# Cahier de calcul

*échauffements, entraînements et approfondissements*

**Première Spécialité**

1445 calculs

Page web du *Cahier de calcul*,
dernières versions

Ce cahier de calcul a été écrit collectivement par une équipe composée de professeurs en classes préparatoires et de professeurs en lycée.

### Conception et coordination

Colas Bardavid

### Aide à la coordination

Jérôme Trochon

### Équipe des auteurs

Romain Basson
Ménard Bourgade
Van Bien Bui
Carole Chabanier
Geneviève Davion
Hélène Gros
Benjamin Groux
Nicolas Laillet
Blaise Le Meaux
Lionel Magnis
Quang-Thai Ngo
Anthony Ollivier
Alan Pellé
Nicolas Popoff
Jérôme Trochon

### Relecture

Rémy Allou, Mélissa Baillœuil-Inglart, Anne-Lucie Delvallez, Pierre Cauchois, Jérôme Gärtner, Éliane Gayout, William Gregory, Jonathan Harter, Landry Lavoine, Arthur Meyer, Pedro Montoya, Inès Nebzry, Sébastien Pellerin

### Illustrations

Le pictogramme de l'horloge a été créé par Ralf Schmitzer (The Noun Project).
Le pictogramme de la roue crantée a été créé par AFY Studio (The Noun Project).
Le pictogramme de la calculatrice a été créé par Sita Raisita (The Noun Project).
Le pictogramme du bateau a été créé par Mello (The Noun Project).

L'illustration de la couverture a été réalisée par Colas Bardavid, sur une idée de Yassine Patel, d'après les biomorphes de Clifford Pickover. Elle illustre les propriétés de certaines fonctions.

*Version 1.5.4 — 15 janvier 2026*

# Sommaire

## Probabilités



## Géométrie et vecteurs



## Trigonométrie



## Produit scalaire



## Logique et théorie des ensembles

*Dans tout ce livre, l'usage de la calculatrice*
*est strictement et formellement interdit.*

*Utiliser une calculatrice pour les exercices serait tout simplement absurde :*
*le but même de ce livre est de fournir à l'étudiant*
*un outil pour s'entraîner au calcul.*

# Introduction

## Le calcul

Le calcul a parfois été délaissé par l'école.

On lui reprochait son côté rébarbatif, on disait que les calculatrices pouvaient s'en charger.
On lui préférait les activités de recherche, plus ludiques, plus intéressantes.
On déconseillait de donner aux élèves des fiches de calcul.

Certes, savoir chercher est essentiel ; mais, tout de même, ce faisant, on a formé des élèves à qui il manquait quelque chose de fondamental.

## Les vertus du calcul

Le calcul a de nombreuses qualités, de nombreuses vertus.

- Le calcul est indispensable aux mathématiques.

  Sans calcul, les mathématiques seraient un paysage inerte, sans mouvement.
  C'est le calcul qui permet de transformer une expression $A(x)$ en une autre expression $B(x)$.
  C'est le calcul qui permet de montrer que deux quantités sont égales, que deux choses sont identiques.
  Quand on explore une situation mathématique, l'intuition est la boussole, c'est elle qui nous indique la direction à prendre. Mais c'est le calcul qui permet d'avancer, de passer d'une étape à la suivante.

- Le calcul permet de se familiariser avec les objets mathématiques compliqués.

  Certains objets mathématiques sont difficiles à appréhender. Qu'on pense par exemple aux vecteurs. On peut être dérouté la première fois qu'on doit raisonner avec les vecteurs. Dans ce cas, il est conseillé de beaucoup calculer avec les vecteurs. À force d'en faire, on s'y habitue ; à la fin, on n'est plus dérouté.

- Le calcul donne des idées.

  Face à un problème mathématique, être fort en calcul est très utile. On imagine rapidement ce qui va se passer, on peut prévoir « de tête » la direction globale du calcul et donc prendre une bonne direction.

- Le calcul est comme un échauffement mathématique.
- Le calcul est *a priori* une activité sans piège.

  Il suffit de suivre les règles méthodiquement.

- Le calcul peut même être ludique !

# L'intérêt du calcul

C'est très simple.

Si vous voulez bien comprendre les mathématiques, le calcul est indispensable.

Quand on apprend à jouer au piano, faire des gammes est, de même, indispensable. Elles permettent de délier les doigts, elles permettent d'ancrer dans les mains des habitudes, des réflexes. Sans gamme, certains morceaux sont inabordables.

De même, la pratique du calcul permet de mieux comprendre les mathématiques.

# Le cahier de calcul

Le cahier de calcul est l'outil idéal pour vous entraîner au calcul, **en toute autonomie**.

Il a été conçu par une large équipe de professeurs de mathématiques, en lycée et en classes préparatoires, tous soucieux de vous apporter **l'aide et les outils pour réussir**.

Pour profiter totalement de cet outil, **pratiquez régulièrement** : nous vous conseillons de faire (au moins) quinze minutes de calcul chaque jour.

# Comment est-il organisé ?

## Trois parties pour chaque fiche

Chaque fiche du cahier de calcul est divisée en trois parties :

- une première partie de calculs généraux, destinée à **vous entraîner sur les fondamentaux** ;
- la partie principale, qui porte sur le thème de **la fiche en question** ;
- une dernière partie, composée de **calculs plus avancés**, qui est prévue pour ceux qui veulent aller plus loin.

## Des pictogrammes

Le temps de résolution de chaque calcul (incluant la longueur et la technicité du calcul) est symbolisé par :

- des bateaux pour les exercices de calculs généraux ;
- des horloges pour les exercices de la partie principale ;
- des roues crantées pour les exercices plus avancés.

## Des cadres pour les réponses

Vous êtes invité à écrire directement les réponses dans les cadres prévus à cet effet.

## *Une erreur ? Une remarque ?*

*Si jamais vous voyez une erreur d'énoncé ou de corrigé, ou bien si vous avez une remarque à faire, n'hésitez pas à nous écrire à l'adresse* `cahierdecalcul@gmail.com`. *Merci en nous contactant de donner l'identifiant de la fiche, écrit en gris clair en haut à gauche de chaque fiche.*

# Conventions suivies dans ce livre

## Polynômes

Dans ce cahier de calcul, nous avons choisi de noter les polynômes avec la lettre « $X$ ».

- Ainsi, au lieu de considérer, par exemple, la fonction
$$t \longmapsto 5t^4 - 3t^3 + 25t^2 + 10t - 1,$$
on considérera le polynôme
$$5X^4 - 3X^3 + 25X^2 + 10X - 1.$$
- On notera généralement les polynômes $P$ ou $Q$. Par exemple, on peut poser $P = 5X^2 - 3X - 2$.
- Les polynômes peuvent être évalués en un nombre, comme les fonctions.
Ainsi, pour $t \in \mathbb{R}$, on peut considérer $P(t)$.
En reprenant l'exemple précédent, on a
$$P(1) = 5 \times 1^2 - 3 \times 1 - 2 = 0.$$
On dit alors que 1 *est une racine de* $P$.

## Définition des variables

Dans certains exercices, nous avons choisi, par souci de clarté et de concision, de ne pas préciser à quel ensemble appartiennent les variables.

- Par exemple, on pourra demander de simplifier l'expression
$$\frac{2-x}{x+3} - \frac{1-x}{5-x}$$
sans préciser qui est la variable $x$.
- Dans ce cas, il faudra toujours considérer que la variable $x$ est implicitement définie et appartient au bon ensemble.
- Dans l'exemple précédent, il est sous-entendu que $x$ est un nombre réel différent de $-3$ et 5.

*Bons calculs à vous !*

# Énoncés

# Forme canonique

## Quelques calculs généraux pour commencer

### Calcul 1.1

Développer et réduire les expressions suivantes.

a) $(2x+3)^2$ ..........

b) $(3y-4)^2$ ..........

c) $\left(-u+\sqrt{7}\right)^2$ .......

d) $(-\sqrt{3}t-\sqrt{15})^2$ ....

e) $\left(\frac{3}{2}z+2\right)^2$ ........

f) $\left(\frac{2}{5}v-\frac{2}{3}\right)^2$ .......

### Calcul 1.2 — Quelques factorisations.

Factoriser les expressions suivantes.

a) $x^2-25$ ............

b) $4t^2-9$ ............

c) $\frac{2}{9}y^2-\frac{4}{5}$ ...........

d) $u^2+6u+9$ ........

e) $9v^2-12v+4$ ......

f) $2z^2+10\sqrt{2}z+25$ ..

### Calcul 1.3 — Quelques équations.

Résoudre les équations suivantes.

*On donnera dans chaque cas l'ensemble des solutions.*

a) $x^2=0$ .............

b) $z^2=17$ ............

c) $(2t+10)^2=0$ .....

d) $\left(-\sqrt{3}y+\sqrt{6}\right)^2=0$

e) $2u^2-10=0$ ......

f) $-\frac{3}{4}v^2+\frac{4}{15}=0$ ....

# Changements de forme

**Calcul 1.4 — De la forme canonique à la forme développée.**

Développer et réduire :

a) $(X-3)^2+7$ ..........

b) $2(X+3)^2-5$ .........

c) $-\left(X+\sqrt{2}\right)^2+6$ .....

d) $\sqrt{3}(2X-1)^2-2\sqrt{3}$ ...

e) $\dfrac{3}{4}\left(X+\dfrac{1}{2}\right)^2+1$ ......

f) $\dfrac{5}{2}\left(-\dfrac{1}{3}X-\dfrac{2}{3}\right)^2-\dfrac{2}{9}$ ..

**Calcul 1.5 — Formes canoniques (I).**

Mettre les polynômes suivants sous forme canonique, c'est-à-dire sous la forme $a(X-\alpha)^2+\beta$.

a) $X^2+2X+2$ ..............................................

b) $X^2+4X-1$ ..............................................

**Calcul 1.6 — Formes canoniques (II).**

Mettre les polynômes suivants sous forme canonique, c'est-à-dire sous la forme $a(X-\alpha)^2+\beta$.

a) $-X^2+4X-5$ ........

b) $4X^2-8X-3$ ........

c) $-9X^2+36X+4$ .....

d) $-2X^2-20X-17$ ....

**Calcul 1.7 — Formes canoniques (III).**

Mettre les polynômes suivants sous forme canonique, c'est-à-dire sous la forme $a(X-\alpha)^2+\beta$.

a) $X^2+3X+\dfrac{1}{4}$ .....

b) $\dfrac{1}{4}X^2+X-1$ .....

c) $\dfrac{2}{9}X^2+8X+\dfrac{1}{7}$ ...

d) $-\dfrac{9}{8}X^2-\dfrac{1}{2}X-4$ .

e) $\dfrac{1}{2}X^2+\dfrac{2}{3}X+\dfrac{3}{4}$ ..

f) $-\dfrac{4}{5}X^2-\dfrac{5}{6}X-\dfrac{6}{7}$ .

**Calcul 1.8 — Formes canoniques à paramètre (I).**

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Mettre les polynômes suivants sous forme canonique, c'est-à-dire sous la forme $a(X-\alpha)^2+\beta$.

a) $X^2 + 3X + \lambda$ ..............................................

b) $\frac{1}{4}X^2 + \lambda X - 2$ ..............................................

c) $\lambda X^2 + 8X + 5$ ..............................................

**Calcul 1.9 — Formes canoniques à paramètre (II).**

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Mettre les polynômes suivants sous forme canonique, c'est-à-dire sous la forme $a(X-\alpha)^2+\beta$.

a) $-3X^2 - \lambda X + 2$ ......

b) $\frac{1}{2}X^2 + \frac{2\lambda}{3}X + \frac{3\lambda}{4}$ ....

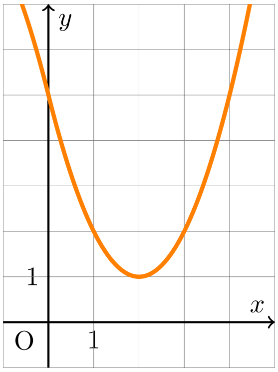
c) $-\frac{4}{5}X^2 - \frac{5}{6}\lambda X$ ........

# Des représentations graphiques

**Calcul 1.10**

Voici la courbe représentative d'un polynôme du second degré.

Quelle est sa forme canonique ?



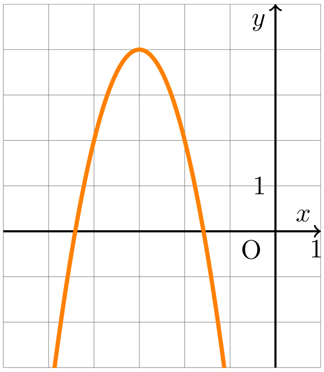

(a) $(X+2)^2 - 1$
(b) $(X-2)^2 - 1$
(c) $(X+2)^2 + 1$
(d) $(X-2)^2 + 1$

..............................................................

**Calcul 1.11**

Voici la courbe représentative d'un polynôme du second degré.

Quelle est sa forme canonique ?




(a) $-2(X+3)^2 - 4$
(b) $-2(X-3)^2 - 4$
(c) $-2(X+3)^2 + 4$
(d) $-2(X-3)^2 + 4$

..............................................................

### Calcul 1.12

On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = 3x^2 + 4x - 2$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Après avoir calculé sa forme canonique, déterminer quelle est sa représentation graphique.

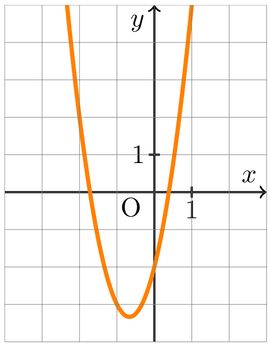


figure 1

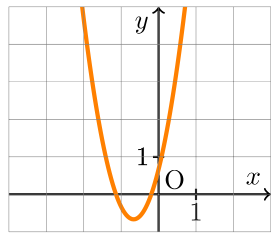


figure 2

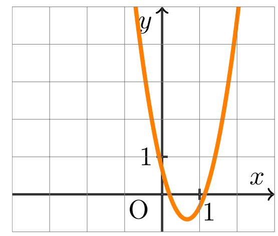


figure 3

Quelle est sa représentation graphique ?

(a) figure 1 (b) figure 2 (c) figure 3

.....................................................................................

### Calcul 1.13

On considère la fonction $g$ définie par $g(t) = -\dfrac{1}{2}t^2 + t - 1$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Après avoir calculé sa forme canonique, déterminer quelle est sa représentation graphique.

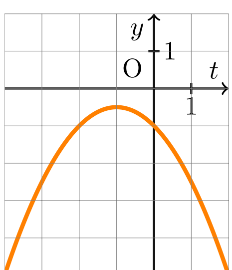


figure 1

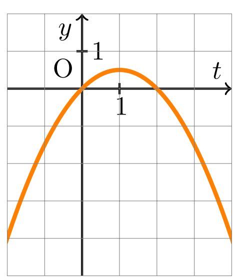


figure 2

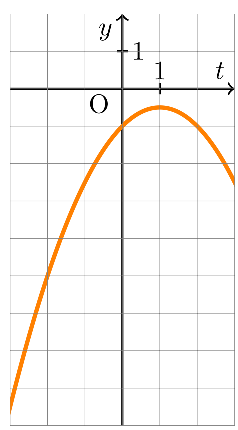


figure 3

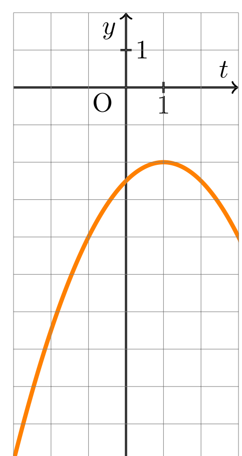


figure 4

Quelle est sa représentation graphique ?

(a) figure 1 (b) figure 2 (c) figure 3 (d) figure 4

.....................................................................................

## Calculs plus difficiles

**Calcul 1.14 — Forme canonique et inégalités.**

Dans chacun des cas, déterminer si la proposition est « vraie » ou « fausse » à l'aide de la forme canonique d'un polynôme du second degré.

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + x + 1 \geqslant \dfrac{1}{2}$ .....

b) $\forall t \in \mathbb{R},\ t^2 + 3t > -1$ ........

c) $\forall z \in \mathbb{R},\ 3z + z^2 < 2z^2 - 4$ ..

d) $\forall v \in \mathbb{R},\ \dfrac{4}{49}v^2 + \dfrac{61}{9} \geqslant \dfrac{20}{21}v$ ..

**Calcul 1.15 — Forme canonique et équations de cercles.**

Dans chacun des cas, reconnaître le cercle défini par l'équation cartésienne donnée.

*On donnera son centre $\Omega$ et son rayon $r$.*

a) $x^2 - 2x + y^2 + 4y + 1 = 0$ ..............................................

b) $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 18 = 0$ ..............................................

c) $x^2 + y^2 - x - \dfrac{2}{3}y = \dfrac{23}{36}$ ..............................................

d) $x^2 + y^2 + \dfrac{5}{2}x + \dfrac{8}{3}y = -\dfrac{193}{144}$ ..............................................

## Réponses mélangées

$-2(X+5)^2+33$ $\quad -\frac{4}{5}\left(X+\frac{25}{48}\lambda\right)^2+\frac{125}{576}\lambda^2$ $\quad \Omega=(1,-2)$ et $r=2$ $\quad$ vraie

$\left(\frac{\sqrt{2}}{3}y-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{3}y+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ $\quad 9y^2-24y+16$ $\quad (u+3)^2$ $\quad \frac{2}{9}(X+18)^2-\frac{503}{7}$ $\quad \{-5\}$

$(2t-3)(2t+3)$ $\quad \Omega=\left(-\frac{5}{4},-\frac{4}{3}\right)$ et $r=\sqrt{2}$ $\quad \left\{\sqrt{2}\right\}$ $\quad u^2-2\sqrt{7}u+7$ $\quad$ vraie

$X^2-6X+16$ $\quad \Omega=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$ et $r=1$ $\quad -\frac{4}{5}\left(X+\frac{25}{48}\right)^2-\frac{2\,581}{4\,032}$ $\quad \left(X+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+\lambda$

$\lambda\left(X+\frac{4}{\lambda}\right)^2-\frac{16}{\lambda}+5$ $\quad \frac{1}{2}\left(X+\frac{2\lambda}{3}\right)^2-\frac{2\lambda^2}{9}+\frac{3\lambda}{4}$ $\quad (X+1)^2+1$ $\quad -\frac{9}{8}\left(X+\frac{2}{9}\right)^2-\frac{71}{18}$

$\{0\}$ $\quad -X^2-2\sqrt{2}X+4$ $\quad \frac{1}{2}\left(X+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{19}{36}$ $\quad \frac{9}{4}z^2+6z+4$ $\quad -3\left(X+\frac{\lambda}{6}\right)^2+\frac{\lambda^2}{12}+2$

$\frac{4}{25}v^2-\frac{8}{15}v+\frac{4}{9}$ $\quad 2X^2+12X+13$ $\quad (X+2)^2-5$ $\quad$ c $\quad \left\{-\sqrt{5},\sqrt{5}\right\}$ $\quad$ fausse

$-9(X-2)^2+40$ $\quad 3t^2+6\sqrt{5}t+15$ $\quad$ d $\quad \left\{-\frac{4\sqrt{5}}{15},\frac{4\sqrt{5}}{15}\right\}$ $\quad \frac{1}{4}(X+2)^2-2$

$(x-5)(x+5)$ $\quad 4x^2+12x+9$ $\quad (3v-2)^2$ $\quad 4(X-1)^2-7$ $\quad$ a $\quad \frac{5}{18}X^2+\frac{10}{9}X+\frac{8}{9}$

$\frac{3}{4}X^2+\frac{3}{4}X+\frac{19}{16}$ $\quad \Omega=(-3,5)$ et $r=4$ $\quad \left(\sqrt{2}z+5\right)^2$ $\quad \frac{1}{4}(X+2\lambda)^2-\lambda^2-2$

$4\sqrt{3}X^2-4\sqrt{3}X-\sqrt{3}$ $\quad \left\{-\sqrt{17},\sqrt{17}\right\}$ $\quad$ c $\quad$ fausse $\quad -(X-2)^2-1$ $\quad \left(X+\frac{3}{2}\right)^2-2$

► Réponses et corrigés page 154

# Discriminant et racines I

## Quelques calculs généraux pour commencer

**Calcul 2.1**

Calculer les nombres suivants.

*On attend la forme la plus simple possible.*

a) $\dfrac{10-\sqrt{16}}{4}$ ........................

b) $\dfrac{5+\sqrt{9}}{6}$ ........................

c) $\dfrac{-6-\sqrt{12}}{2}$ ........................

d) $\dfrac{8+\sqrt{48}}{4}$ ........................

**Calcul 2.2**

Calculer les nombres suivants.

*On attend les résultats sous la forme d'une fraction irréductible.*

a) $5^2-4\times 5\times\dfrac{3}{8}$ ..................

b) $(-6)^2+\dfrac{3}{5}\times(-7)\times 15$ .........

c) $-7^2-8\times\dfrac{1}{3}\times 27$ ...............

d) $\left(-\dfrac{5}{4}\right)^2-5\times\dfrac{17}{32}\times\dfrac{24}{15}$ .........

## Premiers calculs

**Calcul 2.3 — Premiers discriminants.**

Calculer le discriminant de chacun des polynômes définis ci-dessous.

a) $X^2+2X+3$ ....................

b) $-X^2-2X+4$ ...................

**Calcul 2.4 — Calculs de discriminants.**

Calculer le discriminant de chacun des polynômes définis ci-dessous.

a) $3X^2-4X+\dfrac{7}{4}$ ...................

b) $\dfrac{1}{2}X^2+\dfrac{2}{3}X-\dfrac{3}{4}$ ..................

c) $\dfrac{4}{5}X^2-\sqrt{7}X-\dfrac{5}{6}$ ................

d) $\dfrac{\sqrt{6}}{7}X^2+\sqrt{3}X+\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ ............

### Calcul 2.5 — Premières racines.

Déterminer les racines de chacun des polynômes suivants.

a) $X^2 + 2X - 4$ ......

b) $-X^2 - 3X + 2$ ....

### Calcul 2.6 — Calculs de racines.

Déterminer les racines de chacun des polynômes suivants.

a) $4X^2 - 3X + \frac{1}{4}$ ....................................................

b) $\frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}X - 3$ ....................................................

c) $2X^2 + \frac{1}{3}X - \frac{1}{3}$ ....................................................

d) $3X^2 - 2\sqrt{2}X - \frac{2}{3}$ ....................................................

### Calcul 2.7 — Un polynôme à paramètre.

Soit $b \in \mathbb{R}$. On considère le polynôme $P = X^2 + bX + 1$.

a) Lorsque $b = -2$, le polynôme $P$ admet-il deux racines distinctes ? .........

b) Calculer le discriminant de $P$ en fonction de $b$ ............................

c) Pour quelles valeurs de $b$ le polynôme admet-il deux racines distinctes ? ...

### Calcul 2.8 — Un deuxième polynôme à paramètre.

Soit $a \in \mathbb{R}^*$, un réel non nul. On considère le polynôme $Q = aX^2 + 3X - 5$.

a) Calculer le discriminant de $Q$ ............................................

b) Pour quelles valeurs de $a$ le polynôme $Q$ a-t-il exactement une racine ? ....

### Calcul 2.9 — Un troisième polynôme à paramètre.

Soit $c \in \mathbb{R}$. On considère le polynôme $R = 2X^2 - 5X + c$.

a) Calculer le discriminant de $R$ ............................................

b) Pour quelles valeurs de $c$ le polynôme $R$ n'admet-il aucune racine ? .......

**Calcul 2.10 — Inéquations (I).**

Résoudre les inéquations suivantes. On attend le résultat sous la forme d'un intervalle ou de la réunion de deux intervalles.

a) $2x^2 - 5x + 3 > 0$ ..........................................

b) $y^2 + 3y \leqslant 2$ ..........................................

c) $-t^2 < 5t + 4$ ..........................................

**Calcul 2.11 — Inéquations (II).**

Résoudre les inéquations suivantes. On attend le résultat sous la forme d'un intervalle ou de la réunion de deux intervalles.

a) $4z \geqslant \dfrac{3}{4} - z^2$ ..........................................

b) $\dfrac{1}{3}u^2 + \dfrac{2}{5}u + \dfrac{3}{7} > 0$ ..........................................

c) $v - \sqrt{3} \geqslant v^2$ ..........................................

## Calculs plus difficiles

**Calcul 2.12 — Propositions paramétrées I.**

Soit $a \in \mathbb{R}$.

Pour quelle(s) valeur(s) de $a$ la proposition « $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geqslant 0$ » est-elle vraie ?

a) Avec $P = aX^2 + 3X - 4$ ..........................................

b) Avec $P = \dfrac{2}{5}X^2 + 2aX + \dfrac{1}{3}$ ..........................................

c) Avec $P = \dfrac{3}{2}X^2 - \dfrac{5}{7}X + \dfrac{a}{2}$ ..........................................

**Calcul 2.13 — Propositions paramétrées II.**

Soit $a \in \mathbb{R}$.

Pour quelle(s) valeur(s) de $a$ la proposition « $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geqslant 0$ » est-elle vraie ?

a) Avec $P = aX^2 + 3aX - 4$ ..............................................

b) Avec $P = \dfrac{2a}{5}X^2 + 2X + \dfrac{a}{3}$ ..............................................

c) Avec $P = \dfrac{3}{2}X^2 - \dfrac{7}{5}aX + \dfrac{a}{6}$ ..............................................

**Calcul 2.14 — Un système à paramètre.**

Soit $t \in \mathbb{R}$. On considère le système $\begin{cases} (x-5)^2 + (y-5)^2 = & 5 \\ y = tx & \end{cases}$ d'inconnues $x$ et $y$.

Pour quelles valeurs de $t$ le système précédent a-t-il des solutions ? ..................

## Réponses mélangées

$c \in \left]\dfrac{25}{8}, +\infty\right[$ $\quad 25 - 8c \quad$ $t \in \left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$ $\quad \dfrac{\sqrt{2}-2}{3}$ et $\dfrac{\sqrt{2}+2}{3}$ $\quad -\dfrac{9}{20} \quad \dfrac{35}{2}$

$b \in \left]-\infty, -2\right[ \cup \left]2, +\infty\right[$ $\quad \left]-\infty, -2 - \dfrac{\sqrt{19}}{2}\right] \cup \left[-2 + \dfrac{\sqrt{19}}{2}, +\infty\right[$ $\quad \dfrac{13}{7} \quad \mathbb{R} \quad \varnothing$

$-\dfrac{43}{16} \quad -3 - \sqrt{3}$ $\quad$ non $\quad -27 \quad 9 + 20a \quad 20 \quad \left[\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}, \dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}\right]$

$-8 \quad -5 \quad a \in \left[-\sqrt{\dfrac{2}{15}}, \sqrt{\dfrac{2}{15}}\right]$ $\quad \dfrac{3-\sqrt{5}}{8}$ et $\dfrac{3+\sqrt{5}}{8}$ $\quad a \in \left[\dfrac{25}{147}, +\infty\right[$

$\left]-\infty, 1\right[ \cup \left]\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$ $\quad -3$ et $2$ $\quad 2 + \sqrt{3} \quad -121 \quad \dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}$ et $\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}$

$\dfrac{4}{3} \quad b^2 - 4 \quad a \in \left[0, \dfrac{25}{49}\right]$ $\quad -\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{3}$ $\quad \left]-\infty, -4\right[ \cup \left]-1, +\infty\right[$ $\quad$ aucune

$\dfrac{3}{2}$ $\quad$ aucune $\quad a \in \left[\sqrt{\dfrac{15}{2}}, +\infty\right[$ $\quad \dfrac{35}{18} \quad \dfrac{29}{3} \quad -1 - \sqrt{5}$ et $-1 + \sqrt{5}$

▶ Réponses et corrigés page 159

# Discriminant et racines II

## Quelques calculs généraux pour commencer

### Calcul 3.1

Donner, sous la forme d'un intervalle, l'ensemble des solutions des inéquations suivantes.

a) $-2x > \dfrac{4}{3}$ ................

b) $2x - \dfrac{1}{5} \geqslant \dfrac{1}{3}$ ..............

c) $2x - \dfrac{1}{12} < \dfrac{2}{3}x$ ...........

d) $\dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{5} \geqslant -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{6}$ ......

### Calcul 3.2

Simplifier les expressions suivantes, où $n$ est un entier naturel.

a) $\dfrac{6^3 \times 2^{-5}}{4^2 \times 12^{-4}}$ ......................

b) $\dfrac{5^n \times 12^2}{10^n \times 6^4}$ .......................

c) $3^{n+2} - 3^{n+1} - 7 \times 3^n + 3^{n-1}$ ...

d) $\dfrac{16^{n+1} + (-4)^{2n+1} + (-2)^{4n}}{8^n}$ ....

## Factorisation de trinômes du second degré

### Calcul 3.3

Factoriser les trinômes suivants.

*On pourra commencer par déterminer les racines des polynômes en question.*

a) $X^2 - 7X + 12$ ....................................................

b) $X^2 - 3X - 10$ ....................................................

c) $2X^2 - X - 3$ ......................................................

d) $6X^2 - 5X + 1$ ....................................................

**Calcul 3.4**

Factoriser les trinômes suivants.

*On pourra commencer par déterminer les racines des polynômes en question.*

a) $X^2 + \dfrac{5}{2}X + 1$ ........

b) $X^2 + \dfrac{1}{2}X - \dfrac{1}{2}$ ........

c) $2X^2 - \dfrac{7}{6}X + \dfrac{1}{6}$ .......

d) $X^2 - \dfrac{24}{5}X - 1$ ........

**Calcul 3.5**

Factoriser les trinômes suivants.

*On pourra commencer par déterminer les racines des polynômes en question.*

a) $X^2 - 2X - 1$ .....

b) $X^2 - 2X - 2$ .....

c) $X^2 - 2\sqrt{5}X - 4$ ..

d) $2X^2 - 6X + 1$ ...

**Calcul 3.6 — Factorisation avec un paramètre.**

Donner la factorisation des trinômes suivants, où $m$ désigne un paramètre réel.

*On pourra commencer par déterminer les racines des polynômes en question.*

a) $X^2 + mX - 2m^2$ .......

b) $X^2 - 2X + 1 - 2m^2$ ....

c) $2X^2 + (m+6)X + 3m$ .

d) $X^2 - 2X - m^2$ ........

# Équations se ramenant à une équation du second degré

**Calcul 3.7**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations d'inconnue $x$ suivantes.

a) $x + \dfrac{1}{x} = 2$ ................

b) $x + 2 = \dfrac{3}{x}$ ................

**Calcul 3.8**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations d'inconnue $x$ suivantes.

a) $x - \dfrac{1}{x-2} = 1$ ...........

b) $\dfrac{2x}{x^2-1} = 4 - \dfrac{1}{x-1}$ ......

**Calcul 3.9**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations d'inconnue $x$ suivantes.

a) $x+5=\sqrt{x+11}$ ................

b) $x=1+\sqrt{x^2-2}$ ..............

**Calcul 3.10**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations d'inconnue $x$ suivantes.

a) $\sqrt{x}+2=\sqrt{2x-1}$ ..............

b) $\sqrt{x}-2-\dfrac{7\sqrt{x}-10}{\sqrt{x}+2}=0$ ........

# Factorisation de polynômes de degré 3

**Calcul 3.11 — Factorisation d'un polynôme de degré 3 (I).**

On considère le polynôme $P=X^3-7X+6$.

a) Calculer $P(1)$ ........................................................

b) Factoriser $P$ par $X-1$ ..............................................

c) En déduire une factorisation de $P$ ....................................

**Calcul 3.12 — Factorisation d'un polynôme de degré 3 (II).**

On considère le polynôme $P=2X^3+13X^2+16X+5$.

a) Calculer $P(-1)$ ......................................................

b) Factoriser $P$ par $X+1$ ..............................................

c) En déduire une factorisation de $P$ ....................................

**Calcul 3.13**

En s'inspirant de la démarche des deux calculs précédents, factoriser les polynômes suivants.

a) $X^3-3X^2+X+1$ ..............................................

b) $4X^3-4X^2-5X+3$ ............................................

## Calculs plus difficiles

**Calcul 3.14 — Une équations bicarrée.**

On cherche à résoudre l'équation $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$, d'inconnue $x$ réelle.

a) Quelle équation obtient-on en posant $y = x^2$ ? ............................

b) Factoriser le trinôme $y^2 - 7y + 12$ ............................

c) En déduire les solutions de l'équation initiale ............................

**Calcul 3.15 — Équations bicarrées.**

En s'inspirant de la démarche du calcul précédent, résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x$ réelle.

a) $x^4 - 6x^2 + 5 = 0$ .........

b) $x^4 - 7x^2 - 8 = 0$ .........

**Calcul 3.16 — Écart entre les deux racines (I).**

Soit $a$ un réel. On note $\alpha$ et $\beta$ les deux racines réelles du polynôme $X^2 + (a-2)X - 2a$.

Déterminer les valeurs de $a$ telles que $|\alpha - \beta| = 1$ ............................

**Calcul 3.17 — Écart entre les deux racines (II).**

Soit $a$ un réel. On note $\alpha$ et $\beta$ les deux racines réelles du polynôme $X^2 - \left(a^2+1\right)X + a^2$.

Déterminer les valeurs de $a$ telles que $|\alpha - \beta| = 1$ ............................

## Réponses mélangées

$\left\{\pm 1, \pm\sqrt{5}\right\}$ $\quad 2(X+1)(X+5)\left(X+\dfrac{1}{2}\right)$ $\quad 2\left(X+\dfrac{m}{2}\right)(X+3)$ $\quad \left(X-\dfrac{1}{2}\right)(X+1)$

$(X-m)(X+2m)$ $\quad (y-4)(y-3)$ $\quad (X-1)\left(X-1-\sqrt{2}\right)\left(X-1+\sqrt{2}\right)$

$\{-3,1\}$ $\quad \left\{\pm 2\sqrt{2}\right\}$ $\quad \{25\}$ $\quad 2\left(X-\dfrac{1}{3}\right)\left(X-\dfrac{1}{4}\right)$ $\quad \left[\dfrac{4}{15}, +\infty\right[$

$4(X+1)\left(X-\dfrac{1}{2}\right)\left(X-\dfrac{3}{2}\right)$ $\quad (X+1)\left(2X^2+11X+5\right)$ $\quad \left\{\pm 2, \pm\sqrt{3}\right\}$

$\left\{0, \pm\sqrt{2}\right\}$ $\quad 2^2 \times 3^7$ $\quad (X+2)(X-5)$ $\quad y^2-7y+12=0$ $\quad \left\{\dfrac{3\pm\sqrt{89}}{8}\right\}$

$\left(X+3-\sqrt{5}\right)\left(X-3-\sqrt{5}\right)$ $\quad (X-1)(X-2)(X+3)$ $\quad 0$ $\quad 6\left(X-\dfrac{1}{2}\right)\left(X-\dfrac{1}{3}\right)$

$\{-2\}$ $\quad \{-1,-3\}$ $\quad \{1\}$ $\quad (X-1)\left(X^2+X-6\right)$ $\quad -2\times 3^{n-1}$ $\quad (X-3)(X-4)$

$\left(X-1-\sqrt{2}\right)\left(X-1+\sqrt{2}\right)$ $\quad \left(X-1-\sqrt{2}m\right)\left(X-1+\sqrt{2}m\right)$ $\quad \left(X-1-\sqrt{3}\right)\left(X-1+\sqrt{3}\right)$

$13\times 2^n$ $\quad \left\{\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$ $\quad 2\left(X-\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}\right)\left(X-\dfrac{3-\sqrt{7}}{2}\right)$ $\quad \dfrac{1}{9\times 2^n}$

$\left(X-1-\sqrt{m^2+1}\right)\left(X-1+\sqrt{m^2+1}\right)$ $\quad \left(X+\dfrac{1}{5}\right)(X-5)$ $\quad \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$ $\quad 2(X+1)\left(X-\dfrac{3}{2}\right)$

$\left]-\infty, -\dfrac{2}{3}\right[$ $\quad (X+2)\left(X+\dfrac{1}{2}\right)$ $\quad \{1,36\}$ $\quad 0$ $\quad \left[-\dfrac{1}{35}, +\infty\right[$ $\quad \left]-\infty, \dfrac{1}{16}\right[$

► Réponses et corrigés page 163

# Polynômes I

## Quelques calculs généraux pour commencer

### Calcul 4.1

Calculer les expressions suivantes. On donnera le résultat sous forme de fraction irréductible.

a) $\dfrac{2}{3} - \dfrac{3}{2}$ ..........

b) $\dfrac{7}{2} - \dfrac{8}{5} + \dfrac{1}{3}$ ..........

c) $2 \times \dfrac{5}{3} - \dfrac{1}{6} + \dfrac{8}{4}$ ..........

d) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 - \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{5}$ ..........

e) $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2 - 3 \times \dfrac{-2}{3} - \dfrac{16}{9}$ ..........

f) $\left(\dfrac{-1}{2}\right)^3 + \dfrac{2}{5} \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2$ ..........

### Calcul 4.2

Résoudre les systèmes suivants.

a) $\begin{cases} a + 2b = 1 \\ 3a - b = 2 \end{cases}$ ..........

b) $\begin{cases} a - b + c = 6 \\ 3b + 2c = -5 \\ -3c = -6 \end{cases}$ ..........

## Evaluation des polynômes

### Calcul 4.3 — Une petite mise en jambes.

Dans les cas suivants, calculer $P(a)$.

a) $P = 3 + 9X - X^2 - 5X^4$ et $a = 2$ ..........

b) $P = 3X^5 - 4X^4 + 2X^2 - 3X + 2$ et $a = 1$ ..........

c) $P = 3X^5 - 4X^4 + 2X^2 - 3X + 2$ et $a = -1$ ..........

d) $P = 1 - 9X^2 + 10X$ et $a = -3$ ..........

e) $P = 4X - 2X^2 + 9 - X^3$ et $a = -4$ ..........

**Calcul 4.4 — Avec des nombres rationnels.**

Dans les cas suivants, calculer $P(a)$.

Les nombres rationnels seront donnés sous forme de fraction irréductible.

a) $P = 3X^3 - 4X^2 + 2$ et $a = \dfrac{2}{3}$ ........

b) $P = 5 - \dfrac{1}{2}X + \dfrac{2}{3}X^2 + 3X^3$ et $a = 3$ ........

c) $P = -4X^4 + \dfrac{2}{3}X^3 + 3X^2 - \dfrac{1}{2}X + 2$ et $a = -2$ ........

d) $P = \dfrac{1}{25}X^3 - X^2 - 3X + 1$ et $a = \dfrac{5}{3}$ ........

e) $P = \dfrac{1}{2}X - \dfrac{-2}{5}X^2 - 3X^3 + 1$ et $a = \dfrac{-4}{3}$ ........

**Calcul 4.5**

Dans les cas suivants, calculer $P(a)$.

Les nombres rationnels seront donnés sous forme de fraction irréductible.

a) $P = (3X^2 - 4X + 2)(X^5 - 3X + 2) - (X^2 - 1)$ et $a = 2$ ........

b) $P = \dfrac{1}{2} + 3X^5 - (4X^4 + 2X^2 - 3)(X^3 + 2) - \dfrac{1}{3}X^2$ et $a = -1$ ........

**Calcul 4.6 — Pêle-mêle.**

Dans les cas suivants, calculer $P(a)$.

Les nombres rationnels seront donnés sous forme irréductible et les racines carrées seront réduites.

a) $P = X^4 - 2X^3 - 2X^2$ et $a = 1 + \sqrt{3}$ ........

b) $P = \left(X^2 + 4\right)^2\left(3X - \dfrac{1}{2}\right)$ et $a = -\sqrt{2}$ ........

c) $P = \left(\sqrt{2}\left(X^2 - 1\right)^2 - 2\right)\left(3X - \dfrac{1}{2}\right) + 84X + 33$ et $a = 1 - \sqrt{2}$ ........

# Opérations sur les polynômes

**Calcul 4.7 — Développer, réduire et ordonner (I).**

Développer, réduire et ordonner selon les puissances décroissantes de $X$ les polynômes suivants.

a) $(X - 1)^2\left(X^2 + X + 1\right)$ ........

b) $(X + 2)(-2X + 7) - 2(2X - 3)$ ........

c) $X + \left(\dfrac{2}{3}X + 5\right)\left(X - \dfrac{3}{2}\right) + \dfrac{1}{5}$ ........

### Calcul 4.8 — Développer réduire et ordonner (II).

Développer, réduire et ordonner selon les puissances croissantes de $X$ les polynômes suivants.

a) $(X^3 - 5X + 2)(-2X^2 + 7X - 1)$ ............................

b) $X - \left(X^3 - \frac{1}{2}X + 2\right)\left(-2X^2 + X - \frac{3}{4}\right) - 6X^2$ ..............

c) $(X^2 + \sqrt{2}X + 1)(1 - \sqrt{2}X + X^2)$ ...........................

### Calcul 4.9 — Composition de polynômes (I).

Étant donnés deux polynômes $P$ et $Q$, on fabrique un polynôme, noté $P \circ Q$, en substituant l'expression de $Q$ à l'indéterminée $X$ dans $P$. Par exemple, pour $P = 4X^2 - 7X + 5$ et $Q = X^2 - 3$, on a

$$P \circ Q = 4\big(X^2 - 3\big)^2 - 7\big(X^2 - 3\big) + 5.$$

Dans chacun des cas suivants, exprimer $P \circ Q$ sous forme développée et ordonnée selon les puissances croissantes de $X$.

a) $P = 2X + 1$ et $Q = 4X + 3$ .................................

b) $P = 4X + 3$ et $Q = 2X + 1$ .................................

c) $P = 2X - 1$ et $Q = 3X^2 - X + 1$ ..........................

### Calcul 4.10 — Composition de polynômes (II).

Exprimer $P \circ Q$ sous forme développée et ordonnée selon les puissances croissantes de $X$.

a) $P = X^2 - X + 1$ et $Q = 2X - 1$ ............................

b) $P = X^2 + 3X + 1$ et $Q = X^3 + X - 2$ .......................

c) $P = X^3 + X - 2$ et $Q = X^2 + 3X + 1$ .......................

### Calcul 4.11 — Composition de polynômes (III).

Exprimer $P \circ Q$ sous forme développée et ordonnée selon les puissances croissantes de $X$.

a) $P = X^3 - \sqrt{2}X^2 - X$ et $Q = \sqrt{2}X + 1$ ......................

b) $P = X^3 + 3X^2 + 3X + 1$ et $Q = X - 2$ ......................

**Calcul 4.12 — Composition de polynômes (IV).**

Exprimer $P \circ Q$ sous forme développée et ordonnée selon les puissances croissantes de $X$.

a) $P = \left(X + 1 + \sqrt{3}\right)\left(2X - \sqrt{3}\right)$ et $Q = X^2 + 1$ ..............

b) $P = \left(X^2 + 1\right)(2X - 3)$ et $Q = X^2 + \sqrt{2} - 1$ ................

# Racines des polynômes

**Calcul 4.13 — Racine ou pas ?**

Dans les cas suivants, dire (« oui » ou « non ») si le nombre $a$ est racine du polynôme $P$.

a) $P = -4X^2 + 16X - 7$ et $a = \dfrac{-7}{2}$ ................................................

b) $P = X^3 - 3X^2 - 5X - 1$ et $a = -1$ ................................................

c) $P = X^3 - 3X^2 - 5X - 1$ et $a = 2 - \sqrt{5}$ ...........................................

d) $P = X^4 + 17X^2 + 12X$ et $a = -2 - \sqrt{3}$ ...........................................

**Calcul 4.14 — Condition pour être racine.**

Dans chacun des cas suivants, déterminer les valeurs de $m$ pour que $P(a) = 0$.

a) $P = 6mX^5 - X^4 + (m+2)X^3 - X^2 - X + m$ et $a = 1$ ....................

b) $P = X^2 - \left(m^2 + 2m - 1\right)X + 2m^3 - 2m$ et $a = 1 + m^2$ ....................

c) $P = X^3 + (1 - 2m)X^2 - m(1+m)X + 2m^2(m-1)$ et $a = 2m + 1$ .........

# Calculs plus difficiles

**Calcul 4.15**

On considère le polynôme

$$P = X^5 - 5X^3 + \left(5 + \sqrt{17}\right)X^2 + 2X - 4.$$

Le nombre $a = -\sqrt{\dfrac{5 - \sqrt{17}}{2}}$ est-il une racine du polynôme $P$ ? ....................

**Calcul 4.16 — Une formule pour la somme des cubes.**

Soit $P$ un polynôme de degré 4 tel que

$$P \circ (X+1) - P = X^3 \quad \text{et} \quad P(0) = 0.$$

a) Déterminer $P$ (sous sa forme factorisée).

*On pourra écrire $P = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e$ ; il s'agira alors de déterminer ses coefficients.*

.......................................................................................

b) En déduire, pour $n$ entier naturel non nul, une expression simple de $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$.

.......................................................................................

**Calcul 4.17**

Dans chacun des cas suivants, déterminer les valeurs de $m$ pour que $P(a) = 0$.

*On pourra chercher des racines évidentes.*

a) $P = X^3 - \big(m^2+2\big)X - 2m^3 + 4m$ et $a = 2$ ............................

b) $P = X^3 - \big(3m^2+2\big)X - 2m^3 + 4m$ et $a = -1+\sqrt{2}$ ....................

**Réponses mélangées**

$3-6X+4X^2$ $\quad \dfrac{367}{45}$ $\quad m \in \left\{1, \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}, 1-2\sqrt{2}\right\}$ $\quad 0$ $\quad -2+19X-39X^2+9X^3+7X^4-2X^5$

$7+8X$ $\quad -2X^2-X+20$ $\quad -\dfrac{5}{6}$ $\quad -\dfrac{163}{3}$ $\quad -\sqrt{2}+(2\sqrt{2}-4)X+(6-2\sqrt{2})X^2+2\sqrt{2}X^3$

$\dfrac{-1}{45}$ $\quad 0$ $\quad -1-X+X^2-X^3+2X^4+X^6$ $\quad X^4-X^3-X+1$ $\quad 1+X^4$

$-\dfrac{178}{27}$ $\quad 18\sqrt{2}-28+(26-18\sqrt{2})X^2+(6\sqrt{2}-9)X^4+2X^6$ $\quad m=\dfrac{1}{8}$ $\quad P=\dfrac{(X-1)^2X^2}{4}$ $\quad m=1$

$12X+31X^2+45X^3+30X^4+9X^5+X^6$ $\quad \dfrac{31}{6}$ $\quad (a,b)=\left(\dfrac{5}{7},\dfrac{1}{7}\right)$ $\quad m \in \left\{-\sqrt{2},-1,\sqrt{2}\right\}$

$1+(6+\sqrt{3})X^2+2X^4$ $\quad -18(1+6\sqrt{2})$ $\quad \dfrac{181}{2}$ $\quad 25$ $\quad$ oui $\quad -1+3X-3X^2+X^3$

$\dfrac{10}{9}$ $\quad \dfrac{2}{3}$ $\quad$ non $\quad m \in \left\{-2, \dfrac{-1}{3}\right\}$ $\quad -\dfrac{35}{6}$ $\quad$ non $\quad -63$ $\quad$ oui $\quad 7+8X$

$\dfrac{2}{3}X^2+5X-\dfrac{73}{10}$ $\quad \dfrac{3}{2}-\dfrac{11}{8}X-\dfrac{3}{2}X^2-\dfrac{1}{4}X^3-X^4+2X^5$ $\quad 0$ $\quad \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$

oui $\quad \dfrac{67}{30}$ $\quad -110$ $\quad 165$ $\quad -\dfrac{1}{40}$ $\quad (a,b,c)=(1,-3,2)$ $\quad 0$ $\quad 1-2X+6X^2$

► Réponses et corrigés page 172

# Polynômes II

**Remarque**
Dans cette fiche, on présente, à travers des exemples, différentes techniques pour factoriser un polynôme.

Le but est d'éviter de calculer le discriminant.

Ainsi, dans tous les calculs proposés, on cherchera à répondre sans calculer de discriminant.

## Quelques calculs généraux pour commencer

**Calcul 5.1**

Soit $a \in \mathbb{R}$. Développer et ordonner les expressions suivantes.

a) $(a+1)(a+2)(a+3)$ ...

b) $(a-1)(a^2+a+1)$ .....

**Calcul 5.2**

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On rappelle que $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$. Factoriser les expressions suivantes.

a) $(2X+1)^2 - 25$ ....

b) $(X+3)^2 - (3X+5)^2$

c) $2X^2 - 16$ .........

d) $(X-1)^2 - 3$ ......

## Premières factorisations

**Calcul 5.3 — Factorisez !**

En reconnaissant des facteurs communs, factoriser les expressions suivantes.

a) $X + X(X-3)$ .....

b) $X^2 - X$ ..........

c) $(X-1)(X-3) + (X+2)(X-1)$ ......................................

d) $X(X+2) + (X+1)(X+2) + (X+2)^2$ ................................

e) $(3X+2)(2X-1) - (3X+2)(7X-4)$ ..................................

### Calcul 5.4 — Factorisez, encore !

En utilisant des identités remarquables, factoriser les expressions suivantes.

a) $X^2 - 10X + 25$ ....

b) $X^2 - 3$ ...........

c) $2X^2 - 2\sqrt{2}X + 1$ ..

d) $25 - (2X+3)^2$ ....

### Calcul 5.5 — Facteurs communs et identités remarquables (I).

En reconnaissant des facteurs communs et en utilisant des identités remarquables, factoriser les expressions suivantes.

a) $X(X+1) + X^2 - 1$ ................................................

b) $X^2 - 9 - (X-3)(X-5)$ ................................................

c) $(X-2)(X+4) + X^2 - 4X + 4$ ..........................................

### Calcul 5.6 — Facteurs communs et identités remarquables (II).

Même exercice.

a) $(-7X-6)(6X+8) + (36X^2 - 64)$ ....................................

b) $-X^2 + 81 + (2X+3)(-X-9)$ ..........................................

c) $(X+3)^2 - (2X+5)^2 - X - 2$ ..........................................

## En utilisant les racines

### Calcul 5.7 — Une méthode fondamentale (I).

Les coefficients d'un polynôme de degré 2 unitaire (c'est-à-dire dont le coefficient dominant vaut 1) sont reliés à ses racines : si les racines du polynôme $P = X^2 + bX + c$ sont $\alpha$ et $\beta$, alors on a

$$\boxed{\alpha + \beta = -b} \quad \text{et} \quad \boxed{\alpha\beta = c.}$$

a) Le polynôme $P = X^2 - 7X + 6$ admet 1 comme racine. Quelle est l'autre ? ............

b) Le polynôme $P = X^2 - 12X - 64$ admet $-4$ comme racine. Quelle est l'autre ? ........

c) Le polynôme $P = X^2 - \dfrac{21}{2}X + 5$ admet $\dfrac{1}{2}$ comme racine. Quelle est l'autre ? ..........

d) Le polynôme $P = X^2 + 127X + 372$ admet $-3$ comme racine. Quelle est l'autre ? ......

### Calcul 5.8 — Une méthode fondamentale (II).

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ un paramètre. En utilisant la même méthode, répondre aux questions suivantes.

a) Le polynôme $P = X^2 - \left(a + \dfrac{1}{a}\right)X + 1$ admet $a$ comme racine. Quelle est l'autre ? ....

b) Le polynôme $P = X^2 - 2X + 1 - a^2$ admet $1 + a$ comme racine. Quelle est l'autre ? ...

### Calcul 5.9 — Une méthode fondamentale (III).

Quand le polynôme n'est plus unitaire (c'est-à-dire quand son coefficient dominant ne vaut pas 1), il faut modifier les formules ci-dessus : si $P = aX^2 + bX + c$, avec $a \in \mathbb{R}^*$, est un polynôme dont les racines sont $\alpha$ et $\beta$, alors on a

$$\boxed{\alpha + \beta = -\frac{b}{a}} \qquad \boxed{\alpha\beta = \frac{c}{a}.}$$

a) Le polynôme $P = 3X^2 - 4X + 1$ admet 1 comme racine. Quelle est l'autre ? ...........

b) Le polynôme $P = 2X^2 - 5X - 12$ admet 4 comme racine. Quelle est l'autre ? ..........

c) Le polynôme $P = 5X^2 + 31X + 6$ admet $-6$ comme racine. Quelle est l'autre ? ........

### Calcul 5.10 — Avec des racines entières visibles.

Les polynômes suivants ont des racines entières. Les trouver en s'appuyant sur les techniques précédentes donnant leur somme et leur produit, puis en déduire une factorisation du polynôme.

a) $X^2 + X - 2$ ..................................................

b) $X^2 - 5X + 6$ ................................................

c) $-X^2 + 7X - 10$ .............................................

d) $X^2 + 2X - 35$ ..............................................

e) $-X^2 + 21X + 46$ ...........................................

f) $X^2 - 11X - 60$ ..............................................

**Calcul 5.11 — À la recherche des coefficients.**

On considère le polynôme $P = aX(X-1) + b(X-1)(X-2) + cX(X-2)$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$.

a) On sait que $P(1) = 2$, que vaut $c$ ? ..........

b) On sait que $P(0) = -1$, que vaut $b$ ? ..........

c) On sait que $P(2) = 4$, que vaut $a$ ? ..........

## En degré plus élevé

**Calcul 5.12**

Factoriser les polynômes suivants en produits de polynômes de degré 1.

a) $X^3 - X$ ..........

b) $X^4 - X^2$ ..........

c) $(X^2-1)X^2 + (X^2-1)X^3$ ..........

d) $(X^2+2X+1)(X-2) + (X+1)X$ ..........

## Calculs plus difficiles

**Calcul 5.13**

À l'aide d'une identité remarquable, factoriser le polynôme suivant en produit de trois facteurs non constants.

$X^4 - 1$ ..........

**Calcul 5.14**

Factoriser les polynômes suivants en produit de deux facteurs non constants.

a) $X^4 + 2X^2 + 1$ ..........

b) $4X^8 + 1 + 4X^4$ ..........

c) $(X^2+1)^2 - 2X^2$ ..........

**Calcul 5.15 — Autour de la formule de Bernoulli.**

Étant donné $a \in \mathbb{R}$, on a la factorisation suivante :

$$X^n - a^n = (X-a)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1}X^k = (X-a)(X^{n-1} + aX^{n-2} + \cdots + a^{n-2}X + a^{n-1}).$$

Par exemple, avec $a = 2$ et $n = 3$, la formule donne $X^3 - 8 = (X-2)(X^2+2X+4)$.

Il faut garder à l'esprit que cette identité est valide aussi bien pour $a > 0$ que pour $a < 0$.

À l'aide de cette formule, factoriser les polynômes suivants :

a) $X^3 - 27$ .....

b) $X^3 + 1$ ......

c) $X^5 - 32$ .....

d) $X^5 + 1$ ......

e) $X^7 - 1$ ......

**Calcul 5.16 — Une grande identité remarquable.**

Factoriser le polynôme $X^{12} - 1$ en faisant apparaître au moins 4 facteurs non constants.

..........................

### Réponses mélangées

$-(X-23)(X+2)$ $\quad$ $(X-1)(X^2+X+1)(X+1)(X^2-X+1)(X^6+1)$ $\quad$ $6$ $\quad$ $8(X-3)$ $\quad$ $-\frac{1}{5}$

$X^2(X-1)(X+1)^2$ $\quad$ $-\frac{3}{2}$ $\quad$ $(X+1)(X+\sqrt{2})(X-\sqrt{2})$ $\quad$ $a^3+6a^2+11a+6$ $\quad$ $\frac{1}{a}$

$(X-5)^2$ $\quad$ $X^2(X-1)(X+1)$ $\quad$ $(4X+8)(-2X-2)$ $\quad$ $-2$ $\quad$ $(X-1)(X^6+X^5+X^4+X^3+X^2+X+1)$

$2$ $\quad$ $(X-1+\sqrt{3})(X-1-\sqrt{3})$ $\quad$ $(X+1)(X^2-X+1)$ $\quad$ $-124$ $\quad$ $X(X-1)$ $\quad$ $\frac{1}{3}$

$(X-1)(2X-1)$ $\quad$ $(X-2)(X-3)$ $\quad$ $(2X-1)(X+1)$ $\quad$ $(2X+8)(-2X+2)$ $\quad$ $a^3-1$

$10$ $\quad$ $(X+7)(X-5)$ $\quad$ $(X-\sqrt{3})(X+\sqrt{3})$ $\quad$ $(2X-4)(2X+6)$ $\quad$ $X(X-2)$ $\quad$ $1-a$

$(X^2+1)(X-1)(X+1)$ $\quad$ $(\sqrt{2}X-1)^2$ $\quad$ $-(X-5)(X-2)$ $\quad$ $(X+1)(X^4-X^3+X^2-X+1)$

$(3X+9)(-X-2)$ $\quad$ $\left(X^2+\sqrt{2}X+1\right)\left(X^2-\sqrt{2}X+1\right)$ $\quad$ $(X-2)(X^4+2X^3+4X^2+8X+16)$

$16$ $\quad$ $X(X-1)(X+1)$ $\quad$ $(X^2+1)^2$ $\quad$ $(3X-6)(-X-9)$ $\quad$ $(X-15)(X+4)$

$(3X+2)(-5X+3)$ $\quad$ $(\sqrt{2}X+4)(\sqrt{2}X-4)$ $\quad$ $-\frac{1}{2}$ $\quad$ $(X-3)(X^2+3X+9)$

$(X-1)(X+2)$ $\quad$ $(2X^4+1)^2$ $\quad$ $(X-2)(2X+2)$ $\quad$ $(X+2)(3X+3)$ $\quad$ $(-X-14)(6X+8)$

► Réponses et corrigés page 175

# Dérivation I

## Quelques calculs généraux pour commencer

**Calcul 6.1 — Des puissances.**

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Écrire sous la forme « $2^k$ », avec $k \in \mathbb{Z}$, les nombres suivants.

a) $2^n + 2^n$ ......

b) $2^n \times 2^n$ ......

c) $\dfrac{8^n \times 2^{n+3}}{4^{n+1}}$ ...

**Calcul 6.2 — Factorisations dans des fractions.**

Soit $n$ un entier non nul.

Dans chacun des cas suivants, factoriser par $B(n)$ le numérateur et le dénominateur des fractions $A(n)$ données, puis donner l'expression simplifiée.

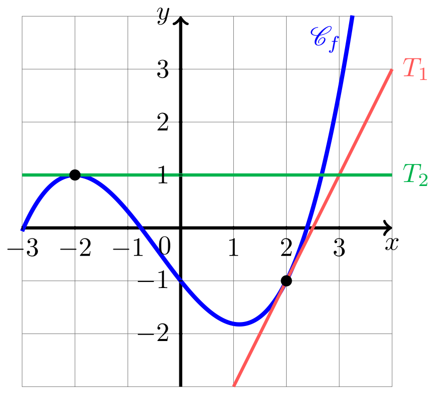
a) $A(n) = \dfrac{n^2 - 2n + 1}{2n^2 + 3}$ et $B(n) = n^2$ ......

b) $A(n) = \dfrac{n^3 - 3n^2 + 1}{n^3 - \frac{n^2}{2} + 5n}$ et $B(n) = n^3$ ......

## Lectures graphiques

**Calcul 6.3 — Lecture graphique d'un nombre dérivé (I).**

Dans le repère ci-dessous, on a représenté le graphe d'une fonction $f$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ ainsi que deux de ses tangentes.




Déterminer graphiquement :

a) $f'(-2)$ ......

b) $f'(2)$ ......

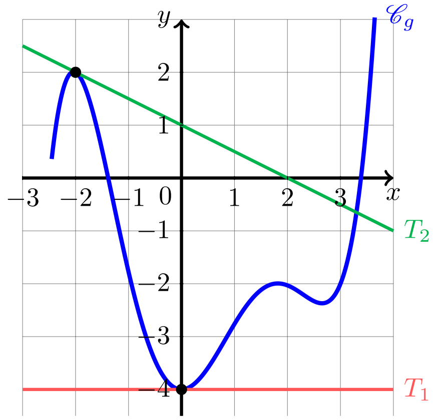
## Calcul 6.4 — Lecture graphique d'un nombre dérivé (II).

Dans le repère ci-contre, on a tracé la représentation graphique d'une fonction $g$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ ainsi que deux de ses tangentes.

Déterminer graphiquement :

a) $g'(-2)$ ............................

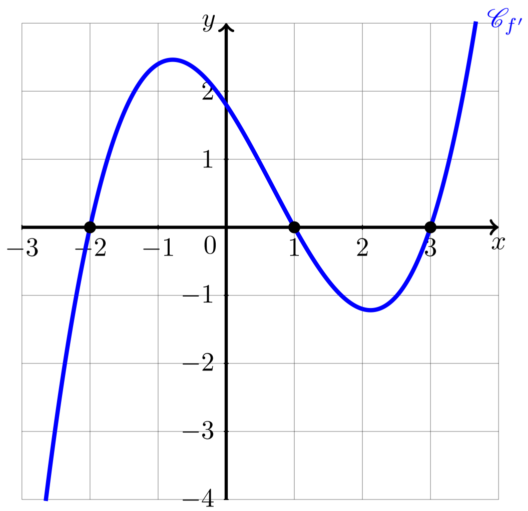
b) $g'(0)$ ..............................




## Calcul 6.5 — Une courbe, trois tableaux.

On considère $f_1$, $f_2$ et $f_3$ des fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

La courbe représentative d'une certaine fonction dérivée, notée $f'$, est tracée dans le repère ci-dessous ainsi que trois tableaux de variation.




| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_1$ | | ↗ | | ↘ | | ↗ | |

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_2$ | | ↗ | | ↘ | | ↗ | | ↘ | |

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_3$ | | ↘ | | ↗ | | ↘ | | ↗ | |

$f'$ est la fonction dérivée de :

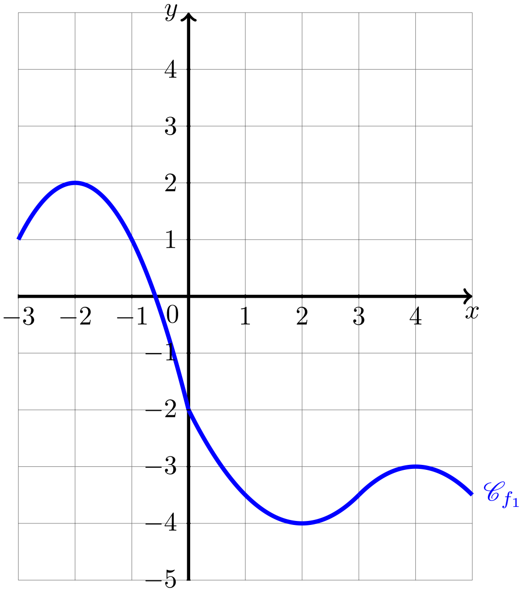
(a) $f_1$ (b) $f_2$ (c) $f_3$

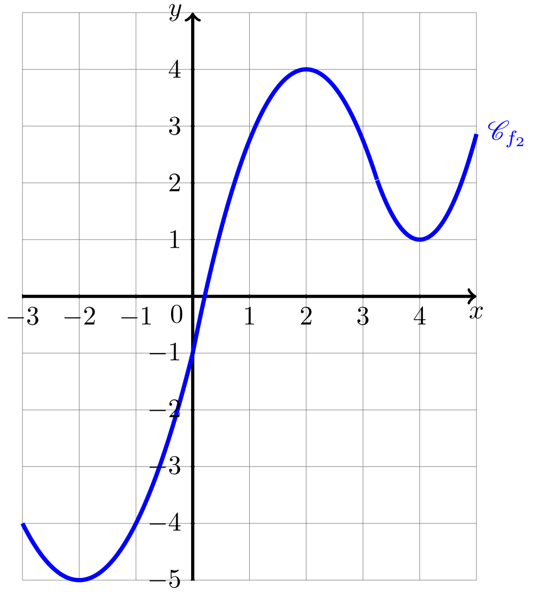
.........................................................................................

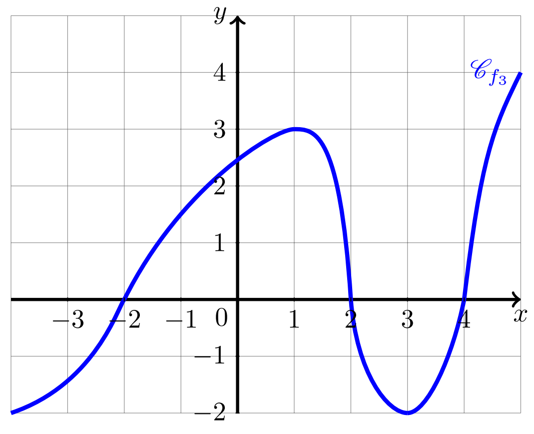
## Calcul 6.6 — Un tableau et trois courbes (I).

On donne ci-dessous le tableau de variation d'une fonction $f'$ définie sur $\mathbb{R}$ ainsi que les courbes représentatives de trois fonctions : $f_1$, $f_2$ et $f_3$.

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $-\infty$ | $0$ | $3$ | $0$ | $-2$ | $0$ | $+\infty$ |




La fonction $f'$ est la fonction dérivée de :

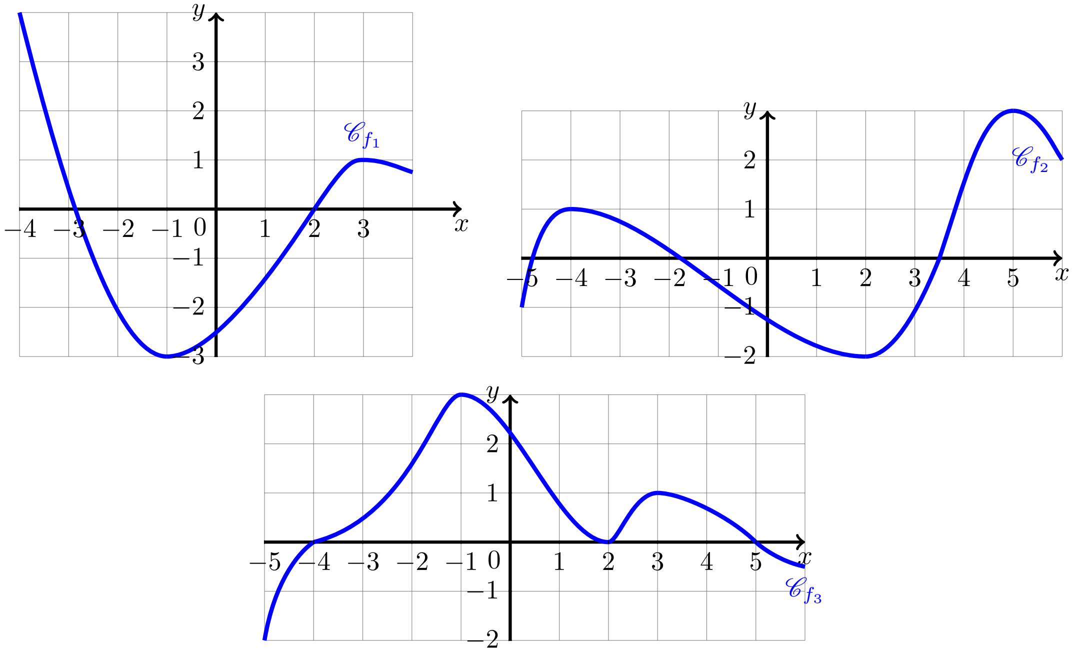
(a) $f_1$ (b) $f_2$ (c) $f_3$

.......................................................................................

### Calcul 6.7 — Un tableau et trois courbes (II).

On donne ci-contre le tableau de variation d'une fonction $f'$ définie sur $\mathbb{R}$ et, ci-dessous, les courbes représentatives de trois fonctions : $f_1$, $f_2$ et $f_3$.

| $x$ | $-\infty$ | $-4$ | $-1$ | $2$ | $3$ | $5$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $+\infty$ | $0$ | $-3$ | $0$ | $1$ | $0$ | $-\infty$ |




$f'$ est la fonction dérivée de :

(a) $f_1$ (b) $f_2$ (c) $f_3$

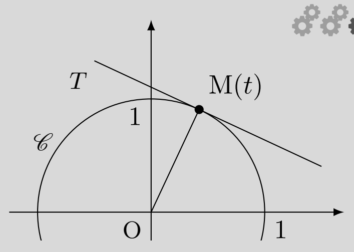
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

## Calculs plus difficiles

### Calcul 6.8 — Tangente et rayon.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.

Pour $t \in ]-1, 1[$, on note $\mathrm{M}(t)$ l'unique point du cercle $\mathscr{C}$ d'abscisse $t$ et d'ordonnée strictement positive, et on note $y_t$ l'ordonnée de $\mathrm{M}(t)$.




a) Exprimer la distance $\mathrm{OM}(t)$ en fonction de $t$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

b) En déduire une expression de $y_t$ en fonction de $t$ ........................

On admet la propriété suivante : si $u$ est une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I$, telle que, pour tout $x \in I, u(x) > 0$, alors la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur $I$ et on a $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

c) Soit $f$ la fonction définie sur $]-1,1[$ par $f(t) = \sqrt{1-t^2}$. Donner l'expression de $f'(t)$.

..................................................................................

d) On fixe $t \in ]-1,1[$ et on note $T$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $t$.

Donner l'équation réduite de $T$ ............................................

e) Donner un vecteur directeur de $T$ .....................................

*On notera $\vec{w}$ ce vecteur.*

f) Donner un vecteur directeur de la droite $(\mathrm{OM}(t))$ ........................

On rappelle la propriété suivante : si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $x \times x' + y \times y' = 0$.

g) Les vecteurs $\vec{w}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OM}(t)}$ sont-ils orthogonaux ? ..........................

**Réponses mélangées**

$2^{n+1}$ $\quad \dfrac{-t}{\sqrt{1-t^2}}$ $\quad \sqrt{t^2+y_t^2}$ $\quad$ oui $\quad -\dfrac{1}{2}$ $\quad y = \dfrac{-t}{\sqrt{1-t^2}}x + \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$

$\sqrt{1-t^2}$ $\quad \vec{w}\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{-t}{\sqrt{1-t^2}} \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{\mathrm{OM}(t)}\begin{pmatrix} t \\ y_t \end{pmatrix}$ $\quad 0$ $\quad \dfrac{1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{3}{n^2}}$

$\dfrac{1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^3}}{1-\frac{1}{2n}+\frac{5}{n^2}}$ $\quad$ b $\quad 2$ $\quad$ b $\quad$ c $\quad 0$ $\quad 2^{2n}$ $\quad 2^{2n+1}$

► Réponses et corrigés page 179

# Dérivation II

## Quelques calculs généraux pour commencer

### Calcul 7.1

Donner (sous la forme d'un intervalle) l'ensemble des solutions des inéquations suivantes.

a) $\dfrac{4}{3}x > \dfrac{6}{5}$ ..................

c) $-2x - \dfrac{2}{9} < \dfrac{1}{2}x$ ..........

b) $-\dfrac{2}{3}x + 1 \leqslant \dfrac{5}{7}$ ...........

d) $2x - \dfrac{1}{3} \geqslant \dfrac{1}{5} + \dfrac{7}{3}x$ .......

### Calcul 7.2

Simplifier les fractions suivantes.

a) $\dfrac{2^5 \times 3^4}{2^8 \times 3^2}$ ......

b) $\dfrac{3^3 \times 2^5}{6^4}$ ......

c) $\dfrac{12^3 \times 10^4}{15^2 \times 8^2}$ ....

### Calcul 7.3

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 3x^2 - 10x - 3.$$

Calculer $f(a)$ pour les valeurs de $a$ suivantes.

a) $a = -\dfrac{1}{2}$ ......

c) $a = \dfrac{\sqrt{2}}{5}$ ......

e) $a = -\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

b) $a = \sqrt{3}$ .......

d) $a = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ ..

f) $a = \dfrac{\sqrt{8}-4}{2}$ ..

## Dérivation de polynômes

### Calcul 7.4

Donner l'expression de $f'(x)$ pour chacune des fonctions $f$ suivantes, définies sur $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = 2x^4 + 5x^3 - x^2 - 6x + 2$ ..............................

b) $f(x) = \dfrac{1}{10}x^5 - \dfrac{5}{12}x^4 + \dfrac{3}{2}x^3 - \dfrac{3}{10}x^2 - \dfrac{592}{3247}$ ..................

c) $f(x) = \dfrac{2x^{10}}{5} - x^3 + \dfrac{2x^7}{7} - \dfrac{x^6}{12} + \dfrac{x^2}{4} + 46$ ....................

### Calcul 7.5

Pour chacune des questions suivantes, calculer $f'(a)$.

a) $f(x) = 5x^3 + 3x - 2$ et $a = 1 + \sqrt{6}$ ....................................

b) $f(x) = x^3 + 5x^2 - x - 1$ et $a = 1 + \sqrt{3}$ ....................................

c) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 10$ et $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ....................................

d) $f(x) = x^4 - \dfrac{1}{2}x^2 + 3x - 5$ et $a = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$ ....................................

## Opérations usuelles et polynômes

On admet que les fonctions de cette partie sont dérivables sur leur domaine de définition, qu'on ne cherchera pas à expliciter, sauf mention contraire.

### Calcul 7.6 — Inverses (I).

Donner l'expression de $f'(x)$ pour chacune des fonctions $f$ suivantes.

a) $f(x) = \dfrac{1}{3x + 1}$ ....................................

b) $f(x) = \dfrac{1}{2x^2 - 3x + 4}$ ....................................

c) $f(x) = \dfrac{1}{-\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + x - 2}$ ....................................

### Calcul 7.7 — Inverses (II).

Donner l'expression de $f'(x)$ pour chacune des fonctions $f$ suivantes.

a) $f(x) = \dfrac{1}{\frac{-2}{3}x^3 + 2x^2 - 2x}$ ....................................

b) $f(x) = \dfrac{1}{\frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{4}x^4 - \frac{17}{2}x^2}$ ....................................

**Calcul 7.8 — Quotients (I).**

Donner l'expression de $f'(x)$ pour chacune des fonctions $f$ suivantes.

a) $f(x) = \dfrac{2x+3}{-5x+4}$ ........................................

b) $f(x) = \dfrac{4x^3-5x^2+3x-2}{2x-1}$ ................................

**Calcul 7.9 — Quotients (II).**

Donner l'expression de $f'(x)$ pour chacune des fonctions $f$ suivantes.

a) $f(x) = \dfrac{2x^3-5x^2-2}{-x^3-x}$ ..................................

b) $f(x) = \dfrac{x^4-x^3+x^2+1}{x^2+x+1}$ ................................

**Calcul 7.10 — Quotients à simplifier (I).**

Simplifier les expressions suivantes en enlevant les fractions au numérateur et au dénominateur.

a) $f(x) = \dfrac{\dfrac{1}{x}+3}{2-\dfrac{3}{x}}$ ......................................

b) $f(x) = \dfrac{3+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x}}{-2-\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{-2}{x}}$ ................................

À l'aide des calculs précédents, donner l'expression de $f'(x)$ pour chacune des fonctions $f$ suivantes.

c) $f(x) = \dfrac{\dfrac{1}{x}+3}{2-\dfrac{3}{x}}$ ......................................

d) $f(x) = \dfrac{3+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x}}{-2-\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{-2}{x}}$ ................................

### Calcul 7.11 — Quotients à simplifier (II).

Simplifier les expressions suivantes en enlevant les fractions au numérateur et au dénominateur.

a) $f(x) = \dfrac{\dfrac{2x+3}{x-4}}{\dfrac{-x-2}{x^2+x}}$ ..................................

b) $f(x) = \dfrac{\frac{1}{2x} - \frac{-x-2}{x+2}}{3x^2-1}$ ..................................

À l'aide des calculs précédents, donner l'expression de $f'(x)$ pour chacune des fonctions $f$ suivantes.

c) $f(x) = \dfrac{\dfrac{2x+3}{x-4}}{\dfrac{-x-2}{x^2+x}}$ ..................................

d) $f(x) = \dfrac{\frac{1}{2x} - \frac{-x-2}{x+2}}{3x^2-1}$ ..................................

### Calcul 7.12 — Signe de la dérivée.

Pour chacune des fonctions suivantes, donner l'ensemble des solutions de l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$.
On attend les solutions sous la forme d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalles.

*On commencera par déterminer l'ensemble de définition de $f$.*

a) $f(x) = \dfrac{2}{3}x^2 - \dfrac{4}{7}x + 2$ .....

b) $f(x) = \dfrac{3x^2-5}{x^2+1}$ .........

c) $f(x) = \dfrac{\frac{1}{8}x - \frac{2}{3}}{\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}}$ ..........

d) $f(x) = \dfrac{1}{\frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{5}x + 5}$ ....

### Calcul 7.13 — Dériver puis factoriser (I).

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer $f'(x)$ puis factoriser le numérateur du quotient obtenu.

a) $f(x) = \dfrac{-1}{\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x - 1}$ ..............................

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - 9x^2 + 27x - 5}$ ..............................

c) $f(x) = \dfrac{-1}{\frac{x^3}{3} - 64x + 21}$ ..................................

d) $f(x) = \dfrac{-1}{\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 9x}$ ..............................

**Calcul 7.14 — Dériver puis factoriser (II).**

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer $f'(x)$ puis factoriser le numérateur du quotient obtenu.

a) $f(x) = \dfrac{1}{\frac{-1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3}$ ..........................

b) $f(x) = \dfrac{1}{\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{8}x - 1}$ ..........................

c) $f(x) = \dfrac{-1}{2x^3 + 6x^2 - 14x + 7}$ ..........................

d) $f(x) = \dfrac{1}{\frac{1}{6}x^3 - 5x^2 + 3x - 4}$ ..........................

## Calculs plus difficiles

**Calcul 7.15 — Avec des racines carrées.**

Si $u$ est une fonction dérivable à valeurs strictement positives, alors la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable et on a

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

Donner l'expression de $f'(x)$ pour chacune des fonctions $f$ suivantes. On ne cherchera pas à déterminer les ensembles de dérivabilité.

a) $f(x) = \sqrt{3x^2 - 2x - 10}$ ..........................................

b) $f(x) = \sqrt{2x^3 + 6x^2 - x + 3}$ ..........................................

c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x + 1}{-3x + 9}}$ ..........................................

d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x^3 - x}{x^5 - x^2}}$ ..........................................

**Calcul 7.16** — **Avec des sommes.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dériver les fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$.

*On note, pour* $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n$ *et* $0! = 1$.

a) $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k$ ..........

b) $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$ ..........

c) $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ ..........

d) $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(3x)^{2k}}{(2k)!}$ ..........

**Calcul 7.17** — **Expressions formelles.**

Soient $f$, $g$ et $h$ trois fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$. Exprimer les dérivées des fonctions suivantes en fonction de $f$, $g$, $h$ et leurs dérivées.

Par exemple, la dérivée de $fg + h$ est $f'g + fg' + h'$.

On pourra utiliser que

$$(f^n)' = nf'f^{n-1}.$$

a) $fg + gh$ .....

b) $\dfrac{f^2}{g}$ ..........

c) $\dfrac{f^3 + g}{gh}$ ......

d) $g - \dfrac{f}{h^3}$ ......

e) $f^3 g^2$ ........

f) $\dfrac{f}{\frac{g}{h}}$ ..........

g) $\sqrt{\dfrac{f}{g}}$ .........

h) $fgh$ .........

## Réponses mélangées

$\dfrac{7}{6(3-x)^2}\sqrt{\dfrac{-3x+9}{2x+1}}$ $\quad \dfrac{13}{2}-\dfrac{13\sqrt{5}}{2}$ $\quad 3f'f^2g^2+2f^3g'g$ $\quad \dfrac{2}{3}$ $\quad \left[\dfrac{3}{7},+\infty\right[$

$8x^3+15x^2-2x-6$ $\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}$ $\quad \left[\dfrac{3}{7},+\infty\right[$ $\quad 3+5\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ $\quad \dfrac{3-4x}{(2x^2-3x+4)^2}$

$\dfrac{-2x^2+5x^3+17x}{\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{4}x^4-\frac{17}{2}x^2\right)^2}$ $\quad \dfrac{3x-1}{\sqrt{3x^2-2x-10}}$ $\quad \left]-\dfrac{4}{45},+\infty\right[$ $\quad g'-\dfrac{f'h^3-3fh'h^2}{h^6}$

$\dfrac{-3(x-3)^2}{(x^3-9x^2+27x-5)^2}$ $\quad 4x^9+2x^6-\dfrac{x^5}{2}-3x^2+\dfrac{x}{2}$ $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}x^{k-1}$ $\quad f'g+fg'+g'h+gh'$

$\dfrac{2x^2-4x+2}{\left(\frac{-2}{3}x^3+2x^2-2x\right)^2}$ $\quad 108+30\sqrt{6}$ $\quad \dfrac{3x+1}{2x-3}$ $\quad 6-10\sqrt{3}$ $\quad \dfrac{5}{2}-2\sqrt{2}$ $\quad 21+16\sqrt{3}$

$-\dfrac{69}{25}-2\sqrt{2}$ $\quad \dfrac{-12x^3-9x^2+1}{2x^2(3x^2-1)^2}$ $\quad \dfrac{-11}{(2x-3)^2}$ $\quad \left]-\infty,\dfrac{4}{5}\right]$ $\quad \dfrac{(x-1)(x+2)}{\left(\frac{-1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x+3\right)^2}$

$\dfrac{3x^3-x^2+2x}{-2x^3-2x^2-2}$ $\quad 1200$ $\quad \dfrac{x^2+6x-1}{\left(-\frac{1}{3}x^3-3x^2+x-2\right)}$ $\quad \left]-\infty,-\dfrac{1}{2}\right[\cup\left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$

$\dfrac{-\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{8}x-1\right)^2}$ $\quad -\dfrac{23}{4}-\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$ $\quad \dfrac{-2x^4+8x^3+61x^2+80x+24}{(-x-2)^2(x-4)^2}$ $\quad \dfrac{9}{8}$ $\quad [0,+\infty[$

$\dfrac{(x-8)(x+8)}{\left(\frac{x^3}{3}-64x+21\right)^2}$ $\quad \dfrac{-4x^4+4x^3-7x^2+2x-2}{2(x^3+x^2+1)^2}$ $\quad \dfrac{-4x^5+4x^3-2x^2-1}{2(x^4-x)^2}\sqrt{\dfrac{x^4-x}{2x^2-1}}$

$\dfrac{x^4}{2}-\dfrac{5x^3}{3}+\dfrac{9x^2}{2}-\dfrac{3x}{5}$ $\quad \dfrac{(3f'f^2+g')gh-(f^3+g)(g'h+gh')}{(gh)^2}$ $\quad \dfrac{-5x^4-4x^3-x^2-2}{(x^3+x)^2}$

$\dfrac{-3}{(3x+1)^2}$ $\quad f'gh+fg'h+fgh'$ $\quad \left]-\infty,-\dfrac{8}{5}\right]$ $\quad 35-22\sqrt{2}$ $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}$

$\dfrac{2x^5+2x^4+2x^3-2x^2-1}{(x^2+x+1)^2}$ $\quad \dfrac{11}{4}$ $\quad \left]\dfrac{9}{10},+\infty\right[$ $\quad \dfrac{f'gh-fg'h+fgh'}{g^2}$ $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{3(3x)^{2k-1}}{(2k-1)!}$

$\dfrac{2x^3+5x^2+3x}{-x^2+2x+8}$ $\quad \dfrac{2f'fg+f^2g'}{g^2}$ $\quad \dfrac{6x^2+12x-1}{2\sqrt{2x^3+6x^2-x+3}}$ $\quad \dfrac{2x+1}{6x^3-2x}$ $\quad \dfrac{\left(\frac{1}{2}x+3\right)^2}{\left(\frac{1}{12}x^3+\frac{3}{2}x^2+9x\right)^2}$

$\dfrac{f'g-fg'}{2g^2\sqrt{\frac{f}{g}}}$ $\quad \dfrac{-\frac{1}{2}(x-10+\sqrt{94})(x-10-\sqrt{94})}{\left(\frac{1}{6}x^3-5x^2+3x-4\right)^2}$ $\quad \dfrac{(x+2)^2}{\left(\frac{1}{3}x^3+2x^2+4x-1\right)^2}$

$\dfrac{16x^3-22x^2+10x+1}{(2x-1)^2}$ $\quad \dfrac{6\left(x+1+\sqrt{\frac{10}{3}}\right)\left(x+1-\sqrt{\frac{10}{3}}\right)}{(2x^3+6x^2-14x+7)^2}$ $\quad \dfrac{23}{(-5x+4)^2}$

► Réponses et corrigés page 181

# Dérivation III

**Remarque**
Dans cette fiche, on ne se préoccupera pas (sauf mention du contraire) des ensembles de définition des fonctions considérées.

## Quelques calculs généraux pour commencer

### Calcul 8.1

Écrire sous la forme $ax + by + cz$, où $a$, $b$ et $c$ sont des réels.

a) $\dfrac{x-y+z}{3} + \dfrac{1}{4}x - 2y$ ........................................

b) $\dfrac{1}{2}(x-3y-z) - \dfrac{x-y-z}{4}$ ........................................

c) $\dfrac{3x+2y-z}{5} + \dfrac{x+y-2z}{3}$ ........................................

d) $x - \dfrac{x+y}{2} - \dfrac{1}{3}(y-x+z)$ ........................................

### Calcul 8.2

Développer et ordonner selon les puissances de $x$.

a) $(x-1)(x+1) + x(x-2)(2x-1)$ ........................................

b) $\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{3}\right)^2 + \dfrac{x+x^2}{2}$ ........................................

c) $(x-1)(x-2)(x-3) - x^3$ ........................................

d) $x^2 - \left(2x - \dfrac{1}{4}\right)^2$ ........................................

# Dérivées de fonctions composées

**Calcul 8.3 — Puissances (I).**

Déterminer l'expression de la dérivée de $f$, définie par les expressions suivantes.

a) $f(x) = (2x-1)^3$ ……… 

b) $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{3} - 2\right)^4$ ……… 

c) $f(x) = (1-x)^5$ ……… 

d) $f(x) = \dfrac{1}{(1-2x)^3}$ ……… 

**Calcul 8.4 — Puissances (II).**

Déterminer l'expression de la dérivée de $f$, définie par les expressions suivantes.

a) $f(x) = \sqrt{2}(\sqrt{3} + \sqrt{2}x)^6$ ……… 

b) $f(x) = \sqrt{3}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{6}x\right)^3$ ……… 

c) $f(x) = -\dfrac{1}{\left(3 - \frac{x}{2}\right)^3}$ ……… 

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{(\sqrt{2} - \sqrt{3}x)^2}$ ……… 

**Calcul 8.5 — Produits de puissances (I).**

Déterminer l'expression de la dérivée de $f$, définie par les expressions suivantes.

a) $f(x) = (1-2x)^2\left(1 - \dfrac{x}{2}\right)^2$ ……… 

b) $f(x) = (2x-1)^2(3x+2)^4$ ……… 

**Calcul 8.6 — Produits de puissances (II).**

Déterminer l'expression de la dérivée de $f$, définie par les expressions suivantes.

a) $f(x) = (x - \sqrt{2})^4(2x + \sqrt{2})^2$ ……… 

b) $f(x) = \left(2x - \dfrac{1}{2}\right)^3\left(\dfrac{x}{3} + 2\right)^2$ ……… 

### Calcul 8.7 — Quotients (I).

Déterminer l'expression de la dérivée de $f$, définie par les expressions suivantes.

a) $f(x) = \dfrac{2x-1}{1-3x}$ .....

b) $f(x) = \dfrac{(1-x)^3}{(2x+1)^2}$ ..

### Calcul 8.8 — Quotients (II).

Déterminer l'expression de la dérivée de $f$, définie par les expressions suivantes.

a) $f(x) = \dfrac{(1-2x)^6}{2(1-x)^2}$ ..

b) $\dfrac{\sqrt{2}(2+\sqrt{2}x)^3}{1-\sqrt{2}x}$ .....

