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{6} = 0$.

28.5 a) On a $\vec{v} \cdot \vec{w} = 4(t+3) + 6t + 4 = 10t + 16$. On en déduit que $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ si, et seulement si, $t = -\dfrac{8}{5}$.

28.5 b) On a $\vec{v} \cdot \vec{w} = 2t^2 + (2+t)(2-t) - 5 = (t-1)(t+1)$, donc $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ si, et seulement si, $t = -1$ ou $t = 1$.

28.6 a) On a $\vec{v} \cdot \vec{w} = 4t + t + t^2 = t^2 + 5t = t(t+5)$, donc $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ si, et seulement si, $t = 0$ ou $t = -5$.

28.6 b) On a $\vec{v} \cdot \vec{w} = (t-1)(t+1) + (t+2)^2 - (t-3)^2 = t^2 + 10t - 6 = (t+5)^2 - 31 = \left(t + 5 - \sqrt{31}\right)\left(t + 5 + \sqrt{31}\right)$, donc $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ si, et seulement si, $t = -5 - \sqrt{31}$ ou $t = -5 + \sqrt{31}$.

28.7 a) On a $2\vec{v} \cdot (3\vec{w} - \vec{v}) = 6\vec{v} \cdot \vec{w} - 2\vec{v} \cdot \vec{v} = 6\vec{v} \cdot \vec{w} - 2\,\|\vec{v}\|^2$.

28.7 b) On a $(\vec{v} + 2\vec{w}) \cdot (3\vec{w} - \vec{v}) = 3\vec{v} \cdot \vec{w} - \vec{v} \cdot \vec{v} + 6\vec{w} \cdot \vec{w} - 2\vec{w} \cdot \vec{v} = 6\|\vec{w}\|^2 + \vec{v} \cdot \vec{w} - \|v\|^2$.

28.7 c) On a $(3\vec{v} - \vec{w}) \cdot (2\vec{v} + 3\vec{w}) = 6\vec{v} \cdot \vec{v} + 9\vec{v} \cdot \vec{w} - 2\vec{w} \cdot \vec{v} - 3\vec{w} \cdot \vec{w} = 6\|v\|^2 - 3\|w\|^2 + 7\vec{v} \cdot \vec{w}$.

28.7 d) On a $(\vec{v} + 3\vec{w}) \cdot (3\vec{w} - \vec{v}) = (3\vec{w} + \vec{v}) \cdot (3\vec{w} - \vec{v}) = \|3\vec{w}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 9\|\vec{w}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$.

28.8 a) On a $\|\vec{v}+2\vec{w}\|^2 = (\vec{v}+2\vec{w})^2 = \vec{v}^2 + 2\times(\vec{v}\cdot(2\vec{w})) + (2\vec{w})^2 = \|\vec{v}\|^2 + 4\,\vec{v}\cdot\vec{w} + 4\,\|\vec{w}\|^2$.

28.8 b) On a $\|3\vec{v}-\vec{w}\|^2 = \|3\vec{v}\|^2 - 2\times(3\vec{v})\cdot\vec{w} + \|\vec{w}\|^2 = 9\|\vec{v}\|^2 - 6\vec{v}\cdot\vec{w} + \|\vec{w}\|^2$.

28.8 c) On a $\left\|2\vec{v}+\sqrt{3}\,\vec{w}\right\|^2 = \|2\vec{v}\|^2 + 2\times(2\vec{v})\cdot\left(\sqrt{3}\vec{w}\right) + \left\|\sqrt{3}\vec{w}\right\|^2 = 4\,\|\vec{v}\|^2 + 4\sqrt{3}\,\vec{v}\cdot\vec{w} + 3\|\vec{w}\|^2$.

28.9 a) On a $(2\vec{v}-3\vec{w})\cdot(3\vec{v}+2\vec{w}) = 6\|\vec{v}\|^2 - 6\|\vec{w}\|^2 - 5\vec{v}\cdot\vec{w} = 6\times 1^2 - 6\times 3^2 - 5\times 0 = -48$.