## Dérivation à partir de relations fondamentales

### Calcul 8.9

On considère une fonction $f$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et vérifiant, pour tout $x$ réel non nul :

$$f'(x) = \frac{1}{x} + x.$$

On note, si $x \neq -\dfrac{1}{2}$, $g(x) = f(2x+1)$ et, si $x \neq 1$, $h(x) = f(1-x)$.

a) Que vaut $g'(x)$ ? ...

b) Calculer $g'\left(\dfrac{1}{2}\right)$ ...

c) Que vaut $h'(x)$ ? ...

d) Calculer $h'(1+\sqrt{2})$

### Calcul 8.10

On considère une fonction $f$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$f'(x) = \frac{2x}{3+x^2}.$$

On note, pour tout réel $x$, $g(x) = f(2x+1)$ et $h(x) = f(1-x)$.

a) Que vaut $g'(x)$ ? ......

b) Calculer $g'\left(\sqrt{2} - \dfrac{1}{2}\right)$ .

c) Que vaut $h'(x)$ ? ......

d) Calculer $h'(2)$. ........

**Calcul 8.11**

On considère une fonction $f$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$f'(x) = \sqrt{2x^2+1}.$$

On note, pour tout réel $x$, $g(x) = f\left(\dfrac{x+1}{3}\right)$ et $h(x) = 2f(2-x)$.

a) Que vaut $g'(x)$ ? ...

b) Calculer $g'(2)$ .....

c) Que vaut $h'(x)$ ? ...

d) Calculer $h'(0)$. .....

# Équations de tangentes

**Calcul 8.12 — Des équations de tangentes.**

Pour les fonctions $f$ définies par les expressions suivantes, et pour les réels $a$ suivants, donner une équation de la tangente à la courbe représentative de $f$ au point d'abscisse $a$.

a) $f(x) = 3x^2 - x + 1$ et $a = 1$ ....................................

b) $f(x) = \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$ et $a = 2$ ................................

c) $f(x) = \dfrac{2x}{1-x}$ et $a = 2$ ..........................................

d) $f(x) = (x+2)^3 - (1+x)^2$ et $a = -\dfrac{1}{2}$ .........................

**Calcul 8.13 — Des ordonnées à l'origine.**

Pour les fonctions $f$ définies par les expressions suivantes, et pour les réels $a$ suivants, déterminer l'ordonnée à l'origine de la tangente à la courbe de $f$ au point d'abscisse $a$.

a) $f(x) = (x-1)^2 + (1-x)^3$ et $a = 3$ ........................................

b) $f(x) = \dfrac{(1-2x)}{(2-x)^2}$ et $a = -1$ ................................................

c) $f(x) = \left(1 - \dfrac{x}{2}\right)^2 (2x+1)^2$ et $a = \dfrac{1}{2}$. ......................................

d) $f(x) = \dfrac{1}{(3x+1)^2}$ et $a = \dfrac{1}{3}$ ................................................

## Calculs plus difficiles

**Notation.** Si $f$ est une fonction et si $a$ un réel en lequel $f$ est dérivable, on note $\mathsf{T}_{f,a}$ la tangente à la courbe représentative de $f$ au point d'abscisse $a$.

**Calcul 8.14 — Intersection de tangentes.**

On définit, pour tout $x$ réel, $f(x) = 2(1-x)^3$ et $g(x) = 3(1-x)^2$. Soit $a$ un réel différent de 0 et 1.

Déterminer l'abscisse du point d'intersection de $\mathsf{T}_{f,a}$ et $\mathsf{T}_{g,a}$ ..................

**Calcul 8.15 — Tangente passant par un point donné.**

On considère la fonction $f$ définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par

$$f(x) = 3\left(1 - \frac{x}{2}\right)^2.$$

Dans chacun des cas suivants, trouver les deux valeurs de $a \in \mathbb{R}$ telles que $\mathsf{T}_{f,a}$ passe par ...

a) le point de coordonnées $(0, 0)$ ..........................................

b) le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ..........................................

**Calcul 8.16 — Avec un paramètre.**

On considère un réel $b$ et, pour $x$ réel, la fonction $f$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{(bx)^2 + 1}$.

a) Pour quelles valeurs de $b$ la tangente $\mathsf{T}_{f,2}$ est-elle horizontale ? ............

b) Soit $a$ un réel non nul.

Pour quelle valeur de $b$ (à exprimer éventuellement en fonction de $a$) la droite $\mathsf{T}_{f,a}$ passe-t-elle par l'origine ?

..........................................................................

## Réponses mélangées

$4x+\dfrac{2}{2x+1}+2$ $\{-2,2\}$ $-2\sqrt{2x^2-8x+9}$ $\dfrac{1}{9}\sqrt{2x^2+4x+11}$ $\dfrac{1}{3}$

$\dfrac{1}{2}$ $-\dfrac{2(\sqrt{2}x+2)^2(2\sqrt{2}x-5)}{(1-\sqrt{2}x)^2}$ $\dfrac{4(2x+1)}{3+(2x+1)^2}$ $\dfrac{1}{2}$ $\dfrac{8\sqrt{2}}{11}$ $\{-1,2\}$

$\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{x}{3}-2\right)^3$ $y=5x-2$ $\dfrac{4a^2+a+1}{6a}$ $12x(x-\sqrt{2})^3(2x+\sqrt{2})$ $12(\sqrt{3}+\sqrt{2}x)^5$

$-5(1-x)^4$ $\dfrac{5}{6}x-\dfrac{5}{6}y-\dfrac{1}{3}z$ $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $-6$ $\dfrac{7}{12}x-\dfrac{7}{3}y+\dfrac{1}{3}z$ $x+\dfrac{1}{x-1}-1$ $\dfrac{3}{2}$

$-\dfrac{(2x+7)(1-x)^2}{(2x+1)^3}$ $-6x^2+11x-6$ $4(2x-1)(3x+2)^3(9x-1)$ $y=\dfrac{11x}{2}-\dfrac{11}{2}$ $0$

$\dfrac{5}{3}(2x+7)\left(2x-\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\dfrac{x}{3}+2\right)$ $-\dfrac{1}{(1-3x)^2}$ $\dfrac{1}{4}x-\dfrac{5}{4}y-\dfrac{1}{4}z$ $-9\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\sqrt{6}x\right)^2$

$\dfrac{6}{(\sqrt{2}-\sqrt{3}x)^3}$ $-3x^2+x-\dfrac{1}{16}$ $\dfrac{-24}{(6-x)^4}$ $-\dfrac{(1-2x)^5(4x-5)}{(x-1)^3}$ $6(2x-1)^2$ $5$

$\dfrac{3x^2}{4}+\dfrac{x}{6}+\dfrac{1}{9}$ $\left\{-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right\}$ $\dfrac{2x-2}{3+(1-x)^2}$ $20$ $\dfrac{14}{15}x+\dfrac{11}{15}y-\dfrac{13}{15}z$ $y=\dfrac{23x}{4}+6$

$(4x-5)(1-2x)\left(1-\dfrac{x}{2}\right)$ $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ $y=2x-8$ $2x^3-4x^2+2x-1$ $\dfrac{6}{(1-2x)^4}$

► Réponses et corrigés page 186

# Généralités sur l'exponentielle I

## Quelques calculs généraux pour commencer

**Calcul 9.1**

Calculer, en donnant le résultat sous forme de fraction irréductible :

a) $2 - \dfrac{1}{3}$ ........ b) $\dfrac{\frac{3}{2}}{2}$ .......... c) $\dfrac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{3}}$ ......

**Calcul 9.2**

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Exprimer les nombres suivants sous la forme « $2^a$ » (où $a$ est un entier dépendant de $n$).

a) $2^n + 3 \times 2^n$ .. b) $2^n \times 4^n$ ...... c) $\dfrac{2^n \times 8^{-n}}{4}$ ....

## En utilisant des formules vérifiées par l'exponentielle

**Calcul 9.3 — Quelques calculs pour commencer.**

Simplifier les expressions suivantes.

a) $\exp(5) \times \exp(-2) \times \exp(0)$ .........

b) $\dfrac{\exp(4)}{\exp(-3)}$ ...........................

c) $\big(\exp(-1)\big)^2 \times \sqrt{\exp(4)}$ .............

d) $\exp(-1) \times \big(\exp(-3)\big)^2$ ............

e) $\dfrac{\exp(7) \times \exp(-8)}{\exp(2)}$ ................

f) $\dfrac{\exp(5) \times \big(\exp(-2)\big)^3}{\exp(4) \times \exp(-1)}$ ..............

**Calcul 9.4 — D'autres calculs pour continuer.**

Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier les expressions suivantes.

a) $\big(\exp(x+1)\big)^2 \times \exp(-2x+1)$ ...

b) $\big(\exp(4x-5) \times \exp(3-2x)\big)^2$ ...

c) $\exp(3x) \times \exp(1-5x) \times \big(\exp(2x-1)\big)^2$ ........................................

d) $\dfrac{\exp(4x+1)}{\exp(3-2x)}$ ..................................................................

**Calcul 9.5 — Un peu plus compliqué.**

Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier les expressions suivantes.

a) $\dfrac{\exp(1) \times \big(\exp(4x)\big)^3}{\exp(8x+1)}$ ..............

b) $\dfrac{\exp(3x) \times \exp(2)}{\exp(5) \times \big(\exp(-x)\big)^3}$ ..............

c) $\left(\dfrac{\exp(2x+3) \times \exp(2-3x)}{\exp(-5)}\right)^{-1}$ ...

d) $\dfrac{\exp(x)-1}{\exp(x)+1} + \dfrac{\exp(-x)-1}{\exp(-x)+1}$ .........

## Exponentielle et identités remarquables

**Calcul 9.6**

Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer et réduire les expressions suivantes.

a) $\big(\exp(x) + \exp(-x)\big)^2$ ..............

b) $\big(2\exp(2x) + 3\exp(-x)\big)^2$ ...........

c) $\big(3\exp(x) - \exp(-x)\big)^2$ ..............

d) $\big(1 + \exp(x)\big)\big(1 - \exp(x)\big)$ ...........

**Calcul 9.7**

Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer et réduire les expressions suivantes.

a) $-2\exp(3x) - \exp(2x)\big(\exp(2x) - \exp(-x)\big)^2$ ..........................................

b) $\big(\exp(x) + \exp(-x)\big)^2 - \big(\exp(x) - \exp(-x)\big)^2$ ..........................................

**Calcul 9.8 — Factorisations.**

Soit $x \in \mathbb{R}$. À l'aide d'une identité remarquable, factoriser les expressions suivantes.

a) $\exp(2x) + 4\exp(-2x) + 4$ .......

b) $\exp(6x) + 9\exp(-2x) - 6\exp(2x)$

c) $16\exp(4x) - 9$ .................

d) $9\exp(2x) - 4\exp(-2x)$ .........

## Résolutions d'équations et d'inéquations

**Calcul 9.9 — Résolutions d'équations (I).**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes, en donnant l'ensemble de leurs solutions.

a) $\exp(2x) = \exp(5)$ ..............

b) $\exp(x^2) = \exp(2x)$ .............

c) $\big(\exp(x) - 1\big)\big(\exp(x) + 5\big) = 0$ ...

**Calcul 9.10** — **Résolutions d'équations (II).**

Donner l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ des équations suivantes.

a) $\exp(3x) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(-1)}$ ............

b) $5 - 3\exp(4x - 1) = 2$ ..........

**Calcul 9.11** — **Résolutions d'inéquations.**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

*On donnera l'ensemble des solutions sous la forme d'un intervalle ou d'une union d'intervalles.*

a) $\exp(5x) - 1 > 0$ ..........

b) $\exp(x^2) < \exp(x)$ .........

c) $\exp(x^2 - 1) \geqslant \mathrm{e}$ ..........

d) $12 - 4\exp(5x + 1) \geqslant 8$ ...

e) $\exp(6x^2) > \exp(2 - x)$ ...

# Résolutions d'équations avec changement de variable

**Calcul 9.12**

À l'aide d'un changement de variable, résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

*On donnera l'ensemble de leurs solutions.*

a) $\exp(2x) + 3\exp(x) = 4$ à l'aide de « $X = \exp(x)$ » ..................................

b) $\exp(2x) - (1 + \mathrm{e})\exp(x) + \mathrm{e} = 0$ à l'aide de « $X = \exp(x)$ » ........................

c) $\exp(x^2) + \dfrac{\mathrm{e}}{\exp(x^2)} = 1 + \mathrm{e}$ à l'aide de « $X = \exp(x^2)$ » ............................

# Étude de la parité d'une fonction

**Calcul 9.13**

La fonction $\left\{\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \dfrac{\exp(t) - 1}{\exp(t) + 1} \end{array}\right.$ est : (a) paire (b) impaire (c) ni paire, ni impaire.

.........................................................................................

## Calculs plus difficiles

On appelle fonction *cosinus hyperbolique*, notée cosh, la fonction définie par :

$$\cosh : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow [1, +\infty[ \\ x \longmapsto \dfrac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}. \end{cases}$$

De même, on appelle fonction *sinus hyperbolique*, notée sinh, la fonction définie par :

$$\sinh : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}. \end{cases}$$

**Calcul 9.14 — Une formule remarquable ?**

Soit $x \in \mathbb{R}$. A-t-on, « oui » ou « non », $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ ? ..........................

**Calcul 9.15 — Formule de duplication.**

Soit $x \in \mathbb{R}$.

a) Exprimer $\cosh(2x)$ en fonction de $\cosh(x)$ ..........................................

b) En déduire l'expression de $\cosh(2x)$ en fonction de $\sinh(x)$ ............................

**Calcul 9.16 — Formules de factorisation.**

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Donner, dans chaque cas, la bonne réponse.

a) On a $\cosh(x+y) - \cosh(x-y) = \cdots$

(a) $2\sinh(x)\cosh(y)$ (b) $2\cosh(x)\sinh(y)$ (c) $2\sinh(x)\sinh(y)$

..........................................................................................

b) On a $\sinh(x+y) + \sinh(x-y) = \cdots$

(a) $2\sinh(x)\sinh(y)$ (b) $2\cosh(x)\sinh(y)$ (c) $2\sinh(x)\cosh(y)$

..........................................................................................

**Calcul 9.17 — Une équation.**

Donner l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\cosh(2x) = 1$.

*On pourra faire un changement de variable.*

..........................................................................................

**Calcul 9.18 — Calcul de sommes.**

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Calculer les sommes suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \exp(kx)$ ....................

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \big(\exp(kx)\big)^2$ ....................

**Réponses mélangées**

$\{0\}$ $2^{-2n-2}$ b c $\exp(-3)$ $2\sinh^2(x)+1$ $\{0,1\}$ oui $]0,+\infty[$

$\left]-\infty,-\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2},+\infty\right[$ $\exp(3)$ $(3e^{-x}-e^{3x})^2$ $\dfrac{e^{2x}(1-e^{2nx})}{1-e^{2x}}$ $\{0\}$ $\dfrac{1-e^{(n+1)x}}{1-e^{x}}$

$(4e^{2x}-3)(4e^{2x}+3)$ $2^{n+2}$ $\exp(2x-1)$ $\big(2e^{-x}+e^{x}\big)^2$ $\exp(6x-2)$ $\left]-\infty,-\dfrac{2}{3}\right[ \cup \left]\dfrac{1}{2},+\infty\right[$

$-1-\exp(6x)$ $\exp(-7)$ $\exp(4x-4)$ $\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ $\dfrac{3}{8}$ $2^{3n}$ $\exp(6x-3)$ $\left]-\infty,-\dfrac{1}{5}\right]$

$\{0\}$ $(3e^{x}-2e^{-x})(3e^{x}+2e^{-x})$ $\{0,2\}$ $\exp(-4)$ $\exp(3)$ $e^{2x}+e^{-2x}+2$ $]0,1[$

$9e^{2x}+e^{-2x}-6$ $4e^{4x}+9e^{-2x}+12e^{x}$ $4$ $1-e^{2x}$ $0$ $\{-1,0,1\}$ $\dfrac{5}{3}$ $1$

$\exp(x-10)$ $\exp(7)$ $2\cosh^2(x)-1$ c $\left\{\dfrac{1}{4}\right\}$ $\left\{\dfrac{5}{2}\right\}$ $\exp(4x)$ $\dfrac{3}{4}$

► Réponses et corrigés page 191

# Généralités sur l'exponentielle II

## Quelques calculs généraux pour commencer

**Calcul 10.1 — Des factorisations.**

Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser les expressions suivantes.

a) $x^2 - 16$ ..................

b) $x^2 + 6x + 9$ ..................

c) $2x^2 - \dfrac{1}{2}$ ..................

d) $4x^2 - 1$ ..................

e) $(x+3)^2 + 2x + 6$ ..................

f) $(3x-2)^2 - 36$ ..................

**Calcul 10.2 — Des fractions de fractions.**

Mettre les nombres suivants sous forme de fraction irréductible.

a) $\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{7}}$ ..................

b) $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}-\frac{1}{3}}$ ..................

c) $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{2}{5}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}$ ..................

d) $\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}-\frac{1}{6}}$ ..................

e) $\dfrac{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}}{1+\frac{1}{3}}$ ..................

f) $\dfrac{\frac{1}{2}-3}{\frac{1}{9}+1}$ ..................

## Propriétés de l'exponentielle

**Calcul 10.3**

Simplifier les expressions suivantes en les mettant sous la forme $\exp(A)$, où $A$ est un entier à déterminer.

a) $\exp(2)\exp(3)$ ..................

b) $\exp(-1)\exp(4)$ ..................

c) $\dfrac{\exp(4)}{\exp(3)}$ ..................

d) $\dfrac{\exp(6)\exp(-1)}{\exp(2)\exp(3)}$ ..................

e) $\exp(3)^2\exp(4)$ ..................

f) $\dfrac{\exp(2)^4\exp(-3)}{\exp(-2)^5}$ ..................

### Calcul 10.4

Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier les expressions suivantes en les mettant sous la forme $\exp(A)$.

a) $\exp(x)\exp(-2x)$ ................

b) $\dfrac{\exp(x)^2}{\exp(-x)}$ ........................

c) $\exp(x)\exp(-1)$ ................

d) $\exp\left(\dfrac{x}{2}\right)^4$ ........................

### Calcul 10.5 — Avec des identités remarquables.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier $\big(\exp(x)+\exp(-x)\big)^2 - \big(\exp(x)-\exp(-x)\big)^2$ ..................

## Équations et inéquations

**Remarque**
Dans les exercices suivants, on attend les réponses sous la forme « $x = a$ » ou « $x \geqslant a$ » ou « $x > a$ », etc.

### Calcul 10.6

Résoudre les équations et inéquations suivantes.

a) $\exp(3x+12) = 1$ ...............

b) $\exp(2x-6) > 1$ ................

c) $\exp\left(x^2\right) = \mathrm{e}$ ....................

d) $\exp(5x) \leqslant \mathrm{e}$ ....................

e) $\dfrac{1}{\exp(x)+1} = \dfrac{2}{\exp(x)+3}$ .......

f) $\exp(x)^2 = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ ....................

### Calcul 10.7

Résoudre les inéquations suivantes.

a) $\exp(x^2) < \exp(x)^5$ ..............

b) $\exp(x)^2\exp(-2) \geqslant \mathrm{e}$ ............

c) $\dfrac{1}{1-\exp(x)} < \dfrac{2}{\exp(x)+2}$ .......

d) $\dfrac{\exp(x)^3}{\mathrm{e}} < \exp(x)$ ..............

### Calcul 10.8

Résoudre les inéquations suivantes.

a) $\exp(2x+7) \leqslant \exp(x)^4$ ..........

b) $1 \leqslant \exp(x)^3\exp(5) \leqslant \mathrm{e}^4$ .........

c) $\dfrac{1}{\exp(2x)-\mathrm{e}} < \dfrac{1}{\exp(2x)+1}$ .....

d) $\dfrac{\exp(2x)^4}{\mathrm{e}} \geqslant \exp(x+1)$ ........

**Calcul 10.9 — Avec une équation auxiliaire.**

Résoudre les équations suivantes.

*Dans chaque cas, on pourra poser $y = \exp(x)$ et résoudre une équation auxiliaire.*

a) $\exp(2x) - 2\exp(x) + 1 = 0$ ........................................

b) $\exp(x) + \exp(-x) = 2$ ........................................

c) $\exp(2x) + 2\exp(x) - 3 = 0$ ........................................

d) $\exp(2x) - (1 + \mathrm{e})\exp(x) + \mathrm{e} = 0$ ........................................

**Calcul 10.10 — Un système exponentiel.**

Résoudre le système d'équations suivant d'inconnues $x$ et $y$.

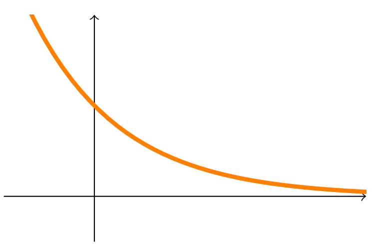
$$(S) \quad \begin{cases} \exp(x-1) + \exp(y+1) = 2 \\ \exp(x) + \exp(y) = \dfrac{\mathrm{e}^2 + 1}{\mathrm{e}} \end{cases}$$ ........................................

# Représentation graphique d'une fonction exponentielle

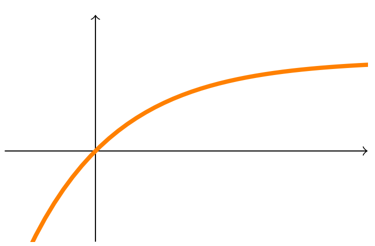
**Calcul 10.11**

On considère les trois allures de courbes ci-dessous.

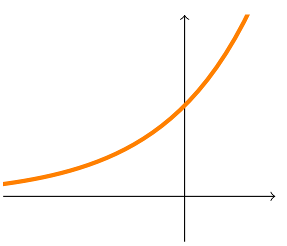
courbe 1



courbe 2



courbe 3



Pour chacune des fonctions suivantes, identifier la courbe qui correspond.

*Les réponses possibles sont : « courbe 1 », « courbe 2 », « courbe 3 », « aucune ».*

a) $x \longmapsto \exp(2x)$ ...........

b) $x \longmapsto \exp(-x)$ ..........

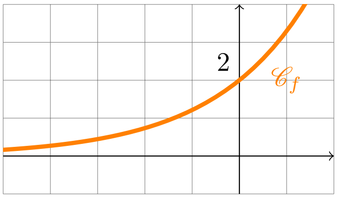
c) $x \longmapsto 2 - \exp(-x)$ .......

d) $x \longmapsto 1 - \exp(-x)$ .......

### Calcul 10.12

Voici la courbe représentative d'une fonction $f$.

Parmi les trois expressions suivantes, laquelle correspond à la fonction $f$ ?




ⓐ $f(x) = \mathrm{e}^x$ ⓑ $f(x) = 2\mathrm{e}^x$ ⓒ $f(x) = 1 + \mathrm{e}^x$

........................................................................................................

## Calculs plus difficiles

### Calcul 10.13

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq 0$. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{kx}$ ..........................

### Calcul 10.14

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier l'expression $\mathrm{e} \times \mathrm{e}^2 \times \cdots \times \mathrm{e}^n$ ..............................

### Calcul 10.15 — Simplification ?

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$ et $g(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. A-t-on $g\big(f(x)\big) = \mathrm{e}^x$ ? ..........................................................

**Réponses mélangées**

oui $\quad x = -4 \quad x \geqslant \frac{3}{2} \quad x > 3 \quad x = -\frac{1}{2} \quad x < \frac{1}{2} \quad x = 0$ ou $x = 1$

$\exp(15) \quad x \geqslant \frac{7}{2} \quad 7 \quad 0 < x < 5 \quad (x+3)^2 \quad (3x-8)(3x+4) \quad \exp(x-1)$

$(x+3)(x+5) \quad \exp(0) = 1$ ⓑ $2\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) \quad \frac{14}{5} \quad \frac{1 - \mathrm{e}^{nx}}{1 - \mathrm{e}^x} \quad x = 0$

$x \leqslant \frac{1}{5} \quad \exp(3) \quad \frac{21}{8} \quad (x-4)(x+4) \quad (x, y) = (1, -1) \quad x \geqslant \frac{2}{7} \quad \exp(10)$

$4 \quad \frac{1}{10} \quad \exp(3x) \quad \exp(-x) \quad x > 0$ courbe 2 $x = 0$ courbe 3

$\exp(2x) \quad -\frac{5}{3} \leqslant x \leqslant -\frac{1}{3}$ courbe 1 aucune $x = 0 \quad x = 1$ ou $x = -1$

$(2x-1)(2x+1) \quad \exp(1) = \mathrm{e} \quad x = 0 \quad \frac{6}{5} \quad \exp\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) \quad \exp(5) \quad -\frac{9}{4} \quad x < \frac{1}{2}$

► Réponses et corrigés page 194

# Dérivation et exponentielle I

## Quelques calculs généraux pour commencer

**Calcul 11.1 — Fractions.**

Soit un entier $n \geqslant 2$. Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

a) $\dfrac{1}{n-1} + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1}$ ........

b) $\dfrac{n-2}{n^2} + \dfrac{-n+1}{n^3}$ ........

c) $\dfrac{2n-1}{2n+1} - \dfrac{2n+1}{2n-1}$ ........

d) $\dfrac{n+2}{n^2-1} + \dfrac{-n+3}{(n-2)(n+1)}$ .

**Calcul 11.2 — Puissances.**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Écrire les nombres suivants sous la forme « $2^a 3^b$ », avec $a$ et $b$ entiers.

a) $8^n 9^{-2n+1}$ ........

b) $3^{n+1} - 3^n$ ........

c) $4^{n+1}3^{5n} - 4^n 3^{5n+1}$ ........

d) $\dfrac{(2^{n-2})^3(9^{-n+1})^2}{27(\sqrt{2})^{4n-2}}$ ........

**Calcul 11.3 — Radicaux.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Simplifier les expressions suivantes de manière à ce que les dénominateurs ne comportent pas de radicaux.

a) $\sqrt{2^{4n}3^{2n+4}}$ ........

b) $\dfrac{2}{\sqrt{n^3}}$ ........

c) $\dfrac{\sqrt{n^2+4n+4}}{\sqrt{n^2+2n}}$ ........

d) $\left(\dfrac{3n-\sqrt{2n^2+1}}{\sqrt{n+3}}\right)^2$ ........

## Calculs de dérivées

**Calcul 11.4 — Exponentielles seules.**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Donner une expression de la dérivée des fonctions définies par les expressions suivantes.

a) $f(x) = \exp(x)$ ..................

b) $f(x) = \exp(-x)$ ................

c) $f(x) = \exp(\alpha x + 1)$ ............

d) $f(x) = 3\exp(x+1) - 7$ .........

e) $f(x) = \dfrac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}$ ......

f) $f(x) = \dfrac{1}{8}\exp(2x) - 48\exp\left(\dfrac{x}{6}\right)$ .

**Calcul 11.5 — Exponentielles et autres fonctions de référence.**

Donner une expression de la dérivée des fonctions définies par les expressions suivantes.

a) $f(x) = 3x - x^2 - \exp(x)$ ..............................

b) $f(x) = \sqrt{2}\exp(\sqrt{2}x - 1) + 2\sqrt{x}$ ......................

c) $f(x) = -\exp(-x) + \dfrac{4}{x}$ ..............................

**Calcul 11.6 — Exponentielles et autres fonctions de référence.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une expression de la dérivée des fonctions définies par les expressions suivantes.

a) $f(x) = \dfrac{1}{6}x^3 - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\exp\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}x\right)$ ........................

b) $f(x) = x^n + \dfrac{1}{n}\exp((n-1)x)$ ........................

c) $f(x) = nx^{n+1} + (n+1)\exp(-nx - x)$ ................

**Calcul 11.7 — Exponentielles et produits (I).**

Donner une expression de la dérivée des fonctions définies par les expressions suivantes.

a) $f(x) = (\exp(x) + 2)(3 - \exp(x))$ .......................

b) $f(x) = (2\exp(-x) - 1)(\exp(x) - \exp(-x))$ ...........

**Calcul 11.8 — Exponentielles et produits (II).**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Donner une expression de la dérivée des fonctions définies par les expressions suivantes.

a) $f(x) = x\exp(2x)$ ....................................

b) $f(x) = (x+2)\exp(\alpha x)$ ..............................

c) $f(x) = x^3\exp(x-2)$ ..................................

d) $f(x) = \sqrt{3x}\exp(\sqrt{3}x)$ ..............................

**Calcul 11.9 — Exponentielles et produits (III).**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une expression de la dérivée des fonctions définies par les expressions suivantes.

*Certaines réponses peuvent être un peu longues.*

a) $f(x) = (x^2 - x + 1)\exp(-x)$ ....................

b) $f(x) = (x^3 + 2x + 5)\exp(2x)$ ..................

c) $f(x) = (x^{n+1} - nx^n - x)\exp(-nx)$ ............

d) $f(x) = (x^2 - \exp(x))\left(\dfrac{1}{x} + \exp(-2x)\right)$ .........

**Calcul 11.10 — Exponentielles et quotients.**

Donner une expression de la dérivée des fonctions définies par les expressions suivantes.

*Certaines réponses peuvent être un peu longues.*

a) $f(x) = \dfrac{1}{1+\exp(x)}$ ..............................

b) $f(x) = \dfrac{3}{5\exp(2x) + 2\exp(-x)}$ ..................

c) $f(x) = \dfrac{2\exp(x) - 1}{1 + \exp(-3x)}$ ..........................

d) $f(x) = \dfrac{x^2 - \exp(2x)}{\exp(-x) - x}$ ..........................

## Applications de la dérivation

**Calcul 11.11 — Équation de tangente (I).**

Dans chacun des cas suivants, choisir parmi les propositions une équation de la tangente à la courbe représentative de $f$ au point d'abscisse $a$.

a) $f(x) = \exp(x)$ et $a = 0$

(a) $y = 1$ (c) $y = x + 1$

(b) $y = x$ (d) $y = x - 1$

........................................................................................

b) $f(x) = \exp(2x)$ et $a = 0$

(a) $y = 2$ (c) $y = x + 2$

(b) $y = x$ (d) $y = 2x + 1$

........................................................................................

c) $f(x) = 3\exp(-x) - 1$ et $a = 0$

(a) $y = x + 3$ (c) $y = 3x - 1$

(b) $y = 3x + 2$ (d) $y = -3x + 2$

........................................................................................

d) $f(x) = \exp(x - 1)$ et $a = 1$

(a) $y = 1$ (c) $y = x + 1$

(b) $y = x$ (d) $y = x - 1$

........................................................................................

**Calcul 11.12 — Équation de tangente (II).**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dans chacun des cas suivants, donner l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de $f$ au point d'abscisse $a$.

a) $f(x) = 2\exp(4x) - 1$ et $a = 0$ ........................................

b) $f(x) = (1 - \alpha)\exp(\alpha x) + \alpha^2 x$ et $a = 0$ ........................................

c) $f(x) = (x^2 + x - 3)\exp(x)$ et $a = 0$ ........................................

d) $f(x) = (x^2 - x + 4)\exp(-2x)$ et $a = 1$ ........................................

**Calcul 11.13 — Variations.**

Dans chacun des cas suivants, choisir parmi les propositions le sens de variation de la fonction $f$ sur l'intervalle $I$ :

(a) $f$ est croissante sur $I$ (b) $f$ est décroissante sur $I$ (c) $f$ n'est pas monotone sur $I$

a) $f(x) = \dfrac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}$ et $I = \mathbb{R}$ ..............................................

b) $f(x) = x \exp(-x)$ et $I = [0, +\infty[$ ..............................................

c) $f(x) = (x^2 - 2x + 2)\exp(x)$ et $I = \mathbb{R}$ ..............................................

d) $f(x) = \dfrac{1}{\exp(x) + \exp(-x)}$ et $I = [0, +\infty[$ ..............................................

# Calculs plus difficiles

**Formule admise.**

On donne la formule suivante. Si $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur un intervalle $I$, alors la fonction $f : x \longmapsto \exp(u(x))$ est dérivable sur $I$ et, pour tout $x \in I$, on a

$$\boxed{f'(x) = u'(x) \times \exp\big(u(x)\big).}$$

**Calcul 11.14 — Composée avec une exponentielle (I).**

Donner une expression de la dérivée des fonctions définies par les expressions suivantes.

a) $f(x) = \exp(-x^2)$ .........

b) $f(x) = \exp(x^3 - x)$ .......

c) $f(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right)$ ........

d) $f(x) = \exp\left(x^2 - \dfrac{1}{2}\sqrt{x}\right)$ .

**Calcul 11.15 — Composée avec une exponentielle (II).**

Donner une expression de la dérivée des fonctions définies par les expressions suivantes.

a) $f(x) = \sqrt{x}\exp(x^3 + 1)$ ..................

b) $f(x) = \exp(x\exp(x))$ ....................

c) $f(x) = \exp\left(\dfrac{x - 2}{x^2 + 1}\right)$ ....................

d) $f(x) = \dfrac{x\exp(x^2)}{x^2 + \exp(-2x^3)}$ ..................

## Réponses mélangées

$(2x+1)\exp(2x)$ $\quad \dfrac{3n^2-1}{n^3-n}$ $\quad -\dfrac{\exp(x)}{(1+\exp(x))^2}$ $\quad y=\alpha x+1-\alpha$ $\quad 2^{3n}3^{-4n+2}$

$\dfrac{2\sqrt{n}}{n^2}$ $\quad \exp(-x)-\dfrac{4}{x^2}$ $\quad 3-2x-\exp(x)$ $\quad 3\exp(x+1)$ $\quad \dfrac{1}{4}\exp(2x)-8\exp\left(\dfrac{x}{6}\right)$

$2^{2n}3^{5n}$ $\quad$ (a) $\quad (x^3+3x^2)\exp(x-2)$ $\quad 2\exp(\sqrt{2}x-1)+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad -\exp(-x)$

$2^{2n}3^{n+2}$ $\quad (\alpha x+2\alpha+1)\exp(\alpha x)$ $\quad 1+\exp(-x)+(2x-2x^2)\exp(-2x)+\dfrac{1-x}{x^2}\exp(x)$

$\dfrac{-30\exp(2x)+6\exp(-x)}{(5\exp(2x)+2\exp(-x))^2}$ $\quad \alpha\exp(\alpha x+1)$ $\quad 4\exp(-2x)-\exp(x)-\exp(-x)$ $\quad$ (b) $\quad$ (d)

$\exp(x)$ $\quad \dfrac{-x^2-3\exp(x)+(x^2+2x)\exp(-x)+(2x-1)\exp(2x)}{(\exp(-x)-x)^2}$ $\quad 2^{n-5}3^{-4n+1}$ $\quad \dfrac{n^2-3n+1}{n^3}$

$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}}+3\sqrt{x}\right)\exp(\sqrt{3}x)$ $\quad y=-2x-3$ $\quad \dfrac{-8n}{4n^2-1}$ $\quad nx^{n-1}+\dfrac{n-1}{n}\exp((n-1)x)$

$(-x^2+3x-2)\exp(-x)$ $\quad (-nx^{n+1}+(n^2+n+1)x^n-n^2x^{n-1}+nx-1)\exp(-nx)$

(c) $\quad \dfrac{1}{x^2}\exp\left(-\dfrac{1}{x}\right)$ $\quad \dfrac{2\exp(x)+8\exp(-2x)-3\exp(-3x)}{(1+\exp(-3x))^2}$ $\quad 2\times 3^n$

$n(n+1)x^n-(n+1)^2\exp(-(n+1)x)$ $\quad (2x^3+3x^2+4x+12)\exp(2x)$ $\quad -2x\exp(-x^2)$

$\dfrac{\exp(x)-\exp(-x)}{2}$ $\quad \left(2x-\dfrac{1}{4\sqrt{x}}\right)\exp\left(x^2-\dfrac{1}{2}\sqrt{x}\right)$ $\quad \dfrac{11n^2-6n\sqrt{2n^2+1}+1}{n+3}$

$y=8x+1$ $\quad \dfrac{4n-7}{(n-2)(n-1)(n+1)}$ $\quad \dfrac{(2x^4-x^2)\exp(x^2)+(6x^3+2x^2+1)\exp(x^2-2x^3)}{(x^2+\exp(-2x^3))^2}$

$\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+3x^2\sqrt{x}\right)\exp(x^3+1)$ $\quad \exp(x)-2\exp(2x)$ $\quad \dfrac{\sqrt{n^2+2n}}{n}$ $\quad$ (b)

(c) $\quad (3x^2-1)\exp(x^3-x)$ $\quad (x+1)\exp(x(1+\exp(x)))$ $\quad$ (a)

$y=-7\mathrm{e}^{-2}x+11\mathrm{e}^{-2}$ $\quad \dfrac{-x^2+4x+1}{(x^2+1)^2}\exp\left(\dfrac{x-2}{x^2+1}\right)$ $\quad \dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\exp\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}x\right)$ $\quad$ (d)

► Réponses et corrigés page 198

# Dérivation et exponentielle II

## Quelques calculs généraux pour commencer

**Calcul 12.1 — Factorisation (I).**

Factoriser les expressions suivantes.

a) $5x(3x+1) - 3(6x+2)$ ........

b) $(2x-1)(7x+2) - 3x(2x-1)$ ..

c) $36 - (7x+4)^2$ .................

d) $7x + 2 - \left(4 - 49x^2\right)$ ...........

**Calcul 12.2 — Factorisation (II).**

Factoriser les expressions suivantes.

a) $(3x-5)(5x+1) + 9x^2 - 25$ ....

b) $(x-7)(2x+3) - 4x^2 + 9$ .......

c) $x^4 - 1$ ........................

d) $(x+y)^2 - (x-y)^2$ ............

## Calculs de dérivées

**Calcul 12.3 — Des sommes.**

Pour chacune des fonctions définies par les expressions suivantes, déterminer l'expression de sa dérivée.

a) $f(x) = \mathrm{e}^x + 4x$ ..........

b) $f(x) = 5\mathrm{e}^x - 7x + 3$ .....

**Calcul 12.4 — Des produits.**

Pour chacune des fonctions définies par les expressions suivantes, déterminer l'expression de sa dérivée. Lorsque cela est possible, on s'efforcera de fournir la réponse sous forme factorisée.

a) $f(x) = 7x\mathrm{e}^x$ ..............

b) $f(x) = x^2\mathrm{e}^x$ ..............

c) $f(x) = (3x-1)\mathrm{e}^x$ .......

d) $f(x) = (2 - x\mathrm{e}^x)^2$ .......

### Calcul 12.5 — Des quotients.

Pour chacune des fonctions définies par les expressions suivantes, déterminer l'expression de sa dérivée.

Lorsque cela est possible, on s'efforcera de fournir la réponse sous forme factorisée.

a) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2+1}$ ..........

b) $f(x) = \dfrac{2}{4x^2\mathrm{e}^x+7}$ ........

c) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x-2}{\mathrm{e}^x+1}$ ..........

d) $f(x) = \dfrac{x\mathrm{e}^x}{3x\mathrm{e}^x+1}$ .........

### Calcul 12.6 — Dérivées de sommes d'expressions du type $\mathrm{e}^{ax+b}$.

Pour chacune des fonctions définies par les expressions suivantes, déterminer l'expression de sa dérivée.

a) $f(x) = 3\mathrm{e}^{5x} + 6\mathrm{e}^{2x}$ ......

b) $f(x) = 3\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{2x+1}$ .....

### Calcul 12.7 — Dérivées de produits d'expressions du type $\mathrm{e}^{ax+b}$.

Pour chacune des fonctions définies par les expressions suivantes, déterminer l'expression de sa dérivée.

Lorsque cela est possible, on s'efforcera de fournir la réponse sous forme factorisée.

a) $f(x) = (3x^2-1)\mathrm{e}^{-x+1}$ ...

b) $f(x) = \big(3\mathrm{e}^{x-1}-5\big)\mathrm{e}^{2-3x}$ .

c) $f(x) = \big(\mathrm{e}^{2x}-5\big)\big(\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x}\big)$

d) $f(x) = (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})^2$ .......

### Calcul 12.8 — Dérivées de quotients d'expressions du type $\mathrm{e}^{ax+b}$.

Pour chacune des fonctions définies par les expressions suivantes, déterminer l'expression de sa dérivée.

Lorsque cela est possible, on s'efforcera de fournir la réponse sous forme factorisée.

a) $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{7x-4}}$ ..........

b) $f(x) = \dfrac{3}{4\mathrm{e}^{-x}+3}$ .......

c) $f(x) = \dfrac{2x}{\mathrm{e}^{3x-2}+7}$ .......

d) $f(x) = \dfrac{7x\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{2x-1}}$ .........

e) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$ .......

f) $f(x) = \dfrac{\big(1-5x^2\big)\mathrm{e}^{-3x}}{3\mathrm{e}^{-x+1}}$ ..

### Calcul 12.9 — Dérivée d'un quotient.

Déterminer l'expression de la dérivée de la fonction définie par l'expression suivante.

$f(x) = \dfrac{3x\mathrm{e}^{-x}-2}{x^2\mathrm{e}^x+1}$ ..........................................

**Calcul 12.10 — Exponentielle et racine carrée.**

Pour chacune des fonctions définies par les expressions suivantes, déterminer l'expression de sa dérivée sur l'intervalle $]0,+\infty[$. Lorsque cela est possible, on s'efforcera de fournir la réponse sous forme factorisée.

a) $f(x) = \mathrm{e}^{2-3x}\sqrt{x}$ ..........

b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\mathrm{e}^x + 1}$ ..........

c) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x\sqrt{x}}{x^2+1}$ ..........

d) $f(x) = x^2\mathrm{e}^{2x}\sqrt{x}$ ..........

# Applications à l'étude d'une fonction

**Calcul 12.11 — Calculs de nombres dérivés.**

Dans chacun des cas suivants, calculer $f'(a)$.

a) $f(x) = (2-x^3)\mathrm{e}^{3-2x}$ en $a = 2$ .....

b) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x} - 8}{2\mathrm{e}^{3x} + 5}$ en $a = -1$ ........

**Calcul 12.12 — Équations de tangentes.**

Pour chacune des fonctions définies par les expressions suivantes, déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de $f$ au point d'abscisse $a$ indiqué.

*On attend des équations de la forme $y = mx + p$.*

a) $f(x) = \mathrm{e}^x$ et $a = 0$ ..........

b) $f(x) = x^2\mathrm{e}^{1-x}$ et $a = 3$ ..........

c) $f(x) = \dfrac{2}{4 + 3\mathrm{e}^{-x}}$ et $a = 1$ ..........

d) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - 2}{\mathrm{e}^{3x} + 3}$ et $a = 0$ ..........

**Calcul 12.13 — Étude des variations d'une fonction.**

Après avoir calculé et factorisé la dérivée de la fonction $x \longmapsto (5-x)\mathrm{e}^{2-x}$, déterminer si cette dernière est

(a) décroissante sur $]-\infty, 7]$

(b) croissante sur $]-\infty, 5]$

(c) croissante sur $[6, +\infty[$

*Une seule proposition est vraie.*

..........

## Calculs plus difficiles

**Dérivée d'une fonction « composée ».** Si $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dérivable, alors la fonction $x \longmapsto \exp(u(x))$, notée $\exp(u)$, est dérivable sur $I$ et

$$\exp(u)' = u' \times \exp(u).$$

*Par exemple, avec la fonction* $u : x \longmapsto x^2$*, on obtient la fonction* $\exp(u) : x \longmapsto \mathrm{e}^{x^2}$ *qui est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et dont la dérivée est la fonction* $\exp(u)' : x \longmapsto 2x \times \mathrm{e}^{x^2}$.

**Calcul 12.14 — Dérivées de composées (I).**

Pour chacune des fonctions définies par les expressions suivantes, déterminer l'expression de sa dérivée. Lorsque cela est possible, on s'efforcera de fournir la réponse sous forme factorisée.

a) $f(x) = \mathrm{e}^{x^3}$ sur $\mathbb{R}$ .........

b) $f(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$ sur $]0, +\infty[$ ...

c) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2-2x}$ sur $\mathbb{R}$ ......

d) $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$ sur $\mathbb{R}$ .........

**Calcul 12.15 — Dérivées de composées (II).**

Pour chacune des fonctions définies par les expressions suivantes, déterminer l'expression de sa dérivée. Lorsque cela est possible, on s'efforcera de fournir la réponse sous forme factorisée.

a) $f(x) = \mathrm{e}^{3x^2-2x+7}$ sur $\mathbb{R}$ ..........................................

b) $f(x) = \mathrm{e}^{x\sqrt{x}}$ sur $]0, +\infty[$ ..........................................

c) $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}}$ sur $\mathbb{R}$ ..........................................

**Calcul 12.16 — Dérivées de composées (III).**

Pour chacune des fonctions définies par les expressions suivantes, déterminer l'expression de sa dérivée. Lorsque cela est possible, on s'efforcera de fournir la réponse sous forme factorisée.

a) $f(x) = 4x\mathrm{e}^{2x-x^3}$ sur $\mathbb{R}$ ..........................................

b) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{e}^{2x-1}$ sur $\mathbb{R}$ ..........................................

c) $f(x) = \mathrm{e}^{x^5} - 2x^3\mathrm{e}^{5x}$ sur $\mathbb{R}$ ..........................................

d) $f(x) = \mathrm{e}^{x^3+2x}\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$ sur $\mathbb{R}$ ..........................................

**Calcul 12.17 — Un calcul de somme.**

Dans cet exercice, $x$ désigne un réel strictement positif et $n$ un entier naturel non nul.

a) Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \exp(kx)$ ....................

b) Donner l'expression de la dérivée de la fonction $x \longmapsto \exp(x) + \exp(2x) + \exp(3x) + \cdots + \exp(nx)$

....................

c) En déduire une expression simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \exp(kx)$ ....................

### Réponses mélangées

$(3x+2)\mathrm{e}^x$ — $2\mathrm{e}^x(x+1)(x\mathrm{e}^x-2)$ — $\dfrac{3}{2}\sqrt{x}\mathrm{e}^{x\sqrt{x}}$ — $2(x-1)\mathrm{e}^{x^2-2x}$ — $\dfrac{12\mathrm{e}^{-x}}{(4\mathrm{e}^{-x}+3)^2}$

c — $\dfrac{48\mathrm{e}^{-3}-8\mathrm{e}^{-2}-5\mathrm{e}}{(2\mathrm{e}^{-3}+5)^2}$ — $4(1+2x-3x^3)\mathrm{e}^{2x-x^3}$ — $y=3\mathrm{e}^{-2}(6-x)$ — $\dfrac{(x-1)^2\mathrm{e}^x}{(x^2+1)^2}$

$5\mathrm{e}^x-7$ — $0$ — $\dfrac{(x+1)\mathrm{e}^x}{(3x\mathrm{e}^x+1)^2}$ — $2(3x-1)\mathrm{e}^{3x^2-2x+7}$ — $\dfrac{(4x^3+5x^2)\mathrm{e}^{2x}}{2\sqrt{x}}$ — $\dfrac{\mathrm{e}^{(n+1)x}-\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}$

$(-3x^2+6x+1)\mathrm{e}^{-x+1}$ — $\mathrm{e}^{x+\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}}$ — $\dfrac{2x(x+2)\mathrm{e}^x+3(1-x)\mathrm{e}^{-x}-3x^2(2x+1)}{(x^2\mathrm{e}^x+1)^2}$

$\dfrac{2\mathrm{e}^{-2x-1}}{3}(5x^2-5x-1)$ — $2(x+1)\mathrm{e}^{x^2+2x-1}$ — $\dfrac{-8x(x+2)\mathrm{e}^x}{(4x^2\mathrm{e}^x+7)^2}$ — $\dfrac{(1-6x)\mathrm{e}^{2-3x}}{2\sqrt{x}}$ — $-3\mathrm{e}^{-x}+2\mathrm{e}^{2x+1}$

$3x^2\mathrm{e}^{x^3}$ — $x^2\left(5x^2\mathrm{e}^{x^5}-2(5x+3)\mathrm{e}^{5x}\right)$ — $y=\dfrac{11}{16}x-\dfrac{1}{4}$ — $3\mathrm{e}^{3x}-4\mathrm{e}^x+5\mathrm{e}^{-x}$ — $x(x+2)\mathrm{e}^x$

$\dfrac{n\mathrm{e}^{(n+2)x}-(n+1)\mathrm{e}^{(n+1)x}+\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-1)^2}$ — $2(3x-5)(4x+3)$ — $-(2x+3)(x+4)$ — $(3x^2+2+\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{x^3+2x+\mathrm{e}^x}$

$(3x+1)(5x-6)$ — $3\mathrm{e}^{2-3x}(5-2\mathrm{e}^{x-1})$ — $4xy$ — $15\mathrm{e}^{5x}+12\mathrm{e}^{2x}$ — $(2-7x)(7x+10)$

$\mathrm{e}^{x+\mathrm{e}^x}$ — $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$ — $7(1-3x)\mathrm{e}^{1-3x}$ — $(x-1)(x+1)(x^2+1)$ — $2(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})$

$2(2x-1)(2x+1)$ — $7(x+1)\mathrm{e}^x$ — $\mathrm{e}^x+4$ — $\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^{2x}+3\mathrm{e}^{3x}+\cdots+n\mathrm{e}^{nx}$

$(7x+2)(7x-1)$ — $y=\dfrac{6\mathrm{e}}{(4\mathrm{e}+3)^2}x+\dfrac{8\mathrm{e}^2}{(4\mathrm{e}+3)^2}$ — $\dfrac{4}{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2}$ — $\dfrac{(1-2x)\mathrm{e}^x+1}{2\sqrt{x}(\mathrm{e}^x+1)^2}$

$\dfrac{(2x^3-3x^2+2x+1)\mathrm{e}^x}{2\sqrt{x}(x^2+1)^2}$ — $-7\mathrm{e}^{4-7x}$ — $\dfrac{3\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$ — $\dfrac{2(1-3x)\mathrm{e}^{3x-2}+14}{(\mathrm{e}^{3x-2}+7)^2}$ — $y=x+1$

► Réponses et corrigés page 204

# Généralités sur les suites

## Quelques calculs généraux pour commencer

**Calcul 13.1 — Des puissances.**

Écrire à l'aide d'une seule puissance les expressions suivantes.

a) $(-1)^4 \times (3^4)^5$ ...

b) $-1^4 \times (3^{-1})^{-2}$ ..

c) $(-1)^5 \times 3^4 \times 2^4$ .

**Calcul 13.2 — Des fractions.**

Mettre sous même dénominateur les expressions suivantes.

a) $\dfrac{x+3}{3} + \dfrac{2x-1}{6}$ .

b) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{3}$ .........

c) $2 + \dfrac{3x-8}{5}$ .....

**Calcul 13.3 — Des carrés.**

Développer les expressions suivantes.

a) $(3x+1)^2$ .......

b) $(4x-3)^2$ .......

## Suites définies explicitement

**Calcul 13.4**

Soit $(u_n)_n$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 + 4n + 1$. Calculer :

a) $u_0 =$ .........................

b) $u_1 =$ .........................

c) $u_2 =$ .........................

d) $u_3 =$ .........................

**Calcul 13.5**

Soit $(u_n)_n$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{4n-1}{n+1}$. Calculer :

a) $u_0 =$ .........................

b) $u_1 =$ .........................

c) $u_2 =$ .........................

d) $u_3 =$ .........................

### Calcul 13.6

Soit $(u_n)_n$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2n - 1$. Exprimer en fonction de $n$ :

a) $u_{n+1} =$ ........................

b) $u_{n-1} =$ ........................

c) $u_{2n} =$ ........................

d) $u_n + 1 =$ ......................

### Calcul 13.7

Soit $(u_n)_n$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - n$. Exprimer en fonction de $n$ :

a) $u_{2n} =$ .......

b) $u_{n+1} =$ .....

c) $u_{2n+1} =$ ....

### Calcul 13.8

Soit $(v_n)_n$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$. Exprimer en fonction de $n$ :

a) $v_{2n} =$ .........................

b) $v_{2n+1} =$ .......................

c) $v_{4n} =$ .........................

d) $v_{2n+2} =$ .......................

## Suites définies par récurrence

### Calcul 13.9

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$. Calculer :

a) $u_1 =$ ..........................

b) $u_2 =$ ..........................

c) $u_3 =$ ..........................

d) $u_4 =$ ..........................

### Calcul 13.10

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = -1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -u_n - 1$. Calculer :

a) $u_1 =$ ..........................

b) $u_2 =$ ..........................

c) $u_3 =$ ..........................

d) $u_4 =$ ..........................

### Calcul 13.11

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (n+2)u_n$. Calculer :

a) $u_1 = $ ..........................

b) $u_2 = $ ..........................

c) $u_3 = $ ..........................

d) $u_4 = $ ..........................

### Calcul 13.12

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3^n \times u_n$. Calculer :

a) $u_1 = $ ..........................

b) $u_2 = $ ..........................

c) $u_3 = $ ..........................

d) $u_4 = $ ..........................

### Calcul 13.13

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 2n + 1}$. Calculer :

a) $u_1 = $ ..........................

b) $u_2 = $ ..........................

c) $u_3 = $ ..........................

d) $u_4 = $ ..........................

### Calcul 13.14

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \left(n + \dfrac{1}{2}\right) \times u_n$. Calculer :

a) $u_1 = $ ..........................

b) $u_2 = $ ..........................

c) $u_3 = $ ..........................

d) $u_4 = $ ..........................

## Suites définies par récurrence avec paramètre

### Calcul 13.15 — Une suite définie par récurrence avec paramètre.

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $(v_n)_n$ la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $\begin{cases} v_0 = a \\ v_{n+1} = 2v_n + 1. \end{cases}$ Exprimer en fonction de $a$ :

a) $v_1 = $ ..........................

b) $v_2 = $ ..........................

c) $v_3 = $ ..........................

d) $v_4 = $ ..........................

**Calcul 13.16 — Une autre suite définie par récurrence avec paramètre.**

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $(w_n)_n$ la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $\begin{cases} w_0 = 1 \\ w_{n+1} = a^n \times w_n. \end{cases}$ Exprimer en fonction de $a$ :

a) $w_1 = \ldots\ldots$

b) $w_2 = \ldots\ldots$

c) $w_3 = \ldots\ldots$

d) $w_4 = \ldots\ldots$

## Calculs plus difficiles

**Calcul 13.17 — Suite et fractions.**

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1}$.

Calculer la moyenne des trois nombres $u_2$, $u_3$ et $u_4$ $\ldots\ldots$

**Calcul 13.18**

Dans chacun des cas suivants, donner la valeur de $n \in \mathbb{N}$ pour laquelle on a $u_n = 4$.

a) La suite $(u_n)_n$ définie pout tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = -6n + 64$ $\ldots\ldots$

b) La suite $(u_n)_n$ définie pout tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n^2 - 20}{n+3}$ $\ldots\ldots$

**Réponses mélangées**

$\frac{3}{4}$ $\quad \frac{1}{4n}$ $\quad a$ $\quad 1$ $\quad \frac{7}{3}$ $\quad 16x^2 - 24x + 9$ $\quad 10$ $\quad 2n+1$ $\quad \frac{3}{2}$ $\quad 3^{20}$

$9x^2 + 6x + 1$ $\quad \frac{1}{2}$ $\quad \frac{105}{16}$ $\quad 31$ $\quad \frac{15}{8}$ $\quad 4a + 3$ $\quad 4n^2 - 2n$ $\quad 8$ $\quad \frac{13}{36}$

$8a + 7$ $\quad 0$ $\quad 4n^2 + 2n$ $\quad 2n - 3$ $\quad 4n - 1$ $\quad a^3$ $\quad 3$ $\quad 7$ $\quad 22$ $\quad 13$

$\frac{11}{4}$ $\quad 15$ $\quad 2$ $\quad 4$ $\quad 120$ $\quad 0$ $\quad \frac{1}{2n+2}$ $\quad \frac{5x}{6}$ $\quad 1$ $\quad 24$ $\quad 16a + 15$

$63$ $\quad 6$ $\quad 3$ $\quad 2n$ $\quad 2$ $\quad \frac{-1}{2n+1}$ $\quad -1$ $\quad n^2 + n$ $\quad \frac{1}{2n}$ $\quad \frac{3x+2}{5}$ $\quad a^6$

$-3^2$ $\quad -6^4$ $\quad 1$ $\quad 27$ $\quad -1$ $\quad 729$ $\quad -1$ $\quad 6$ $\quad \frac{4x+5}{6}$ $\quad 1$ $\quad 2a + 1$

► Réponses et corrigés page 213

# Suites arithmétiques

## Quelques calculs généraux pour commencer

**Calcul 14.1 — Des fractions.**

Écrire sous forme de fraction irréductible les nombres suivants.

a) $\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{2}$ ..... b) $\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{5}$ ..... c) $2+\dfrac{2}{7}$ ...... d) $2-\dfrac{2}{7}$ ......

**Calcul 14.2 — Des petites équations.**

Résoudre les équations suivantes, en donnant la valeur de leur unique solution.

a) $\dfrac{2}{3}x=6$ ............. b) $\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{5}x=4$ ......... c) $\dfrac{1}{3}-\dfrac{2x}{5}=-\dfrac{1}{5}+\dfrac{x}{3}$ ..

**Calcul 14.3**

Résoudre les équations suivantes, en donnant l'ensemble de leurs solutions.

a) $\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2=2$ ...........

b) $\left(2x-\dfrac{1}{2}\right)^2=4$ .........

c) $x^2-6x+9=0$ ..........

d) $(x-1)^2=(x+2)^2$ .......

## Premières suites

**Calcul 14.4**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de raison 4 et de premier terme $u_0=6$.

a) $u_1=$ ........................................................................................

b) $u_2=$ ........................................................................................

c) $u_3=$ ........................................................................................

d) $u_{100}=$ ......................................................................................

**Calcul 14.5**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_1 = -5$.

a) $u_2 = $ ..........................

b) $u_3 = $ ..........................

c) $u_4 = $ ..........................

d) $u_{100} = $ ..........................

**Calcul 14.6**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite arithmétique de raison $-2$ et de premier terme $u_1 = \dfrac{10}{3}$.

a) $u_2 = $ ..........................

b) $u_3 = $ ..........................

c) $u_4 = $ ..........................

d) $u_{10} = $ ..........................

**Calcul 14.7**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de raison 3 telle que $u_5 = 8$.

a) $u_1 = $ ..........................

b) $u_{20} = $ ..........................

c) $u_{101} = $ ..........................

d) $u_{201} = $ ..........................

# Secondes suites

**Calcul 14.8**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de raison $r$ telle que $u_3 = 23$ et $u_8 = 7$.

a) $r = $ ..........................

b) $u_5 = $ ..........................

c) $u_{10} = $ ..........................

d) $u_0 = $ ..........................

**Calcul 14.9**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de raison $r$ telle que $u_7 = \dfrac{4}{3}$ et $u_{13} = \dfrac{17}{9}$.

a) $r = $ ..........................................................................

b) $u_0 = $ ..........................................................................

### Calcul 14.10

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de raison $a$ telle que $u_0 = a$.

Exprimer en fonction de $a$ et de $n$ :

a) $u_{10} =$ ........................ $\boxed{\phantom{xxx}}$ b) $u_n =$ ........................ $\boxed{\phantom{xxx}}$

### Calcul 14.11

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite arithmétique de raison $r$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$u_n = \frac{a^2 + (n-1)}{a}.$$

a) $r =$ ........................ $\boxed{\phantom{xxx}}$ b) $u_1 =$ ........................ $\boxed{\phantom{xxx}}$

### Calcul 14.12

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie, pout tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \dfrac{3+5an}{2}$.

Déterminer la valeur de $a$ pour que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit arithmétique de raison 2 ......... $\boxed{\phantom{xxx}}$

### Calcul 14.13

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel $n$, par :

$$u_{n+1} = \sqrt{3 + u_n^2}.$$

On admet que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a tous ses termes positifs.

Puis, pour tout entier naturel $n$, on pose $v_n = u_n^2$. On admet que la suite $(v_n)_n$ est arithmétique.

a) Déterminer la raison de la suite $(v_n)_n$ .................................. $\boxed{\phantom{xxx}}$

b) Exprimer $v_n$ en fonction de $n$ .......................................... $\boxed{\phantom{xxx}}$

## Calculs plus difficiles

**Calcul 14.14**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 1}{u_n + 3} \end{cases}$ et soit $(v_n)_n$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$. On admet que la suite $(v_n)_n$ est arithmétique.

a) Déterminer la raison de la suite arithmétique $(v_n)_n$ ............................

b) Exprimer $v_n$ en fonction de $n$ ...................................................

**Calcul 14.15**

On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'unique suite arithmétique de raison non nulle telle que $u_4 = 1$ et $\dfrac{1}{u_1 u_2} + \dfrac{1}{u_2 u_3} = 2$.

a) Déterminer la raison de la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ..........................

b) Exprimer $u_n$ en fonction de $n$ ...................................................

**Réponses mélangées**

$-\dfrac{55}{6}$ $\quad \dfrac{163}{5}$ $\quad 296$ $\quad -\dfrac{2}{3}$ $\quad 1$ $\quad \dfrac{12}{7}$ $\quad \left\{\dfrac{1}{3} - \sqrt{2}, \dfrac{1}{3} + \sqrt{2}\right\}$ $\quad \dfrac{4n - 13}{3}$ $\quad -\dfrac{8}{3}$

$10$ $\quad -\dfrac{16}{5}$ $\quad -2$ $\quad \dfrac{83}{5}$ $\quad \dfrac{5}{54}$ $\quad 406$ $\quad 9$ $\quad \dfrac{4}{3}$ $\quad \left\{-\dfrac{3}{4}, \dfrac{5}{4}\right\}$ $\quad 53$ $\quad \dfrac{1}{a}$

$\dfrac{4+n}{4}$ $\quad (n+1)a$ $\quad \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$ $\quad \dfrac{37}{54}$ $\quad \dfrac{4}{3}$ $\quad \dfrac{8}{11}$ $\quad \{3\}$ $\quad \dfrac{3}{5}$ $\quad \dfrac{7}{6}$ $\quad 1 + 3n$ $\quad 596$

$11a$ $\quad \dfrac{16}{7}$ $\quad -\dfrac{44}{3}$ $\quad \dfrac{4}{5}$ $\quad a$ $\quad -4$ $\quad 4$ $\quad \dfrac{1}{4}$ $\quad 3$ $\quad 292$ $\quad 14$ $\quad 18$ $\quad -\dfrac{1}{15}$

► Réponses et corrigés page 215

# Suites géométriques

## Quelques calculs généraux pour commencer

**Calcul 15.1 — Des développements.**

Développer les expressions suivantes.

a) $(2x-3)^2$

b) $(7-8x)(8x+7)$

c) $-3(-x+2)(6-5x)$

d) $5\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$

**Calcul 15.2 — Des factorisations.**

Factoriser les expressions suivantes.

a) $4x^2-49$

b) $(5-3x)^2-16$

c) $-\dfrac{3}{2}x^2-6x$

d) $\dfrac{4}{9}x^2-\dfrac{25}{4}$

e) $121x^2-110x+25$

f) $(3x-7)(x+5)-(3x-7)(-4x+3)$

**Calcul 15.3 — Images.**

On considère la fonction $f$ définie par $f(x)=\dfrac{x}{2}-\dfrac{3}{5}$ pour tout réel $x$.

Calculer les images de :

a) $\dfrac{3}{4}$

b) $\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$

**Calcul 15.4 — Antécédents.**

On considère la fonction $f$ définie par $f(x)=-\dfrac{1}{4}x+5$ pour tout réel $x$.

Déterminer les antécédents de :

a) $0$

b) $-\dfrac{3}{2}$

## Calcul de termes

### Calcul 15.5

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 3$.

a) Calculer $u_4$ ....................................................................

b) Calculer $u_6$ ....................................................................

### Calcul 15.6

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \sqrt{3}$ et de premier terme $u_0 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

a) Exprimer $u_n$ en fonction de $n$ ....................................................

b) Calculer $u_{123}$ ....................................................................

### Calcul 15.7

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique de raison $q = \dfrac{3}{2}$ telle que $u_6 = 16$.

a) Donner l'expression de $u_n$ en fonction de $n$ ......................................

b) Combien vaut $u_{10}$ ?

*On donnera le résultat sous la forme d'une fraction de puissances.*

....................................................................................

## Calcul de raisons et de termes

### Calcul 15.8

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique de raison $q$ telle que $u_3 = \sqrt{2}$ et $u_6 = 27\sqrt{2}$.

a) Déterminer la valeur de la raison de la suite ......................................

b) Calculer $u_0$ ....................................................................

### Calcul 15.9

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q$ et de premier terme $u_0$ telle que $u_2 = \dfrac{3}{4}$ et $u_4 = 12$.

a) Déterminer les deux valeurs possibles de la raison $q$ ..........

b) Calculer $u_0$ ..........

### Calcul 15.10

Soit $a$ un nombre réel.

On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_{41} = a$, $u_{42} = a - 2$ et $u_{43} = a + 1$.

a) Déterminer la valeur de $a$ pour que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit géométrique ..........

b) Calculer dans ce cas $u_0$ ..........

### Calcul 15.11

Soit $q \in \mathbb{R}$. On considère la suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison $q$ telle que $u_6 = -5$ et $u_9 = 10\sqrt{2}$.

a) Déterminer $q$ ..........

b) Calculer $u_0$ ..........

c) Exprimer $u_{2n}$ en fonction de $n$ ..........

d) Exprimer $u_{3n}$ en fonction de $n$ ..........

### Calcul 15.12

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_1 = 5$ et $u_{n+1} = 3u_n + \dfrac{4}{3}$.

Soit $x$ un nombre réel. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = u_n + x$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la valeur de $x$ pour qu'on ait $v_{n+1} = 3v_n$ ..........

b) Donner alors l'expression de $v_n$ en fonction de $n$ ..........

c) Exprimer enfin $u_n$ en fonction de $n$ ..........

## Calculs plus difficiles

**Calcul 15.13**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q$ telle que $u_1 = \dfrac{1}{2}$.

a) Exprimer $u_1 - 8u_2 - 4u_3$ en fonction de la raison $q$ ....................................

b) Déterminer la raison $q$ pour que l'expression $u_1 - 8u_2 - 4u_3$ soit maximale ............

c) Avec la raison trouvée à la question précédente, calculer $u_8$ ..........................

**Calcul 15.14**

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = a$.

a) Combien vaut $2^{10}$ ? ........................................................

b) Déterminer la valeur de $a$ telle que $u_0 + u_1 + \cdots + u_9 = 341$ .....................

**Réponses mélangées**

$\dfrac{4}{5}$ $\quad$ $\dfrac{1}{2} - 4q - 2q^2$ $\quad$ $1024$ $\quad$ $5x^2 - 5x + 2$ $\quad$ $-3x\left(\dfrac{x}{2} + 2\right)$ $\quad$ $(3x-7)(5x+2)$

$3(1-3x)(3-x)$ $\quad$ $(2x-7)(2x+7)$ $\quad$ $\dfrac{1}{3}$ $\quad$ $20$ $\quad$ $\dfrac{\sqrt{2}}{27}$ $\quad$ $-\dfrac{5}{8}$ $\quad$ $q = -1$ $\quad$ $192$ $\quad$ $3$

$3^4$ $\quad$ $\dfrac{2}{3}$ $\quad$ $16 \times \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-6}$ $\quad$ $\left(\dfrac{2x}{3} - \dfrac{5}{2}\right)\left(\dfrac{2x}{3} + \dfrac{5}{2}\right)$ $\quad$ $-\sqrt{3}^{n-1}$ $\quad$ $49 - 64x^2$ $\quad$ $(11x-5)^2$ $\quad$ $48$

$-3^{61}$ $\quad$ $-\dfrac{9}{40}$ $\quad$ $17 \times 3^{n-2}$ $\quad$ $-\dfrac{4}{5} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^{41}$ $\quad$ $4$ ou $-4$ $\quad$ $26$ $\quad$ $4x^2 - 12x + 9$ $\quad$ $-5 \times 2^{n-3}$

$\dfrac{3}{64}$ $\quad$ $(-1)^{n+1} \times 5 \times 2^{n-3} \times \sqrt{2}^n$ $\quad$ $-15x^2 + 48x - 36$ $\quad$ $-\dfrac{1}{2}$ $\quad$ $\dfrac{\sqrt{2} - 3}{5}$ $\quad$ $-\sqrt{2}$ $\quad$ $17 \times 3^{n-2} - \dfrac{2}{3}$

► Réponses et corrigés page 218

# Calcul de sommes I

**Prérequis**
Dans cette fiche, on utilisera la notation suivante : si $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}$, on note
$$\sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

## Quelques calculs généraux pour commencer

**Calcul 16.1 — Quelques simplifications.**

Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}$, les nombres suivants.

a) $\sqrt{45} - 7\sqrt{5}$ ……

b) $3\sqrt{98} - 5\sqrt{2}$ ……

c) $5 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$ ……

**Calcul 16.2 — Avec la quantité conjuguée.**

Écrire sans radical au dénominateur les nombres suivants.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ……

b) $\dfrac{2-\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$ ……

c) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ ……

d) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{3-\sqrt{2}}$ ……

**Calcul 16.3 — Quelques fractions.**

Soit $m \in \mathbb{R}$ un nombre réel différent de $-1$, $1$, $0$, et $2$.

Effectuer les calculs suivants.

a) $\dfrac{m-1}{m} - \dfrac{1}{m+1}$ ……

b) $\dfrac{m-3}{2m-4} + \dfrac{3}{2m}$ ……

c) $\dfrac{4m}{m^2-1} - \dfrac{m+2}{m(m+1)}$ ……

# Premières sommes

**Rappel**

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on a $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

**Calcul 16.4 — Sommes d'entiers consécutifs.**

Calculer les sommes suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k$ ..........................

b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} k$ ..........................

c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} k$ ..........................

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k-1)$ ......................

e) $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} k$ ..........................

# Secondes sommes

**Rappel**

- La somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique vaut
$$\frac{\text{nombre de termes} \times (\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2}.$$
- La somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q$ (où $q \neq 1$) vaut
$$\text{premier terme} \times \frac{(1 - q^{\text{nombre de termes}})}{1-q}.$$

**Calcul 16.5**

Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de premier terme $u_0$ et de raison $r$.

Dans chacun des cas suivants, calculer :

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{15} u_k$, si $u_0 = 2$ et $r = 4$ ..........................................................

b) $\displaystyle\sum_{k=5}^{18} u_k$, si $u_0 = -1$ et $r = -3$ ......................................................

**Calcul 16.6**

Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique de premier terme $u_0$ et de raison $q$.

Dans chacun des cas suivants, calculer :

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{8} u_k$, si $u_0 = 2$ et $q = 4$ ....... 

b) $\displaystyle\sum_{k=5}^{12} u_k$, si $u_0 = -1$ et $q = -3$ ....

**Calcul 16.7 — Utilisation du symbole de somme (I).**

Écrire à l'aide du symbole $\sum$ les expressions suivantes.

a) $\dfrac{2}{3^2} + \dfrac{2^2}{3^3} + \dfrac{2^3}{3^4} + \cdots + \dfrac{2^{10}}{3^{11}}$ ....................................................

b) $\dfrac{2}{3^2} + \dfrac{1}{3^3} + \dfrac{1}{2 \times 3^4} + \cdots + \dfrac{1}{2^8 \times 3^{11}}$ ....................................................

c) $-1 + 2 - 2^2 + 2^3 - 2^4 + \cdots + 2^{35}$ ....................................................

d) $1 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + \cdots + 2^{2n}$ ....................................................

**Calcul 16.8**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer :

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1$ .......................

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k$ .......................

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} 2^k$ .......................

d) $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} 2^k$ .......................

e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3^k$ .......................

f) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k$ ...................

**Calcul 16.9 — Utilisation du symbole de somme (II).**

Écrire à l'aide du symbole $\sum$ les expressions suivantes.

a) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$ ..........................................

b) $1 - 2 + 4 + \cdots + (-2)^n$, où $n \in \mathbb{N}$ ..........................................

c) $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots - \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{2n+1}$, où $n \in \mathbb{N}$ ..................................

d) $\dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{15} + \dfrac{8}{75} + \cdots + \dfrac{2^{n+1}}{3 \times 5^n}$, où $n \in \mathbb{N}$ ..........................................

**Calcul 16.10**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer :

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3+2^k)$ ....................

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2+5\times 3^k)$ ................

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2^k+3^k)$ ...................

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+3^k)$ ...................

e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(1-4^k+5k)$ ...............

**Calcul 16.11**

Calculer la somme de tous les entiers impairs compris entre 1 et 2 000 ....................

# Calculs plus difficiles

**Calcul 16.12 — Une nouvelle somme.**

Pour tout entier naturel $n$ non nul, on note

$$\mathsf{S}_1(n)=\sum_{k=1}^{n}k \quad \text{et} \quad \mathsf{S}_2(n)=\sum_{k=1}^{n}k^2.$$

a) Développer $(k+1)^3$ ........................................................

b) Exprimer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3-\sum_{k=1}^{n}k^3$ en fonction de $\mathsf{S}_1(n)$, $\mathsf{S}_2(n)$ et $n$ .................

c) Remarquer que, dans la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3-\sum_{k=1}^{n}k^3$, la majorité des termes se simplifient.

En déduire une expression très simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3-\sum_{k=1}^{n}k^3$ ......................

d) Exprimer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2$ en fonction de $n$ ..........................................

**Calcul 16.13 — Même raisonnement.**

Soit $n \in \mathbb{N}$.

À partir du développement de $(k+1)^4$ et en raisonnant de la même manière que dans l'exercice précédent, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$ ..........

**Calcul 16.14**

Soit $(u_n)_n$ la suite définie, pour tout entier naturel $n$, par $u_n = n \times 2^n$.

a) Calculer $u_{k+1} - u_k$, où $k \in \mathbb{N}$ ..........

b) En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k+2)2^k$ ..........

**Réponses mélangées**

$\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $\quad 512 \quad$ $\dfrac{3m^2-m+2}{m(m+1)(m-1)}$ $\quad -398\ 520 \quad 174\ 762 \quad 2\sqrt{6}$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{9} \frac{2^{1-k}}{3^{k+2}}$ $\quad 1\ 000\ 000 \quad 0 \quad$ $\dfrac{m^2-6}{2m(m-2)}$ $\quad \dfrac{7-2\sqrt{10}}{3} \quad 16\sqrt{2} \quad k^3+3k^2+3k+1$

$-497 \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{35}\left(-(-2)^k\right) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (n+1)^3-1 \quad 2n+2+\frac{5}{2}\left(3^{n+1}-1\right) \quad \frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{3}$

$\dfrac{n(n-1)}{2} \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^{k+1}}{k} \quad 2^{n+1}(n+1) \quad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k} \quad \frac{n^2+n-2}{2} \quad \frac{n(n+3)}{2}$

$n+1+\dfrac{1-4^{n+1}}{3}+\dfrac{5n(n+1)}{2} \quad 2^n(2^{n+1}-1) \quad n(n+1)+\dfrac{3}{2}(3^n-1) \quad \dfrac{3^{n+1}-1}{2}$

$\dfrac{3n(n+1)}{2} \quad \dfrac{(n+1)(n+2)}{2} \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{2k} \quad 3n+2(2^n-1) \quad \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{k+1}}{3\times 5^k} \quad n \quad \frac{m^2-m-1}{m(m+1)} \quad 2(2^n-1)+\frac{3}{2}(3^n-1) \quad 3\,\mathsf{S}_2(n)+3\,\mathsf{S}_1(n)+n$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-2)^k \quad 2^{2n+1}-1 \quad -4\sqrt{5} \quad 2^k(k+2) \quad \sum_{k=1}^{10}\frac{2^k}{3^{k+1}} \quad \frac{2\sqrt{2}-1}{7} \quad 2^{n+1}-2$

► Réponses et corrigés page 221

# Calcul de sommes II

**Prérequis**

Dans cette fiche, on utilisera la notation suivante : si $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}$, on note

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

- Pour une suite arithmétique $(u_n)_n$, on a
$$\sum_{n=n_0}^{n_1} u_n = (n_1 - n_0 + 1) \times \frac{(u_{n_0} + u_{n_1})}{2}.$$
- Pour $q \neq 1$, on a $$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

## Quelques calculs généraux pour commencer

### Calcul 17.1

Développer, réduire et ordonner par puissances croissantes de $x$ les expressions suivantes.

a) $(x+1)(x-2)$ ..................

b) $(2-x)\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{5}{2}x\right)$ ..............

c) $2(x-5)\left(\dfrac{3}{2} - x\right)$ ...............

### Calcul 17.2 — Quelques fractions.

Soit $x$ un réel distinct de 1. Écrire les expressions suivantes sous forme d'une seule fraction simplifiée.

a) $x + 1 - \dfrac{1}{1-x}$ ..................

b) $x - 4 - \dfrac{(x-5)(2+x)}{x-1}$ .........

## Sommes et écritures littérales

### Calcul 17.3

On considère deux réels $a$ et $b$.

a) Combien y a-t-il de termes dans la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} a^k b^{4-k}$ ? ......

b) Écrire $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} a^k b^{4-k}$ sous sa forme développée ..................

c) Calculer $(a-b)\displaystyle\sum_{k=0}^{4} a^k b^{4-k}$ ..................................

### Calcul 17.4

On considère deux réels $a$ et $b$.

a) Combien y a-t-il de termes dans la somme $\sum_{k=0}^{6} (-1)^k a^{6-k} b^k$ ? ....

b) Écrire $\sum_{k=0}^{6} (-1)^k a^{6-k} b^k$ sous sa forme développée ................

c) Calculer $(a+b) \sum_{k=0}^{6} (-1)^k a^{6-k} b^k$ ..............................

### Calcul 17.5

On considère un réel $a$.

a) Combien y a-t-il de termes dans la somme $\sum_{k=0}^{6} a^k (-1)^{6-k}$ ? ......

b) Écrire $\sum_{k=0}^{6} a^k (-1)^{6-k}$ sous sa forme développée ..................

c) Calculer $(a+1) \sum_{k=0}^{6} a^k (-1)^{6-k}$ .................................

### Calcul 17.6 — Une formule phare.

Calculer, en fonction de $b$ et $n$, $(1-b) \sum_{k=0}^{n} b^k$ ..........................................

## Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

### Calcul 17.7

On considère une suite $(u_n)_n$, qui est arithmétique, de premier terme $u_0 = 1$ et dont la raison vaut $r = 2$.

Calculer :

a) $\sum_{n=1}^{10} u_n$ ..............................................................

b) $\sum_{n=5}^{15} u_n$ ..............................................................

c) Calculer $\sum_{n=0}^{N} u_n$ en fonction de $N$ ........................................

**Calcul 17.8**

On considère une suite $(u_n)_n$, qui est arithmétique de premier terme $u_0 = -2$ et dont la raison vaut $r = \dfrac{3}{2}$.

Calculer :

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{5} u_n$ ..........................

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{15} u_n$ ..........................

c) Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{4N} u_n$ en fonction de $N$ ..........................

# Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

**Calcul 17.9 — Un QCM.**

On considère une suite $(u_n)_n$, qui est une suite géométrique de raison $q$ avec $q \neq 1$. On note $S = \displaystyle\sum_{k=5}^{10} u_k$.

Choisissez la bonne réponse :

(a) $S = u_5 \dfrac{1-q^{11}}{1-q}$ (b) $S = u_6 \dfrac{1-q^{6}}{1-q}$ (c) $S = u_5 \dfrac{1-q^{6}}{1-q}$ (d) $S = \dfrac{1-q^{11}}{1-q}$

..........................................................................................

**Calcul 17.10 — Des sommes de termes d'une suite géométrique.**

On considère une suite $(u_n)_n$, géométrique de premier terme $u_0$ et dont la raison vaut $q$.

Dans chacun des cas suivants, exprimer $S$ en fonction de $n$.

a) $u_0 = \dfrac{1}{3}$, $q = -2$, $S = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} u_k$ .....

b) $u_0 = 1$, $q = \sqrt{2}$, $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} u_k$ ....

c) $u_0 = 3$, $q = \dfrac{3}{2}$, $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} u_k$ ......

d) $u_0 = 1$, $q = 2^p$, $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ ......

**Calcul 17.11 — Des calculs de sommes.**

Calculer les sommes suivantes en fonction de $n$.

a) $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{3^{k+1}}$ ...................

b) $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{3n} \frac{3^{2k}}{2^k}$ ....................

c) $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (3^k - 2^{k+1})$ ............

d) $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2}{3^k} + \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k-1}}{3^k}$ .........

# Cas des suites arithmético-géométriques

**Calcul 17.12 — Une somme arithmético-géométrique (I).**

On considère $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n + 1,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

*Les différentes questions de ce calcul sont liées.*

a) Déterminer le réel $\alpha$ tel que $\alpha = \dfrac{4}{5}\alpha + 1$ ..............................................

On admet que la suite $(v_n)_n$ définie par $v_n = u_n - \alpha$ est géométrique de raison $\dfrac{4}{5}$.

b) Déterminer l'expression générale de $v_n$ puis celle de $u_n$ en fonction de $n$ ..............

c) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$ ..............................................................

d) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ ..............................................................

**Calcul 17.13 — Une somme arithmético-géométrique (II).**

On considère $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = -1$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = 2u_n - 4,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Déterminer $\lambda$ tel que $(u_n - \lambda)_n$ soit une suite géométrique ............................

b) Donner l'expression de $u_n$ en fonction de $n$ ..........................................

c) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ ..............................................................

## Calculs plus difficiles

**Calcul 17.14 — Une somme pour calculer le terme général d'une suite (I).**

Soit $(u_n)_n$ une suite vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathsf{S}(n) = \sum_{k=0}^{n} u_k = 3n(n+2)$.

a) En considérant $\mathsf{S}(0)$, calculer $u_0$ ...

b) En considérant $\mathsf{S}(1)$, calculer $u_1$ ...

c) Soient $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $n < p$. Exprimer $\mathsf{S}(p) - \mathsf{S}(n)$ à l'aide d'une seule somme .

d) Calculer l'expression générale de $u_n$ en fonction de $n$ lorsque $n \in \mathbb{N}^*$ ............

**Calcul 17.15 — Une somme pour calculer le terme général d'une suite (II).**

Soit une suite $(u_n)_n$ définie pour $n \geqslant 2$ et vérifiant $\mathsf{S}(n) = \sum_{k=2}^{n} u_k = \dfrac{n-1}{n}$.

a) Calculer $u_4 + u_5 + u_6$ ............................................................

b) Calculer $\sum_{k=p}^{p^2} u_k$ en fonction de $p$, avec $p \geqslant 3$ ........................................

c) Donner l'expression générale de $u_n$ en fonction de $n$ .................................

**Calcul 17.16 — Une fonction pour calculer une somme.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on pose

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k \quad \text{et} \quad \mathsf{S}(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^k.$$

a) Calculer l'expression de $f(x)$ sans symbole $\sum$ en fonction de $x$ et de $n$ ........

b) On admet que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Exprimer $f'(x)$ à l'aide d'une somme .

c) À l'aide du calcul fait en a), donner une autre expression de $f'(x)$ ..............

d) En déduire une expression de $\mathsf{S}(x)$ en fonction de $x$ et $n$ ........................

**Calcul 17.17 — Une série alternée.**

On considère la suite $(u_n)_n$ définie pour $n \geqslant 1$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$, et les deux suites $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ définies par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

a) Calculer $u_3$ ..................... $\boxed{\phantom{xx}}$

b) Calculer $v_{n+1} - v_n$ ............ $\boxed{\phantom{xx}}$

c) Calculer $w_{n+1} - w_n$ ........... $\boxed{\phantom{xx}}$

d) Calculer $w_n - v_n$ .............. $\boxed{\phantom{xx}}$

e) La suite $(v_n)_n$ est-elle croissante ?

(a) oui (b) non

.................................................................................... $\boxed{\phantom{xx}}$

f) La suite $(w_n)_n$ est-elle croissante ?

(a) oui (b) non

.................................................................................... $\boxed{\phantom{xx}}$

**Réponses mélangées**

$1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ $\frac{-1}{2n+1}$ $7$ $5$ $-2-x+x^2$ $\frac{14-2x}{x-1}$ $f'(x)=\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$

$\frac{3}{2}+\frac{3^{n+1}}{2}-2^{n+2}$ $\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ $12N^2-5N-2$ $5n-15+20\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$ $5-4\times\left(\frac{4}{5}\right)^n$

$\frac{25}{2}$ $4-5\times 2^n$ $\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$ $\sum_{k=n+1}^{p} u_k$ $\frac{1-2^{n+1}}{1-\sqrt{2}}$ $4$ $\frac{2}{3}+\frac{14}{3}x-\frac{5}{2}x^2$

$b^4+ab^3+a^2b^2+a^3b+a^4$ $\frac{9}{2}-\frac{1+2^n}{3^n}$ $a^7+b^7$ $\frac{2^p(1-2^{np})}{1-2^p}$ $-15+13x-2x^2$

$231$ $4n+9-5\times 2^{n+1}$ $\frac{1}{n(n-1)}$ $\frac{9}{7}\left(\left(\frac{9}{2}\right)^{3n}-1\right)$ $\mathsf{S}(x)=\frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(x-1)^2}$

$a^6-a^5+a^4-a^3+a^2-a+1$ (a) $7$ $148$ $120$ $\frac{x^2}{x-1}$ $u_3=-\frac{5}{6}$ $\frac{1}{6}$

$u_0=0$ $a^6-a^5b+a^4b^2-a^3b^3+a^2b^4-ab^5+b^6$ $\frac{-1}{(2n+2)(2n+1)}$ $9\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{2n}-1\right)$

$a^7+1$ $u_1=9$ $1-b^{n+1}$ $\frac{p^2-p+1}{p^2(p-1)}$ (b) $f'(x)=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$

$6n+3$ (c) $20\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}-20$ $\frac{4}{9}-\frac{1}{9}(-2)^{n+1}$ $(N+1)^2$ $a^5-b^5$ $5$

► Réponses et corrigés page 224

# Calcul de produits

**Prérequis**

Si $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, on note

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n.$$

Notez bien que l'indice $k$ qui intervient dans l'expression précédente pourrait porter un autre nom. Ainsi, on a $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{i=1}^{n} a_i$.

## Quelques calculs généraux pour commencer

**Calcul 18.1 — Trois calculs.**

Calculer :

a) $(-2)^5 - 1$ ....

b) $\dfrac{1}{5} - 1$ ........

c) $\sqrt{(-3)^4 \times 4^{-3}}$

**Calcul 18.2 — Des carrés.**

Soient $a$, $b$ et $c$ des nombres réels. Développer :

a) $(a+b)^2$ ....

b) $(a-b)^3$ ....

c) $(a+b-c)^2$

## Premières manipulations

**Calcul 18.3 — Écritures (I).**

Écrire les expressions suivantes à l'aide du symbole « $\prod$ ».

a) $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 99$ ........................................................

b) $3^3 \times 4^4 \times 5^5 \times \cdots \times 50^{50}$ ........................................................

c) $3^5 \times 4^6 \times 5^7 \times \cdots \times 15^{17}$ ........................................................

d) $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ ..............................................

### Calcul 18.4 — Écritures (II).

Écrire les expressions suivantes à l'aide du symbole « $\prod$ ».

a) $2x_1 \times 5x_2 \times 10x_3 \times \cdots \times \left(9n^2+1\right)x_{3n}$ ....................

b) $(x_1+x_2) \times (x_2+x_3) \times (x_3+x_4) \times \cdots \times (x_{n-1}+x_n)$ ....................

c) $(x_1+y_1) \times (x_2+y_2) \times (x_3+y_3) \times \cdots \times (x_n+y_n)$ ....................

d) $(x_0+y_n) \times (x_1+y_{n-1}) \times (x_2+y_{n-2}) \times \cdots \times (x_{n-1}+y_1) \times (x_n+y_0)$ ....

### Calcul 18.5 — Un mélange de produits et de sommes.

Écrire les expressions suivantes à l'aide des symboles « $\prod$ » et « $\sum$ ».

a) $x_1 + x_1x_2 + x_1x_2x_3 + \cdots + (x_1x_2x_3\cdots x_n)$ ....................

b) $x_1 \times (x_1+x_2) \times (x_1+x_2+x_3) \times \cdots \times (x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n)$ .........

### Calcul 18.6

Déterminer la valeur de chacune des expressions suivantes.

a) $\displaystyle\prod_{k=1}^{5} k$ ....................

b) $\displaystyle\prod_{k=0}^{3} (2k+1)$ ....................

c) $\displaystyle\prod_{k=1}^{8} (k-3)^2$ ....................

d) $\displaystyle\prod_{k=1}^{10} \frac{k}{k+1}$ ....................

### Calcul 18.7 — Un produit constant.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Que vaut $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} 2$ ?

(a) $2n$ (c) $2(n-1)$ (e) $2^{n+1}$

(b) $2(n+1)$ (d) $2^n$ (f) $2^{n-1}$

....................

### Calcul 18.8

Soit $n \in \mathbb{N}$. Que vaut $\prod_{k=0}^{4n} 2$ ? Il y a deux réponses possibles.

(a) $8n$ (c) $2^{4(n+1)}$ (e) $4^{2(n+1)}$

(b) $2^4 \times 2^n$ (d) $2 \times 2^{4n}$ (f) $2^{4n+1}$

..........

## Télescopage

### Calcul 18.9 — Principe du télescopage (I).

On considère des réels non nuls $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, on pose $b_k = \prod_{i=1}^{k} \frac{a_{i+1}}{a_i}$.

a) Que vaut $b_1$ ? ..........

b) Que vaut $b_2$ ? ..........

c) Que vaut $b_3$ ? ..........

d) Que vaut $b_{n-1}$ ? ..........

### Calcul 18.10 — Principe du télescopage (II).

On considère deux entiers naturels $n$ et $p$ tels que $2 \leqslant p \leqslant n$. On considère également des réels non nuls $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

À laquelle des expressions suivantes est égal $\prod_{k=p}^{n} \frac{a_{k-1}}{a_k}$ ?

(a) $\frac{a_1}{a_n}$ (c) $\frac{a_2}{a_n}$ (e) $\frac{a_{p-1}}{a_n}$ (g) $\frac{a_{n-1}}{a_p}$

(b) $\frac{a_n}{a_1}$ (d) $\frac{a_n}{a_2}$ (f) $\frac{a_n}{a_{p-1}}$ (h) $\frac{a_p}{a_{n-1}}$

..........

### Calcul 18.11 — Des télescopages en situation.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les produits suivants.

*On utilisera le principe du télescopage.*

a) $\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}$ ..........

b) $\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{2k-1}$ ..........

c) $\prod_{k=2}^{n} \frac{k^2-1}{k^2}$ ..........

d) $\prod_{k=1}^{n} \frac{k^2+k-1}{k^2+3k+1}$ ..........

## Calculs plus difficiles

**Calcul 18.12**

Soit $n \geqslant 3$. Calculer les expressions suivantes.

a) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k-1}$ ................

b) $\displaystyle\prod_{k=3}^{n} \frac{k-2}{k+2}$ ................

**Calcul 18.13**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la valeur de chacune des expressions suivantes.

a) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 3^{k}$ ....................

b) $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} 3^{a^k}$ (où $a \neq 1$) ........

**Calcul 18.14 — Factorielle.**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle *factorielle de* $n$, l'entier noté $n!$ et défini par $n! = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} k$.

a) Donner une relation simple entre $(n+1)!$ et $n!$ ..............................

b) Donner une expression simple du produit $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$ ne faisant intervenir que des puissances de 2 et des factorielles ..................................................

### Réponses mélangées

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-33$ | $\displaystyle\prod_{k=3}^{50} k^k$ | $3^{\frac{1-a^n}{1-a}}$ | e | e | $\dfrac{n+1}{2n}$ | $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(x_k+y_k)$ | $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ |
| $3^{\frac{n(n+1)}{2}}$ | $\dfrac{n(n+1)}{2}$ | $105$ | $(n+1)! = (n+1)\times n!$ | $\displaystyle\prod_{k=1}^{8} 2$ | $a^2+2ab+b^2$ | $0$ | |
| $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(x_k+y_{n-k})$ | $120$ | $\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$ | $\displaystyle\prod_{k=3}^{15} k^{k+2}$ | $\dfrac{a_3}{a_1}$ | $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(x_k+x_{k+1})$ | d et f | |
| $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} x_i$ | $\displaystyle\prod_{k=1}^{3n}(k^2+1)x_k$ | $a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$ | $\dfrac{1}{n+1}$ | $\dfrac{a_4}{a_1}$ | $2n+1$ | $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\prod_{i=1}^{k} x_i$ | |
| $-\dfrac{4}{5}$ | $\dfrac{1}{11}$ | $\dfrac{1}{n^2+3n+1}$ | $\dfrac{24}{(n-1)n(n+1)(n+2)}$ | $\dfrac{a_n}{a_1}$ | $\dfrac{a_2}{a_1}$ | $\dfrac{9}{8}$ | $\displaystyle\prod_{k=1}^{99} k$ |

► Réponses et corrigés page 230

# Probabilités

## Quelques calculs généraux pour commencer

**Calcul 19.1**

Calculer :

a) $0{,}3 \times 0{,}04$ ……

b) $1 - (0{,}07 + 0{,}2)$ ……

c) $\dfrac{21}{40} \times \dfrac{35}{9}$ ……

**Calcul 19.2**

Calculer :

a) $0{,}3 \times 0{,}6 + 0{,}7 \times 0{,}1$ ……

b) $-2 \times \dfrac{1}{6} + 1{,}5 \times \dfrac{1}{3} + 10 \times \dfrac{1}{2}$ ……

**Calcul 19.3**

Soient $p$ et $a$ des nombres réels. Simplifier les expressions :

a) $p \times 0{,}05 + (1-p) \times 0{,}6$ ……

b) $-a(1-a) + (1-a^2)$ ……

## Calculs de probabilités

**Calcul 19.4 — Avec un tableau de probabilités.**

On donne le tableau de probabilités suivant :

| | $A$ | $\overline{A}$ |
|---|---|---|
| $B$ | 0,45 | 0,15 |
| $\overline{B}$ | 0,07 | 0,33 |

Calculer les probabilités suivantes. On donnera les résultats sous forme décimale.

a) $\mathrm{P}(\overline{A})$ ……

b) $\mathrm{P}(B)$ ……

c) $\mathrm{P}(A \cap B)$ ……

d) $\mathrm{P}(A \cup B)$ ……

e) $\mathrm{P}(\overline{A} \cap \overline{B})$ ……

f) $\mathrm{P}(\overline{A} \cap B)$ ……

**Calcul 19.5 — Avec un tableau d'effectifs.**

On donne le tableau d'effectifs suivant :

| | $A$ | $\overline{A}$ | Total |
|---|---|---|---|
| $B$ | 125 | 225 | 350 |
| $\overline{B}$ | 100 | 50 | 150 |
| Total | 225 | 275 | 500 |

Calculer les probabilités suivantes. On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

a) $\mathrm{P}(\overline{A})$ .........

b) $\mathrm{P}(B)$ .........

c) $\mathrm{P}(A \cap B)$ ....

d) $\mathrm{P}(A \cup B)$ ....

e) $\mathrm{P}(\overline{A} \cap \overline{B})$ ....

f) $\mathrm{P}(\overline{A} \cap B)$ ....

**Calcul 19.6**

On considère deux événements $A$ et $B$ tels que $\mathrm{P}(\overline{A}) = 0{,}3$ et $\mathrm{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}15$.

Calculer :

a) $\mathrm{P}(A \cup B)$ ................

b) $\mathrm{P}(A)$ .....................

# Avec des probabilités conditionnelles

**Calcul 19.7 — Avec un tableau dans un cas concret.**

On a interrogé 500 personnes sur leurs loisirs. Les choix proposés étaient le ski et la randonnée. Parmi les personnes interrogées, 125 personnes font du ski, un cinquième des skieurs font aussi de la randonnée et 300 personnes ne font ni ski ni randonnée.

On note $R$ : « la personne fait de la randonnée » et $S$ : « la personne fait du ski ».

Calculer les probabilités suivantes. On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

a) $\mathrm{P}(\overline{R})$ ..........................................................................

b) La probabilité que la personne fasse du ski et de la randonnée. .........................

c) $\mathrm{P}(S \cup R)$ .......................

d) $\mathrm{P}(S)$ ..........................

e) $\mathrm{P}(\overline{S} \cap \overline{R})$ .......................

f) $\mathrm{P}_R(S)$ ..........................

### Calcul 19.8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On donne le tableau d'effectifs suivant :

| | $A$ | $\overline{A}$ |
|---|---|---|
| $B$ | $n^2$ | $2n + 2n^2$ |
| $\overline{B}$ | $n$ | $n + n^2$ |

Calculer les probabilités suivantes.

*On s'efforcera de simplifier le plus possible les résultats.*

a) $\mathrm{P}(\overline{A})$ ..........................

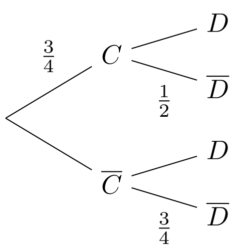
c) $\mathrm{P}_A(B)$ ..........................

b) $\mathrm{P}(A \cup B)$ ......................

d) $\mathrm{P}_B(A)$ ..........................

### Calcul 19.9 — Avec un arbre.

On donne l'arbre pondéré :




Calculer :

a) $\mathrm{P}(\overline{C})$ .........

c) $\mathrm{P}_C(D)$ .......

e) $\mathrm{P}(\overline{D})$ .........

b) $\mathrm{P}(C \cap \overline{D})$ ....

d) $\mathrm{P}(D)$ .........

f) $\mathrm{P}_D(C)$ .......

### Calcul 19.10 — Avec des probabilités conditionnelles (I).

On donne $\mathrm{P}(A) = 0{,}45$ et $\mathrm{P}_A(B) = 0{,}6$.

Calculer :

a) $\mathrm{P}(\overline{A})$ ..........................

b) $\mathrm{P}(A \cap B)$ ......................

### Calcul 19.11 — Avec des probabilités conditionnelles (II).

On donne $\mathrm{P}(A) = 0{,}05$ ainsi que $\mathrm{P}(B) = 0{,}1$ et $\mathrm{P}_A(B) = 0{,}8$.

Calculer :

a) $\mathrm{P}_B(A)$ .......

b) $\mathrm{P}(A \cap B)$ ....

c) $\mathrm{P}(A \cup B)$ ....

**Calcul 19.12 — Avec un arbre dans un cas concret.**

On a interrogé un grand nombre de personnes sur leurs habitudes musicales. 30 % de la population interrogée est composée de mineurs. 20 % des mineurs écoutent de la musique sur support physique alors que 55 % des majeurs écoutent de la musique en streaming.

On note $J$ : « la personne interrogée est mineure » et $S$ : « la personne écoute de la musique en streaming ». On interroge une personne au hasard.

Calculer les probabilités suivantes.

*On donnera les réponses sous forme de fraction irréductible.*

a) La probabilité que la personne soit majeure ....................................

b) $\mathrm{P}_J(S)$ ....................

c) $\mathrm{P}(J \cap S)$. ................

d) La probabilité que la personne interrogée écoute de la musique en streaming .....

e) $\mathrm{P}_S(J)$ ....................................................................

**Calcul 19.13**

On considère $A$ et $B$ deux événements indépendants tels que $\mathrm{P}(A) = 0{,}8$ et $\mathrm{P}(B) = 0{,}2$.

Calculer :

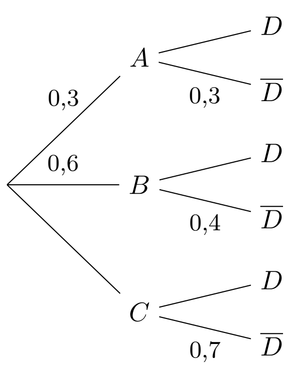
a) $\mathrm{P}(A \cap B)$ ....

b) $\mathrm{P}_A(B)$ .......

c) $\mathrm{P}(A \cup B)$ ....

**Calcul 19.14**

On considère l'arbre pondéré suivant.




Calculer les probabilités suivantes.

*On donnera les résultats sous forme décimale.*

a) $\mathrm{P}(C)$ ....................

b) $\mathrm{P}_A(D)$ ...................

c) $\mathrm{P}(D)$ ....................

d) $\mathrm{P}_D(A)$ ...................

**Calcul 19.15**

On considère $A$ et $B$ deux événements indépendants tels que $\mathrm{P}(A) = 0{,}75$ et $\mathrm{P}(A \cap B) = 0{,}36$.

Calculer :

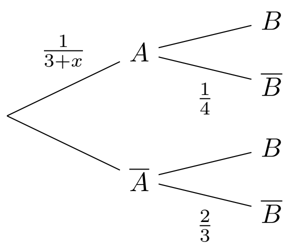
a) $\mathrm{P}(B)$ ..........................

b) $\mathrm{P}(A \cup B)$ ......................

c) $\mathrm{P}(A \cap \overline{B})$ ......................

**Calcul 19.16**

Soit $x > 0$. On considère l'arbre pondéré :




Calculer :

a) $\mathrm{P}(\overline{A})$ ..........................

b) $\mathrm{P}(A \cap B)$ ......................

c) $\mathrm{P}(B)$ ..........................

d) $\mathrm{P}_B(A)$ ........................

# Variables aléatoires

**Calcul 19.17 — Une loi de probabilité incomplète.**

On donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire $X$ :

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X = x_i)$ | 0,1 | 0,15 | 0,2 | 0,01 | | 0,39 |

Calculer :

a) $\mathrm{P}(X = 5)$ ..............................................................

b) $\mathrm{P}(X \leqslant 4)$ ..............................................................

**Calcul 19.18**

On donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire $X$ :

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X = x_i)$ | $1/10$ | $2/10$ | $3/10$ | $4/10$ |

Calculer :

a) $\mathrm{E}(X)$ ....................

b) $\mathrm{V}(X)$ ....................

**Calcul 19.19**

On donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire $X$ :

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X \leqslant x_i)$ | $5/28$ | $1/4$ | $1/2$ | $17/28$ | $23/28$ | 1 |

Calculer, sous forme de fraction irréductible :

a) $\mathrm{P}(X = 3)$ ................

b) $\mathrm{P}(X = 4)$ ................

**Calcul 19.20**

On donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire $X$ :

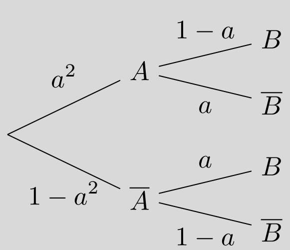
| $x_i$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X = x_i)$ | 0,2 | 0,3 | 0,2 | 0,15 | 0,15 |

Calculer $m$ pour que $\mathrm{E}(X + m) = 0$ ..............................................

## Calculs plus difficiles

**Calcul 19.21 — Avec un arbre.**

Soit $a \in ]0, 1[$. On donne l'arbre pondéré ci-dessous :




Calculer :

a) $\mathrm{P}(B)$ ...........

b) $\mathrm{P}_B(A)$ ..........

**Calcul 19.22 — Une variable aléatoire uniforme.**

On considère une variable aléatoire $X$ qui peut prendre les valeurs $1, 2, \dots, n$ et telle que, pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on ait $\mathrm{P}(X = i) = \frac{1}{n}$. Calculer :

a) $\mathrm{E}(X)$ ....................

b) $\mathrm{V}(X)$ ....................

**Calcul 19.23**

Soit $a$ un réel différent de 1. On considère une variable aléatoire $X$ qui peut prendre les valeurs $1, a, a^2, a^3, \dots, a^n$ et telle que, pour tout entier $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, on ait $\mathrm{P}(X = a^i) = \dfrac{1}{n+1}$.

Calculer $\mathrm{E}(X)$ ....................

**Calcul 19.24**

Soit $x \in \,]0, 1[$ et soit $X$ une variable aléatoire prenant les valeurs 1 et $x$ et telle que $\mathrm{P}(X = 1) = x$.

Calculer :

a) $\mathrm{E}(X)$ ....................

b) $\mathrm{V}(X)$ ....................

**Réponses mélangées**

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $0{,}11$ | $\frac{5}{8}$ | $0{,}6$ | $0{,}48$ | $\frac{7}{16}$ | $\frac{3}{4}$ | $0{,}33$ | $\frac{2+x}{3+x}$ | $2$ | $0{,}15$ | $\frac{49}{24}$ | |
| $\frac{17+4x}{12(3+x)}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{7}{10}$ | $\frac{6}{25}$ | $0{,}4$ | $1$ | $-x^2+2x$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{9}{17+4x}$ | $\frac{48}{125}$ | $0{,}15$ | |
| $1-a$ | $\frac{1}{20}$ | $0{,}85$ | $x(1-x)^3$ | $\frac{4}{5}$ | $0{,}46$ | $0{,}48$ | $0{,}2$ | $0{,}16$ | $0{,}25$ | $\frac{9}{16}$ | |
| $\frac{4}{5}$ | $\frac{31}{6}$ | $\frac{11}{20}$ | $0{,}6-0{,}55p$ | $0{,}39$ | $0{,}67$ | $\frac{1-a^{n+1}}{(n+1)(1-a)}$ | $\frac{3}{4(3+x)}$ | $0{,}7$ | | | |
| $\frac{n}{n+1}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{3}{28}$ | $0{,}45$ | $0{,}55$ | $0{,}6$ | $0{,}012$ | $\frac{(n+1)(n-1)}{12}$ | $\frac{1}{4}$ | $0{,}35$ | $\frac{1}{4}$ | |
| $0{,}1$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{9}{20}$ | $0{,}87$ | $\frac{3}{4}$ | $0{,}7$ | $\frac{6}{7}$ | $0{,}04$ | $\frac{9}{10}$ | $\frac{1}{4}$ | $-0{,}2$ | $\frac{n+1}{2}$ |
| $0{,}73$ | $0{,}84$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{n}{3n+2}$ | $\frac{a}{1+2a}$ | $\frac{a(1-a)}{(1+2a)}$ | $\frac{7}{10}$ | $0{,}27$ | $\frac{3}{8}$ | | |

► Réponses et corrigés page 232

# Droites du plan

**Remarque**
Dans toute cette fiche, le plan est muni d'un repère orthonormé.

## Quelques calculs généraux pour commencer

### Calcul 20.1

Calculer :

a) $\dfrac{-2}{3} \times \dfrac{-7}{4} - \dfrac{1}{2}$ ..................

b) $\dfrac{3}{5}\sqrt{8} - \dfrac{7}{13}\sqrt{32}$ ..................

c) $\dfrac{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}}{\frac{-5}{3} + \frac{-3}{5}}$ ......................

d) $\dfrac{-2\sqrt{5} - \sqrt{45}}{-\sqrt{80} + 6\sqrt{5}}$ ..................

### Calcul 20.2

Résoudre les équations suivantes, en donnant la valeur de leur unique solution.

a) $-3 + 4x - 9 + 6x = 0$ ..........

b) $\dfrac{3}{5}x - \dfrac{1}{2} + x = -\dfrac{4}{3}$ .............

c) $\sqrt{3}x - 3\sqrt{12} = \sqrt{27}x - 4\sqrt{75}$ ...

d) $\dfrac{5}{\sqrt{2}}x + \sqrt{8} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ..............

## Équations de droites

### Calcul 20.3 — Avec un point et un vecteur directeur.

On considère la droite $(d)$ passant par le point $\mathrm{A}(-7, 4)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\-5\end{pmatrix}$.

a) Déterminer une équation cartésienne de $(d)$ ........................

b) Déterminer l'équation réduite de $(d)$ ..............................

### Calcul 20.4 — Droites passant par deux points (I).

On considère la droite $(d)$ passant par les points $\mathrm{A}(-3, 2)$ et $\mathrm{B}(6, -3)$.

a) Déterminer une équation cartésienne de $(d)$ ........................

b) Déterminer l'équation réduite de $(d)$ ..............................

**Calcul 20.5 — Droites passant par deux points (II).**

On considère la droite $(d)$ passant par les points $A\left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{3}\right)$ et $B\left(\frac{1}{3}, -\frac{6}{5}\right)$.

a) Déterminer une équation cartésienne de $(d)$ ........................

b) Déterminer l'équation réduite de $(d)$ ..............................

**Calcul 20.6**

On considère la droite $(d)$ passant par les points $A\left(-3\sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$ et $B\left(\sqrt{8}, -2\sqrt{12}\right)$.

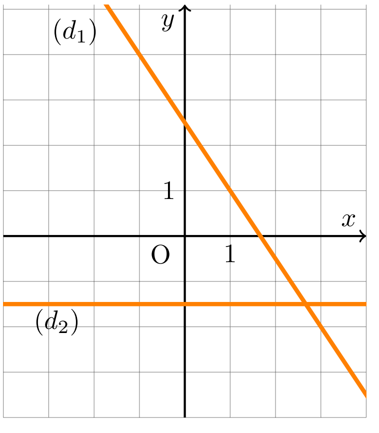
a) Déterminer une équation cartésienne de $(d)$ ........................

b) Calculer l'abscisse du point de $(d)$ d'ordonnée nulle ................

c) Calculer l'ordonnée du point de $(d)$ d'abscisse $-3$ ..................

**Calcul 20.7 — Détermination graphique.**

On considère les droites $(d_1)$ et $(d_2)$ tracées dans le repère ci-dessous.




À l'aide du graphique, déterminer :

a) les coordonnées d'un vecteur directeur de $(d_1)$ ......................

b) une équation cartésienne de $(d_1)$ ..................................

c) l'équation réduite de $(d_1)$ ........................................

d) l'équation réduite de $(d_2)$ ........................................

**Calcul 20.8 — Des calculs de coordonnées de points.**

On considère la droite $(d)$ d'équation cartésienne $-2x + 3y - 7 = 0$.

a) Calculer l'ordonnée du point de $(d)$ d'abscisse $-6$ ....................................

b) Calculer l'abscisse du point de $(d)$ d'ordonnée $\frac{7}{3}$ ....................................

c) Calculer l'ordonnée du point de $(d)$ d'abscisse $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ....................................

d) Déterminer les coordonnées du point de $(d)$ dont l'abscisse et l'ordonnée sont égales ....

**Calcul 20.9 — Des droites parallèles.**

On considère la droite $(d)$ d'équation cartésienne $-\frac{2}{3}x + \frac{4}{5}y - \frac{1}{2} = 0$. Déterminer :

a) une équation cartésienne de la droite $(d')$, parallèle à $(d)$, passant par le point de coordonnées $(-2, 5)$

....................................................................

b) une équation cartésienne de la droite $(d'')$, parallèle à $(d)$, passant par le point de coordonnées $(-30, 60)$

....................................................................

**Calcul 20.10 — Avec des paramètres (I).**

Soit $t \in \mathbb{R}$. On considère la droite $(d)$ dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -t+1 \\ t+2 \end{pmatrix}$ et passant par $\mathrm{A}(-3, 2)$.

a) Déterminer une équation cartésienne de la droite $(d)$ ......................

b) Déterminer la valeur de $t$ pour que la droite $(d)$ soit parallèle à $(\mathrm{O}x)$ ......

**Calcul 20.11 — Avec des paramètres (II).**

Soit $t \in \mathbb{R}$. On considère la droite $(d)$ dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix} t^2 \\ -2t+1 \end{pmatrix}$ et passant par $\mathrm{A}\left(-\frac{3}{4}, \frac{6}{7}\right)$.

a) Déterminer une équation cartésienne de la droite $(d)$ ......................

b) Déterminer la valeur de $t$ pour que la droite $(d)$ soit parallèle à $(\mathrm{O}y)$ ......

## Intersections de droites

**Calcul 20.12 — Une première intersection.**

On considère $(d_1)$ la droite d'équation $x + y + 1 = 0$ et $(d_2)$ la droite d'équation $x + 11 = 0$.

Calculer les coordonnées du point d'intersection de $(d_1)$ et $(d_2)$ ......................

**Calcul 20.13 — Quelques autres intersections.**

Soit $(d)$ la droite d'équation $-\dfrac{2}{3}x + \dfrac{7}{5}y - 5 = 0$. Calculer les coordonnées :

a) du point d'intersection de $(d)$ avec l'axe des abscisses ...........................

b) du point d'intersection de $(d)$ avec l'axe des ordonnées ..........................

c) du point d'intersection de $(d)$ avec la droite d'équation $y = x$ ...................

**Calcul 20.14**

Soient $(d_1)$ la droite d'équation $2x - 3y + 4 = 0$ et $(d_2)$ la droite d'équation $-5x + 9y - 7 = 0$.

Calculer les coordonnées du point d'intersection de $(d_1)$ et $(d_2)$ ......................

**Calcul 20.15**

Soient $(d_1)$ la droite d'équation $3\sqrt{3}x - \sqrt{2}y + 1 = 0$ et $(d_2)$ la droite d'équation $-\sqrt{12}x + \sqrt{8}y + 2 = 0$.

Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $(d_1)$ et $(d_2)$ ..................

**Calcul 20.16**

Soit $(d_1)$ la droite d'équation $4x + y - 6 = 0$ et soit $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y = x^2 + 3x - 1$.

Déterminer les coordonnées des deux points d'intersection de $(d)$ et de $\mathscr{P}$ .

**Calcul 20.17**

Soit $(d)$ la droite d'équation $-x + y + 3 = 0$ et soit $\mathscr{C}$ le cercle d'équation $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$.

Déterminer les coordonnées des deux points d'intersection de $(d)$ et de $\mathscr{C}$ ..

## Calculs plus difficiles

**Calcul 20.18**

Soit $a$ un réel. On considère la droite $(d)$ d'équation cartésienne

$$\frac{1}{a^2+1}x + (a^2-1)y - 2 = 0.$$

a) Déterminer, si elle existe, l'ordonnée du point de $(d)$ d'abscisse $a$ ...............

b) Déterminer l'abscisse du point de $(d)$ d'ordonnée $(a-1)$ ........................

**Calcul 20.19**

Soit $m$ un réel.

On considère

- $(d_1)$ la droite d'équation cartésienne $mx + 4(m-1)y + 11 = 0$ ;
- $(d_2)$ la droite d'équation cartésienne $2x + my + 2 = 0$.

a) Déterminer une condition sur le réel $m$ pour que les droites $(d_1)$ et $(d_2)$ soient sécantes

..........................................................................

b) Dans les conditions précédentes, déterminer les coordonnées du point d'intersection de $(d_1)$ et $(d_2)$

..........................................................................

**Calcul 20.20**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + 2x + 1$. Soit $m$ un réel.

On note

- $\mathsf{T}_{f,m}$ la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $m$ ;
- $(d)$ la droite d'équation $3x + 2y - 5 = 0$.

a) Déterminer une équation de $\mathsf{T}_{f,m}$ ............................................

b) Déterminer les coordonnées de l'éventuel point d'intersection de $\mathsf{T}_{f,m}$ et de $(d)$ ..

**Calcul 20.21**

Soient $f$ et $g$ les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 5$ et $g(x) = -2x^2 + 3$. Soit $a \in \mathbb{R}^*$.

a) Déterminer une équation de $\mathsf{T}_{f,a}$, la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $a$

.................................................................

b) Déterminer une équation de $\mathsf{T}_{g,-a}$, la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse $-a$

.................................................................

c) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $\mathsf{T}_{f,a}$ et $\mathsf{T}_{g,-a}$ ......

## Réponses mélangées

si $m \neq \dfrac{7}{12}$, $\left(\dfrac{-6m^2+3}{-12m+7}, \dfrac{9m^2-30m+13}{-12m+7}\right)$ $\quad 7 \quad$ $-\dfrac{2}{3}x + \dfrac{4}{5}y - 68 = 0$ $\quad (t+2)x + (t-1)y + t + 8 = 0$

$-\dfrac{25}{48}$ $\quad y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{5}{2}$ $\quad \dfrac{7-\sqrt{3}}{3}$ $\quad \dfrac{5}{68}$ $\quad \dfrac{-3}{5}$ $\quad \left(\dfrac{-7-\sqrt{77}}{2}, 20+2\sqrt{77}\right)$ $\left(\dfrac{-7+\sqrt{77}}{2}, 20-2\sqrt{77}\right)$

$\dfrac{2a^2-a+2}{a^4-1}$ si $a \notin \{-1,1\}$ $\quad y = 4ax + 2a^2 + 3$ $\quad -2\sqrt{2}$ $\quad 0$ $\quad -5x + 3y - 47 = 0$

$(-5,-2)$ $\quad \dfrac{6}{5}$ $\quad y = \dfrac{14}{55}x - \dfrac{212}{165}$ $\quad y = -\dfrac{5}{9}x + \dfrac{1}{3}$ $\quad -5x - 9y + 3 = 0$ $\quad -\dfrac{5}{2}$ $\quad \dfrac{2}{3}$

$\left(\dfrac{4-5\sqrt{2}}{2}, \dfrac{-2-5\sqrt{2}}{2}\right)$ $\left(\dfrac{4+5\sqrt{2}}{2}, \dfrac{-2+5\sqrt{2}}{2}\right)$ $\quad -a^5 + a^4 + 2a^2 + a + 1$ $\quad \left(-\dfrac{15}{2}, 0\right)$ $\quad \dfrac{7}{15}x - \dfrac{11}{6}y - \dfrac{106}{45} = 0$

$\left(\dfrac{75}{11}, \dfrac{75}{11}\right)$ $\quad \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\quad -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{4}{5}y - \dfrac{16}{3} = 0$ $\quad y = 6ax - 3a^2 + 5$ $\quad 3x + 2y - 5 = 0$

$y = -\dfrac{3}{2}$ $\quad 0$ $\quad -\dfrac{62}{65}\sqrt{2}$ $\quad y = \dfrac{5}{3}x + \dfrac{47}{3}$ $\quad \left(0, \dfrac{25}{7}\right)$ $\quad -2\sqrt{3} + 3\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

$\sqrt{3}x + \sqrt{2}y + 2\sqrt{6} = 0$ $\quad m \neq 4 - 2\sqrt{2}$ et $m \neq 4 + 2\sqrt{2}$ $\quad y = (-6m+2)x + 3m^2 + 1$

$\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{2}\right)$ $\quad -\dfrac{5}{3}$ $\quad (-11,10)$ $\quad (-2t+1)x - t^2y + \dfrac{6}{7}t^2 - \dfrac{3}{2}t + \dfrac{3}{4} = 0$

$\left(\dfrac{5a^2-2}{2a}, 12a^2-1\right)$ $\quad -2$ $\quad \left(\dfrac{-3m-8}{m^2-8m+8}, \dfrac{22-2m}{m^2-8m+8}\right)$ $\quad (7,7)$

► Réponses et corrigés page 237

# Généralités sur les vecteurs

## Quelques calculs généraux pour commencer

**Calcul 21.1 — Quelques développements.**

Développer et réduire les expressions suivantes, en utilisant une identité remarquable.

a) $(x+6)^2$ ..............

b) $(1-2x)^2$ ............

c) $(1+3x)(1-3x)$ ......

d) $-2(3+5x)^2-10$ .....

e) $(2x-1)^2-x^2$ ........

f) $-(x-2)(x+2)-4$ ...

**Calcul 21.2 — Quelques fractions.**

Mettre les expressions suivantes au même dénominateur, puis simplifier au maximum.

a) $\dfrac{1}{q}-\dfrac{1}{q-1}$ ................

b) $\dfrac{q}{1-q}-\dfrac{q}{1+q}$ ...........

c) $\dfrac{2}{1-q^2}+\dfrac{-1}{1+q}$ ..........

d) $2q+\dfrac{1}{2q-1}$ .............

e) $1-\dfrac{2}{q+1}+\dfrac{1}{(q+1)^2}$ .....

f) $\dfrac{1}{q+1}-\dfrac{q}{q^2-1}$ ..........

## Échauffements

**Calcul 21.3 — Règle du parallélogramme.**

Choisir la bonne réponse : si ABCD est un parallélogramme alors,

(a) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

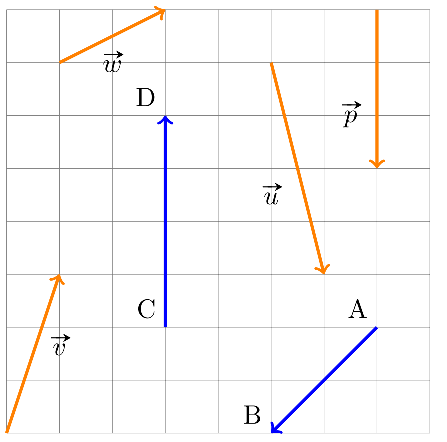
(b) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$

(c) $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$

..........................................................................................

**Calcul 21.4**

Exprimer chacun des vecteurs suivants en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.




a) $\vec{u}$ ................

b) $\vec{v}$ ................

c) $\vec{w}$ ................

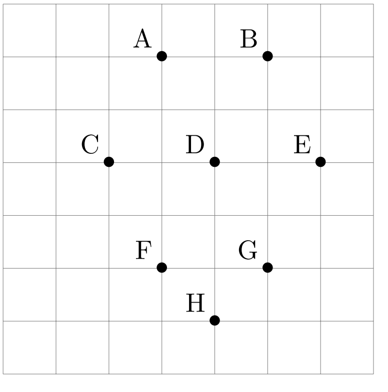
d) $\vec{p}$ ................

e) $-2\vec{u}+3\vec{p}$ ........

f) $4\vec{v}+\vec{u}-5\vec{w}$ ......

**Calcul 21.5 — Trouver les bons points.**

En utilisant les points placés dans le quadrillage ci-dessous, donner dans chacun des cas un exemple de vecteur égal à la somme proposée.




a) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DG}$ ......................

b) $\overrightarrow{HG}-\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CD}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{DH}$ .......

c) $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{DB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AG}$ .........

d) $\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DF})-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{ED}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{DH}$ ....

**Calcul 21.6 — Équations vectorielles (I).**

Soit $\vec{v}$ un vecteur non nul. Déterminer le réel $\alpha$ tel que $\vec{u} = \vec{0}$.

a) $\vec{u} = \alpha\vec{v} + (1-\alpha)\vec{v} + 2(1+\alpha)\vec{v}$ ..........

b) $\vec{u} = (2\alpha+1)\vec{v} + (\alpha+1)(\alpha-1)\vec{v} - \alpha^2\vec{v}$ ..........

c) $\vec{u} = -(\alpha^2+1)\vec{v} + (\alpha-2)\vec{v} + \alpha(\alpha+3)\vec{v}$ ..........

d) $\vec{u} = 2\alpha^2\vec{v} - (\alpha+1)^2\vec{v} + (2\alpha+1)\vec{v}$ ..........

**Calcul 21.7 — Équations vectorielles (II).**

Soit $\vec{v}$ un vecteur non nul. Déterminer pour quelles valeurs du réel $\alpha$ on a $\vec{u} = \vec{0}$.

a) $\vec{u} = \dfrac{\alpha}{\alpha+1}\vec{v} + (\alpha+1)\vec{v} - \vec{v}$ ..........

b) $\vec{u} = (1+\alpha)\vec{v} + \dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}\vec{v} - 2\vec{v}$ ..........

# Autour de la relation de Chasles

**Calcul 21.8 — Des simplifications vectorielles.**

Simplifier les expressions suivantes.

a) $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FH} - \overrightarrow{AB}$ ..........

b) $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{KI} + \overrightarrow{JK}$ ..........

c) $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EG} - \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{OG}$ ..........

d) $-(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{BI}) + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{IB}$ ..........

e) $\overrightarrow{EM} - (\overrightarrow{EB} - \overrightarrow{NM}) + \overrightarrow{MB}$ ..........

f) $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{EH}) - (\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{AH})$ ..........

**Calcul 21.9**

Par quelle lettre faut-il remplacer X pour que $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{EX} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ ?

(a) A (b) E (c) B (d) F (e) C

..........

### Calcul 21.10

Simplifier l'expression.

$\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{EB} - \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{EA} - \overrightarrow{BO}$ ..........

### Calcul 21.11

Exprimer $\vec{u}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

a) $\vec{u} = \overrightarrow{CB}$ ..........

b) $\vec{u} = -\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{BC}$ ..........

c) $\vec{u} = 2\overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}$ ..........

d) $\vec{u} = 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB}) + 3\overrightarrow{AB}$ ..........

### Calcul 21.12

Simplifier les expressions suivantes.

a) $2\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{EA}$ ..........

b) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ME} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AE}$ ..........

c) $-\frac{1}{4}\overrightarrow{VS} + \frac{1}{4}\overrightarrow{VA} - \overrightarrow{AS}$ ..........

d) $\frac{1}{2}\big(\overrightarrow{AB} - 2(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB})\big) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ..........

### Calcul 21.13

Déterminer le réel $\alpha$ tel que $\vec{u}$ soit le vecteur $\vec{0}$.

a) $\vec{u} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \alpha\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}$ ..........

b) $\vec{u} = -3\overrightarrow{BP} + \alpha\big(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{PB}\big) + 3\overrightarrow{BA}$ ..........

c) $\vec{u} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EF} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AF} + \frac{\alpha}{6}\overrightarrow{AE}$ ..........

**Calcul 21.14**

Exprimer $\vec{u}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et du réel $\alpha$.

a) $\vec{u} = (1+\alpha)\overrightarrow{AB} - \alpha\overrightarrow{CA} + \alpha\overrightarrow{CB}$ ..........

b) $\vec{u} = (1-\alpha)(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}) - (\alpha - 1)\overrightarrow{AC}$ ..........

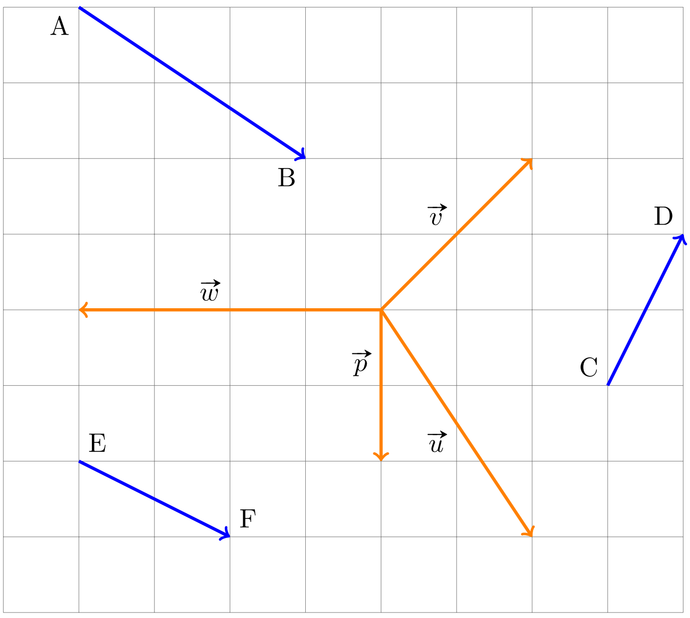
c) $\vec{u} = (1 - \dfrac{1}{1-\alpha})\overrightarrow{AC} + \alpha(\overrightarrow{BA} + \dfrac{1}{1-\alpha}\overrightarrow{AC})$ ..........

d) $\vec{u} = (1-\alpha)^2\overrightarrow{AB} + (1-\alpha)(1+\alpha)\overrightarrow{AC} + \alpha^2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}$ ..........

# Colinéarité

**Calcul 21.15 — Une question de colinéarité.**

On considère les points et les vecteurs suivants.




Déterminer à quel vecteur, parmi $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$, chacune des sommes suivantes est colinéaire.

a) $\vec{u} + \dfrac{1}{2}\vec{v}$ ..........

b) $-(\dfrac{1}{4}\vec{w} + \vec{p})$ ..........

c) $-\dfrac{1}{2}(\vec{p} - \vec{v})$ ..........

d) $\vec{v} + \vec{u} + \dfrac{1}{2}\vec{w}$ ..........

**Calcul 21.16 — Exprimer un vecteur en fonction d'un autre (I).**

Exprimer le vecteur $\vec{u}$ en fonction de $\vec{v}$ dans chacun des cas suivants.

a) Si $3\vec{u} = 6\vec{v}$ alors on a $\vec{u} =$ ..........

b) Si $\dfrac{1}{2}\vec{u} = -\dfrac{3}{5}\vec{v}$ alors on a $\vec{u} =$ ..........

c) Si $\dfrac{1}{2}(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{0}$ alors on a $\vec{u} =$ ..........

d) Si $\dfrac{1}{3}\vec{u} + \dfrac{3}{4}\vec{v} = -2(\vec{u} + \vec{v})$ alors on a $\vec{u} =$ ..........

**Calcul 21.17 — Exprimer un vecteur en fonction d'un autre (II).**

Soient A, B et C trois points non alignés.

Exprimer le vecteur $\vec{u}$ en fonction de $\vec{v}$ dans chacun des cas suivants.

a) $\vec{u} = -2\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = 4\overrightarrow{AB}$ ..........

b) $\vec{u} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = 2\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AB}$ ..........

c) $\vec{u} = -\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ et $\vec{v} = 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{CB}$ ..........

d) $\vec{u} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CA} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ ..........

**Calcul 21.18 — Exprimer un vecteur en fonction d'un autre (III).**

a) Si $-4\overrightarrow{AD} + 4\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{DC} = \vec{0}$ alors on a $\overrightarrow{AB} =$ ..........

b) Si $3\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BA}\right) - 3\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$ alors on a $\overrightarrow{AB} =$ ..........

c) Si $\overrightarrow{CB} - 3\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}$ alors on a $\overrightarrow{AB} =$ ..........

d) Si $-\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA}\right) = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ alors on a $\overrightarrow{AB} =$ ..........

**Calcul 21.19**

Soit ABC un triangle. On considère le point G tel que $\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{BG} + 3\overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{BC} = \vec{0}$.

Exprimer le vecteur $\overrightarrow{GA}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{GC}$ ..........

### Calcul 21.20

Soient ABC un triangle et les points M, N et P tels que $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{NC}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

Exprimer le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{PN}}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{PM}}$ ..........................

## Calculs plus difficiles

### Calcul 21.21

Soient A, B et C trois points non alignés.

Exprimer le vecteur $\vec{u}$ en fonction de $\vec{v}$ et du réel $\alpha$ dans chacun des cas suivants.

a) $\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + (\alpha^2 - 1)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ et $\vec{v} = \dfrac{1}{\alpha - 1}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + (\alpha + 1)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ....................

b) $\vec{u} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \left(1 - \dfrac{1}{\alpha + 1}\right)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{BA}} + \dfrac{1}{\alpha + 1}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ......................

c) $\vec{u} = 2\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}} + (\alpha^2 + 1)\overrightarrow{\mathrm{BA}} + \overrightarrow{\mathrm{CA}}$ et $\vec{v} = (\alpha - 1)\overrightarrow{\mathrm{BA}} + \dfrac{1}{\alpha - 1}\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ ...........

d) $\vec{u} = (1 + 2\alpha)^2\overrightarrow{\mathrm{AB}} - (1 - 2\alpha)^2\overrightarrow{\mathrm{AC}} + (4\alpha^2 + 1)\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ et $\vec{v} = 2\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ ......

### Calcul 21.22 — Propriété du milieu.

Soit ABC un triangle. On note I et J les milieux respectifs de [AB] et [AC].
Soient M et N deux points quelconques du plan.

On rappelle la propriété du milieu : le point I est le milieu de [AB] si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{IA}} + \overrightarrow{\mathrm{IB}} = \vec{0}$.

a) Exprimer $\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}}$ en fonction de $\overrightarrow{\mathrm{MI}}$ ........................................

b) Exprimer $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ en fonction de $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ ................................................

Simplifier les expressions suivantes.

c) $-3\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{IA}} + \overrightarrow{\mathrm{BI}}$ ............................................................

d) $\overrightarrow{\mathrm{MI}} - \overrightarrow{\mathrm{NA}} - \overrightarrow{\mathrm{BI}} + 2\overrightarrow{\mathrm{IA}}$ ......................................................

**Calcul 21.23 — Point particulier d'un triangle.**

On considère un triangle ABC, et on note G le point du plan qui vérifie la relation :

$$\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}=\vec{0}.$$

a) Exprimer $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ en fonction de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ........................................

Soient les points $\mathrm{A}'$, $\mathrm{B}'$ et $\mathrm{C}'$ respectivement milieux des segments [BC], [CA] et [AB].

b) Exprimer $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ en fonction de $\overrightarrow{\mathrm{AA'}}$ ........................................

c) Simplifier la somme $\overrightarrow{\mathrm{AA'}}+\overrightarrow{\mathrm{BB'}}+\overrightarrow{\mathrm{CC'}}$ ........................................

d) Simplifier la somme $\overrightarrow{\mathrm{GA'}}+\overrightarrow{\mathrm{GB'}}+\overrightarrow{\mathrm{GC'}}$ ........................................

**Réponses mélangées**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\overrightarrow{\mathrm{HG}}$ | $x^2+12x+36$ | $\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ | $0$ | $2\vec{v}$ | $-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ | $-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\frac{5}{4}\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ | $\overrightarrow{\mathrm{NM}}$ | |
| $-2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ | $\vec{0}$ | $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ | $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ | $-x^2$ | $\vec{u}=-\frac{1}{4}\vec{v}$ | $\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})$ | | |
| $\frac{5}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ | $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=2\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ | $2\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ | $-\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ | $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ | $2(1-\alpha)\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ | | | |
| $\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ | $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ | $-3\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ | e | $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ | $\vec{u}=(\alpha-1)\vec{v}$ | $\vec{0}$ | | |
| c | $\overrightarrow{\mathrm{BG}}$ | $\overrightarrow{\mathrm{BE}}$ | $3x^2-4x+1$ | $\frac{4q^2-2q+1}{2q-1}$ | $\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ | $\overrightarrow{\mathrm{GA}}=-5\overrightarrow{\mathrm{GC}}$ | | |
| $4$ | $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ | $\frac{1}{1-q}$ | $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ | $\vec{u}=-4\vec{v}$ | $-\frac{3}{2}$ | $\vec{u}=-\frac{1}{8}\vec{v}$ | $0$ et $-2$ | |
| $\frac{3}{4}$ | $-\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ | $\overrightarrow{\mathrm{AB}}+4\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ | $-50x^2-60x-28$ | $2(1-\alpha)\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ | $1\vec{v}$ | $\frac{q^2}{(q+1)^2}$ | | |
| $\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}}=2\overrightarrow{\mathrm{MI}}$ | $\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ | $2\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ | $\vec{0}$ | $\vec{0}$ | $2$ | $\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ | $\overrightarrow{\mathrm{PN}}=\frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{PM}}$ | |
| $-\frac{33}{28}\vec{v}$ | $3$ | $\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AA'}}$ | $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ | $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ | $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ | $-\frac{6}{5}\vec{v}$ | $\vec{u}=(\alpha-1)\vec{v}$ | |
| $(1+2\alpha)\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ | $\vec{u}=4\alpha\vec{v}$ | $\frac{-1}{q(q-1)}$ | $-\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ | $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ | $\vec{u}=-\frac{1}{2}\vec{v}$ | $\frac{5}{4}\overrightarrow{\mathrm{SA}}$ | $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ | |
| $1-4x+4x^2$ | $\vec{u}=-\alpha\vec{v}$ | $0$ | $\frac{-1}{q^2-1}$ | $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ | $1-9x^2$ | $\frac{2q^2}{1-q^2}$ | $0$ et $1$ | |

► Réponses et corrigés page 244

# Coordonnées des vecteurs

## Quelques calculs généraux pour commencer

**Calcul 22.1 — Des inéquations.**

Déterminer, sous la forme d'un intervalle, l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ des inéquations suivantes.

a) $2x - 6 > 0$ ....................

b) $-x + 3 \geqslant 0$ ..................

c) $2(x+5) \leqslant 8$ ..................

d) $2 - 4x < 10x$ ................

e) $-\dfrac{1}{4}(x+2) < -\dfrac{1}{2}x$ ...........

f) $\dfrac{2}{3}(6x-1) < -4x - \dfrac{1}{6}$ ........

**Calcul 22.2 — Des factorisations.**

Factoriser les expressions suivantes en utilisant les identités remarquables.

a) $1 + 4x + 4x^2$ .................

b) $9x^2 - 1$ ......................

c) $x^2 - x + \dfrac{1}{4}$ ..................

d) $(x+1)^2 + 4(x+1) + 4$ ......

e) $(1-5x)^2 - (1+x)^2$ .........

f) $25 - 20x + 4x^2 - (2+3x)^2$ ...

**Remarque**
Toutes les coordonnées sont exprimées dans un repère orthonormé du plan.

## Calcul de coordonnées

**Calcul 22.3**

Calculer et simplifier les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$, dans chacun des cas suivants.

a) $A(-5,-2)$ et $B(4,0)$ ...........

b) $A\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{2}\right)$ et $B\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}\right)$ .....

c) $A\left(1+\sqrt{2}, \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$ et $B\left(\sqrt{8}, \sqrt{5}\right)$ .

### Calcul 22.4

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère les points $\mathrm{A}\Big(2^n, 1 - 3^{2(n+1)}\Big)$ et $\mathrm{B}\Big(2^{n+1}, (1-3^n)(1+3^n)\Big)$.

Calculer et simplifier les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ ……………………………………

### Calcul 22.5

Dans chacun des cas suivants, calculer et exprimer le plus simplement possible les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ en fonction de $\alpha$.

a) $\mathrm{A}(-1-\alpha^2, 2\alpha)$ et $\mathrm{B}(-2\alpha, 1)$ ……………………………………

b) $\mathrm{A}\left(\dfrac{\alpha}{\alpha-1}, \dfrac{-2-\alpha}{\alpha}\right)$ et $\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{\alpha-1}, \dfrac{2}{\alpha}\right)$ ……………………………………

c) $\mathrm{A}\big(\alpha(\alpha-1), (\alpha-1)^2\big)$ et $\mathrm{B}\big(\alpha^2, (\alpha+1)^2\big)$ ……………………………………

d) $\mathrm{A}\left(-1, 2\big(\alpha - \dfrac{1}{2}\big)\right)$ et $\mathrm{B}\big(-\alpha, \alpha^2\big)$ ……………………………………

### Calcul 22.6

On considère les points $\mathrm{A}(1,-2)$, $\mathrm{B}(8,-5)$, $\mathrm{C}(6,0)$ et $\mathrm{D}(x,y)$ le point vérifiant $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{DC}}$

Calculer, en fonction de $x$ et $y$, les coordonnées de :

a) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ ……………………

b) $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ ……………………

c) En déduire les coordonnées de D ……………………………………

### Calcul 22.7

On considère les points $\mathrm{A}(3,-2)$, $\mathrm{B}(1,-3)$ et $\mathrm{C}(0,8)$.

En utilisant la même méthode que dans l'exercice précédent, déterminer dans chacun des cas suivants les coordonnées du point D vérifiant :

a) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ ……………

b) $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = 2\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ ……………

c) $\overrightarrow{\mathrm{BD}} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ ……

d) $2\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{BD}} - 3\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ……

**Calcul 22.8**

Dans chaque cas, déterminer la valeur de $\alpha$ telle que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ soit égal au vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$.

a) $A(\alpha^2-1,0)$ et $B(0,\alpha)$ ..........

b) $A(2(\alpha+1),\alpha+2)$ et $B(-\alpha+11,2\alpha-2)$ ..........

c) $A\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{15}{16}\right)$ et $B\left(2\alpha,\alpha\left(\alpha+\dfrac{1}{2}\right)\right)$ ..........

**Calcul 22.9**

Déterminer la valeur du couple de réels $(\alpha,\beta)$ tel que $\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.

$A(2\alpha+\beta+1,-\alpha-2\beta)$ et $B(3\alpha-2\beta,\alpha+6)$ ..........

# Somme de vecteurs

**Calcul 22.10**

On considère les points $A(-5,3)$ et $B(4,-8)$ et les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-6\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$.

a) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ ..........

b) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AB}$ sous la forme $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$, où $\alpha$ et $\beta$ sont à déterminer ....

**Calcul 22.11**

On considère les points $A(-5,4)$, $B(6,-2)$ et $C(15,0)$.

Déterminer les coordonnées du point M vérifiant la relation $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

..........

**Calcul 22.12**

Soit $\alpha$ un nombre réel. On considère les points $A(\alpha,\alpha+2)$, $B(\alpha^2+1,2\alpha)$ et $C(-3\alpha,0)$.

Déterminer en fonction de $\alpha$ les coordonnées du point M vérifiant la relation $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

..........

## Norme de vecteur

**Calcul 22.13**

Calculer dans chacun des cas la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

a) $A\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ et $B\left(1, \frac{1}{2}\right)$ ..........

b) $A\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{10}\right)$ et $B\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right)$ ..........

c) $A\big(\sqrt{2}, \sqrt{2}\big)$ et $B\big(\sqrt{3}, -\sqrt{3}\big)$ ..........

d) $A\big(2^{2n}, 2^{2n}\big)$ et $B\big(2^{2n+1}, 2^{2n+2}\big)$ ..........

**Calcul 22.14**

Soit $\alpha$ un nombre réel tel que $\alpha \geqslant 1$.

Exprimer dans chacun des cas la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\alpha$.

a) $A(1, -\alpha^2)$ et $B(\alpha^2, 1)$ ..........

b) $A\left(\frac{2\alpha}{9}, 0\right)$ et $B\left(\frac{\alpha}{3}, -\frac{\alpha}{3}\right)$ ..........

c) $A\left(\frac{\sqrt{\alpha^2-1}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ et $B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{\alpha^2-1}}{2}\right)$ ..........

d) $A\big(-\alpha^{n-1}, -\alpha^n\big)$ et $B\big(\alpha^n, -\alpha^{n-1}\big)$ ..........

## Colinéarité

**Calcul 22.15**

Dans chacun des cas, quelle est la bonne affirmation ?

(a) Les droites (AB) et (CD) sont parallèles

(b) Les droites (AB) et (CD) sont sécantes

a) $A(3, -2)$, $B(6, 0)$, $C(15, 8)$ et $D(6, 1)$ ..........

b) $A\big(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\big)$, $B\big(1, \frac{1}{2}\big)$, $C\big(0, 1\big)$ et $D\big(\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\big)$ ..........

c) $A\big(\sqrt{50}, -\sqrt{5}\big)$, $B\big(2\sqrt{2}, \sqrt{45}\big)$, $C\big(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{5}\big)$ et $D\big(\sqrt{2}, \frac{2}{\sqrt{5}}\big)$ ..........

### Calcul 22.16

Pour les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ suivants, déterminer le réel $\lambda$ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}(\alpha - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \\ \dfrac{1+\alpha}{1-\alpha^2}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-\alpha(\alpha-1) \\ \dfrac{1}{\alpha-1}\end{pmatrix}$ ........................................

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}\dfrac{\alpha^n - \alpha^{n+1}}{\alpha - 1} \\ \dfrac{\alpha^n + \alpha^{n+1}}{\alpha+1}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-\alpha^{n+1} \\ \alpha^{n+1}\end{pmatrix}$ ........................................

## Milieu d'un segment

### Calcul 22.17

Soient A et B deux points du plan.

Calculer dans chacun des cas les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ où I est le milieu du segment [AB].

a) $\mathrm{A}(-1, 4)$ et $\mathrm{B}(3, -5)$ .........

b) $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{3}, 5\right)$ et $\mathrm{B}\left(\dfrac{7}{3}, -5\right)$ ......

c) $\mathrm{A}\left(-4, \dfrac{2}{\sqrt{2}}\right)$ et $\mathrm{B}\left(-\dfrac{2}{\sqrt{2}}, 2\right)$

d) $\mathrm{A}(2^{n+1}, 2^{2n})$ et $\mathrm{B}(2^n, 2^{2n+1})$ ................................................

### Calcul 22.18

Soient A et B deux points du plan.

Calculer dans chacun des cas, en fonction du réel $\alpha$, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ où I est le milieu du segment [AB].

a) $\mathrm{A}\left(2\alpha - 2, \dfrac{1}{4}\alpha + 2\right)$ et $\mathrm{B}\left(4\alpha, \dfrac{3}{4}\alpha - 6\right)$ ........................................

b) $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{\alpha}, -\dfrac{2}{\alpha}\right)$ et $\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{\alpha+1}, -\dfrac{2}{\alpha+1}\right)$ ........................................

c) $\mathrm{A}(1 + 3\sqrt{\alpha}, -\sqrt{\alpha})$ et $\mathrm{B}(1 + \sqrt{\alpha}, 3\sqrt{\alpha})$ ........................................

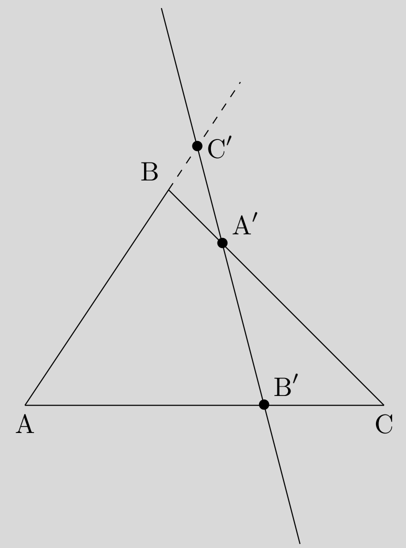
d) $\mathrm{A}(2^{n+2}\alpha^{n+1}, -2^{n+1}\alpha^n)$ et $\mathrm{B}(2^{n+3}\alpha^{n+1}, -2^{n+2}\alpha^n)$ ..............................

## Calculs plus difficiles

**Calcul 22.19 — Ménélienne d'un triangle.**

Soit ABC un triangle et soient $\mathrm{A}'$, $\mathrm{B}'$ et $\mathrm{C}'$ des points appartenant respectivement aux droites (BC), (CA) et (AB), et tous distincts de A, B et C.

La situation est représentée ci-dessous.




On note $p$, $q$ et $r$ les réels vérifiant $\overrightarrow{\mathrm{A'B}} = p\overrightarrow{\mathrm{A'C}}$, $\overrightarrow{\mathrm{B'C}} = q\overrightarrow{\mathrm{B'A}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{C'A}} = r\overrightarrow{\mathrm{C'B}}$.

On se place dans le repère $(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}})$.

a) Exprimer $\overrightarrow{\mathrm{A'B}}$ en fonction de $p$ et de $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ ........................................

b) Exprimer $\overrightarrow{\mathrm{B'A}}$ en fonction de $q$ et de $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ........................................

c) Exprimer $\overrightarrow{\mathrm{C'A}}$ en fonction de $r$ et de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ ........................................

d) Donner les coordonnées de $\overrightarrow{\mathrm{B'C'}}$ ................................................

e) Donner les coordonnées de $\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}$ ................................................

Supposons que $pqr = 1$.

f) Exprimer le vecteur $r(p-1)\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}$ en fonction de $r$ et de $\overrightarrow{\mathrm{B'C'}}$ ....................

**Calcul 22.20 — Déterminant d'un couple de vecteurs.**

Dans un repère orthonormé, on considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.
Le déterminant du couple $(\vec{u}, \vec{v})$ est défini par

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \det\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) = ad - bc.$$

On admet que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

a) Si $\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha - 1 \\ -\alpha \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \alpha + 1 \\ 2\alpha \end{pmatrix}$ alors $\det(\vec{u}, \vec{v}) =$ ..........................

b) Si $\vec{u}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\alpha + 1} \\ -2 - \alpha \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\alpha} \\ -\alpha - 1 \end{pmatrix}$ alors $\det(\vec{u}, \vec{v}) =$ ......................

c) Si $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{-1}{\alpha} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{-1}{\alpha + 1} \end{pmatrix}$ alors $\det(\vec{u}, \vec{v}) =$ ..........................

Déterminer pour quelles valeurs du réel $\alpha$ les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

d) $\vec{u}\begin{pmatrix} 2\alpha + 1 \\ -\alpha + 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -4\alpha \\ \alpha - 1 \end{pmatrix}$ ..............................................

e) $\vec{u}\begin{pmatrix} \dfrac{4\alpha + 1}{\alpha - 1} \\ \dfrac{1}{\alpha + 1} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \alpha - 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ..............................................

## Réponses mélangées

$\dfrac{2}{\alpha}$ $\quad \begin{pmatrix} 6-x \\ -y \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{\mathrm{A'B'}}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{p-1} \\ \dfrac{pq-1}{(1-p)(q-1)} \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{\mathrm{B'C'}}\begin{pmatrix} \dfrac{r}{r-1} \\ \dfrac{1}{q-1} \end{pmatrix}$ $\quad ]-\infty,3]$ $\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix} (1-\alpha)^2 \\ 1-2\alpha \end{pmatrix}$

$\dfrac{\sqrt{5}}{4}$ $\quad \sqrt{5}$ $\quad \lambda = \dfrac{1}{\alpha}$ $\quad -6x(2-4x)$ $\quad \dfrac{1}{q-1}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ $\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix} 2^n \\ 8\times 3^{2n} \end{pmatrix}$ $\quad (x+3)^2$

$\alpha=-1$ $\quad \alpha^{n-1}\sqrt{2(\alpha^2+1)}$ $\quad \left(\dfrac{(\alpha-1)^2}{3}, \dfrac{3\alpha+2}{3}\right)$ $\quad$ b $\quad$ a $\quad \overrightarrow{\mathrm{AI}}\begin{pmatrix} -2^{n-1} \\ 2^{2n-1} \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{\mathrm{AI}}\begin{pmatrix} \dfrac{-1}{2\alpha(\alpha+1)} \\ \dfrac{1}{\alpha(\alpha+1)} \end{pmatrix}$ $\quad \mathrm{M}\left(\dfrac{16}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$ $\quad \alpha=\dfrac{1}{2}$ et $\alpha=1$ $\quad (\alpha,\beta)=(-2,-1)$ $\quad \dfrac{1}{\alpha(\alpha+1)}$

$]-\infty,2[$ $\quad \overrightarrow{\mathrm{AI}}\begin{pmatrix} \alpha+1 \\ \dfrac{1}{4}\alpha-4 \end{pmatrix}$ $\quad \dfrac{p}{1-p}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ $\quad (3-5x)(x+7)$ $\quad \overrightarrow{\mathrm{AI}}\begin{pmatrix} 2-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ 1-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{\mathrm{AI}}\begin{pmatrix} 2 \\ -\dfrac{9}{2} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 9 \\ -11 \end{pmatrix}$ $\quad \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2$ $\quad (2x+1)^2$ $\quad \dfrac{r}{1-r}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ $\quad 2^{2n}\sqrt{10}$ $\quad \mathrm{D}(1,20)$ $\quad \sqrt{10}$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix} -\dfrac{5}{6} \\ -\dfrac{1}{4} \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{\mathrm{AI}}\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix} 1-\alpha \\ (\alpha-1)^2 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 2\vec{u}-\vec{v}$ $\quad \mathrm{D}\left(\dfrac{44}{5}, -\dfrac{99}{5}\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix} -1 \\ \dfrac{\alpha+4}{\alpha} \end{pmatrix}$ $\quad \alpha=-\dfrac{1}{4}$ $\quad \dfrac{\sqrt{2}}{2}\alpha$ $\quad \alpha=3$ $\quad 3\alpha^2-\alpha$ $\quad \dfrac{\sqrt{10}}{9}\alpha$ $\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\alpha=-\dfrac{7}{3}$ et $\alpha=0$ $\quad \mathrm{D}(-2,7)$ $\quad \mathrm{D}\left(\dfrac{1}{2},-9\right)$ $\quad \left]\dfrac{1}{7},+\infty\right[$ $\quad \lambda=-1$ $\quad \sqrt{2\alpha^4+2}$

$]3,+\infty[$ $\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix} \alpha \\ 4\alpha \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{\mathrm{AI}}\begin{pmatrix} (2\alpha)^{n+1} \\ -(2\alpha)^n \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\quad \mathrm{D}(-1,3)$ $\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ \dfrac{4\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$

$\left]-\infty,\dfrac{1}{16}\right[$ $\quad (r-1)\overrightarrow{\mathrm{B'C'}}$ $\quad (3x-1)(3x+1)$ $\quad ]-\infty,-1]$ $\quad \overrightarrow{\mathrm{AI}}\begin{pmatrix} -\sqrt{\alpha} \\ 2\sqrt{\alpha} \end{pmatrix}$ $\quad$ b

► Réponses et corrigés page 250

# Fonctions trigonométriques I

## Quelques calculs généraux pour commencer

On rappelle qu'un même angle s'exprime en radians ou en degrés selon la règle de proportionnalité :

$$\frac{\text{angle en degrés}}{180} = \frac{\text{angle en radians}}{\pi}$$

**Calcul 23.1 — Des radians vers les degrés.**

Les angles suivants sont en radians. Les exprimer en degrés.

a) $\dfrac{\pi}{3}$ ......

b) $\dfrac{\pi}{2}$ ......

c) $\dfrac{3\pi}{4}$ .....

d) $\dfrac{7\pi}{6}$ .....

**Calcul 23.2 — Des degrés vers les radians.**

Les angles suivants sont en degrés. Les exprimer en radians, sous la forme d'une fraction de $\pi$ irréductible.

a) 45 ......

b) 270 .....

c) 120 .....

d) 112,5 ...

**Calcul 23.3 — Des fractions.**

Calculer et simplifier les fractions suivantes.

a) $\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{6}$ ..........

b) $\pi - \dfrac{\pi}{4}$ ...........

c) $\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{3}$ ..........

d) $\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$ ..........

e) $\dfrac{\pi}{3} + 2\pi$ ..........

f) $-\dfrac{7\pi}{6} + 4\pi$ .......

g) $\dfrac{11\pi}{2} - 5\pi$ ........

h) $-\dfrac{17\pi}{4} + 3\pi$ ......

i) $\dfrac{45\pi}{2} + 11\pi$ ......

## Valeurs particulières du cosinus et du sinus

**Calcul 23.4 — Premiers angles.**

Donner les valeurs des cosinus et sinus suivants (les angles sont exprimés en radians).

a) $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ ......

b) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ ......

c) $\cos(0)$ ........

d) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ ......

e) $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ ......

f) $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ ......

**Calcul 23.5 — Autres angles.**

Même question :

a) $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ ....

b) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ .....

c) $\cos(7\pi)$ .......

d) $\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)$ ...

e) $\cos\left(\frac{15\pi}{2}\right)$ ...

f) $\sin\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$ ...

**Calcul 23.6 — Derniers angles.**

Même question :

a) $\sin\left(\frac{14\pi}{4}\right)$ ...

b) $\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ ...

c) $\sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$ ...

# Comparaisons

**Calcul 23.7 — Monotonie sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.**

a) Soient $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tels que $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$. Quelle est l'affirmation juste ?

(a) $\cos(t_1) < \cos(t_2)$ (b) $\cos(t_1) > \cos(t_2)$ (c) les deux sont possibles

.......................................................................................

b) Même question :

(a) $\sin(t_1) < \sin(t_2)$ (b) $\sin(t_1) > \sin(t_2)$ (c) les deux sont possibles

.......................................................................................

**Calcul 23.8 — Monotonie sur un autre intervalle.**

a) Soient $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ avec $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant \pi$. Quelle est l'affirmation juste ?

(a) $\cos(t_1) < \cos(t_2)$ (b) $\cos(t_1) > \cos(t_2)$ (c) les deux sont possibles

.......................................................................................

b) Même question :

(a) $\sin(t_1) < \sin(t_2)$ (b) $\sin(t_1) > \sin(t_2)$ (c) les deux sont possibles

.......................................................................................

**Calcul 23.9** — **Comparaison entre sinus et cosinus.**

Pour quelles valeurs du réel $x$ a-t-on $\sin(x) \leqslant \cos(x)$ ?

*Plusieurs réponses sont possibles.*

(a) $x = 0$ (c) $x = \dfrac{\pi}{6}$ (e) $x = \dfrac{7\pi}{6}$

(b) $\dfrac{\pi}{4}$ (d) $x = \pi$ (f) $x = \dfrac{7\pi}{4}$

..............................................................................................

**Calcul 23.10** — **Comparaison entre sinus et cosinus.**

Sur quel(s) intervalle(s) $I$ a-t-on $\forall x \in I, \sin(x) \leqslant \cos(x)$ ?

*Plusieurs réponses sont possibles.*

(a) $I_1 = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ (c) $I_3 = \left[-\dfrac{2\pi}{3}, -\dfrac{\pi}{3}\right]$ (e) $I_5 = \left[\dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{4}\right]$

(b) $I_2 = \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ (d) $I_4 = \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$ (f) $I_6 = \left[\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{9\pi}{4}\right]$

..............................................................................................

# Calculs plus difficiles

Pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(x) \neq 0$, on définit sa *tangente* par $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

**Calcul 23.11** — **Valeurs particulières de la tangente.**

Calculer les valeurs particulières suivantes (les angles sont donnés en radians).

a) $\tan\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ ...... c) $\tan(0)$ ........ e) $\tan\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ ......

b) $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ ...... d) $\tan\left(\dfrac{7\pi}{4}\right)$ .... f) $\tan\left(-\dfrac{13\pi}{3}\right)$ .

**Calcul 23.12** — **Quelques formules.**

a) La fonction $x \longmapsto \tan(x)$ est

(a) paire (b) impaire (c) aucune des deux

..............................................................................................

b) Pour $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, simplifier $\tan(x+\pi)$ ..........................................

**Calcul 23.13 — Connaissant l'un, déduire l'autre.**

Dans les calculs suivants, on pourra utiliser la formule $\cos^2 + \sin^2 = 1$.

a) Sachant que $\sin(x) = \dfrac{1}{4}$ et $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, que vaut $\cos(x)$ ? ..............................

b) Sachant que $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ et $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$, que vaut $\sin(x)$ ? ..............................

c) Sachant que $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, que vaut $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ ? ..............................

**Calcul 23.14 — Avec tangente (I).**

a) Sachant que $\cos(x) = \dfrac{3}{5}$ et $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$, que vaut $\tan(x)$ ? ..............................

b) Sachant que $\cos(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et $x \in [0, \pi]$, que vaut $\tan(x)$ ? ..............................

**Calcul 23.15 — Avec tangente (II).**

Sachant que $\tan(x) = 2$ et $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, que vaut $\sin(x)$ ? ..............................

**Réponses mélangées**

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $90$ | $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$ | $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ | $\dfrac{\pi}{12}$ | c | $\dfrac{2\pi}{3}$ | $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ | $\dfrac{1}{2}$ | $60$ | $-\dfrac{1}{2}$ |
| b | $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ | $1$ | $\tan(x)$ | $-\sqrt{3}$ | b, c et f | a | b | $\sqrt{3}$ | $210$ | |
| $\dfrac{\pi}{2}$ | $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ | $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ | a, b, c et f | $0$ | $\dfrac{5\pi}{8}$ | $-\dfrac{4}{3}$ | $\dfrac{67\pi}{2}$ | $1$ | $\dfrac{\pi}{4}$ | |
| $135$ | $-1$ | $\dfrac{\pi}{2}$ | $\dfrac{17\pi}{6}$ | $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\dfrac{5\pi}{4}$ | $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ | b | $1$ | $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ | |
| $\dfrac{-\sqrt{3}}{3}$ | $-1$ | $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ | $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ | $\sqrt{2}$ | $\dfrac{3\pi}{4}$ | $0$ | $\dfrac{7\pi}{3}$ | $\dfrac{3\pi}{2}$ | $-\dfrac{1}{2}$ | $\dfrac{5\pi}{6}$ |

► Réponses et corrigés page 258

# Fonctions trigonométriques II

## Quelques calculs généraux pour commencer

**Calcul 24.1 — Équations avec des carrés.**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes, en donnant l'ensemble de leurs solutions.

a) $x^2 = 1$ ..................

b) $2x^2 - 3 = 1$ .............

c) $x^2 = x$ ..................

d) $2x^2 = -x$ ...............

e) $(2x-1)^2 = 9$ ...........

f) $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$ ..........

g) $\left(\frac{3}{2}x + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$ ........

h) $(2x-5)^2 = (x+2)^2$ .....

**Calcul 24.2 — Équations avec des valeurs absolues.**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes, en donnant l'ensemble de leurs solutions.

a) $|x| = 5$ ..................

b) $|x-1| = 3$ ..............

c) $|4x+3| = 5$ .............

d) $\left|x + \frac{1}{4}\right| = \frac{3}{2}$ .............

e) $\left|-\frac{3}{2}x + \frac{5}{3}\right| = \frac{1}{6}$ .........

f) $|-x+7| = |3x+1|$ .......

**Calcul 24.3 — Inéquations avec des carrés ou des valeurs absolues.**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

*On exprimera l'ensemble des solutions sous la forme d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalles.*

a) $x^2 \leqslant 3$ .........

b) $x^2 > 1$ .........

c) $|x+1| < 2$ .....

d) $|4x+1| \geqslant 5$ ....

e) $(-2x+3)^2 \leqslant 4$ .

f) $\left|\frac{5}{6} - x\right| < \frac{1}{3}$ ....

# Autour des angles remarquables

**Calcul 24.4 — Valeurs remarquables.**

Donner les valeurs suivantes.

a) $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ......

b) $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ......

c) $\cos(0)$ ........

d) $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ ......

e) $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ......

f) $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ......

g) $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ ......

h) $\sin(0)$ ........

i) $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ......

**Calcul 24.5 — Calcul de valeurs particulières.**

Calculer les valeurs suivantes.

a) $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ ....

b) $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ .....

c) $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ ....

d) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ .....

e) $\cos(\pi)$ ........

f) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ .....

g) $\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)$ ....

h) $\sin(\pi)$ ........

i) $\cos\left(\frac{-5\pi}{6}\right)$ ...

**Calcul 24.6 — Tangente d'un angle.**

Pour $x \in \mathbb{R}$, tel que $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on définit

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Calculer les valeurs suivantes.

a) $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ........................

b) $\tan(0)$ ..........................

c) $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ........................

d) $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$ ........................

e) $\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ ......................

f) $\tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ .....................

# Autour des angles associés

**Calcul 24.7 — Angles associés (I).**

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Pour chacune des expressions suivantes, choisir son expression simplifiée parmi les propositions :

(a) $\cos(x)$

(b) $\sin(x)$

(c) $-\cos(x)$

(d) $-\sin(x)$

a) $\sin(-x)$ ........................

b) $\cos(-x)$ ........................

c) $\sin(x+\pi)$ ......................

d) $\cos(\pi - x)$ ......................

**Calcul 24.8 — Angles associés (II).**

Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier les expressions suivantes.

a) $\sin(\pi - x)$ ......................

b) $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ ....................

c) $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ ....................

d) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ ....................

e) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ ....................

f) $\cos(x + \pi)$ ......................

**Calcul 24.9 — Tangente d'angles associés.**

Pour $x \in \mathbb{R}$, tel que $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on note

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Pour chacune des expressions suivantes, choisir son expression simplifiée parmi les propositions :

(a) $\tan(x)$

(b) $-\tan(x)$

(c) $\dfrac{1}{\tan(x)}$

(d) $-\dfrac{1}{\tan(x)}$

a) $\tan(-x)$ ........................

b) $\tan(x + \pi)$ ......................

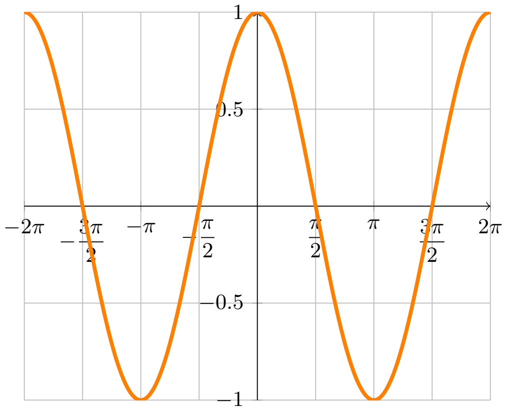
c) $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ ....................

d) $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$ ....................

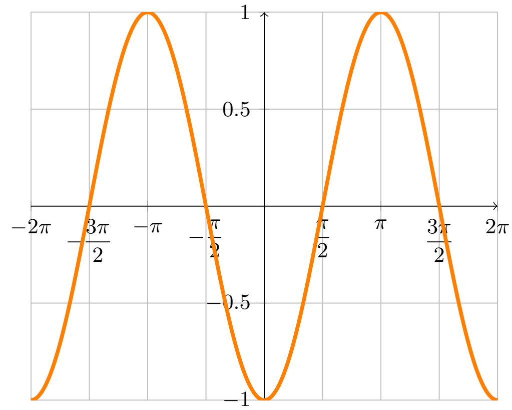
# Courbes représentatives

### Calcul 24.10

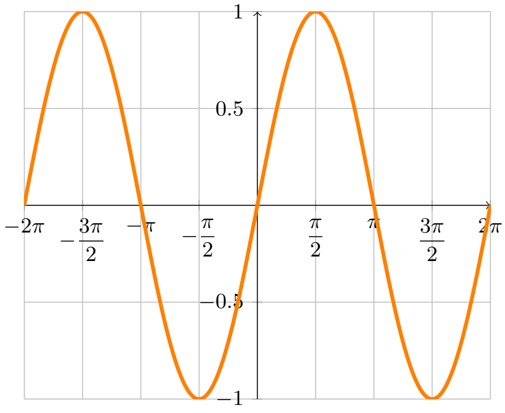
Pour chacune des fonctions suivantes, reconnaître sa courbe représentative parmi les propositions :



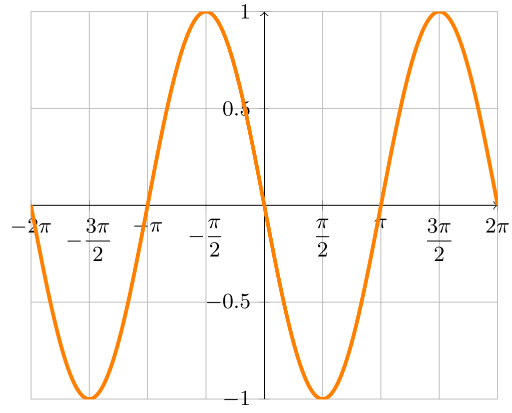
(a)



(c)



(b)



(d)

a) $f : x \longmapsto \cos(x + \pi)$ ..........

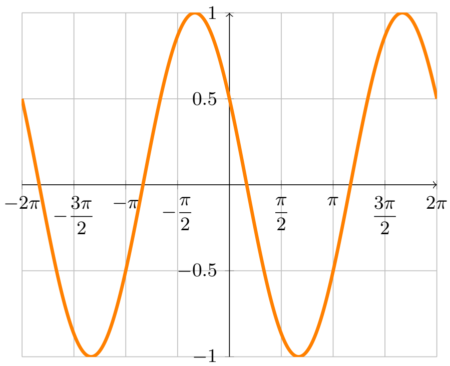
b) $f : x \longmapsto \sin\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ ..........

c) $f : x \longmapsto -\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ ..........

### Calcul 24.11

Pour chacune des courbes suivantes, choisir parmi les propositions la fonction correspondante.

a)




(a) $x \longmapsto \cos(x)$

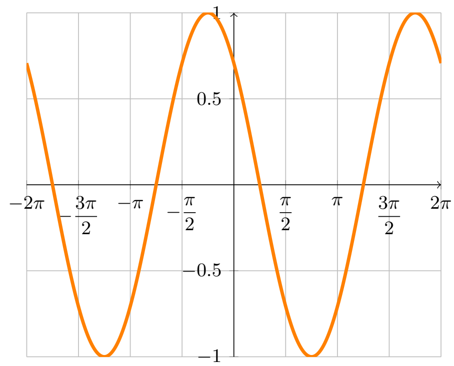
(b) $x \longmapsto \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

(c) $x \longmapsto \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

(d) $x \longmapsto -\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

........................................

b)




(a) $x \longmapsto \sin(x)$

(b) $x \longmapsto \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

(c) $x \longmapsto -\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

(d) $x \longmapsto -\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

........................................

## Calculs plus difficiles

**Formules admises.**

On donne les formules suivantes, appelées *formules d'addition*. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a).$$

### Calcul 24.12 — Avec les formules d'addition (I).

Soit $a \in \mathbb{R}$. Exprimer en fonction de $\cos(a)$ et $\sin(a)$ les expressions suivantes.

a) $\cos(2a)$ ............

b) $\sin(2a)$ ............

### Calcul 24.13 — Avec les formules d'addition (II).

Calculer :

a) $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ (on a $\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6}$) ..

b) $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ ......................

c) $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ (on a $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$) ...

d) $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ ......................

**Calcul 24.14 — Avec les formules d'addition (III).**

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Donner une expression de :

a) $\cos(a-b)$ ..........

b) $\sin(a-b)$ ..........

**Calcul 24.15 — Avec les formules d'addition ?**

Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier :

a) $\cos(3x)\cos(2x) - \sin(3x)\sin(2x)$ ..........

b) $\sin(5x)\cos(2x) + \cos(5x)\sin(2x)$ ..........

**Calcul 24.16 — Formule d'addition de la fonction tangente.**

Pour $x \in \mathbb{R}$, tel que $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on définit $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\tan(a)$, $\tan(b)$ et $\tan(a+b)$ sont bien définis.

Choisir parmi les propositions suivantes une expression de $\tan(a+b)$.

(a) $\dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$ (b) $\dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$ (c) $\dfrac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$ (d) $\dfrac{\tan(a)-\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$

..........

## Réponses mélangées

$]-3,1[$ $\quad \left]\dfrac{1}{2}, \dfrac{7}{6}\right[$ $\quad \dfrac{1}{2}$ $\quad -1$ $\quad 2\sin(a)\cos(a)$ $\quad \left\{-\dfrac{1}{3}, 1\right\}$ $\quad \cos(5x)$ $\quad$ (a) $\quad$ (d)

(b) $\quad 0$ $\quad \sin(x)$ $\quad \dfrac{1}{2}$ $\quad -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ (d) $\quad 0$ $\quad \left\{-2, \dfrac{1}{2}\right\}$ $\quad 1$ $\quad$ (c) $\quad \cos(x)$ $\quad \dfrac{1}{2}$

$\sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$ $\quad$ (c) $\quad$ (c) $\quad$ (b) $\quad \{-1, 1\}$ $\quad \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ $\quad \cos^2(a) - \sin^2(a)$ $\quad \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{2}\right]$

$\{0, 1\}$ $\quad 0$ $\quad \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ $\quad \left\{1, \dfrac{11}{9}\right\}$ $\quad \dfrac{1}{2}$ $\quad 0$ $\quad$ (a) $\quad \{-1, 2\}$ $\quad \left\{-\dfrac{1}{2}, 0\right\}$ $\quad \{-5, 5\}$

$\sin(7x)$ $\quad \left\{-4, \dfrac{3}{2}\right\}$ $\quad -\sqrt{3}$ $\quad -\cos(x)$ $\quad \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ $\quad 1$ $\quad 1$ $\quad \sin(x)$ $\quad \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

$\{1, 7\}$ $\quad \left\{-\dfrac{7}{4}, \dfrac{5}{4}\right\}$ $\quad -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad 1$ $\quad \{-2, 4\}$ $\quad \left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right]$ $\quad -1$ $\quad -\sin(x)$ $\quad$ (b)

$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ $\quad \left]-\infty, -\dfrac{3}{2}\right] \cup [1, +\infty[$ $\quad ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$ $\quad \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$ $\quad \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ (c)

$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \dfrac{1}{2}$ $\quad \left\{-\dfrac{4}{3}, \dfrac{1}{3}\right\}$ $\quad \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ (d) $\quad \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad$ (c) $\quad -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad -\cos(x)$ $\quad \sqrt{3}$ $\quad$ (c)

▶ Réponses et corrigés page 262

# Produit scalaire I

## Quelques calculs généraux pour commencer

**Calcul 25.1 — Méli-mélo.**

Choisir la bonne réponse :

a) On considère les points $A(2,3)$, $B(1,-2)$ et $C\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.

Alors, le vecteur $\vec{p} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées :

(a) $\begin{pmatrix} -14 \\ -6 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 6 \\ -14 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} -6 \\ -14 \end{pmatrix}$

..........

b) L'ensemble des solutions de l'équation $(2x-3)(-5x+15) = 0$ est :

(a) $\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$ (b) $\left\{\frac{3}{2}, 3\right\}$ (c) $\left\{\frac{1}{3}, 3\right\}$ (d) $\left\{3, \frac{2}{3}\right\}$

..........

c) La forme factorisée de l'expression $4x^2 - 9$ est :

(a) $(4x-3)(4x+3)$ (b) $(2x-9)(2x+9)$ (c) $(2x-3)(2x+3)$

..........

d) L'écriture fractionnaire la plus simple de l'expression $\frac{4x+5}{3} - \frac{9x-2}{5}$ est :

(a) $\frac{-5x+7}{8}$ (b) $\frac{-7x+31}{15}$ (c) $\frac{-7x+19}{12}$

..........

e) L'écriture scientifique du nombre $\frac{4 \times 10^{-4} \times 6 \times 10^{-6}}{5 \times 10^{-5}}$ est :

(a) $4{,}8 \times 10^{-5}$ (b) $4{,}8 \times 10^{-15}$ (c) $4{,}8 \times 10^{5}$ (d) $4{,}8 \times 10^{-6}$

..........

**Remarque**
Dans toute cette fiche, on fixe un repère orthonormé du plan. Les coordonnées des points et des vecteurs sont donnés relativement à ce repère.

# Tests d'orthogonalité

### Calcul 25.2

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux : « oui » ou « non » ? *On calculera le produit scalaire* $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ ..........

b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ ..........

c) $\vec{u} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ ..........

### Calcul 25.3

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux : « oui » ou « non » ?

a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 7 \times 10^{-8} \\ 4 \times 10^{5} \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \times 10^{4} \\ -7 \times 10^{-9} \end{pmatrix}$ ..........

b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{2}{x} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$ où $x$ est un nombre réel non nul ..........

c) $\vec{u} = \begin{pmatrix} x-2 \\ 3+x \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x+2 \\ 3-x \end{pmatrix}$ où $x$ est un nombre réel ..........

### Calcul 25.4 — Trouver le réel $x$.

Dans chacun des cas suivants, déterminer le réel $x$ pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x \\ -3 \end{pmatrix}$ ..........

b) $\vec{u}\begin{pmatrix} -x \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ x-4 \end{pmatrix}$ ..........

c) $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{1+x}{2} \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{x-1}{5} \end{pmatrix}$ ..........

### Calcul 25.5 — Trouver les deux réels $x$.

Dans chacun des cas suivants, déterminer les deux réels $x$ pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix} \sqrt{17}x-3 \\ 5+9x \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \sqrt{17}x+3 \\ 5-9x \end{pmatrix}$ ..........

b) $\vec{u}\begin{pmatrix} 4x-7 \\ x+1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 4x-7 \\ 20x-35 \end{pmatrix}$ ..........

# Équations réduites de droite

### Calcul 25.6

Déterminer l'équation réduite de la droite $(d_1)$ passant par le point $\mathrm{A}(-6,-4)$ et dont un vecteur normal est $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$ ........................................................

### Calcul 25.7

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation réduite de la droite donnée.

a) La droite $(d_2)$ passant par le point $\mathrm{B}\left(\frac{1}{3},-\frac{3}{2}\right)$ et dont un vecteur normal est $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$.

........................................................

b) La droite $(d_3)$ passant par le point $\mathrm{C}(\sqrt{7},-3\sqrt{7})$ et dont un vecteur normal est $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$.

........................................................

c) La droite $(d_4)$ passant par le point $\mathrm{D}\left(\frac{3}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et dont un vecteur normal est $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$.

........................................................

### Calcul 25.8

Déterminer l'équation réduite de la droite $(d_5)$ passant par le point $\mathrm{E}(\sqrt{5},-1)$ et perpendiculaire à la droite $(D)$ d'équation $x-\sqrt{5}y+5=0$ ....................................