28.9 b) On a $(2\vec{v}-3\vec{w})\cdot(3\vec{u}+2\vec{w}) = 6\vec{v}\cdot\vec{u} + 4\vec{v}\cdot\vec{w} - 9\vec{w}\cdot\vec{u} - 6\|\vec{w}\|^2 = -6\times 3^2 = -54$.

28.9 c) On a $(\vec{u}+\vec{w})\cdot(2\vec{u}-2\vec{w}) = 2\|\vec{u}\|^2 - 2\|\vec{w}\|^2 = 2\times\left(\sqrt{2}\right)^2 - 2\times 3^2 = -14$.

28.9 d) On a $\|2\vec{v}+3\vec{w}\|^2 = 4\|\vec{v}\|^2 + 9\|\vec{w}\|^2 + 12\vec{v}\cdot\vec{w} = 4\times 1^2 + 9\times 3^2 + 12\times 0 = 85$.

28.9 e) On a $\left\|\sqrt{2}\,\vec{u}+\vec{w}\right\|^2 = 2\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 + 2\sqrt{2}\times\vec{u}\cdot\vec{w} = 2\times\left(\sqrt{2}\right)^2 + 3^2 + 2\times 0 = 13$.

28.9 f) On a $\|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + 2\vec{u}\cdot\vec{w} + 2\vec{v}\cdot\vec{w} = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 = 12$.

28.10 a) Soit $\mathrm{M}(x,y,z)$ un point de l'espace. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- M appartient à $\mathcal{P}$.
- $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-5 \\ z-6 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux.
- $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\vec{n} = 0$.
- $2(x-2) - (y-5) + 2(z-6) = 0$.
- $2x - y + 2z - 11 = 0$.

On a montré que $\mathcal{P}$ admet pour équation $2x - y + 2z - 11 = 0$.

28.10 b) Le plan $\mathcal{P}$ admet $\vec{n}$ pour vecteur normal donc $\mathcal{P}$ admet une équation de la forme $2x - y + 2z + d = 0$ avec d réel. De plus, $\mathrm{A}(1,-2,3)$ appartient à $\mathcal{P}$ donc $2\times 1 - (-2) + 2\times 3 + d = 0$ donc $d = -10$.

Le plan $\mathcal{P}$ admet pour équation $2x - y + 2z - 10 = 0$.

28.10 c) Pour cette question et la suivante, on procède de façon identique à la question a) ou à la question b).

28.11 On substitue les coordonnées de A dans le membre de droite des différentes équations :

$$1+2\times 2+3 = 8, \qquad 1+0-2\times 2+3 = 0, \qquad 1+0+2\times 2-5 = 0, \qquad 1+2\times 2-5 = 0.$$

On en déduit que la réponse a n'est pas l'équation d'un plan passant par A.

Les plans dont les équations sont les réponses b, c et d admettent respectivement pour vecteurs normaux : $\overrightarrow{n_{\mathrm{b}}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{n_{\mathrm{c}}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n_{\mathrm{d}}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Le vecteur $\overrightarrow{n_{\mathrm{b}}}$ est le seul de ces vecteurs qui soit colinéaire à $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

La seule réponse correcte est donc la réponse b.

28.12 a) Les plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$ et $\mathcal{P}_4$ admettent respectivement $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{n_3}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{n_4}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ pour vecteurs normaux . On a ainsi $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2} = 1\times 2 + 1\times(-1) + 1\times 0 = 1$. Les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas orthogonaux donc les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont pas perpendiculaires. On procède de façon identique pour les questions suivantes.

28.13 b) Soit $\mathrm{M}(x,y,z)$ un point de l'espace. M appartient à (BC) si, et seulement si, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BM}}\begin{pmatrix}x-3\\y-0\\z-2\end{pmatrix}$ sont colinéaires, c'est-à-dire si, et seulement si, il existe un réel t tel que $\begin{cases}x-3=-2t\\y=2t\\z-2=t\end{cases}$, c'est-à-dire $\begin{cases}x=3-2t\\y=2t\\z=2+t\end{cases}$.

28.13 c) Soit $\mathrm{M}(x,y,z)$ un point de l'espace. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- M appartient à $\mathcal{P}$.
- $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\begin{pmatrix}x-3\\y-4\\z-12\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$ sont orthogonaux.
- $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0$.
- $-2(x-3)+2(y-4)+z-12=0$.
- $-2x+2y+z-14=0$.

On a montré que $\mathcal{P}$ admet pour équation $-2x+2y+z-14=0$.

28.13 d) Le point H appartient à (BC) donc il existe un réel t tel que ses coordonnées soient $\mathrm{H}(3-2t, 2t, 2+t)$. De plus, H appartient à $\mathcal{P}$ donc $-2(3-2t)+2\times 2t+2+t-14=0$. On en déduit que $t=2$ et $\mathrm{H}(-1,4,4)$.

28.13 e) On a $\mathrm{AH} = \sqrt{(-1-3)^2+(4-4)^2+(4-12)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$.

28.14 a) Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d et un vecteur normal à $\mathcal{P}$, on en déduit que $\mathcal{P}$ admet une équation de la forme $x+2y-z+d=0$. De plus, $\mathcal{P}$ passe par $\mathrm{A}(5,0,3)$ donc $5+2\times 0-3+d=0$ et $d=-2$. Le plan $\mathcal{P}$ admet $x+2y-z-2=0$ pour équation.

28.14 b) Le point H appartient à d donc il existe un réel t tel que $\mathrm{H}(3+t, 5+2t, 1-t)$. Le point H appartient à $\mathcal{P}$ donc $3+t+2(5+2t)-(1-t)-2=0$. On en déduit que $t=-\dfrac{5}{3}$ et que $\mathrm{H}\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{5}{3},\dfrac{8}{3}\right)$.

28.14 c) On a $\mathrm{AH} = \sqrt{\left(\dfrac{4}{3}-5\right)^2+\left(\dfrac{5}{3}-0\right)^2+\left(\dfrac{8}{3}-3\right)^2} = \sqrt{\dfrac{147}{9}} = \dfrac{7\sqrt{3}}{3}$.

28.15 a) On a $\mathrm{AM} = \sqrt{(t+1-2)^2+(2-4)^2+(2-t-0)^2} = \sqrt{(t-1)^2+4+(t-2)^2} = \sqrt{2t^2-6t+9}$.

28.15 b) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel t, on a $f'(t) = \dfrac{4t-6}{2\sqrt{2t^2-6t+9}} = \dfrac{2t-3}{\sqrt{2t^2-6t+9}}$.

28.15 c) En étudiant le signe de f', on montre que f admet un minimum en $t=\dfrac{3}{2}$.
Ce minimum vaut $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. La distance de A à d est donc égale à $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

28.16 a) Le plan $\mathcal{P}$ admet pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$. La droite (AH) passe par A et admet pour vecteur directeur $\vec{n}$, on en déduit une représentation paramétrique de (AH) : $\begin{cases}x = 2+t\\ y = 4-3t\\ z = 2t\end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

....

28.16 b) D'après la question précédente, il existe un réel t tel que $\mathrm{H}(2+t, 4-3t, 2t)$. De plus, H appartient à $\mathcal{P}$ donc $2+t-3(4-3t)+2\times 2t+3 = 0$ d'où $t = \dfrac{1}{2}$ et $\mathrm{H}\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{5}{2}, 1\right)$.

....

28.17 a) On a $\mathrm{AM}_t = \sqrt{(x_\mathrm{A}+at-x_\mathrm{A})^2+(y_\mathrm{A}+bt-y_\mathrm{A})^2+(z_\mathrm{A}+ct-z_\mathrm{A})^2} = \sqrt{(at)^2+(bt)^2+(ct)^2}$

$= \sqrt{(a^2+b^2+c^2)t^2} = |t|\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

....