### Calcul 25.9

On considère les points $\mathrm{A}(-1,-3)$, $\mathrm{B}(2,6)$, $\mathrm{C}(17,1)$. Déterminer :

a) l'équation réduite de la droite $(d_6)$ passant par le point A et perpendiculaire à la droite (AB)

........................................................

b) l'équation réduite de la droite $(d_7)$ passant par le point C et perpendiculaire à la droite (BC)

........................................................

## Calculs plus difficiles

**Calcul 25.10 — Être ou ne pas être un rectangle ?**

On considère les points $A\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$, $B\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$, $C\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ et $D(x, y)$.

a) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ ..........

b) Exprimer en fonction de $x$ le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD}$ ..........

c) Exprimer en fonction de $y$ le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$ ..........

d) Déterminer les réels $x$ et $y$ pour que le quadrilatère ABDC soit un rectangle .....

**Calcul 25.11**

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2\sqrt{2}x + 3$.

Déterminer les valeurs de $x$ telles que les tangentes aux points d'abscisse $x$ et $-x$ soient perpendiculaires.

..........

**Calcul 25.12**

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + bx$.

Déterminer les valeurs possibles de $b$, en sachant que les tangentes aux points d'abscisse 1 et $-1$ sont perpendiculaires.

..........

**Réponses mélangées**

$y = -\sqrt{5}x + 4$ $\quad$ $y = \frac{3}{4}x - \frac{7}{4}$ $\quad$ a $\quad$ $\frac{47}{17}$ $\quad$ $-\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{2}$ $\quad$ $0$ $\quad$ b $\quad$ $2x + 1$

non $\quad$ oui $\quad$ $\frac{7}{4}$ ou $\frac{2}{9}$ $\quad$ $y = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{4}$ $\quad$ oui $\quad$ $\frac{3}{2}y - \frac{15}{4}$ $\quad$ $y = 3x - 50$

$y = -\frac{1}{3}x - \frac{10}{3}$ $\quad$ c $\quad$ b $\quad$ $-\frac{5}{2}$ $\quad$ $y = \frac{2}{5}x - \frac{8}{5}$ $\quad$ $6$ $\quad$ $y = 4x - 7\sqrt{7}$

$(x, y) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ $\quad$ oui $\quad$ c $\quad$ $b = \sqrt{3}$ ou $b = -\sqrt{3}$ $\quad$ $x = \frac{3}{2}$ ou $x = -\frac{3}{2}$ $\quad$ oui $\quad$ oui

► Réponses et corrigés page 265

# Produit scalaire II

## Quelques calculs généraux pour commencer

**Calcul 26.1**

Simplifier au maximum les expressions suivantes.

*On donnera le résultat sous forme de produit de puissances.*

a) $\dfrac{3^{200} \times 8^{10}}{(-9)^{99} \times 2^{31}}$ ..................

b) $\dfrac{\dfrac{(5^3 \times 2^{-3})^2}{(2 \times 25)^3}}{\dfrac{10^2 \times 5}{28}}$ ..................

**Calcul 26.2**

Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer les expressions suivantes.

*Des simplifications doivent avoir lieu.*

a) $(x-2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)$ ..................

b) $(x+1)(x^7 - x^6 + x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1)$ ..................

c) $(x+1)(x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$ ..................

**Remarque**
Dans toute cette fiche, on fixe une base orthonormée du plan.
Les coordonnées des vecteurs seront toujours données dans cette base.

## Autour des vecteurs normaux

**Calcul 26.3 — Un calcul fondamental.**

a) Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs.

Donner une expression de $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ..................

b) Soient $a$ et $b$ des réels. Parmi les vecteurs suivants, lequel est orthogonal à $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ?

(a) $\vec{n_1}\begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}$ (b) $\vec{n_2}\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ (c) $\vec{n_3}\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ (d) $\vec{n_4}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

..................

### Calcul 26.4 — Des droites et des vecteurs.

Pour chacune des questions suivantes, choisir la bonne réponse.

a) La droite $(d_1)$ a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\-5\end{pmatrix}$. La droite $(d_2)$ est perpendiculaire à $(d_1)$.

Parmi les vecteurs suivants, lequel est un vecteur directeur de $(d_2)$ ?

(a) $\vec{u_1}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ (b) $\vec{u_2}\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$ (c) $\vec{u_3}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ (d) $\vec{u_4}\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$

........................................................................................

b) La droite $(d)$ a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$. Parmi les vecteurs suivants, lequel est normal à $(d)$ ?

(a) $\vec{n_1}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ (b) $\vec{n_2}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ (c) $\vec{n_3}\begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix}$ (d) $\vec{n_4}\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$

........................................................................................

### Calcul 26.5 — Vecteurs normaux à une droite.

Dans chacun des cas suivants, donner un vecteur normal à la droite (AB).

a) $A(2,3)$ et $B(4,1)$ ..................

b) $A(-2,3)$ et $B(2,1)$ ................

c) $A(-4,-5)$ et $B(-2,-2)$ ..........

d) $A(-1,1)$ et $B\left(-2,-\dfrac{3}{2}\right)$ ..........

### Calcul 26.6 — Deux équations.

Soit $m \in \mathbb{R}$.

a) Trouver la valeur du réel $m$ pour que $\vec{u}\begin{pmatrix}1+m\\m+5\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}2-m\\m-4\end{pmatrix}$ soient orthogonaux.

........................................................................................

b) On considère les points $A(-1,2)$ et $B(m,3)$.

Trouver l'unique valeur de $m$ pour que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ soit normal à (AB) ............

## Équations de droites et vecteurs normaux

**Calcul 26.7 — Quatre calculs de vecteurs directeurs et normaux.**

Pour chacune des droites suivantes, définies par une équation cartésienne, déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ et d'un vecteur normal $\vec{n}$.

⊛ Pour $(D_1) : 2x + 3y + 1 = 0$, on a

a) $\vec{n} = \dots$

b) $\vec{u} = \dots$

⊛ Pour $(D_2) : -3x + 5y + 7 = 0$, on a

c) $\vec{u} = \dots$

d) $\vec{n} = \dots$

⊛ Pour $(D_3) : \frac{1}{3}x - 6y + 13 = 0$, on a

e) $\vec{u} = \dots$

f) $\vec{n} = \dots$

⊛ Pour $(D_4) : \sqrt{2}x - \pi y + 4 = 0$, on a

g) $\vec{u} = \dots$

h) $\vec{n} = \dots$

**Calcul 26.8**

Dans chacun des cas suivants, choisir la bonne réponse.

a) Soit $(D)$ la droite d'équation $x - 2y + 3 = 0$. Parmi les vecteurs suivants, lequel est un vecteur normal ?

ⓐ $\vec{n_1}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ ⓑ $\vec{n_2}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ ⓒ $\vec{n_3}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ ⓓ $\vec{n_4}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

..........

b) Soit $(d)$ la droite d'équation cartésienne $x - 3y - 2 = 0$. Parmi les vecteurs suivants, lequel n'est pas un vecteur normal ?

ⓐ $\vec{n_1}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ ⓑ $\vec{n_2}\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}$ ⓒ $\vec{n_3}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-1\end{pmatrix}$ ⓓ $\vec{n_4}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

..........

c) Un vecteur normal de la droite $(d)$ d'équation $2x - 5y - 100 = 0$ est :

ⓐ $\vec{n_1}\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$ ⓑ $\vec{n_2}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ ⓒ $\vec{n_3}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ ⓓ $\vec{n_4}\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$

..........

## Calcul 26.9

Dans chacun des cas suivants, choisir la bonne réponse.

a) Soit $(D)$ la droite d'équation $y = x$. Parmi les vecteurs suivants, lesquels sont normaux à $(D)$ ?

ⓐ $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ ⓑ $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ ⓒ $\overrightarrow{n_3}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ ⓓ $\overrightarrow{n_4}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

b) Soit $(D)$ une droite parallèle à l'axe $(\mathrm{O}x)$. Lesquels de ces vecteurs sont normaux à $(D)$ ?

ⓐ $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ ⓑ $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ ⓒ $\overrightarrow{n_3}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ ⓓ $\overrightarrow{n_4}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

c) Soit $(D)$ la droite d'équation $y = 4x - 2$. Parmi les vecteurs suivants, lequel est normal à $(D)$ ?

ⓐ $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ ⓑ $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$ ⓒ $\overrightarrow{n_3}\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}$ ⓓ $\overrightarrow{n_4}\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$

## Calcul 26.10

Dans chacun des cas suivants, les droites sont-elles perpendiculaires ? On répondra par « oui » ou « non ».

a) $(d_1) : 3x - y + 1 = 0$ et $(d_2) : x + 3y - 2 = 0$

b) $(d_1) : 2x - 3y + 1 = 0$ et $(d_2) : 4x + 3y - 6 = 0$

c) $(d_1) : 2x + y - 3 = 0$ et $(d_2) : y = \dfrac{1}{2}x + 5$

d) $(d_1) : (1 + \sqrt{2})x - y + 3 = 0$ et $(d_2) : (1 - \sqrt{2})x + y = 0$

## Calcul 26.11 — Équations cartésiennes.

Déterminer une équation cartésienne de :

a) la droite passant par $\mathrm{A}(2, -1)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

b) la droite passant par $\mathrm{A}(1, -2)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$

c) la droite passant par $\mathrm{A}\left(6, -\dfrac{1}{2}\right)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\-7\end{pmatrix}$

## Projeté orthogonal et distance

**Calcul 26.12 — Projection orthogonale (I).**

Déterminer les coordonnées de :

a) H, le projeté orthogonal de $M(1,3)$ sur la droite $(d)$ d'équation $x - y = 0$ ..........

b) H, le projeté orthogonal de $M(1,5)$ sur la droite $(d)$ d'équation $y = x + 4$ ..........

**Calcul 26.13 — Projection orthogonale (II).**

Déterminer les coordonnées de :

a) H, le projeté orthogonal de $M(1,2)$ sur la droite $(d)$ : $3x - 4y = 0$ ..................

b) H, le projeté orthogonal de $M\left(\frac{7}{2}, 0\right)$ sur la droite $(d)$ : $4x + 3y - 9 = 0$ .............

**Calcul 26.14 — Une distance (I).**

Calculer la distance entre le point $M(-1,1)$ et la droite $(d)$ d'équation $3x - 4y - 3 = 0$ .....

**Calcul 26.15 — Une distance (II).**

On considère les points $A(-10,-1)$, $B(-4,-5)$ et $C(-2,-2)$.

Déterminer la distance entre le point A et la droite (BC).

..............................................................................

## Équations de cercles

**Calcul 26.16**

Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega$ et de rayon $r$.

a) $\Omega(-1,2)$ et $r = 2$ ...............................................

b) $\Omega\left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$ et $r = \frac{\sqrt{122}}{2}$ ...........................................

c) $\Omega(\mathrm{e},2)$ et $r = \sqrt{5}$ ...............................................

**Calcul 26.17 — Retrouver le centre et le rayon (I).**

On considère l'équation $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ et on admet qu'il s'agit de celle d'un cercle.

En s'inspirant de la méthode pour trouver la forme canonique d'un trinôme du second degré,

a) déterminer le centre de ce cercle ..........

b) déterminer le rayon de ce cercle ..........

**Calcul 26.18 — Retrouver le centre et le rayon (II).**

Pour chacune des équations de cercle suivantes, déterminer le centre $\Omega$ et le rayon $r$ du cercle.

⊛ Pour $x^2 + y^2 - 2x + 3y = 0$ :

a) $\Omega =$ .......... b) $r =$ ..........

⊛ Pour $x^2 + y^2 + x - 2y = 0$ :

c) $\Omega =$ .......... d) $r =$ ..........

⊛ Pour $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 5 = 0$ :

e) $\Omega =$ .......... f) $r =$ ..........

**Calcul 26.19 — Des cercles inconnus.**

Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}$ :

a) de diamètre [AB] avec $\mathrm{A}(-1, -1)$ et $\mathrm{B}(5, 7)$ ..........

b) de centre $\Omega(5, 2)$ et passant par O ..........

c) de centre $\Omega(-4, 3)$ et passant par $\mathrm{B}(-1, 2)$ ..........

## Calculs plus difficiles

**Calcul 26.20 — Distance d'un point à une droite : formule générale.**

Soient $a$ et $b$ deux réels non nuls. On considère la droite $(D)$ d'équation $ax + by + c = 0$.

On considère $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}, y_\mathrm{A})$ un point du plan et on note H son projeté orthogonal sur la droite $(D)$.

a) Donner les coordonnées d'un vecteur normal $\vec{n}$ à la droite $(D)$ ..........................

Comme le point H est le projeté orthogonal de A sur $(D)$, les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires.

Il existe donc un réel $k$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{AH}} = k\vec{n}$, qu'on fixe.

Déterminer les coordonnées $x_\mathrm{H}$ et $y_\mathrm{H}$ de H en fonction de $x_\mathrm{A}, y_\mathrm{A}$, de $a, b$ et de $k$.

b) $x_\mathrm{H} =$ .............

c) $y_\mathrm{H} =$ .............

d) Sachant que le point H appartient à la droite $(D)$, déterminer la valeur de $k$.

*Cette valeur de $k$ dépend de $x_\mathrm{A}$, $y_\mathrm{A}$, $a$ et $b$.*

.................................................................

e) En déduire la valeur de la distance de A à $(D)$, en fonction de $x_\mathrm{A}$, de $y_\mathrm{A}$ et de $a$, $b$ et $c$.

.................................................................

**Calcul 26.21 — Trouver la tangente connaissant le cercle.**

On considère le cercle $\mathscr{C}$ d'équation $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 2$.

Déterminer une équation de la tangente au cercle $\mathscr{C}$ au point $\mathrm{A}(2, 3)$ ...

**Calcul 26.22 — Trouver le cercle connaissant la tangente.**

On considère la droite $(D)$ d'équation $x + 2y - 5 = 0$ et le point $\Omega\left(-2, \dfrac{-3}{2}\right)$.

Déterminer une équation du cercle de centre $\Omega$ tangent à $(D)$ ....

## Réponses mélangées

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^8-1$ | a | $xx'+yy'$ | c | $x+y-5=0$ | $\mathrm{H}\left(\frac{27}{10},-\frac{3}{5}\right)$ | 9 | $(2,-3)$ |
| $\frac{\sqrt{13}}{2}$ | c | oui | d | $5x-7y-\frac{67}{2}=0$ | b et c | $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$ | $x_\mathrm{A}+ka$ |
| $(x-2)^2+(y-3)^2=5^2$ | $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\vec{u}\begin{pmatrix}\pi\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}$ | $\frac{7}{5^3\times 2^9}$ | a | $\frac{\sqrt{5}}{2}$ | $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ |
| $x^2+y^2+2x-4y+1=0$ | $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ | $\mathrm{H}(1,5)$ | $2\sqrt{13}$ | non | 4 | d | $2x+y=3$ |
| non | $\mathrm{H}(2,2)$ | $x^7+1$ | $\sqrt{10}$ | $\vec{n}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$ | oui | $x-2y-5=0$ | $-\frac{3^2}{2}$ |
| $x^2+y^2+4x+3y-\frac{55}{4}=0$ | $x^2+y^2+8x-6y+15=0$ | $y_\mathrm{A}+kb$ | $(2,-1)$ | $\frac{\lvert ax_\mathrm{A}+by_\mathrm{A}+c\rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$ | b | 2 | $\vec{n}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-6\end{pmatrix}$ |
| $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ | $\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\-3\end{pmatrix}$ | $\left(1,-\frac{3}{2}\right)$ | $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ | $\mathrm{H}\left(\frac{8}{5},\frac{6}{5}\right)$ | $x^5-32$ | $x^2+y^2-2\mathrm{e}x-4y+\mathrm{e}^2-1=0$ | $\vec{n}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-\pi\end{pmatrix}$ |
| a et b | $x^2+y^2-10x-4y=0$ | $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ | $\left(-\frac{1}{2},1\right)$ | $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ | $-\frac{ax_\mathrm{A}+by_\mathrm{A}+c}{a^2+b^2}$ | $x^2+y^2+x-7y-18=0$ | |

► Réponses et corrigés page 269

# Logique

## Quelques calculs généraux pour commencer

**Calcul 27.1 — Des développements.**

Développer et réduire les expressions suivantes.

a) $(7+8c)^2$ ................

b) $(2x-6)^2$ ................

c) $(5y-9)(5y+9)$ .........

d) $\left(\dfrac{2}{3}x-11\right)^2$ ............

e) $(x-1)(x+2)(x+1)(x-2)$

f) $(xy-x^2+y^2)(xy+x^2-y^2)$

**Calcul 27.2 — Des fractions.**

Mettre les expressions suivantes au même dénominateur.

a) $\dfrac{x}{xy-y^2}+\dfrac{2x-y}{xy-x^2}$ ................................................

b) $\dfrac{x^2}{x^2-4x}+\dfrac{6}{6-3x}+\dfrac{1}{x+2}$ ............................................

c) $\dfrac{2x+y}{2x^2-xy}+\dfrac{16x}{y^2-4x^2}+\dfrac{2x-y}{2x^2+xy}$ ....................................

d) $\left(x-\dfrac{x^2+y^2}{x+y}\right)\times\left(\dfrac{1}{y}+\dfrac{2}{x-y}\right)$ ....................................

## Généralités sur les propositions

**Entraînement 27.3**

Les propositions suivantes sont-elles vraies ? *Répondez par « oui » ou « non ».*

a) 5 est pair et 7 est impair. .......

b) 5 est pair ou 7 est impair. ......

c) 12 est un multiple de 4 ou 6. ...

d) 12 est un multiple de 5 ou 24. ..

e) $(4<5)$ et (8 divise 9) .........

f) $(4<5)$ ou (8 divise 16) ........

### Entraînement 27.4

Les propositions suivantes sont-elles vraies ? *Répondez par « oui » ou « non ».*

a) Si j'habite en Espagne, alors j'habite à Madrid ........................................

b) Si je n'ai pas de sœur, alors je suis fils unique ........................................

c) Si $a$ et $b$ sont des nombres pairs, alors $a+b$ est pair ........................................

d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $x > 1$, alors $\dfrac{2x}{x+1} > 1$ ........................................

### Entraînement 27.5

Les propositions suivantes sont-elles vraies ? *Répondez par « oui » ou « non ».*

a) $\exists x \in \mathbb{N},\ x^2 > 7$ ................

b) $\forall x \in \mathbb{N},\ x^2 > 7$ ................

### Entraînement 27.6 — Négation de phrases.

Quelle est la négation des phrases suivantes ?

a) « Tous les bonbons dans le sac sont rouges. »

.....................

b) « Certains élèves ont un âge impair. »

.....................

c) « Si un nombre entier est divisible par 4, alors il se termine par 4. »

.....................

d) « La fonction $f$ est croissante. »

.....................

e) « La fonction $f$ est à valeurs strictement positives »

.....................

**Entraînement 27.7** — **Avec des quantificateurs.**

Quelle est la négation des propositions suivantes ? Choisir la bonne réponse.

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + x + 1 > 0$

- (a) $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + x + 1 < 0$
- (b) $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + x + 1 \leqslant 0$
- (c) $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 + x + 1 \leqslant 0$

....................................

b) $\exists n \in \mathbb{N},\ n^2 = n$

- (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ n^2 \neq n$
- (b) $\forall n \in \mathbb{N},\ n^2 = n$
- (c) $\exists n \in \mathbb{N},\ n^2 \neq n$

....................................

c) $\exists x \in \mathbb{R},\ x + 8 = 15$

- (a) $\forall x \in \mathbb{R},\ x + 8 = 15$
- (b) $\forall x \in \mathbb{R},\ x + 8 \neq 15$
- (c) $\forall x \in \mathbb{R},\ x + 8 > 15$

....................................

d) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, n \leqslant x < n + 1$

- (a) $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \leqslant x < n + 1$
- (b) $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ x < n$ ou $x \geqslant n + 1$
- (c) $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ x \neq n$ ou $x \neq n + 1$

....................................

# Autour de l'implication

**Entraînement 27.8**

Dans chacun des cas suivants, déterminer laquelle des affirmations est vraie.

- (a) L'implication « $P \Longrightarrow Q$ » est vraie.
- (b) L'implication « $Q \Longrightarrow P$ » est vraie.
- (c) Aucune implication n'est vraie.
- (d) Les deux implications sont vraies.

a) $P$ : « Jean Dupont est le fils de Pierre Dupont » et $Q$ : « Pierre Dupont est le père de Jean Dupont »

..............................................................................

b) $P$ : « Je suis européen » et $Q$ : « Je suis français » ....................................

c) $P$ : « ABCD est un rectangle » et $Q$ : « ABCD est un carré » ..........................

**Entraînement 27.9**

Dans chacun des cas suivants, déterminer laquelle des affirmations est vraie.

- (a) « $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \Longrightarrow Q(n)$ » est vraie.
- (b) « $\forall n \in \mathbb{N},\ Q(n) \Longrightarrow P(n)$ » est vraie.
- (c) Aucune proposition n'est vraie.
- (d) Les deux propositions sont vraies.

a) $P(n)$ : « $n \geqslant 5$ » et $Q(n)$ : « $n \leqslant 6$ » ..............................................

b) $P(n)$ : « $n = 0$ ou $n = 1$ » et $Q(n)$ : « $n^2 = n$ » ....................................

**Entraînement 27.10**

Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ xy > 0 \implies (x > 0 \text{ et } y > 0)$ ................................

b) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ (x > 0 \text{ et } y > 0) \implies xy > 0$ ................................

**Entraînement 27.11 — Un peu de vocabulaire.**

a) Quelle phrase correspond à $P \Longrightarrow Q$ ?

(a) Pour que $Q$, il faut que $P$.

(b) Pour que $Q$, il suffit que $P$.

(c) Pour que $P$, il suffit que $Q$.

..........................................................................

b) Quelles sont les deux phrases correspondant à $P \Longrightarrow Q$ ?

(a) $P$ est une condition suffisante pour $Q$.

(b) Si $P$ alors $Q$.

(c) $P$ est une condition nécessaire pour $Q$.

..........................................................................

c) Quelles sont les deux phrases correspondant à $P \Longrightarrow Q$ ?

(a) Pour avoir $Q$, il est nécessaire d'avoir $P$.

(b) Pour avoir $P$, il est nécessaire d'avoir $Q$.

(c) Pour avoir $Q$, il suffit d'avoir $P$.

..........................................................................

## Calculs plus difficiles

**Entraînement 27.12**

Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

a) $\forall x \in \mathbb{N},\ \exists y \in \mathbb{N},\ x \leqslant y$ ..................................................

b) $\exists y \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{N},\ x \leqslant y$ ..................................................

c) $(\forall x \in \mathbb{N},\ \exists y \in \mathbb{N},\ x \leqslant y) \iff (\exists y \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{N},\ x \leqslant y)$ ........................

**Entraînement 27.13 — Négation de proposition quantifiée (I).**

La négation de la proposition « $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0, |u_n - \ell| < \varepsilon$ » est

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall n_0 \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant n_0,\ |u_n - \ell| > \varepsilon.$$

Est-ce vrai ou faux ? ..................................................

**Entraînement 27.14 — Négation de proposition quantifiée (II).**

Donner la négation des propositions suivantes.

a) $\forall x \in E,\ \forall y \geqslant 0,\ xy \geqslant 1$ ..........................................

b) $\forall a \in I,\ \forall b \in I,\ (a < b \implies f(a) < f(b))$ .........................

**Entraînement 27.15 — Négation de proposition quantifiée (III).**

Soient $a$ et $b$ deux réels. On considère la proposition $P$ : « Si $(a+b)^2 = a^2 + b^2$, alors $a = 0$ ou $b = 0$ ».

La négation de $P$ est :

a) $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ ou $(a = 0$ et $b = 0)$

c) $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ et $(a \neq 0$ ou $b \neq 0)$

b) $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ et $(a \neq 0$ et $b \neq 0)$

..........................................................................

**Réponses mélangées**

b $\quad \dfrac{4}{9}x^2 - \dfrac{44}{3}x + 121 \quad$ « La fonction $f$ n'est pas croissante » $\quad 64c^2 + 112c + 49$

$4x^2 - 24x + 36 \quad$ « Tous les élèves ont un âge pair » $\quad$ non $\quad$ b $\quad$ a

$\exists x \in E,\ \exists y \geqslant 0,\ xy < 1 \quad$ oui $\quad$ b $\quad$ 1 $\quad$ non $\quad$ « La fonction atteint au moins une valeur négative (au sens large) »

oui $\quad$ c $\quad$ fausse $\quad$ b $\quad \dfrac{-2}{x} \quad$ non $\quad$ « Au moins un bonbon du sac n'est pas rouge » $\quad$ non

$\dfrac{x-y}{xy} \quad$ b $\quad$ oui $\quad x^4 - 5x^2 + 4 \quad$ « Il existe un nombre entier divisible par 4 mais qui ne se termine pas par 4 » $\quad$ vraie

$-x^4 + 3x^2y^2 - y^4 \quad$ fausse $\quad$ faux $\quad$ oui $\quad$ a et b $\quad \dfrac{x^3 - x^2 - 6x + 24}{(x-4)(x-2)(x+2)}$

non $\quad$ b et c $\quad$ d $\quad$ fausse $\quad \exists a \in I,\ \exists b \in I,\ \big(a < b$ et $f(a) \geqslant f(b)\big)$

c $\quad$ b $\quad$ oui $\quad 25y^2 - 81 \quad$ d $\quad$ non $\quad$ oui $\quad$ vraie

► Réponses et corrigés page 274

# Théorie des ensembles

## Quelques calculs généraux pour commencer

**Calcul 28.1 — Des équations.**

Donner la valeur de la solution de chacune des équations suivantes.

a) $2x + 3 = -x + \dfrac{1}{5}$ ..............

b) $\dfrac{1-x}{2} = \dfrac{x+1}{5}$ ..............

c) $\dfrac{x}{2} + x = 1 - \dfrac{x}{4}$ ..............

d) $x + \dfrac{1}{3} - \dfrac{x}{3} = \dfrac{x}{3} + 1$ ..............

**Calcul 28.2 — Des factorisations.**

Factoriser les expressions suivantes.

a) $x^2 - 6x + 9$ ..............

b) $3x^2 - 12$ ..............

c) $x^2 + x + \dfrac{1}{4}$ ..............

## Des intervalles

**Calcul 28.3**

Donner l'ensemble des solutions des inéquations ou systèmes d'inéquations suivants.

*On donnera le résultat sous la forme d'un intervalle.*

a) $2 - \dfrac{x}{2} \leqslant x + \dfrac{1}{4}$ ..............

b) $\left(1 - \dfrac{1}{4}\right)x \leqslant 1 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{2}$ ..............

c) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{4}\right)$ ..............

d) $\begin{cases} \dfrac{1}{2} - x \geqslant x + \dfrac{1}{3} \\ x - \dfrac{4}{5} < 2x + \dfrac{1}{10} \end{cases}$ ..............

# Opérations ensemblistes

### Calcul 28.4 — Des résolutions d'inéquations.

Pour quelles valeurs de $x$ les appartenances suivantes sont-elles vérifiées ?

*On donnera le résultat sous la forme d'un ensemble.*

a) $2 + 2x \in ]-2, 3]$ ..................

b) $3x + 1 \in \left]\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{3}\right[$ ..............

c) $\dfrac{3-x}{5} \in \left]\dfrac{2}{15}, \dfrac{34}{35}\right]$ ................

d) $\dfrac{1}{2-3x} \in \left[\dfrac{2}{3}, \dfrac{7}{4}\right[$ .................

### Calcul 28.5 — Inclusions d'intervalles (I).

A-t-on, « oui » ou « non », les inclusions suivantes ?

a) $\left]\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}\right[ \subset \left]\dfrac{7}{15}, \dfrac{4}{5}\right]$ ..............

b) $\left]-\infty, \dfrac{3}{5}\right] \subset \left]-\infty, \dfrac{7}{12}\right]$ ..........

c) $\left]\dfrac{5}{4}, +\infty\right[ \subset \left[\dfrac{25}{20}, +\infty\right[$ ..........

d) $\left]1 + \dfrac{2}{7}, 3 + \dfrac{1}{4}\right] \subset \left]\dfrac{18}{14}, \dfrac{26}{8}\right[$ .....

### Calcul 28.6 — Inclusions d'intervalles (II).

A-t-on, « oui » ou « non », les inclusions suivantes ?

a) $\left[1, \dfrac{7}{3}\right[ \subset \left]\dfrac{4}{3}, \dfrac{9}{4}\right]$ ................

b) $\left]4, 2 + \dfrac{8}{3}\right] \subset \left]-\infty, \dfrac{13}{2}\right]$ .........

c) $\left]\dfrac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}, +\infty\right[ \subset \left[\dfrac{3}{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}}, +\infty\right[$ ..

d) $\left]\dfrac{2}{1 + \frac{1}{2}}, \dfrac{3}{1 + \frac{1}{3}}\right] \subset ]1, 2[$ .........

# Calculs plus difficiles

### Calcul 28.7 — Inclusions d'intervalles paramétrés.

Soit $a > 0$. Déterminer à quelle condition sur $a$ on a l'inclusion indiquée.

*On donnera la réponse sous la forme « $a \geqslant \cdots$ » ou « $a \leqslant \cdots$ ».*

a) $[a, +\infty[ \subset [2, +\infty[$ ........

b) $[a, +\infty[ \subset [a^2, +\infty[$ ......

c) $[\sqrt{a}, +\infty[ \subset [a^2, +\infty[$ ...

d) $]-\infty, a^2] \subset ]-\infty, a^3]$ ....

**Calcul 28.8** — **Intersection d'intervalles – avec un paramètre.**

On note $a$ un paramètre réel. Déterminer l'ensemble des valeurs de $a$ pour lesquelles les intersections suivantes sont non vides.

*On donnera la réponse sous la forme d'un intervalle.*

a) $]-\infty, a+1[ \cap \left]\frac{1}{3}, +\infty\right[$ ........................................

b) $\left]-\infty, \frac{a}{3}+2\right] \cap \left[\frac{1}{3}, 2\right]$ ........................................

c) $\left]-\infty, \frac{1}{5}-\frac{3}{5}a\right] \cap \left]\frac{3}{10}a-1, +\infty\right[$ ........................................

d) $\left]2-\frac{3a}{4}, +\infty\right[ \cap \left]\frac{1}{4}, \frac{2}{5}\right[$ ........................................

**Calcul 28.9** — **Cardinal.**

On appelle *cardinal* d'un ensemble fini $A$, et on note $\mathsf{Card}(A)$, le nombre d'éléments de cet ensemble.

On donne la formule suivante :

$$\mathsf{Card}(A \cup B) = \mathsf{Card}(A) + \mathsf{Card}(B) - \mathsf{Card}(A \cap B).$$

On fixe trois ensembles finis $A$, $B$ et $C$.

Exprimer en fonction des cardinaux

$$\mathsf{Card}(A),\ \mathsf{Card}(B),\ \mathsf{Card}(C),\ \mathsf{Card}(A\cap B),\ \mathsf{Card}(A\cap C),\ \mathsf{Card}(B\cap C) \quad \text{et} \quad \mathsf{Card}(A\cap B\cap C)$$

le cardinal $\mathsf{Card}(A \cup B \cup C)$.

........

## Réponses mélangées

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| voir corrigé | $\left]-\frac{9}{10}, \frac{1}{12}\right]$ | $a \leqslant 1$ | $\left]-\infty, \frac{4}{3}\right[$ | $\left]\frac{32}{15}, +\infty\right[$ | $]-\infty, 0[$ | $a \geqslant 2$ | non |
| $\frac{3}{7}$ | oui | $\left]-\infty, \frac{2}{5}\right]$ | oui | $a \leqslant 1$ | oui | $\left[\frac{7}{6}, +\infty\right[$ | $-\frac{14}{15}$ |
| $\left]-\frac{2}{3}, +\infty\right[$ | $(x-3)^2$ | $3(x-2)(x+2)$ | non | non | non | non | $a \geqslant 1$ |
| $[-5, +\infty[$ | $\frac{4}{7}$ | $\left]\frac{3\pi-2}{6}, \frac{5\pi-3}{9}\right[$ | $\left[\frac{1}{6}, \frac{10}{21}\right[$ | $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$ | $x \in \left]-2, \frac{1}{2}\right]$ | $2$ | $\left[-\frac{13}{7}, \frac{7}{3}\right[$ |

▶ Réponses et corrigés page 278

# Réponses et corrigés

# Fiche n° 1. Forme canonique

## Réponses

**1.1** a) ............ $\boxed{4x^2+12x+9}$

**1.1** b) ............ $\boxed{9y^2-24y+16}$

**1.1** c) ............ $\boxed{u^2-2\sqrt{7}u+7}$

**1.1** d) ............ $\boxed{3t^2+6\sqrt{5}t+15}$

**1.1** e) ............ $\boxed{\frac{9}{4}z^2+6z+4}$

**1.1** f) ............ $\boxed{\frac{4}{25}v^2-\frac{8}{15}v+\frac{4}{9}}$

**1.2** a) ............ $\boxed{(x-5)(x+5)}$

**1.2** b) ............ $\boxed{(2t-3)(2t+3)}$

**1.2** c) ............ $\boxed{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}y-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{3}y+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}$

**1.2** d) ............ $\boxed{(u+3)^2}$

**1.2** e) ............ $\boxed{(3v-2)^2}$

**1.2** f) ............ $\boxed{\left(\sqrt{2}z+5\right)^2}$

**1.3** a) ............ $\boxed{\{0\}}$

**1.3** b) ............ $\boxed{\left\{-\sqrt{17},\sqrt{17}\right\}}$

**1.3** c) ............ $\boxed{\{-5\}}$

**1.3** d) ............ $\boxed{\left\{\sqrt{2}\right\}}$

**1.3** e) ............ $\boxed{\left\{-\sqrt{5},\sqrt{5}\right\}}$

**1.3** f) ............ $\boxed{\left\{-\frac{4\sqrt{5}}{15},\frac{4\sqrt{5}}{15}\right\}}$

**1.4** a) ............ $\boxed{X^2-6X+16}$

**1.4** b) ............ $\boxed{2X^2+12X+13}$

**1.4** c) ............ $\boxed{-X^2-2\sqrt{2}X+4}$

**1.4** d) ............ $\boxed{4\sqrt{3}X^2-4\sqrt{3}X-\sqrt{3}}$

**1.4** e) ............ $\boxed{\frac{3}{4}X^2+\frac{3}{4}X+\frac{19}{16}}$

**1.4** f) ............ $\boxed{\frac{5}{18}X^2+\frac{10}{9}X+\frac{8}{9}}$

**1.5** a) ............ $\boxed{(X+1)^2+1}$

**1.5** b) ............ $\boxed{(X+2)^2-5}$

**1.6** a) ............ $\boxed{-(X-2)^2-1}$

**1.6** b) ............ $\boxed{4(X-1)^2-7}$

**1.6** c) ............ $\boxed{-9(X-2)^2+40}$

**1.6** d) ............ $\boxed{-2(X+5)^2+33}$

**1.7** a) ............ $\boxed{\left(X+\frac{3}{2}\right)^2-2}$

**1.7** b) ............ $\boxed{\frac{1}{4}(X+2)^2-2}$

**1.7** c) ............ $\boxed{\frac{2}{9}(X+18)^2-\frac{503}{7}}$

**1.7** d) ............ $\boxed{-\frac{9}{8}\left(X+\frac{2}{9}\right)^2-\frac{71}{18}}$

**1.7** e) ............ $\boxed{\frac{1}{2}\left(X+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{19}{36}}$

**1.7** f) ............ $\boxed{-\frac{4}{5}\left(X+\frac{25}{48}\right)^2-\frac{2\,581}{4\,032}}$

**1.8** a) ............ $\boxed{\left(X+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+\lambda}$

**1.8** b) ............ $\boxed{\frac{1}{4}(X+2\lambda)^2-\lambda^2-2}$

**1.8** c) ............ $\boxed{\lambda\left(X+\frac{4}{\lambda}\right)^2-\frac{16}{\lambda}+5}$

**1.9** a) ............ $\boxed{-3\left(X+\frac{\lambda}{6}\right)^2+\frac{\lambda^2}{12}+2}$

**1.9** b) ............... $\boxed{\frac{1}{2}\left(X+\frac{2\lambda}{3}\right)^2-\frac{2\lambda^2}{9}+\frac{3\lambda}{4}}$

**1.9** c) ................ $\boxed{-\frac{4}{5}\left(X+\frac{25}{48}\lambda\right)^2+\frac{125}{576}\lambda^2}$

**1.10** ...................................... $\boxed{\text{d}}$

**1.11** ...................................... $\boxed{\text{c}}$

**1.12** ...................................... $\boxed{\text{a}}$

**1.13** ...................................... $\boxed{\text{c}}$

**1.14** a) .................................. $\boxed{\text{vraie}}$

**1.14** b) .................................. $\boxed{\text{fausse}}$

**1.14** c) .................................. $\boxed{\text{fausse}}$

**1.14** d) .................................. $\boxed{\text{vraie}}$

**1.15** a) .................... $\boxed{\Omega=(1,-2) \text{ et } r=2}$

**1.15** b) .................... $\boxed{\Omega=(-3,5) \text{ et } r=4}$

**1.15** c) ................... $\boxed{\Omega=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right) \text{ et } r=1}$

**1.15** d) ............. $\boxed{\Omega=\left(-\frac{5}{4},-\frac{4}{3}\right) \text{ et } r=\sqrt{2}}$

## Corrigés

**1.1 a)** On a $(2x+3)^2=(2x)^2+2\times 2x\times 3+3^3=4x^2+12x+9$.

**1.1 b)** On a $(3y-4)^2=(3y)^2-2\times 3y\times 4+4^2=9y^2-24y+16$.

**1.1 c)** On a $\left(-u+\sqrt{7}\right)^2=(-u)^2+2\times(-u)\times\sqrt{7}+\left(\sqrt{7}\right)^2=u^2-2\sqrt{7}u+7$.

**1.1 d)** On a $\left(-\sqrt{3}t-\sqrt{15}\right)^2=\left(-\sqrt{3}t\right)^2-2\times\left(-\sqrt{3}t\right)\times\sqrt{15}+\left(\sqrt{15}\right)^2=3t^2+6\sqrt{5}t+15$.

**1.1 e)** On a $\left(\frac{3}{2}z+2\right)^2=\left(\frac{3}{2}z\right)^2+2\times\frac{3}{2}z\times 2+2^2=\frac{9}{4}z^2+6z+4$.

**1.1 f)** On a $\left(\frac{2}{5}v-\frac{2}{3}\right)^2=\left(\frac{2}{5}v\right)^2-2\times\frac{2}{5}v\times\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{25}v^2-\frac{8}{15}v+\frac{4}{9}$.

**1.2 b)** On a $4t^2-9=(2t)^2-3^2=(2t-3)(2t+3)$.

**1.2 c)** On a $\frac{2}{9}y^2-\frac{4}{5}=\left(\frac{\sqrt{2}}{3}y\right)^2-\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{3}y-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{3}y+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

**1.2 d)** On a $u^2+6u+9=u^2+2\times u\times 3+3^2=(u+3)^2$.

**1.2 e)** On a $9v^2-12v+4=(3v)^2-2\times 3v\times 2+2^2=(3v-2)^2$.

**1.2 f)** On a $2z^2+10\sqrt{2}z+25=\left(\sqrt{2}z\right)^2+2\times\sqrt{2}z\times 5+5^2=\left(\sqrt{2}z+5\right)^2$.

**1.3 a)** On a $x^2=0 \iff x=0$.

**1.3 b)** On a $x^2=17 \iff x=-\sqrt{17}$ ou $x=\sqrt{17}$.

**1.3** c) On a $(2t+10)^2 = 0 \iff 2t+10 = 0 \iff 2t = -10 \iff t = -5$.

**1.3** d) On a $\left(-\sqrt{3}y+\sqrt{6}\right)^2 = 0 \iff -\sqrt{3}y+\sqrt{6} = 0 \iff -\sqrt{3}y = -\sqrt{6} \iff y = \sqrt{2}$.

**1.3** e) On a $2u^2 - 10 = 0 \iff 2u^2 = 10 \iff u^2 = 5 \iff u = -\sqrt{5}$ ou $u = \sqrt{5}$.

**1.3** f) On a $-\dfrac{3}{4}v^2 + \dfrac{4}{15} = 0 \iff -\dfrac{3}{4}v^2 = -\dfrac{4}{15} \iff v^2 = \dfrac{16}{45} \iff v = -\dfrac{4}{3\sqrt{5}}$ ou $v = \dfrac{4}{3\sqrt{5}}$.

**1.4** a) On a $(X-3)^2 + 7 = X^2 - 6X + 9 + 7 = X^2 - 6X + 16$.

**1.4** b) On a $2(X+3)^2 - 5 = 2(X^2 + 6X + 9) - 5 = 2X^2 + 12X + 13$.

**1.4** c) On a $-\left(X+\sqrt{2}\right)^2 + 6 = -\left(X^2 + 2\sqrt{2}X + 2\right) + 6 = -X^2 - 2\sqrt{2}X + 4$.

**1.4** d) On a $\sqrt{3}(2X-1)^2 - 2\sqrt{3} = \sqrt{3}(4X^2 - 4X + 1) - 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}X^2 - 4\sqrt{3}X - \sqrt{3}$.

**1.4** e) On a $\dfrac{3}{4}\left(X+\dfrac{1}{2}\right)^2 + 1 = \dfrac{3}{4}\left(X^2 + X + \dfrac{1}{4}\right) + 1 = \dfrac{3}{4}X^2 + \dfrac{3}{4}X + \dfrac{19}{16}$.

**1.4** f) On a $\dfrac{5}{2}\left(-\dfrac{1}{3}X - \dfrac{2}{3}\right)^2 - \dfrac{2}{9} = \dfrac{5}{2}\left(\dfrac{1}{9}X^2 + \dfrac{4}{9}X + \dfrac{4}{9}\right) - \dfrac{2}{9} = \dfrac{5}{18}X^2 + \dfrac{10}{9}X + \dfrac{8}{9}$.

**1.5** a) On a $X^2 + 2X + 2 = X^2 + 2X + 1 + 1 = (X+1)^2 + 1$.

**1.5** b) On a $X^2 + 4X - 1 = (X+2)^2 - 4 - 1 = (X+2)^2 - 5$.

**1.6** a) On a $-X^2 + 4X - 5 = -(X^2 - 4X) - 5 = -(X-2)^2 + 4 - 5 = -(X-2)^2 - 1$.

**1.6** b) On a $4X^2 - 8X - 3 = 4(X^2 - 2X) - 3 = 4(X-1)^2 - 4 - 3 = 4(X-1)^2 - 7$.

**1.6** c) On a $-9X^2 + 36X + 4 = -9(X^2 - 4X) + 4 = -9(X-2)^2 + 36 + 4 = -9(X-2)^2 + 40$.

**1.6** d) On a $-2X^2 - 20X - 17 = -2(X^2 + 10X) - 17 = -2(X+5)^2 + 50 - 17 = -2(X+5)^2 + 33$.

**1.7** a) On a $X^2 + 3X + \dfrac{1}{4} = X^2 + 2 \times \dfrac{3}{2}X + \dfrac{1}{4} = \left(X+\dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{9}{4} + \dfrac{1}{4} = \left(X+\dfrac{3}{2}\right)^2 - 2$.

**1.7** b) On a $\dfrac{1}{4}X^2 + X - 1 = \dfrac{1}{4}(X^2 + 4X) - 1 = \dfrac{1}{4}(X+2)^2 - 1 - 1 = \dfrac{1}{4}(X+2)^2 - 2$.

**1.7** c) On a $\dfrac{2}{9}X^2 + 8X + \dfrac{1}{7} = \dfrac{2}{9}(X^2 + 36X) + \dfrac{1}{7} = \dfrac{2}{9}(X+18)^2 - 72 + \dfrac{1}{7} = \dfrac{2}{9}(X+18)^2 - \dfrac{503}{7}$.

**1.7** d) On a $-\dfrac{9}{8}X^2 - \dfrac{1}{2}X - 4 = -\dfrac{9}{8}\left(X^2 + \dfrac{4}{9}X\right) - 4 = -\dfrac{9}{8}\left(X+\dfrac{2}{9}\right)^2 + \dfrac{1}{18} - 4 = -\dfrac{9}{8}\left(X+\dfrac{2}{9}\right)^2 - \dfrac{71}{18}$.

**1.7 e)** On a $\dfrac{1}{2}X^2+\dfrac{2}{3}X+\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{2}\left(X^2+\dfrac{4}{3}X\right)+\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{2}\left(X+\dfrac{2}{3}\right)^2-\dfrac{2}{9}+\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{2}\left(X+\dfrac{2}{3}\right)^2+\dfrac{19}{36}$.

**1.7 f)** On a $-\dfrac{4}{5}X^2-\dfrac{5}{6}X-\dfrac{6}{7}=-\dfrac{4}{5}\left(X^2+\dfrac{25}{24}X\right)-\dfrac{6}{7}=-\dfrac{4}{5}\left(X+\dfrac{25}{48}\right)^2+\dfrac{125}{576}-\dfrac{6}{7}$. On obtient

$$-\frac{4}{5}\left(X+\frac{25}{48}\right)^2-\frac{2\,581}{4\,032}.$$

**1.8 a)** On a $X^2+3X+\lambda=\left(X+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}+\lambda$.

**1.8 b)** On a $\dfrac{1}{4}X^2+\lambda X-2=\dfrac{1}{4}(X^2+4\lambda X)-2=\dfrac{1}{4}(X+2\lambda)^2-\lambda^2-2$.

**1.8 c)** On a $\lambda X^2+8X+5=\lambda\left(X^2+\dfrac{8X}{\lambda}\right)+5=\lambda\left(X+\dfrac{4}{\lambda}\right)^2-\dfrac{16}{\lambda}+5$.

**1.9 a)** On a $-3X^2-\lambda X+2=-3\left(X^2+\dfrac{\lambda}{3}X\right)+2=-3\left(X+\dfrac{\lambda}{6}\right)^2+\dfrac{\lambda^2}{12}+2$.

**1.9 b)** On a $\dfrac{1}{2}X^2+\dfrac{2\lambda}{3}X+\dfrac{3\lambda}{4}=\dfrac{1}{2}\left(X^2+\dfrac{4\lambda}{3}X\right)+\dfrac{3\lambda}{4}=\dfrac{1}{2}\left(X+\dfrac{2\lambda}{3}\right)^2-\dfrac{2\lambda^2}{9}+\dfrac{3\lambda}{4}$.

**1.9 c)** On a $-\dfrac{4}{5}X^2-\dfrac{5}{6}\lambda X=-\dfrac{4}{5}\left(X^2+\dfrac{25}{24}\lambda X\right)=-\dfrac{4}{5}\left(X+\dfrac{25}{48}\lambda\right)^2+\dfrac{125}{576}\lambda^2$.

**1.10** Le sommet de la parabole a pour coordonnées $(\alpha,\beta)$, qui sont les « paramètres » de la forme canonique. Sur le graphique, on peut lire que le sommet a pour coordonnées $(2,1)$. Ainsi, seule la réponse d peut convenir.

**1.11** Ici, le sommet a pour coordonnées $(-3,4)$. Ainsi, seule la réponse c peut convenir.

**1.12** On a $f(x)=3x^2+4x-2=3\left(x^2+\dfrac{4}{3}x\right)-2=3\left(x+\dfrac{2}{3}\right)^2-\dfrac{4}{3}-2=3\left(x+\dfrac{2}{3}\right)^2-\dfrac{10}{3}$.

Ainsi, la parabole a pour sommet le point de coordonnées $\left(-\dfrac{2}{3},-\dfrac{10}{3}\right)$. La bonne réponse est donc a.

**1.13** On a $g(t)=-\dfrac{1}{2}t^2+t-1=-\dfrac{1}{2}(t^2-2t)-1=-\dfrac{1}{2}(t-1)^2+\dfrac{1}{2}-1=-\dfrac{1}{2}(t-1)^2-\dfrac{1}{2}$.

Ainsi, la parabole a donc pour sommet le point de coordonnées $\left(1,-\dfrac{1}{2}\right)$. La bonne réponse est donc c.

**1.14 a)** Soit $x\in\mathbb{R}$. On a les équivalences

$$x^2+x+1\geqslant\frac{1}{2}\iff\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+1\geqslant\frac{1}{2}\iff\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\geqslant 0.$$

Le premier membre est la somme de deux termes positifs, donc l'inégalité est vraie pour tout réel $x$. La proposition est donc vraie.

**1.14** b) Soit $t \in \mathbb{R}$. On a les équivalences

$$t^2 + 3t > -1 \iff \left(t + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} > -1 \iff \left(t + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} > 0.$$

Cette inégalité est fausse en particulier pour $t = -\frac{3}{2}$. La proposition est donc fausse.

**1.14** c) Soit $z \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence

$$3z + z^2 < 2z^2 - 4 \iff z^2 - 3z - 4 > 0 \iff \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 4 > 0.$$

Cette proposition est équivalente à $\left(z - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} > 0$.

Cette inégalité est fausse en particulier pour $z = \frac{3}{2}$. La proposition est donc fausse.

**1.14** d) Soit $v \in \mathbb{R}$. On a les équivalences

$$\frac{4}{49}v^2 + \frac{61}{9} \geqslant \frac{20}{21}v \iff \frac{4}{49}\left(v^2 - \frac{35}{3}v\right) + \frac{61}{9} \geqslant 0 \iff \frac{4}{49}\left(v - \frac{35}{6}\right)^2 - \frac{25}{9} + \frac{61}{9} \geqslant 0.$$

Cette proposition est équivalente à $\frac{4}{49}\left(v - \frac{35}{6}\right)^2 + 4 \geqslant 0$.

Le premier membre est la somme de deux termes positifs, donc l'inégalité est vraie pour tout réel $v$. La proposition est donc vraie.

**1.15** a) On a les équivalences

$$x^2 - 2x + y^2 + 4y + 1 = 0 \iff (x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 + 1 = 0 \iff (x-1)^2 + (y+2)^2 = 2^2.$$

On reconnaît le cercle de centre le point de coordonnées $(1, -2)$ et de rayon 2.

**1.15** b) On a les équivalences

$$x^2 + y^2 + 6x - 10y + 18 = 0 \iff (x+3)^2 - 9 + (y-5)^2 - 25 + 18 = 0 \iff (x+3)^2 + (y-5)^2 = 4^2.$$

On reconnaît le cercle de centre le point de coordonnées $(-3, 5)$ et de rayon 4.

**1.15** c) On a les équivalences

$$x^2 + y^2 - x - \frac{2}{3}y = \frac{23}{36} \iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} = \frac{23}{36} \iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = 1^2.$$

On reconnaît le cercle de centre le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ et de rayon 1.

**1.15** d) On a les équivalences

$$x^2 + y^2 + \frac{5}{2}x + \frac{8}{3}y = \frac{-193}{144} \iff \left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} + \left(y + \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{16}{9} = -\frac{193}{144}.$$

On obtient $\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{4}{3}\right)^2 = \sqrt{2}^2$.

On reconnaît le cercle de centre le point de coordonnées $\left(-\frac{5}{4}, -\frac{4}{3}\right)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

# Fiche nº 2. Discriminant et racines I

## Réponses

**2.1** a) ........ $\boxed{\dfrac{3}{2}}$

**2.1** b) ........ $\boxed{\dfrac{4}{3}}$

**2.1** c) ........ $\boxed{-3-\sqrt{3}}$

**2.1** d) ........ $\boxed{2+\sqrt{3}}$

**2.2** a) ........ $\boxed{\dfrac{35}{2}}$

**2.2** b) ........ $\boxed{-27}$

**2.2** c) ........ $\boxed{-121}$

**2.2** d) ........ $\boxed{-\dfrac{43}{16}}$

**2.3** a) ........ $\boxed{-8}$

**2.3** b) ........ $\boxed{20}$

**2.4** a) ........ $\boxed{-5}$

**2.4** b) ........ $\boxed{\dfrac{35}{18}}$

**2.4** c) ........ $\boxed{\dfrac{29}{3}}$

**2.4** d) ........ $\boxed{\dfrac{13}{7}}$

**2.5** a) ........ $\boxed{-1-\sqrt{5} \text{ et } -1+\sqrt{5}}$

**2.5** b) ........ $\boxed{\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2} \text{ et } \dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}}$

**2.6** a) ........ $\boxed{\dfrac{3-\sqrt{5}}{8} \text{ et } \dfrac{3+\sqrt{5}}{8}}$

**2.6** b) ........ $\boxed{-3 \text{ et } 2}$

**2.6** c) ........ $\boxed{-\dfrac{1}{2} \text{ et } \dfrac{1}{3}}$

**2.6** d) ........ $\boxed{\dfrac{\sqrt{2}-2}{3} \text{ et } \dfrac{\sqrt{2}+2}{3}}$

**2.7** a) ........ $\boxed{\text{non}}$

**2.7** b) ........ $\boxed{b^2-4}$

**2.7** c) ........ $\boxed{b \in \left]-\infty,-2\right[ \cup \left]2,+\infty\right[}$

**2.8** a) ........ $\boxed{9+20a}$

**2.8** b) ........ $\boxed{-\dfrac{9}{20}}$

**2.9** a) ........ $\boxed{25-8c}$

**2.9** b) ........ $\boxed{c \in \left]\dfrac{25}{8},+\infty\right[}$

**2.10** a) ........ $\boxed{\left]-\infty,1\right[ \cup \left]\dfrac{3}{2},+\infty\right[}$

**2.10** b) ........ $\boxed{\left[\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2},\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}\right]}$

**2.10** c) ........ $\boxed{\left]-\infty,-4\right[ \cup \left]-1,+\infty\right[}$

**2.11** a) ........ $\boxed{\left]-\infty,-2-\dfrac{\sqrt{19}}{2}\right] \cup \left[-2+\dfrac{\sqrt{19}}{2},+\infty\right[}$

**2.11** b) ........ $\boxed{\mathbb{R}}$

**2.11** c) ........ $\boxed{\varnothing}$

**2.12** a) ........ $\boxed{\text{aucune}}$

**2.12** b) ........ $\boxed{a \in \left[-\sqrt{\dfrac{2}{15}},\sqrt{\dfrac{2}{15}}\right]}$

**2.12** c) ........ $\boxed{a \in \left[\dfrac{25}{147},+\infty\right[}$

**2.13** a) ........ $\boxed{\text{aucune}}$

**2.13** b) ........ $\boxed{a \in \left[\sqrt{\dfrac{15}{2}},+\infty\right[}$

**2.13** c) ........ $\boxed{a \in \left[0,\dfrac{25}{49}\right]}$

**2.14** ........ $\boxed{t \in \left[\dfrac{1}{2},2\right]}$

## Corrigés

**2.1** a) On a $\dfrac{10-\sqrt{16}}{4} = \dfrac{10-4}{4} = \dfrac{3}{2}$.

**2.1** b) On a $\dfrac{5+\sqrt{9}}{6} = \dfrac{5+3}{6} = \dfrac{4}{3}$.

**2.1** c) On a $\dfrac{-6-\sqrt{12}}{2} = \dfrac{-6-2\sqrt{3}}{2} = -3-\sqrt{3}$.

**2.1** d) On a $\dfrac{8+\sqrt{48}}{4} = \dfrac{8+4\sqrt{3}}{4} = 2+\sqrt{3}$.

**2.2** a) On a $5^2 - 4\times 5\times \dfrac{3}{8} = 25 - \dfrac{15}{2} = \dfrac{35}{2}$.

**2.2** b) On a $(-6)^2 + \dfrac{3}{5}\times(-7)\times 15 = 36-63 = -27$.

**2.2** c) On a $-7^2 - 8\times\dfrac{1}{3}\times 27 = -49-72 = -121$.

**2.2** d) On a $\left(-\dfrac{5}{4}\right)^2 - 5\times\dfrac{17}{32}\times\dfrac{24}{15} = \dfrac{25}{16} - \dfrac{17}{4} = -\dfrac{43}{16}$.

**2.4** b) Le discriminant vaut $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 - 4\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{-3}{4} = \dfrac{4}{9}+\dfrac{3}{2} = \dfrac{35}{18}$.

**2.4** c) Le discriminant vaut $\left(-\sqrt{7}\right)^2 - 4\times\dfrac{4}{5}\times\dfrac{-5}{6} = 7+\dfrac{8}{3} = \dfrac{29}{3}$.

**2.4** d) Le discriminant vaut $\left(\sqrt{3}\right)^2 - 4\times\dfrac{\sqrt{6}}{7}\times\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 3-\dfrac{8}{7} = \dfrac{13}{7}$.

**2.5** a) Le discriminant vaut 20. Le polynôme a deux racines $x_1 = \dfrac{-2-\sqrt{20}}{2} = \dfrac{-2-2\sqrt{5}}{2} = -1-\sqrt{5}$ et $x_2 = -1+\sqrt{5}$.

**2.6** a) Le discriminant vaut 5. Le polynôme a deux racines $x_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2\times 4} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{8}$ et $x_2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{8}$.

**2.6** b) Le discriminant vaut $\dfrac{25}{4}$. Le polynôme a deux racines $x_1 = \dfrac{\frac{1}{1}-\frac{5}{2}}{2\times\frac{1}{2}} = \dfrac{-\frac{6}{2}}{1} = -3$ et $x_2 = 2$.

**2.6** c) Le discriminant vaut $\dfrac{25}{9}$. Le polynôme a deux racines $x_1 = \dfrac{-\dfrac{1}{3}-\dfrac{5}{3}}{2\times 2} = \dfrac{-\dfrac{6}{3}}{4} = -\dfrac{2}{4} = -\dfrac{1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1}{3}$.

**2.6** d) Le discriminant vaut 16. Le polynôme a deux racines $x_1 = \dfrac{2\sqrt{2}-4}{2\times 3} = \dfrac{\sqrt{2}-2}{3}$ et $x_2 = \dfrac{\sqrt{2}+2}{3}$.

**2.7** a) Lorsque $b=-2$, on a $P = X^2-2X+1 = (X-1)^2$ donc le polynôme $P$ admet 1 pour racine double. Donc $P$ n'admet pas deux racines distinctes lorsque $b=-2$.

**2.7 c)** Le polynôme $P$ admet deux racines distinctes si, et seulement si, son discriminant $\Delta = b^2 - 4$ est $> 0$. Or, on a l'équivalence $\Delta > 0 \iff b^2 > 2^2$, ce qui donne $b < -2$ ou $b > 2$. Donc, le polynôme $P$ admet deux racines distinctes si, et seulement si, $b \in ]-\infty, -2[ \cup ]2, +\infty[$.

**2.8 b)** Le polynôme admet exactement une racine si, et seulement si, son discriminant $\Delta$ vaut 0. Or, on a les équivalences $\Delta = 0 \iff 9 + 20a = 0 \iff a = -\dfrac{9}{20}$.

**2.9 b)** Le polynôme n'admet aucune racine si, et seulement si, son discriminant $\Delta$ est $< 0$. Or, on a les équivalences $\Delta < 0 \iff 25 - 8c < 0 \iff c > \dfrac{25}{8}$. Ainsi, $R$ n'a aucune racine si et seulement si $c \in \left]\dfrac{25}{8}, +\infty\right[$.

**2.10 a)** Les racines sont $x_1 = 1$ et $x_2 = \dfrac{3}{2}$ donc l'ensemble des solutions est $]-\infty, 1[ \cup \left]\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$.

**2.10 b)** On a l'équivalence $y^2 + 3y \leqslant 2 \iff y^2 + 3y - 2 \leqslant 0$. Le discriminant vaut 17 et les racines sont $x_1 = \dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}$ donc l'ensemble des solutions est $\left[\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}, \dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}\right]$.

**2.10 c)** On a l'équivalence $-t^2 < 5t + 4 \iff t^2 + 5t + 4 > 0$. De plus, le discriminant vaut 9 et les racines sont $x_1 = -4$ et $x_2 = -1$ ; donc l'ensemble des solutions est $]-\infty, -4[ \cup ]-1, +\infty[$

**2.11 a)** On a l'équivalence $4z \geqslant \dfrac{3}{4} - z^2 \iff z^2 + 4z - \dfrac{3}{4} \geqslant 0$. Le discriminant vaut 19 et les racines sont $x_1 = -2 - \dfrac{\sqrt{19}}{2}$ et $x_2 = -2 + \dfrac{\sqrt{19}}{2}$ donc l'ensemble des solutions est $\left]-\infty, -2 - \dfrac{\sqrt{19}}{2}\right] \cup \left[-2 + \dfrac{\sqrt{19}}{2}, +\infty\right[$.

**2.11 b)** Le discriminant vaut $-\dfrac{72}{175} < 0$ donc il n'y a pas de racine. Comme le coefficient $\dfrac{1}{3}$ est positif, on sait que l'expression est toujours positive. Donc l'ensemble des solutions est $\mathbb{R}$.

**2.11 c)** On a $v - \sqrt{3} \geqslant v^2 \iff -v^2 + v - \sqrt{3} \geqslant 0$. Le discriminant vaut $1 - 4\sqrt{3} < 0$ donc il n'y a pas de racine. Le coefficient $-1$ est négatif, l'expression est donc toujours négative. Ainsi, l'ensemble des solutions est $\varnothing$.

**2.12 a)** La proposition est vraie si, et seulement si, $a > 0$ et le discriminant $\Delta$ est $\leqslant 0$. Or $\Delta = 9 + 16a$ donc

$$\Delta \leqslant 0 \iff 9 + 16a \leqslant 0 \iff a \leqslant -\frac{9}{16}.$$

Ceci n'est pas compatible avec $a > 0$. Ainsi, il n'existe pas de valeur de $a$ pour laquelle la proposition est vraie.

**2.12 b)** La proposition est vraie si, et seulement si, le discriminant $\Delta$ est $\leqslant 0$. Or $\Delta = 4a^2 - \dfrac{8}{15}$. Donc, on a $\Delta \leqslant 0 \iff 4a^2 - \dfrac{8}{15} \leqslant 0$. On obtient $a^2 \leqslant \dfrac{2}{15} \iff a \in \left[-\sqrt{\dfrac{2}{15}}, \sqrt{\dfrac{2}{15}}\right]$.

**2.12 c)** La proposition est vraie si, et seulement si, le discriminant $\Delta$ est $\leqslant 0$. Or $\Delta = \dfrac{25}{49} - 3a$. Donc, on a $\Delta \leqslant 0 \iff \dfrac{25}{49} - 3a \leqslant 0$, ce qui donne $-3c \leqslant -\dfrac{25}{49} \iff c \geqslant \dfrac{25}{147}$.

**2.13 a)** La proposition est vraie si, et seulement si, $a > 0$ et le discriminant $\Delta$ est $\leqslant 0$. Or $\Delta = 9a^2 + 16a$. C'est une expression du second degré en $a$ dont les racines sont 0 et $-\dfrac{16}{9}$ et de coefficient du second degré positif, donc le discriminant est négatif ou nul si, et seulement si, $a \in \left[-\dfrac{16}{9}, 0\right]$. Ceci n'est pas compatible avec $a > 0$ ; par conséquent, il n'existe pas de valeur de $a$ pour laquelle la proposition est vraie.

........................................................................................................................................................

**2.13 b)** La proposition est vraie si, et seulement si, $a > 0$ et le discriminant $\Delta$ est $\leqslant 0$. Or $\Delta = 4 - \dfrac{8a^2}{15}$. C'est une expression du second degré en $a$ dont les racines sont $-\sqrt{\dfrac{15}{2}}$ et $\sqrt{\dfrac{15}{2}}$ et de coefficient du second degré négatif, donc le discriminant est négatif ou nul si, et seulement si, $a \in \left]-\infty, -\sqrt{\dfrac{15}{2}}\right] \cup \left[\sqrt{\dfrac{15}{2}}, +\infty\right[$.

On en déduit que la proposition est vraie si, et seulement si, $a \in \left[\sqrt{\dfrac{15}{2}}, +\infty\right[$.

........................................................................................................................................................

**2.13 c)** La proposition est vraie si, et seulement si, le discriminant $\Delta$ est $\leqslant 0$. Or $\Delta = \dfrac{49}{25}a^2 - a$. Donc, on a l'équivalence $\Delta \leqslant 0 \iff \dfrac{49}{25}a^2 - a \leqslant 0$. C'est une inéquation du second degré en $a$ dont les racines sont 0 et $\dfrac{25}{49}$ et de coefficient du second degré positif, donc on a l'équivalence $\Delta \leqslant 0 \iff a \in \left[0, \dfrac{25}{49}\right]$.

........................................................................................................................................................

**2.14** Soit $t \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{cases} (x-5)^2 + (y-5)^2 = & 5 \\ & y = tx \end{cases} \iff \begin{cases} (x-5)^2 + (tx-5)^2 & = & 5 \\ & y = tx. \end{cases}$$

Le système admet des solutions si, et seulement si, la première équation, d'inconnue $x$, admet des solutions.
Or, on a les équivalences

$$(x-5)^2 + (tx-5)^2 = 5 \iff x^2 - 10x + 25 + t^2x^2 - 10tx + 25 = 5 \iff (1+t^2)x^2 - 10(1+t)x + 45 = 0.$$

On reconnaît une équation du second degré en $x$ de discriminant

$$\Delta = 100(1+t)^2 - 180(1+t^2) = 100 + 200t + 100t^2 - 180 - 180t^2 = -80t^2 + 200t - 80.$$

L'équation admet des solutions si, et seulement si, $\Delta \geqslant 0$.
Or, on a les équivalences

$$\Delta \geqslant 0 \iff -80t^2 + 200t - 80 \geqslant 0 \iff 2t^2 - 5t + 2 \leqslant 0.$$

On reconnaît une inéquation du second degré de discriminant $\delta = 9$ dont les racines sont $t_1 = \dfrac{1}{2}$ et $t_2 = 2$.

Puisque le coefficient du second degré de l'inéquation est positif, l'ensemble des solutions de l'inéquation est $\left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$.
Ainsi, le système initial admet des solutions si, et seulement si, $t \in \left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$.
*Ce système correspond à l'étude de l'intersection d'un cercle et d'une droite.*

........................................................................................................................................................

# Fiche n° 3. Discriminant et racines II

## Réponses

**3.1** a) ............ $\left]-\infty, -\dfrac{2}{3}\right[$

**3.1** b) ............ $\left[\dfrac{4}{15}, +\infty\right[$

**3.1** c) ............ $\left]-\infty, \dfrac{1}{16}\right[$

**3.1** d) ............ $\left[-\dfrac{1}{35}, +\infty\right[$

**3.2** a) ............ $2^2 \times 3^7$

**3.2** b) ............ $\dfrac{1}{9 \times 2^n}$

**3.2** c) ............ $-2 \times 3^{n-1}$

**3.2** d) ............ $13 \times 2^n$

**3.3** a) ............ $(X-3)(X-4)$

**3.3** b) ............ $(X+2)(X-5)$

**3.3** c) ............ $2(X+1)\left(X-\dfrac{3}{2}\right)$

**3.3** d) ............ $6\left(X-\dfrac{1}{2}\right)\left(X-\dfrac{1}{3}\right)$

**3.4** a) ............ $(X+2)\left(X+\dfrac{1}{2}\right)$

**3.4** b) ............ $\left(X-\dfrac{1}{2}\right)(X+1)$

**3.4** c) ............ $2\left(X-\dfrac{1}{3}\right)\left(X-\dfrac{1}{4}\right)$

**3.4** d) ............ $\left(X+\dfrac{1}{5}\right)(X-5)$

**3.5** a) ............ $\left(X-1-\sqrt{2}\right)\left(X-1+\sqrt{2}\right)$

**3.5** b) ............ $\left(X-1-\sqrt{3}\right)\left(X-1+\sqrt{3}\right)$

**3.5** c) ............ $\left(X+3-\sqrt{5}\right)\left(X-3-\sqrt{5}\right)$

**3.5** d) ............ $2\left(X-\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}\right)\left(X-\dfrac{3-\sqrt{7}}{2}\right)$

**3.6** a) ............ $(X-m)(X+2m)$

**3.6** b) ............ $\left(X-1-\sqrt{2}m\right)\left(X-1+\sqrt{2}m\right)$

**3.6** c) ............ $2\left(X+\dfrac{m}{2}\right)(X+3)$

**3.6** d) ............ $\left(X-1-\sqrt{m^2+1}\right)\left(X-1+\sqrt{m^2+1}\right)$

**3.7** a) ............ $\{1\}$

**3.7** b) ............ $\{-3, 1\}$

**3.8** a) ............ $\left\{\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$

**3.8** b) ............ $\left\{\dfrac{3\pm\sqrt{89}}{8}\right\}$

**3.9** a) ............ $\{-2\}$

**3.9** b) ............ $\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

**3.10** a) ............ $\{25\}$

**3.10** b) ............ $\{1, 36\}$

**3.11** a) ............ $0$

**3.11** b) ............ $(X-1)\left(X^2+X-6\right)$

**3.11** c) ............ $(X-1)(X-2)(X+3)$

**3.12** a) ............ $0$

**3.12** b) ............ $(X+1)\left(2X^2+11X+5\right)$

**3.12** c) ............ $2(X+1)(X+5)\left(X+\dfrac{1}{2}\right)$

**3.13** a) ... $\boxed{(X-1)\left(X-1-\sqrt{2}\right)\left(X-1+\sqrt{2}\right)}$

**3.13** b) .......... $\boxed{4(X+1)\left(X-\frac{1}{2}\right)\left(X-\frac{3}{2}\right)}$

**3.14** a)........................ $\boxed{y^2-7y+12=0}$

**3.14** b) ........................ $\boxed{(y-4)(y-3)}$

**3.14** c) ........................... $\boxed{\left\{\pm 2, \pm\sqrt{3}\right\}}$

**3.15** a) ........................... $\boxed{\left\{\pm 1, \pm\sqrt{5}\right\}}$

**3.15** b) ............................. $\boxed{\left\{\pm 2\sqrt{2}\right\}}$

**3.16** ................................ $\boxed{\{-1,-3\}}$

**3.17** ............................... $\boxed{\left\{0, \pm\sqrt{2}\right\}}$

## Corrigés

**3.1** a) Procédons directement par équivalence. On a

$$-2x > \frac{4}{3} \underset{-2<0}{\iff} x < -\frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \iff x < -\frac{2}{3}.$$

---

**3.1** b) À nouveau par équivalence, on a

$$2x - \frac{1}{5} \geqslant \frac{1}{3} \iff 2x \geqslant \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \iff 2x \geqslant \frac{8}{15} \underset{2>0}{\iff} x \geqslant \frac{4}{15}.$$

---

**3.1** c) À nouveau par équivalence, on a

$$2x - \frac{1}{12} < \frac{2}{3}x \iff \left(2 - \frac{2}{3}\right)x < \frac{1}{12} \iff \frac{4}{3}x < \frac{1}{12} \underset{4/3>0}{\iff} x < \frac{3}{4} \times \frac{1}{12} \iff x < \frac{1}{16}.$$

---

**3.1** d) À nouveau par équivalence, on a

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{5} \geqslant -\frac{1}{2}x + \frac{1}{6} \iff \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right)x \geqslant \frac{1}{6} - \frac{1}{5} \iff \frac{7}{6}x \geqslant -\frac{1}{30} \underset{7/6>0}{\iff} x \geqslant -\frac{6}{7} \times \frac{1}{30} \iff x \geqslant -\frac{1}{35}.$$

---

**3.2** a) On commence par donner la factorisation première des différents facteurs. On a

$$\frac{6^3 \times 2^{-5}}{4^2 \times 12^{-4}} = \frac{(2\times 3)^3 \times 2^{-5}}{(2^2)^2 \times (2^2 \times 3)^{-4}} = \frac{2^3 \times 3^3 \times 2^{-5}}{2^4 \times 2^{-8} \times 3^{-4}} = 2^{3-5-4-(-8)} \times 3^{3-(-4)} = 2^2 \times 3^7.$$

---

**3.2** b) On procède de la même façon. On a

$$\frac{5^n \times 12^2}{10^n \times 6^4} = \frac{5^n \times 2^4 \times 3^2}{2^n \times 5^n \times 2^4 \times 3^4} = 2^{4-n-4} \times 3^{2-4} \times 5^{n-n} = 2^{-n} \times 3^{-2} = \frac{1}{9 \times 2^n}.$$

---

**3.2** c) On a

$$\begin{aligned} 3^{n+2} - 3^{n+1} - 7 \times 3^n + 3^{n-1} &= 3^3 \times 3^{n-1} - 3^2 \times 3^{n-1} - 7 \times 3 \times 3^{n-1} + 3^{n-1} \\ &= 3^{n-1}\left(3^3 - 3^2 - 3 \times 7 + 1\right) = -2 \times 3^{n-1}. \end{aligned}$$

---

**3.2** d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Rappelons que $(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$ Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \frac{16^{n+1} + (-4)^{2n+1} + (-2)^{4n}}{8^n} &= \frac{\left(2^4\right)^{n+1} + (-1)^{2n+1} \times \left(2^2\right)^{2n+1} + (-1)^{4n} \times 2^{4n}}{(2^3)^n} \\ &= \frac{2^{4n+4} - 2^{4n+2} + 2^{4n}}{2^{3n}} = \frac{2^{4n}\left(2^4 - 2^2 + 1\right)}{2^{3n}} = 13 \times 2^n. \end{aligned}$$

**3.3** a) Le discriminant du trinôme $P = X^2 - 7X + 12$ vaut $(-7)^2 - 4 \times 1 \times 12 = 1$. Ses racines sont

$$\frac{-(-7)+\sqrt{1}}{2\times 1} = 4 \qquad \text{et} \qquad \frac{-(-7)-\sqrt{1}}{2\times 1} = 3.$$

Par conséquent, le polynôme $P$ étant unitaire, $P = (X-4)(X-3)$.

…………………………………………………………………………………………

**3.3** b) De façon similaire, le discriminant du trinôme $P = X^2 - 3X - 10$ vaut 49 et ses racines sont 5 et $-2$. Par conséquent, le polynôme $P$ étant unitaire, $P = (X-5)(X+2)$.

…………………………………………………………………………………………

**3.3** c) De façon similaire, le discriminant du trinôme $P = 2X^2 - X - 3$ vaut 25 et ses racines sont $-1$ et $\dfrac{3}{2}$. Par conséquent, on a $P = 2(X+1)\left(X - \dfrac{3}{2}\right)$, puisque 2 est le coefficient dominant de $P$.

…………………………………………………………………………………………

**3.3** d) De façon similaire, le discriminant du trinôme $P = 6X^2 - 5X + 1$ vaut 1 et ses racines sont $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{3}$. Par conséquent, on a $P = 6\left(X - \dfrac{1}{2}\right)\left(X - \dfrac{1}{3}\right)$, puisque 6 est le coefficient dominant de $P$.

…………………………………………………………………………………………

**3.4** a) Notons $\Delta$ le discriminant du trinôme $P = X^2 + \dfrac{5}{2}X + 1$. On a

$$\Delta = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4\times 1\times 1 = \frac{25}{4} - 4 = \frac{25-16}{4} = \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2.$$

Ainsi, les deux racines de $P$ sont $\dfrac{-\frac{5}{2}+\sqrt{\Delta}}{2\times 1} = \dfrac{-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}}{2} = -\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{-\frac{5}{2}-\sqrt{\Delta}}{2\times 1} = \dfrac{-\frac{5}{2}-\frac{3}{2}}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2$. Par conséquent, le polynôme $P$ étant unitaire, on a $P = (X+2)\left(X + \dfrac{1}{2}\right)$.

…………………………………………………………………………………………

**3.4** b) Le discriminant du trinôme $P = X^2 + \dfrac{1}{2}X - \dfrac{1}{2}$ vaut $\dfrac{9}{4} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2$, et ses racines sont $\dfrac{1}{2}$ et $-1$.

Par conséquent, le polynôme $P$ étant unitaire, on a $P = \left(X - \dfrac{1}{2}\right)(X+1)$.

…………………………………………………………………………………………

**3.4** c) Le discriminant du trinôme $P = 2X^2 - \dfrac{7}{6}X + \dfrac{1}{6}$ vaut $\dfrac{1}{36} = \left(\dfrac{1}{6}\right)^2$, et ses racines sont $\dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{1}{4}$.

Par conséquent, on a $P = 2\left(X - \dfrac{1}{3}\right)\left(X - \dfrac{1}{4}\right)$, puisque 2 est le coefficient dominant de $P$.

…………………………………………………………………………………………

**3.4** d) Notons $\Delta$ le discriminant du trinôme $P = X^2 - \dfrac{24}{5}X - 1$. On a

$$\Delta = \left(-\frac{24}{5}\right)^2 - 4\times(-1) = \frac{(2\times 12)^2 + 2^2\times 25}{25} = \frac{2^2\left(12^2+25\right)}{25} = \frac{2^2\times 13^2}{5^2} = \left(\frac{26}{5}\right)^2.$$

Ainsi, les deux racines de $P$ sont

$$\frac{-\left(-\frac{24}{5}\right)+\sqrt{\Delta}}{2\times 1} = \frac{\frac{24}{5}+\frac{26}{5}}{2} = 5 \qquad \text{et} \qquad \frac{-\left(-\frac{24}{5}\right)-\sqrt{\Delta}}{2\times 1} = \frac{\frac{24}{5}-\frac{26}{5}}{2} = -\frac{1}{5}.$$

Par conséquent, $P$ étant unitaire, on a $P = \left(X + \dfrac{1}{5}\right)(X-5)$.

…………………………………………………………………………………………

**3.5 a)** Notons $\Delta$ le discriminant du trinôme $P = X^2 - 2X - 1$. On a $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 8 = \left(2\sqrt{2}\right)^2$. Ainsi, les deux racines de $P$ sont $\dfrac{-(-2) \pm \sqrt{\Delta}}{2 \times 1} = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$. Par conséquent, le polynôme $P$ étant unitaire, on a $P = \left(X - 1 - \sqrt{2}\right)\left(X - 1 + \sqrt{2}\right)$.

---

**3.5 b)** Le discriminant du trinôme $P = X^2 - 2X - 2$ vaut $12 = \left(2\sqrt{3}\right)^2$ et ses racines sont $1 \pm \sqrt{3}$. Par conséquent, le polynôme $P$ étant unitaire, on a $P = \left(X - 1 - \sqrt{3}\right)\left(X - 1 + \sqrt{3}\right)$.

---

**3.5 c)** Le discriminant du trinôme $P = X^2 - 2\sqrt{5}X - 4$ vaut $36 = 6^2$ et ses racines sont $\sqrt{5} \pm 3$. Par conséquent, le polynôme $P$ étant unitaire, on a $P = \left(X + 3 - \sqrt{5}\right)\left(X - 3 - \sqrt{5}\right)$.

---

**3.5 d)** Le discriminant du trinôme $P = 2X^2 - 6X + 1$ vaut $28 = \left(2\sqrt{7}\right)^2$ et ses racines sont $\dfrac{3 \pm \sqrt{7}}{2}$. Par conséquent, on a $P = 2\left(X - \dfrac{3 + \sqrt{7}}{2}\right)\left(X - \dfrac{3 - \sqrt{7}}{2}\right)$, puisque 2 est le coefficient dominant de $P$.

---

**3.6 a)** On fixe $m$ dans $\mathbb{R}$. Notons $\Delta$ le discriminant du trinôme $P = X^2 + mX - 2m^2$. On a

$$\Delta = m^2 - 4 \times 1 \times \left(-2m^2\right) = m^2 + 8m^2 = (3m)^2 \geqslant 0.$$

Ainsi, les deux racines de $P$ sont

$$\frac{-m \pm \sqrt{(3m)^2}}{2 \times 1} = \frac{-m \pm |3m|}{2} = \frac{-m \pm 3m}{2} \quad \text{donc sont } m \text{ et } -2m.$$

Par conséquent, le polynôme $P$ étant unitaire, on a $P = (X - m)(X + 2m)$.

---

**3.6 b)** On fixe $m$ dans $\mathbb{R}$. Notons $\Delta$ le discriminant du trinôme $P = X^2 - 2X + 1 - 2m^2$. On a

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times \left(1 - 2m^2\right) = 8m^2 \geqslant 0.$$

Ainsi, les deux racines de $P$ sont

$$\frac{-(-2) \pm \sqrt{8m^2}}{2 \times 1} = \frac{2 \pm \sqrt{2(2m)^2}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{2} \times |2m|}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}m}{2} = 1 \pm \sqrt{2}m.$$

Par conséquent, le polynôme $P$ étant unitaire, on a $P = \left(X - 1 - \sqrt{2}m\right)\left(X - 1 + \sqrt{2}m\right)$.

---

**3.6 c)** On fixe $m$ dans $\mathbb{R}$. Notons $\Delta$ le discriminant du trinôme $P = 2X^2 + (m + 6)X + 3m$. On a

$$\Delta = (m + 6)^2 - 4 \times 2 \times 3m = m^2 + 12m + 36 - 24m = m^2 - 12m + 36 = (m - 6)^2 \geqslant 0.$$

Ainsi, les deux racines de $P$ sont

$$\frac{-(m + 6) \pm \sqrt{(m - 6)^2}}{2 \times 2} = \frac{-m - 6 \pm |m - 6|}{4} = \frac{-m - 6 \pm (m - 6)}{4} \quad \text{donc sont } -3 \text{ et } -m/2.$$

Par conséquent, $P = 2\left(X + \dfrac{m}{2}\right)(X + 3)$, puisque 2 est le coefficient dominant de $P$.

---

**3.6** d) On fixe $m$ dans $\mathbb{R}$. Notons $\Delta$ le discriminant du trinôme $P = X^2 - 2X - m^2$. On a

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times \left(-m^2\right) = 4\left(m^2 + 1\right) \geqslant 0.$$

Ainsi, les deux racines de $P$ sont $\dfrac{-(-2) \pm \sqrt{4(m^2+1)}}{2 \times 1} = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{m^2+1}}{2} = 1 \pm \sqrt{m^2+1}$.

Par conséquent, sachant que $P$ unitaire, on a $P = \left(X - 1 - \sqrt{m^2+1}\right)\left(X - 1 + \sqrt{m^2+1}\right)$.

---

**3.7** a) Pour un réel $x$ non nul, on a les équivalences

$$x + \frac{1}{x} = 2 \iff x^2 + 1 = 2x \iff x^2 - 2x + 1 = 0 \iff (x-1)^2 = 0 \iff x = 1.$$

---

**3.7** b) Pour un réel $x$ non nul, on a les équivalences suivantes :

$$x + 2 = \frac{3}{x} \iff x^2 + 2x = 3 \iff x^2 + 2x - 3 = 0.$$

Or, le discriminant du trinôme $X^2 + 2X - 3$ vaut $2^2 - 4 \times (-3) = 16$. Ses deux racines sont

$$\frac{-2 + \sqrt{16}}{2 \times 1} = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{-2 - \sqrt{16}}{2 \times 1} = -3.$$

---

**3.8** a) Pour un réel $x \neq 2$, on a les équivalences suivantes :

$$x - \frac{1}{x-2} = 1 \iff x(x-2) - 1 = x - 2 \iff x^2 - 2x - 1 - x + 2 = 0 \iff x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Or, le discriminant du trinôme $x^2 - 3x + 1$ vaut 5 et ses racines sont $\dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

---

**3.8** b) Remarquons que $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. Ainsi, pour tout réel $x \neq \pm 1$, on a les équivalences suivantes :

$$\frac{2x}{x^2 - 1} = 4 - \frac{1}{x-1} \iff 2x = 4(x^2 - 1) - (x+1) \iff 2x = 4x^2 - 4 - x - 1 \iff 4x^2 - 3x - 5 = 0.$$

Or, le discriminant du trinôme $4x^2 - 3x - 5$ vaut 89 et les deux racines sont $\dfrac{3 \pm \sqrt{89}}{8}$.

---

**3.9** a) On cherche des solutions vérifiant $x + 11 \geqslant 0$. Soit $x \geqslant -11$ tel que $x + 5 = \sqrt{x+11}$. On a alors

$$(x+5)^2 = x + 11 \quad \text{donc} \quad x^2 + 10x + 25 = x + 11 \quad \text{donc} \quad x^2 + 9x + 14 = 0.$$

Le discriminant du trinôme $X^2 + 9X + 14$ vaut 25 et les deux racines sont $-2$ et $-7$.

Vérifions réciproquement si ces valeurs sont solutions de l'équation initiale :

$$-2 + 5 = 3 = \sqrt{-2 + 11} \quad \text{et} \quad -7 + 5 = -2 \neq 2 = \sqrt{-7 + 11}.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation est $\{-2\}$.

---

**3.9** b) Pour commencer, les solutions doivent vérifier $x^2 - 2 \geqslant 0$ et donc $x \leqslant -\sqrt{2}$ ou $x \geqslant \sqrt{2}$.

Soit $x \in \left]-\infty, -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}, +\infty\right[$ tel que $x = 1 + \sqrt{x^2 - 2}$. On a

$$x - 1 = \sqrt{x^2 - 2} \quad \text{donc} \quad (x-1)^2 = x^2 - 2 \quad \text{donc} \quad x^2 - 2x + 1 = x^2 - 2 \quad \text{donc} \quad 2x = 3 \quad \text{donc} \quad x = \frac{3}{2}.$$

Réciproquement, on vérifie que $1 + \sqrt{\dfrac{3}{2}^2 - 2} = 1 + \sqrt{\dfrac{9}{4} - 2} = 1 + \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{3}{2}$.

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation est $\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$.

---

**3.10 a)** On cherche des solutions vérifiant $x \geqslant 0$ et $2x-1 \geqslant 0$, donc vérifiant $x \geqslant 1/2$.

Soit $x \geqslant 1/2$ tel que $\sqrt{x}+2 = \sqrt{2x-1}$. On a

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{x}+2\right)^2 = 2x-1 \quad &\text{donc} \quad x+4\sqrt{x}+4 = 2x-1 \quad \text{donc} \quad 4\sqrt{x} = x-5 \\ &\text{donc} \quad \left(4\sqrt{x}\right)^2 = (x-5)^2 \quad \text{donc} \quad 16x = x^2-10x+25 \quad \text{donc} \quad x^2-26x+25=0.\end{aligned}$$

Or, le discriminant du trinôme $x^2-26x+25$ vaut

$$(-26)^2 - 4\times 25 = 2^2\times 13^2 - 2^2\times 5^2 = 2^2\left(13^2-5^2\right) = 2^2\times 8\times 18 = 2^2\times 2^4\times 3^2 = 24^2$$

et les deux racines sont 25 et 1.

Vérifions réciproquement si ces valeurs sont solutions de l'équation initiale :

$$\sqrt{25}+2 = 7 = \sqrt{2\times 25-1} \quad \text{et} \quad \sqrt{1}+2 = 3 \neq 1 = \sqrt{2\times 1-1}.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation est $\{25\}$.

---

**3.10 b)** Posons $y = \sqrt{x}$, avec $x$ un réel positif. Remarquons que $\sqrt{x}+2 = y+2 \neq 0$. Il vient alors

$$\sqrt{x}-2-\frac{7\sqrt{x}-10}{\sqrt{x}+2} = 0 \iff y-2-\frac{7y-10}{y+2} = 0 \iff (y-2)(y+2)-(7y-10) = 0 \iff y^2-7y+6=0.$$

Or, le discriminant du trinôme $y^2-7y+6$ vaut 25 et les deux racines sont 6 et 1. Par conséquent

$$\sqrt{x}-2-\frac{7\sqrt{x}-10}{\sqrt{x}+2} = 0 \iff \sqrt{x}=6 \quad \text{ou} \quad \sqrt{x}=1 \iff x=36 \quad \text{ou} \quad x=1$$

et l'ensemble des solutions de l'équation est $\{1,36\}$.

---

**3.11 b)** Comme $P(1)=0$, $P$ se factorise par $X-1$. Il existe donc $a,b,c \in \mathbb{R}$, tels que

$$P = X^3-7X+6 = (X-1)\left(aX^2+bX+c\right) = aX^3+(b-a)X^2+(c-b)X-c.$$

En identifiant les coefficients des termes de même degré, on a

$$\begin{cases} a=1 \\ b-a=0 \\ c-b=-7 \\ -c=6 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=-6. \end{cases}$$

---

**3.11 c)** Il suffit de déterminer les racines du trinôme $X^2+X-6$ pour terminer la factorisation de $P$.

Or, ce trinôme admet 25 pour discriminant et ses racines sont 2 et $-3$.