28.17 b) Les propositions suivantes sont équivalentes :

- $\mathrm{M}_t(x_\mathrm{A}+at, y_\mathrm{A}+bt, z_\mathrm{A}+ct)$ appartient à $\mathcal{P}$;
- $a(x_\mathrm{A}+at)+b(y_\mathrm{A}+bt)+c(z_\mathrm{A}+ct)+d = 0$;
- $(a^2+b^2+c^2)t+ax_\mathrm{A}+by_\mathrm{A}+cz_\mathrm{A}+d = 0$.

On a ainsi $t_\mathrm{H} = -\dfrac{ax_\mathrm{A}+by_\mathrm{A}+cz_\mathrm{A}+d}{a^2+b^2+c^2}$.

....

28.17 c) La distance de A à $\mathcal{P}$ est : $\mathrm{AM}_{t_\mathrm{H}} = \left|-\dfrac{ax_\mathrm{A}+by_\mathrm{A}+cz_\mathrm{A}+d}{a^2+b^2+c^2}\right|\sqrt{a^2+b^2+c^2} = \dfrac{|ax_\mathrm{A}+by_\mathrm{A}+cz_\mathrm{A}+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

....

28.18 a) On a $\overrightarrow{\mathrm{BF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BH}} = \left(\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{PF}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{BH}} = \overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BH}}+\overrightarrow{\mathrm{PF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BH}} = \mathrm{BP}\times\mathrm{BH}+0$.

....

28.18 b) Dans le triangle DAB rectangle en A, on a $\mathrm{BA}^2+\mathrm{AD}^2 = \mathrm{BD}^2$, d'où $\mathrm{BD}^2 = 5$.

Dans le triangle DHB rectangle en D, on a $\mathrm{BD}^2+\mathrm{DH}^2 = \mathrm{BH}^2$, d'où $\mathrm{BH}^2 = 6$ et $\mathrm{BH} = \sqrt{6}$.

....

28.18 c) On a $\overrightarrow{\mathrm{BF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BH}} = \overrightarrow{\mathrm{BF}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{BF}}+\overrightarrow{\mathrm{FH}}\right) = \left\|\overrightarrow{\mathrm{BF}}\right\|^2+\overrightarrow{\mathrm{BF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FH}} = 1+0$.

....

28.18 d) D'une part, on a $\overrightarrow{\mathrm{BF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BH}} = 1$, d'autre part on a $\overrightarrow{\mathrm{BF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BH}} = \mathrm{BP}\times\mathrm{BH}$. Ainsi $\sqrt{6}\times\mathrm{BP} = 1$ et $\mathrm{BP} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

....

28.18 e) Dans BPF, on a $\mathrm{BF}^2 = \mathrm{BP}^2+\mathrm{PF}^2$, d'où $\mathrm{PF}^2 = \mathrm{BF}^2-\mathrm{BP}^2 = 1^2-\left(\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)^2 = \dfrac{5}{6}$ et $\mathrm{PF} = \sqrt{\dfrac{5}{6}} = \dfrac{\sqrt{30}}{6}$.

....

28.19 b) Le plan $\mathcal{P}$ perpendiculaire à (BC) et passant par A admet $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ pour vecteur directeur, on en déduit que $\mathcal{P}$ admet pour équation cartésienne : $-2x+y+z = 0$.

En utilisant la représentation paramétrique de (BC) et l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$, on obtient les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur (BC) : $\mathrm{H}\left(\dfrac{8}{3}; \dfrac{8}{3}; \dfrac{8}{3}\right)$. On en déduit $\mathrm{AH} = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$.

....

28.19 c) On a $\mathrm{BC} = \sqrt{6}$ et $\mathrm{AH} = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$. On en déduit que l'aire de ABC est égale à $\dfrac{\mathrm{BC}\times\mathrm{AH}}{2} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

....