On a donc $X^2+X-6 = (X-2)(X+3)$ et au total $P = (X-1)(X-2)(X+3)$.

---

**3.12 b)** Comme $P(-1)=0$, $P$ se factorise par $X+1$. Il existe $a,b,c \in \mathbb{R}$, tels que

$$P = 2X^3+13X^2+16X+5 = (X+1)\left(aX^2+bX+c\right) = aX^3+(a+b)X^2+(b+c)X+c.$$

En identifiant les coefficients des termes de même degré, on a $\begin{cases} a=2 \\ a+b=13 \\ b+c=16 \\ c=5 \end{cases}$ donc $\begin{cases} a=2 \\ b=11 \\ c=5. \end{cases}$

On a donc $P = (X+1)\left(2X^2+11X+5\right)$.

---

**3.12 c)** Il suffit de déterminer les racines du trinôme $2X^2 + 11X + 5$ pour terminer la factorisation de $P$. Or, ce trinôme admet 81 pour discriminant et ses racines sont $-5$ et $-\frac{1}{2}$. On a donc, sans oublier le coefficient dominant, $2X^2 + 11X + 5 = 2(X+5)\left(X + \frac{1}{2}\right)$ et donc $P = 2(X+1)(X+5)\left(X + \frac{1}{2}\right)$.

........................................................................................................................................

**3.13 a)** Posons $P = X^3 - 3X^2 + X + 1$. On vérifie que $P(1) = 0$, Ainsi, le polynôme $P$ se factorise pas $X-1$. Comme dans les deux calculs précédents, on cherche à factoriser $P$ sous la forme $(X-1)\big(aX^2 + bX + c\big)$, et on obtient $P = (X-1)\big(X^2 - 2X - 1\big)$. Or, le discriminant du trinôme $X^2 - 2X - 1$ vaut 8, ce qui mène aux deux racines $1 \pm \sqrt{2}$. Par conséquent $X^2 - 2X - 1 = \big(X - 1 - \sqrt{2}\big)\big(X - 1 + \sqrt{2}\big)$ et au total $P = (X-1)\big(X - 1 - \sqrt{2}\big)\big(X - 1 + \sqrt{2}\big)$.

........................................................................................................................................

**3.13 b)** Posons $P = 4X^3 - 4X^2 - 5X + 3$. On vérifie que $P(-1) = 0$, Ainsi, le polynôme $P$ se factorise pas $X+1$. Comme dans les deux calculs précédents, on cherche à factoriser $P$ sous la forme $(X+1)\big(aX^2 + bX + c\big)$, et on obtient $P = (X+1)\big(4X^2 - 8X + 3\big)$. Or, le discriminant du trinôme $4X^2 - 8X + 3$ vaut 16, ce qui mène aux deux racines $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$. Par conséquent $4X^2 - 8X + 3 = 4\left(X - \frac{1}{2}\right)\left(X - \frac{3}{2}\right)$ et au total $P = 4(X+1)\left(X - \frac{1}{2}\right)\left(X - \frac{3}{2}\right)$.

........................................................................................................................................

**3.14 b)** Le discriminant du trinôme $y^2 - 7y + 12$ vaut 1, ce qui mène aux racines 4 et $-3$. Par conséquent, $y^2 - 7y + 12 = (y-4)(y-3)$.

........................................................................................................................................

**3.14 c)** *Via* les deux calculs précédents, on a les équivalences suivantes :

$$x^4 - 7x^2 + 12 = 0 \iff \big(x^2 - 4\big)\big(x^2 - 3\big) = 0 \iff x^2 = 4 \text{ ou } x^2 = 3 \iff x = \pm 2 \text{ ou } x = \pm\sqrt{3}.$$

........................................................................................................................................

**3.15 a)** On fait le changement d'inconnue $y = x^2$ et on utilise le fait que $y^2 - 6y + 5 = (y-1)(y-5)$.

........................................................................................................................................

**3.15 b)** On fait le changement d'inconnue $y = x^2$ et on utilise le fait que $y^2 - 7y - 8 = (y+1)(y-8)$.

........................................................................................................................................

**3.16** Soit $a$ un réel. Notons $\Delta$ le discriminant du trinôme $P = X^2 + (a-2)X - 2a$. On a

$$\Delta = (a-2)^2 + 8a = a^2 - 4a + 4 + 8a = a^2 + 4a + 4 = (a+2)^2.$$

Les deux racines de $P$ sont donc

$$\frac{-(a-2) \pm \sqrt{(a+2)^2}}{2} = \frac{-(a-2) \pm |a+2|}{2} = \frac{-(a-2) \pm (a+2)}{2} \quad \text{donc sont } 2 \text{ et } -a.$$

Ainsi, en notant $\{\alpha, \beta\} = \{2, -a\}$, il vient : $|\alpha - \beta| = 1 \iff |a+2| = 1$.

On distingue alors deux cas, selon le signe de $a+2$ :

- si $a + 2 \geqslant 0$, on a les équivalences

$$|a+2| = 1 \iff a + 2 = 1 \iff a = -1$$

  et on a bien $-1 + 2 = 1 \geqslant 0$ ;
- si $a + 2 \leqslant 0$, on a les équivalences

$$|a+2| = 1, \iff a + 2 = -1 \iff a = -3$$

  et on a bien $-3 + 2 = -1 \leqslant 0$.

Ainsi, l'ensemble des valeurs de $a$ telles que $|\alpha - \beta| = 1$ est $\{-1, -3\}$.

........................................................................................................................................

**3.17** Soit $a$ un réel. Notons $\Delta$ le discriminant du trinôme $P = X^2 - \left(a^2+1\right)X + a^2$. On a

$$\Delta = \left(a^2+1\right)^2 - 4a^2 = \left(a^2+1\right)^2 - (2a)^2 = \left(a^2-2a+1\right)\left(a^2+2a+1\right) = (a-1)^2(a+1)^2 = \left(a^2-1\right)^2.$$

Les deux racines de $P$ sont donc

$$\frac{a^2+1 \pm \sqrt{(a^2-1)^2}}{2} = \frac{a^2+1 \pm |a^2-1|}{2} = \frac{a^2+1 \pm \left(a^2-1\right)}{2} \qquad \text{donc sont } a^2 \text{ et } 1.$$

Ainsi, en notant $\{\alpha, \beta\} = \left\{1, a^2\right\}$, il vient $|\alpha - \beta| = 1 \iff |a^2 - 1| = 1$.

On distingue alors deux cas, selon le signe de $a^2 - 1$ :

- si $a^2 - 1 \geqslant 0$, on a les équivalences $|a^2-1| = 1 \iff a^2 - 1 = 1 \iff a^2 = 2 \iff a = \pm\sqrt{2}$ et on a bien $\left(\pm\sqrt{2}\right)^2 - 1 = 1 \geqslant 0$ ;
- si $a^2 - 1 \leqslant 0$, on a les équivalences $|a^2-1| = 1 \iff a^2 - 1 = -1 \iff a^2 = 0 \iff a = 0$ et on a bien $0^2 - 1 = -1 \leqslant 0$.

Ainsi, l'ensemble des valeurs de $a$ telles que $|\alpha - \beta| = 1$ est $\left\{0, \pm\sqrt{2}\right\}$.

....................................................................................................................................................

# Fiche n° 4. Polynômes I

## Réponses

4.1 a) ........ $-\dfrac{5}{6}$

4.1 b) ........ $\dfrac{67}{30}$

4.1 c) ........ $\dfrac{31}{6}$

4.1 d) ........ $\dfrac{-1}{45}$

4.1 e) ........ $\dfrac{2}{3}$

4.1 f) ........ $-\dfrac{1}{40}$

4.2 a) ........ $(a,b) = \left(\dfrac{5}{7}, \dfrac{1}{7}\right)$

4.2 b) ........ $(a,b,c) = (1,-3,2)$

4.3 a) ........ $-63$

4.3 b) ........ $0$

4.3 c) ........ $0$

4.3 d) ........ $-110$

4.3 e) ........ $25$

4.4 a) ........ $\dfrac{10}{9}$

4.4 b) ........ $\dfrac{181}{2}$

4.4 c) ........ $-\dfrac{163}{3}$

4.4 d) ........ $-\dfrac{178}{27}$

4.4 e) ........ $\dfrac{367}{45}$

4.5 a) ........ $165$

4.5 b) ........ $-\dfrac{35}{6}$

4.6 a) ........ $0$

4.6 b) ........ $-18(1+6\sqrt{2})$

4.6 c) ........ $0$

4.7 a) ........ $X^4 - X^3 - X + 1$

4.7 b) ........ $-2X^2 - X + 20$

4.7 c) ........ $\dfrac{2}{3}X^2 + 5X - \dfrac{73}{10}$

4.8 a) ........ $-2 + 19X - 39X^2 + 9X^3 + 7X^4 - 2X^5$

4.8 b) ........ $\dfrac{3}{2} - \dfrac{11}{8}X - \dfrac{3}{2}X^2 - \dfrac{1}{4}X^3 - X^4 + 2X^5$

4.8 c) ........ $1 + X^4$

4.9 a) ........ $7 + 8X$

4.9 b) ........ $7 + 8X$

4.9 c) ........ $1 - 2X + 6X^2$

4.10 a) ........ $3 - 6X + 4X^2$

4.10 b) ........ $-1 - X + X^2 - X^3 + 2X^4 + X^6$

4.10 c) ........ $12X + 31X^2 + 45X^3 + 30X^4 + 9X^5 + X^6$

4.11 a) ........ $-\sqrt{2} + (2\sqrt{2} - 4)X + (6 - 2\sqrt{2})X^2 + 2\sqrt{2}X^3$

4.11 b) ........ $-1 + 3X - 3X^2 + X^3$

4.12 a) ........ $1 + (6 + \sqrt{3})X^2 + 2X^4$

4.12 b) ........ $18\sqrt{2} - 28 + (26 - 18\sqrt{2})X^2 + (6\sqrt{2} - 9)X^4 + 2X^6$

4.13 a) ........ non

4.13 b) ........ oui

4.13 c) ........ oui

4.13 d) ........ non

4.14 a) ........ $m = \dfrac{1}{8}$

4.14 b) ........ $m = 1$

**4.14** c) ........................ $\boxed{m \in \left\{-2, \frac{-1}{3}\right\}}$

**4.15** ........................................ $\boxed{\text{oui}}$

**4.16** a) ...................... $\boxed{P = \frac{(X-1)^2 X^2}{4}}$

**4.16** b) ........................... $\boxed{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}$

**4.17** a) .................... $\boxed{m \in \left\{-\sqrt{2}, -1, \sqrt{2}\right\}}$

**4.17** b) ............ $\boxed{m \in \left\{1, \frac{\sqrt{2}-1}{2}, 1-2\sqrt{2}\right\}}$

## Corrigés

**4.3** a) Pour calculer $P(a)$, on remplace dans l'expression de $P$ l'indéterminée $X$ par la valeur $a$. On a donc ici, $P(2) = 3 + 9 \times 2 - 2^2 - 5 \times 2^4 = -63$.

........................................................................................................................................

**4.3** b) On peut observer que pour calculer $P(1)$, il suffit de faire la somme des coefficients du polynôme $P$.

On a donc, ici, $P(1) = 3 - 4 + 2 - 3 + 2 = 0$.

........................................................................................................................................

**4.3** c) On peut observer que, pour calculer $P(-1)$, il suffit de faire la somme des coefficients des termes de degré pair à laquelle on soustrait la somme des coefficients des termes de degré impair.

On a donc, ici, $P(1) = -3 - 4 + 2 + 3 + 2 = 0$.

........................................................................................................................................

**4.6** a) Pour effectuer moins de calculs, on peut observer que $P = X^2\big(X^2 - 2X - 2\big)$. Ce qui permet d'éviter de calculer $a^4 = \big(a^2\big)^2$ et $a^3 = a \times a^2$. Comme $a^2 = 4 + 2\sqrt{3}$, on obtient alors $a^2 - 2a - 2 = 4 + 2\sqrt{3} - 2(1+\sqrt{3}) - 2 = 0$, puis $P(a) = a^2\big(a^2 - 2a - 2\big) = 0$.

........................................................................................................................................

**4.6** c) Il faut y aller tranquillement et pas à pas en calculant

$$a^2 - 1 = 2(1-\sqrt{2}) \quad \text{puis} \quad (a^2-1)^2 = 4(3-2\sqrt{2}) \quad \text{puis} \quad \sqrt{2}\big(a^2-1\big)^2 - 2 = 12\sqrt{2} - 18$$
$$\text{et} \quad \Big(\sqrt{2}\big(a^2-1\big)^2 - 2\Big)\Big(3a - \frac{1}{2}\Big) = 84\sqrt{2} - 117.$$

On trouve finalement $P(a) = 0$.

*Voici une solution plus astucieuse et très élégante. On peut également, en remarquant que* $a^2 - 1 = 2a$ *et* $\sqrt{2} = 1 - a$, *écrire que* $P(a) = \Big((1-a)(2a)^2 - 2\Big)\Big(3a - \frac{1}{2}\Big) + 84a + 33$. *Puis développer cette expression en prenant soin de remplacer* $a^2$ *par* $1 + 2a$ *à chaque étape du calcul, pour trouver finalement* $P(a) = 0$.

........................................................................................................................................

**4.7** a) On utilise l'identité remarquable $(X-1)^2 = X^2 - 2X + 1$. Ainsi, on peut écrire :

$$(X-1)^2\big(X^2 + X + 1\big) = \big(X^2 - 2X + 1\big)\big(X^2 + X + 1\big) = X^4 - X^3 - X + 1.$$

........................................................................................................................................

**4.9** a) On a $P \circ Q = 2(4X + 3) + 1$.

........................................................................................................................................

**4.10 a)** On a $P \circ Q = (2X-1)^2 - (2X-1) + 1$.

**4.14 a)** On a $P(1) = 8m - 1$. Ainsi $P(1) = 0$ si, et seulement si, $m = \dfrac{1}{8}$.

**4.14 b)** On a $P(1+m^2) = \big(1+m^2\big)^2 - \big(m^2+2m-1\big)(1+m^2) + 2m^3 - 2m = 2 - 4m + 2m^2 = 2(1-m)^2$. Ainsi, $P(1+m^2) = 0$ si, et seulement si, $m = 1$.

**4.14 c)** Les calculs donnent $P(2m+1) = 3m^2 + 7m + 2$. Or les solutions de l'équation algébrique du second degré $3m^2 + 7m + 2 = 0$ sont $-2$ et $\dfrac{-1}{3}$. Ainsi, $P(2m+1) = 0$ si, et seulement si, $m \in \left\{-2, \dfrac{-1}{3}\right\}$.

**4.15** Observez que $\big(5+\sqrt{17}\big)a^2 - 4 = 0$ et que $a^5 - 5a^3 + 2a = a\big(a^4 - 5a^2 + 2\big)$. Il s'agit donc de voir si $a^4 - 5a^2 + 2 = 0$. Ce qui est bien le cas. Ainsi $a$ est une racine de $P$.

**4.16 a)** Comme $P$ est de degré 4, il s'écrit $P = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e$. On a déjà $e = P(0) = 0$. Par ailleurs, $P \circ (X+1) = aX^4 + (4a+b)X^3 + (6a+3b+c)X^2 + (4a+3b+2c+d)X + a+b+c+d$. Ainsi, on a $P \circ (X+1) - P = 4aX^3 + (6a+3b)X^2 + (4a+3b+2c)X + a+b+c+d$. En identifiant les coefficients avec ceux de $X^3$. On obtient alors le système

$$\begin{cases} 4a & = & 1 \\ 6a+3b & = & 0 \\ 4a+3b+2c & = & 0 \\ a+b+c+d & = & 0 \end{cases},$$

dont l'unique solution est donnée par $a = c = \dfrac{1}{4}$, $b = -\dfrac{1}{2}$, et $d = 0$. D'où $P = \dfrac{1}{4}X^4 - \dfrac{1}{2}^3 + \dfrac{1}{4}X^2 = \dfrac{(X-1)^2X^2}{4}$.

**4.16 b)** Comme, pour tout naturel $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, $P(k+1) - P(k) = k^3$, on a alors

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 &= (P(2) - P(1)) + (P(3) - P(2)) + \cdots + (P(n+1) - P(n)) \\ &= -P(1) + P(n+1) = P(n+1) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

**4.17 a)** On a $P(2) = -2(m^3 + m^2 - 2m - 2)$. En observant que $-1$ est une solution de $m^3 + m^2 - 2m - 2 = 0$, on obtient la factorisation $m^3 + m^2 - 2m - 2 = (m+1)(m^2-2) = (m+1)(m-\sqrt{2})(m+\sqrt{2})$. Ainsi, 2 est racine de $P$ si, et seulement si, $m \in \big\{-\sqrt{2}, -1, \sqrt{2}\big\}$.

**4.17 b)** On a $P(\sqrt{2}-1) = -2m^3 + 3(1-\sqrt{2})m^2 + 4m + 3\sqrt{2} - 5$. En observant que 1 est une solution évidente de $-2m^3 + 3(1-\sqrt{2})m^2 + 4m + 3\sqrt{2} - 5 = 0$, on obtient la factorisation suivante :

$$\begin{aligned} -2m^3 + 3(1-\sqrt{2})m^2 + 4m + 3\sqrt{2} - 5 &= (m-1)\big(-2m^2 + (1-3\sqrt{2})m + 5 - 3\sqrt{2}\big) \\ &= (m-1)(m + 2\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} - 1 - 2m). \end{aligned}$$

Ainsi, $\sqrt{2} - 1$ est racine de $P$ si, et seulement si, $m \in \left\{1, \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}, 1 - 2\sqrt{2}\right\}$.

# Fiche n° 5. Polynômes II

## Réponses

5.1 a) $a^3+6a^2+11a+6$

5.1 b) $a^3-1$

5.2 a) $(2X-4)(2X+6)$

5.2 b) $(4X+8)(-2X-2)$

5.2 c) $(\sqrt{2}X+4)(\sqrt{2}X-4)$

5.2 d) $(X-1+\sqrt{3})(X-1-\sqrt{3})$

5.3 a) $X(X-2)$

5.3 b) $X(X-1)$

5.3 c) $(X-1)(2X-1)$

5.3 d) $(X+2)(3X+3)$

5.3 e) $(3X+2)(-5X+3)$

5.4 a) $(X-5)^2$

5.4 b) $(X-\sqrt{3})(X+\sqrt{3})$

5.4 c) $(\sqrt{2}X-1)^2$

5.4 d) $(2X+8)(-2X+2)$

5.5 a) $(2X-1)(X+1)$

5.5 b) $8(X-3)$

5.5 c) $(X-2)(2X+2)$

5.6 a) $(-X-14)(6X+8)$

5.6 b) $(3X-6)(-X-9)$

5.6 c) $(3X+9)(-X-2)$

5.7 a) $6$

5.7 b) $16$

5.7 c) $10$

5.7 d) $-124$

5.8 a) $\dfrac{1}{a}$

5.8 b) $1-a$

5.9 a) $\dfrac{1}{3}$

5.9 b) $-\dfrac{3}{2}$

5.9 c) $-\dfrac{1}{5}$

5.10 a) $(X-1)(X+2)$

5.10 b) $(X-2)(X-3)$

5.10 c) $-(X-5)(X-2)$

5.10 d) $(X+7)(X-5)$

5.10 e) $-(X-23)(X+2)$

5.10 f) $(X-15)(X+4)$

5.11 a) $-2$

5.11 b) $-\dfrac{1}{2}$

5.11 c) $2$

5.12 a) $X(X-1)(X+1)$

5.12 b) $X^2(X-1)(X+1)$

5.12 c) $X^2(X-1)(X+1)^2$

5.12 d) $(X+1)(X+\sqrt{2})(X-\sqrt{2})$

5.13 $(X^2+1)(X-1)(X+1)$

5.14 a) $(X^2+1)^2$

5.14 b) $(2X^4+1)^2$

5.14 c) $\left(X^2+\sqrt{2}X+1\right)\left(X^2-\sqrt{2}X+1\right)$

5.15 a) $(X-3)(X^2+3X+9)$

**5.15** b) .................. $\boxed{(X+1)(X^2-X+1)}$

**5.15** c) ..... $\boxed{(X-2)(X^4+2X^3+4X^2+8X+16)}$

**5.15** d) ......... $\boxed{(X+1)(X^4-X^3+X^2-X+1)}$

**5.15** e) ............. $\boxed{\begin{array}{l}(X-1)(X^6+X^5+X^4\\ \quad +X^3+X^2+X+1)\end{array}}$

**5.16** .......... $\boxed{\begin{array}{l}(X-1)(X^2+X+1)(X+1)\\ (X^2-X+1)(X^6+1)\end{array}}$

## Corrigés

**5.2** a) On applique l'identité remarquable avec $a = 2X+1$ et $b = 5$.

**5.2** b) On applique l'identité remarquable avec $a = X+3$ et $b = 3X+5$. On obtient

$$(X+3)^2 - (3X+5)^2 = ((X+3)+(3X+5))((X+3)-(3X+5)) = (4X+8)(-2X-2).$$

**5.2** c) On applique l'identité remarquable avec $a = \sqrt{2}X$ et $b = 4$.

**5.2** d) On applique l'identité remarquable avec $a = X-1$ et $b = \sqrt{3}$.

**5.3** a) On factorise par $X$. On obtient $X + X(X-3) = X(1+(X-3))X = X(X-2)$.

**5.3** c) On a $(X-1)(X-3) + (X+2)(X-1) = (X-1)(X-3+X+2) = (X-1)(2X-1)$.

**5.3** d) On factorise par $X+2$. On obtient

$$X(X+2) + (X+1)(X+2) + (X+2)^2 = (X+2)(X+(X+1)+(X+2)) = (X+2)(3X+3).$$

**5.4** a) On reconnaît l'expression $a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = X$ et $b = 5$.

**5.4** b) On reconnaît l'expression $a^2 - b^2$ avec $a = X$ et $b = \sqrt{3}$.

**5.4** c) On reconnaît l'expression $a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = \sqrt{2}X$ et $b = 1$.

**5.4** d) On reconnaît l'expression $a^2 - b^2$ avec $a = 5$ et $b = 2X+3$.

**5.5** a) On reconnaît une identité remarquable dans les deux derniers termes :

$$X(X+1) + X^2 - 1 = X(X+1) + (X+1)(X-1) = (X+1)(X+X-1) = (X+1)(2X-1).$$

**5.5** b) Écrire que $X^2 - 9 = (X+3)(X-3)$ et factoriser par $X-3$.

**5.5** c) Écrire que $X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2$ et factoriser par $X-2$.

**5.6** a) Écrire que $36X^2 - 64 = (6X+8)(6X-8)$ et factoriser par $6X+8$.

**5.6** b) Écrire que $-X^2 + 81 = (9+X)(9-X) = (-X-9)(X-9)$ et factoriser par $-X-9$.

**5.6** c) Plutôt que de tout développer, factoriser les deux premiers termes :

$$(X+3)^2 - (2X+5)^2 = (X+3+2X+5)(X+3-2X-5) = (3X+8)(-X-2)$$

puis factoriser le tout par $-X-2$.

**5.7** a) Le produit des racines vaut 6. Soit $\beta$ l'autre racine, on a donc $1 \times \beta = 6$ et donc $\beta = 6$.

**5.7** b) Le produit des racines vaut $-64$. Soit $\beta$ l'autre racine, on a donc $-4 \times \beta = -64$ et donc $\beta = \dfrac{-64}{-4} = 16$.

**5.7** c) Le produit des racines vaut 5. Soit $\beta$ l'autre racine, on a donc $\dfrac{1}{2} \times \beta = 5$ et donc $\beta = 2 \times 5 = 10$.

**5.7** d) Le produit des racines vaut 372. Soit $\beta$ l'autre racine, on a donc $-3 \times \beta = 372$ et donc $\beta = \dfrac{372}{-3} = -124$.

**5.8** a) Puisque le produit des racines vaut 1, l'autre racine vaut $a$. On vérifie que le coefficient en $X$ est bien la somme, à savoir $a + \dfrac{1}{a}$.

**5.8** b) On cherche $r \in \mathbb{R}$ tel que $(1+a)r = 1 - a^2$. En pensant à une identité remarquable, on trouve $r = 1 - a$.

**5.9** a) On applique ce qui est suggéré avec $a = 3$ et $c = 1$ : le produit des racines vaut $\dfrac{1}{3}$. Donc, puisque 1 est une racine, l'autre vaut $\dfrac{1}{3}$.

**5.9** b) De même, le produit des racines vaut $\dfrac{-12}{2} = -6$. Comme 4 est une racine, l'autre vaut $-\dfrac{6}{4} = -\dfrac{3}{2}$.

**5.9** c) De même, le produit des racines vaut $\dfrac{6}{5}$. Comme $-6$ est une racine, l'autre vaut $-\dfrac{1}{5}$.

**5.10** a) On cherche des nombres entiers dont le produit vaut $-2$ et la somme vaut $-1$. On trouve $-2$ et 1.

**5.10** c) Attention au « $-1$ » devant $X^2$. On cherche des nombres entiers dont le produit vaut 10 et la somme vaut 7. On trouve 5 et 2 ; d'où la factorisation.

**5.10** d) Procéder comme ci-dessus, en ayant en tête que $35 = 7 \times 5$.

**5.10** e) Procéder comme ci-dessus, en ayant en tête que $46 = 2 \times 23$.

**5.10** f) Il y a plusieurs pistes pour reconnaître les racines *via* le produit $-60$ puisque $60 = 2 \times 30 = 3 \times 20 = 4 \times 15 = 5 \times 12 = 6 \times 10$. Comme la somme fait 11, on penche pour 15 et $-4$.

**5.11** a) On évalue $P$ en 1, les deux premiers termes s'annulent, et il reste $c \times 1 \times (-1) = 2$ ; d'où $c = -2$.

**5.11** b) On procède comme ci-dessus.

**5.12 a)** On commence par mettre $X$ en facteur : $X^3 - X = X(X^2 - 1) = X(X+1)(X-1)$.

**5.12 b)** On commence par mettre $X^2$ en facteur : $X^4 - X^2 = X^2(X^2 - 1) = X^2(X+1)(X-1)$.

**5.12 c)** On met $X^2 - 1$ en facteur.

**5.12 d)** On reconnaît une identité remarquable dans le premier facteur :

$$(X^2 + 2X + 1)(X - 2) + (X + 1)X = (X + 1)^2(X - 2) + (X + 1)X.$$

On factorise alors par $X + 1$. On obtient

$$\begin{aligned}(X^2 + 2X + 1)(X - 2) + (X + 1)X &= (X + 1)((X + 1)(X - 2) + X) = (X + 1)(X^2 - 2) \\ &= (X + 1)(X + \sqrt{2})(X - \sqrt{2}).\end{aligned}$$

**5.13** On reconnaît l'expression $a^2 - b^2$ avec $a = X^2$ et $b = 1$. Ainsi, on a $X^4 - 1 = (X^2 + 1)(X^2 - 1)$. On factorise ensuite $X^2 - 1$.

**5.14 a)** On reconnaît l'expression $a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = X^2$ et $b = 1$.

**5.14 b)** On reconnaît l'expression $a^2 + b^2 + 2ab$ avec $a = 2X^4$ et $b = 1$.

**5.14 c)** On reconnaît l'expression $a^2 - b^2$ avec $a = X^2 + 1$ et $b = \sqrt{2}X$.

**5.15 a)** On applique la formule en notant que $27 = 3^3$.

**5.15 c)** On applique la formule en notant que $32 = 2^5$.

**5.15 d)** Ici, on prend $b = -1$, en effet on a $(-1)^5 = -1$.

**5.16** Il y a plusieurs méthode pour factoriser. Par exemple, on peut écrire

$$\begin{aligned}X^{12} - 1 = (X^6)^2 - 1 &= (X^6 - 1)(X^6 + 1) = (X^3 - 1)(X^3 + 1)(X^6 + 1) \\ &= (X - 1)(X^2 + X + 1)(X + 1)(X^2 - X + 1)(X^6 + 1).\end{aligned}$$

Notez qu'on peut aller plus loin en écrivant

$$X^6 + 1 = (X^2)^3 - (-1)^3 = \big(X^2 - (-1)\big)\big(X^4 - X^2 + 1\big) = (X^2 + 1)(X^4 - X^2 + 1).$$

D'où

$$X^{12} - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)(X + 1)(X^2 - X + 1)(X^2 + 1)(X^4 - X^2 + 1).$$

# Fiche nº 6. Dérivation I

## Réponses

6.1 a) .................. $\boxed{2^{n+1}}$

6.1 b) .................. $\boxed{2^{2n}}$

6.1 c) .................. $\boxed{2^{2n+1}}$

6.2 a) ........... $\boxed{\dfrac{1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{3}{n^2}}}$

6.2 b) ........... $\boxed{\dfrac{1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^3}}{1-\frac{1}{2n}+\frac{5}{n^2}}}$

6.3 a) .................. $\boxed{0}$

6.3 b) .................. $\boxed{2}$

6.4 a) .................. $\boxed{-\dfrac{1}{2}}$

6.4 b) .................. $\boxed{0}$

6.5 .................. $\boxed{c}$

6.6 .................. $\boxed{b}$

6.7 .................. $\boxed{b}$

6.8 a) .................. $\boxed{\sqrt{t^2+y_t^2}}$

6.8 b) .................. $\boxed{\sqrt{1-t^2}}$

6.8 c) .................. $\boxed{\dfrac{-t}{\sqrt{1-t^2}}}$

6.8 d) .. $\boxed{y=\dfrac{-t}{\sqrt{1-t^2}}x+\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}}$

6.8 e) .......... $\boxed{\vec{w}\begin{pmatrix}1\\ \dfrac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\end{pmatrix}}$

6.8 f) ........... $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{OM}(t)}\begin{pmatrix}t\\ y_t\end{pmatrix}}$

6.8 g) .................. $\boxed{\text{oui}}$

## Corrigés

**6.2 a)** On a $A(n)=\dfrac{n^2-2n+1}{2n^2+3}=\dfrac{n^2\left(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(2+\frac{3}{n^2}\right)}=\dfrac{1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{3}{n^2}}$.

........................................................................................................................................

**6.2 b)** On a $A(n)=\dfrac{n^3-3n^2+1}{n^3-\frac{n^2}{2}+5n}=\dfrac{n^3\left(1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^3}\right)}{n^3\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{5}{n^2}\right)}=\dfrac{1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^3}}{1-\frac{1}{2n}+\frac{5}{n^2}}$.

........................................................................................................................................

**6.3 a)** Le nombre $f'(-2)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse $-2$. Par lecture graphique, on a $f'(-2)=0$. En effet, la droite $T_2$ étant parallèle à l'axe des abscisses, son coefficient directeur est égal à 0.

........................................................................................................................................

**6.3 b)** Le nombre $f'(2)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 2. Par lecture graphique, on obtient que le coefficient directeur de la droite $T_1$ est 2, d'où $f'(2)=2$.

........................................................................................................................................

**6.5** La courbe représentative de la fonction $f'$ nous permet de déterminer le signe de $f'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Pour $x\in\,]-\infty,-2]\cup[1,3]$, on a $f'(x)\leqslant 0$ et, pour $x\in[-2,1]\cup[3,+\infty[$, on a $f'(x)\geqslant 0$.

La fonction cherchée est donc croissante sur les intervalles $[-2,1]$ et $[3,+\infty[$ et elle est décroissante sur les intervalles $]-\infty,-2]$ et $[1,3]$. C'est donc la fonction $f_3$.

........................................................................................................................................

**6.6** D'après le tableau de variation de $f'$, on a : pour tout $x\in\,]-\infty,-2]\cup[2,4]$, $f'(x)\leqslant 0$ et, pour tout $x\in[-2,2]\cup[4,+\infty[$, $f'(x)\geqslant 0$. La fonction cherchée est donc croissante sur les intervalles $[-2,2]$ et $[4,+\infty[$ et elle est décroissante sur les intervalles $]-\infty,-2]$ et $[2,4]$. C'est donc la fonction $f_3$.

........................................................................................................................................

**6.8 a)** On a $\mathrm{OM}(t)=\sqrt{(t-0)^2+(y_t-0)^2}=\sqrt{t^2+y_t^2}$.

........................................................................................................................................

**6.8** b) Le point $\mathrm{M}(t)$ est un point du cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1. Donc, on a $\mathrm{OM}(t) = 1$. En utilisant l'expression de $\mathrm{OM}(t)$ trouvée à la question précédente, on en déduit que $\sqrt{t^2 + y_t^2} = 1$. D'où $t^2 + y_t^2 = 1$, c'est-à-dire $y_t^2 = 1 - t^2$. Or, par définition, on a $y_t > 0$ ; donc, on a $y_t = \sqrt{1 - t^2}$.

......................................................................................................................................................

**6.8** c) La fonction $f$ est dérivable sur $]-1, 1[$ et, pour tout $t \in\, ]-1, 1[$, on a $f'(t) = \dfrac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}} = \dfrac{-t}{\sqrt{1-t^2}}$.

......................................................................................................................................................

**6.8** d) L'équation réduite de $T$ est $y = f'(t)(x - t) + f(t)$, c'est-à-dire : $y = \dfrac{-t}{\sqrt{1-t^2}}(x - t) + \sqrt{1-t^2}$.

Ainsi, l'équation réduite de $T$ est $y = \dfrac{-t}{\sqrt{1-t^2}}x + \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

......................................................................................................................................................

**6.8** f) Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}(t)}\begin{pmatrix} t \\ y_t \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite $(\mathrm{OM}(t))$.

......................................................................................................................................................

**6.8** g) On a $\overrightarrow{\mathrm{OM}(t)}\begin{pmatrix} t \\ y_t \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{-t}{\sqrt{1-t^2}} \end{pmatrix}$. On calcule

$$t \times 1 + y_t \times \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} = t \times 1 + \sqrt{1-t^2} \times \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} = t - t = 0.$$

Donc, les vecteurs $\vec{w}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OM}(t)}$ sont orthogonaux.

On a montré que la tangente en $M(t)$ au cercle $\mathscr{C}$ est perpendiculaire au rayon $[\mathrm{OM}(t)]$.

......................................................................................................................................................

# Fiche n° 7. Dérivation II

## Réponses

**7.1** a) ........ $\left]\dfrac{9}{10},+\infty\right[$

**7.1** b) ........ $\left[\dfrac{3}{7},+\infty\right[$

**7.1** c) ........ $\left]-\dfrac{4}{45},+\infty\right[$

**7.1** d) ........ $\left]-\infty,-\dfrac{8}{5}\right]$

**7.2** a) ........ $\dfrac{9}{8}$

**7.2** b) ........ $\dfrac{2}{3}$

**7.2** c) ........ $1200$

**7.3** a) ........ $\dfrac{11}{4}$

**7.3** b) ........ $6-10\sqrt{3}$

**7.3** c) ........ $-\dfrac{69}{25}-2\sqrt{2}$

**7.3** d) ........ $-\dfrac{23}{4}-\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$

**7.3** e) ........ $\dfrac{13}{2}-\dfrac{13\sqrt{5}}{2}$

**7.3** f) ........ $35-22\sqrt{2}$

**7.4** a) ........ $8x^3+15x^2-2x-6$

**7.4** b) ........ $\dfrac{x^4}{2}-\dfrac{5x^3}{3}+\dfrac{9x^2}{2}-\dfrac{3x}{5}$

**7.4** c) ........ $4x^9+2x^6-\dfrac{x^5}{2}-3x^2+\dfrac{x}{2}$

**7.5** a) ........ $108+30\sqrt{6}$

**7.5** b) ........ $21+16\sqrt{3}$

**7.5** c) ........ $\dfrac{5}{2}-2\sqrt{2}$

**7.5** d) ........ $3+5\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

**7.6** a) ........ $\dfrac{-3}{(3x+1)^2}$

**7.6** b) ........ $\dfrac{3-4x}{(2x^2-3x+4)^2}$

**7.6** c) ........ $\dfrac{x^2+6x-1}{\left(-\frac{1}{3}x^3-3x^2+x-2\right)}$

**7.7** a) ........ $\dfrac{2x^2-4x+2}{\left(\frac{-2}{3}x^3+2x^2-2x\right)^2}$

**7.7** b) ........ $\dfrac{-2x^2+5x^3+17x}{\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{4}x^4-\frac{17}{2}x^2\right)^2}$

**7.8** a) ........ $\dfrac{23}{(-5x+4)^2}$

**7.8** b) ........ $\dfrac{16x^3-22x^2+10x+1}{(2x-1)^2}$

**7.9** a) ........ $\dfrac{-5x^4-4x^3-x^2-2}{\left(x^3+x\right)^2}$

**7.9** b) ........ $\dfrac{2x^5+2x^4+2x^3-2x^2-1}{\left(x^2+x+1\right)^2}$

**7.10** a) ........ $\dfrac{3x+1}{2x-3}$

**7.10** b) ........ $\dfrac{3x^3-x^2+2x}{-2x^3-2x^2-2}$

**7.10** c) ........ $\dfrac{-11}{(2x-3)^2}$

**7.10** d) ........ $\dfrac{-4x^4+4x^3-7x^2+2x-2}{2(x^3+x^2+1)^2}$

**7.11** a) ........ $\dfrac{2x^3+5x^2+3x}{-x^2+2x+8}$

**7.11** b) .................... $\boxed{\dfrac{2x+1}{6x^3-2x}}$

**7.11** c) ......... $\boxed{\dfrac{-2x^4+8x^3+61x^2+80x+24}{(-x-2)^2(x-4)^2}}$

**7.11** d) .................... $\boxed{\dfrac{-12x^3-9x^2+1}{2x^2(3x^2-1)^2}}$

**7.12** a) .................... $\boxed{\left[\dfrac{3}{7},+\infty\right[}$

**7.12** b) .................... $\boxed{[0,+\infty[}$

**7.12** c) ................ $\boxed{\left]-\infty,-\dfrac{1}{2}\right[\cup\left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[}$

**7.12** d) .................... $\boxed{\left]-\infty,\dfrac{4}{5}\right]}$

**7.13** a) ................ $\boxed{\dfrac{(x+2)^2}{\left(\frac{1}{3}x^3+2x^2+4x-1\right)^2}}$

**7.13** b) ................ $\boxed{\dfrac{-3(x-3)^2}{\left(x^3-9x^2+27x-5\right)^2}}$

**7.13** c) .................... $\boxed{\dfrac{(x-8)(x+8)}{\left(\frac{x^3}{3}-64x+21\right)^2}}$

**7.13** d) .................... $\boxed{\dfrac{\left(\frac{1}{2}x+3\right)^2}{\left(\frac{1}{12}x^3+\frac{3}{2}x^2+9x\right)^2}}$

**7.14** a) ................ $\boxed{\dfrac{(x-1)(x+2)}{\left(\frac{-1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x+3\right)^2}}$

**7.14** b) ................ $\boxed{\dfrac{-\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{8}x-1\right)^2}}$

**7.14** c) ........ $\boxed{\dfrac{6\left(x+1+\sqrt{\frac{10}{3}}\right)\left(x+1-\sqrt{\frac{10}{3}}\right)}{\left(2x^3+6x^2-14x+7\right)^2}}$

**7.14** d) ...... $\boxed{\dfrac{-\frac{1}{2}(x-10+\sqrt{94})(x-10-\sqrt{94})}{\left(\frac{1}{6}x^3-5x^2+3x-4\right)^2}}$

**7.15** a) .................... $\boxed{\dfrac{3x-1}{\sqrt{3x^2-2x-10}}}$

**7.15** b) .................... $\boxed{\dfrac{6x^2+12x-1}{2\sqrt{2x^3+6x^2-x+3}}}$

**7.15** c) .................... $\boxed{\dfrac{7}{6(3-x)^2}\sqrt{\dfrac{-3x+9}{2x+1}}}$

**7.15** d) ........ $\boxed{\dfrac{-4x^5+4x^3-2x^2-1}{2(x^4-x)^2}\sqrt{\dfrac{x^4-x}{2x^2-1}}}$

**7.16** a) .................... $\boxed{\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}}$

**7.16** b) .................... $\boxed{\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}x^{k-1}}$

**7.16** c) .................... $\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{x^k}{k!}}$

**7.16** d) .................... $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \dfrac{3(3x)^{2k-1}}{(2k-1)!}}$

**7.17** a) .................... $\boxed{f'g+fg'+g'h+gh'}$

**7.17** b) .................... $\boxed{\dfrac{2f'fg+f^2g'}{g^2}}$

**7.17** c) .... $\boxed{\dfrac{(3f'f^2+g')gh-(f^3+g)(g'h+gh')}{(gh)^2}}$

**7.17** d) .................... $\boxed{g'-\dfrac{f'h^3-3fh'h^2}{h^6}}$

**7.17** e) .................... $\boxed{3f'f^2g^2+2f^3g'g}$

**7.17** f) .................... $\boxed{\dfrac{f'gh-fg'h+fgh'}{g^2}}$

**7.17** g) .................... $\boxed{\dfrac{f'g-fg'}{2g^2\sqrt{\frac{f}{g}}}}$

**7.17** h) .................... $\boxed{f'gh+fg'h+fgh'}$

## Corrigés

**7.2** c) On a $\dfrac{12^3 \times 10^4}{15^2 \times 8^2} = \dfrac{(2^2)^3 \times 3^3 \times 5^4 \times 2^4}{3^2 \times 5^2 \times (2^3)^2} = 3 \times 5^2 \times 2^4 = 1200$.

---

**7.3** d) On a $a^2 = \dfrac{1 + 2\sqrt{2} + 2}{4} = \dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

---

**7.3** f) On a $a = \dfrac{2\sqrt{2} - 4}{2} = \sqrt{2} - 2$, ce qui allège les calculs.

---

**7.4** b) On a $f'(x) = \dfrac{1}{10} \times 5 \times x^4 - \dfrac{5}{12} \times 4x^3 + \dfrac{3}{2} \times 3x^2 - \dfrac{3}{10} \times 2x - 0$.

---

**7.5** a) On a $f'(x) = 15x^2 + 3$.

---

**7.5** b) On a $f'(x) = 3x^2 + 10x - 1$.

---

**7.5** c) On a $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$ et $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

---

**7.5** d) On a $f'(x) = 4x^3 - x + 3$.

---

**7.6** a) On pose $u(x) = 3x + 1$. On a $u'(x) = 3$ donc $f'(x) = \dfrac{-u'(x)}{u(x)^2} = \dfrac{-3}{(3x+1)^2}$.

---

**7.6** b) On pose $u(x) = 2x^2 - 3x + 4$. On a $u'(x) = 4x - 3$ donc $f'(x) = \dfrac{-(4x-3)}{(2x^2 - 3x + 4)^2}$.

---

**7.8** a) On pose $u(x) = 2x + 3$ et $v(x) = -5x + 4$. On a $u'(x) = 2$ et $v'(x) = -5$. Donc

$$f'(x) = \frac{2(-5x+4) - (2x+3) \times (-5)}{(-5x+4)^2}.$$

---

**7.9** a) Pour le dénominateur, on a $(-x^3 - x)^2 = (x^3 + x)^2$.

---

**7.10** a) On multiplie le numérateur et le dénominateur par $x$.

---

**7.10** b) On multiplie le numérateur et le dénominateur par $x^3$.

---

**7.10** d) On trouve $f'(x) = \dfrac{-8x^4 + 8x^3 - 14x^2 + 4x - 4}{(2x^3 + 2x^2 + 2)^2} = \dfrac{2(-4x^4 + 4x^3 - 7x^2 + 2x - 2)}{4(x^3 + x^2 + 1)^2}$.

---

**7.11** a) On multiplie le numérateur et le dénominateur par $x - 4$ et par $x^2 + x$. On trouve :

$$f(x) = \frac{(2x+3)(x^2+x)}{(x-4)(-x-2)} = \frac{2x^3 + 5x^2 + 3x}{-x^2 + 2x + 8}.$$

---

**7.11** b) On multiplie le numérateur et le dénominateur par $2x$ et par $x + 2$. On trouve :

$$f(x) = \frac{(x+2) - 2x(-x-2)}{(3x^2-1)(2x)(x+2)} = \frac{2x+1}{6x^3 - 2x}.$$

---

**7.11 d)** Soit $x \neq 2$. On a $f(x) = \dfrac{2x+1}{6x^3-2x} = \dfrac{2x+1}{2x(3x^2-1)}$. On peut ensuite calculer :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(6x^3-2x)-(2x+1)(18x^2-2)}{(2x(3x^2-1))^2} \\ &= \frac{12x^3-4x-(36x^3-4x+18x^2-2))}{(2x(3x^2-1))^2} \\ &= \frac{-24x^3-18x^2+2}{4x^2(3x^2-1)^2} \\ &= \frac{-12x^3-9x^2+1}{2x^2(3x^2-1)^2} \end{aligned}$$

---

**7.12 a)** On a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ et $f'(x) = \dfrac{4}{3}x - \dfrac{4}{7}$.

---

**7.12 b)** On a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ car $x^2+1 \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $f'(x) = \dfrac{16x}{(x^2+1)^2}$. Or on a $(x^2+1)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $16x$.

---

**7.12 c)** On a $\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4} = 0 \iff x = -\dfrac{1}{2}$ donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$ et $f'(x) = \dfrac{35}{6(2x+1)^2}$. Donc, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f'(x) > 0$ comme quotient de nombres strictement positifs. Donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{D}_f$.

---

**7.12 d)** Étudions $\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{4}{5}x + 5$. Le discriminant de cette expression est $\Delta = \dfrac{16}{25} - 10 < 0$ ; donc, il n'y a pas de racine et $\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{4}{5}x + 5 \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. De plus, $f'(x) = \dfrac{-x+\frac{4}{5}}{\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{5}x + 5\right)^2}$. Le dénominateur étant strictement positif, $f'(x)$ est du signe de $-x + \dfrac{4}{5}$.

---

**7.13 a)** On a $f'(x) = \dfrac{x^2+4x+4}{\left(\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x - 1\right)^2}$ : on reconnaît la première identité remarquable.

---

**7.13 b)** On a $f'(x) = \dfrac{-3x^2+18x-27}{(x^3-9x^2+27x-5)^2} = \dfrac{-3(x^2-6x+9)}{(x^3-9x^2+27x-5)^2}$. On conclut avec la deuxième identité remarquable.

---

**7.13 c)** On a $f'(x) = \dfrac{x^2-64}{\left(\frac{x^3}{3} - 64x + 21\right)^2}$. On conclut avec la troisième identité remarquable.

---

**7.13 d)** On a $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{4}x^2 + 3x + 9}{\left(\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 9x\right)^2}$. On conclut avec la première identité remarquable car

$$\frac{1}{4}x^2 + 3x + 9 = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + 2 \times 3 \times \frac{1}{2}x + 3^2 = \left(\frac{1}{2}x + 3\right)^2.$$

---

**7.14 a)** On a $f'(x) = \dfrac{x^2+x-2}{\frac{-1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3}$. Le numérateur est de degré 2. On cherche ses racines. Le discriminant est $\Delta = 9$ ; il y a donc deux racines : 1 et $-2$. Ainsi, le numérateur est égal à $(x-1)(x+2)$.

---

**7.14 b)** On a $f'(x) = \dfrac{-x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{3}{8}}{\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{8}x - 1}$. Le numérateur est de degré 2 et a pour racines $\dfrac{1}{2}$ et $-\dfrac{3}{4}$.

---

**7.14 c)** On a $f'(x) = \dfrac{6x^2+12x-14}{(2x^3+6x^2-14x+7)^2}$. Le numérateur est égal à $2(3x^2+6x-7)$. On étudie alors $3x^2+6x-7$, qui a pour racines $-1-\sqrt{\dfrac{10}{3}}$ et $-1+\sqrt{\dfrac{10}{3}}$.

---

**7.14 d)** On a $f'(x) = \dfrac{-\frac{1}{2}x^2+10x-3}{\left(\frac{1}{6}x^3-5x^2+3x-4\right)^2}$. Le numérateur a pour racines $10-\sqrt{94}$ et $10+\sqrt{94}$.

---

**7.15 a)** On pose $u(x) = 3x^2-2x-10$. On a $u'(x) = 6x-2 = 2(3x-1)$. Donc $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \dfrac{3x-1}{\sqrt{3x^2-2x-10}}$.

---

**7.15 d)** On commence par simplifier par $x$ dans la fraction.

---

**7.16 a)** Pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, la dérivée de $x \mapsto x^k$ est $x \mapsto kx^{k-1}$. On conclut en utilisant que la dérivée d'une somme est la somme des dérivées.

---

**7.16 b)** Si $u(x) = (-1)^{k+1}\dfrac{x^k}{k}$, alors $u'(x) = (-1)^{k+1}\dfrac{kx^{k-1}}{k}$.

---

**7.16 c)** Si $u(x) = \dfrac{x^k}{k!}$ alors $u'(x) = \dfrac{k}{k!}x^{k-1} = \dfrac{k}{1\times 2\times\ldots\times(k-1)\times k}x^{k-1} = \dfrac{1}{1\times 2\times\ldots\times(k-1)}x^{k-1}$.

En dérivant $f$, on trouve donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$, ce qui se réécrit en $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}$.

---

**7.16 d)** Si $u(x) = \dfrac{(3x)^{2k}}{(2k)!} = \dfrac{3^{2k}x^{2k}}{(2k)!}$, alors $u'(x) = 3^{2k}\dfrac{2k}{(2k)!}x^{2k} = \dfrac{3(3x)^{2k-1}}{(2k-1)!}$.

---

**7.17 b)** La dérivée de $f^2$ est $2f'f$.

---

**7.17 c)** La dérivée de $f^3+g$ est $3f'f^2+g'$.

---

**7.17 d)** La dérivée de $h^3$ est $3h'h^2$.

---

**7.17 e)** La dérivée de $f^3$ est $3f'f^2$ et celle de $g^2$ est $2g'g$.

---

**7.17 f)** La dérivée de $\dfrac{g}{h}$ est $\dfrac{g'h-gh'}{g^2}$ donc la dérivée de $\dfrac{f}{\frac{g}{h}}$ est $\dfrac{f'\frac{g}{h}-f\frac{g'h-gh'}{h^2}}{\left(\frac{g}{h}\right)^2}$. Pour simplifier l'expression, on termine en multipliant par $h^2$ le numérateur et le dénominateur.

---

**7.17 g)** La dérivée de $\dfrac{f}{g}$ est $\dfrac{f'g-fg'}{g^2}$. On utilise que la dérivée de $\sqrt{u}$ et $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

---

**7.17 h)** On a $(fgh)' = ((fg)h)' = (f'g+fg')h+fgh'$.

---

# Fiche n° 8. Dérivation III

## Réponses

**8.1** a) ........ $\boxed{\dfrac{7}{12}x - \dfrac{7}{3}y + \dfrac{1}{3}z}$

**8.1** b) ........ $\boxed{\dfrac{1}{4}x - \dfrac{5}{4}y - \dfrac{1}{4}z}$

**8.1** c) ........ $\boxed{\dfrac{14}{15}x + \dfrac{11}{15}y - \dfrac{13}{15}z}$

**8.1** d) ........ $\boxed{\dfrac{5}{6}x - \dfrac{5}{6}y - \dfrac{1}{3}z}$

**8.2** a) ........ $\boxed{2x^3 - 4x^2 + 2x - 1}$

**8.2** b) ........ $\boxed{\dfrac{3x^2}{4} + \dfrac{x}{6} + \dfrac{1}{9}}$

**8.2** c) ........ $\boxed{-6x^2 + 11x - 6}$

**8.2** d) ........ $\boxed{-3x^2 + x - \dfrac{1}{16}}$

**8.3** a) ........ $\boxed{6(2x-1)^2}$

**8.3** b) ........ $\boxed{\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{x}{3} - 2\right)^3}$

**8.3** c) ........ $\boxed{-5(1-x)^4}$

**8.3** d) ........ $\boxed{\dfrac{6}{(1-2x)^4}}$

**8.4** a) ........ $\boxed{12(\sqrt{3} + \sqrt{2}x)^5}$

**8.4** b) ........ $\boxed{-9\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{6}x\right)^2}$

**8.4** c) ........ $\boxed{\dfrac{-24}{(6-x)^4}}$

**8.4** d) ........ $\boxed{\dfrac{6}{(\sqrt{2} - \sqrt{3}x)^3}}$

**8.5** a) ........ $\boxed{(4x-5)(1-2x)\left(1 - \dfrac{x}{2}\right)}$

**8.5** b) ........ $\boxed{4(2x-1)(3x+2)^3(9x-1)}$

**8.6** a) ........ $\boxed{12x(x-\sqrt{2})^3(2x+\sqrt{2})}$

**8.6** b) ........ $\boxed{\dfrac{5}{3}(2x+7)\left(2x - \dfrac{1}{2}\right)^2\left(\dfrac{x}{3} + 2\right)}$

**8.7** a) ........ $\boxed{-\dfrac{1}{(1-3x)^2}}$

**8.7** b) ........ $\boxed{-\dfrac{(2x+7)(1-x)^2}{(2x+1)^3}}$

**8.8** a) ........ $\boxed{-\dfrac{(1-2x)^5(4x-5)}{(x-1)^3}}$

**8.8** b) ........ $\boxed{-\dfrac{2(\sqrt{2}x+2)^2(2\sqrt{2}x-5)}{(1-\sqrt{2}x)^2}}$

**8.9** a) ........ $\boxed{4x + \dfrac{2}{2x+1} + 2}$

**8.9** b) ........ $\boxed{5}$

**8.9** c) ........ $\boxed{x + \dfrac{1}{x-1} - 1}$

**8.9** d) ........ $\boxed{\dfrac{3}{\sqrt{2}}}$

**8.10** a) ........ $\boxed{\dfrac{4(2x+1)}{3+(2x+1)^2}}$

**8.10** b) ........ $\boxed{\dfrac{8\sqrt{2}}{11}}$

**8.10** c) ........ $\boxed{\dfrac{2x-2}{3+(1-x)^2}}$

**8.10** d) ........ $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

**8.11** a) ........ $\boxed{\dfrac{1}{9}\sqrt{2x^2+4x+11}}$

**8.11** b) ........ $\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$

**8.11** c) ........ $\boxed{-2\sqrt{2x^2-8x+9}}$

**8.11** d) ........ $\boxed{-6}$

**8.12** a) ........ $\boxed{y = 5x - 2}$

**8.12** b) ........................ $\boxed{y = \dfrac{11x}{2} - \dfrac{11}{2}}$

**8.12** c) ........................ $\boxed{y = 2x - 8}$

**8.12** d) ........................ $\boxed{y = \dfrac{23x}{4} + 6}$

**8.13** a) ........................ $\boxed{20}$

**8.13** b) ........................ $\boxed{\dfrac{1}{3}}$

**8.13** c) ........................ $\boxed{\dfrac{3}{2}}$

**8.13** d) ........................ $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

**8.14** ........................ $\boxed{\dfrac{4a^2 + a + 1}{6a}}$

**8.15** a) ........................ $\boxed{\{-2, 2\}}$

**8.15** b) ........................ $\boxed{\{-1, 2\}}$

**8.16** a) ........................ $\boxed{\left\{-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right\}}$

**8.16** b) ........................ $\boxed{0}$

## Corrigés

**8.4** c) On calcule

$$f'(x) = -\frac{3}{2\left(3 - \frac{x}{2}\right)^4} = -\frac{24}{16\left(3 - \frac{x}{2}\right)^4} = -\frac{24}{2^4\left(3 - \frac{x}{2}\right)^4} = \frac{-24}{(6-x)^4}.$$

........................................................................................................................

**8.5** a) La dérivée de $f$ se calcule comme la dérivée d'un produit. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2 \times 2(1-2x)\left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \times 2(1-2x)^2\left(1 - \frac{x}{2}\right) \\ &= \left(-4\left(1 - \frac{x}{2}\right) - (1-2x)\right)(1-2x)\left(1 - \frac{x}{2}\right) \\ &= (-4 + 2x - 1 + 2x)(1-2x)\left(1 - \frac{x}{2}\right) \\ &= (4x-5)(1-2x)\left(1 - \frac{x}{2}\right). \end{aligned}$$

........................................................................................................................

**8.5** b) La dérivée de $f$ se calcule comme la dérivée d'un produit. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \times 2(2x-1)(3x+2)^4 + 3 \times 4(2x-1)^2(3x+2)^3 \\ &= (4(3x+2) + 12(2x-1))(2x-1)(3x+2)^3 \\ &= (36x-4)(2x-1)(3x+2)^3 \\ &= 4(2x-1)(3x+2)^3(9x-1). \end{aligned}$$

........................................................................................................................

**8.6** a) La dérivée de $f$ se calcule comme la dérivée d'un produit. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4(x-\sqrt{2})^3(2x+\sqrt{2})^2 + 2 \times 2(x-\sqrt{2})^4(2x+\sqrt{2}) \\ &= \left(8x + 4\sqrt{2} - 4x + 4\sqrt{2}\right)(x-\sqrt{2})^3(2x+\sqrt{2}) \\ &= 12x(x-\sqrt{2})^3(2x+\sqrt{2}). \end{aligned}$$

........................................................................................................................

**8.6** b) La dérivée de $f$ se calcule comme la dérivée d'un produit. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \times 3 \times \left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{x}{3} + 2\right)^2 + \frac{1}{3} \times 2 \times \left(2x - \frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{x}{3} + 2\right) \\ &= \left(6\left(\frac{x}{3} + 2\right) + \frac{2}{3}\left(2x - \frac{1}{2}\right)\right)\left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{x}{3} + 2\right) \\ &= \left(2x + 12 + \frac{4x}{3} - \frac{1}{3}\right)\left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{x}{3} + 2\right) \\ &= \frac{5}{3}(2x + 7)\left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{x}{3} + 2\right). \end{aligned}$$

..............................................................................................................................................

**8.8** a) Déjà, on écrit que $f(x) = \dfrac{1}{2}(1 - 2x)^6(1 - x)^{-2}$. Ensuite, on calcule, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \times 6 \times (-2)(1 - 2x)^5(1 - x)^{-2} + \frac{1}{2} \times (-2) \times (-1)(1 - 2x)^6(1 - x)^{-3} \\ &= -6(1 - 2x)^5(1 - x)^{-2} + (1 - 2x)^6(1 - x)^{-3} \\ &= (1 - 2x)^5(1 - x)^{-3}(-6(1 - x) + (1 - 2x)) \\ &= (1 - 2x)^5(1 - x)^{-3}(4x - 5). \end{aligned}$$

..............................................................................................................................................

**8.9** a) Soit $x$ un réel non nul tel que $2x + 1$ est non nul. Alors $g$ est dérivable en $x$ et on a

$$g'(x) = 2 \times f'(2x + 1) = 4x + \frac{2}{2x + 1} + 2.$$

..............................................................................................................................................

**8.9** c) Soit $x$ un réel tel que $1 - x \neq 0$. Alors $h$ est dérivable en $x$ et on a

$$h'(x) = -f'(1 - x) = x + \frac{1}{x - 1} - 1.$$

..............................................................................................................................................

**8.11** a) La dérivée de $x \mapsto f(ax + b)$ est $x \mapsto af'(ax + b)$. On a donc

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{3} f\left(\frac{x + 1}{3}\right) = \frac{1}{3}\sqrt{2\frac{(x + 1)^2}{9} + 1} \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2(x + 1)^2 + 9}{9}} = \frac{1}{9}\sqrt{2(x^2 + 2x + 1) + 9} = \frac{1}{9}\sqrt{2x^2 + 4x + 11}. \end{aligned}$$

..............................................................................................................................................

**8.12** a) La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x$ dans $\mathbb{R}$, $f'(x) = 6x - 1$.

Une équation de la tangente à la courbe de $f$ en 1 est

$$y = f(1) + f'(1)(x - 1) = 3 + 5(x - 1) = 5x - 2.$$

..............................................................................................................................................

**8.13** a) La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x$ réel, $f'(x) = 2(x - 1) - 3(1 - x)^2$.

Donc, la tangente au point d'abscisse 3 a pour équation

$$y = f(3) + f'(3)(x - 3) = -4 - 8(x - 3) = -8x + 20.$$

Donc, l'ordonnée à l'origine de la tangente à la courbe de $f$ au point d'abscisse $a$ vaut 20.

..............................................................................................................................................

**8.13** c) La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ et, pour tout $x$ dans $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{x}{2}\right)(2x+1)^2 + 2 \times 2 \times \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 (2x+1) \\ &= \left(-(2x+1) + 4\left(1 - \frac{x}{2}\right)\right)\left(1 - \frac{x}{2}\right)(2x+1) \\ &= (-4x+3)\left(1 - \frac{x}{2}\right)(2x+1). \end{aligned}$$

Ainsi, comme $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}$, on en déduit qu'une équation de la tangente au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ est

$$y = \frac{9}{4} + \frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{9}{4}x + \frac{3}{2}.$$

Donc, l'ordonnée à l'origine vaut $\frac{3}{2}$.

........................................................................................................................................

**8.13** d) Si $x \neq -\frac{1}{3}$, on a $f'(x) = \dfrac{-6}{(3x+1)^2}$. Donc une équation de la tangente en $\frac{1}{3}$ est

$$y = \frac{1}{8} - \frac{6}{8}\left(x - \frac{1}{3}\right) = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}.$$

Donc, l'ordonnée à l'origine vaut $\frac{1}{2}$.

........................................................................................................................................

**8.14** On fixe un réel $a$. Les équations de $\mathsf{T}_{f,a}$ et $\mathsf{T}_{g,a}$ sont

$$\begin{aligned} \mathsf{T}_{f,a} &: y = 2(1-a)^3 - 6(1-a)^2(x-a) \\ \mathsf{T}_{g,a} &: y = 3(1-a)^2 - 6(1-a)(x-a). \end{aligned}$$

Le point de coordonnées $(x, y)$ appartient à $\mathsf{T}_{f,a}$ et à $\mathsf{T}_{g,a}$ si et seulement s'il vérifie l'équation

$$2(1-a)^3 - 6(1-a)^2(x-a) = 3(1-a)^2 - 6(1-a)(x-a).$$

On résout cette équation. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} & 2(1-a)^3 - 6(1-a)^2(x-a) = 3(1-a)^2 - 6(1-a)(x-a) \\ \Longleftrightarrow\ & 6(1-a)(x-a) - 6(1-a)^2(x-a) = 3(1-a)^2 - 2(1-a)^3 \\ \Longleftrightarrow\ & 6(1-a)a(x-a) = (1-a)^2(1+2a) \\ \Longleftrightarrow\ & x - a = \frac{(1-a)^2(1+2a)}{6(1-a)a} \qquad \text{(car } a \neq 0 \text{ et } a \neq 1\text{)} \\ \Longleftrightarrow\ & x = a + \frac{(1-a)(1+2a)}{6a} = \frac{4a^2+a+1}{6a}. \end{aligned}$$

........................................................................................................................................

**8.15** a) Soit $a$ un réel. La tangente à la courbe de $f$ au point d'abscisse $a$ a pour équation

$$y = \frac{3}{2}(a-2)x - \frac{3}{4}\left(a^2 - 4\right).$$

Cette tangente passe par $(0,0)$ si, et seulement si, $0 = -\frac{3}{4}\left(a^2 - 4\right)$, c'est-à-dire si, et seulement si, $a = 2$ ou $a = -2$.

........................................................................................................................................

**8.15** b) La tangente passe par $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ si, et seulement si,

$$0 = \frac{3}{2}(a-2)\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\left(a^2 - 4\right),$$

c'est-à-dire si, et seulement si, $(a-2) - (a-2)(a+2) = 0$, c'est-à-dire si, et seulement si, $(a-2)(-a-1) = 0$ ; ou encore si, et seulement si, $a = 2$ ou $a = -1$.

**8.16** a) On fixe un réel $b$. La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x$ dans $\mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = \frac{(bx)^2 + 1 - x(2xb^2)}{((bx)^2+1)^2} = \frac{1 - x^2b^2}{((bx)^2+1)^2}.$$

Une équation de la tangente à la courbe de $f$ au point d'abscisse 2 est

$$y = \frac{2}{4b^2+1} + \frac{1-4b^2}{((b4)^2+1)^2}(x-2).$$

Cette tangente est horizontale si, et seulement si, $1 - 4b^2 = 0$, c'est-à-dire si, et seulement si, $b = \frac{1}{2}$ ou $b = -\frac{1}{2}$.

**8.16** b) On fixe un réel $b$ et un réel $a$. Une équation de la tangente à la courbe de $f$ au point d'abscisse $a$ est

$$y = \frac{a}{a^2b^2+1} + \frac{1-a^2b^2}{(a^2b^2+1)^2}(x-a) = \frac{a}{a^2b^2+1} - a\frac{1-a^2b^2}{(a^2b^2+1)^2} + \frac{1-a^2b^2}{(a^2b^2+1)^2}x.$$

Cette tangente passe par l'origine si, et seulement si,

$$\frac{a}{a^2b^2+1} - a\frac{1-a^2b^2}{(a^2b^2+1)^2} = 0.$$

Or, on a les équivalences

$$\begin{aligned}
\frac{a}{a^2b^2+1} - a\frac{1-a^2b^2}{(a^2b^2+1)^2} = 0 &\iff \frac{1}{a^2b^2+1} - \frac{1-a^2b^2}{(a^2b^2+1)^2} = 0 \\
&\iff \frac{a^2b^2+1-(1-a^2b^2)}{(a^2b^2+1)^2} = 0 \\
&\iff \frac{2a^2b^2}{(a^2b^2+1)^2} = 0 \\
&\iff b = 0.
\end{aligned}$$

# Fiche n° 9. Généralités sur l'exponentielle I

## Réponses

**9.1** a) $\boxed{\frac{5}{3}}$

**9.1** b) $\boxed{\frac{3}{4}}$

**9.1** c) $\boxed{\frac{3}{8}}$

**9.2** a) $\boxed{2^{n+2}}$

**9.2** b) $\boxed{2^{3n}}$

**9.2** c) $\boxed{2^{-2n-2}}$

**9.3** a) $\boxed{\exp(3)}$

**9.3** b) $\boxed{\exp(7)}$

**9.3** c) $\boxed{1}$

**9.3** d) $\boxed{\exp(-7)}$

**9.3** e) $\boxed{\exp(-3)}$

**9.3** f) $\boxed{\exp(-4)}$

**9.4** a) $\boxed{\exp(3)}$

**9.4** b) $\boxed{\exp(4x-4)}$

**9.4** c) $\boxed{\exp(2x-1)}$

**9.4** d) $\boxed{\exp(6x-2)}$

**9.5** a) $\boxed{\exp(4x)}$

**9.5** b) $\boxed{\exp(6x-3)}$

**9.5** c) $\boxed{\exp(x-10)}$

**9.5** d) $\boxed{0}$

**9.6** a) $\boxed{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x}+2}$

**9.6** b) $\boxed{4\mathrm{e}^{4x}+9\mathrm{e}^{-2x}+12\mathrm{e}^{x}}$

**9.6** c) $\boxed{9\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x}-6}$

**9.6** d) $\boxed{1-\mathrm{e}^{2x}}$

**9.7** a) $\boxed{-1-\exp(6x)}$

**9.7** b) $\boxed{4}$

**9.8** a) $\boxed{\left(2\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x}\right)^2}$

**9.8** b) $\boxed{(3\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{3x})^2}$

**9.8** c) $\boxed{(4\mathrm{e}^{2x}-3)(4\mathrm{e}^{2x}+3)}$

**9.8** d) $\boxed{(3\mathrm{e}^{x}-2\mathrm{e}^{-x})(3\mathrm{e}^{x}+2\mathrm{e}^{-x})}$

**9.9** a) $\boxed{\left\{\frac{5}{2}\right\}}$

**9.9** b) $\boxed{\{0,2\}}$

**9.9** c) $\boxed{\{0\}}$

**9.10** a) $\boxed{\left\{\frac{1}{2}\right\}}$

**9.10** b) $\boxed{\left\{\frac{1}{4}\right\}}$

**9.11** a) $\boxed{]0,+\infty[}$

**9.11** b) $\boxed{]0,1[}$

**9.11** c) $\boxed{\left]-\infty,-\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2},+\infty\right[}$

**9.11** d) $\boxed{\left]-\infty,-\frac{1}{5}\right]}$

**9.11** e) $\boxed{\left]-\infty,-\frac{2}{3}\right[ \cup \left]\frac{1}{2},+\infty\right[}$

**9.12** a) $\boxed{\{0\}}$

**9.12** b) $\boxed{\{0,1\}}$

**9.12** c) $\boxed{\{-1,0,1\}}$

**9.13** $\boxed{\text{b}}$

**9.14** $\boxed{\text{oui}}$

**9.15** a) $\boxed{2\cosh^2(x)-1}$

**9.15** b) $\boxed{2\sinh^2(x)+1}$

**9.16** a) $\boxed{\text{c}}$

**9.16** b) $\boxed{\text{c}}$

**9.17** $\boxed{\{0\}}$

**9.18** a) $\boxed{\frac{1-\mathrm{e}^{(n+1)x}}{1-\mathrm{e}^{x}}}$

**9.18** b) $\boxed{\frac{\mathrm{e}^{2x}(1-\mathrm{e}^{2nx})}{1-\mathrm{e}^{2x}}}$

## Corrigés

**9.2** c) On a $\dfrac{2^n \times 8^{-n}}{4} = \dfrac{2^n \times \left(2^3\right)^{-n}}{2^2} = \dfrac{2^{n-3n}}{2^2} = 2^{-2n-2}$.

**9.12** a) On pose $X = \mathrm{e}^x$. L'équation devient alors $X^2 + 3X - 4 = 0$, dont le discriminant vaut 25.

Les solutions de cette équation d'inconnue $X$ sont $X_1 = \dfrac{-3 - \sqrt{25}}{2} = -4$ et $X_2 = \dfrac{-3 - \sqrt{25}}{2} = 1$.

Les solutions de l'équation d'inconnue $x$ sont donc les solutions des équations : $\exp(x) = -4$ et $\exp(x) = 1$.

La première équation n'a pas de solution car, pour tout $x$ réel, $\exp(x) > 0$ et la deuxième équation a pour solution $x = 0$. L'ensemble des solutions est donc $\big\{0\big\}$.

........................................................................................................................................

**9.12** b) On pose $X = \exp(x)$. L'équation devient alors $X^2 - (1 + \mathrm{e})X + \mathrm{e} = 0$, dont le discriminant vaut $(1 + \mathrm{e})^2 - 4\mathrm{e} = (\mathrm{e} - 1)^2$. Les solutions de cette équation d'inconnue $X$ sont

$$X_1 = \frac{1 + \mathrm{e} - \sqrt{(\mathrm{e} - 1)^2}}{2} = \frac{1 + \mathrm{e} - \mathrm{e} + 1}{2} = 1 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{1 + \mathrm{e} + \sqrt{(\mathrm{e} - 1)^2}}{2} = \frac{1 + \mathrm{e} + \mathrm{e} - 1}{2} = \mathrm{e}.$$

Les solutions de l'équation d'inconnue $x$ sont donc les solutions des équations : $\exp(x) = 1$ et $\exp(x) = \mathrm{e}$, qui sont respectivement $x = 0$ et $x = 1$. L'ensemble des solutions est donc $\{0, 1\}$.

........................................................................................................................................

**9.12** c) On pose $X = \exp(x^2)$. L'équation devient alors $X + \dfrac{\mathrm{e}}{X} = 1 + \mathrm{e}$. Cette équation étant équivalente à $X^2 - (1+\mathrm{e})X + \mathrm{e} = 0$, qu'on a résolue ci-dessus, on a donc $X = 1$ ou $X = e$. Les solutions de l'équation d'inconnue $x$ sont donc les solutions des équations $\exp(x^2) = 1$ et $\exp(x^2) = \mathrm{e}$. D'où $x^2 = 0$ ou $x^2 = 1$, ce qui est équivalent à $x = 0$ ou $x = -1$ ou $x = 1$. L'ensemble des solutions est donc $\{-1, 0, 1\}$.

........................................................................................................................................

**9.13** Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $f(-t) = \dfrac{\exp(-t) - 1}{\exp(-t) + 1} = \dfrac{1 - \exp(t)}{1 + \exp(t)} = -\dfrac{\exp(t) - 1}{\exp(t) + 1} = -f(t)$. Donc, $f$ est impaire.

........................................................................................................................................

**9.14** Il suffit de développer $\left(\dfrac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}\right)^2$.

........................................................................................................................................

**9.15** a) On a

$$\begin{aligned}\cosh(2x) &= \frac{\exp(2x) + \exp(-2x)}{2} = \frac{\exp(2x) + \exp(-2x) + 2 - 2}{2} = \frac{\big(\exp(x)\big)^2 + \big(\exp(-x)\big)^2 + 2 - 2}{2} \\ &= \frac{\big(\exp(x) + \exp(-x)\big)^2 - 2}{2} = 2\left(\frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}\right)^2 - 1 = 2\cosh^2(x) - 1.\end{aligned}$$

........................................................................................................................................

**9.15** b) Comme on a $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$, on en déduit que $\cosh(2x) = 2\big(1 + \sinh^2(x)\big) - 1 = 2\sinh^2(x) + 1$.

........................................................................................................................................

**9.16** a) On a

$$\begin{aligned}\cosh(x + y) - \cosh(x - y) &= \frac{\exp(x + y) + \exp(-x - y)}{2} - \frac{\exp(x - y) + \exp(-x + y)}{2} \\ &= \frac{\exp(x)\big(\exp(y) - \exp(-y)\big)}{2} - \frac{\exp(-x)\big(\exp(y) - \exp(-y)\big)}{2}.\end{aligned}$$

Dans les parenthèses, on reconnaît l'expression de $\sinh(y)$. On a donc

$$\begin{aligned}\cosh(x + y) - \cosh(x - y) &= \exp(x)\sinh(y) - \exp(-x)\sinh(y) = \sinh(y)(\exp(x) + \exp(-x)) \\ &= 2\sinh(x)\sinh(y).\end{aligned}$$

........................................................................................................................................

**9.17** Comme on a $\cosh(2x) = \dfrac{\exp(2x)+\exp(-2x)}{2}$, on résout l'équation $\exp(2x)+\exp(-2x) = 2$. On effectue le changement de variable $X = \exp(2x)$ et on est amené à résoudre l'équation $X + \dfrac{1}{X} = 2$. Cette équation est équivalente à $X^2 - 2X + 1 = 0$ ($X \neq 0$) et a pour solution $X = 1$ ; d'où $\exp(2x) = 1$, ce qui est équivalent à $x = 0$. L'ensemble des solutions est donc $\big\{0\big\}$.

---

**9.18** a) On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \exp(kx) = \sum_{k=0}^{n} \big(\exp(x)\big)^k = \frac{1-\big(\exp(x)\big)^{n+1}}{1-\exp(x)} = \frac{1-\exp\big((n+1)x\big)}{1-\exp(x)}$.

---

**9.18** b) On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \big(\exp(kx)\big)^2 = \sum_{k=1}^{n} \exp(2kx) = \sum_{k=1}^{n} \big(\exp(2x)\big)^k &= \frac{\exp(2x)\big(1-\big(\exp(2x)\big)^n\big)}{1-\exp(2x)} \\ &= \frac{\exp(2x)\big(1-\exp(2nx)\big)}{1-\exp(2x)}.\end{aligned}$$

---

# Fiche n° 10. Généralités sur l'exponentielle II

## Réponses

**10.1** a) ........ $\boxed{(x-4)(x+4)}$

**10.1** b) .............. $\boxed{(x+3)^2}$

**10.1** c) ... $\boxed{2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)}$

**10.1** d) ..... $\boxed{(2x-1)(2x+1)}$

**10.1** e) ........ $\boxed{(x+3)(x+5)}$

**10.1** f) ...... $\boxed{(3x-8)(3x+4)}$

**10.2** a) .................. $\boxed{\frac{21}{8}}$

**10.2** b) .................. $\boxed{\frac{14}{5}}$

**10.2** c) ................... $\boxed{\frac{6}{5}}$

**10.2** d) .................... $\boxed{7}$

**10.2** e) .................. $\boxed{\frac{1}{10}}$

**10.2** f) .................. $\boxed{-\frac{9}{4}}$

**10.3** a) .............. $\boxed{\exp(5)}$

**10.3** b) .............. $\boxed{\exp(3)}$

**10.3** c) .......... $\boxed{\exp(1) = \mathrm{e}}$

**10.3** d) .......... $\boxed{\exp(0) = 1}$

**10.3** e) ............. $\boxed{\exp(10)}$

**10.3** f) ............... $\boxed{\exp(15)}$

**10.4** a) ............ $\boxed{\exp(-x)}$

**10.4** b) ............. $\boxed{\exp(3x)}$

**10.4** c) .......... $\boxed{\exp(x-1)}$

**10.4** d) ............. $\boxed{\exp(2x)}$

**10.5** ....................... $\boxed{4}$

**10.6** a) ............... $\boxed{x=-4}$

**10.6** b) ............... $\boxed{x>3}$

**10.6** c) ..... $\boxed{x = 1 \text{ ou } x = -1}$

**10.6** d) ............... $\boxed{x \leqslant \frac{1}{5}}$

**10.6** e) ............... $\boxed{x=0}$

**10.6** f) ............. $\boxed{x = -\frac{1}{2}}$

**10.7** a) ........... $\boxed{0 < x < 5}$

**10.7** b) ............... $\boxed{x \geqslant \frac{3}{2}}$

**10.7** c) ............... $\boxed{x > 0}$

**10.7** d) ............... $\boxed{x < \frac{1}{2}}$

**10.8** a) ............... $\boxed{x \geqslant \frac{7}{2}}$

**10.8** b) ....... $\boxed{-\frac{5}{3} \leqslant x \leqslant -\frac{1}{3}}$

**10.8** c) ............... $\boxed{x < \frac{1}{2}}$

**10.8** d) ............... $\boxed{x \geqslant \frac{2}{7}}$

**10.9** a) ............... $\boxed{x=0}$

**10.9** b) ............... $\boxed{x=0}$

**10.9** c) ............... $\boxed{x=0}$

**10.9** d) ....... $\boxed{x = 0 \text{ ou } x = 1}$

**10.10** ....... $\boxed{(x,y) = (1,-1)}$

**10.11** a) ........... $\boxed{\text{courbe 3}}$

**10.11** b) ........... $\boxed{\text{courbe 1}}$

**10.11** c) ............. $\boxed{\text{aucune}}$

**10.11** d) ........... $\boxed{\text{courbe 2}}$

**10.12** .................... $\boxed{\text{(b)}}$

**10.13** .............. $\boxed{\frac{1-\mathrm{e}^{nx}}{1-\mathrm{e}^{x}}}$

**10.14** ....... $\boxed{\exp\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)}$

**10.15** .................. $\boxed{\text{oui}}$

## Corrigés

**10.1 c)** On a $2x^2 - \frac{1}{2} = 2\left(x^2 - \frac{1}{4}\right) = 2\left(x^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = 2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$.

**10.1 d)** On a $4x^2 - 1 = (2x)^2 - 1^2 = (2x-1)(2x+1)$.

**10.1 e)** On a $(x+3)^2 + 2x + 6 = (x+3)(x+3) + 2(x+3) = (x+3)(x+3+2) = (x+3)(x+5)$.

**10.1** f) On a $(3x-2)^2 - 36 = (3x-2)^2 - 6^2 = (3x-2-6)(3x-2+6) = (3x-8)(3x+4)$.

**10.2** b) On a $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}-\frac{1}{3}} = \dfrac{\frac{3}{6}+\dfrac{4}{6}}{\frac{9}{12}-\frac{4}{12}} = \dfrac{7}{6} \times \dfrac{12}{5} = \dfrac{14}{5}$.

**10.3** a) On a $\exp(2)\exp(3) = \exp(2+3) = \exp(5)$.

**10.3** c) On a $\dfrac{\exp(4)}{\exp(3)} = \exp(4-3) = \exp(1) = \mathrm{e}$.

**10.3** d) On trouve $\exp(0) = 1$.

**10.3** e) On a $\exp(3)^2\exp(4) = \exp(3\times 2)\exp(4) = \exp(6+4) = \exp(10)$.

**10.5** On utilise l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ avec

$$a = \exp(x) + \exp(-x) \qquad \text{et} \qquad b = \exp(x) - \exp(-x).$$

On a $a - b = 2\exp(-x)$ et $a + b = 2\exp(x)$. On trouve donc

$$(\exp(x)+\exp(-x))^2 - (\exp(x)-\exp(-x))^2 = 2\exp(-x)2\exp(x) = 4\exp(-x)\exp(x) = 4\exp(0) = 4.$$

**10.6** a) On a les équivalences : $\exp(3x+12) = 1 \iff 3x+12 = 0 \iff 3x = -12 \iff x = -4$.

**10.6** b) On a les équivalences :

$$\exp(2x-6) > 1 \iff \exp(2x-6) > \exp(0) \iff 2x-6 > 0 \iff 2x > 6 \iff x > 3.$$

**10.6** c) On a $\exp\left(x^2\right) = \mathrm{e} \iff x^2 = 1 \iff x = 1 \quad \text{ou} \quad x = -1$.

**10.6** d) Comme précédemment avec $\mathrm{e} = \exp(1)$.

**10.6** e) On a $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1} = \dfrac{2}{\mathrm{e}^x+3} \iff 2(\mathrm{e}^x+1) = \mathrm{e}^x + 3 \iff \mathrm{e}^x = 1 \iff x = 0$.

**10.6** f) On a $\exp(x)^2 = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \iff \mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{-1} \iff 2x = -1 \iff x = -\dfrac{1}{2}$.

**10.7** a) On a

$$\begin{aligned}\exp(x^2) < \exp(x)^5 &\iff \exp(x^2) < \exp(5x) \iff x^2 < 5x \iff x^2 - 5x < 0\\ &\iff x(x-5) < 0 \iff 0 < x < 5.\end{aligned}$$

**10.7** b) On a

$$\begin{aligned}\exp(x)^2\exp(-2) \geqslant \mathrm{e} &\iff \exp(2x-2) \geqslant \exp(1) \iff 2x-2 \geqslant 1 \iff 2x \geqslant 3\\ &\iff x \geqslant \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

**10.7 c)** On a

$$\frac{1}{1-e^x} < \frac{2}{e^x+2} \iff \frac{1}{1-e^x} - \frac{2}{e^x+2} < 0 \iff \frac{e^x+2-2(1-e^x)}{(1-e^x)(e^x+2)} < 0 \iff \frac{3e^x}{(1-e^x)(e^x+2)} < 0.$$

Or, on a $3e^x > 0$ et $e^x + 2 > 0$. Donc la fraction est du signe de $1 - e^x$. On a donc :

$$\frac{1}{1-e^x} < \frac{2}{e^x+2} \iff 1 - e^x < 0 \iff 1 < e^x \iff 0 < x.$$

---

**10.7 d)** On a

$$\frac{\exp(x)^3}{e} < \exp(x) \iff \frac{\exp(3x)}{\exp(1)} < \exp(x) \iff \exp(3x-1) < \exp(x)$$

$$\iff 3x - 1 < x \iff 2x < 1 \iff x < \frac{1}{2}.$$

---

**10.8 c)** On a

$$\frac{1}{e^{2x}-e} < \frac{1}{e^{2x}+1} \iff \frac{1}{e^{2x}-e} - \frac{1}{e^{2x}+1} < 0 \iff \frac{e^{2x}+1-\left(e^{2x}-e\right)}{(e^{2x}-e)(e^{2x}+1)} < 0 \iff \frac{1+e}{(e^{2x}-e)(e^{2x}+1)} < 0.$$

Or, on a $1 + e > 0$ et $e^{2x} + 1 > 0$. Donc la fraction est du signe de $e^{2x} - e$. On a donc :

$$\frac{1}{\exp(2x)-e} < \frac{1}{\exp(2x)+1} \iff e^{2x} - e < 0 \iff 2x < 1 \iff x < \frac{1}{2}.$$

---

**10.9 a)** On pose $y = \exp(x)$. On a $\exp(2x) = \exp(x)^2 = y^2$. On résout donc :

$$y^2 - 2y + 1 = 0 \iff (y-1)^2 = 0 \iff y = 1 \iff \exp(x) = 1 \iff x = 0.$$

---

**10.9 b)** En multipliant par $e^x$, qui est non nul, on se ramène à l'équation précédente :

$$e^x + e^{-x} = 2 \iff e^x e^x + e^x \exp(-x) = 2e^x \iff \exp(2x) + \exp(0) - 2e^x = 0 \iff \exp(2x) - 2e^x + 1 = 0.$$

---

**10.9 c)** On pose $y = e^x$ et on résout l'équation $y^2 + 2y - 3 = 0$.

Le discriminant de cette équation de degré 2 vaut $2^2 + 4 \times 3 = 16 = 4^2$. On obtient donc comme solutions $y_1 = \dfrac{-2+4}{2} = 1$ et $y_2 = \dfrac{-2-4}{2} = -3$. On a donc

$$\exp(2x) + 2\exp(x) - 3 = 0 \iff \Big(e^x = 1 \text{ ou } \underbrace{e^x = -3}_{\text{impossible}}\Big) \iff x = 0.$$

---

**10.9 d)** On pose $y = e^x$ et on résout l'équation $y^2 - (1+e)y + e = 0$.

Le discriminant de cette équation de degré 2 vaut $\Delta = (1+e)^2 - 4e = 1 + 2e + e^2 - 4e = 1 - 2e + e^2 = (1-e)^2 = (e-1)^2$ avec $e - 1 > 0$ car $e \approx 2{,}7$.

On obtient donc comme solutions $y_1 = \dfrac{1+e+(e-1)}{2} = e$ et $y_2 = \dfrac{1+e-(e-1)}{2} = 1$. On a donc

$$\exp(2x) - (1+e)\exp(x) + e = 0 \iff \left(e^x = e \text{ ou } e^x = 0\right) \iff \left(x = e \text{ ou } x = 1\right).$$

---

**10.10** On remarque que $\exp(x-1) = \exp(-1)\exp(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}}\mathrm{e}^x$ et de même : $\exp(y+1) = \mathrm{e}\mathrm{e}^y$.

Pour la première ligne, on a donc

$$\frac{1}{\mathrm{e}}\mathrm{e}^x + \mathrm{e}\mathrm{e}^y = 2 \iff \mathrm{e}^y = \frac{2}{\mathrm{e}} - \frac{1}{\mathrm{e}^2}\mathrm{e}^x.$$

Le système $(S)$ est donc équivalent à :

$$(S) \iff \begin{cases} \mathrm{e}^y = \dfrac{2}{\mathrm{e}} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\mathrm{e}^x \\ \mathrm{e}^x + \dfrac{2}{\mathrm{e}} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\mathrm{e}^x = \dfrac{\mathrm{e}^2+1}{\mathrm{e}} \end{cases} \iff \begin{cases} \mathrm{e}^y = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \\ \mathrm{e}^x = \mathrm{e} \end{cases} \iff (x,y) = (1,-1).$$

.....................................................................................................................................................

**10.11 a)** La courbe 3 est la seule courbe correspondant à une exponentielle croissante.

.....................................................................................................................................................

**10.11 b)** La courbe 1 est la seule courbe correspondant à une exponentielle décroissante.

.....................................................................................................................................................

**10.11 c)** On peut penser à la courbe 2 mais la valeur en $x = 0$ ne correspond pas.

.....................................................................................................................................................

**10.12** La courbe a l'allure d'une exponentielle croissante donc les trois réponses sont plausibles. Cependant, d'après la courbe :

- on a $f(0) = 2$, ce qui permet d'éliminer la réponse a ;
- et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, ce qui permet d'éliminer c.

.....................................................................................................................................................

**10.13** Déjà, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{kx} = \sum_{k=0}^{n-1} (\mathrm{e}^x)^k.$$

C'est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $q = \mathrm{e}^x \neq 1$ car $x \neq 0$. Ainsi, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\mathrm{e}^x)^k = \frac{1-(\mathrm{e}^x)^n}{1-\mathrm{e}^x} = \frac{1-\mathrm{e}^{nx}}{1-\mathrm{e}^x}.$$

.....................................................................................................................................................

**10.14** On a $\mathrm{e} \times \mathrm{e}^2 \times \cdots \times \mathrm{e}^n = \mathrm{e}^{1+2+\cdots+n} = \mathrm{e}^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

.....................................................................................................................................................

**10.15** On calcule

$$g\big(f(x)\big) = f(x) + \sqrt{f(x)^2+1} = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 + 1}.$$

Or, on a $\left(\dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 + 1 = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2x}}{4} + 1 = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - 2 + \mathrm{e}^{-2x} + 4}{4} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} + 2 + \mathrm{e}^{-2x}}{4} = \left(\dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2$.

Comme $\dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \geqslant 0$, on a donc : $\sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 + 1} = \sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$ et donc

$$g\big(f(x)\big) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} + \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \mathrm{e}^x.$$

.....................................................................................................................................................

# Fiche n° 11. Dérivation et exponentielle I

## Réponses

**11.1** a) ........ $\boxed{\dfrac{3n^2-1}{n^3-n}}$

**11.1** b) ........ $\boxed{\dfrac{n^2-3n+1}{n^3}}$

**11.1** c) ........ $\boxed{\dfrac{-8n}{4n^2-1}}$

**11.1** d) ........ $\boxed{\dfrac{4n-7}{(n-2)(n-1)(n+1)}}$

**11.2** a) ........ $\boxed{2^{3n}3^{-4n+2}}$

**11.2** b) ........ $\boxed{2\times 3^n}$

**11.2** c) ........ $\boxed{2^{2n}3^{5n}}$

**11.2** d) ........ $\boxed{2^{n-5}3^{-4n+1}}$

**11.3** a) ........ $\boxed{2^{2n}3^{n+2}}$

**11.3** b) ........ $\boxed{\dfrac{2\sqrt{n}}{n^2}}$

**11.3** c) ........ $\boxed{\dfrac{\sqrt{n^2+2n}}{n}}$

**11.3** d) ........ $\boxed{\dfrac{11n^2-6n\sqrt{2n^2+1}+1}{n+3}}$

**11.4** a) ........ $\boxed{\exp(x)}$

**11.4** b) ........ $\boxed{-\exp(-x)}$

**11.4** c) ........ $\boxed{\alpha\exp(\alpha x+1)}$

**11.4** d) ........ $\boxed{3\exp(x+1)}$

**11.4** e) ........ $\boxed{\dfrac{\exp(x)-\exp(-x)}{2}}$

**11.4** f) ........ $\boxed{\dfrac{1}{4}\exp(2x)-8\exp\left(\dfrac{x}{6}\right)}$

**11.5** a) ........ $\boxed{3-2x-\exp(x)}$

**11.5** b) ........ $\boxed{2\exp(\sqrt{2}x-1)+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}$

**11.5** c) ........ $\boxed{\exp(-x) - \dfrac{4}{x^2}}$

**11.6** a) ........ $\boxed{\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{\sqrt{2}}{4}\exp\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}x\right)}$

**11.6** b) ........ $\boxed{nx^{n-1} + \dfrac{n-1}{n}\exp((n-1)x)}$

**11.6** c) ........ $\boxed{n(n+1)x^n - (n+1)^2\exp(-(n+1)x)}$

**11.7** a) ........ $\boxed{\exp(x) - 2\exp(2x)}$

**11.7** b) ........ $\boxed{4\exp(-2x) - \exp(x) - \exp(-x)}$

**11.8** a) ........ $\boxed{(2x+1)\exp(2x)}$

**11.8** b) ........ $\boxed{(\alpha x + 2\alpha + 1)\exp(\alpha x)}$

**11.8** c) ........ $\boxed{(x^3 + 3x^2)\exp(x-2)}$

**11.8** d) ........ $\boxed{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}} + 3\sqrt{x}\right)\exp(\sqrt{3}x)}$

**11.9** a) ........ $\boxed{(-x^2 + 3x - 2)\exp(-x)}$

**11.9** b) ........ $\boxed{(2x^3 + 3x^2 + 4x + 12)\exp(2x)}$

**11.9** c) ........ $\boxed{(-nx^{n+1} + (n^2+n+1)x^n - n^2x^{n-1} + nx - 1)\exp(-nx)}$

**11.9** d) ........ $\boxed{1 + \exp(-x) + (2x - 2x^2)\exp(-2x) + \dfrac{1-x}{x^2}\exp(x)}$

**11.10** a) ........ $\boxed{-\dfrac{\exp(x)}{(1+\exp(x))^2}}$

**11.10** b) ........ $\boxed{\dfrac{-30\exp(2x) + 6\exp(-x)}{(5\exp(2x) + 2\exp(-x))^2}}$

**11.10** c) ........ $\boxed{\dfrac{2\exp(x) + 8\exp(-2x) - 3\exp(-3x)}{(1+\exp(-3x))^2}}$

**11.10** d) ........ $\boxed{\dfrac{-x^2 - 3\exp(x) + (x^2+2x)\exp(-x) + (2x-1)\exp(2x)}{(\exp(-x) - x)^2}}$

**11.11** a) ........ $\boxed{\text{c}}$

**11.11** b) ........ $\boxed{\text{d}}$

**11.11** c) ........ $\boxed{\text{d}}$

**11.11** d) ........ $\boxed{\text{b}}$

**11.12** a) ............ $\boxed{y = 8x + 1}$

**11.12** b) ............ $\boxed{y = \alpha x + 1 - \alpha}$

**11.12** c) ............ $\boxed{y = -2x - 3}$

**11.12** d) ............ $\boxed{y = -7\mathrm{e}^{-2}x + 11\mathrm{e}^{-2}}$

**11.13** a) ............ $\boxed{\text{a}}$

**11.13** b) ............ $\boxed{\text{c}}$

**11.13** c) ............ $\boxed{\text{a}}$

**11.13** d) ............ $\boxed{\text{b}}$

**11.14** a) ............ $\boxed{-2x\exp(-x^2)}$

**11.14** b) ............ $\boxed{(3x^2 - 1)\exp(x^3 - x)}$

**11.14** c) ............ $\boxed{\dfrac{1}{x^2}\exp\left(-\dfrac{1}{x}\right)}$

**11.14** d) ............ $\boxed{\left(2x - \dfrac{1}{4\sqrt{x}}\right)\exp\left(x^2 - \dfrac{1}{2}\sqrt{x}\right)}$

**11.15** a) ............ $\boxed{\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 3x^2\sqrt{x}\right)\exp(x^3 + 1)}$

**11.15** b) ............ $\boxed{(x + 1)\exp(x(1 + \exp(x)))}$

**11.15** c) ............ $\boxed{\dfrac{-x^2 + 4x + 1}{(x^2 + 1)^2}\exp\left(\dfrac{x - 2}{x^2 + 1}\right)}$

**11.15** d) ............ $\boxed{\dfrac{(2x^4 - x^2)\exp(x^2) + (6x^3 + 2x^2 + 1)\exp(x^2 - 2x^3)}{(x^2 + \exp(-2x^3))^2}}$

## Corrigés

**11.1 a)** On a

$$\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = \frac{n(n+1)}{(n-1)n(n+1)} + \frac{(n-1)(n+1)}{(n-1)n(n+1)} + \frac{(n-1)n}{(n-1)n(n+1)}$$
$$= \frac{(n^2+n) + (n^2-1) + (n^2-n)}{n(n^2-1)} = \frac{3n^2-1}{n^3-n}.$$

............

**11.1 b)** On a $\dfrac{n-2}{n^2} + \dfrac{-n+1}{n^3} = \dfrac{n^2-2n}{n^3} + \dfrac{-n+1}{n^3} = \dfrac{n^2-3n+1}{n^3}$.

............

**11.1 c)** On a $\dfrac{2n-1}{2n+1} - \dfrac{2n+1}{2n-1} = \dfrac{(2n-1)^2 - (2n+1)^2}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{(2n-1-2n-1)(2n-1+2n+1)}{4n^2-1} = \dfrac{-8n}{4n^2-1}$.

............

**11.1 d)** On a

$$\frac{n+2}{n^2-1}+\frac{-n+3}{(n-2)(n+1)}=\frac{n+2}{(n-1)(n+1)}+\frac{-n+3}{(n-2)(n+1)}=\frac{(n+2)(n-2)+(-n+3)(n-1)}{(n-2)(n-1)(n+1)}$$
$$=\frac{n^2-4-n^2+n+3n-3}{(n-2)(n-1)(n+1)}=\frac{4n-7}{(n-2)(n-1)(n+1)}.$$

**11.2 a)** On a $8^n 9^{-2n+1}=(2^3)^n(3^2)^{-2n+1}=2^{3n}3^{-4n+2}$.

**11.2 b)** On a $3^{n+1}-3^n=3\times 3^n-1\times 3^n=2\times 3^n$.

**11.2 c)** On a $4^{n+1}3^{5n}-4^n3^{5n+1}=2^{2n+2}3^{5n}-2^{2n}3^{5n+1}=2^{2n}3^{5n}(2^2-3)=2^{2n}3^{5n}$.

**11.2 d)** On a $\dfrac{(2^{n-2})^3(9^{-n+1})^2}{27(\sqrt{2})^{4n-2}}=\dfrac{2^{3n-6}9^{-2n+2}}{3^3((\sqrt{2})^2)^{2n-1}}=\dfrac{2^{3n-6}3^{-4n+4}}{3^3 2^{2n-1}}=2^{3n-6-2n+1}3^{-4n+4-3}=2^{n-5}3^{-4n+1}$.

**11.3 a)** On a $\sqrt{2^{4n}3^{2n+4}}=\sqrt{(2^{2n})^2(3^{n+2})^2}=2^{2n}3^{n+2}$ car $2^{2n}3^{n+2}\geqslant 0$.

**11.3 b)** Comme $n$ est positif, on a $\sqrt{n^2}=n$ donc $\dfrac{2}{\sqrt{n^3}}=\dfrac{2}{\sqrt{n^2\times n}}=\dfrac{2}{n\sqrt{n}}=\dfrac{2\sqrt{n}}{n(\sqrt{n})^2}=\dfrac{2\sqrt{n}}{n^2}$.

**11.3 c)** On a $\dfrac{\sqrt{n^2+4n+4}}{\sqrt{n^2+2n}}=\dfrac{\sqrt{(n+2)^2}}{\sqrt{n(n+2)}}=\sqrt{\dfrac{(n+2)^2}{n(n+2)}}=\sqrt{\dfrac{n+2}{n}}=\sqrt{\dfrac{n^2+2n}{n^2}}=\dfrac{\sqrt{n^2+2n}}{n}$ car $n\geqslant 0$.

**11.3 d)** On a $\left(\dfrac{3n-\sqrt{2n^2+1}}{\sqrt{n+3}}\right)^2=\dfrac{9n^2-6n\sqrt{2n^2+1}+2n^2+1}{n+3}=\dfrac{11n^2-6n\sqrt{2n^2+1}+1}{n+3}$.

**11.4 a)** Par définition de la fonction exp, pour tout $x$, on a $f'(x)=\exp(x)$.

**11.4 b)** D'après le cours, pour deux réels $a$ et $b$, la dérivée de la fonction $x\mapsto\exp(ax+b)$ est la fonction $x\mapsto a\exp(ax+b)$. On a donc ici, pour tout $x$, $f'(x)=-\exp(-x)$. On procède de même dans les calculs suivants.

**11.5 a)** D'après les dérivées usuelles, pour tout $x$, on a $f'(x)=3-2x-\exp(x)$.

**11.7 a)** En notant $u(x)=\mathrm{e}^x+2$ et $v(x)=3-\mathrm{e}^x$, on a $u'(x)=\mathrm{e}^x$ et $v'(x)=-\mathrm{e}^x$ donc

$$f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)=\mathrm{e}^x(3-\mathrm{e}^x)+(\mathrm{e}^x+2)(-\mathrm{e}^x)=3\mathrm{e}^x-(\mathrm{e}^x)^2-(\mathrm{e}^x)^2-2\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x-2\mathrm{e}^{2x}.$$

On procède de même dans les calculs suivants.

**11.9 a)** En notant $u(x)=x^2-x+1$ et $v(x)=\mathrm{e}^{-x}$, on a $u'(x)=2x-1$ et $v'(x)=-\mathrm{e}^{-x}$ donc

$$f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)=(2x-1)\mathrm{e}^{-x}-(x^2-x+1)\mathrm{e}^{-x}=(2x-1-x^2+x-1)\mathrm{e}^{-x}=(-x^2+3x-2)\mathrm{e}^{-x}.$$

On procède de même dans les calculs suivants.

**11.10 a)** En notant $u(x)=1+\mathrm{e}^x$, on a $u'(x)=\mathrm{e}^x$ donc $f'(x)=-\dfrac{u'(x)}{(u(x))^2}=\dfrac{-\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$.

**11.10 b)** En notant $u(x) = 5e^{2x} + 2e^{-x}$, on a $u'(x) = 10e^{2x} - 2e^{-x}$ donc $f'(x) = -3\dfrac{u'(x)}{(u(x))^2} = \dfrac{-30e^{2x} + 6e^{-x}}{(5e^{2x} + 2e^{-x})^2}$.

**11.10 c)** En notant $u(x) = 2e^x - 1$ et $v(x) = 1 + e^{-3x}$, on a $u'(x) = 2e^x$ et $v'(x) = -3e^{-3x}$ donc

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{2e^x(1 + e^{-3x}) - (2e^x - 1)(-3e^{-3x})}{(1 + e^{-3x})^2} = \frac{2e^x + 8e^{-2x} - 3e^{-3x}}{(1 + e^{-3x})^2}.$$

**11.10 d)** En notant $u(x) = x^2 - e^{2x}$ et $v(x) = e^{-x} - x$, on a $u'(x) = 2x - 2e^{2x}$ et $v'(x) = -e^{-x} - 1$ donc

$$f'(x) = \frac{(2x - 2e^{2x})(e^{-x} - x) - (x^2 - e^{2x})(-e^{-x} - 1)}{(e^{-x} - x)^2} = \frac{-x^2 - 3e^x + (x^2 + 2x)e^{-x} + (2x - 1)e^{2x}}{(e^{-x} - x)^2}.$$

**11.11 a)** Une équation de la tangente est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. On a ici $f(a) = 1$. De plus, on a $f'(x) = \exp(x)$ pour tout $x$, donc $f'(a) = 1$. Une équation de la tangente est donc $y = 1 \times (x - 0) + 1$, soit $y = x + 1$.

**11.11 b)** De même, on a ici $f(a) = 1$. De plus, on a $f'(x) = 2\exp(2x)$ pour tout $x$, donc $f'(a) = 2$.

**11.11 c)** De même, on a ici $f(a) = 2$. De plus, on a $f'(x) = -3\exp(-x)$ pour tout $x$, donc $f'(a) = -3$.

**11.11 d)** De même, on a ici $f(a) = 1$. De plus, on a $f'(x) = \exp(x - 1)$ pour tout $x$, donc $f'(a) = 1$.

**11.12 a)** Une équation de la tangente est $y = f'(a)(x-a)+f(a)$. On a ici $f(a) = 1$. De plus, on a $f'(x) = 8\exp(4x)$ pour tout $x$, donc $f'(a) = 8$. Une équation de la tangente est donc $y = 8 \times (x - 0) + 1$, soit $y = 8x + 1$.

**11.12 b)** De même, on a ici $f(a) = 1 - \alpha$. De plus, on a $f'(x) = (\alpha - \alpha^2)\exp(\alpha x) + \alpha^2$ pour tout $x$, donc $f'(a) = \alpha$.

**11.12 c)** De même, on a ici $f(a) = -3$. De plus, on a $f'(x) = (x^2 + 3x - 2)\exp(x)$ pour tout $x$, donc $f'(a) = -2$.

**11.12 d)** De même, on a ici $f(a) = 4e^{-2}$. De plus, on a $f'(x) = (-2x^2 + 4x - 9)e^{-2x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc, on a $f'(a) = -7e^{-2}$.

**11.13 a)** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = \dfrac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} > 0$. La fonction $f$ est donc croissante sur $\mathbb{R}$.

**11.13 b)** Soit $x \in [0, +\infty[$. On a $f'(x) = (1 - x)\exp(-x)$ donc $f'(x)$ est positif si, et seulement si, on a $x \leqslant 1$. La fonction $f$ est donc croissante sur $[0, 1]$ et décroissante sur $[1, +\infty[$. Elle n'est donc pas monotone sur $[0, +\infty[$.

**11.13 c)** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = x^2 \exp(x) \geqslant 0$. La fonction $f$ est donc croissante sur $\mathbb{R}$.

**11.13 d)** Soit $x \in [0, +\infty[$. On a $f'(x) = -\dfrac{e^x - e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2}$. Or, on a $x \geqslant 0$ donc $x \geqslant -x$ donc, par croissance de la fonction exp, on a $e^x \geqslant e^{-x}$, d'où $f'(x) \leqslant 0$. La fonction $f$ est donc décroissante sur $\mathbb{R}$.

**11.14 a)** En notant $u(x) = -x^2$, on a $u'(x) = -2x$ donc $f'(x) = u'(x)\exp(u(x)) = -2x\exp(-x^2)$. On procède de même dans les calculs suivants.

**11.15 a)** En notant $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = \exp(x^3+1)$, on a $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ et $v'(x) = 3x^2\exp(x^3+1)$ donc

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\exp(x^3+1) + 3x^2\sqrt{x}\exp(x^3+1) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 3x^2\sqrt{x}\right)\exp(x^3+1)\,.$$

**11.15 b)** En notant $u(x) = x$ et $v(x) = \exp(x)$, on a $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \exp(x)$ donc

$$(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = \exp(x) + x\exp(x) = (x+1)\exp(x)\,.$$

On a ainsi $f'(x) = (x+1)\exp(x)\exp(x\exp(x)) = (x+1)\exp(x + x\exp(x)) = (x+1)\exp(x(1+\exp(x)))$.

**11.15 c)** En notant $u(x) = x-2$ et $v(x) = x^2+1$, on a $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2x$ donc

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{x^2+1-(2x^2-4x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+4x+1}{(x^2+1)^2}\,.$$

On a ainsi $f'(x) = \dfrac{-x^2+4x+1}{(x^2+1)^2}\exp\left(\dfrac{x-2}{x^2+1}\right)$.

**11.15 d)** En notant $u(x) = x\mathrm{e}^{x^2}$ et $v(x) = x^2 + \mathrm{e}^{-2x^3}$, on a

$$u'(x) = \mathrm{e}^{x^2} + 2x^2\mathrm{e}^{x^2} = (2x^2+1)\mathrm{e}^{x^2} \qquad \text{et} \qquad v'(x) = 2x - 6x^2\mathrm{e}^{-2x^3}\,.$$

Donc, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{(2x^2+1)\mathrm{e}^{x^2}(x^2+\mathrm{e}^{-2x^3}) - x\mathrm{e}^{x^2}(2x - 6x^2\mathrm{e}^{-2x^3})}{(x^2+\mathrm{e}^{-2x^3})^2} \\ &= \frac{(2x^4 - x^2)\mathrm{e}^{x^2} + (6x^3+2x^2+1)\mathrm{e}^{x^2-2x^3}}{(x^2+\mathrm{e}^{-2x^3})^2}\,. \end{aligned}$$

# Fiche n° 12. Dérivation et exponentielle II

## Réponses

**12.1** a) ........ $\boxed{(3x+1)(5x-6)}$

**12.1** b) ........ $\boxed{2(2x-1)(2x+1)}$

**12.1** c) ........ $\boxed{(2-7x)(7x+10)}$

**12.1** d) ........ $\boxed{(7x+2)(7x-1)}$

**12.2** a) ........ $\boxed{2(3x-5)(4x+3)}$

**12.2** b) ........ $\boxed{-(2x+3)(x+4)}$

**12.2** c) ........ $\boxed{(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)}$

**12.2** d) ........ $\boxed{4xy}$

**12.3** a) ........ $\boxed{\mathrm{e}^x+4}$

**12.3** b) ........ $\boxed{5\mathrm{e}^x-7}$

**12.4** a) ........ $\boxed{7(x+1)\mathrm{e}^x}$

**12.4** b) ........ $\boxed{x(x+2)\mathrm{e}^x}$

**12.4** c) ........ $\boxed{(3x+2)\mathrm{e}^x}$

**12.4** d) ........ $\boxed{2\mathrm{e}^x(x+1)(x\mathrm{e}^x-2)}$

**12.5** a) ........ $\boxed{\dfrac{(x-1)^2\mathrm{e}^x}{\left(x^2+1\right)^2}}$

**12.5** b) ........ $\boxed{\dfrac{-8x(x+2)\mathrm{e}^x}{\left(4x^2\mathrm{e}^x+7\right)^2}}$

**12.5** c) ........ $\boxed{\dfrac{3\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2}}$

**12.5** d) ........ $\boxed{\dfrac{(x+1)\mathrm{e}^x}{\left(3x\mathrm{e}^x+1\right)^2}}$

**12.6** a) ........ $\boxed{15\mathrm{e}^{5x}+12\mathrm{e}^{2x}}$

**12.6** b) ........ $\boxed{-3\mathrm{e}^{-x}+2\mathrm{e}^{2x+1}}$

**12.7** a) ........ $\boxed{\left(-3x^2+6x+1\right)\mathrm{e}^{-x+1}}$

**12.7** b) ........ $\boxed{3\mathrm{e}^{2-3x}\left(5-2\mathrm{e}^{x-1}\right)}$

**12.7** c) ........ $\boxed{3\mathrm{e}^{3x}-4\mathrm{e}^x+5\mathrm{e}^{-x}}$

**12.7** d) ........ $\boxed{2\left(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\right)\left(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}\right)}$

**12.8** a) ........ $\boxed{-7\mathrm{e}^{4-7x}}$

**12.8** b) ........ $\boxed{\dfrac{12\mathrm{e}^{-x}}{\left(4\mathrm{e}^{-x}+3\right)^2}}$

**12.8** c) ........ $\boxed{\dfrac{2(1-3x)\mathrm{e}^{3x-2}+14}{\left(\mathrm{e}^{3x-2}+7\right)^2}}$

**12.8** d) ........ $\boxed{7(1-3x)\mathrm{e}^{1-3x}}$

**12.8** e) ........ $\boxed{\dfrac{4}{\left(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\right)^2}}$

**12.8** f) ........ $\boxed{\dfrac{2\mathrm{e}^{-2x-1}}{3}\left(5x^2-5x-1\right)}$

**12.9** ........ $\boxed{\dfrac{2x(x+2)\mathrm{e}^x+3(1-x)\mathrm{e}^{-x}-3x^2(2x+1)}{\left(x^2\mathrm{e}^x+1\right)^2}}$

**12.10** a) ........ $\boxed{\dfrac{(1-6x)\mathrm{e}^{2-3x}}{2\sqrt{x}}}$

**12.10** b) ........ $\boxed{\dfrac{(1-2x)\mathrm{e}^x+1}{2\sqrt{x}\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2}}$

**12.10** c) ........ $\boxed{\dfrac{\left(2x^3-3x^2+2x+1\right)\mathrm{e}^x}{2\sqrt{x}\left(x^2+1\right)^2}}$

**12.10** d) ........ $\boxed{\dfrac{\left(4x^3+5x^2\right)\mathrm{e}^{2x}}{2\sqrt{x}}}$

**12.11** a) ........ $\boxed{0}$

**12.11** b) ........ $\boxed{\dfrac{48\mathrm{e}^{-3}-8\mathrm{e}^{-2}-5\mathrm{e}}{\left(2\mathrm{e}^{-3}+5\right)^2}}$

**12.12** a) ........ $\boxed{y=x+1}$

**12.12** b) ........ $\boxed{y=3\mathrm{e}^{-2}(6-x)}$

**12.12** c) ........ $\boxed{y=\dfrac{6\mathrm{e}}{(4\mathrm{e}+3)^2}x+\dfrac{8\mathrm{e}^2}{(4\mathrm{e}+3)^2}}$

**12.12** d) ........ $\boxed{y=\dfrac{11}{16}x-\dfrac{1}{4}}$

**12.13** ........ $\boxed{\text{c}}$

**12.14** a) ........ $\boxed{3x^2 e^{x^3}}$

**12.14** b) ........ $\boxed{\dfrac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}}$

**12.14** c) ........ $\boxed{2(x-1)e^{x^2-2x}}$

**12.14** d) ........ $\boxed{e^{x+e^x}}$

**12.15** a) ........ $\boxed{2(3x-1)e^{3x^2-2x+7}}$

**12.15** b) ........ $\boxed{\dfrac{3}{2}\sqrt{x}e^{x\sqrt{x}}}$

**12.15** c) ........ $\boxed{e^{x+e^x+e^{e^x}}}$

**12.16** a) ........ $\boxed{4\left(1+2x-3x^3\right)e^{2x-x^3}}$

**12.16** b) ........ $\boxed{2(x+1)e^{x^2+2x-1}}$

**12.16** c) ........ $\boxed{x^2\left(5x^2e^{x^5}-2(5x+3)e^{5x}\right)}$

**12.16** d) ........ $\boxed{\left(3x^2+2+e^x\right)e^{x^3+2x+e^x}}$

**12.17** a) ........ $\boxed{\dfrac{e^{(n+1)x}-e^x}{e^x-1}}$

**12.17** b) ........ $\boxed{e^x+2e^{2x}+3e^{3x}+\dots+ne^{nx}}$

**12.17** c) ........ $\boxed{\dfrac{ne^{(n+2)x}-(n+1)e^{(n+1)x}+e^x}{(e^x-1)^2}}$

## Corrigés

**12.1 a)** On a $5x(3x+1)-3(6x+2)=(3x+1)(5x-3\times 2)=(3x+1)(5x-6)$.

**12.1 b)** On a $(2x-1)(7x+2)-3x(2x-1)=(2x-1)(7x+2-3x)=(2x-1)(4x+2)=2(2x-1)(2x+1)$.

**12.1 c)** On a $36-(7x+4)^2=6^2-(7x+4)^2=(6-(7x+4))(6+(7x+4))=(2-7x)(7x+10)$.

**12.1 d)** On a

$$\begin{aligned}7x+2-\left(4-49x^2\right)&=7x+2-\left(2^2-(7x)^2\right)=7x+2-(2-7x)(2+7x)\\&=(7x+2)(1-(2-7x))=(7x+2)(7x-1).\end{aligned}$$

**12.2 a)** On a

$$\begin{aligned}(3x-5)(4x+1)+9x^2-25&=(3x-5)(5x+1)+(3x)^2-5^2=(3x-5)(5x+1)+(3x+5)(3x-5)\\&=(3x-5)(5x+1+(3x+5))=(3x-5)(8x+6)=2(3x-5)(4x+3).\end{aligned}$$

**12.2 b)** On a

$$\begin{aligned}(x-7)(2x+3)-4x^2+9&=(x-7)(2x+3)+3^2-(2x)^2=(x-7)(2x+3)+(3-2x)(3+2x)\\&=(2x+3)(x-7+3-2x)=-(2x+3)(x+4).\end{aligned}$$

**12.2 c)** On a $x^4-1=\left(x^2\right)^2-1^2=\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)=(x-1)(x+1)(x^2+1)$.

**12.4 a)** On identifie ici un produit $f(x)=u(x)v(x)$ avec $u(x)=7x$ et $v(x)=e^x$. Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}$, comme $u'(x)=7$ et $v'(x)=e^x$, on a

$$f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)=7e^x+7xe^x=7(x+1)e^x.$$

**12.4 b)** Comme à la question précédente avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$, il vient $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$. D'où

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 2x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x = \left(x^2 + 2x\right)\mathrm{e}^x = x(x+2)\mathrm{e}^x.$$

**12.4 c)** Comme précédemment avec $u(x) = 3x - 1$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$, il vient $u'(x) = 3$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$, d'où

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 3\mathrm{e}^x + (3x-1)\mathrm{e}^x = (3x - 1 + 3)\mathrm{e}^x = (3x+2)\mathrm{e}^x.$$

**12.4 d)** On peut ici interpréter le carré comme un produit $u(x)v(x)$ avec $u(x) = v(x) = 2 - x\mathrm{e}^x$.
Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$u'(x) = 0 - (1 \times \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x) = -(x+1)\mathrm{e}^x.$$

D'où

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 2u'(x)u(x) = 2(-(x+1)\mathrm{e}^x)(2 - x\mathrm{e}^x) = 2\mathrm{e}^x(x+1)(x\mathrm{e}^x - 2).$$

*La règle de dérivation d'un carrée* $\boxed{\left(u^2\right)' = 2u'u,}$ *sera énoncée et généralisée en Terminale.*

**12.5 a)** On identifie ici un quotient $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = x^2 + 1$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, comme on a $u'(x) = \mathrm{e}^x$ et $v'(x) = 2x$, on obtient

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{\mathrm{e}^x\left(x^2+1\right) - \mathrm{e}^x \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{\left(x^2 - 2x + 1\right)\mathrm{e}^x}{(x^2+1)^2} = \frac{(x-1)^2\mathrm{e}^x}{(x^2+1)^2}.$$

**12.5 b)** À la constante multiplicative 2 près, on identifie une expression de la forme $\dfrac{1}{u(x)}$ avec $u(x) = 4x^2\mathrm{e}^x + 7$.
La fonction $u$ est elle-même composée d'un produit et d'une somme. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$u'(x) = 4 \times 2x \times \mathrm{e}^x + 4x^2\mathrm{e}^x + 0 = 8x\mathrm{e}^x + 4x^2\mathrm{e}^x = 4x(x+2)\mathrm{e}^x.$$

Ainsi, on trouve

$$f'(x) = 2 \times \left(-\frac{u'(x)}{(u(x))^2}\right) = 2 \times \left(-\frac{4x(x+2)\mathrm{e}^x}{(4x^2\mathrm{e}^x + 7)^2}\right) = \frac{-8x(x+2)\mathrm{e}^x}{(4x^2\mathrm{e}^x+7)^2}.$$

**12.5 c)** On identifie à nouveau un quotient $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = \mathrm{e}^x - 2$ et $v(x) = \mathrm{e}^x + 1$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, comme $u'(x) = v'(x) = \mathrm{e}^x$, il vient

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+1) - (\mathrm{e}^x - 2)\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2} = \frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x + 1 - (\mathrm{e}^x - 2))}{(\mathrm{e}^x+1)^2} = \frac{3\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}.$$

**12.5 d)** On identifie à nouveau un quotient $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = x\mathrm{e}^x$ et $v(x) = 3x\mathrm{e}^x + 1$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$u'(x) = 1 \times \mathrm{e}^x + x \times \mathrm{e}^x = (x+1)\mathrm{e}^x \qquad \text{et} \qquad v'(x) = 3 \times \mathrm{e}^x + 3x \times \mathrm{e}^x + 0 = 3(x+1)\mathrm{e}^x,$$

d'où

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{(x+1)\mathrm{e}^x(3x\mathrm{e}^x+1) - x\mathrm{e}^x \times 3(x+1)\mathrm{e}^x}{(3x\mathrm{e}^x+1)^2} = \frac{(x+1)\mathrm{e}^x\left(3x\mathrm{e}^x + 1 - 3x\mathrm{e}^x\right)}{(3x\mathrm{e}^x+1)^2} \\ &= \frac{(x+1)\mathrm{e}^x}{(3x\mathrm{e}^x+1)^2}. \end{aligned}$$

**12.6** a) Il suffit de dériver chaque terme de la somme, en se rappelant qu'une fonction $x \longmapsto e^{ax+b}$, avec $a$ et $b$ deux paramètres réels, admet pour fonction dérivée $x \longmapsto a e^{ax+b}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = 3 \times 5e^{5x} + 6 \times 2e^{2x} = 15e^{5x} + 12e^{2x}.$$

.....

**12.6** b) Il suffit là aussi de dériver chaque terme de la somme. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = 3 \times \left(-e^{-x}\right) + 2 \times e^{2x+1} = -3e^{-x} + 2e^{2x+1}.$$

.....

**12.7** a) La fonction $f$ est un produit $uv$ avec $u(x) = 3x^2 - 1$ et $v(x) = e^{-x+1}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $u'(x) = 3 \times 2x = 6x$, $v'(x) = -e^{-x+1}$. Donc, on a

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 6xe^{-x+1} - e^{-x+1}\left(3x^2 - 1\right) = \left(-3x^2 + 6x + 1\right)e^{-x+1}.$$

.....

**12.7** b) On peut ici dériver un produit, mais aussi une somme *via* les propriétés algébriques de l'exponentielle. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \left(3e^{x-1} - 5\right)e^{2-3x} = 3e^{x-1}e^{2-3x} - 5e^{2-3x} = 3e^{x-1+2-3x} - 5e^{2-3x} = 3e^{-2x+1} - 5e^{2-3x}.$$

Dans la mesure où il est préférable d'obtenir des expressions de dérivée sous forme factorisée, dérivons le produit. La fonction $f$ est de la forme $uv$ avec $u(x) = 3e^{x-1} - 5$ et $v(x) = e^{2-3x}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$u'(x) = 3 \times 1e^{x-1} = 3e^{x-1} \quad \text{et} \quad v'(x) = -3e^{2-3x}.$$

Finalement, on a

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 3e^{x-1}e^{2-3x} - 3e^{2-3x}\left(3e^{x-1} - 5\right) = 3e^{2-3x}\left(e^{x-1} - \left(3e^{x-1} - 5\right)\right) = 3e^{2-3x}\left(5 - 2e^{x-1}\right).$$

.....

**12.7** c) Ici, on peut développer le produit. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = e^{2x}e^{-x} + e^{2x}e^{x} - 5e^{-x} - 5e^{x} = e^{x} + e^{3x} - 5e^{-x} - 5e^{x} = e^{3x} - 4e^{x} - 5e^{-x}.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3 \times e^{3x} - 4e^{x} - 5\left(-e^{-x}\right) = 3e^{3x} - 4e^{x} + 5e^{-x}$.

.....

**12.7** d) La fonction $f$ est de la forme $u^2$ avec $u(x) = e^{x} - e^{-x}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $u'(x) = e^{x} - \left(-e^{-x}\right) = e^{x} + e^{-x}$. La formule de dérivation d'un produit donne, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 2u'(x)u(x) = 2\left(e^{x} + e^{-x}\right)\left(e^{x} - e^{-x}\right).$$

.....

**12.8** a) La fonction $f$ est de la forme $1/u$, mais il est ici préférable d'utiliser les propriétés algébriques de l'exponentielle. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \dfrac{1}{e^{7x-4}} = e^{-(7x-4)} = e^{4-7x}$, et donc $f'(x) = -7e^{4-7x}$.

.....

**12.8** b) La fonction $f$ est de la forme $3/u$ avec $u(x) = 4e^{-x} + 3$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = 3 \times \left(-\frac{u'(x)}{\left(u(x)\right)^2}\right) = 3\left(-\frac{-4e^{-x}}{\left(4e^{-x} + 3\right)^2}\right) = \frac{12e^{-x}}{\left(4e^{-x} + 3\right)^2}.$$

.....

**12.8 c)** La fonction $f$ est un quotient $u/v$ avec $u(x) = 2x$ et $v(x) = \mathrm{e}^{3x-2} + 7$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 3\mathrm{e}^{3x-2}$ et donc

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{2\left(\mathrm{e}^{3x-2}+7\right) - 2x \times 3\mathrm{e}^{3x-2}}{(\mathrm{e}^{3x-2}+7)^2} = \frac{2(1-3x)\mathrm{e}^{3x-2} + 14}{(\mathrm{e}^{3x-2}+7)^2}.$$

---

**12.8 d)** Les propriétés algébriques de la fonction exponentielle permettent de se ramener à un produit puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \dfrac{7x\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{2x-1}} = 7x\mathrm{e}^{-x-(2x-1)} = 7x\mathrm{e}^{1-3x}$. La formule de dérivation d'un produit donne alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 7 \times \mathrm{e}^{1-3x} + 7x\left(-3\mathrm{e}^{1-3x}\right) = 7(1-3x)\mathrm{e}^{1-3x}.$$

---

**12.8 e)** Ce n'est pas indispensable, mais on peut ici commencer par transformer légèrement l'expression de $f$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \frac{\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right)}{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})} = \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}.$$

Ainsi $f$ est un quotient $u/v$ avec $u(x) = \mathrm{e}^{2x} - 1$ et $v(x) = \mathrm{e}^{2x} + 1$. Puis, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = v'(x) = 2\mathrm{e}^{2x}$ et

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{2\mathrm{e}^{2x}\left(\mathrm{e}^{2x}+1-\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)\right)}{(\mathrm{e}^{2x}+1)^2} = \frac{4\mathrm{e}^{2x}}{(\mathrm{e}^{2x}+1)^2} = \frac{4}{(\mathrm{e}^{-x})^2(\mathrm{e}^{2x}+1)^2} = \frac{4}{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2}.$$

---

**12.8 f)** Les propriétés algébriques de la fonction exponentielle permettent de se ramener à un produit puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = \frac{\left(1-5x^2\right)\mathrm{e}^{-3x}}{3\mathrm{e}^{-x+1}} = \frac{1}{3}\left(1-5x^2\right)\mathrm{e}^{-3x-(-x+1)} = \frac{1}{3}\left(1-5x^2\right)\mathrm{e}^{-2x-1}.$$

La formule de dérivation d'un produit donne alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3}\left(-5 \times 2x\mathrm{e}^{-2x-1} + \left(1-5x^2\right) \times (-2)\mathrm{e}^{-2x-1}\right) = \frac{\mathrm{e}^{-2x-1}}{3}\left(-10x - 2\left(1-5x^2\right)\right) \\ &= \frac{2\mathrm{e}^{-2x-1}}{3}\left(5x^2 - 5x - 1\right). \end{aligned}$$

---

**12.9** La fonction $f$ est un quotient $u/v$ avec $u(x) = 3x\mathrm{e}^{-x} - 2$ et $v(x) = x^2\mathrm{e}^x + 1$. Les règles de dérivation du produit et de la somme donnent, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$u'(x) = 3 \times \mathrm{e}^{-x} + 3x\left(-\mathrm{e}^{-x}\right) = 3(1-x)\mathrm{e}^{-x} \qquad \text{et} \qquad v'(x) = 2x \times \mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x = x(x+2)\mathrm{e}^x.$$

Ainsi, la règle de dérivation d'un quotient donne, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v(x)}{(v(x))^2} = \frac{3(1-x)\mathrm{e}^{-x}\left(x^2\mathrm{e}^x+1\right) - x(x+2)\mathrm{e}^x\left(3x\mathrm{e}^{-x}-2\right)}{(x^2\mathrm{e}^x+1)^2} \\ &= \frac{3(1-x)\left(x^2+\mathrm{e}^{-x}\right) - x(x+2)(3x-2\mathrm{e}^x)}{(x^2\mathrm{e}^x+1)^2} \\ &= \frac{2x(x+2)\mathrm{e}^x + 3(1-x)\mathrm{e}^{-x} + 3x^2(1-x) - 3x^2(x+2)}{(x^2\mathrm{e}^x+1)^2} = \frac{2x(x+2)\mathrm{e}^x + 3(1-x)\mathrm{e}^{-x} - 3x^2(2x+1)}{(x^2\mathrm{e}^x+1)^2}. \end{aligned}$$

---

**12.10 a)** Pour tout $x > 0$, on a

$$f'(x) = -3\mathrm{e}^{2-3x}\sqrt{x} + \mathrm{e}^{2-3x} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-3\mathrm{e}^{2-3x}\sqrt{x} \times 2\sqrt{x} + \mathrm{e}^{2-3x}}{2\sqrt{x}} = \frac{(1-6x)\mathrm{e}^{2-3x}}{2\sqrt{x}}.$$

---

**12.10 b)** Pour tout $x > 0$, on a

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \times (e^x + 1) - \sqrt{x}e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{\dfrac{e^x + 1 - 2\sqrt{x} \times \sqrt{x}e^x}{2\sqrt{x}}}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x + 1 - 2xe^x}{2\sqrt{x}(e^x+1)^2} = \frac{(1-2x)e^x + 1}{2\sqrt{x}(e^x+1)^2}.$$

---

**12.10 c)** On identifie un quotient $u(x)/v(x)$ avec $u(x) = e^x\sqrt{x}$ (un produit) et $v(x) = x^2 + 1$.

Pour tout $x > 0$, on a

$$u'(x) = e^x\sqrt{x} + e^x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2xe^x + e^x}{2\sqrt{x}} = \frac{(2x+1)e^x}{2\sqrt{x}} \qquad \text{et} \qquad v'(x) = 2x.$$

Donc, on a

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} &= \frac{\dfrac{(2x+1)e^x}{2\sqrt{x}}\left(x^2+1\right) - e^x\sqrt{x} \times 2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{(2x+1)e^x\left(x^2+1\right) - 2\sqrt{x} \times 2x\sqrt{x}e^x}{2\sqrt{x}(x^2+1)^2} \\ &= \frac{\Big((2x+1)\left(x^2+1\right) - 4x^2\Big)e^x}{2\sqrt{x}(x^2+1)^2} = \frac{\Big(2x^3 - 3x^2 + 2x + 1\Big)e^x}{2\sqrt{x}(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

---

**12.10 d)** On identifie un produit de trois facteurs : $f(x) = u(x)v(x)w(x)$ avec $u(x) = x^2$, $v(x) = e^{2x}$ et $w(x) = \sqrt{x}$. Il suffit alors d'appliquer de façon itérée la formule de dérivation d'un produit. Précisément,

$$(uvw)' = ((uv)w)' = (uv)'w + (uv)w' = (u'v + uv')w + (uv)w' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

*Remarque : ce procédé se généralise à un produit formé d'un nombre fini quelconque de facteurs.*

Or, pour tout $x > 0$, on a $u'(x) = 2x$, $v'(x) = 2e^{2x}$ et $w'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, et donc

$$f'(x) = 2x \times e^{2x}\sqrt{x} + 2e^{2x}x^2\sqrt{x} + x^2e^{2x} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{2x}}{2\sqrt{x}}\left(4x\sqrt{x}^2 + 4x^2\sqrt{x}^2 + x^2\right) = \frac{\left(4x^3 + 5x^2\right)e^{2x}}{2\sqrt{x}}.$$

---

**12.11 a)** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = -3x^2e^{3-2x} + \left(2 - x^3\right) \times \left(-2e^{3-2x}\right) = e^{3-2x}\left(-3x^2 - 2\left(2 - x^3\right)\right) = e^{3-2x}\left(2x^3 - 3x^2 - 4\right).$$

Finalement, on a $f'(2) = e^{3-2\times 2}\left(2 \times 2^3 - 3 \times 2^2 - 4\right) = 0$.

---

**12.11 b)** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}\left(2e^{3x} + 5\right) - 6e^{3x}\left(e^{-x} - 8\right)}{(2e^{3x}+5)^2} = \frac{-2e^{3x-x} - 5e^{-x} - 6e^{3x-x} + 48e^{3x}}{(2e^{3x}+5)^2} = \frac{48e^{3x} - 8e^{2x} - 5e^{-x}}{(2e^{3x}+5)^2}.$$

Finalement, on a $f'(-1) = \dfrac{48e^{-3} - 8e^{-2} - 5e}{(2e^{-3}+5)^2}$.

---

**12.12 a)** On a facilement $f'(0) = f(0) = e^0 = 1$, ainsi $f'(0)(x - 0) + f(0) = x + 1$ et l'équation réduite de la tangente à la courbe de $f$ au point d'abscisse 0 est $y = x + 1$.

---

**12.12** b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = 2x\mathrm{e}^{1-x} + x^2\left(-\mathrm{e}^{1-x}\right) = (2-x)x\mathrm{e}^{1-x}$.

En particulier, $f'(3) = -3\mathrm{e}^{-2}$, d'où

$$f'(-3)(x-3) + f(-3) = -3\mathrm{e}^{-2}(x-3) + 9\mathrm{e}^{-2} = 3\mathrm{e}^{-2}(6-x).$$

L'équation réduite de la tangente à la courbe de $f$ au point d'abscisse 3 est $y = 3\mathrm{e}^{-2}(6-x)$.

**12.12** c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = -\frac{2u'(x)}{(u(x))^2} = -\frac{2 \times \left(-3\mathrm{e}^{-x}\right)}{(4+3\mathrm{e}^{-x})^2} = \frac{6\mathrm{e}^{-x}}{(4+3\mathrm{e}^{-x})^2} = \frac{6\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{2x}}{(4+3\mathrm{e}^{-x})^2(\mathrm{e}^x)^2} = \frac{6\mathrm{e}^{x}}{(4\mathrm{e}^x+3)^2}.$$

En particulier, $f'(1) = \dfrac{6\mathrm{e}}{(4\mathrm{e}+3)^2}$. Donc,

$$\begin{aligned} f'(1)(x-1) + f(1) &= \frac{6\mathrm{e}}{(4\mathrm{e}+3)^2}(x-1) + \frac{2}{4+3\mathrm{e}^{-1}} = \frac{6\mathrm{e}}{(4\mathrm{e}+3)^2}(x-1) + \frac{2\mathrm{e}}{4\mathrm{e}+3} = \frac{6\mathrm{e}}{(4\mathrm{e}+3)^2}x + \frac{2\mathrm{e}(4\mathrm{e}+3)-6\mathrm{e}}{(4\mathrm{e}+3)^2} \\ &= \frac{6\mathrm{e}}{(4\mathrm{e}+3)^2}x + \frac{8\mathrm{e}^2}{(4\mathrm{e}+3)^2}. \end{aligned}$$

L'équation réduite de la tangente à la courbe de $f$ au point d'abscisse 3 est $y = \dfrac{6\mathrm{e}}{(4\mathrm{e}+3)^2}x + \dfrac{8\mathrm{e}^2}{(4\mathrm{e}+3)^2}$.

**12.12** d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = \frac{2\mathrm{e}^{2x}\left(\mathrm{e}^{3x}+3\right) - 3\mathrm{e}^{3x}\left(\mathrm{e}^{2x}-2\right)}{(\mathrm{e}^{3x}+3)^2} = \frac{6\mathrm{e}^{3x} + 6\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{5x}}{(\mathrm{e}^{3x}+3)^2}.$$

En particulier, on a $f'(0) = \dfrac{6+6-1}{(1+3)^2} = \dfrac{11}{16}$, et donc

$$f'(0)(x-0) + f(0) = \frac{11}{16}x + \frac{1-2}{1+3} = \frac{11}{16}x - \frac{1}{4}.$$

L'équation réduite de la tangente à la courbe de $f$ au point d'abscisse 0 est $y = \dfrac{11}{16}x - \dfrac{1}{4}$.

**12.13** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = -\mathrm{e}^{2-x} + (5-x)\left(-\mathrm{e}^{2-x}\right) = \mathrm{e}^{2-x}(-(5-x)-1) = (x-6)\mathrm{e}^{2-x}.$$

La fonction dérivée de $f$ est donc du signe de $x-6$ sur $\mathbb{R}$, ainsi la fonction $f$ est décroissante sur l'intervalle $]-\infty, 6]$ et croissante sur l'intervalle $[6, +\infty[$.

**12.14** a) La fonction $f$ est une composée $\exp(u)$ avec $u : x \longmapsto x^3$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $u'(x) = 3x^2$ et donc

$$f'(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)} = 3x^2\mathrm{e}^{x^3}.$$

**12.14** b) La fonction $f$ est une composée $\exp(u)$ avec $u : x \longmapsto \sqrt{x}$.

Pour tout $x \in ]0, +\infty[$, on a $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ et donc $f'(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$.

**12.14 c)** La fonction $f$ est une composée $\exp(u)$ avec $u : x \longmapsto x^2 - 2x$, dérivable sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)} = (2x-2)\mathrm{e}^{x^2-2x} = 2(x-1)\mathrm{e}^{x^2-2x}$.

........................................................................................................................................................

**12.14 d)** La fonction $f$ est une composée $\exp(u)$ avec $u = \exp$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)} = \mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^{x+\mathrm{e}^x}.$$

........................................................................................................................................................

**12.15 a)** La fonction $f$ est une composée $\exp(u)$ avec $u : x \longmapsto 3x^2 - 2x + 7$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $u'(x) = 6x - 2$ et $f'(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)} = 2(3x-1)\mathrm{e}^{3x^2-2x+7}$.

........................................................................................................................................................

**12.15 b)** La fonction $f$ est une composée $\exp(u)$ avec $u : x \longmapsto x\sqrt{x}$ dérivable sur $]0, +\infty[$. Pour tout $x \in ]0, +\infty[$, $u$ étant un produit, on a

$$u'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x} \quad \text{et} \quad f'(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)} = \frac{3}{2}\sqrt{x}\mathrm{e}^{x\sqrt{x}}.$$

........................................................................................................................................................

**12.15 c)** La fonction $f$ est une composée $\exp(u)$ avec $u : x \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$ dérivable sur $\mathbb{R}$. Or, d'après le calcul précédent, la dérivée de $u$ est $u' : x \longmapsto \mathrm{e}^{x+\mathrm{e}^x}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)} = \mathrm{e}^{x+\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^{x+\mathrm{e}^x}\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}} = \mathrm{e}^{x+\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}}.$$

........................................................................................................................................................

**12.16 a)** La fonction $f$ est de la forme $u \times \exp(v)$ (produit avec une composée) où $u(x) = 4x$ et $v(x) = 2x - x^3$, qui définissent des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. On a donc, par dérivée du produit puis de la composée,

$$f' = u'\exp(v) + u(\exp(v))' = u'\exp(v) + u \times v'\exp(v) = \big(u' + uv'\big)\exp(v).$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a$u'(x) = 4$ et $v'(x) = 2 - 3x^2$, et donc

$$f'(x) = \Big(4 + 4x \times \big(2 - 3x^2\big)\Big)\mathrm{e}^{2x-x^3} = 4\big(1 + 2x - 3x^3\big)\mathrm{e}^{2x-x^3}.$$

........................................................................................................................................................

**12.16 b)** La fonction $f$ est un produit de deux composée de la forme $\exp(u)\exp(v)$ avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = 2x-1$, deux expressions de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Toutefois, les propriétés algébriques de la fonction exponentielle permettent de réécrire $f$ sous la forme $\exp(w)$ avec $w(x) = x^2 + 2x - 1$ puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{e}^{2x-1} = \mathrm{e}^{x^2+2x-1}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $w'(x) = 2x + 2 = 2(x+1)$ et donc $f'(x) = w'(x)\mathrm{e}^{w(x)} = 2(x+1)\mathrm{e}^{x^2+2x-1}$.

........................................................................................................................................................

**12.16 c)** La fonction $f$ est une somme dont un des termes est un produit avec une composée. Précisément, $f$ est de la forme $\exp(u) - v\exp(w)$ avec $u(x) = x^5$, $v(x) = 2x^3$ et $w(x) = 5x$. On a donc

$$\begin{aligned} f' &= \exp(u)' - (v\exp(w))' \\ &= u'\exp(u) - \big(v'\exp(w) + v\exp(w)'\big) \\ &= u'\exp(u) - \big(v'\exp(w) + v \times w'\exp(w)\big). \end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $u'(x) = 5x^4$, $v'(x) = 2 \times 3x^2 = 6x^2$ et $w'(x) = 5$, donc on a

$$f'(x) = 5x^4\mathrm{e}^{x^5} - \big(6x^2 + 5 \times 2x^3\big)\mathrm{e}^{5x} = 5x^4\mathrm{e}^{x^5} - 2x^2(5x+3)\mathrm{e}^{5x} = x^2\Big(5x^2\mathrm{e}^{x^5} - 2(5x+3)\mathrm{e}^{5x}\Big).$$

........................................................................................................................................................

**12.16** d) Les propriétés algébriques de la fonction exponentielle donnent, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \mathrm{e}^{x^3+2x}\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^{x^3+2x+\mathrm{e}^x}.$$

Ainsi, $f$ est une composée $\exp(u)$ avec $u(x) = x^3 + 2x + \mathrm{e}^x$.

On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 3x^2 + 2 + \mathrm{e}^x$ et donc $f'(x) = u'(x)\exp(u(x)) = \left(3x^2 + 2 + \mathrm{e}^x\right)\mathrm{e}^{x^3+2x+\mathrm{e}^x}$.

........................................................................................................................................

**12.17** a) Posons, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \exp(x) + \exp(2x) + \exp(3x) + \cdots + \exp(nx).$$

D'après les propriétés algébriques de la fonction exponentielle, on a aussi

$$f(x) = \exp(x) + \exp(x)^2 + \exp(x)^3 + \cdots + \exp(x)^n.$$

Ainsi, $f$ est une somme de $n$ termes consécutifs en progression géométrique de raison $\mathrm{e}^x$.

Comme $x > 0$, on a $\mathrm{e}^x \neq 1$. On a donc

$$f(x) = \mathrm{e}^x \times \frac{(\mathrm{e}^x)^n - 1}{\mathrm{e}^x - 1} = \frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^{nx} - 1)}{\mathrm{e}^x - 1} = \frac{\mathrm{e}^{(n+1)x} - \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}.$$

........................................................................................................................................

**12.17** b) Avec les notations de la question précédente, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^{2x} + 3\mathrm{e}^{3x} + \cdots + n\mathrm{e}^{nx}.$$

........................................................................................................................................

**12.17** c) D'après les deux questions précédentes, la valeur de la somme

$$\exp(x) + 2\exp(2x) + 3\exp(3x) + \cdots + n\exp(nx)$$

est donnée par l'expression de la dérivée de la fonction $f$. Il nous reste à dériver cette expression, en remarquant que $f$ est un quotient $u/v$ avec $u(x) = \mathrm{e}^{(n+1)x} - \mathrm{e}^x$ et $v(x) = \mathrm{e}^x - 1$. Ainsi, pour tout $x > 0$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{\left(v(x)\right)^2} \\ &= \frac{\left((n+1)\mathrm{e}^{(n+1)x} - \mathrm{e}^x\right)(\mathrm{e}^x - 1) - \mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^{(n+1)x} - \mathrm{e}^x\right)}{(\mathrm{e}^x - 1)^2} \\ &= \frac{n\mathrm{e}^{(n+2)x} - (n+1)\mathrm{e}^{(n+1)x} + \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)^2}. \end{aligned}$$

........................................................................................................................................

# Fiche n° 13. Généralités sur les suites

## Réponses

**13.1** a) $\boxed{3^{20}}$

**13.1** b) $\boxed{-3^2}$

**13.1** c) $\boxed{-6^4}$

**13.2** a) $\boxed{\dfrac{4x+5}{6}}$

**13.2** b) $\boxed{\dfrac{5x}{6}}$

**13.2** c) $\boxed{\dfrac{3x+2}{5}}$

**13.3** a) $\boxed{9x^2+6x+1}$

**13.3** b) $\boxed{16x^2-24x+9}$

**13.4** a) $\boxed{1}$

**13.4** b) $\boxed{6}$

**13.4** c) $\boxed{13}$

**13.4** d) $\boxed{22}$

**13.5** a) $\boxed{-1}$

**13.5** b) $\boxed{\dfrac{3}{2}}$

**13.5** c) $\boxed{\dfrac{7}{3}}$

**13.5** d) $\boxed{\dfrac{11}{4}}$

**13.6** a) $\boxed{2n+1}$

**13.6** b) $\boxed{2n-3}$

**13.6** c) $\boxed{4n-1}$

**13.6** d) $\boxed{2n}$

**13.7** a) $\boxed{4n^2-2n}$

**13.7** b) $\boxed{n^2+n}$

**13.7** c) $\boxed{4n^2+2n}$

**13.8** a) $\boxed{\dfrac{1}{2n}}$

**13.8** b) $\boxed{\dfrac{-1}{2n+1}}$

**13.8** c) $\boxed{\dfrac{1}{4n}}$

**13.8** d) $\boxed{\dfrac{1}{2n+2}}$

**13.9** a) $\boxed{7}$

**13.9** b) $\boxed{15}$

**13.9** c) $\boxed{31}$

**13.9** d) $\boxed{63}$

**13.10** a) $\boxed{0}$

**13.10** b) $\boxed{-1}$

**13.10** c) $\boxed{0}$

**13.10** d) $\boxed{-1}$

**13.11** a) $\boxed{2}$

**13.11** b) $\boxed{6}$

**13.11** c) $\boxed{24}$

**13.11** d) $\boxed{120}$

**13.12** a) $\boxed{1}$

**13.12** b) $\boxed{3}$

**13.12** c) $\boxed{27}$

**13.12** d) $\boxed{729}$

**13.13** a) $\boxed{1}$

**13.13** b) $\boxed{2}$

**13.13** c) $\boxed{3}$

**13.13** d) $\boxed{4}$

**13.14** a) $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

**13.14** b) $\boxed{\dfrac{3}{4}}$

**13.14** c) $\boxed{\dfrac{15}{8}}$

**13.14** d) $\boxed{\dfrac{105}{16}}$

**13.15** a) $\boxed{2a+1}$

**13.15** b) $\boxed{4a+3}$

**13.15** c) $\boxed{8a+7}$

**13.15** d) $\boxed{16a+15}$

**13.16** a) $\boxed{1}$

**13.16** b) $\boxed{a}$

**13.16** c) $\boxed{a^3}$

**13.16** d) $\boxed{a^6}$

**13.17** $\boxed{\dfrac{13}{36}}$

**13.18** a) $\boxed{10}$

**13.18** b) $\boxed{8}$

## Corrigés

**13.6** a) On a $u_{n+1} = 2(n+1) - 1 = 2n + 2 - 1 = 2n + 1$.

**13.6** b) On a $u_{n-1} = 2(n-1) - 1 = 2n - 2 - 1 = 2n - 3$.

**13.6** c) On a $u_{2n} = 2(2n) - 1 = 4n - 1$.

**13.6** d) On a $u_n + 1 = 2n - 1 + 1 = 2n$.

**13.11** a) On a $u_1 = u_{0+1} = (0+2)u_0 = 2 \times 1 = 2$.

**13.11** b) On a $u_2 = u_{1+1} = (1+2)u_1 = 3 \times 2 = 6$.

**13.11** c) On a $u_3 = u_{2+1} = (2+2)u_2 = 4 \times 6 = 24$.

**13.11** d) On a $u_4 = u_{3+1} = (3+2)u_3 = 5 \times 24 = 120$.

**13.16** a) On a $w_1 = a^0 \times w_0$, d'où $w_1 = 1 \times 1$. Ainsi $w_1 = 1$.

**13.16** b) On a $w_2 = a^1 \times w_1$, d'où $w_2 = a \times 1$. Ainsi $w_2 = a$.

**13.16** c) On a $w_3 = a^2 \times w_2$, d'où $w_3 = a^2 \times a$. Ainsi $w_3 = a^3$.

**13.16** d) On a $w_4 = a^3 \times w_3$, d'où $w_4 = a^3 \times a^3$. Ainsi $w_4 = a^6$.

**13.17** On trouve $u_2 = \dfrac{1}{2}$, $u_3 = \dfrac{1}{3}$ et $u_4 = \dfrac{1}{4}$. La moyenne de $u_2$, $u_3$ et $u_4$ est : $\dfrac{u_2 + u_3 + u_4}{3} = \dfrac{13}{36}$.

**13.18** a) On résout l'équation $-6n + 64 = 4$ et on trouve $n = 10$.

**13.18** b) Résolvons l'équation $\dfrac{n^2 - 20}{n+3} = 4$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{n^2 - 20}{n+3} = 4 &\iff n^2 - 20 = 4(n+3)\\ &\iff n^2 - 20 = 4n + 12\\ &\iff n^2 - 4n - 32 = 0.\end{aligned}$$

On reconnaît une équation du second degré de discriminant 144. Les racines de $X^2 - 4X - 32$ sont $-4$ et 8. Le nombre $n$ étant un entier naturel, on ne garde que la racine positive. C'est-à-dire $n = 8$.

# Fiche n° 14. Suites arithmétiques

## Réponses

14.1 a) $\boxed{\dfrac{7}{6}}$

14.1 b) $\boxed{-\dfrac{1}{15}}$

14.1 c) $\boxed{\dfrac{16}{7}}$

14.1 d) $\boxed{\dfrac{12}{7}}$

14.2 a) $\boxed{9}$

14.2 b) $\boxed{-\dfrac{55}{6}}$

14.2 c) $\boxed{\dfrac{8}{11}}$

14.3 a) $\boxed{\left\{\dfrac{1}{3}-\sqrt{2}, \dfrac{1}{3}+\sqrt{2}\right\}}$

14.3 b) $\boxed{\left\{-\dfrac{3}{4}, \dfrac{5}{4}\right\}}$

14.3 c) $\boxed{\{3\}}$

14.3 d) $\boxed{\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}}$

14.4 a) $\boxed{10}$

14.4 b) $\boxed{14}$

14.4 c) $\boxed{18}$

14.4 d) $\boxed{406}$

14.5 a) $\boxed{-2}$

14.5 b) $\boxed{1}$

14.5 c) $\boxed{4}$

14.5 d) $\boxed{292}$

14.6 a) $\boxed{\dfrac{4}{3}}$

14.6 b) $\boxed{-\dfrac{2}{3}}$

14.6 c) $\boxed{-\dfrac{8}{3}}$

14.6 d) $\boxed{-\dfrac{44}{3}}$

14.7 a) $\boxed{-4}$

14.7 b) $\boxed{53}$

14.7 c) $\boxed{296}$

14.7 d) $\boxed{596}$

14.8 a) $\boxed{-\dfrac{16}{5}}$

14.8 b) $\boxed{\dfrac{83}{5}}$

14.8 c) $\boxed{\dfrac{3}{5}}$

14.8 d) $\boxed{\dfrac{163}{5}}$

14.9 a) $\boxed{\dfrac{5}{54}}$

14.9 b) $\boxed{\dfrac{37}{54}}$

14.10 a) $\boxed{11a}$

14.10 b) $\boxed{(n+1)a}$

14.11 a) $\boxed{\dfrac{1}{a}}$

14.11 b) $\boxed{a}$

14.12 $\boxed{\dfrac{4}{5}}$

14.13 a) $\boxed{3}$

14.13 b) $\boxed{1+3n}$

14.14 a) $\boxed{\dfrac{1}{4}}$

14.14 b) $\boxed{\dfrac{4+n}{4}}$

14.15 a) $\boxed{\dfrac{4}{3}}$

14.15 b) $\boxed{\dfrac{4n-13}{3}}$

## Corrigés

**14.3 a)** On a $\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2 = 2 \iff (x-\dfrac{1}{3}) = \pm\sqrt{2}$.

**14.3 c)** On a $x^2-6x+9=(x-3)^2$. Ainsi, on a $x^2-6x+9=0 \iff x=3$.

**14.3 d)** On a $(x-1)^2=(x+2)^2 \iff x^2-2x+1=x^2+4x+4 \iff -6x=3 \iff x=-\dfrac{1}{2}$.

**14.8 a)** On sait que $u_n = u_p + (n-p)\times r$. Donc $u_8 = u_3 + 5r$. D'où $5r = u_8 - u_3$. Ainsi $r = \dfrac{1}{5}(u_8-u_5) = -\dfrac{16}{5}$.

**14.9 a)** On a $u_{13} - u_7 = (13-7)r$. D'où $r = \dfrac{u_{13}-u_7}{6} = \dfrac{\frac{17}{9}-\frac{4}{3}}{6} = \dfrac{\frac{17}{9}-\frac{12}{9}}{6} = \dfrac{\frac{5}{9}}{6} = \dfrac{5}{54}$.

**14.9 b)** On a $u_7 = u_0 + 7r$. D'où $u_0 = u_7 - 7r = \dfrac{4}{3} - 7 \times \dfrac{5}{54} = \dfrac{4 \times 18}{3 \times 18} - \dfrac{35}{54} = \dfrac{72}{18} - \dfrac{35}{54} = \dfrac{37}{54}$.

**14.10 a)** On a $u_{10} = u_0 + 10 \times a = a + 10a = 11a$.

**14.10 b)** Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_n = a + n \times a = (n+1)a$.

**14.11 a)** Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{a^2 + (n+1-1)}{a} - \dfrac{a^2 + (n-1)}{a} = \dfrac{a^2 + n - a^2 - n + 1}{a} = \dfrac{1}{a}$.

**14.11 b)** On a $u_1 = \dfrac{a^2 + (1-1)}{a} = \dfrac{a^2}{a} = a$.

**14.12** Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{3 + 5a(n+1)}{2} - \dfrac{3 + 5an}{2} = \dfrac{5a}{2}$. De plus, $\dfrac{5a}{2} = 2 \iff 5a = 4 \iff a = \dfrac{4}{5}$.

**14.13 a)** Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $v_{n+1} - v_n = u_{n+1}^2 - u_n^2 = 3 + u_n^2 - u_n^2 = 3$. Ainsi, $(v_n)_n$ est arithmétique de raison 3.

**14.13 b)** On a $v_0 = u_0^2 = 1$. Donc, pour tout entier $n$, on a $v_n = 1 + 3n$.

**14.14 a)** Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{u_{n+1}-1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{1}{\frac{5u_n-1}{u_n+3} - \frac{u_n+3}{u_n+3}} - \frac{1}{u_n-1} \\ &= \frac{1}{\frac{4(u_n-1)}{u_n+3}} - \frac{1}{u_n-1} = \frac{u_n+3}{4(u_n-1)} - \frac{4}{4(u_n-1)} = \frac{u_n-1}{4(u_n-1)} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

**14.14 b)** Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $v_n = v_0 + n \times r = \dfrac{1}{u_0 - 1} + \dfrac{1}{4}n = \dfrac{1}{2-1} + \dfrac{1}{4}n = 1 + \dfrac{1}{4}n = \dfrac{4+n}{4}$.

**14.15 a)** Notons $r$ la raison de la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On a $u_4 = 1$, $u_3 = 1 - r$, $u_2 = 1 - 2r$ et $u_1 = 1 - 3r$. Donc,

$$\frac{1}{u_1u_2} + \frac{1}{u_2u_3} = \frac{1}{(1-3r)(1-2r)} + \frac{1}{(1-2r)(1-r)} = 2.$$

En multipliant par $(1-3r)(1-2r)(1-r)$, on obtient $(1-r) + (1-3r) = 2(1-3r)(1-2r)(1-r)$. Or, on a

$$(1-r) + (1-3r) - 2(1-3r)(1-2r)(1-r) = 12r^3 - 22r^2 + 8r = 2r(6r^2 - 11r + 4).$$

Ainsi, on a $r = 0$ ou $6r^2 - 11r + 4 = 0$. On ne peut pas avoir $r = 0$ car la raison est supposée non nulle dans l'énoncé. De plus, après calcul, on trouve que les racines de $6X^2 - 11X + 4$ sont $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{4}{3}$.

Si $r = \dfrac{1}{2}$, on a $u_3 = \dfrac{1}{2}$, puis $u_2 = 0$ ; c'est impossible car on doit avoir $u_2 \neq 0$.

Si $r = \dfrac{4}{3}$, $u_3 = 1 - \dfrac{4}{3} = -\dfrac{1}{3}$, puis $u_2 = -\dfrac{5}{3}$ et $u_1 = -3$. Et la relation est bien vérifiée car : $\dfrac{1}{3 \times \frac{5}{3}} + \dfrac{1}{\frac{5}{3} \times \frac{1}{3}} = 2$.

**14.15 b)** On a $u_n = u_0 + n \times r$. Or $u_0 = u_4 - 4r = 1 - 4 \times \dfrac{4}{3} = \dfrac{3}{3} - \dfrac{16}{3} = -\dfrac{13}{3}$. Donc $u_n = -\dfrac{13}{3} + \dfrac{4}{3}n = \dfrac{4n - 13}{3}$.

# Fiche n° 15. Suites géométriques

## Réponses

**15.1** a) ........ $\boxed{4x^2 - 12x + 9}$

**15.1** b) ........ $\boxed{49 - 64x^2}$

**15.1** c) .... $\boxed{-15x^2 + 48x - 36}$

**15.1** d) ........ $\boxed{5x^2 - 5x + 2}$

**15.2** a) ...... $\boxed{(2x-7)(2x+7)}$

**15.2** b) ..... $\boxed{3(1-3x)(3-x)}$

**15.2** c) ........ $\boxed{-3x\left(\frac{x}{2} + 2\right)}$

**15.2** d) .. $\boxed{\left(\frac{2x}{3} - \frac{5}{2}\right)\left(\frac{2x}{3} + \frac{5}{2}\right)}$

**15.2** e) ........ $\boxed{(11x-5)^2}$

**15.2** f) ...... $\boxed{(3x-7)(5x+2)}$

**15.3** a) ........ $\boxed{-\frac{9}{40}}$

**15.3** b) ........ $\boxed{\frac{\sqrt{2}-3}{5}}$

**15.4** a) ........ $\boxed{20}$

**15.4** b) ........ $\boxed{26}$

**15.5** a) ........ $\boxed{48}$

**15.5** b) ........ $\boxed{192}$

**15.6** a) ........ $\boxed{-\sqrt{3}^{n-1}}$

**15.6** b) ........ $\boxed{-3^{61}}$

**15.7** a) ........ $\boxed{16 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-6}}$

**15.7** b) ........ $\boxed{3^4}$

**15.8** a) ........ $\boxed{3}$

**15.8** b) ........ $\boxed{\frac{\sqrt{2}}{27}}$

**15.9** a) ........ $\boxed{4 \text{ ou } -4}$

**15.9** b) ........ $\boxed{\frac{3}{64}}$

**15.10** a) ........ $\boxed{\frac{4}{5}}$

**15.10** b) ........ $\boxed{-\frac{4}{5} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{41}}$

**15.11** a) ........ $\boxed{-\sqrt{2}}$

**15.11** b) ........ $\boxed{-\frac{5}{8}}$

**15.11** c) ........ $\boxed{-5 \times 2^{n-3}}$

**15.11** d) .... $\boxed{\begin{array}{c}(-1)^{n+1} \times 5 \\ \times 2^{n-3} \times \sqrt{2}^n\end{array}}$

**15.12** a) ........ $\boxed{\frac{2}{3}}$

**15.12** b) ........ $\boxed{17 \times 3^{n-2}}$

**15.12** c) ...... $\boxed{17 \times 3^{n-2} - \frac{2}{3}}$

**15.13** a) ........ $\boxed{\frac{1}{2} - 4q - 2q^2}$

**15.13** b) ........ $\boxed{q = -1}$

**15.13** c) ........ $\boxed{-\frac{1}{2}}$

**15.14** a) ........ $\boxed{1024}$

**15.14** b) ........ $\boxed{\frac{1}{3}}$

## Corrigés

**15.1 a)** On a $(2x-3)^2 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 3 + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9$.

---

**15.1 b)** On a $(7-8x)(8x+7) = (7-8x)(7+8x) = 7^2 - (8x)^2 = 49 - 64x^2$.

---

**15.1 c)** On a
$$\begin{aligned}-3(-x+2)(6-5x) &= (3x-6)(6-5x) = 3x \times 6 - 3x \times 5x - 6 \times 6 + 6 \times 5x \\ &= 18x - 15x^2 - 36 + 30x = -15x^2 + 48x - 36.\end{aligned}$$

---

**15.1 d)** On a $5\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 5\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4} = 5x^2 - 5x + \frac{5}{4} + \frac{3}{4} = 5x^2 - 5x + 2$.

---

**15.2 a)** On a $4x^2 - 49 = (2x)^2 - 7^2 = (2x-7)(2x+7)$.

---

**15.2 b)** On a $(5-3x)^2 - 16 = (5-3x)^2 - 4^2 = (5-3x-4)(5-3x+4) = (1-3x)(9-3x) = 3(1-3x)(3-x)$.

---

**15.2 c)** On a $-\dfrac{3}{2}x^2 - 6x = -3x \times \dfrac{x}{2} - 3x \times 2 = -3x\left(\dfrac{x}{2} + 2\right)$.

**15.2 d)** On a $\dfrac{4}{9}x^2 - \dfrac{25}{4} = \left(\dfrac{2x}{3}\right)^2 - \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{2x}{3} - \dfrac{5}{2}\right)\left(\dfrac{2x}{3} + \dfrac{5}{2}\right)$.

**15.2 e)** On a $121x^2 - 110x + 25 = (11x)^2 - 2 \times 11x \times 5 + 5^2 = (11x - 5)^2$.

**15.2 f)** On a $(3x-7)(x+5) - (3x-7)(-4x+3) = (3x-7)\big((x+5) - (-4x+3)\big) = (3x-7)(5x+2)$.

**15.3 a)** On a $f\left(\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{\frac{3}{4}}{2} - \dfrac{3}{5} = \dfrac{3}{8} - \dfrac{3}{5} = \dfrac{15}{40} - \dfrac{24}{40} = -\dfrac{9}{40}$.

**15.3 b)** On a $f\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{5}\right) = \dfrac{\frac{2\sqrt{2}}{5}}{2} - \dfrac{3}{5} = \dfrac{\sqrt{2}}{5} - \dfrac{3}{5} = \dfrac{\sqrt{2} - 3}{5}$.

**15.4 a)** On a les équivalences suivantes :

$$-\frac{1}{4}x + 5 = 0 \iff \frac{1}{4}x = 5 \iff x = 5 \times 4 = 20.$$

L'antécédent de 0 par la fonction $f$ est 20.

**15.4 b)** On a les équivalences suivantes :

$$-\frac{1}{4}x + 5 = -\frac{3}{2} \iff \frac{1}{4}x = 5 + \frac{3}{2} \iff x = \frac{13}{2} \times 4 = 26.$$

L'antécédent de $-\dfrac{3}{2}$ par la fonction $f$ est 26.

**15.5 a)** On a $u_4 = u_0 \times q^4 = 3 \times 2^4 = 48$.

**15.5 b)** On a $u_6 = u_0 \times q^6 = 3 \times 2^6 = 192$.

**15.6 a)** On a $u_n = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \times \sqrt{3}^n = -\sqrt{3}^{n-1}$.

**15.6 b)** On a $u_{123} = u_0 \times q^{123}$. Donc, $u_{123} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \times \sqrt{3}^{123} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}^{122}$. Donc, $u_{123} = -3^{61}$.

**15.7 a)** On a $u_n = u_6 \times q^{n-6} = 16 \times \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-6}$.

**15.7 b)** On a $u_{10} = 16 \times \left(\dfrac{3}{2}\right)^4 = 3^4$.

**15.8 a)** On a $u_6 = u_3 \times q^3$ donc $q^3 = \dfrac{u_6}{u_3} = 27$ donc $q = 3$.

**15.8 b)** On a $u_0 = u_3 \times q^{-3} = 3^{-3} \times \sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{3^3} = \dfrac{\sqrt{2}}{27}$.

**15.9 a)** On a $q^2 = \dfrac{u_4}{u_2} = \dfrac{12}{\frac{3}{4}} = 16$ donc $q = 4$ ou $q = -4$.

**15.9 b)** On a $u_0 = u_2 \times q^{-2}$. Donc, on a $u_0 = \dfrac{3}{4^3} = \dfrac{3}{64}$.

**15.10 a)** Supposons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique. On a $u_{42}^2 = u_{41} \times u_{43}$. En effet, si on note $q$ la raison de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a alors $u_{42}^2 = u_0^2 q^{84}$ et $u_{41} \times u_{43} = u_0 q^{41} \times u_0 q^{43}$. Donc, on a $(a-2)^2 = a(a+1)$ donc $a^2 - 4a + 4 = a^2 + a$ donc $5a = 4$ et donc $a = \dfrac{4}{5}$.

**15.10 b)** On a $q = \dfrac{u_{42}}{u_{41}} = \dfrac{a-2}{a} = -\dfrac{3}{2}$. Donc, on a $u_0 = u_{41} \times q^{-41} = -\dfrac{4}{5} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^{41}$.

**15.11 a)** On a $u_9 = u_6 \times q^3$ donc $q^3 = \dfrac{u_9}{u_6} = \dfrac{10\sqrt{2}}{-5} = -2\sqrt{2}$. On en déduit que $q = \sqrt[3]{-2\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$.

**15.11 b)** On a $u_6 = u_0 \times q^6$ donc $u_0 = \dfrac{u_6}{q^6} = \dfrac{-5}{(-\sqrt{2})^6} = -\dfrac{5}{8}$.

**15.11 c)** Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{2n} = u_0 \times q^{2n} = -\dfrac{5}{8} \times (-\sqrt{2})^{2n} = -5 \times 2^{-3} \times 2^n = -5 \times 2^{n-3}$.

**15.11 d)** Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{3n} = u_0 \times q^{3n} = -\dfrac{5}{8} \times (-\sqrt{2})^{3n} = -5 \times 2^{-3} \times (-\sqrt{2})^{2n} \times (-\sqrt{2})^n$. On obtient

$$u_{3n} = -5 \times 2^{n-3} \times (-1)^n \times \sqrt{2}^n = (-1)^{n+1} \times 5 \times 2^{n-3} \times \sqrt{2}^n.$$

**15.12 a)** On a $v_{n+1} = u_{n+1} + x = 3u_n + \dfrac{4}{3} + x$, et $3v_n = 3(u_n + x) = 3u_n + 3x$. Donc, pour que la condition soit vérifiée, il faut que

$$3u_n + \frac{4}{3} + x = 3u_n + 3x \text{ donc que } \frac{4}{3} + x = 3x \text{ donc que } x = \frac{2}{3}.$$

**15.12 b)** La suite $(v_n)_n$ est une suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $v_1 = u_1 + \dfrac{2}{3} = 5 + \dfrac{2}{3} = \dfrac{17}{3}$. Donc, on a $v_n = v_1 \times q^{n-1} = \dfrac{17}{3} \times 3^{n-1} = 17 \times 3^{n-2}$.

**15.12 c)** On a $u_n = v_n - x = 17 \times 3^{n-2} - \dfrac{2}{3}$.

**15.13 a)** On a $u_1 = \dfrac{1}{2}$, $u_2 = u_1 \times q = \dfrac{q}{2}$ et $u_3 = u_2 \times q = \dfrac{q^2}{2}$. Donc, on a $u_1 - 8u_2 - 4u_3 = \dfrac{1}{2} - 4q - 2q^2$.

**15.13 b)** On a $u_1 - 8u_2 - 4u_3 = -2(q+1)^2 + \dfrac{5}{2} \leqslant \dfrac{5}{2}$, pour tout $q$. Donc, l'expression $u_1 - 8u_2 - 4u_3$ est maximale si, et seulement si, $q = -1$.

**15.13 c)** On a $u_8 = u_1 \times q^7 = \dfrac{1}{2} \times (-1)^7 = -\dfrac{1}{2}$.

**15.14 a)** On a $2^{10} = 1024$.

**15.14 b)** On a $u_0 + u_1 + \cdots + u_9 = u_0 \times \dfrac{1-q^{10}}{1-q}$. En plus $u_0 + u_1 + \cdots + u_9 = 341$ et $q = 2$.

Donc $a = u_0 = \dfrac{341 \times (1-2)}{1-2^{10}} = \dfrac{341}{1023} = \dfrac{1}{3}$.

# Fiche n$^{\text{o}}$ 16. Calcul de sommes I

## Réponses

**16.1** a) ............ $\boxed{-4\sqrt{5}}$

**16.1** b) ............ $\boxed{16\sqrt{2}}$

**16.1** c) ............ $\boxed{2\sqrt{6}}$

**16.2** a) ............ $\boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

**16.2** b) ............ $\boxed{\dfrac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{3}}$

**16.2** c) ............ $\boxed{\dfrac{7-2\sqrt{10}}{3}}$

**16.2** d) ............ $\boxed{\dfrac{2\sqrt{2}-1}{7}}$

**16.3** a) ............ $\boxed{\dfrac{m^2-m-1}{m(m+1)}}$

**16.3** b) ............ $\boxed{\dfrac{m^2-6}{2m(m-2)}}$

**16.3** c) ............ $\boxed{\dfrac{3m^2-m+2}{m(m+1)(m-1)}}$

**16.4** a) ............ $\boxed{\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}}$

**16.4** b) ............ $\boxed{\dfrac{n^2+n-2}{2}}$

**16.4** c) ............ $\boxed{\dfrac{n(n+3)}{2}}$

**16.4** d) ............ $\boxed{\dfrac{n(n-1)}{2}}$

**16.4** e) ............ $\boxed{\dfrac{3n(n+1)}{2}}$

**16.5** a) ............ $\boxed{512}$

**16.5** b) ............ $\boxed{-497}$

**16.6** a) ............ $\boxed{174\ 762}$

**16.6** b) ............ $\boxed{-398\ 520}$

**16.7** a) ............ $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{10} \frac{2^k}{3^{k+1}}}$

**16.7** b) ............ $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{9} \frac{2^{1-k}}{3^{k+2}}}$

**16.7** c) ............ $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{35} \left(-(-2)^k\right)}$

**16.7** d) ............ $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{2k}}$

**16.8** a) ............ $\boxed{n}$

**16.8** b) ............ $\boxed{2^{n+1}-2}$

**16.8** c) ............ $\boxed{2^{2n+1}-1}$

**16.8** d) ............ $\boxed{2^n(2^{n+1}-1)}$

**16.8** e) ............ $\boxed{\dfrac{3^{n+1}-1}{2}}$

**16.8** f) ............ $\boxed{0}$

**16.9** a) ............ $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}}$

**16.9** b) ............ $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-2)^k}$

**16.9** c) ............ $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}}$

**16.9** d) ............ $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k+1}}{3\times 5^k}}$

**16.10** a) ............ $\boxed{3n+2(2^n-1)}$

**16.10** b) ............ $\boxed{2n+2+\dfrac{5}{2}(3^{n+1}-1)}$

**16.10** c) ............ $\boxed{2(2^n-1)+\dfrac{3}{2}(3^n-1)}$

**16.10** d) .................. $\boxed{n(n+1)+\dfrac{3}{2}(3^n-1)}$

**16.10** e) ......... $\boxed{n+1+\dfrac{1-4^{n+1}}{3}+\dfrac{5n(n+1)}{2}}$

**16.11** ............................... $\boxed{1\ 000\ 000}$

**16.12** a) .................... $\boxed{k^3+3k^2+3k+1}$

**16.12** b) .................. $\boxed{3\,\mathsf{S}_2(n)+3\,\mathsf{S}_1(n)+n}$

**16.12** c) ........................... $\boxed{(n+1)^3-1}$

**16.12** d) .................... $\boxed{\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

**16.13** ............................. $\boxed{\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}}$

**16.14** a) ............................. $\boxed{2^k(k+2)}$

**16.14** b) ........................ $\boxed{2^{n+1}(n+1)}$

## Corrigés

**16.1 a)** On a $\sqrt{45}-7\sqrt{5}=3\sqrt{5}-7\sqrt{5}=-4\sqrt{5}$.

**16.2 a)** On a $\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

**16.2 b)** On a $\dfrac{2-\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\dfrac{(2-\sqrt{6})\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{18}}{3}=\dfrac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{3}$.

**16.2 c)** On a $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})}=\dfrac{5-2\sqrt{10}+2}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}=\dfrac{7-2\sqrt{10}}{3}$.

**16.2 d)** On a $\dfrac{\sqrt{2}-1}{3-\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{2}-1)(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}=\dfrac{3\sqrt{2}+2-3-\sqrt{2}}{9-2}=\dfrac{2\sqrt{2}-1}{7}$.

**16.4 a)** On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}k=\sum_{k=1}^{n}k+n+1=\frac{n(n+1)}{2}+n+1=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{2\times(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

**16.4 b)** On a $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}k=\sum_{k=1}^{n}k-1=\frac{n(n+1)}{2}-1=\frac{n(n+1)-2}{2}$.

**16.5 a)** On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{15}u_k=\frac{16\times(u_0+u_{15})}{2}$. Or $u_{15}=u_0+15r=2+15\times4=62$ donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{15}u_k=\frac{16\times(2+62)}{2}=512$.

**16.5 b)** On a $\displaystyle\sum_{k=5}^{18}u_k=\frac{14\times(u_5+u_{18})}{2}=\frac{14\times\big(-16+(-55)\big)}{2}=-497$.

**16.6 a)** On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{8}u_k=\frac{u_0\times(1-q^9)}{1-q}=\frac{2(1-4^9)}{1-4}=174\ 762$.

**16.6 b)** On a $\displaystyle\sum_{k=5}^{12}u_k=\frac{u_5(1-q^8)}{1-q}$. Or $u_5=-1\times(-3)^5=243$. D'où $\displaystyle\sum_{k=5}^{12}u_k=\frac{243(1-(-3)^8)}{1-(-3)}=-398\ 520$.

**16.10 a)** On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3+2^k)=\sum_{k=1}^{n}3+\sum_{k=1}^{n}2^k=3\times\sum_{k=1}^{n}1+\frac{2(1-2^n)}{1-2}=3n+2(2^n-1)$.

**16.10** b) On a

$$\sum_{k=0}^{n}(2+5\times 3^k)=\sum_{k=0}^{n}2+\sum_{k=0}^{n}(5\times 3^k)=2\sum_{k=0}^{n}1+5\sum_{k=0}^{n}3^k=2(n+1)+5\times\frac{3^0(1-3^{n+1})}{1-3}=2n+2+\frac{5}{2}(3^{n+1}-1).$$

**16.11** Le plus grand entier impair compris entre 1 et 2 000 est 1 999 = 2 × 999 + 1. La somme de tous les entiers impairs compris entre 1 et 2 000 est donc

$$\sum_{k=0}^{999}(2k+1)=2\times\sum_{k=0}^{999}k+\sum_{k=0}^{999}1=2\times\frac{999\times 1\,000}{2}+1\,000=1\,000\,000.$$

**16.12** b) On a $\sum_{k=1}^{n}\big((k+1)^3-k^3\big)=\sum_{k=1}^{n}(k^3+3k^2+3k+1-k^3)=\sum_{k=1}^{n}(3k^2+3k+1)=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1.$

On a donc $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3-\sum_{k=1}^{n}k^3=3\,\mathsf{S}_2(n)+3\,\mathsf{S}_1(n)+n.$

**16.12** c) Après simplification, on a $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3-\sum_{k=1}^{n}k^3=\sum_{k=2}^{n+1}k^3-\sum_{k=1}^{n}k^3=(n+1)^3-1^3.$

**16.12** d) On a donc $(n+1)^3-1=3\,\mathsf{S}_2(n)+3\,\mathsf{S}_1(n)+n$. Donc, on a

$$\begin{aligned}\mathsf{S}_2(n)&=\frac{(n+1)^3-1-n-3\mathsf{S}_1(n)}{3}\\&=\frac{(n+1)^3-(n+1)-3\times\frac{n(n+1)}{2}}{3}=\frac{(n+1)\big((n+1)^2-1-\frac{3}{2}n\big)}{3}\\&=\frac{(n+1)(n^2+\frac{1}{2}n)}{3}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.\end{aligned}$$

**16.13** On a $(k+1)^4=k^4+4k^3+6k^2+4k+1$ donc $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^4=\sum_{k=1}^{n}(k^4+4k^3+6k^2+4k+1)$. Donc,

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^4-\sum_{k=1}^{n}k^4=4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\sum_{k=1}^{n}k^2+4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1.$$

Dans le membre de gauche, on enlève tous les termes qui se simplifient et on obtient alors :

$$(n+1)^4-1^4=4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+4\times\frac{n(n+1)}{2}+n.$$

D'où $\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{1}{4}\big((n+1)^4-1-n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)-n\big)=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$, après calcul.