Fiche n° 29. Plans et sphères dans l'espace

Réponses

29.1 a) $\boxed{\varnothing}$

29.1 b) $\boxed{\text{la droite}}$

29.1 c) $\boxed{\{M(9,-21)\}}$

29.2 a) $\boxed{]-\infty,-1[\cup\left]\frac{3}{2},+\infty\right[}$

29.2 b) $\boxed{\left]-3,\frac{5}{2}\right[}$

29.2 c) $\boxed{\left[-\frac{1}{2},5\right[}$

29.3 a) $\boxed{A(3,0,0)}$

29.3 b) $\boxed{A(0,4,0)}$

29.3 c) $\boxed{A(6,0,0)}$

29.3 d) $\boxed{A(18,0,0)}$

29.4 a) $\boxed{x=1}$

29.4 b) $\boxed{z=1}$

29.4 c) $\boxed{2x+3y=8}$

29.5 a) $\boxed{\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}}$

29.5 b) $\boxed{\vec{n}\begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix}}$

29.5 c) $\boxed{\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}$

29.5 d) $\boxed{\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}}$

29.6 a) $\boxed{z=3}$

29.6 b) $\boxed{y=2}$

29.6 c) $\boxed{y=2}$

29.6 d) $\boxed{x=1}$

29.7 a) $\boxed{\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}}$

29.7 b) $\boxed{\vec{n}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{5}{3}\\1\end{pmatrix}}$

29.8 a) $\boxed{3x-2y+4z=-13}$

29.8 b) $\boxed{2x-y+3z=-9}$

29.9 a) $\boxed{3x-2y+2z=-7}$

29.9 b) $\boxed{x-2y+4z=-15}$

29.10 a) $\boxed{x+y=1}$

29.10 b) $\boxed{x+y=1}$

29.10 c) $\boxed{z=1}$

29.11 $\boxed{\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=1}$

29.12 a) $\boxed{x=-1}$

29.12 b) $\boxed{x-y=3}$

29.13 a) $\boxed{\{I(0,3,-3)\}}$

29.13 b) $\boxed{\left\{I\left(\frac{11}{4},\frac{1}{4},\frac{5}{2}\right)\right\}}$

29.13 c) $\boxed{\varnothing}$

29.14 a) $\boxed{\left\{I\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2},2\right)\right\}}$

29.14 b) $\boxed{(d)}$

29.15 a) $\boxed{A(1,-1,0) \text{ et } \vec{u}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}$

29.15 b) $\boxed{\mathrm{A}(2,0,-1) \text{ et } \vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}$

29.15 c) $\boxed{\mathrm{A}(-1,1,0) \text{ et } \vec{u}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}$

29.16 a) $\boxed{\mathrm{A}(-6,12,0),\ \vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}}$

29.16 b) $\boxed{\mathrm{A}(9,-3,0),\ \vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}}$

29.16 c) $\boxed{\mathrm{A}(3,4,0),\ \vec{u}\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}}$

29.16 d) $\boxed{\mathrm{A}\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix},\ \vec{u}\begin{pmatrix}28\\27\\5\end{pmatrix}}$

29.17 a) $\boxed{\mathrm{A}(2,-1,-1)}$

29.17 b) $\boxed{\mathrm{A}\left(-\frac{5}{2},\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)}$

29.17 c) $\boxed{\mathrm{A}(25,-4,1)}$

29.18 a) $\boxed{x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-35=0}$

29.18 b) $\boxed{x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z+2=0}$

29.19 a) $\boxed{\Omega(0,0,0) \text{ et } R=2}$

29.19 b) $\boxed{\varnothing}$

29.19 c) $\boxed{\Omega(-1,2,3) \text{ et } R=\sqrt{13}}$

29.20 a) $\boxed{\Omega\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right) \text{ et } R=2}$

29.20 b) $\boxed{\Omega(\cos(\alpha),\sin(\alpha),0) \text{ et } R=2}$

29.21 a) $\boxed{x^2+y^2+z^2-2x-4y-2z+5=0}$

29.21 b) $\boxed{\begin{cases} x = t+1 \\ y = -t+1 \\ z = 3t+1 \end{cases} \text{ où } t \text{ décrit } \mathbb{R}}$

29.21 c) $\boxed{\mathrm{M}_1(1,1,1) \text{ et } \mathrm{M}_2\left(\frac{9}{11},\frac{13}{11},\frac{5}{11}\right)}$

29.22 a) $\boxed{\varnothing}$

29.22 b) $\boxed{\mathrm{M}\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2},1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$

29.23 a) $\boxed{\{\mathrm{M}(-4,52,34)\}}$

29.23 b) la droite définie par $\mathrm{A}(-72,-42,0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\4\\1\end{pmatrix}$

29.24 a) $\boxed{\varnothing}$

29.24 b) $\boxed{\{\mathrm{A}(3,-6,-25)\}}$

Corrigés

29.2 a) Un trinôme est du signe de « a » à l'extérieur de l'intervalle des racines ! Et ici, les racines sont $\frac{3}{2}$ et -1.

29.2 b) Ici, le coefficient « a » vaut -2.

29.8 a) On détermine un vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Les nombres x, y, z vérifient $\begin{cases} 4x+2y-2z=0 \\ 4y+2z=0 \end{cases}$, ce qui donne $\begin{cases} x = \frac{3}{4}z \\ y = -\frac{1}{2}z \end{cases}$. On cherche un (seul) vecteur normal, on choisit donc par exemple $z=4$, ce qui donne $x=3$ et $y=-2$. Ainsi, une équation du plan est de la forme $3x-2y+4z=d$. Puis, on détermine d en écrivant que A appartient au plan.

....

29.8 b) On détermine un vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Les nombres x, y, z vérifient $\begin{cases} x + 5y + z = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$, ce qui donne $x = -2y$ avec la seconde équation, d'où $z = -x - 5y = -3y$. On cherche un (seul) vecteur normal : on choisit par exemple $y = -1$, ce qui donne $x = 2$ et $z = 3$; donc, une équation du plan est de la forme $2x - y + 3z = d$. Puis, on détermine d en écrivant que A appartient au plan.

....

29.9 a) On procède comme précédemment. On trouve le système $\begin{cases} 4x + y - 5z = 0 \\ 2x - 2y - 5z = 0 \end{cases}$, donc $\begin{cases} 4x - y = 5z \\ 2x - 2y = 5z \end{cases}$. En choisissant $z = 2$, on trouve l'équation $3x - 2y + 2z = d$ pour le plan. On détermine d en utilisant le point A.

....

29.9 b) On détermine un vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$, ainsi x, y, z vérifient $\begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ 4x + 8y + 3z = 0 \end{cases}$, ce qu'on choisit de réécrire $\begin{cases} 2x + z = -3y \\ 4x + 3z = -8y \end{cases}$, d'où $z = -2y$ et $x = -\dfrac{1}{2}y$. On cherche un (seul) vecteur normal : on choisit par exemple $y = -2$, ce qui donne $x = 1$ et $z = 4$; donc, une équation du plan est de la forme $x - 2y + 4z = d$. Puis, on détermine d en écrivant que A appartient au plan.

....

29.12 a) Ce plan passe par $\mathrm{I}(-1, 0, 0)$ et est orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

....

29.12 b) Ce plan passe par $\mathrm{I}(3, 0, -3)$ et est orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

....

29.13 a) Une représentation paramétrique de la droite est donnée par $\mathrm{A} + \lambda\vec{u}$. La droite et le plan ont un point d'intersection si, et seulement si, l'équation $(1 + \lambda) + 2(2 - \lambda) = 6$ admet une solution, ce qui est le cas ici (pour $\lambda = -1$). On en déduit les coordonnées du point d'intersection $\begin{pmatrix} 1 + \lambda \times 1 \\ 2 + \lambda \times (-1) \\ -1 + \lambda \times 2 \end{pmatrix}$.

....

29.13 b) On trouve $\lambda = \dfrac{7}{4}$.

....