**16.14** a) On a $u_{k+1}-u_k=(k+1)\times 2^{k+1}-k\times 2^k=2^k(2k+2-k)=2^k(k+2).$

**16.14** b) On a $\sum_{k=0}^{n}(k+2)2^k=\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k)=\sum_{k=1}^{n+1}u_k-\sum_{k=0}^{n}u_k=u_{n+1}-u_0=(n+1)2^{n+1}-0\times 2^0=2^{n+1}(n+1).$

# Fiche n° 17. Calcul de sommes II

## Réponses

**17.1** a) ............ $\boxed{-2 - x + x^2}$

**17.1** b) ............ $\boxed{\frac{2}{3} + \frac{14}{3}x - \frac{5}{2}x^2}$

**17.1** c) ............ $\boxed{-15 + 13x - 2x^2}$

**17.2** a) ............ $\boxed{\frac{x^2}{x-1}}$

**17.2** b) ............ $\boxed{\frac{14-2x}{x-1}}$

**17.3** a) ............ $\boxed{5}$

**17.3** b) ............ $\boxed{b^4 + ab^3 + a^2b^2 + a^3b + a^4}$

**17.3** c) ............ $\boxed{a^5 - b^5}$

**17.4** a) ............ $\boxed{7}$

**17.4** b) ... $\boxed{a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6}$

**17.4** c) ............ $\boxed{a^7 + b^7}$

**17.5** a) ............ $\boxed{7}$

**17.5** b) ............ $\boxed{a^6 - a^5 + a^4 - a^3 + a^2 - a + 1}$

**17.5** c) ............ $\boxed{a^7 + 1}$

**17.6** ............ $\boxed{1 - b^{n+1}}$

**17.7** a) ............ $\boxed{120}$

**17.7** b) ............ $\boxed{231}$

**17.7** c) ............ $\boxed{(N+1)^2}$

**17.8** a) ............ $\boxed{\frac{25}{2}}$

**17.8** b) ............ $\boxed{148}$

**17.8** c) ............ $\boxed{12N^2 - 5N - 2}$

**17.9** ............ $\boxed{\text{(c)}}$

**17.10** a) ............ $\boxed{\frac{4}{9} - \frac{1}{9}(-2)^{n+1}}$

**17.10** b) ............ $\boxed{\frac{1 - 2^{n+1}}{1 - \sqrt{2}}}$

**17.10** c) ............ $\boxed{9\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{2n} - 1\right)}$

**17.10** d) ............ $\boxed{\frac{2^p(1 - 2^{np})}{1 - 2^p}}$

**17.11** a) ............ $\boxed{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}$

**17.11** b) ............ $\boxed{\frac{9}{7}\left(\left(\frac{9}{2}\right)^{3n} - 1\right)}$

**17.11** c) ............ $\boxed{\frac{3}{2} + \frac{3^{n+1}}{2} - 2^{n+2}}$

**17.11** d) ............ $\boxed{\frac{9}{2} - \frac{1 + 2^n}{3^n}}$

**17.12** a) ............ $\boxed{5}$

**17.12** b) ............ $\boxed{5 - 4 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n}$

**17.12** c) ............ $\boxed{20\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} - 20}$

**17.12** d) ............ $\boxed{5n - 15 + 20\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}}$

**17.13** a) ............ $\boxed{4}$

**17.13** b) ............ $\boxed{4 - 5 \times 2^n}$

**17.13** c) ............ $\boxed{4n + 9 - 5 \times 2^{n+1}}$

**17.14** a) ............ $\boxed{u_0 = 0}$

**17.14** b) ............ $\boxed{u_1 = 9}$

**17.14** c) ............ $\boxed{\sum_{k=n+1}^{p} u_k}$

**17.14** d) ............ $\boxed{6n + 3}$

**17.15** a) ............ $\boxed{\frac{1}{6}}$

**17.15** b) ............ $\boxed{\frac{p^2 - p + 1}{p^2(p-1)}}$

**17.15** c) .............................. $\boxed{\dfrac{1}{n(n-1)}}$

**17.16** a) .............................. $\boxed{\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}}$

**17.16** b) ...................... $\boxed{f'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}}$

**17.16** c) ........ $\boxed{f'(x) = \dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}}$

**17.16** d) ...... $\boxed{\mathsf{S}(x) = \dfrac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(x-1)^2}}$

**17.17** a) .............................. $\boxed{u_3 = -\dfrac{5}{6}}$

**17.17** b) ...................... $\boxed{\dfrac{-1}{(2n+2)(2n+1)}}$

**17.17** c) ...................... $\boxed{\dfrac{1}{(2n+2)(2n+3)}}$

**17.17** d) .................................. $\boxed{\dfrac{-1}{2n+1}}$

**17.17** e) .................................... $\boxed{b}$

**17.17** f) .................................... $\boxed{a}$

## Corrigés

**17.1 a)** On a $(x+1)(x-2) = x^2 - 2x + x - 2 = -2 - x + x^2$.

**17.1 b)** On a $(2-x)(\frac{1}{3}+\frac{5}{2}x) = \frac{2}{3} + 5x - \frac{1}{3}x - \frac{5}{2}x^2 = \frac{2}{3} + \frac{15-1}{3}x - \frac{5}{2}x^2 = \frac{2}{3} + \frac{14}{3}x - \frac{5}{2}x^2$.

**17.1 c)** On a $2(x-5)(\frac{3}{2}-x) = (x-5)(3-2x) = 3x - 2x^2 - 15 + 10x = -15 + 13x - 2x^2$.

**17.2 a)** On a $x + 1 - \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{(x+1)(1-x)}{1-x} - \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{1-x^2}{1-x} - \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{-x^2}{1-x} = \dfrac{x^2}{x-1}$.

**17.2 b)** On a

$$\begin{aligned} x - 4 - \frac{(x-5)(2+x)}{x-1} = \frac{(x-4)(x-1)}{x-1} - \frac{(x-5)(2+x)}{x-1} &= \frac{x^2-4x-x+4-(2x-10+x^2-5x)}{x-1} \\ &= \frac{x^2-5x+4-(x^2-3x-10)}{x-1} \\ &= \frac{-2x+14}{x-1} = \frac{14-2x}{x-1}. \end{aligned}$$

**17.3 b)** On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} a^k b^{4-k} = a^0b^4 + a^1b^3 + a^2b^2 + a^3b^1 + a^4b^0 = b^4 + ab^3 + a^2b^2 + a^3b + a^4$.

**17.3 c)** On a

$$\begin{aligned} (a-b)\sum_{k=0}^{4} a^k b^{4-k} &= (a-b)(b^4 + ab^3 + a^2b^2 + a^3b + a^4) \\ &= ab^4 + a^2b^3 + a^3b^2 + a^4b + a^5 - b^5 - ab^4 - a^2b^3 - a^3b^2 - a^4b = a^5 - b^5. \end{aligned}$$

**17.4 b)** On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{6}(-1)^k a^{6-k} b^k &= (-1)^0a^6b^0 + (-1)^1a^5b^1 + (-1)^2a^4b^2 + (-1)^3a^3b^3 + (-1)^4a^2b^4 + (-1)^5a^1b^5 + (-1)^6a^0b^6 \\ &= a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6. \end{aligned}$$

**17.4 c)** On a

$$\begin{aligned}(a+b)\sum_{k=0}^{6}(-1)^k a^{6-k}b^k &= (a-b)(a^6-a^5b+a^4b^2-a^3b^3+a^2b^4-ab^5+b^6)\\ &= a^7-a^6b+a^5b^2-a^4b^3+a^3b^4-a^2b^5+ab^6+a^6b-a^5b^2+a^4b^3-a^3b^4+a^2b^5-ab^6+b^7\\ &= a^7+b^7.\end{aligned}$$

**17.5 b)** On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{6}a^k(-1)^{6-k} &= a^0(-1)^6+a^1(-1)^5+a^2(-1)^4+a^3(-1)^3+a^4(-1)^2+a^5(-1)^1+a^6(-1)^0\\ &= 1-a+a^2-a^3+a^4-a^5+a^6.\end{aligned}$$

**17.5 c)** On a

$$\begin{aligned}(a+1)\sum_{k=0}^{6}a^k(-1)^{6-k} &= (a+1)(1-a+a^2-a^3+a^4-a^5+a^6)\\ &= a-a^2+a^3-a^4+a^5-a^6+a^7+1-a+a^2-a^3+a^4-a^5+a^6 = a^7+1.\end{aligned}$$

**17.6** On écrit

$$\begin{aligned}(1-b)\sum_{k=0}^{n}b^k &= \sum_{k=0}^{n}b^k - b\sum_{k=0}^{n}b^k = \sum_{k=0}^{n}b^k - \sum_{k=0}^{n}b^{k+1}\\ &= \left(1+b+b^2+\cdots+b^n\right)-\left(b+b^2+\cdots+b^n+b^{n+1}\right) = 1-b^{n+1}.\end{aligned}$$

**17.7 a)** Pour commencer, on a $u_1 = u_0 + r = 1+2 = 3$ et $u_{10} = u_0 + 10\times 2 = 1+20 = 21$. Donc, on a

$$\sum_{n=1}^{10}u_n = \frac{(3+21)\times 10}{2} = \frac{240}{2} = 120.$$

**17.7 b)** Pour commencer, on a $u_5 = 1+5\times 2 = 11$ et $u_{15} = 1+15\times 2 = 31$. Donc, on a

$$\sum_{n=5}^{15}u_n = \frac{(11+31)\times 11}{2} = \frac{462}{2} = 231.$$

**17.7 c)** Pour commencer, on a $u_N = 1+N\times 2 = 2N+1$. Donc, on a

$$\sum_{n=0}^{N}u_n = \frac{(u_0+u_N)(N+1)}{2} = \frac{(1+2N+1)(N+1)}{2} = \frac{(2N+2)(N+1)}{2} = (N+1)^2.$$

**17.8 a)** Pour commencer, on a $u_1 = -2+\dfrac{3}{2} = \dfrac{-1}{2}$ et $u_5 = -2+5\times\dfrac{3}{2} = \dfrac{-4+15}{2} = \dfrac{11}{2}$. Donc, on a

$$\sum_{n=1}^{5}u_n = \frac{\left(\frac{-1}{2}+\frac{11}{2}\right)\times 5}{2} = \frac{25}{2}.$$

**17.8 b)** On a $\displaystyle\sum_{n=0}^{15}u_n = \frac{(u_0+u_{15})\times 16}{2} = (-2+(-2)+15\times\frac{3}{2})\times 8 = (-4+\frac{45}{2})\times 8 = 148.$

**17.8 c)** On a
$$\sum_{n=0}^{4N} u_n = \frac{(-2-2+4N\times\frac{3}{2})\times(4N+1)}{2} = \frac{(-4+6N)(4N+1)}{2} = (3N-2)(4N+1) = 12N^2-5N-2.$$

**17.9** On a $S = \sum_{k=5}^{10} u_k = u_5 + q\,u_5 + q^2u_5 + q^3u_5 + q^4u_5 + q^5u_5 = u_5\sum_{k=0}^{5} q^k = u_5\dfrac{1-q^6}{1-q}$.

**17.10 a)** On a
$$S = \sum_{k=2}^{n} u_k = u_2\sum_{k=0}^{n-2} u_k = \left(\frac{1}{3}\times(-2)^2\right)\frac{1-(-2)^{n-2+1}}{1-(-2))} = \frac{4}{3}\times\frac{1-(-2)^{n-1}}{3} = \frac{4}{9}-\frac{1}{9}(-2)^{n-1+2} = \frac{4}{9}-\frac{1}{9}(-2)^{n+1}.$$

**17.10 b)** On a $S = \sum_{k=0}^{2n+1} u_k = u_0\dfrac{1-q^{2n+2}}{1-q} = 1\times\dfrac{1-\sqrt{2}^{2n+2}}{1-\sqrt{2}} = \dfrac{1-2^{n+1}}{1-\sqrt{2}}$.

**17.10 c)** On a $S = \sum_{k=1}^{2n} u_k = u_1\sum_{k=0}^{2n-1} = 3\times\dfrac{3}{2}\dfrac{1-(\frac{3}{2})^{2n-1+1}}{1-\frac{3}{2}} = \dfrac{9}{2}\times\dfrac{1-(\frac{3}{2})^{2n}}{-\frac{1}{2}} = -9\left(1-\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2n}\right) = 9\left(\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2n}-1\right)$.

**17.10 d)** On a $S = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1\sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0\,q\dfrac{1-q^{n-1+1}}{1-q} = 2^p\dfrac{1-(2^p)^n}{1-2^p} = \dfrac{2^p(1-2^{np})}{1-2^p}$.

**17.11 a)** On a $S = \sum_{k=0}^{n}\dfrac{2^k}{3^{k+1}} = \dfrac{1}{3}\sum_{k=0}^{n}\left(\dfrac{2}{3}\right)^k = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{1-(\frac{2}{3})^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{3}\times 3\times\left(1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}\right) = 1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}$.

**17.11 b)** On a
$$S = \sum_{k=1}^{3n}\frac{3^{2k}}{2^k} = \sum_{k=1}^{3n}\left(\frac{3^2}{2}\right)^k = \frac{9}{2}\sum_{k=0}^{3n-1}\left(\frac{9}{2}\right)^k = \frac{9}{2}\times\frac{1-(\frac{9}{2})^{3n-1+1}}{1-\frac{9}{2}} = \frac{9}{2}\times\frac{-2}{7}\left(1-\left(\frac{9}{2}\right)^{3n}\right)$$
$$= \frac{-9}{7}\left(1-\left(\frac{9}{2}\right)^{3n}\right) = \frac{9}{7}\left(\left(\frac{9}{2}\right)^{3n}-1\right).$$

**17.11 c)** On a
$$S = \sum_{k=0}^{n}(3^k-2^{k+1}) = \sum_{k=0}^{n}3^k - 2\sum_{k=0}^{n}2^k = \frac{1-3^{n+1}}{1-3} - 2\times\frac{1-2^{n+1}}{1-2} = \frac{-1}{2}(1-3^{n+1}) + 2(1-2^{n+1})$$
$$= \frac{3}{2}+\frac{3^{n+1}}{2}-2^{n+2}.$$

**17.11 d)** On a
$$S = \sum_{k=0}^{n}\frac{2}{3^k} + \sum_{k=0}^{n}\frac{2^{k-1}}{3^k} = 2\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k = 2\times\frac{1-(\frac{1}{3})^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}\times\frac{1-(\frac{2}{3})^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}$$
$$= 2\times\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right) + \frac{3}{2}\left(1-\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}\right)$$
$$= \frac{9}{2}-\frac{1}{3^n}-\frac{2^n}{3^n} = \frac{9}{2}-\frac{1+2^n}{3^n}.$$

**17.12 b)** Pour commencer, on a $v_0 = u_0-\alpha = 1-5 = -4$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n = v_0\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^n = -4\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^n$.

Puis, on a $u_n = v_n+\alpha = -4\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^n + 5 = 5-4\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^n$.

**17.12 c)** On a

$$\sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n}\left(-4\times\left(\frac{4}{5}\right)^k\right) = -4\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{4}{5}\right)^k = -4\times\frac{1-(\frac{4}{5})^{n+1}}{1-\frac{4}{5}} = -4\times 5\left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}\right) = 20\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} - 20.$$

**17.12 d)** On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n}(5+v_k) = \sum_{k=0}^{n} 5 + \sum_{k=0}^{n} v_k = 5(n+1) + 20\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} - 20 = 5n - 15 + 20\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$.

**17.13 a)** On a l'équivalence $\lambda = 2\lambda - 4 \iff (1-2)\lambda = -4 \iff \lambda = 4$.

**17.13 b)** Pour commencer on vérifie que la suite $(v_n)_n$ définie par $v_n = u_n - 4$ est géométrique : on a

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 4 = 2u_n - 4 - 4 = 2(u_n - 4) = 2v_n.$$

La suite $(v_n)_n$ est donc géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 4 = -1 - 4 = -5$.
On a donc $u_n = v_n + 4 = v_0 \times 2^n + 4 = -5\times 2^n + 4 = 4 - 5\times 2^n$.

**17.13 c)** On a

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} 4 - 5\sum_{k=0}^{n} 2^k = 4(n+1) - 5\times\frac{1-2^{n+1}}{1-2} = 4n + 4 + 5(1-2^{n+1}) = 4n + 9 - 5\times 2^{n+1}.$$

**17.14 a)** On a $\mathsf{S}(0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{0} u_k = 3\times 0\times(0+2)$, donc $u_0 = 0$.

**17.14 b)** On a $\mathsf{S}(1) = u_0 + u_1 = 3\times 1\times(1+2)$. Donc $0 + u_1 = 9$ et donc $u_1 = 9$.

**17.14 c)** On a $\mathsf{S}(p) - \mathsf{S}(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{p} u_k$.

**17.14 d)** Pour commencer, remarquons que $\mathsf{S}(n) - \mathsf{S}(n-1) = u_n$. On a donc

$$u_n = 3n(n+2) - 3(n-1)(n-1+2) = 3n^2 + 6n - 3(n^2-1) = 6n + 3.$$

**17.15 a)** On a $u_4 + u_5 + u_6 = \displaystyle\sum_{k=4}^{6} u_k = \mathsf{S}(6) - \mathsf{S}(3) = \frac{6-1}{6} - \frac{3-1}{3} = \frac{5}{6} - \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$.

**17.15 b)** On a

$$\sum_{k=p}^{p^2} u_k = \sum_{k=2}^{p^2} u_k - \sum_{k=2}^{p-1} u_k = \mathsf{S}(p^2) - \mathsf{S}(p-1) = \frac{p^2-1}{p^2} - \frac{p-2}{p-1} = \frac{(p^2-1)(p-1) - p^2(p-2)}{p^2(p-1)}$$
$$= \frac{p^3 - p^2 - p + 1 - p^3 + 2p^2}{p^2(p-1)} = \frac{p^2 - p + 1}{p^2(p-1)}.$$

**17.15 c)** Pour commencer, on a $u_2 = \mathsf{S}(2) = \dfrac{2-1}{2} = \dfrac{1}{2}$. Soit $n \geqslant 3$, on a

$$u_n = \mathsf{S}(n) - \mathsf{S}(n-1) = \frac{n-1}{n} - \frac{n-2}{n-1} = \frac{(n-1)^2 - n(n-2)}{n(n-1)} = \frac{n^2 - 2n + 1 - (n^2 - 2n)}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)}.$$

L'expression trouvée est valable pour $n = 2$ car $\dfrac{1}{2\times 1} = \dfrac{1}{2} = u_2$.

**17.16 a)** On a $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$.

**17.16 b)** Pour commencer, écrivons $f(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} x^k$. On a $f'(x) = 0 + \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$.

**17.16 c)** On a

$$f'(x) = \frac{(n+1)x^n(x-1) - (x^{n+1} - 1) \times 1}{(x-1)^2} = \frac{(n+1)(x^{n+1} - x^n) - x^{n+1} + 1}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}.$$

**17.16 d)** Pour commencer, remarquons que $\mathsf{S}(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^k = x \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = xf'(x)$. On a alors

$$\mathsf{S}(x) = x\frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2}.$$

**17.17 a)** On a $u_3 = \sum_{k=1}^{3} \frac{(-1)^k}{k} = \frac{(-1)^1}{1} + \frac{(-1)^2}{2} + \frac{(-1)^3}{3} = \frac{-1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{-1}{3} = \frac{-6 + 3 - 2}{6} = \frac{-5}{6}$.

**17.17 b)** On a

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n = u_{2(n+1)} - u_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=2n+1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k} \\
&= \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} \\
&= \frac{-1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} = \frac{-(2n+2) + 2n + 1}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{-1}{(2n+1)(2n+2)}.
\end{aligned}$$

**17.17 c)** On a

$$\begin{aligned}
w_{n+1} - w_n = u_{2(n+1)+1} - u_{2n+1} = u_{2n+3} - u_{2n+1} &= \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=2n+2}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{k} \\
&= \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+3} \\
&= \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+3} = \frac{2n+3 - (2n+2)}{(2n+2)(2n+3)} = \frac{1}{(2n+2)(2n+3)}.
\end{aligned}$$

**17.17 d)** On a $w_n - v_n = u_{2n+1} - u_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = \frac{-1}{2n+1}$.

**17.17 e)** On a $v_{n+1} - v_n = \frac{-1}{(2n+1)(2n+2)} < 0$. La bonne réponse est b.

**17.17 f)** On a $w_{n+1} - w_n = \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} > 0$. La bonne réponse est a.

# Fiche n° 18. Calcul de produits

## Réponses

**18.1** a) $\boxed{-33}$

**18.1** b) $\boxed{-\dfrac{4}{5}}$

**18.1** c) $\boxed{\dfrac{9}{8}}$

**18.2** a) $\boxed{a^2 + 2ab + b^2}$

**18.2** b) $\boxed{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$

**18.2** c) $\boxed{\begin{array}{r} a^2 + b^2 + c^2 \\ +2ab - 2ac - 2bc \end{array}}$

**18.3** a) $\boxed{\prod_{k=1}^{99} k}$

**18.3** b) $\boxed{\prod_{k=3}^{50} k^k}$

**18.3** c) $\boxed{\prod_{k=3}^{15} k^{k+2}}$

**18.3** d) $\boxed{\prod_{k=1}^{8} 2}$

**18.4** a) $\boxed{\prod_{k=1}^{3n} (k^2+1)x_k}$

**18.4** b) $\boxed{\prod_{k=1}^{n-1} (x_k + x_{k+1})}$

**18.4** c) $\boxed{\prod_{k=1}^{n} (x_k + y_k)}$

**18.4** d) $\boxed{\prod_{k=0}^{n} (x_k + y_{n-k})}$

**18.5** a) $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \prod_{i=1}^{k} x_i}$

**18.5** b) $\boxed{\prod_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} x_i}$

**18.6** a) $\boxed{120}$

**18.6** b) $\boxed{105}$

**18.6** c) $\boxed{0}$

**18.6** d) $\boxed{\dfrac{1}{11}}$

**18.7** $\boxed{\text{e}}$

**18.8** $\boxed{\text{d et f}}$

**18.9** a) $\boxed{\dfrac{a_2}{a_1}}$

**18.9** b) $\boxed{\dfrac{a_3}{a_1}}$

**18.9** c) $\boxed{\dfrac{a_4}{a_1}}$

**18.9** d) $\boxed{\dfrac{a_n}{a_1}}$

**18.10** $\boxed{\text{e}}$

**18.11** a) $\boxed{\dfrac{1}{n+1}}$

**18.11** b) $\boxed{2n+1}$

**18.11** c) $\boxed{\dfrac{n+1}{2n}}$

**18.11** d) $\boxed{\dfrac{1}{n^2+3n+1}}$

**18.12** a) $\boxed{\dfrac{n(n+1)}{2}}$

**18.12** b) $\boxed{\dfrac{24}{(n-1)n(n+1)(n+2)}}$

**18.13** a) $\boxed{3^{\frac{n(n+1)}{2}}}$

**18.13** b) $\boxed{3^{\frac{1-a^n}{1-a}}}$

**18.14** a) $\boxed{\begin{array}{r} (n+1)! \\ = (n+1) \times n! \end{array}}$

**18.14** b) $\boxed{\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}}$

## Corrigés

**18.9 a)** On a $b_1 = \prod_{i=1}^{1} \frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{a_2}{a_1}$.

**18.9 b)** On a $b_2 = \prod_{i=1}^{2} \frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{a_2}{a_1} \times \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_3}{a_1}$.

**18.9 c)** De même, on a $b_3 = \frac{a_2}{a_1} \times \frac{a_3}{a_2} \times \frac{a_4}{a_3} = \frac{a_4}{a_1}$.

**18.9 d)** On a
$$b_{n-1} = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{a_2}{a_1} \times \frac{a_3}{a_2} \times \cdots \times \frac{a_{n-1}}{a_{n-1}} \times \frac{a_n}{a_{n-1}}.$$
Dans ce produit, tous les facteurs se simplifient sauf $a_1$ et $a_n$. On trouve $b_{n-1} = \dfrac{a_n}{a_1}$.

........................................................................................................................

**18.11 a)** On considère $a_k = k$. Ainsi, le principe du télescopage permet d'affirmer que
$$\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} = \prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{a_1}{a_{n+1}} = \frac{1}{n+1}.$$

........................................................................................................................

**18.11 b)** On considère $a_k = 2k+1$. Ainsi, le principe du télescopage permet d'affirmer que
$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{2k-1} = \prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{a_n}{a_0} = 2n+1.$$

........................................................................................................................

**18.11 c)** On observe que $k^2-1 = (k-1)(k+1)$. On considère alors $a_k = \dfrac{k+1}{k}$ et on applique le principe du télescopage. On trouve
$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k^2-1}{k^2} = \prod_{k=2}^{n} \frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{a_n}{a_1} = \frac{n+1}{2n}.$$

........................................................................................................................

**18.11 d)** On considère $a_k = k^2+k-1$. Ainsi, le principe du télescopage permet d'affirmer que
$$\prod_{k=1}^{n} \frac{k^2+k-1}{k^2+3k+1} = \prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{a_1}{a_{n+1}} = \frac{1}{n^2+3n+1}.$$

........................................................................................................................

**18.12 a)** On observe que $\dfrac{k+1}{k-1} = \dfrac{(k+1)k}{k(k-1)}$. On considère alors $a_k = (k+1)k$ et on applique le principe du télescopage. On trouve
$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k-1} = \prod_{k=2}^{n} \frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{a_n}{a_1} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

........................................................................................................................

**18.12 b)** On observe que $\dfrac{k-2}{k+2} = \dfrac{(k-2)(k-1)k(k+1)}{(k-1)k(k+1)(k+2)}$. On considère alors $a_k = (k-2)(k-1)k(k+1)$ et on applique le principe du télescopage. On trouve
$$\prod_{k=3}^{n} \frac{k-2}{k+2} = \prod_{k=3}^{n} \frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{a_3}{a_{n+1}} = \frac{24}{(n-1)n(n+1)(n+2)}.$$

........................................................................................................................

**18.13 a)** On a $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 3^k = 3^{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} k\right)} = 3^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

........................................................................................................................

**18.13 b)** On a $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} 3^{a^k} = 3^{\left(\sum\limits_{k=0}^{n-1} a^k\right)} = 3^{\frac{1-a^n}{1-a}}$.

........................................................................................................................

**18.14 b)** On a $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} = \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)(2k)}{(2k)^2} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k-1)(2k)}{\left(\prod\limits_{k=1}^{n} 2k\right)^2} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{2n} k}{\left(2^n \prod\limits_{k=1}^{n} k\right)^2} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$.

........................................................................................................................

# Fiche nº 19. Probabilités

## Réponses

**19.1** a) $\boxed{0{,}012}$

**19.1** b) $\boxed{0{,}73}$

**19.1** c) $\boxed{\dfrac{49}{24}}$

**19.2** a) $\boxed{0{,}25}$

**19.2** b) $\boxed{\dfrac{31}{6}}$

**19.3** a) $\boxed{0{,}6 - 0{,}55p}$

**19.3** b) $\boxed{1 - a}$

**19.4** a) $\boxed{0{,}48}$

**19.4** b) $\boxed{0{,}6}$

**19.4** c) $\boxed{0{,}45}$

**19.4** d) $\boxed{0{,}67}$

**19.4** e) $\boxed{0{,}33}$

**19.4** f) $\boxed{0{,}15}$

**19.5** a) $\boxed{\dfrac{11}{20}}$

**19.5** b) $\boxed{\dfrac{7}{10}}$

**19.5** c) $\boxed{\dfrac{1}{4}}$

**19.5** d) $\boxed{\dfrac{9}{10}}$

**19.5** e) $\boxed{\dfrac{1}{10}}$

**19.5** f) $\boxed{\dfrac{9}{20}}$

**19.6** a) $\boxed{0{,}85}$

**19.6** b) $\boxed{0{,}7}$

**19.7** a) $\boxed{\dfrac{4}{5}}$

**19.7** b) $\boxed{\dfrac{1}{20}}$

**19.7** c) $\boxed{\dfrac{2}{5}}$

**19.7** d) $\boxed{\dfrac{1}{4}}$

**19.7** e) $\boxed{\dfrac{3}{5}}$

**19.7** f) $\boxed{\dfrac{1}{4}}$

**19.8** a) $\boxed{\dfrac{3}{4}}$

**19.8** b) $\boxed{\dfrac{3}{4}}$

**19.8** c) $\boxed{\dfrac{n}{n+1}}$

**19.8** d) $\boxed{\dfrac{n}{3n+2}}$

**19.9** a) $\boxed{\dfrac{1}{4}}$

**19.9** b) $\boxed{\dfrac{3}{8}}$

**19.9** c) $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

**19.9** d) $\boxed{\dfrac{7}{16}}$

**19.9** e) $\boxed{\dfrac{9}{16}}$

**19.9** f) $\boxed{\dfrac{6}{7}}$

**19.10** a) $\boxed{0{,}55}$

**19.10** b) $\boxed{0{,}27}$

**19.11** a) $\boxed{0{,}4}$

**19.11** b) $\boxed{0{,}04}$

**19.11** c) $\boxed{0{,}11}$

**19.12** a) $\boxed{\dfrac{7}{10}}$

**19.12** b) $\boxed{\dfrac{4}{5}}$

**19.12** c) $\boxed{\dfrac{6}{25}}$

**19.12** d) $\boxed{\dfrac{5}{8}}$

**19.12** e) $\boxed{\dfrac{48}{125}}$

**19.13** a) $\boxed{0{,}16}$

**19.13** b) $\boxed{0{,}2}$

**19.13** c) $\boxed{0{,}84}$

**19.14** a) $\boxed{0{,}1}$

**19.14** b) $\boxed{0{,}7}$

**19.14** c) $\boxed{0{,}6}$

**19.14** d) $\boxed{0{,}35}$

**19.15** a) $\boxed{0{,}48}$

**19.15** b) $\boxed{0{,}87}$

**19.15** c) $\boxed{0{,}39}$

**19.16** a) $\boxed{\dfrac{2+x}{3+x}}$

**19.16** b) $\boxed{\dfrac{3}{4(3+x)}}$

**19.16** c) $\boxed{\dfrac{17+4x}{12(3+x)}}$

**19.16** d) $\boxed{\dfrac{9}{17+4x}}$

**19.17** a) $\boxed{0{,}15}$

**19.17** b) $\boxed{0{,}46}$

**19.18** a) $\boxed{2}$

**19.18** b) $\boxed{1}$

**19.19** a) $\boxed{\dfrac{1}{4}}$

**19.19** b) $\boxed{\dfrac{3}{28}}$

**19.20** $\boxed{-0{,}2}$

**19.21** a) $\boxed{\dfrac{a(1-a)}{(1+2a)}}$

**19.21** b) $\boxed{\dfrac{a}{1+2a}}$

**19.22** a) $\boxed{\dfrac{n+1}{2}}$

**19.22** b) $\boxed{\dfrac{(n+1)(n-1)}{12}}$

**19.23** $\boxed{\dfrac{1-a^{n+1}}{(n+1)(1-a)}}$

**19.24** a) $\boxed{-x^2 + 2x}$

**19.24** b) $\boxed{x(1-x)^3}$

## Corrigés

**19.3** a) On a $p \times 0{,}05 + (1-p) \times 0{,}6 = 0{,}05p + 0{,}6 - 0{,}6p = 0{,}6 - 0{,}55p$.

**19.3** b) On a $-a(1-a) + (1-a^2) = -a + a^2 + 1 - a^2 = 1 - a$.

**19.4** a) On a $\mathrm{P}(\overline{A}) = 0{,}15 + 0{,}33 = 0{,}48$.

**19.4** b) On a $\mathrm{P}(B) = 0{,}45 + 0{,}15 = 0{,}6$.

**19.4** c) On a $\mathrm{P}(A \cap B) = 0{,}45$.

**19.4** d) On a $\mathrm{P}(A \cup B) = 0{,}45 + 0{,}07 + 0{,}15 = 0{,}67$.

**19.5** a) On a $\mathrm{P}(\overline{A}) = \dfrac{275}{500} = \dfrac{25 \times 11}{25 \times 20} = \dfrac{11}{20}$.

**19.5** b) On a $\mathrm{P}(B) = \dfrac{350}{500} = \dfrac{50 \times 7}{50 \times 10} = \dfrac{7}{10}$.

**19.5** d) On a $\mathrm{P}(A \cup B) = \dfrac{125 + 225 + 100}{500} = \dfrac{450}{500} = \dfrac{9}{10}$.

**19.5** e) On a $\mathrm{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \dfrac{50}{500} = \dfrac{1}{10}$.

**19.5** f) On a $\mathrm{P}(\overline{A} \cap B) = \dfrac{225}{500} = \dfrac{9 \times 25}{20 \times 25} = \dfrac{9}{20}$.

**19.6** a) Comme $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, on a $\mathrm{P}(A \cup B) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - 0{,}15 = 0{,}85$.

**19.6** b) On a $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$.

**19.7** a) L'énoncé permet de remplir le tableau :

| | $S$ | $\overline{S}$ | Total |
|---|---|---|---|
| $R$ | 25 | 75 | 100 |
| $\overline{R}$ | 100 | 300 | 400 |
| Total | 125 | 375 | 500 |

On obtient donc $\mathrm{P}(\overline{R}) = \dfrac{400}{500} = \dfrac{4}{5}$.

**19.7** b) On a $\mathrm{P}(S \cap R) = \dfrac{25}{500} = \dfrac{1}{20}$.

**19.7** c) On a $\mathrm{P}(S \cup R) = \dfrac{25 + 75 + 100}{500} = \dfrac{200}{500} = \dfrac{2}{5}$.

**19.7** d) On a $\mathrm{P}(S) = \dfrac{125}{500} = \dfrac{1}{4}$.

**19.7** e) On a $\mathrm{P}(\overline{S} \cap \overline{R}) = \dfrac{300}{500} = \dfrac{3}{5}$.

**19.7** f) On a $\mathrm{P}_R(S) = \dfrac{25}{100} = \dfrac{1}{4}$.

**19.8** a) Le total est $n^2+2n+2n^2+n+n+n^2 = 4n^2+4n$, donc on a $\mathrm{P}(\overline{A}) = \dfrac{2n+2n^2+n+n^2}{4n^2+4n} = \dfrac{3n^2+3n}{4n^2+4n} = \dfrac{3}{4}$.

**19.8** b) On a $\mathrm{P}(A \cup B) = \dfrac{n^2+2n+2n^2+n}{4n^2+4n} = \dfrac{3n^2+3n}{4n^2+4n} = \dfrac{3}{4}$.

**19.8** c) On a $\mathrm{P}_A(B) = \dfrac{n^2}{n^2+n} = \dfrac{n}{n+1}$.

**19.8** d) On a $\mathrm{P}_B(A) = \dfrac{n^2}{3n^2+2n} = \dfrac{n}{3n+2}$.

**19.9** b) On a $\mathrm{P}(C \cap \overline{D}) = \mathrm{P}(C) \times \mathrm{P}_C\left(\overline{D}\right) = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{8}$.

**19.9** d) Les événements $C$ et $\overline{C}$ forment une partition de l'univers, la formule des probabilités totales donne :

$$\mathrm{P}(D) = \mathrm{P}(C) \times \mathrm{P}_C(D) + \mathrm{P}(\overline{C}) \times \mathrm{P}_{\overline{C}}(D) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{7}{16}.$$

**19.9** e) On a $\mathrm{P}(\overline{D}) = 1 - \mathrm{P}(D) = 1 - \dfrac{7}{16} = \dfrac{9}{16}$.

**19.9** f) On a $\mathrm{P}_D(C) = \dfrac{\mathrm{P}(D \cap C)}{\mathrm{P}(D)} = \dfrac{\dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{2}}{\dfrac{7}{16}} = \dfrac{3}{8} \times \dfrac{16}{7} = \dfrac{6}{7}$.

**19.10** b) On a $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}_A(B) = 0{,}45 \times 0{,}6 = 0{,}27$.

**19.11** a) On a $\mathrm{P}_B(A) = \dfrac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \dfrac{\mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}_A(B)}{\mathrm{P}(B)} = \dfrac{0{,}05 \times 0{,}8}{0{,}1} = 0{,}4$.

**19.11** b) On a $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}_A(B) = 0{,}05 \times 0{,}8 = 0{,}04$.

**19.11** c) On a $\mathrm{P}(\overline{A} \cap B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cup B) = 0{,}05 + 0{,}1 - 0{,}04 = 0{,}11$.

**19.12** a) On a $\mathrm{P}(\overline{J}) = 1 - \dfrac{30}{100} = \dfrac{70}{100} = \dfrac{7}{10}$.

**19.12** b) On a $\mathrm{P}_J(S) = 1 - \mathrm{P}_J\left(\overline{S}\right) = 1 - \dfrac{20}{100} = \dfrac{80}{100} = \dfrac{4}{5}$.

**19.12** c) On a $\mathrm{P}(J \cap S) = \mathrm{P}(J) \times \mathrm{P}_J(S) = \dfrac{3}{10} \times \dfrac{8}{10} = \dfrac{24}{100} = \dfrac{6}{25}$.

**19.12 d)** Comme les événements $J$ et $\overline{J}$ forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales, on a $\mathrm{P}(S) = \mathrm{P}(J \cap S) + \mathrm{P}(\overline{J} \cap S) = \dfrac{6}{25} + \dfrac{7}{10} \times \dfrac{55}{100} = \dfrac{6}{25} + \dfrac{77}{200} = \dfrac{48}{200} + \dfrac{77}{200} = \dfrac{125}{200} = \dfrac{5}{8}$.

**19.12 e)** On a $\mathrm{P}_S(J) = \dfrac{\mathrm{P}(S \cap J)}{\mathrm{P}(S)} = \dfrac{6/25}{5/8} = \dfrac{6}{25} \times \dfrac{8}{5} = \dfrac{48}{125}$.

**19.13 a)** On a $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(B)$ car $A$ et $B$ sont indépendants. On obtient $\mathrm{P}(A \cap B) = 0{,}8 \times 0{,}2 = 0{,}16$.

**19.13 b)** Les événements $A$ et $B$ sont indépendants, donc $\mathrm{P}_A(B) = \mathrm{P}(B)$. On obtient $\mathrm{P}_A(B) = 0{,}2$.

**19.13 c)** On a $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B) = 0{,}8 + 0{,}2 - 0{,}16 = 0{,}84$.

**19.14 c)** Les événements $A, B$ et $C$ forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales, on a donc $\mathrm{P}(D) = \mathrm{P}(A \cap D) + \mathrm{P}(B \cap D) + \mathrm{P}(C \cap D) = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}_A(D) + \mathrm{P}(B) \times \mathrm{P}_B(D) + \mathrm{P}(C) \times \mathrm{P}_C(D)$.
D'où $\mathrm{P}(D) = 0{,}3 \times 0{,}7 + 0{,}6 \times 0{,}6 + 0{,}1 \times 0{,}3 = 0{,}21 + 0{,}36 + 0{,}03 = 0{,}6$.

**19.14 d)** On a $\mathrm{P}_D(A) = \dfrac{\mathrm{P}(A \cap D)}{\mathrm{P}(D)} = \dfrac{0{,}3 \times 0{,}7}{0{,}6} = \dfrac{0{,}3 \times 0{,}7}{0{,}3 \times 2} = 0{,}35$.

**19.15 a)** On a $\mathrm{P}(B) = \dfrac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)}$ car $A$ et $B$ sont indépendants. On obtient $\mathrm{P}(B) = \dfrac{0{,}36}{0{,}75} = 0{,}48$.

**19.15 b)** On a $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B) = 0{,}75 + 0{,}48 - 0{,}36 = 0{,}87$.

**19.15 c)** On a $\mathrm{P}(A \cap \overline{B}) = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(\overline{B})$ car $A$ et $\overline{B}$ sont indépendants. Comme $\mathrm{P}(\overline{B}) = 1 - \mathrm{P}(B) = 1 - 0{,}48 = 0{,}52$, on obtient $\mathrm{P}(A \cap \overline{B}) = 0{,}52 \times 0{,}75 = 0{,}39$.

**19.16 b)** On a $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}_A(B) = \dfrac{1}{3+x} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{4(3+x)}$.

**19.16 c)** Les événements $A$ et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales, on a $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}_A(B) + \mathrm{P}(\overline{A}) \times \mathrm{P}_{\overline{A}}(B) = \dfrac{1}{3+x} \times \dfrac{3}{4} + \dfrac{2+x}{3+x} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{9}{12(3+x)} + \dfrac{4(2+x)}{12(3+x)} = \dfrac{17+4x}{12(3+x)}$.

**19.16 d)** On a $\mathrm{P}_B(A) = \dfrac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \dfrac{\dfrac{3}{12+4x}}{\dfrac{17+4x}{36+12x}} = \dfrac{3}{12+4x} \times \dfrac{36+12x}{17+4x} = \dfrac{9}{17+4x}$.

**19.17 b)** On a $\mathrm{P}(X \leqslant 4) = 0{,}1 + 0{,}15 + 0{,}2 + 0{,}01 = 0{,}46$.

**19.18 a)** On a $\mathrm{E}(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{4} x_i \times \mathrm{P}(X = x_i) = 0 \times \dfrac{1}{10} + 1 \times \dfrac{2}{10} + 2 \times \dfrac{3}{10} + 3 \times \dfrac{4}{10} = \dfrac{20}{10} = 2$.

**19.18 b)** On a $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 \times \mathrm{P}(X = x_i) - 2^2$. Donc, on a

$$\mathrm{V}(X) = 0^2 \times \frac{1}{10} + 1^2 \times \frac{2}{10} + 2^2 \times \frac{3}{10} + 3^2 \times \frac{4}{10} - 2^2 = \frac{50}{10} - 4 = 1.$$

**19.19 a)** On a $\mathrm{P}(X = 3) = \mathrm{P}(X \leqslant 3) - \mathrm{P}(X \leqslant 2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

**19.20** On a $\mathrm{E}(X + m) = \mathrm{E}(X) + m$. Or, on a

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{5} x_i \times \mathrm{P}(X = x_i) = -2 \times 0{,}2 - 1 \times 0{,}3 + 0 \times 0{,}2 + 1 \times 0{,}15 + 5 \times 0{,}15 = -0{,}7 + 0{,}9 = 0{,}2.$$

Donc, on a $\mathrm{E}(X + m) = 0 \iff 0{,}2 + m = 0 \iff m = -0{,}2$.

**19.21 a)** Les événements $A$ et $\overline{A}$ forment une partition de $\Omega$. On a donc

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(B) &= \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}_A(B) + \mathrm{P}(\overline{A}) \times \mathrm{P}_{\overline{A}}(B) \\ &= a^2(1-a) + (1-a^2) \times a = (1-a)(a^2 + (1+a)a) = a(1-a)(1+2a). \end{aligned}$$

**19.21 b)** On a $\mathrm{P}_B(A) = \dfrac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \dfrac{a^2(1-a)}{a(1-a)(1+2a)} = \dfrac{a}{1+2a}$.

**19.22 a)** On a $\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} i \times \mathrm{P}(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} i \times \dfrac{1}{n} = \dfrac{n(n+1)}{2n} = \dfrac{n+1}{2}$.

**19.22 b)** On a $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 \times \dfrac{1}{n} - \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6n} - \dfrac{(n+1)^2}{4}$.

Donc, on a $\mathrm{V}(X) = \dfrac{2(n+1)(2n+1) - 3(n+1)^2}{12} = \dfrac{(n+1)(2(2n+1) - 3(n+1))}{12} = \dfrac{(n+1)(n-1)}{12}$.

**19.23** On a

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=0}^{n} a^i \times \mathrm{P}(X = a^i) = \sum_{i=0}^{n} a^i \times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{1}{n+1} \times \frac{1 - a^{n+1}}{1-a} = \frac{1 - a^{n+1}}{(n+1)(1-a)}.$$

**19.24 a)** On a $\mathrm{E}(X) = 1 \times \mathrm{P}(X = 1) + x \times \mathrm{P}(X = x) = x + x(1-x) = -x^2 + 2x$.

**19.24 b)** On a

$$\begin{aligned} \mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 &= 1 \times \mathrm{P}(X = 1) + x^2 \times \mathrm{P}(X = x) - (-x^2 + 2x)^2 \\ &= x + x^2(1-x) - (x^4 - 4x^3 + 4x^2) \\ &= x + x^2 - x^3 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 = -x^4 + 3x^3 - 3x^2 + x \\ &= x(1 - 3x + 3x^2 - x^3) = x(1-x)^3. \end{aligned}$$

# Fiche n$^{\text{o}}$ 20. Droites du plan

## Réponses

**20.1** a) ........ $\boxed{\dfrac{2}{3}}$

**20.1** b) ........ $\boxed{-\dfrac{62}{65}\sqrt{2}}$

**20.1** c) ........ $\boxed{\dfrac{5}{68}}$

**20.1** d) ........ $\boxed{-\dfrac{5}{2}}$

**20.2** a) ........ $\boxed{\dfrac{6}{5}}$

**20.2** b) ........ $\boxed{-\dfrac{25}{48}}$

**20.2** c) ........ $\boxed{7}$

**20.2** d) ........ $\boxed{\dfrac{-3}{5}}$

**20.3** a) ........ $\boxed{-5x+3y-47=0}$

**20.3** b) ........ $\boxed{y=\dfrac{5}{3}x+\dfrac{47}{3}}$

**20.4** a) ........ $\boxed{-5x-9y+3=0}$

**20.4** b) ........ $\boxed{y=-\dfrac{5}{9}x+\dfrac{1}{3}}$

**20.5** a) ........ $\boxed{\dfrac{7}{15}x-\dfrac{11}{6}y-\dfrac{106}{45}=0}$

**20.5** b) ........ $\boxed{y=\dfrac{14}{55}x-\dfrac{212}{165}}$

**20.6** a) ........ $\boxed{\sqrt{3}x+\sqrt{2}y+2\sqrt{6}=0}$

**20.6** b) ........ $\boxed{-2\sqrt{2}}$

**20.6** c) ........ $\boxed{-2\sqrt{3}+3\dfrac{\sqrt{6}}{2}}$

**20.7** a) ........ $\boxed{\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}}$

**20.7** b) ........ $\boxed{3x+2y-5=0}$

**20.7** c) ........ $\boxed{y=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{5}{2}}$

**20.7** d) ........ $\boxed{y=-\dfrac{3}{2}}$

**20.8** a) ........ $\boxed{-\dfrac{5}{3}}$

**20.8** b) ........ $\boxed{0}$

**20.8** c) ........ $\boxed{\dfrac{7-\sqrt{3}}{3}}$

**20.8** d) ........ $\boxed{(7,7)}$

**20.9** a) ........ $\boxed{-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{4}{5}y-\dfrac{16}{3}=0}$

**20.9** b) ........ $\boxed{-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{4}{5}y-68=0}$

**20.10** a) ........ $\boxed{(t+2)x+(t-1)y+t+8=0}$

**20.10** b) ........ $\boxed{-2}$

**20.11** a) ........ $\boxed{(-2t+1)x-t^2y+\dfrac{6}{7}t^2-\dfrac{3}{2}t+\dfrac{3}{4}=0}$

**20.11** b) ........ $\boxed{0}$

**20.12** ........ $\boxed{(-11,10)}$

**20.13** a) ........ $\boxed{\left(-\dfrac{15}{2},0\right)}$

**20.13** b) ........ $\boxed{\left(0,\dfrac{25}{7}\right)}$

**20.13** c) ........ $\boxed{\left(\dfrac{75}{11},\dfrac{75}{11}\right)}$

**20.14** ........ $\boxed{(-5,-2)}$

**20.15** ........ $\boxed{\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},-\sqrt{2}\right)}$

**20.16** ............ $\boxed{\begin{array}{c}\left(\dfrac{-7-\sqrt{77}}{2}, 20+2\sqrt{77}\right)\\ \left(\dfrac{-7+\sqrt{77}}{2}, 20-2\sqrt{77}\right)\end{array}}$

**20.17** ............... $\boxed{\begin{array}{c}\left(\dfrac{4-5\sqrt{2}}{2}, \dfrac{-2-5\sqrt{2}}{2}\right)\\ \left(\dfrac{4+5\sqrt{2}}{2}, \dfrac{-2+5\sqrt{2}}{2}\right)\end{array}}$

**20.18** a)............ $\boxed{\dfrac{2a^2-a+2}{a^4-1} \text{ si } a \notin \{-1,1\}}$

**20.18** b)............... $\boxed{-a^5+a^4+2a^2+a+1}$

**20.19** a)........ $\boxed{m \neq 4-2\sqrt{2} \text{ et } m \neq 4+2\sqrt{2}}$

**20.19** b) ....... $\boxed{\left(\dfrac{-3m-8}{m^2-8m+8}, \dfrac{22-2m}{m^2-8m+8}\right)}$

**20.20** a)........... $\boxed{y=(-6m+2)x+3m^2+1}$

**20.20** b) .... $\boxed{\begin{array}{r}\text{si } m \neq \dfrac{7}{12},\\ \left(\dfrac{-6m^2+3}{-12m+7}, \dfrac{9m^2-30m+13}{-12m+7}\right)\end{array}}$

**20.21** a)................... $\boxed{y=6ax-3a^2+5}$

**20.21** b)................... $\boxed{y=4ax+2a^2+3}$

**20.21** c) ................. $\boxed{\left(\dfrac{5a^2-2}{2a}, 12a^2-1\right)}$

## Corrigés

**20.1 a)** On a $\dfrac{-2}{3}\times\dfrac{-7}{4}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{6}-\dfrac{3}{6}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$.

................................................................................................

**20.1 b)** On a $\dfrac{3}{5}\sqrt{8}-\dfrac{7}{13}\sqrt{32}=\dfrac{3}{5}\times 2\sqrt{2}-\dfrac{7}{13}\times 4\sqrt{2}=\dfrac{6}{5}\sqrt{2}-\dfrac{28}{13}\sqrt{2}=\dfrac{78}{65}\sqrt{2}-\dfrac{140}{65}\sqrt{2}=-\dfrac{62}{65}\sqrt{2}$.

................................................................................................

**20.1 c)** On a $\dfrac{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}{\frac{-5}{3}+\frac{-3}{5}}=\dfrac{\frac{2}{6}-\frac{3}{6}}{\frac{-25}{15}-\frac{9}{15}}=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{15}{34}=\dfrac{5}{68}$.

................................................................................................

**20.1 d)** On a $\dfrac{-2\sqrt{5}-\sqrt{45}}{-\sqrt{80}+6\sqrt{5}}=\dfrac{-2\sqrt{5}-3\sqrt{5}}{-4\sqrt{5}+6\sqrt{5}}=-\dfrac{5}{2}$.

................................................................................................

**20.2 a)** On a les équivalences $-3+4x-9+6x=0 \iff 10x=12 \iff x=\dfrac{12}{10}=\dfrac{6}{5}$.

................................................................................................

**20.2 b)** On a les équivalences $\dfrac{3}{5}x-\dfrac{1}{2}+x=-\dfrac{4}{3} \iff \dfrac{8}{5}x=-\dfrac{8}{6}+\dfrac{3}{6} \iff x=-\dfrac{5}{6}\times\dfrac{5}{8} \iff x=-\dfrac{25}{48}$.

................................................................................................

**20.2 c)** On a les équivalences suivantes :

$$\sqrt{3}x-3\sqrt{12}=\sqrt{27}x-4\sqrt{75} \iff \sqrt{3}x-3\sqrt{3}x=3\times 2\sqrt{3}-4\times 5\sqrt{3} \iff -2\sqrt{3}x=-14\sqrt{3}.$$

On obtient $x=7$.

................................................................................................

**20.2 d)** On a les équivalences suivantes :

$$\frac{5}{\sqrt{2}}x+\sqrt{8}=\frac{1}{\sqrt{2}} \iff \frac{5}{\sqrt{2}}x=\frac{\sqrt{2}}{2}-2\sqrt{2} \iff \frac{5}{\sqrt{2}}x=-\frac{3}{2}\sqrt{2} \iff x=-\frac{3}{2}\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{5}.$$

On obtient $x=-\dfrac{3}{5}$.

................................................................................................

**20.3 a)** La droite $(d)$ est dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\-5\end{pmatrix}$ ; elle admet donc une équation cartésienne de la forme $-5x+3y+c=0$. Le point $\mathrm{A}(-7,4)$ appartient à la droite, donc ses coordonnées vérifient son équation. On a donc $-5\times(-7)+3\times 4+c=0$, ce qui donne $c=-47$. La droite $(d)$ admet donc pour équation cartésienne $-5x+3y-47=0$.

........................................................................................................................................

**20.3 b)** On a les équivalences $-5x+3y-47=0 \iff 3y=5x+47 \iff y=\dfrac{5}{3}x+\dfrac{47}{3}$.

........................................................................................................................................

**20.4 a)** La droite $(d)$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A}\\y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\-5\end{pmatrix}$. On obtient l'équation $-5x-9y+3=0$.

........................................................................................................................................

**20.5 a)** La droite $(d)$ est dirigée par $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}\frac{11}{6}\\\frac{7}{15}\end{pmatrix}$.

On obtient l'équation $\dfrac{7}{15}x-\dfrac{11}{6}y+c=0$. En remplaçant $x$ et $y$ par les coordonnées de B, on obtient $c=-\dfrac{106}{45}$, ce qui donne l'équation cartésienne $\dfrac{7}{15}x-\dfrac{11}{6}y-\dfrac{106}{45}=0$.

........................................................................................................................................

**20.5 b)** On a les équivalences suivantes :

$$\frac{7}{15}x-\frac{11}{6}y-\frac{106}{45}=0 \iff \frac{11}{6}y=\frac{7}{15}x-\frac{106}{45} \iff y=\frac{6}{11}\times\left(\frac{7}{15}x-\frac{106}{45}\right) \iff y=\frac{14}{55}x-\frac{212}{165}.$$

........................................................................................................................................

**20.6 a)** La droite $(d)$ est dirigée par $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}5\sqrt{2}\\-5\sqrt{3}\end{pmatrix}$.

On obtient une équation cartésienne de la forme $-5\sqrt{3}x-5\sqrt{2}y+c=0$ avec $c$ réel. En remplaçant $x$ et $y$ par les coordonnées de A, on obtient $c=-10\sqrt{6}$, ce qui donne l'équation cartésienne $-5\sqrt{3}x-5\sqrt{2}y-10\sqrt{6}=0$. En divisant par $-5$, on obtient $\sqrt{3}x+\sqrt{2}y+2\sqrt{6}=0$.

........................................................................................................................................

**20.6 b)** L'abscisse $x$ du point de $(d)$ d'ordonnée nulle est la solution de l'équation $\sqrt{3}x+\sqrt{2}\times 0+2\sqrt{6}=0$, ce qui donne $x=\dfrac{-2\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=-2\sqrt{2}$.

........................................................................................................................................

**20.6 c)** L'ordonnée $y$ du point de $(d)$ d'abscisse $-3$ est la solution de l'équation $\sqrt{3}\times(-3)+\sqrt{2}y+2\sqrt{6}=0$, ce qui donne $\sqrt{2}y=-2\sqrt{6}+3\sqrt{3}$ et donc $y=-2\sqrt{3}+\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$.

........................................................................................................................................

**20.7 a)** En repérant les points du quadrillage par lesquels passe $(d_1)$, on trouve $\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$.

........................................................................................................................................

**20.7 b)** Comme un vecteur directeur de $(d_1)$ est $\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$, une équation cartésienne de $(d_1)$ est de la forme $3x+2y+c=0$. Pour déterminer $c$, remarquons que le point de coordonnées $(1,1)$ appartient à $(d_1)$. On a donc $3\times 1+2\times 1+c=0$ et donc $c=-5$.

........................................................................................................................................

**20.7 d)** On détermine graphiquement l'équation réduite de $(d_2)$. C'est $y=-\dfrac{3}{2}$.

........................................................................................................................................

**20.8 a)** On cherche $y$ tel que $-2\times(-6)+3y-7=0$, ce qui donne $5+3y=0$, c'est-à-dire $y=-\dfrac{5}{3}$.

........................................................................................................................................

**20.8 b)** On cherche $x$ tel que $-2x + 3 \times \dfrac{7}{3} - 7 = 0$, ce qui donne $-2x + 7 - 7 = 0$, c'est-à-dire $x = 0$.

**20.8 c)** On cherche $y$ tel que $-2 \times \dfrac{-\sqrt{3}}{2} + 3y - 7 = 0$, ce qui donne $\sqrt{3} - 7 + 3y = 0$, c'est-à-dire $y = \dfrac{7 - \sqrt{3}}{3}$.

**20.8 d)** On cherche $x$ et $y$ tels que $x = y$ et $-2x + 3y - 7 = 0$, ce qui est équivalent à $x = y$ et $-2x + 3x - 7 = 0$, ce qui donne $x = y = 7$. Le point a donc pour coordonnées $(7, 7)$.

**20.9 a)** Deux droites parallèles sont dirigées par les mêmes vecteurs directeurs, donc le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ dirige aussi $(d')$. La droite $(d')$ a donc une équation cartésienne de la forme $-\dfrac{2}{3}x + \dfrac{4}{5}y + c = 0$.

On remplace $x$ et $y$ par les coordonnées du point : $-\dfrac{2}{3} \times (-2) + \dfrac{4}{5} \times 5 + c = 0$, ce qui donne $c = -4 - \dfrac{4}{3} = -\dfrac{16}{3}$.

On obtient $-\dfrac{2}{3}x + \dfrac{4}{5}y - \dfrac{16}{3} = 0$.

**20.9 b)** De même qu'au calcul précédent, $(d'')$ a une équation cartésienne de la forme $-\dfrac{2}{3}x + \dfrac{4}{5}y + c = 0$.

On remplace $x$ et $y$ par les coordonnées du point : $-\dfrac{2}{3} \times (-30) + \dfrac{4}{5} \times 60 + c = 0$, ce qui donne $c = -68$.

On obtient $-\dfrac{2}{3}x + \dfrac{4}{5}y - 68 = 0$.

**20.10 a)** La droite $(d)$ est dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -t+1 \\ t+2 \end{pmatrix}$, donc elle admet une équation cartésienne de la forme $(t+2)x + (t-1)y + c = 0$.

Le point $\mathrm{A}(-3, 2)$ appartient à la droite, donc ses coordonnées vérifient son équation, on obtient donc l'équation $(t+2) \times (-3) + (t-1) \times 2 + c = 0$, ce qui donne $c = t + 8$.

La droite $(d)$ admet donc pour équation cartésienne $(t+2)x + (t-1)y + t + 8 = 0$.

**20.10 b)** La droite $(d)$ est parallèle à l'axe des abscisses si, et seulement si, la seconde coordonnée de tous ses vecteurs directeurs est nulle, ce qui donne $t + 2 = 0$, c'est-à-dire $t = -2$.

**20.11 a)** La droite $(d)$ est dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} t^2 \\ -2t+1 \end{pmatrix}$, donc elle admet une équation cartésienne de la forme $(-2t+1)x - (t^2)y + c = 0$.

Le point $\mathrm{A}\left(-\dfrac{3}{4}, \dfrac{6}{7}\right)$ appartient à la droite, donc ses coordonnées vérifient son équation. On obtient donc l'équation $(-2t+1) \times (-\dfrac{3}{4}) - t^2 \times \dfrac{6}{7} + c = 0$, ce qui donne $c = \dfrac{6}{7}t^2 - \dfrac{3}{2}t + \dfrac{3}{4}$.

La droite $(d)$ admet donc pour équation cartésienne $(-2t+1)x - t^2y + \dfrac{6}{7}t^2 - \dfrac{3}{2}t + \dfrac{3}{4} = 0$.

**20.11 b)** La droite $(d)$ est parallèle à l'axe des ordonnées si, et seulement si, la première coordonnée de tous ses vecteurs directeurs est nulle, ce qui donne $t^2 = 0$, c'est-à-dire $t = 0$.

**20.12** Les coordonnées $(x, y)$ du point d'intersection de $(d_1)$ et $(d_2)$ sont les solutions du système $\begin{cases} x + y + \ \ 1 = 0 \\ x \qquad + 11 = 0. \end{cases}$

Or, on a $\begin{cases} x + y + \ \ 1 = 0 \\ x \qquad + 11 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -11 \\ y = 10 \end{cases}$. D'où le résultat.

........................................................................................................................................

**20.13 a)** Les coordonnées $(x, y)$ du point d'intersection de $(d)$ et de l'axe des abscisses sont les solutions du système $\begin{cases} -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{7}{5}y - 5 = 0 \\ y \qquad\qquad\qquad = 0 \end{cases}$. L'unique solution de ce système est $\left(-\dfrac{15}{2}, 0\right)$.

........................................................................................................................................

**20.13 b)** Les coordonnées $(x, y)$ du point d'intersection de $(d)$ et de l'axe des ordonnées sont les solutions du système $\begin{cases} -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{7}{5}y - 5 = 0 \\ x \qquad\qquad\qquad = 0 \end{cases}$. L'unique solution de ce système est $\left(0, \dfrac{25}{7}\right)$.

........................................................................................................................................

**20.13 c)** Les coordonnées $(x, y)$ du point d'intersection de $(d)$ et de la droite d'équation $y = x$ sont les solutions du système $\begin{cases} -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{7}{5}y - 5 = 0 \\ y \qquad\qquad\qquad = x \end{cases}$.

Or, on a $\begin{cases} -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{7}{5}y - 5 = 0 \\ y \qquad\qquad\qquad = x \end{cases} \iff \begin{cases} -\dfrac{10}{15}x + \dfrac{21}{15}x - 5 & = & 0 \\ y & = & x \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{75}{11} \\ y = x \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{75}{11} \\ y = \dfrac{75}{11} \end{cases}$.

........................................................................................................................................

**20.14** Les coordonnées $(x, y)$ du point d'intersection de $(d_1)$ et $(d_2)$ sont solutions de $\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ -5x + 9y = 7 \end{cases}$.

On a $\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ -5x + 9y = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} 10x - 15y - 10x + 18y & = & -20 + 14 \\ 6x - 9y - 5x + 9y & = & -12 + 7 \end{cases} \iff \begin{cases} 3y = -6 \\ x = -5 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -5 \\ y = -2 \end{cases}$.

........................................................................................................................................

**20.15** Les coordonnées $(x, y)$ du point d'intersection de $(d_1)$ et $(d_2)$ sont les solutions du système

$$\begin{cases} 3\sqrt{3}x - \sqrt{2}y + 1 = 0 \\ -\sqrt{12}x + \sqrt{8}y + 2 = 0. \end{cases}$$

On a $\begin{cases} 3\sqrt{3}x - \sqrt{2}y + 1 = 0 \\ -\sqrt{12}x + \sqrt{8}y + 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3\sqrt{3}x - \sqrt{2}y = -1 \\ -2\sqrt{3}x + 2\sqrt{2}y = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} 6\sqrt{3}x - 2\sqrt{2}y - 6\sqrt{3}x + 6\sqrt{2}y = -2 - 6 \\ 6\sqrt{3}x - 2\sqrt{2}y - 2\sqrt{3}x + 2\sqrt{2}y = -2 - 2 \end{cases}$.

On obtient $\begin{cases} 4\sqrt{2}y = -8 \\ 4\sqrt{3}x = -4 \end{cases}$, ce qui donne $\begin{cases} y = -\sqrt{2} \\ x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$.

........................................................................................................................................

**20.16** Les coordonnées $(x, y)$ du point d'intersection de $(d)$ et de la parabole $\mathscr{P}$ sont les solutions du système

$$\begin{cases} 4x + y = 6 \\ y = x^2 + 3x - 1. \end{cases}$$

Ce système est équivalent à $\begin{cases} y = -4x + 6 \\ y = x^3 + 3x - 1 \end{cases}$, lui-même équivalent à $\begin{cases} y = -4x + 6 \\ x^2 + 7x - 7 = 0 \end{cases}$.

On résout $x^2 + 7x - 7 = 0$, dont le discriminant vaut $7^2 - 4 \times 1 \times (-7) = 77$. Ses solutions sont $x_1 = \dfrac{-7 - \sqrt{77}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-7 + \sqrt{77}}{2}$. On obtient comme ordonnées correspondantes $y_1 = -4x_1 + 6 = 14 + 2\sqrt{77} + 6 = 20 + 2\sqrt{77}$ et $y_2 = -4x_2 + 6 = 14 - 2\sqrt{77} + 6 = 20 - 2\sqrt{77}$.

Les coordonnées des points d'intersection cherchés sont donc $\left(\dfrac{-7 - \sqrt{77}}{2}, 20 + 2\sqrt{77}\right)$ et $\left(\dfrac{-7 + \sqrt{77}}{2}, 20 - 2\sqrt{77}\right)$.

........................................................................................................................................

**20.17** Les coordonnées $(x, y)$ du point d'intersection de $(d)$ et de $\mathscr{C}$ sont les solutions du système

$$\begin{cases} -x + y + 3 = 0 \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 = 25. \end{cases}$$

Ce système est équivalent à $\begin{cases} y = x - 3 \\ (x-2)^2 + (x-3+1)^2 = 25 \end{cases}$, lui-même équivalent à $\begin{cases} y = x - 3 \\ 2x^2 - 8x - 17 = 0 \end{cases}$.

Les deux solutions de $2x^2 - 8x - 17 = 0$ sont $x_1 = \dfrac{4 - 5\sqrt{2}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{4 + 5\sqrt{2}}{2}$.

On obtient comme ordonnées correspondantes $y_1 = x_1 - 3 = \dfrac{-2 - 5\sqrt{2}}{2}$ et $y_2 = x_2 - 3 = \dfrac{-2 + 5\sqrt{2}}{2}$.

Les coordonnées des points d'intersection cherchés sont donc $\left(\dfrac{4 - 5\sqrt{2}}{2}, \dfrac{-2 - 5\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\left(\dfrac{4 + 5\sqrt{2}}{2}, \dfrac{-2 + 5\sqrt{2}}{2}\right)$.

..........................................................................................................................................

**20.18 a)** On remplace $x$ par $a$ dans l'équation de $(d)$, on obtient $\dfrac{1}{a^2+1}a + (a^2 - 1)y - 2 = 0$, ce qui donne $(a^2 - 1)y = 2 - \dfrac{a}{a^2+1}$. Si $a \neq \pm 1$, on obtient $y = \dfrac{2(a^2+1) - a}{(a^2-1)(a^2+1)} = \dfrac{2a^2 - a + 2}{a^4 - 1}$. Sinon, il n'y a pas de point d'abscisse $a$ sur la droite.

..........................................................................................................................................

**20.18 b)** On remplace $y$ par $a - 1$ dans l'équation de $(d)$ : $\dfrac{1}{a^2+1}x + (a^2 - 1)(a - 1) - 2 = 0$, ce qui donne $x = (2 - (a^2 - 1)(a - 1)) \times (a^2 + 1)$, c'est-à-dire $x = -a^5 + a^4 + 2a^2 + a + 1$.

..........................................................................................................................................

**20.19 a)** Les droites $(d_1)$ et $(d_2)$ sont sécantes si, et seulement si, elles sont dirigées par des vecteurs non colinéaires.

Or, $(d_1)$ est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix} 4(1-m) \\ m \end{pmatrix}$ et $(d_2)$ par $\vec{v}\begin{pmatrix} -m \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ces deux vecteurs sont colinéaires si, et seulement si, $4(1 - m) \times 2 - (-m) \times m = 0$.

On obtient l'équation $m^2 - 8m + 8 = 0$ dont les deux solutions sont $m_1 = \dfrac{8 - \sqrt{32}}{2} = 4 - 2\sqrt{2}$ et $m_2 = 4 + 2\sqrt{2}$.

On en déduit que les droites $(d_1)$ et $(d_2)$ sont sécantes si, et seulement si, $m \neq 4 - 2\sqrt{2}$ et $m \neq 4 + 2\sqrt{2}$.

..........................................................................................................................................

**20.19 b)** Dans les conditions précédentes, les coordonnées du point d'intersection des droites $(d_1)$ et $(d_2)$ sont les solutions du système $\begin{cases} mx + 4(m-1)y = -11 \\ 2x + my = -2 \end{cases}$.

Or, on a

$$\begin{cases} 2mx + 8(m-1)y = -22 \\ 2x = -my - 2 \end{cases} \iff \begin{cases} -m^2y - 2m + 8(m-1)y = -22 \\ x = -\frac{1}{2}my - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} (-m^2 + 8m - 8)y = -22 + 2m \\ x = -\frac{1}{2}my + 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = \dfrac{2m - 22}{-m^2 + 8m - 8} \\ x = \dfrac{m(11-m)}{-m^2 + 8m - 8} - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \dfrac{22 - 2m}{m^2 - 8m + 8} \\ x = \dfrac{m^2 - 11m - m^2 + 8m - 8}{m^2 - 8m + 8}. \end{cases}$$

Le point d'intersection des deux droites a donc pour coordonnées $\left(\dfrac{-3m - 8}{m^2 - 8m + 8}, \dfrac{22 - 2m}{m^2 - 8m + 8}\right)$.

..........................................................................................................................................

**20.20** a) La fonction $f$ est polynomiale, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel $x$, on a $f'(x) = -6x + 2$.

La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $m$ a donc pour équation $y = (-6m+2)(x-m) - 3m^2 + 2m + 1$, c'est-à-dire $y = (-6m+2)x + 3m^2 + 1$.

.................................................................................................................................................

**20.20** b)

Cherchons maintenant l'éventuel point d'intersection de cette droite et de la droite $(d)$.

La tangente est dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-6m+2\end{pmatrix}$, la droite $(d)$ est dirigée par le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$.

Ces deux vecteurs sont colinéaires si, et seulement si, $-2(-6m+2) - 3 = 0 \iff 12m - 7 = 0 \iff m = \dfrac{7}{12}$.

Plaçons-nous maintenant dans le cas où $m \neq \dfrac{7}{12}$. Les coordonnées $(x, y)$ du point d'intersection de $(d)$ et de la tangente sont les solutions du système

$$\begin{cases} y = (-6m+2)x + 3m^2 + 1 \\ 3x + 2y - 5 = 0. \end{cases}$$

Or, on a

$$\begin{cases} y = (-6m+2)x + 3m^2 + 1 \\ 3x + 2y - 5 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = (-6m+2)x + 3m^2 + 1 \\ 3x + 2(-6m+2)x + 6x^2 + 2 - 5 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = (-6m+2)x + 3m^2 + 1 \\ (-12m+7)x = -6m^2 + 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \dfrac{-6m^2+3}{-12m+7} \\ y = (-6m+2) \times \dfrac{-6m^2+3}{-12m+7} + 3m^2 + 1. \end{cases}$$

Les coordonnées du point d'intersection des deux droites sont donc $\left(\dfrac{-6m^2+3}{-12m+7}, \dfrac{9m^2-30m+13}{-12m+7}\right)$.

Si $m = \dfrac{7}{12}$, les droites sont parallèles et donc n'ont pas de point d'intersection.

.................................................................................................................................................

**20.21** a) La droite $\mathsf{T}_{f,a}$ a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$, c'est-à-dire $y = 6a(x-a) + 3a^2 + 5$.

On trouve ainsi que la droite $\mathsf{T}_{f,a}$ a pour équation $y = 6ax - 3a^2 + 5$.

.................................................................................................................................................

**20.21** b) La droite $\mathsf{T}_{g,-a}$ a pour équation $y = g'(-a)(x+a) + g(-a)$, c'est-à-dire $y = -4 \times (-a)(x+a) - 2a^2 + 3$.

On trouve ainsi que la droite $\mathsf{T}_{g,-a}$ a pour équation $y = 4ax + 2a^2 + 3$

.................................................................................................................................................

**20.21** c) L'abscisse du point d'intersection est solution de $6ax - 3a^2 + 5 = 4ax + 2a^2 + 3$, ce qui donne, si $a \neq 0, x = \dfrac{5a^2-2}{2a}$. Donc, on a $y = 4a\dfrac{5a^2-2}{2a} + 2a^2 + 3 = 10a^2 - 4 + 2a^2 + 3 = 12a^2 - 1$.

Le point d'intersection a donc pour coordonnées $\left(\dfrac{5a^2-2}{2a}, 12a^2 - 1\right)$.

.................................................................................................................................................

# Fiche nº 21. Généralités sur les vecteurs

## Réponses

**21.1** a) ........ $\boxed{x^2 + 12x + 36}$

**21.1** b) ......... $\boxed{1 - 4x + 4x^2}$

**21.1** c) ............... $\boxed{1 - 9x^2}$

**21.1** d) .... $\boxed{-50x^2 - 60x - 28}$

**21.1** e) ......... $\boxed{3x^2 - 4x + 1}$

**21.1** f) .................. $\boxed{-x^2}$

**21.2** a) ............ $\boxed{\dfrac{-1}{q(q-1)}}$

**21.2** b) ............... $\boxed{\dfrac{2q^2}{1-q^2}}$

**21.2** c) ................ $\boxed{\dfrac{1}{1-q}}$

**21.2** d) ......... $\boxed{\dfrac{4q^2 - 2q + 1}{2q - 1}}$

**21.2** e) .............. $\boxed{\dfrac{q^2}{(q+1)^2}}$

**21.2** f) ............... $\boxed{\dfrac{-1}{q^2 - 1}}$

**21.3** ...................... $\boxed{\text{c}}$

**21.4** a) ....... $\boxed{-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \dfrac{5}{4}\overrightarrow{\mathrm{CD}}}$

**21.4** b) ....... $\boxed{-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{CD}}}$

**21.4** c) ......... $\boxed{-\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{CD}}}$

**21.4** d) ............... $\boxed{-\dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{CD}}}$

**21.4** e) ........... $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{CD}}}$

**21.4** f) .......... $\boxed{\dfrac{5}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{CD}}}$

**21.5** a) ................... $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{AF}}}$

**21.5** b) .................. $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{HG}}}$

**21.5** c) ................... $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{BG}}}$

**21.5** d) .................. $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{AF}}}$

**21.6** a) .................. $\boxed{-\dfrac{3}{2}}$

**21.6** b) ...................... $\boxed{0}$

**21.6** c) ..................... $\boxed{\dfrac{3}{4}}$

**21.6** d) ...................... $\boxed{0}$

**21.7** a) .............. $\boxed{0 \text{ et } -2}$

**21.7** b) ................ $\boxed{0 \text{ et } 1}$

**21.8** a) .................. $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{BH}}}$

**21.8** b) ..................... $\boxed{\vec{0}}$

**21.8** c) .................. $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{AO}}}$

**21.8** d) .................. $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{BA}}}$

**21.8** e) .................. $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{NM}}}$

**21.8** f) .................. $\boxed{2\overrightarrow{\mathrm{AB}}}$

**21.9** ..................... $\boxed{\text{e}}$

**21.10** ..................... $\boxed{\vec{0}}$

**21.11** a) ........... $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}}$

**21.11** b) ....... $\boxed{-2\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}$

**21.11** c) ........... $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}}$

**21.11** d) .......... $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 4\overrightarrow{\mathrm{AC}}}$

**21.12** a) ................. $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{BE}}}$

**21.12** b) ................. $\boxed{2\overrightarrow{\mathrm{AE}}}$

**21.12** c) ................ $\boxed{\dfrac{5}{4}\overrightarrow{\mathrm{SA}}}$

**21.12** d) ................. $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{CA}}}$

**21.13** a) .................... $\boxed{2}$

**21.13** b) .................... $\boxed{3}$

**21.13** c) .................... $\boxed{4}$

**21.14** a) ......... $\boxed{(1 + 2\alpha)\overrightarrow{\mathrm{AB}}}$

**21.14** b) ......... $\boxed{2(1 - \alpha)\overrightarrow{\mathrm{AB}}}$

**21.14** c) .............. $\boxed{-\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}}$

**21.14** d) ......... $\boxed{2(1 - \alpha)\overrightarrow{\mathrm{AB}}}$

**21.15** a) ................. $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}$

**21.15** b) ................. $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{CD}}}$

**21.15** c) ................. $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{CD}}}$

**21.15** d) ................. $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{EF}}}$

**21.16** a) ................. $\boxed{2\vec{v}}$

**21.16** b) ............... $\boxed{-\dfrac{6}{5}\vec{v}}$

**21.16** c) .................. $\boxed{1\vec{v}}$

**21.16** d) .............. $\boxed{-\dfrac{33}{28}\vec{v}}$

**21.17** a) .......... $\boxed{\vec{u} = -\dfrac{1}{2}\vec{v}}$

**21.17** b) .......... $\boxed{\vec{u} = -\dfrac{1}{4}\vec{v}}$

**21.17** c) .......... $\boxed{\vec{u} = -\dfrac{1}{8}\vec{v}}$

**21.17** d) ........... $\boxed{\vec{u} = -4\vec{v}}$

**21.18** a) ......... $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{CD}}}$

**21.18** b) ....... $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{AB}} = -\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{CD}}}$

**21.18** c) .......... $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}}$

**21.18** d) .......... $\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}}$

**21.19** .......... $\boxed{\overrightarrow{GA} = -5\overrightarrow{GC}}$

**21.20** .......... $\boxed{\overrightarrow{PN} = \frac{4}{3}\overrightarrow{PM}}$

**21.21** a) ....... $\boxed{\vec{u} = (\alpha - 1)\vec{v}}$

**21.21** b) .......... $\boxed{\vec{u} = -\alpha\vec{v}}$

**21.21** c) ....... $\boxed{\vec{u} = (\alpha - 1)\vec{v}}$

**21.21** d) .......... $\boxed{\vec{u} = 4\alpha\vec{v}}$

**21.22** a) ... $\boxed{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}}$

**21.22** b) .......... $\boxed{\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IJ}}$

**21.22** c) .............. $\boxed{-3\overrightarrow{AB}}$

**21.22** d) ................ $\boxed{\overrightarrow{MN}}$

**21.23** a) . $\boxed{\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})}$

**21.23** b) ........ $\boxed{\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}}$

**21.23** c) .................. $\boxed{\vec{0}}$

**21.23** d) .................. $\boxed{\vec{0}}$

## Corrigés

**21.1 a)** On a $(x+6)^2 = x^2 + 2 \times x \times 6 + 6^2 = x^2 + 12x + 36$.

**21.1 b)** On a $(1-2x)^2 = 1^2 - 2 \times 2 \times 1 \times 2x + (2x)^2 = 1 - 4x + 4x^2$.

**21.1 c)** On a $(1+3x)(1-3x) = 1^2 - (3x)^2 = 1 - 9x^2$.

**21.1 d)** On a $-2(3+5x)^2 - 10 = -2(9 + 30x + 25x^2) - 10 = -18 - 60x - 50x^2 - 10 = -50x^2 - 60x - 28$.

**21.1 e)** On a $(2x-1)^2 - x^2 = 4x^2 - 4x + 1 - x^2 = 3x^2 - 4x + 1$.

**21.1 f)** On a $-(x-2)(x+2) - 4 = -(x^2 - 4) - 4 = -x^2 + 4 - 4 = -x^2$.

**21.2 a)** On a $\frac{1}{q} - \frac{1}{q-1} = \frac{q-1}{q(q-1)} - \frac{q}{q(q-1)} = \frac{q-1-q}{q(q-1)} = \frac{-1}{q(q-1)}$.

**21.2 b)** On a $\frac{q}{1-q} - \frac{q}{1+q} = \frac{q(1+q)}{(1+q)(1-q)} - \frac{q(1-q)}{(1+q)(1-q)} = \frac{q+q^2-(q-q^2)}{(1-q)(1+q)} = \frac{2q^2}{1-q^2}$.

**21.2 c)** On a $\frac{2}{1-q^2} + \frac{-1}{1+q} = \frac{2}{(1-q)(1+q)} + \frac{-(1-q)}{(1-q)(1+q)} = \frac{2-(1-q)}{(1-q)(1+q)} = \frac{1+q}{(1-q)(1+q)} = \frac{1}{1-q}$.

**21.2 d)** On a $2q + \frac{1}{2q-1} = \frac{2q(2q-1)}{2q-1} + \frac{1}{2q-1} = \frac{4q^2-2q}{2q-1} = \frac{4q^2-2q+1}{2q-1}$.

**21.2 e)** On a

$$\begin{aligned}1 - \frac{2}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} &= \frac{(q+1)^2}{(q+1)^2} - \frac{2(q+1)}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^2}\\ &= \frac{(q+1)^2 - 2(q+1) + 1}{(q+1)^2}\\ &= \frac{q^2+2q+1-2q-2+1}{(q+1)^2} = \frac{q^2}{(q+1)^2}.\end{aligned}$$

**21.2 f)** On a $\frac{1}{q+1} - \frac{q}{q^2-1} = \frac{q-1}{(q-1)(q+1)} - \frac{q}{q^2-1} = \frac{q-1-q}{q^2-1} = \frac{-1}{q^2-1}$.

**21.6** a) On factorise : $\vec{u} = (\alpha + 1 - \alpha + 2 + 2\alpha)\vec{v} = (2\alpha + 3)\vec{v}$. Ainsi, on a les équivalences

$$\vec{u} = \vec{0} \iff 2\alpha + 3 = 0 \iff \alpha = -\frac{3}{2}.$$

**21.6** b) On factorise : $\vec{u} = (2\alpha + 1 + (\alpha+1)(\alpha-1) - \alpha^2)\vec{v} = (2\alpha + 1 + \alpha^2 - 1 - \alpha^2)\vec{v} = 2\alpha\vec{v}$.

Ainsi, on a les équivalences $\vec{u} = \vec{0} \iff 2\alpha = 0 \iff \alpha = 0$.

**21.6** c) On factorise :

$$\vec{u} = (-(\alpha^2+1) + \alpha - 2 + \alpha(\alpha+3))\vec{v} = (-\alpha^2 - 1 + \alpha - 2 + \alpha^2 + 3\alpha)\vec{v} = (-3 + 4\alpha)\vec{v}.$$

Ainsi, on a les équivalences $\vec{u} = \vec{0} \iff -3 + 4\alpha = 0 \iff \alpha = \dfrac{3}{4}$.

**21.6** d) On factorise :

$$\vec{u} = (2\alpha^2 - (\alpha+1)^2 + 2\alpha + 1)\vec{v} = (2\alpha^2 - \alpha^2 - 2\alpha - 1 + 2\alpha + 1)\vec{v} = \alpha^2\vec{v}.$$

Ainsi, on a les équivalences $\vec{u} = \vec{0} \iff \alpha^2 = 0 \iff \alpha = 0$.

**21.7** a) On a

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \frac{\alpha}{\alpha+1}\vec{v} + (\alpha+1)\vec{v} - \vec{v} = \Big(\frac{\alpha}{\alpha+1} + \alpha + 1 - 1\Big)\vec{v}\\ &= \Big(\frac{\alpha}{\alpha+1} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\alpha+1}\Big)\vec{v} = \frac{\alpha + \alpha(\alpha+1)}{\alpha+1}\vec{v} = \frac{\alpha(\alpha+2)}{\alpha+1}\vec{v}\end{aligned}$$

Ainsi, on a l'équivalence $\vec{u} = \vec{0} \iff \alpha = 0$ ou $\alpha = 2$.

**21.7** b) On a

$$\begin{aligned}\vec{u} &= (1+\alpha)\vec{v} + \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\vec{v} - 2\vec{v} = \Big(1 + \alpha + \frac{1-\alpha}{1+\alpha} - 2\Big)\vec{v}\\ &= \Big(\alpha - 1 + \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\Big)\vec{v} = \frac{(\alpha-1)(\alpha+1) + 1 - \alpha}{1+\alpha}\vec{v}\\ &= \frac{\alpha^2 - 1}{1+\alpha}\vec{v} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{1+\alpha}\vec{v}\end{aligned}$$

Ainsi, on a l'équivalence $\vec{u} = \vec{0} \iff \alpha = 0$ ou $\alpha = 1$.

**21.8** a) On a $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FH} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BH}$.

**21.8** b) On a $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{KI} + \overrightarrow{JK} = \overrightarrow{KJ} + \overrightarrow{JK} = \vec{0}$.

**21.8** c) On a $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EG} - \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{GO} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GO} = \overrightarrow{AO}$.

**21.8** d) On a $-(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{BI}) + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IE} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA}$.

**21.8** e) On a $\overrightarrow{EM} - (\overrightarrow{EB} - \overrightarrow{NM}) + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{EM} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{NB} = \overrightarrow{NM}$.

**21.8** f) On a $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{EH}) - (\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{AH}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB}$.

**21.10** On a $\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{EB} - \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{EA} - \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{FO} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$.

**21.11** a) On a $\vec{u} = \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

**21.11 b)** On a $\vec{u} = -\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$.

**21.11 c)** On a $\vec{u} = 2\overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

**21.11 d)** On a $\vec{u} = 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB}) + 3\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}$.

**21.12 a)** On a $2\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BE}$.

**21.12 b)** On a $\frac{1}{2}\overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ME} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AE}$.

**21.12 c)** On a $-\frac{1}{4}\overrightarrow{VS} + \frac{1}{4}\overrightarrow{VA} - \overrightarrow{AS} = \frac{1}{4}\overrightarrow{SV} + \frac{1}{4}\overrightarrow{VA} + \overrightarrow{SA} = \frac{1}{4}\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SA} = \frac{5}{4}\overrightarrow{SA}$.

**21.12 d)** On a $\frac{1}{2}\big(\overrightarrow{AB} - 2(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB})\big) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \big(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\big) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA}$.

**21.13 a)** On a $\vec{u} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \alpha\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} = 3\overrightarrow{AB} - \alpha\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = (2-\alpha)\overrightarrow{AB}$. Ainsi, on a les équivalences

$$\vec{u} = \vec{0} \iff 2 - \alpha = 0 \iff \alpha = 2.$$

**21.13 b)** On a $\vec{u} = -3\overrightarrow{BP} + \alpha\big(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{PB}\big) + 3\overrightarrow{BA} = -3\overrightarrow{BP} + \alpha\overrightarrow{AB} + \alpha\overrightarrow{BP} - 3\overrightarrow{AB} = (\alpha-3)(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}) = (\alpha-3)\overrightarrow{AP}$. Ainsi, on a les équivalences $\vec{u} = \vec{0} \iff \alpha - 3 = 0 \iff \alpha = 3$.

**21.13 c)** On a $\vec{u} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EF} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AF} + \frac{\alpha}{6}\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EF} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} - \frac{2}{3}\overrightarrow{EF} + \frac{\alpha}{6}\overrightarrow{AE} = \big(-\frac{2}{3} + \frac{\alpha}{6}\big)\overrightarrow{AE}$.
Ainsi, on a les équivalences $\vec{u} = \vec{0} \iff -\frac{2}{3} + \frac{\alpha}{6} = 0 \iff \alpha = 4$.

**21.14 a)** On a

$$\vec{u} = (1+\alpha)\overrightarrow{AB} - \alpha\overrightarrow{CA} + \alpha\overrightarrow{CB} = (1+\alpha)\overrightarrow{AB} + \alpha\big(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\big) = (1+\alpha)\overrightarrow{AB} + \alpha\overrightarrow{AB} = (1+2\alpha)\overrightarrow{AB}.$$

**21.14 b)** On a

$$\begin{aligned}\vec{u} &= (1-\alpha)(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}) - (\alpha-1)\overrightarrow{AC} = (1-\alpha)\overrightarrow{AB} - (1-\alpha)\overrightarrow{BC} + (1-\alpha)\overrightarrow{AC}\\ &= (1-\alpha)\overrightarrow{AB} + (1-\alpha)\overrightarrow{CB} + (1-\alpha)\overrightarrow{AC}\\ &= (1-\alpha)\overrightarrow{AB} + (1-\alpha)\overrightarrow{AB} = 2(1-\alpha)\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

**21.14 c)** On a

$$\vec{u} = (1 - \frac{1}{1-\alpha})\overrightarrow{AC} + \alpha(\overrightarrow{BA} + \frac{1}{1-\alpha}\overrightarrow{AC}) = \vec{u} = \frac{-\alpha}{1-\alpha}\overrightarrow{AC} + \alpha\overrightarrow{BA} + \frac{\alpha}{1-\alpha}\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{BA} = -\alpha\overrightarrow{AB}.$$

**21.16 a)** On a les équivalences $3\vec{u} = 6\vec{v} \iff \vec{u} = \frac{6}{3}\vec{v} \iff \vec{u} = 2\vec{v}$.

**21.16 b)** On a les équivalences $\frac{1}{2}\vec{u} = -\frac{3}{5}\vec{v} \iff \vec{u} = -\frac{2\times 3}{5}\vec{v} \iff \vec{u} = -\frac{6}{5}\vec{v}$.