29.13 c) Le point A n'appartient pas au plan mais la droite est parallèle au plan ; en effet le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, qui est un vecteur normal au plan, est orthogonal au vecteur $\vec{u}$. Ainsi, la droite est strictement parallèle au plan.

....

29.14 a) On trouve $\lambda = \dfrac{3}{2}$.

....

29.14 b) Là encore, le vecteur directeur de la droite (d) est orthogonal au vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, donc la droite est parallèle au plan. Mais, ici, le point A appartient au plan, donc la droite est toute entière incluse dans le plan.

....

29.15 a) Il suffit de se représenter la position de ces deux plans : ils sont tous deux parallèles au vecteur $\overrightarrow{k}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

....

29.16 a) L'intersection de ces deux plans est une droite, dont les points vérifient $\begin{cases} x+y-2z=6 \\ \quad\; y+\;\; z=12 \end{cases}$, qu'on écrit plutôt $\begin{cases} x \quad\;\; = 3z \;-6 \\ y = -z+12 \end{cases}$. Comme il n'y a aucune condition sur z, on obtient la droite donnée par la représentation paramétrique $\mathrm{A}\begin{pmatrix}-6\\12\\0\end{pmatrix} + z\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$.

....

29.16 b) L'intersection de ces deux plans est une droite, dont les points vérifient $\begin{cases} x+y-2z=6 \\ x-y+\;\; z=12 \end{cases}$ et donc, après calcul, $\begin{cases} x \quad = \dfrac{1}{2}z+9 \\ y = \dfrac{3}{2}z-3 \end{cases}$. On obtient la droite donnée par la représentation paramétrique $\mathrm{A}\begin{pmatrix}9\\-3\\0\end{pmatrix} + z\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$.

....

29.17 a) La deuxième équation est très pratique, on est donc ramené à $\begin{cases} x+y = \quad 1 \\ x-y = \quad 3 \\ \quad\;\; y = z \end{cases}$ dont la résolution est aisée.

....

29.17 c) Foin de substitutions hasardeuses ! Éliminons x par différence entre les deux premières équations : on obtient $\begin{cases} x+2y-3z=6 \\ \quad\; 3y-2z=4 \\ \quad\;\; y+4z=-1 \end{cases}$. Les deux dernières lignes permettent de déterminer y et z ; on déduit x avec la première.

....

29.18 a) On rappelle que la sphère de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M vérifiant $\Omega\mathrm{M} = R$. On en obtient une équation cartésienne en écrivant $\Omega\mathrm{M}^2 = R^2$, c'est-à-dire $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2 = 49$.

....

29.19 b) L'équation $x^2+y^2+z^2+2x-4y-3z+10=0$ est équivalente à $(x+1)^2+(y-2)^2+\left(z-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}=0$, et cette équation n'a pas de solution.

....

29.19 c) L'équation $x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z+1=0$ est équivalente à $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2-13=0$.

....

29.20 a) On a $x^2+y^2+z^2-x-3y+z-\dfrac{5}{4}=0 \iff \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(z+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}-\dfrac{5}{4}=0$.

....

29.21 c) Les points d'intersection sont déterminés par les éventuelles solutions de l'équation

$$(1+t)^2-2(1+t)+(1-t)^2-4(1-t)+(1+3t)^2-2(1+3t)+5=0$$

d'inconnue t, dont les solutions sont $t=0$ et $t=-\dfrac{2}{11}$.

....

29.22 a) La même démarche que ci-dessus amène à l'équation $5t^2-2t+21=0$, qui n'a pas de solution réelle.

....

29.22 b) On trouve l'équation $2t^2+6t+\dfrac{9}{2}=0$, dont la solution est $t=-\dfrac{3}{2}$. La droite est tangente à la sphère.

....

29.23 b) La troisième équation vérifie $E_3 = E_1 + 2E_2$, elle ne sert donc à rien. On se retrouve donc à déterminer l'intersection de deux plans non parallèles, ce qui donne une droite.

29.24 a) $E_3 - (E_1 + E_2)$ est une équation impossible !