**21.16 c)** On a les équivalences $\frac{1}{2}(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{0} \iff \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} = \vec{0} \iff \vec{u} = \vec{v}$.

**21.16** d) On a les équivalences

$$\frac{1}{3}\vec{u}+\frac{3}{4}\vec{v}=-2(\vec{u}+\vec{v}) \iff \frac{1}{3}\vec{u}+\frac{3}{4}\vec{v}=-2\vec{u}-2\vec{v} \iff \frac{1}{3}\vec{u}+2\vec{u}=-2\vec{v}-\frac{3}{4}\vec{v}$$
$$\iff \frac{7}{3}\vec{u}=-\frac{11}{4}\vec{v} \iff \vec{u}=-\frac{33}{28}\vec{v}.$$

**21.17** a) On remarque que $\vec{v}=-2\times(-2)\overrightarrow{AB}$, d'où $\vec{u}=-\dfrac{1}{2}\vec{v}$.

**21.17** b) On remarque que $4\vec{u}=2\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{AB}=-\big(2\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AB}\big)=-\vec{v}$, d'où $\vec{u}=-\dfrac{1}{4}\vec{v}$.

**21.17** c) On a $\vec{u}=-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}=-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BC}=-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{CB}=-\dfrac{1}{8}\big(2\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CB}\big)=-\dfrac{1}{8}\vec{v}$.

**21.17** d) On a $\vec{u}=2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{CB}+2\overrightarrow{AC}=4\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{CB}=-4\big(\overrightarrow{CA}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CB}\big)=-4\vec{v}$.

**21.18** a) On a les équivalences

$$-4\overrightarrow{AD}+4\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{DC}=\vec{0} \iff 4\overrightarrow{DA}+4\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}=\vec{0} \iff 4\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}=\vec{0} \iff \overrightarrow{AB}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CD}.$$

**21.18** b) On a les équivalences

$$3\big(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BA}\big)-3\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\vec{0} \iff 3\overrightarrow{AD}+3\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}$$
$$\iff 3\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{CD}+3\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}$$
$$\iff 6\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{CD} \iff \overrightarrow{AB}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}.$$

**21.18** c) On a les équivalences

$$\overrightarrow{CB}-3\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC} \iff \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}$$
$$\iff -2\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{AC}$$
$$\iff -2\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{DC} \iff \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}.$$

**21.18** d) On a les équivalences

$$-\frac{1}{3}\big(\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA}\big)=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB} \iff \frac{1}{3}\overrightarrow{DB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CB} \iff \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CB} \iff \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}.$$

**21.19** On a

$$\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{BG}+3\overrightarrow{GC}+2\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GC}+3\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GA}+5\overrightarrow{GC}.$$

Enfin, on a l'équivalence $\overrightarrow{GA}+5\overrightarrow{GC}=\vec{0} \iff \overrightarrow{GA}=-5\overrightarrow{GC}$.

**21.20** On a

$$\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{AM}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$$
$$=\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{AM}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{AM}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PA}=\frac{4}{3}\overrightarrow{PA}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AM}=\frac{4}{3}\overrightarrow{PM}.$$

**21.21 a)** On remarque que $(\alpha-1)\vec{v} = \dfrac{\alpha-1}{\alpha-1}\overrightarrow{AB} + (\alpha-1)(\alpha+1)\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + (\alpha^2-1)\overrightarrow{AC}$. Ainsi $\vec{u} = (\alpha-1)\vec{v}$.

**21.21 b)** On a

$$\vec{u} = \alpha\overrightarrow{AB} - \big(1 - \frac{1}{\alpha+1}\big)\overrightarrow{AC} = -\alpha\overrightarrow{BA} - \frac{\alpha}{\alpha+1}\overrightarrow{AC} \qquad \text{et} \qquad -\alpha\vec{v} = -\alpha\overrightarrow{BA} - \frac{\alpha}{\alpha+1}\overrightarrow{AC}.$$

Ainsi $\vec{u} = -\alpha\vec{v}$.

**21.21 c)** On remarque que

$$\begin{aligned}(\alpha-1)\vec{v} &= (\alpha-1)^2\overrightarrow{BA} + \frac{\alpha-1}{\alpha-1}\overrightarrow{CA} = (\alpha^2-2\alpha+1)\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}\\ &= -2\alpha\overrightarrow{BA} + (\alpha^2+1)\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} = 2\alpha\overrightarrow{AB} + (\alpha^2+1)\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} = \vec{u}.\end{aligned}$$

**21.21 d)** On a

$$\vec{u} = (1+2\alpha)^2\overrightarrow{AB} - (1-2\alpha)^2\overrightarrow{AC} + (4\alpha^2+1)\overrightarrow{BC} = (1+4\alpha+4\alpha^2)\overrightarrow{AB} - (1-4\alpha+4\alpha^2)\overrightarrow{AC} + (4\alpha^2+1)\overrightarrow{BC}.$$

**21.22 a)** On a $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{MI}$ car $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

**21.22 b)** On a $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JC} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{IJ}$.

**21.22 c)** On a $-3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{BI} = -3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BI} = -3\overrightarrow{AB}$.

**21.22 d)** On a $\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{NA} - \overrightarrow{BI} + 2\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{MI} - \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{MN}$.

**21.23 a)** On a les équivalences

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} &\iff \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}\\ &\iff 3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0} \iff \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\big(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\big).\end{aligned}$$

**21.23 b)** On a

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}.$$

On en déduit l'égalité $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$.

**21.23 c)** On procède comme précédemment pour obtenir les égalités $\overrightarrow{BG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} &= \frac{3}{2}\overrightarrow{AG} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BG} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CG} = \frac{3}{2}\big(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG}\big)\\ &= \frac{3}{2} \times \vec{0} = \vec{0}.\end{aligned}$$

**21.23 d)** On a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} &= \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CC'}\\ &= \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}.\end{aligned}$$

# Fiche n° 22. Coordonnées des vecteurs

## Réponses

22.1 a) $\boxed{]3,+\infty[}$

22.1 b) $\boxed{]-\infty,3]}$

22.1 c) $\boxed{]-\infty,-1]}$

22.1 d) $\boxed{\left]\frac{1}{7},+\infty\right[}$

22.1 e) $\boxed{]-\infty,2[}$

22.1 f) $\boxed{\left]-\infty,\frac{1}{16}\right[}$

22.2 a) $\boxed{(2x+1)^2}$

22.2 b) $\boxed{(3x-1)(3x+1)}$

22.2 c) $\boxed{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}$

22.2 d) $\boxed{(x+3)^2}$

22.2 e) $\boxed{-6x(2-4x)}$

22.2 f) $\boxed{(3-5x)(x+7)}$

22.3 a) $\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}9\\2\end{pmatrix}}$

22.3 b) $\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-\frac{5}{6}\\-\frac{1}{4}\end{pmatrix}}$

22.3 c) $\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\sqrt{2}-1\\\frac{4\sqrt{5}}{5}\end{pmatrix}}$

22.4 $\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2^n\\8\times 3^{2n}\end{pmatrix}}$

22.5 a) $\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}(1-\alpha)^2\\1-2\alpha\end{pmatrix}}$

22.5 b) $\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\\frac{\alpha+4}{\alpha}\end{pmatrix}}$

22.5 c) $\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\alpha\\4\alpha\end{pmatrix}}$

22.5 d) $\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-\alpha\\(\alpha-1)^2\end{pmatrix}}$

22.6 a) $\boxed{\begin{pmatrix}7\\-3\end{pmatrix}}$

22.6 b) $\boxed{\begin{pmatrix}6-x\\-y\end{pmatrix}}$

22.6 c) $\boxed{\mathrm{D}(-1,3)}$

22.7 a) $\boxed{\mathrm{D}(-2,7)}$

22.7 b) $\boxed{\mathrm{D}(1,20)}$

22.7 c) $\boxed{\mathrm{D}\left(\frac{1}{2},-9\right)}$

22.7 d) $\boxed{\mathrm{D}\left(\frac{44}{5},-\frac{99}{5}\right)}$

22.8 a) $\boxed{\alpha=-1}$

22.8 b) $\boxed{\alpha=3}$

22.8 c) $\boxed{\alpha=-\frac{1}{4}}$

22.9 $\boxed{(\alpha,\beta)=(-2,-1)}$

22.10 a) $\boxed{\begin{pmatrix}9\\-11\end{pmatrix}}$

22.10 b) $\boxed{\overrightarrow{AB}=2\vec{u}-\vec{v}}$

22.11 $\boxed{\mathrm{M}\left(\frac{16}{3},\frac{2}{3}\right)}$

22.12 $\boxed{\left(\frac{(\alpha-1)^2}{3},\frac{3\alpha+2}{3}\right)}$

22.13 a) $\boxed{\sqrt{5}}$

22.13 b) $\boxed{\frac{\sqrt{5}}{4}}$

22.13 c) $\boxed{\sqrt{10}}$

22.13 d) $\boxed{2^{2n}\sqrt{10}}$

22.14 a) $\boxed{\sqrt{2\alpha^4+2}}$

22.14 b) $\boxed{\frac{\sqrt{10}}{9}\alpha}$

22.14 c) $\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha}$

22.14 d) $\boxed{\alpha^{n-1}\sqrt{2(\alpha^2+1)}}$

22.15 a) $\boxed{\text{b}}$

22.15 b) $\boxed{\text{a}}$

22.15 c) $\boxed{\text{b}}$

22.16 a) $\boxed{\lambda=-1}$

22.16 b) $\boxed{\lambda=\frac{1}{\alpha}}$

22.17 a) $\boxed{\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}2\\-\frac{9}{2}\end{pmatrix}}$

22.17 b) $\boxed{\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}}$

22.17 c) $\boxed{\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}2-\frac{\sqrt{2}}{2}\\1-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}}$

22.17 d) $\boxed{\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}-2^{n-1}\\2^{2n-1}\end{pmatrix}}$

**22.18** a) ....... $\boxed{\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}\alpha+1\\ \frac{1}{4}\alpha-4\end{pmatrix}}$

**22.18** b).... $\boxed{\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}\dfrac{-1}{2\alpha(\alpha+1)}\\ \dfrac{1}{\alpha(\alpha+1)}\end{pmatrix}}$

**22.18** c) ......... $\boxed{\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}-\sqrt{\alpha}\\ 2\sqrt{\alpha}\end{pmatrix}}$

**22.18** d) ...... $\boxed{\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}(2\alpha)^{n+1}\\ -(2\alpha)^n\end{pmatrix}}$

**22.19** a)............ $\boxed{\dfrac{p}{1-p}\overrightarrow{BC}}$

**22.19** b) ........... $\boxed{\dfrac{1}{q-1}\overrightarrow{AC}}$

**22.19** c)............ $\boxed{\dfrac{r}{1-r}\overrightarrow{AB}}$

**22.19** d) ...... $\boxed{\overrightarrow{B'C'}\begin{pmatrix}\dfrac{r}{r-1}\\ \dfrac{1}{q-1}\end{pmatrix}}$

**22.19** e) $\boxed{\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{p-1}\\ \dfrac{pq-1}{(1-p)(q-1)}\end{pmatrix}}$

**22.19** f).......... $\boxed{(r-1)\overrightarrow{B'C'}}$

**22.20** a)............. $\boxed{3\alpha^2-\alpha}$

**22.20** b) .................. $\boxed{\dfrac{2}{\alpha}}$

**22.20** c) ........... $\boxed{\dfrac{1}{\alpha(\alpha+1)}}$

**22.20** d) ..... $\boxed{\alpha=\dfrac{1}{2} \text{ et } \alpha=1}$

**22.20** e).... $\boxed{\alpha=-\dfrac{7}{3} \text{ et } \alpha=0}$

## Corrigés

**22.1 a)** On a les équivalences : $2x-6>0 \iff 2x>6 \iff x>3 \iff x\in\,]3,+\infty[$.

......................................................................................................

**22.1 f)** On a les équivalences suivantes :

$$\frac{2}{3}(6x-1)<-4x-\frac{1}{6} \iff 4x-\frac{2}{3}<-4x-\frac{1}{6} \iff 8x<\frac{1}{2} \iff x<\frac{-1}{16} \iff x\in\left]-\infty,\frac{1}{16}\right[.$$

......................................................................................................

**22.2 a)** On a $1+4x+4x^2=1+2\times2\times x+(2x)^2=(2x+1)^2$.

......................................................................................................

**22.2 b)** On a $9x^2-1=(3x)^2-1^2=(3x-1)(3x+1)$.

......................................................................................................

**22.2 c)** On a $x^2-x+\frac{1}{4}=x^2-2\times x\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$.

......................................................................................................

**22.2 d)** On a $(x+1)^2+4(x+1)+4=(x+1)^2+2\times2\times(x+1=+2^2=(x+1+2)^2=(x+3)^2$.

......................................................................................................

**22.2 e)** On a $(1-5x)^2-(1+x)^2=(1-5x-(1+x))(1-5x+1+x)=-6x(2-4x)$.

......................................................................................................

**22.2 f)** On a $25-20x+4x^2-(2+3x)^2=(5-2x)^2-(2+3x)^2=(5-2x-(2+3x))(5-2x+2+3x)=(3-5x)(x+7)$.

......................................................................................................

**22.3 a)** On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4-(-5)\\0-(-2)\end{pmatrix}=\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}9\\2\end{pmatrix}$.

......................................................................................................

**22.3 b)** On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\\ \frac{1}{4}-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-\frac{5}{6}\\-\frac{1}{4}\end{pmatrix}$.

......................................................................................................

**22.3 c)** On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\sqrt{8}-1-\sqrt{2}\\ \sqrt{5}-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}=\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\sqrt{2}-1-\sqrt{2}\\ \dfrac{5}{\sqrt{5}}-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}=\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\sqrt{2}-1\\ \dfrac{4\sqrt{5}}{5}\end{pmatrix}$.

......................................................................................................................................................

**22.4** On a

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2^{n+1}-2^n\\ (1-3^n)(1+3^n)-1+3^{2(n+1)}\end{pmatrix}=\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2^n(2-1)\\ 1-3^{2n}-1+3^{2(n+1)}\end{pmatrix}=\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2^n\\ 3^{2n}(-1+3^2)\end{pmatrix}=\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2^n\\ 8\times 3^{2n}\end{pmatrix}.$$

......................................................................................................................................................

**22.5 a)** On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\alpha-(-1-\alpha^2)\\ 1-2\alpha\end{pmatrix}=\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-2\alpha+\alpha^2\\ 1-2\alpha\end{pmatrix}=\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}(1-\alpha)^2\\ 1-2\alpha\end{pmatrix}$.

......................................................................................................................................................

**22.5 b)** On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\alpha-1}-\dfrac{\alpha}{\alpha-1}\\ \dfrac{2}{\alpha}-\dfrac{-2-\alpha}{\alpha}\end{pmatrix}=\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\dfrac{1-\alpha}{\alpha-1}\\ \dfrac{2-(-2-\alpha)}{\alpha}\end{pmatrix}=\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\ \dfrac{\alpha+4}{\alpha}\end{pmatrix}$.

......................................................................................................................................................

**22.6 c)** De l'égalité $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, on déduit que $\begin{pmatrix}7\\ -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6-x\\ -y\end{pmatrix}$ et en résolvant chacune des deux équations on obtient $D(x,y)=D(-1,3)$.

......................................................................................................................................................

**22.7 a)** On procède comme dans l'exercice précédent. On obtient l'égalité $\begin{pmatrix}-2\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y-8\end{pmatrix}$ ; et, en résolvant chacune des deux équations, on obtient $D(x,y)=D(-2,7)$.

......................................................................................................................................................

**22.7 b)** On obtient l'égalité $\begin{pmatrix}x-3\\ y+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 22\end{pmatrix}$ ; en résolvant les deux équations, on obtient $D(x,y)=D(1,20)$.

......................................................................................................................................................

**22.7 c)** On obtient l'égalité $\begin{pmatrix}x-1\\ y+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{-1}{2}\\ -6\end{pmatrix}$ ; en résolvant les deux équations, on obtient $D(x,y)=D\left(\dfrac{1}{2},-9\right)$.

......................................................................................................................................................

**22.7 d)** On obtient l'égalité $\begin{pmatrix}2x-6\\ 2y+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{3}(x-1)+9\\ \dfrac{1}{3}(y+3)-30\end{pmatrix}$ et, en résolvant chacune des deux équations, on obtient $D(x,y)=D\left(\dfrac{44}{5},-\dfrac{99}{5}\right)$.

......................................................................................................................................................

**22.8 a)** On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0-(\alpha^2-1)\\ \alpha-0\end{pmatrix}=\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-\alpha^2\\ \alpha\end{pmatrix}$. De l'égalité $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, on déduit $\begin{pmatrix}1-\alpha^2\\ \alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}$. ‘
La deuxième équation nous donne $\alpha=-1$ et on vérifie que la première équation est vérifiée.

......................................................................................................................................................

**22.8 b)** On calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-\alpha+11-2(\alpha+1)\\ 2\alpha-2-(\alpha+2)\end{pmatrix}=\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\alpha+9\\ \alpha-4\end{pmatrix}$.
De l'égalité $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, on déduit $\begin{pmatrix}-3\alpha+9\\ \alpha-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}$. La deuxième équation nous donne $\alpha=3$ et on vérifie que la première équation est vérifiée.

......................................................................................................................................................

**22.8** c) On calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2\alpha - \left(-\frac{1}{2}\right) \\ \alpha\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) - \frac{15}{16} \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2\alpha + \frac{1}{2} \\ \alpha^2 + \frac{\alpha}{2} - \frac{15}{16} \end{pmatrix}$.

De l'égalité $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, on déduit $\begin{pmatrix} 2\alpha + \frac{1}{2} \\ \alpha^2 + \frac{\alpha}{2} - \frac{15}{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. La première équation nous donne $\alpha = -\frac{1}{4}$ et on vérifie que la deuxième équation est vérifiée.

.................................................................................................................................................

**22.9** On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} \alpha - 3\beta - 1 \\ 2\alpha + 2\beta + 6 \end{pmatrix}$. De l'égalité $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$, on déduit que le couple $(\alpha, \beta)$ est solution du système d'équations $\begin{cases} \alpha - 3\beta - 1 = 0 \\ 2\alpha + 2\beta + 6 = 0 \end{cases}$. On résout ce système par combinaisons. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{cases} \alpha - 3\beta - 1 = 0 \\ 2\alpha + 2\beta + 6 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha - 3\beta = 1 \\ \alpha + \beta = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha - 3\beta - (\alpha + \beta) = 1 - (-3) \\ \alpha + \beta = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha + (-1) = -3. \end{cases}$$

On obtient finalement $\begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = -1. \end{cases}$

.................................................................................................................................................

**22.10** b) On a $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \begin{pmatrix} 4\alpha - \beta \\ -6\alpha - \beta \end{pmatrix}$. On cherche le couple $(\alpha, \beta)$ vérifiant le système $\begin{cases} 4\alpha - \beta = 9 \\ -6\alpha - \beta = -11. \end{cases}$

On résout ce système par combinaisons. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{cases} 4\alpha - \beta - (-6\alpha - \beta) = 9 - (-11) \\ -6\alpha - \beta = -11 \end{cases} \iff \begin{cases} 10\alpha = 20 \\ -6\alpha - \beta = -11 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 2 \\ -6 \times 2 - \beta = -11 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -1. \end{cases}$$

.................................................................................................................................................

**22.11** Notons $M(x, y)$. On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MA}$ , $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MC}$. On a

$$\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} -5 - x \\ 4 - y \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{MC} = \begin{pmatrix} 6 - x \\ -2 - y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} 15 - x \\ -y \end{pmatrix}.$$

Les coordonnées du vecteur somme sont $\begin{pmatrix} -5 - x + 6 - x + 15 - x \\ 4 - y - 2 - y - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x + 16 \\ 2 - 3y \end{pmatrix}$.

De l'égalité $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$, on déduit $\begin{pmatrix} -3x + 16 \\ 2 - 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On trouve $M\left(\frac{16}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

.................................................................................................................................................

**22.12** Notons $M(x, y)$ les coordonnées du point M. On procède comme pour l'exercice précédent. Les coordonnées du vecteur somme sont $\begin{pmatrix} -3 + \alpha^2 - 2\alpha + 1 \\ -3y + 3\alpha + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x + (\alpha - 1)^2 \\ -3y + 3\alpha + 2 \end{pmatrix}$. De l'égalité $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$, on déduit $\begin{pmatrix} -3x + (\alpha - 1)^2 \\ -3y + 3\alpha + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. La résolution de ces deux équations donne finalement $M\left(\frac{(\alpha - 1)^2}{3}, \frac{3\alpha + 2}{3}\right)$.

.................................................................................................................................................

**22.13** a) On calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ : on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. D'où $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.

.................................................................................................................................................

**22.13** b) On calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ : on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. D'où $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{4}$.

.................................................................................................................................................

**22.13 c)** On calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ : on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\sqrt{3}-\sqrt{2}\\-\sqrt{3}-\sqrt{2}\end{pmatrix}$. La norme de $\overrightarrow{AB}$ est

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2+(-\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} = \sqrt{3-\sqrt{6}+2+3+\sqrt{6}+2} = \sqrt{10}.$$

**22.13 d)** On calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ : on a

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2^{2n+1}-2^{2n}\\2^{2n+2}-2^{2n}\end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2^{2n}(2-1)\\2^{2n}(2^2-1)\end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2^{2n}\\3\times 2^{2n}\end{pmatrix}.$$

La norme de $\overrightarrow{AB}$ est $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(2^{2n})^2+(3\times 2^{2n})^2} = \sqrt{10\times 2^{4n}} = 2^{2n}\sqrt{10}$.

**22.14 a)** On calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ : on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\alpha^2-1\\1+\alpha^2\end{pmatrix}$. La norme de $\overrightarrow{AB}$ est

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(\alpha^2-1)^2+(1+\alpha)^2} = \sqrt{\alpha^4-2\alpha^2+1+1+2\alpha^2+\alpha^4} = \sqrt{2\alpha^4+2}.$$

**22.14 b)** On calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ : on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\frac{\alpha}{3}-\frac{2\alpha}{9}\\\frac{-\alpha}{3}\end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\frac{\alpha}{9}\\\frac{-\alpha}{3}\end{pmatrix}$. La norme de $\overrightarrow{AB}$ est

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{9}\right)^2+\left(\frac{-\alpha}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{10}{9}\alpha^2} = \sqrt{\frac{10}{9}}\alpha.$$

**22.14 c)** On calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ : on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{\alpha^2-1}}{2}\\\frac{\sqrt{\alpha^2-1}}{2}+\frac{1}{2}\end{pmatrix}$. La norme de $\overrightarrow{AB}$ est

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{\alpha^2-1}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{\alpha^2-1}}{2}+\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{2\alpha^2-2}{4}} = \sqrt{\frac{2\alpha^2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\alpha.$$

**22.14 d)** On calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ : on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\alpha^n+\alpha^{n-1}\\-\alpha^{n-1}+\alpha^n\end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\alpha^{n-1}(\alpha+1)\\\alpha^{n-1}(\alpha-1)\end{pmatrix}$. D'où

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{AB}\| &= \sqrt{\big(\alpha^{n-1}(\alpha+1)\big)^2+\big(\alpha^{n-1}(\alpha-1)\big)^2}\\ &= \sqrt{\alpha^{2n-2}\big((\alpha+1)^2+(\alpha-1)^2\big)} = \sqrt{\alpha^{2n-2}(2\alpha^2+2)} = \alpha^{n-1}\sqrt{2(\alpha^2+1)}.\end{aligned}$$

**22.15 a)** On calcule les coordonnée des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ : on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-9\\-7\end{pmatrix}$.

Ces vecteurs sont colinéaires si et seulement s'il existe un nombre réel $k$ tel que $\begin{cases}3k=-9\\2k=-7\end{cases}$. Ce système d'équations est équivalent à $\begin{cases}k=-3\\k=-\frac{7}{2}\end{cases}$. Comme il n'a donc pas de solution, les droites (AB) et (CD) sont sécantes.

**22.15** b) On calcule les coordonnée des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ : on a $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\ \frac{3}{4}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CD}}\begin{pmatrix}\frac{-2}{3}\\ \frac{-2}{3}\end{pmatrix}$. On remarque que $\frac{-8}{9}\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$. Ces vecteurs sont donc colinéaires et les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

---

**22.15** c) On calcule les coordonnée des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ : on a

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}2\sqrt{2}-\sqrt{50}\\ \sqrt{45}-\sqrt{5}\end{pmatrix} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}2\sqrt{2}-5\sqrt{2}\\ 3\sqrt{5}-\sqrt{5}\end{pmatrix} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}-3\sqrt{2}\\ 2\sqrt{5}\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathrm{CD}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}}+\sqrt{5}\end{pmatrix} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{7}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}.$$

Ces vecteurs sont colinéaires si et seulement s'il existe un nombre réel $k$ tel que $\begin{cases}-3\sqrt{2}k = \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 2\sqrt{5}k = \frac{7}{\sqrt{5}}\end{cases}$. Ce système d'équations est équivalent à $\begin{cases}k = \frac{-1}{6}\\ k = \frac{7}{10}\end{cases}$ et n'a donc pas de solution. Les droites (AB) et (CD) sont sécantes.

---

**22.16** a) On a

$$(\alpha-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} = \alpha^2 - \alpha + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \alpha^2 - \alpha = \alpha(\alpha-1) \quad \text{et} \quad \frac{1+\alpha}{1-\alpha^2} = \frac{1+\alpha}{(1-\alpha)(1+\alpha)} = \frac{1}{1-\alpha}.$$

Ainsi, les coordonnées de $\vec{u}$ sont $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha(\alpha-1)\\ \frac{1}{1-\alpha}\end{pmatrix}$ et on remarque que $\vec{u} = -\vec{v}$.

---

**22.16** b) D'une part, on a $\frac{\alpha^n - \alpha^{n+1}}{\alpha-1} = \frac{\alpha^n(1-\alpha)}{\alpha-1} = -\alpha^n$ et, d'autre part, on a $\frac{\alpha^n + \alpha^{n+1}}{\alpha+1} = \frac{\alpha^n(1+\alpha)}{\alpha+1} = \alpha^n$. Ainsi, les coordonnées de $\vec{u}$ sont $\vec{u}\begin{pmatrix}-\alpha^n\\ \alpha^n\end{pmatrix}$ et on remarque que $\vec{u} = \frac{1}{\alpha}\vec{v}$.

---

**22.17** a) On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ : on a $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}3-(-1)\\ -5-4\end{pmatrix} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}4\\ -9\end{pmatrix}$.

De l'égalité $\overrightarrow{\mathrm{AI}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, on déduit que $\overrightarrow{\mathrm{AI}}\begin{pmatrix}2\\ -\frac{9}{2}\end{pmatrix}$.

---

**22.17** b) On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ : on a $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}\frac{7}{3}-\frac{1}{3}\\ -5-5\end{pmatrix} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}2\\ -10\end{pmatrix}$.

De l'égalité $\overrightarrow{\mathrm{AI}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, on déduit que $\overrightarrow{\mathrm{AI}}\begin{pmatrix}1\\ -5\end{pmatrix}$.

---

**22.17** c) On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ : on a $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{2}}-(-4)\\ 2-\frac{2}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}4-\sqrt{2}\\ 2-\sqrt{2}\end{pmatrix}$.

De l'égalité $\overrightarrow{\mathrm{AI}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, on déduit que $\overrightarrow{\mathrm{AI}}\begin{pmatrix}2-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 1-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$.

---

**22.17 d)** On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ : on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2^n - 2^{n+1}\\ 2^{2n+1} - 2^n\end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2^n(1-2)\\ 2^{2n}(2-1)\end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2^n\\ 2^{2n}\end{pmatrix}$.

De l'égalité $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, on déduit que $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}-2^{n-1}\\ 2^{2n-1}\end{pmatrix}$.

**22.18 a)** On calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ : on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\alpha - 2\alpha + 2\\ \frac{3}{4}\alpha - 6 - \frac{1}{4}\alpha - 2\end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\alpha + 2\\ \frac{1}{2}\alpha - 4\end{pmatrix}$.

De l'égalité $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, on déduit que $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}\alpha + 1\\ \frac{1}{4}\alpha - 4\end{pmatrix}$.

**22.18 b)** On calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ : on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\alpha+1} - \dfrac{1}{\alpha}\\ -\dfrac{2}{\alpha+1} + \dfrac{2}{\alpha}\end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\dfrac{-1}{\alpha(\alpha+1)}\\ \dfrac{2}{\alpha(\alpha+1)}\end{pmatrix}$.

De l'égalité $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, on déduit que $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}\dfrac{-1}{2\alpha(\alpha+1)}\\ \dfrac{1}{\alpha(\alpha+1)}\end{pmatrix}$.

**22.18 c)** On calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ : on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1 + \sqrt{\alpha} - 1 - 3\sqrt{\alpha}\\ 3\sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha}\end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\sqrt{\alpha}\\ 4\sqrt{\alpha}\end{pmatrix}$.

De l'égalité $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, on déduit que $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}-\sqrt{\alpha}\\ 2\sqrt{\alpha}\end{pmatrix}$.

**22.18 d)** On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2^{n+3}\alpha^{n+1} - 2^{n+2}\alpha^{n+1}\\ -2^{n+2}\alpha^n + 2^{n+1}\alpha^n\end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2^{n+2}\alpha^{n+1}\\ -2^{n+1}\alpha^n\end{pmatrix}$. On déduit que $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}(2\alpha)^{n+1}\\ -(2\alpha)^n\end{pmatrix}$.

**22.19 a)** On a les équivalences suivantes :

$$\overrightarrow{A'B} = \overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{CB} \iff \overrightarrow{A'B} = \frac{1}{p}\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{CB} \iff \Big(1 - \frac{1}{p}\Big)\overrightarrow{A'B} = \overrightarrow{CB}$$
$$\iff \frac{p-1}{p}\overrightarrow{A'B} = \overrightarrow{CB} \iff \overrightarrow{A'B} = \frac{p}{1-p}\overrightarrow{BC}.$$

**22.19 b)** On a les équivalences suivantes :

$$\overrightarrow{B'A} = \overrightarrow{B'C} + \overrightarrow{CA} \iff \overrightarrow{B'A} = q\overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{CA} \iff (1-q)\overrightarrow{B'A} = \overrightarrow{CA} \iff \overrightarrow{B'A} = \frac{1}{q-1}\overrightarrow{AC}.$$

**22.19 c)** On a les équivalences suivantes :

$$\overrightarrow{C'A} = \overrightarrow{C'B} + \overrightarrow{BA} \iff \overrightarrow{C'A} = \frac{1}{r}\overrightarrow{C'A} + \overrightarrow{BA} \iff \Big(1 - \frac{1}{r}\Big)\overrightarrow{C'A} = \overrightarrow{BA}$$
$$\iff \frac{r-1}{r}\overrightarrow{C'A} = \overrightarrow{BA} \iff \overrightarrow{C'A} = \frac{r}{1-r}\overrightarrow{AB}.$$

**22.19 d)** Décomposons le vecteur $\overrightarrow{B'C'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$. D'après les questions précédentes, on a

$$\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{AC'} = \frac{1}{q-1}\overrightarrow{AC} - \frac{r}{1-r}\overrightarrow{AB}.$$

Ainsi, les coordonnées de $\overrightarrow{B'C'}$ dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ sont $\overrightarrow{B'C'}\begin{pmatrix}\dfrac{r}{r-1}\\ \dfrac{1}{q-1}\end{pmatrix}$.

**22.19 e)** Décomposons le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$ : on a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB'} &= \frac{p}{1-p}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} - \frac{1}{q-1} \\ &= \frac{p}{1-p}\overrightarrow{BA} + \frac{p}{1-p}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} - \frac{1}{q-1}\overrightarrow{AC} \\ &= \Big(1 + \frac{p}{1-p}\Big)\overrightarrow{BA} + \Big(\frac{p}{1-p} - \frac{q}{q-1}\Big)\overrightarrow{AC} = \frac{1}{p-1}\overrightarrow{AB} + \frac{pq-1}{(1-p)(q-1)}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Ainsi, les coordonnées de $\overrightarrow{A'B'}$ dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ sont $\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{p-1} \\ \dfrac{pq-1}{(1-p)(q-1)} \end{pmatrix}$.

**22.19 f)** Les coordonnées du vecteur $r(p-1)\overrightarrow{A'B'}$ sont

$$\begin{pmatrix} \dfrac{r(p-1)}{p-1} \\ \dfrac{r(p-1)(pq-1)}{(1-p)(q-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ \dfrac{-pqr+r}{q-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ \dfrac{r-1}{q-1} \end{pmatrix}.$$

On remarque que $r(p-1)\overrightarrow{A'B'} = (r-1)\overrightarrow{B'C'}$ et que les point $A'$, $B'$ et $C'$ sont ainsi alignés.

**22.20 a)** On a $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 2\alpha(\alpha-1) - (-\alpha)(\alpha+1) = 2\alpha^2 - 2\alpha + \alpha^2 + \alpha = 3\alpha^2 - \alpha$.

**22.20 b)** On a $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{-\alpha-1}{\alpha+1} - \dfrac{-2-\alpha}{\alpha} = -1 + \dfrac{2}{\alpha} + 1 = \dfrac{2}{\alpha}$.

**22.20 c)** On a $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{-1}{\alpha+1} - \dfrac{-1}{\alpha} = \dfrac{-\alpha}{\alpha(\alpha+1)} + \dfrac{\alpha+1}{\alpha(\alpha+1)} = \dfrac{1}{\alpha(\alpha+1)}$.

**22.20 d)** On calcule le déterminant du couple de vecteurs ; on a

$$\begin{aligned}\det(\vec{u}, \vec{v}) &= (2\alpha+1)(\alpha-1) - (-4\alpha)(-\alpha+1) = (2\alpha+1)(\alpha-1) + (-4\alpha)(\alpha-1) \\ &= (\alpha-1)(2\alpha+1-4\alpha) = (\alpha-1)(1-2\alpha).\end{aligned}$$

Le déterminant du couple $(\vec{u}, \vec{v})$ est nul si, et seulement si, $\alpha = \dfrac{1}{2}$ ou $\alpha = 1$.

**22.20 e)** On calcule le déterminant du couple de vecteurs ; on a

$$\begin{aligned}\det(\vec{u}, \vec{v}) &= \frac{4\alpha+1}{\alpha-1} - \frac{\alpha-1}{\alpha+1} = \frac{(4\alpha+1)(\alpha+1) - (\alpha-1)^2}{(\alpha-1)(\alpha+1)} \\ &= \frac{3\alpha^2+7\alpha}{(\alpha-1)(\alpha+1)} = \frac{\alpha(3\alpha+7)}{(\alpha-1)(\alpha+1)}.\end{aligned}$$

Le déterminant du couple $(\vec{u}, \vec{v})$ est nul si et seulement si $\alpha = -\dfrac{7}{3}$ ou $\alpha = 0$.

# Fiche n° 23. Fonctions trigonométriques I

## Réponses

**23.1** a) $\boxed{60}$

**23.1** b) $\boxed{90}$

**23.1** c) $\boxed{135}$

**23.1** d) $\boxed{210}$

**23.2** a) $\boxed{\dfrac{\pi}{4}}$

**23.2** b) $\boxed{\dfrac{3\pi}{2}}$

**23.2** c) $\boxed{\dfrac{2\pi}{3}}$

**23.2** d) $\boxed{\dfrac{5\pi}{8}}$

**23.3** a) $\boxed{\dfrac{\pi}{2}}$

**23.3** b) $\boxed{\dfrac{3\pi}{4}}$

**23.3** c) $\boxed{\dfrac{5\pi}{6}}$

**23.3** d) $\boxed{\dfrac{\pi}{12}}$

**23.3** e) $\boxed{\dfrac{7\pi}{3}}$

**23.3** f) $\boxed{\dfrac{17\pi}{6}}$

**23.3** g) $\boxed{\dfrac{\pi}{2}}$

**23.3** h) $\boxed{-\dfrac{5\pi}{4}}$

**23.3** i) $\boxed{\dfrac{67\pi}{2}}$

**23.4** a) $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

**23.4** b) $\boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

**23.4** c) $\boxed{1}$

**23.4** d) $\boxed{1}$

**23.4** e) $\boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

**23.4** f) $\boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

**23.5** a) $\boxed{-\dfrac{1}{2}}$

**23.5** b) $\boxed{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

**23.5** c) $\boxed{-1}$

**23.5** d) $\boxed{-\dfrac{1}{2}}$

**23.5** e) $\boxed{0}$

**23.5** f) $\boxed{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

**23.6** a) $\boxed{-1}$

**23.6** b) $\boxed{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

**23.6** c) $\boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

**23.7** a) $\boxed{\text{b}}$

**23.7** b) $\boxed{\text{a}}$

**23.8** a) $\boxed{\text{b}}$

**23.8** b) $\boxed{\text{c}}$

**23.9** $\boxed{\text{a, b, c et f}}$

**23.10** $\boxed{\text{b, c et f}}$

**23.11** a) $\boxed{\sqrt{3}}$

**23.11** b) $\boxed{1}$

**23.11** c) $\boxed{0}$

**23.11** d) $\boxed{-1}$

**23.11** e) $\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$

**23.11** f) $\boxed{-\sqrt{3}}$

**23.12** a) $\boxed{\text{b}}$

**23.12** b) $\boxed{\tan(x)}$

**23.13** a) $\boxed{\dfrac{\sqrt{15}}{4}}$

**23.13** b) $\boxed{\dfrac{-\sqrt{3}}{3}}$

**23.13** c) $\boxed{\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$

**23.14** a) $\boxed{-\dfrac{4}{3}}$

**23.14** b) $\boxed{\sqrt{2}}$

**23.15** $\boxed{\dfrac{2}{\sqrt{5}}}$

## Corrigés

**23.1** a) La réponse doit vous sembler naturelle, mais on peut aussi calculer. Notons $\theta_d$ l'angle cherché en degrés. La règle de proportionnalité rappelée donne $\theta_d = \dfrac{180 \times \pi}{3 \times \pi} = \dfrac{180}{3} = 60$.

**23.1** b) La réponse doit vous sembler naturelle, c'est un angle droit. Mais on peut aussi calculer comme ci-dessus et trouver $\theta_d = \dfrac{180 \times \pi}{2 \times \pi} = \dfrac{180}{2} = 90$.

**23.1** c) On calcule comme ci-dessus. On a $\theta_d = \dfrac{180 \times 3\pi}{4 \times \pi} = \dfrac{180 \times 3}{4} = 45 \times 3 = 135$.

**23.1** d) On calcule comme ci-dessus. On a $\theta_d = \dfrac{180 \times 7\pi}{6 \times \pi} = \dfrac{180 \times 7}{6} = 30 \times 7 = 210$.

**23.2** a) La réponse doit vous sembler naturelle : c'est la moitié d'un angle droit, mais on peut aussi calculer. Notons $\theta_r$ l'angle cherché en degré, la règle de proportionnalité rappelée donne $\theta_r = \dfrac{45\pi}{180} = \dfrac{\pi}{4}$.

**23.2** b) On calcule comme ci-dessus. On a $\theta_r = \dfrac{270\pi}{180} = \dfrac{27\pi}{18} = \dfrac{3\pi}{2}$.

**23.2** c) On calcule comme ci-dessus. On a $\theta_r = \dfrac{120\pi}{180} = \dfrac{2\pi}{3}$.

**23.2** d) On calcule comme ci-dessus. On a $\theta_r = \dfrac{112{,}5 \times \pi}{180}$.

Comment simplifier ? On multiplie en haut et en bas par 2 pour se débarrasser de la virgule : on a

$$\theta_r = \frac{225\pi}{360} = \frac{5 \times 45\pi}{5 \times 72} = \frac{45\pi}{72} = \frac{5 \times 9\pi}{8 \times 9} = \frac{5\pi}{8}.$$

**23.3** a) On écrit que $\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{6}$ et on ajoute.

**23.5** b) On a $\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

**23.5** c) On raisonne avec des multiples de $2\pi$ : on a $\cos(7\pi) = \cos(6\pi + \pi) = \cos(\pi) = -1$.

**23.5** d) Pour se ramener à une valeur plus simple, on a en tête que $\dfrac{12}{6} = 2$. Ainsi on a $\dfrac{11\pi}{6} = \dfrac{12\pi}{6} - \dfrac{\pi}{6} = 2\pi - \dfrac{\pi}{6}$. Ainsi, $\sin\left(\dfrac{11\pi}{6}\right) = \sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$.

**23.5** e) On a de même $\dfrac{15\pi}{2} = \dfrac{16\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2} = 8\pi - \dfrac{\pi}{2}$ et donc $\cos\left(\dfrac{15\pi}{2}\right) = \cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

**23.5** f) On écrit que $-\dfrac{7\pi}{3} = -2\pi - \dfrac{\pi}{3}$.

**23.6** a) Remarquer que $\dfrac{14\pi}{4} = \dfrac{7\pi}{2} = 4\pi - \dfrac{\pi}{2}$.

**23.6** c) On a $\sin\left(-\dfrac{7\pi}{4}\right) = -\sin\left(\dfrac{7\pi}{4}\right) = -\sin\left(2\pi - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

**23.7** a) La foncion cosinus est strictement décroissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

**23.7** b) La foncion sinus est strictement croissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

**23.8** a) La foncion cosinus est strictement décroissante sur $[0, \pi]$.

**23.8** b) La fonction sinus n'est pas monotone sur $[0, \pi]$. On trouve des nombres qui vérifient les deux inégalités : par exemple $t_1 = 0$ et $t_2 = \dfrac{\pi}{2}$ puis $t_1 = \dfrac{\pi}{2}$ et $t_2 = \pi$.

**23.9** On évalue et on compare. Ne pas hésiter à s'appuyer sur un cercle trigonométrique.

**23.10** Examinons chaque proposition (il est vivement conseillé de vérifier chaque affirmation sur un cercle trigonométrique) :

- Pour $I_1$ : si $x = \dfrac{\pi}{2}$, l'inégalité n'est pas vérifiée.
- Pour $I_2$ : on a, pour tout $x \in I_2$, $\sin(x) \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \cos x$, donc l'inégalité est vérifiée.
- Pour $I_3$ : on a, pour tout $x \in I_3$, $\sin(x) \leqslant -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ tandis que $-\dfrac{1}{2} \leqslant \cos x$, et puisque $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} < -\dfrac{1}{2}$, l'inégalité est vérifiée.
- Pour $I_4$ : l'inégalité n'est jamais vérifiée puisque le sinus est positif sur $I_4$ tandis que le cosinus y est négatif.
- Pour $I_5$ : l'inégalité n'est pas vérifiée pour $x = \dfrac{7\pi}{6}$ (elle n'est même jamais vérifiée, à part en $\dfrac{5\pi}{4}$, où il y a égalité).
- Pour $I_6$ : on sépare l'analyse en deux cas. Sur $\left[\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, le sinus est négatif, et le cosinus positif, donc l'inégalité est vérifiée. Sur $\left[2\pi, \dfrac{9\pi}{4}\right]$, les valeurs sont les mêmes que sur $I_2$, donc l'inégalité est vérifiée. Au final, l'inégalité est vérifiée sur $I_6$.

**23.11** a) On a $\tan\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{1}{2}} = \sqrt{3}$.

**23.11** b) On a $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = 1$.

**23.11** c) On a $\tan(0) = \dfrac{\sin(0)}{\cos(0)} = \dfrac{0}{1} = 0$.

**23.12** a) On a $\tan(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \dfrac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$.

**23.12** b) On a $\tan(x+\pi) = \dfrac{\cos(x+\pi)}{\sin(x+\pi)} = \dfrac{-\cos(x)}{-\sin(x)} = \tan(x)$.

**23.13** a) On a $\cos^2(x) = 1 - \sin^2 x = 1 - \dfrac{1}{16} = \dfrac{15}{16}$. Ainsi, $\cos(x) = \pm\dfrac{\sqrt{15}}{4}$. Comme $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $\cos(x) \geqslant 0$ et donc $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

**23.13** b) On a $\sin^2(x) = 1-\cos^2(x) = 1-\dfrac{6}{9} = \dfrac{1}{3}$. Ainsi, $\sin(x) = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, mais comme $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$, on a $\sin(x) \leqslant 0$ et donc $\sin(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

**23.14** a) On calcule d'abord $\sin(x)$. On sait que $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) = 1 - \dfrac{9}{25} = \dfrac{16}{25}$, ainsi $\sin(x) = \pm\dfrac{4}{5}$. Or, on a $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$, donc $\sin(x) \leqslant 0$, et $\sin(x) = -\dfrac{4}{5}$. On conlut : $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\dfrac{4}{3}$.

**23.15** Puisque $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $\cos(x) \geqslant 0$ et donc $\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$. Ainsi, on a les équivalences

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{1-\sin^2(x)}} = 2 \iff 2\sqrt{1-\sin^2(x)} = \sin(x) \implies 4(1-\sin^2(x)) = \sin^2(x) \implies \sin^2(x) = \frac{4}{5}.$$

Puisque $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $\sin(x) \geqslant 0$ et donc $\sin(x) = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

# Fiche n° 24. Fonctions trigonométriques II

## Réponses

**24.1** a) .............. $\boxed{\{-1,1\}}$

**24.1** b) .......... $\boxed{\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}}$

**24.1** c) ................ $\boxed{\{0,1\}}$

**24.1** d) ............ $\boxed{\left\{-\frac{1}{2},0\right\}}$

**24.1** e) .............. $\boxed{\{-1,2\}}$

**24.1** f) ............ $\boxed{\left\{-\frac{1}{3},1\right\}}$

**24.1** g) ........... $\boxed{\left\{-\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right\}}$

**24.1** h) ................ $\boxed{\{1,7\}}$

**24.2** a) .............. $\boxed{\{-5,5\}}$

**24.2** b) .............. $\boxed{\{-2,4\}}$

**24.2** c) ............ $\boxed{\left\{-2,\frac{1}{2}\right\}}$

**24.2** d) ........... $\boxed{\left\{-\frac{7}{4},\frac{5}{4}\right\}}$

**24.2** e) ............. $\boxed{\left\{1,\frac{11}{9}\right\}}$

**24.2** f) ............ $\boxed{\left\{-4,\frac{3}{2}\right\}}$

**24.3** a) .......... $\boxed{\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]}$

**24.3** b) .. $\boxed{]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[}$

**24.3** c) ............... $\boxed{]-3,1[}$

**24.3** d) . $\boxed{\left]-\infty,-\frac{3}{2}\right]\cup[1,+\infty[}$

**24.3** e) .............. $\boxed{\left[\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right]}$

**24.3** f) ............... $\boxed{\left]\frac{1}{2},\frac{7}{6}\right[}$

**24.4** a) .................... $\boxed{\frac{1}{2}}$

**24.4** b) .................. $\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

**24.4** c) ..................... $\boxed{1}$

**24.4** d) .................... $\boxed{\frac{1}{2}}$

**24.4** e) .................. $\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

**24.4** f) ..................... $\boxed{1}$

**24.4** g) .................. $\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

**24.4** h) ..................... $\boxed{0}$

**24.4** i) ..................... $\boxed{0}$

**24.5** a) ............... $\boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$

**24.5** b) .................... $\boxed{\frac{1}{2}}$

**24.5** c) .................... $\boxed{\frac{1}{2}}$

**24.5** d) ............... $\boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$

**24.5** e) ................... $\boxed{-1}$

**24.5** f) ................... $\boxed{-1}$

**24.5** g) .................... $\boxed{\frac{1}{2}}$

**24.5** h) ..................... $\boxed{0}$

**24.5** i) ................ $\boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$

**24.6** a) ..................... $\boxed{1}$

**24.6** b) ..................... $\boxed{0}$

**24.6** c) ................... $\boxed{\sqrt{3}}$

**24.6** d) .................. $\boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

**24.6** e) ................. $\boxed{-\sqrt{3}}$

**24.6** f) ..................... $\boxed{1}$

**24.7** a) .................. $\boxed{\text{d}}$

**24.7** b) .................. $\boxed{\text{a}}$

**24.7** c) .................. $\boxed{\text{d}}$

**24.7** d) .................. $\boxed{\text{c}}$

**24.8** a) ............... $\boxed{\sin(x)}$

**24.8** b) ............. $\boxed{-\sin(x)}$

**24.8** c) ............. $\boxed{-\cos(x)}$

**24.8** d) ............... $\boxed{\sin(x)}$

**24.8** e) ............... $\boxed{\cos(x)}$

**24.8** f) ............. $\boxed{-\cos(x)}$

**24.9** a) .................. $\boxed{\text{b}}$

**24.9** b) .................. $\boxed{\text{a}}$

**24.9** c) .................. $\boxed{\text{c}}$

**24.9** d) .................. $\boxed{\text{d}}$

**24.10** a) ................. $\boxed{\text{c}}$

**24.10** b) ................. $\boxed{\text{c}}$

**24.10** c) ................. $\boxed{\text{b}}$

**24.11** a) ................. $\boxed{\text{c}}$

**24.11** b) ................. $\boxed{\text{c}}$

**24.12** a) .... $\boxed{\cos^2(a) - \sin^2(a)}$

**24.12** b) ....... $\boxed{2\sin(a)\cos(a)}$

**24.13** a) ........... $\boxed{\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

**24.13** b) ........... $\boxed{\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

**24.13** c) ........... $\boxed{\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

**24.13** d) ........... $\boxed{\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

**24.14** a) .... $\boxed{\begin{array}{l}\cos(a)\cos(b)\\ +\sin(a)\sin(b)\end{array}}$

**24.14** b) .... $\boxed{\begin{array}{l}\sin(a)\cos(b)\\ -\sin(b)\cos(a)\end{array}}$

**24.15** a) ............. $\boxed{\cos(5x)}$

**24.15** b) ............. $\boxed{\sin(7x)}$

**24.16** ..................... $\boxed{\text{b}}$

## Corrigés

**24.1 c)** Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences $x^2 = x \iff x^2 - x = 0 \iff x(x-1) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 1$.

**24.2 b)** Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences $|x-1| = 3 \iff x - 1 = 3$ ou $x - 1 = -3 \iff x = 4$ ou $x = -2$.

**24.3 a)** Soit $x \in \mathbb{R}$. On rappelle qu'on a $\sqrt{x^2} = |x|$. Par croissance de la fonction racine carrée, on a les équivalences $x^2 \leqslant 3 \iff |x| \leqslant \sqrt{3} \iff -\sqrt{3} \leqslant x \leqslant \sqrt{3}$.

**24.3 b)** Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences $x^2 > 1 \iff |x| > 1 \iff x > 1$ ou $x < -1$.

**24.3 c)** Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences $|x+1| < 2 \iff -2 < x + 1 < 2 \iff -3 < x < 1$.

**24.3 d)** Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences

$$|4x+1| \geqslant 5 \iff 4x+1 \geqslant 5 \text{ ou } 4x+1 \leqslant -5 \iff 4x \geqslant 4 \text{ ou } 4x \leqslant -6 \iff x \geqslant 1 \text{ ou } x \leqslant -\frac{3}{2}.$$

**24.3 e)** Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences

$$(-2x+3)^2 \leqslant 4 \iff |-2x+3| \leqslant 2 \iff -2 \leqslant -2x+3 \leqslant 2 \iff -5 \leqslant -2x \leqslant -1 \iff \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}.$$

**24.3 f)** Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences $\left|\dfrac{5}{6} - x\right| < \dfrac{1}{3} \iff -\dfrac{1}{3} < x - \dfrac{5}{6} < \dfrac{1}{3} \iff \dfrac{1}{2} < x < \dfrac{7}{6}$.

**24.4 a)** D'après le cours, on a $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$. On peut aussi s'aider d'une lecture sur le cercle trigonométrique pour répondre. Dans les calculs suivants, on procède de même.

**24.5 a)** On a $\cos\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi + \dfrac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. On peut retrouver ce résultat par lecture sur le cercle trigonométrique. On procède de même dans les calculs suivants.

**24.6 a)** On a $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$. On procède de même dans les calculs suivants.

**24.7 a)** Par lecture graphique sur le cercle trigonométrique, on voit que $\sin(-x) = -\sin(x)$. On procède de même dans les calculs suivants.

**24.8 a)** Par lecture graphique sur le cercle trigonométrique, on voit que $\sin(\pi - x) = \sin(x)$. On procède de même dans les calculs suivants.

**24.9 a)** On a $\tan(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \dfrac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$. On procède de même dans les calculs suivants.

**24.10 a)** On a $f(0) = \cos(\pi) = -1$ donc la seule courbe possible est la (c).

**24.10 b)** On a $f(0) = \sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$ donc la seule courbe possible est la (c).

**24.10 c)** On a $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\cos(\pi) = 1$ donc la seule courbe possible est la (b).

**24.11 a)** La fonction associée à la courbe, notée $f$, vérifie $f(0) = \dfrac{1}{2}$. Cela élimine les propositions (a) et (d).

On a de plus $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) < 0$, ce qui élimine la proposition (b).

**24.11 b)** La fonction associée à la courbe, notée $f$, vérifie $f(0) > 0$. La seule fonction possible est donc la (c).

**24.12 a)** Il suffit d'appliquer les formules d'addition avec $b = a$.

**24.13 a)** En appliquant les formules d'addition en $\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{\pi}{6}$, on obtient

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

**24.13 b)** En appliquant les formules d'addition en $\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{\pi}{6}$, on obtient

$$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

**24.13 c)** On applique de même les formules d'addition en $\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{-\pi}{4}$.

**24.14 a)** Il suffit d'appliquer les formules d'addition en $a$ et $-b$.

**24.15 a)** On applique la formule d'addition du cosinus en $3x$ et $2x$.

**24.15 b)** On applique la formule d'addition du sinus en $5x$ et $2x$.

**24.16** On a

$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)} = \frac{\frac{\sin(a)\cos(b)}{\cos(a)\cos(b)} + \frac{\sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)}}{\frac{\cos(a)\cos(b)}{\cos(a)\cos(b)} - \frac{\sin(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)}} = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}.$$

# Fiche nº 25. Produit scalaire I

## Réponses

25.1 a) ........ $\boxed{\text{c}}$

25.1 b) ........ $\boxed{\text{b}}$

25.1 c) ........ $\boxed{\text{c}}$

25.1 d) ........ $\boxed{\text{b}}$

25.1 e) ........ $\boxed{\text{a}}$

25.2 a) ........ $\boxed{\text{oui}}$

25.2 b) ........ $\boxed{\text{oui}}$

25.2 c) ........ $\boxed{\text{oui}}$

25.3 a) ........ $\boxed{\text{oui}}$

25.3 b) ........ $\boxed{\text{oui}}$

25.3 c) ........ $\boxed{\text{non}}$

25.4 a) ........ $\boxed{-\frac{5}{2}}$

25.4 b) ........ $\boxed{6}$

25.4 c) ........ $\boxed{\frac{47}{17}}$

25.5 a) ........ $\boxed{-\frac{1}{2} \text{ ou } \frac{1}{2}}$

25.5 b) ........ $\boxed{\frac{7}{4} \text{ ou } \frac{2}{9}}$

25.6 ........ $\boxed{y = \frac{2}{5}x - \frac{8}{5}}$

25.7 a) ........ $\boxed{y = \frac{3}{4}x - \frac{7}{4}}$

25.7 b) ........ $\boxed{y = 4x - 7\sqrt{7}}$

25.7 c) ........ $\boxed{y = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{4}}$

25.8 ........ $\boxed{y = -\sqrt{5}x + 4}$

25.9 a) ........ $\boxed{y = -\frac{1}{3}x - \frac{10}{3}}$

25.9 b) ........ $\boxed{y = 3x - 50}$

25.10 a) ........ $\boxed{0}$

25.10 b) ........ $\boxed{2x + 1}$

25.10 c) ........ $\boxed{\frac{3}{2}y - \frac{15}{4}}$

25.10 d) ........ $\boxed{(x, y) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)}$

25.11 ........ $\boxed{x = \frac{3}{2} \text{ ou } x = -\frac{3}{2}}$

25.12 ........ $\boxed{b = \sqrt{3} \text{ ou } b = -\sqrt{3}}$

## Corrigés

**25.1 a)** On a $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ -2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $2\overrightarrow{AC} = 2\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_B \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - 2 \\ -\frac{3}{2} - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -9 \end{pmatrix}$.
Donc, on a $\vec{p} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -14 \end{pmatrix}$.

---

**25.1 b)** On a les équivalences suivantes :

$$(2x-3)(-5x+15) = 0 \iff 2x - 3 = 0 \text{ ou } -5x + 15 = 0 \iff x = \frac{3}{2} \text{ ou } = \frac{15}{5} = 3.$$

On trouve $\left\{\frac{3}{2}, 3\right\}$.

---

**25.1 c)** On a $4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2 = (2x-3)(2x+3)$.

---

**25.1 d)** On a

$$\frac{4x+5}{3} - \frac{9x-2}{5} = \frac{5(4x+5)}{15} - \frac{3(9x-2)}{15} = \frac{20x+25}{15} - \frac{27x-6}{15} = \frac{20x+25-(27x-6)}{15} = \frac{31}{15} - \frac{7}{15}x.$$

---

**25.1 e)** On a $\dfrac{4 \times 10^{-4} \times 6 \times 10^{-6}}{5 \times 10^{-5}} = \dfrac{4 \times 6 \times 10^{-4} \times 10^{-6}}{5 \times 10^{-5}} = \dfrac{24}{5} \times 10^{-4-6+5} = 4{,}8 \times 10^{-5}$.

---

**25.2 a)** On a $\vec{u}\cdot\vec{v} = (-2)\times 3 + (-3)\times(-2) = 0$. Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont bien orthogonaux.

........................................................................................................................

**25.2 b)** On a $\vec{u}\cdot\vec{v} = \left(-\dfrac{3}{4}\right)\times\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4} = 0$. Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont bien orthogonaux.

........................................................................................................................

**25.2 c)** On a $\vec{u}\cdot\vec{v} = (-\sqrt{2})\times 5 + 5\times\sqrt{2} = 0$. Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont bien orthogonaux.

........................................................................................................................

**25.3 a)** On a $\vec{u}\cdot\vec{v} = 7\times 10^{-8}\times 4\times 10^{4} + 4\times 10^{5}\times(-7\times 10^{-9}) = 28\times 10^{-4} - 28\times 10^{-4} = 0$. Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont bien orthogonaux.

........................................................................................................................

**25.3 b)** On a $\vec{u}\cdot\vec{v} = x\times\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{2}\times\left(-\dfrac{4}{3}\right) = 2-2 = 0$. Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont bien orthogonaux.

........................................................................................................................

**25.3 c)** On a $\vec{u}\cdot\vec{v} = (x-2)\times(x+2) + (3+x)\times(3-x) = x^2 - 4 + 9 - x^2 = 5$. Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux.

........................................................................................................................

**25.4 a)** On a $\vec{u}\cdot\vec{v} = -6x - 15$. Donc, on a l'équivalence $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \iff x = -\dfrac{15}{6} = -\dfrac{5}{2}$.

........................................................................................................................

**25.4 b)** On a $\vec{u}\cdot\vec{v} = (-x)\times\dfrac{2}{3} + 2\times(x-4) = -\dfrac{2x}{3} + 2x - 8 = \dfrac{-2x+6x-24}{3} = \dfrac{4x-24}{3}$.
Donc, on a les équivalences $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \iff 4x - 24 = 0 \iff x = \dfrac{24}{4} = 6$.

........................................................................................................................

**25.4 c)** On a $\vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{1+x}{2}\times\dfrac{3}{8} + (-2)\times\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{3x+3}{16} - \dfrac{2x-2}{5} = \dfrac{15x+15-32x+32}{80} = \dfrac{-17x+47}{80}$.
Donc, on a les équivalences $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \iff -17x+47 = 0 \iff x = \dfrac{47}{17}$.

........................................................................................................................

**25.5 a)** On a $\vec{u}\cdot\vec{v} = (\sqrt{17}x - 3)\times(\sqrt{17}x + 3) + (5+9x)(5-9x) = 17x^2 - 9 + 25 - 81x^2 = 16 - 64x^2$.
Donc, on a les équivalences suivantes :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \iff 16 - 64x^2 = 0 \iff 64x^2 = 16 \iff x^2 = \frac{16}{64} = \frac{1}{4} \iff x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = -\frac{1}{2}.$$

........................................................................................................................

**25.5 b)** On a

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= (4x-7)\times(4x-7) + (x+1)\times(20x-35) = (4x-7)\times(4x-7) + 5(x+1)\times(4x-7)\\ &= (4x-7)(4x-7+5(x+1)) = (4x-7)(4x-7+5x+5) = (4x-7)(9x-2).\end{aligned}$$

Donc, on a les équivalences suivantes :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \iff (4x-7)(9x-2) = 0 \iff 4x-7 = 0 \text{ ou } 9x-2 = 0 \iff x = \frac{7}{4} \text{ ou } x = \frac{2}{9}.$$

........................................................................................................................

**25.6** Une équation cartésienne de la droite $(d_1)$ est donnée sous la forme : $-2x + 5y + c = 0$.
Or, on a les équivalences suivantes :

$$\text{A}(-6,-4) \text{ appartient à } (d_1) \iff -2\times(-6) + 5\times(-4) + c = 0 \iff 12 - 20 + c = 0 \iff c = 8.$$

Une équation cartésienne de la droite $(d_1)$ est ainsi $-2x + 5y + 8 = 0$.

L'équation réduite de la droite $(d_1)$ est donc $y = \dfrac{2}{5}x - \dfrac{8}{5}$.

........................................................................................................................

**25.7** a) Une équation cartésienne de la droite $(d_2)$ est donnée sous la forme : $3x - 4y + c = 0$.

Or, on a les équivalences suivantes :

$$\mathrm{B}\left(\frac{1}{3}, -\frac{3}{2}\right) \text{ appartient à } (d_2) \iff 3 \times \frac{1}{3} - 4 \times \left(-\frac{3}{2}\right) + c = 0 \iff 1 + 6 + c = 0 \iff c = -7.$$

Une équation cartésienne de la droite $(d_2)$ est ainsi $3x - 4y - 7 = 0$.

L'équation réduite de la droite $(d_2)$ est donc $y = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{7}{4}$.

........................................................................................................................................

**25.7** b) Une équation cartésienne de la droite $(d_3)$ est donnée sous la forme : $4x - y + c = 0$.

Or, on a les équivalences suivantes :

$$\mathrm{C}(\sqrt{7}, -3\sqrt{7}) \text{ appartient à } (d_3) \iff 4\sqrt{7} + 3\sqrt{7} + c = 0 \iff c = -7\sqrt{7}.$$

Une équation cartésienne de la droite $(d_3)$ est ainsi $4x - y - 7\sqrt{7} = 0$.

L'équation réduite de la droite $(d_3)$ est donc $y = 4x - 7\sqrt{7}$.

........................................................................................................................................

**25.7** c) Une équation cartésienne de la droite $(d_4)$ est donnée sous la forme : $-2x + 4y + c = 0$.

Or, on a les équivalences suivantes :

$$\mathrm{D}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ appartient à } (d_4) \iff -2 \times \frac{3}{\sqrt{2}} + 4 \times \frac{1}{\sqrt{2}} + c = 0 \iff -3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + c = 0 \iff c = \sqrt{2}.$$

Une équation cartésienne de la droite $(d_4)$ est ainsi $-2x + 4y + \sqrt{2} = 0$.

L'équation réduite de la droite $(d_4)$ est donc $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

........................................................................................................................................

**25.8** Un vecteur normal à la droite $(D)$ est $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{5} \end{pmatrix}$ ; donc, un vecteur normal à la droite $(d_5)$ est $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Une équation cartésienne de la droite $(d_5)$ est donnée sous la forme : $\sqrt{5}x + y + c = 0$. Or, on a les équivalences suivantes :

$$\mathrm{E}(\sqrt{5}, -1) \text{ appartient à } (d_5) \iff \sqrt{5} \times \sqrt{5} - 1 + c = 0 \iff 4 + c = 0 \iff c = -4.$$

Une équation cartésienne de la droite $(d_5)$ est ainsi $\sqrt{5}x + y - 4 = 0$.

L'équation réduite de la droite $(d_5)$ est donc $y = -\sqrt{5}x + 4$.

........................................................................................................................................

**25.9** a) Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix} 2 - (-1) \\ 6 - (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de la droite $(d_6)$. Une équation de la droite $(d_6)$ est donnée sous la forme : $3x + 9y + c = 0$. Or, on a les équivalences suivantes :

$$\mathrm{A}(-1, -3) \in (d_6) \iff 3 \times (-1) + 9 \times (-3) + c = 0 \iff c = 30.$$

L'équation cartésienne de la droite $(d_6)$ est ainsi $3x + 9y + 30 = 0$. Son équation réduite est donc $y = -\dfrac{1}{3}x - \dfrac{10}{3}$.

........................................................................................................................................

**25.9 b)** Le vecteur $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}17-2\\1-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15\\-5\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de la droite $(d_7)$. Une équation de la droite $(d_7)$ est donnée sous la forme : $15x - 5y + c = 0$.

Or, on a les équivalences suivantes :

$$\mathrm{C}(17,1) \text{ appartient à } (d_7) \iff 15 \times 17 - 5 \times 1 + c = 0 \iff c = -250.$$

Une équation cartésienne de la droite $(d_7)$ est ainsi $15x - 5y - 250 = 0$. L'équation réduite de la droite $(d_7)$ est donc $y = 3x - 50$.

.........................................................................................................................................

**25.10 a)** On a $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\\\frac{5}{2}-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\\1-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$. Donc, on a $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0 \times 2 + \dfrac{3}{2} \times 0 = 0$.

.........................................................................................................................................

**25.10 b)** On a $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix}x-\dfrac{3}{2}\\y-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$. Donc, on a $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD} = 2 \times \left(x - \dfrac{3}{2}\right) + 0 \times (y-1) = 2x - 3$.

.........................................................................................................................................

**25.10 c)** On a $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}0\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix}x+\frac{1}{2}\\y-\frac{5}{2}\end{pmatrix}$. Donc, on a $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD} = 0 \times \left(x + \dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{3}{2} \times (y - \dfrac{5}{2}) = \dfrac{3}{2}y - \dfrac{15}{4}$.

.........................................................................................................................................

**25.10 d)** On a $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux. Autrement dit, on a $\widehat{\mathrm{BAC}} = 90^\circ$. Ainsi, le quadrilatère ABDC est un rectangle si, et seulement si, $\widehat{\mathrm{ABD}} = \widehat{\mathrm{ACD}} = 90^\circ$. Donc, on a les équivalences suivantes :

$$\text{ABDC est un rectangle} \iff \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD} = 0 \text{ et } \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD} = 0 \iff \begin{cases}2x-3=0\\\dfrac{3}{2}y - \dfrac{15}{4} = 0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}2x = 3\\\dfrac{3}{2}y = \dfrac{15}{4}\end{cases} \iff \begin{cases}x = \dfrac{3}{2}\\y = \dfrac{15}{4} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{2}.\end{cases}$$

.........................................................................................................................................

**25.11** On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x + 2\sqrt{2}$. Par conséquent, un vecteur directeur de la tangente de la fonction $f$ au point d'abscisse $x$ est $\vec{v_1}\begin{pmatrix}1\\f'(x)\end{pmatrix} = \vec{v_1}\begin{pmatrix}1\\2x+2\sqrt{2}\end{pmatrix}$.

De même, la tangente de la fonction $f$ au point d'abscisse $-x$ a pour vecteur directeur $\vec{v_2}\begin{pmatrix}1\\-2x+2\sqrt{2}\end{pmatrix}$.

Pour conclure, on remarque qu'on a les équivalences suivantes :

$$\vec{v_1} \perp \vec{v_2} \iff 1 + (2x+2\sqrt{2})(-2x+2\sqrt{2}) = 0 \iff 8 - 4x^2 = -1$$
$$\iff 4x^2 = 9 \iff x^2 = \frac{9}{4} \iff x = \frac{3}{2} \text{ ou } x = -\frac{3}{2}.$$

.........................................................................................................................................

**25.12** Pour commencer, vérifions que deux droites de pente $p$ et $q$ sont perpendiculaires si, et seulement si, $pq = -1$. Ces droites ont pour vecteurs directeurs respectifs $\vec{v_1}\begin{pmatrix}1\\p\end{pmatrix}$ et $\vec{v_2}\begin{pmatrix}1\\q\end{pmatrix}$.

Comme $\vec{v_1}\cdot\vec{v_2} = pq + 1$, on en déduit le résultat annoncé.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = 2x + b$. Les tangentes aux points d'abscisse 1 et $-1$ sont perpendiculaires si, et seulement si, $f'(1) \times f'(-1) = -1$. Pour conclure, on remarque qu'on a les équivalences suivantes :

$$f'(1) \times f'(-1) = -1 \iff (2+b)(-2+b) = -1 \iff b^2 - 4 = -1 \iff b^2 = 3 \iff b = \sqrt{3} \text{ ou } b = -\sqrt{3}.$$

.........................................................................................................................................

# Fiche n° 26. Produit scalaire II

## Réponses

26.1 a) ... $-\frac{3^2}{2}$

26.1 b) ... $\frac{7}{5^3 \times 2^9}$

26.2 a) ... $x^5 - 32$

26.2 b) ... $x^8 - 1$

26.2 c) ... $x^7 + 1$

26.3 a) ... $xx' + yy'$

26.3 b) ... (c)

26.4 a) ... (c)

26.4 b) ... (d)

26.5 a) ... $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

26.5 b) ... $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

26.5 c) ... $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$

26.5 d) ... $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$

26.6 a) ... $9$

26.6 b) ... $-\frac{1}{2}$

26.7 a) ... $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

26.7 b) ... $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$

26.7 c) ... $\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\-3\end{pmatrix}$

26.7 d) ... $\vec{n}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$

26.7 e) ... $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

26.7 f) ... $\vec{n}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-6\end{pmatrix}$

26.7 g) ... $\vec{u}\begin{pmatrix}\pi\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$

26.7 h) ... $\vec{n}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-\pi\end{pmatrix}$

26.8 a) ... (a)

26.8 b) ... (d)

26.8 c) ... (a)

26.9 a) ... (a) et (b)

26.9 b) ... (b) et (c)

26.9 c) ... (b)

26.10 a) ... oui

26.10 b) ... non

26.10 c) ... oui

26.10 d) ... non

26.11 a) ... $2x + y = 3$

26.11 b) ... $x - 2y - 5 = 0$

26.11 c) ... $5x - 7y - \frac{67}{2} = 0$

26.12 a) ... $\mathrm{H}(2, 2)$

26.12 b) ... $\mathrm{H}(1, 5)$

26.13 a) ... $\mathrm{H}\left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$

26.13 b) ... $\mathrm{H}\left(\frac{27}{10}, -\frac{3}{5}\right)$

26.14 ... $2$

26.15 ... $2\sqrt{13}$

26.16 a) ... $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$

26.16 b) ... $x^2 + y^2 + x - 7y - 18 = 0$

26.16 c) ... $x^2 + y^2 - 2\mathrm{e}x - 4y + \mathrm{e}^2 - 1 = 0$

26.17 a) ... $(2, -3)$

26.17 b) ... $4$

26.18 a) ... $\left(1, -\frac{3}{2}\right)$

26.18 b) ... $\frac{\sqrt{13}}{2}$

26.18 c) ... $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$

26.18 d) ... $\frac{\sqrt{5}}{2}$

26.18 e) ... $(2, -1)$

26.18 f) ... $\sqrt{10}$

26.19 a) ... $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$

26.19 b) ... $x^2 + y^2 - 10x - 4y = 0$

26.19 c) ... $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 15 = 0$

26.20 a) ... $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

26.20 b) ... $x_{\mathrm{A}} + ka$

26.20 c) ... $y_{\mathrm{A}} + kb$

**26.20** d) .... $\boxed{-\dfrac{ax_A + by_A + c}{a^2+b^2}}$ **26.20** e) ..... $\boxed{\dfrac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$ **26.22** ...... $\boxed{x^2+y^2+4x+3y-\dfrac{55}{4}=0}$

**26.21** ......... $\boxed{x+y-5=0}$

## Corrigés

**26.1 a)** On a $\dfrac{3^{200}\times 8^{10}}{(-9)^{99}\times 2^{31}} = \dfrac{3^{200}\times 2^{30}}{-3^{198}\times 2^{31}} = -\dfrac{3^2}{2}$.

**26.1 b)** On a

$$\frac{\dfrac{(5^3\times 2^{-3})^2}{(2\times 25)^3}}{\dfrac{10^2\times 5}{28}} = \frac{5^6\times 2^{-6}}{2^3\times 5^6}\times\frac{7\times 2^2}{2^2\times 5^3} = \frac{7}{5^3\times 2^9}.$$

**26.2 a)** On a $(x-2)(x^4+2x^3+4x^2+8+16) = x^5+2x^4+4x^3+8x^2+16x-2x^4-4x^3-8x^2-16x-32 = x^5-32$.

**26.3 a)** C'est la formule du cours donnant le produit scalaire en fonction des coordonnées des vecteurs.

**26.3 b)** Le vecteur $\overrightarrow{n_3}\begin{pmatrix} b \\ -a\end{pmatrix}$ est normal à $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b\end{pmatrix}$ car on a $\vec{n}\cdot\vec{u} = b\times a + (-a)\times b = 0$.

**26.4 a)** Lorsque deux droites sont perpendiculaires, un vecteur directeur de l'une est un vecteur normal à l'autre. Le vecteur $\vec{n}$ est donc un vecteur directeur de $(d_2)$, donc $-\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 5\end{pmatrix}$ aussi.

**26.4 b)** Un vecteur normal à $(d)$ est un vecteur orthogonal à $\vec{u}$. On a $\overrightarrow{n_4}\cdot\vec{u} = 0$ donc $\overrightarrow{n_4}$ est normal à $(d)$.

**26.5 a)** On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -2\end{pmatrix}$. Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 1\end{pmatrix}$ vérifie $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n} = 0$ donc il est normal à (AB).

**26.6 a)** On a $\vec{u}\cdot\vec{n} = (1+m)(2-m)+(m+5)(m-4) = 2-m+2m-m^2+m^2-4m+5m-20 = 2m-18$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont donc orthogonaux si, et seulement si, $m=9$.

**26.6 b)** On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} m+1 \\ 1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n} = -2(m+1)+1 = -2m-1$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $m = -\dfrac{1}{2}$.

**26.7 a)** Une droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b\end{pmatrix}$ et pour vecteur directeur un vecteur non nul orthogonal à $\vec{n}$, par exemple $\vec{u}\begin{pmatrix} b \\ -a\end{pmatrix}$ ou $-\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a\end{pmatrix}$.

**26.8 b)** Puisque le vecteur $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix} 1 \\ -3\end{pmatrix}$ est normal à $(d)$, il en est de même des vecteurs $\overrightarrow{n_2} = -2\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_3} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{n_1}$.

**26.9** a) La droite $(D)$ a pour équation $x - y = 0$ donc $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $(D)$.

Donc, le vecteur $\overrightarrow{n_2} = -\overrightarrow{n_1}$ est également un vecteur normal à $(D)$.

........................................................................................................................................

**26.9** b) La droite $(D)$ a une équation du type $y + c = 0$, où $c \in \mathbb{R}$, donc $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $(D)$, donc $\overrightarrow{n_3} = -\overrightarrow{n_2}$ aussi.

........................................................................................................................................

**26.9** c) La droite $(D)$ a pour équation $4x - y - 2 = 0$ donc $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $(D)$.

........................................................................................................................................

**26.10** a) Deux droites sont perpendiculaires si, et seulement si, des vecteurs normaux à ces droites sont orthogonaux. Ici, $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $(d_1)$ et $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $(d_2)$.

On a $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 3 \times 1 + (-1) \times 3 = 3 - 3 = 0$, donc $(d_1)$ et $(d_2)$ sont perpendiculaires.

........................................................................................................................................

**26.11** a) Un point $\mathrm{M}(x, y)$ du plan appartient à la droite si, et seulement si, $\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{n} = 0$, c'est-à-dire si, et seulement si, $2(x - 2) + (y + 1) = 0$, soit $2x + y = 3$.

........................................................................................................................................

**26.11** b) On procède comme précédemment. On a ici $\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{n} = -2(x - 1) + 4(y + 2) = -2x + 4y + 10$.

........................................................................................................................................

**26.11** c) On procède comme précédemment. On a ici $\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{n} = 5(x - 6) - 7\left(y + \dfrac{1}{2}\right) = 5x - 7y - \dfrac{67}{2}$.

........................................................................................................................................

**26.12** a) On note $(a, b)$ les coordonnées de H. Le point H appartenant à la droite $(d)$, on a $a - b = 0$.

Par ailleurs, le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ est normal à $(d)$ donc $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $(d)$. On a donc $\overrightarrow{\mathrm{MH}} \cdot \vec{u} = 0$, d'où $(a - 1) + (b - 3) = 0$, soit $a + b = 4$.

Les relations $a - b = 0$ et $a + b = 4$ permettent d'obtenir $a = 2$ et $b = 2$.

........................................................................................................................................

**26.12** b) On constate qu'on est dans un cas particulier où le point M appartient à la droite $(d)$, donc son projeté orthogonal est lui-même.

........................................................................................................................................

**26.13** a) On note $(a, b)$ les coordonnées de H. Le point H appartenant à la droite $(d)$, on a $3a - 4b = 0$.

Par ailleurs, le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$ est normal à $(d)$ donc $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $(d)$. On a donc $\overrightarrow{\mathrm{MH}} \cdot \vec{u} = 0$, d'où $4(a - 1) + 3(b - 2) = 0$, soit $4a + 3b = 10$.

Or, on a les équivalences $\begin{cases} 3a - 4b = 0 \\ 4a + 3b = 10 \end{cases} \iff \begin{cases} b = \dfrac{3}{4}a \\ \dfrac{25}{4}a = 10 \end{cases} \iff \begin{cases} b = \dfrac{6}{5} \\ a = \dfrac{8}{5} \end{cases}$.

Les coordonnées du point H sont donc $\left(\dfrac{8}{5}, \dfrac{6}{5}\right)$.

........................................................................................................................................

**26.13** b) De même, les coordonnées $(a, b)$ de H vérifient le système $\begin{cases} 4a + 3b - 9 = 0 \\ 3a - 4b = \dfrac{21}{2} \end{cases}$, dont l'unique solution est donnée par $a = \dfrac{27}{10}$ et $b = -\dfrac{3}{5}$.

**26.14** En procédant comme précédemment, le projeté orthogonal de M sur $(d)$ est $\mathrm{H}\left(\dfrac{1}{5}, -\dfrac{3}{5}\right)$.

La distance entre le point M et la droite $(d)$ est donc égale à

$$\mathrm{MH} = \left\|\overrightarrow{\mathrm{MH}}\right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{5} + 1\right)^2 + \left(-\frac{3}{5} - 1\right)^2} = 2.$$

**26.15** On a $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ donc un vecteur normal à (BC) est $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Une équation cartésienne de (BC) est donc $3x - 2y + c = 0$, où $c \in \mathbb{R}$. Comme le point B appartient à la droite (BC), ses coordonnées vérifient l'équation donc on a $3 \times (-4) - 2 \times (-5) + c = 0$, d'où $c = 2$. Ainsi, une équation cartésienne de (BC) est $3x - 2y + 2 = 0$.

On note $\mathrm{H}(a, b)$ le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC). D'une part, le point H appartient à (BC) donc on a $3a - 2b + 2 = 0$. D'autre part, les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ sont orthogonaux donc on a

$$0 = \overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = 2(a + 10) + 3(b + 1) = 2a + 3b + 23.$$

Or, on a les équivalences

$$\begin{cases} 3a - 2b = -2 \\ 2a + 3b = -23 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{2}{3}L_1}{\iff} \begin{cases} 3a - 2b = -2 \\ \dfrac{13}{3}b = -\dfrac{65}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} b = -5 \\ a = -4. \end{cases}$$

Les coordonnées du point H sont donc $(-4, -5)$.

La distance entre le point A et la droite (BC) est donc égale à

$$\mathrm{AH} = \sqrt{6^2 + (-4)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}.$$

**26.16** a) On a les équivalences suivantes :

$$\mathrm{M}(x, y) \in \mathscr{C} \iff (x - (-1))^2 + (y - 2)^2 = 2^2 \iff x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0.$$

**26.16** b) On a les équivalences suivantes :

$$\mathrm{M}(x, y) \in \mathscr{C} \iff \left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{122}}{2}\right)^2 \iff x^2 + y^2 + x - 7y - 18 = 0.$$

**26.16** c) On a les équivalences suivantes :

$$\mathrm{M}(x, y) \in \mathscr{C} \iff (x - \mathrm{e})^2 + (y - 2)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 \iff x^2 + y^2 - 2\mathrm{e}x - 4y + \mathrm{e}^2 - 1 = 0.$$

**26.17** a) On a $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = (x^2 - 2 \times x \times 2 + 2^2) - 2^2 + (y^2 + 2 \times y \times 3 + 3^2) - 3^2 - 3 = (x-2)^2 + (y+3)^2 - 16$.

Le cercle considéré a donc pour équation $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4^2$. En particulier, son centre a pour coordonnées $(2, -3)$ et son rayon est 4.

**26.18** a) On procède comme précédemment.

**26.19** a) Le centre de $\mathscr{C}$ est le milieu de [AB] : c'est $\Omega(2,3)$. Le rayon de $\mathscr{C}$ est la distance

$$\Omega\mathrm{B} = \sqrt{(5-2)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{9+16} = 5.$$

Le cercle $\mathscr{C}$ a donc pour équation $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5^2$.

......................................................................................................................................................

**26.19** b) Le cercle $\mathscr{C}$ a pour rayon $\Omega\mathrm{O} = \sqrt{(0-5)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{29}$.

Le cercle $\mathscr{C}$ a donc pour équation $(x-5)^2 + (y-2)^2 = 29$ donc $x^2 - 10x + y^2 - 4y = 0$.

......................................................................................................................................................

**26.19** c) Le cercle $\mathscr{C}$ a pour rayon $\Omega\mathrm{B} = \sqrt{(-1-(-4))^2 + (2-3)^2} = \sqrt{10}$.

Le cercle $\mathscr{C}$ a donc pour équation $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 10$ donc $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 15 = 0$.

......................................................................................................................................................

**26.20** b) On a $\overrightarrow{\mathrm{AH}}\begin{pmatrix} x_{\mathrm{H}} - x_{\mathrm{A}} \\ y_{\mathrm{H}} - y_{\mathrm{A}} \end{pmatrix}$ et $k\vec{n}\begin{pmatrix} ka \\ kb \end{pmatrix}$ donc $x_{\mathrm{H}} = x_{\mathrm{A}} + ka$ et $y_{\mathrm{H}} = y_{\mathrm{A}} + kb$.

......................................................................................................................................................

**26.20** d) Le point H appartient à la droite $(D)$ donc on a

$$0 = a(x_{\mathrm{A}} + ka) + b(y_{\mathrm{A}} + kb) + c = ax_{\mathrm{A}} + ka^2 + by_{\mathrm{A}} + kb^2 + c.$$

On a donc $k = -\dfrac{ax_{\mathrm{A}} + by_{\mathrm{A}} + c}{a^2 + b^2}$.

......................................................................................................................................................

**26.20** e) La distance de A à $(D)$ est $\mathrm{AH} = \|k\vec{n}\| = |k| \times \|\vec{n}\| = |k|\sqrt{a^2+b^2} = \dfrac{\left|ax_{\mathrm{A}} + by_{\mathrm{A}} + c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

......................................................................................................................................................

**26.21** Le cercle $\mathscr{C}$ a pour centre $\Omega(1,2)$ et pour rayon $\sqrt{2}$. On note $(T)$ sa tangente au point A.

Un point $\mathrm{M}(x,y)$ appartient à $(T)$ si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ et $\overrightarrow{\Omega\mathrm{A}}$ sont orthogonaux.
Or, on a $\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \overrightarrow{\Omega\mathrm{A}} = (x-2) + (y-3)$. Une équation de $(T)$ est donc $x + y - 5 = 0$.

......................................................................................................................................................

**26.22** Le cercle considéré, noté $\mathscr{C}$, a pour centre $\Omega\left(-2, \dfrac{-3}{2}\right)$ et pour rayon la distance du point $\Omega$ à la droite $(D)$, notée $r$.

Grâce à la formule générale de la distance d'un point à une droite, établie dans un exercice précédent, on a

$$r = \frac{\left|x_\Omega + 2y_\Omega - 5\right|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}.$$

Une équation de $\mathscr{C}$ est donc $(x+2)^2 + \left(y + \dfrac{3}{2}\right)^2 = (2\sqrt{5})^2$ donc $x^2 + y^2 + 4x + 3y + \dfrac{25}{4} = 20$.

......................................................................................................................................................

# Fiche n° 27. Logique

## Réponses

**27.1** a) ........ $\boxed{64c^2 + 112c + 49}$

**27.1** b) ........ $\boxed{4x^2 - 24x + 36}$

**27.1** c) ........ $\boxed{25y^2 - 81}$

**27.1** d) ........ $\boxed{\frac{4}{9}x^2 - \frac{44}{3}x + 121}$

**27.1** e) ........ $\boxed{x^4 - 5x^2 + 4}$

**27.1** f) ........ $\boxed{-x^4 + 3x^2y^2 - y^4}$

**27.2** a) ........ $\boxed{\dfrac{x-y}{xy}}$

**27.2** b) ........ $\boxed{\dfrac{x^3 - x^2 - 6x + 24}{(x-4)(x-2)(x+2)}}$

**27.2** c) ........ $\boxed{\dfrac{-2}{x}}$

**27.2** d) ........ $\boxed{1}$

**27.3** a) ........ non

**27.3** b) ........ oui

**27.3** c) ........ oui

**27.3** d) ........ non

**27.3** e) ........ non

**27.3** f) ........ oui

**27.4** a) ........ non

**27.4** b) ........ non

**27.4** c) ........ oui

**27.4** d) ........ oui

**27.5** a) ........ oui

**27.5** b) ........ non

**27.6** a) ........ « Au moins un bonbon du sac n'est pas rouge »

**27.6** b) ........ « Tous les élèves ont un âge pair »

**27.6** c) ........ « Il existe un nombre entier divisible par 4 mais qui ne se termine pas par 4 »

**27.6** d) ........ « La fonction $f$ n'est pas croissante »

**27.6** e) ........ « La fonction atteint au moins une valeur négative (au sens large) »

**27.7** a) ........ c

**27.7** b) ........ a

**27.7** c) ........ b

**27.7** d) ........ b

**27.8** a) ........ d

**27.8** b) ........ b

**27.8** c) ........ b

**27.9** a) ........ c

**27.9** b) ........ d

**27.10** a) ........ fausse

**27.10** b) ........ vraie

**27.11** a) ........ b

**27.11** b) ........ a et b

**27.11** c) ........ b et c

**27.12** a) ........ vraie

**27.12** b) ........ fausse

**27.12** c) ........ fausse

**27.13** ........ faux

**27.14** a) ........ $\boxed{\exists x \in E,\ \exists y \geqslant 0,\ xy < 1}$

**27.14** b) ........ $\boxed{\exists a \in I,\ \exists b \in I,\ \Big(a < b \text{ et } f(a) \geqslant f(b)\Big)}$

**27.15** ........ b

## Corrigés

**27.1** a) On a $(7+8c)^2 = 7^2 + 2\times 7\times 8c + (8c)^2 = 49 + 112c + 64c^2 = 64c^2 + 112c + 49$.

**27.1** b) On a $(2x-6)^2 = (2x)^2 - 2\times 2x\times 6 + 6^2 = 4x^2 - 24x + 36$.

**27.1** c) On a $(5y-9)(5y+9) = (5y)^2 - 9^2 = 25y^2 - 81$.

**27.1** d) On a $\left(\dfrac{2}{3}x - 11\right)^2 = \left(\dfrac{2}{3}x\right)^2 - 2\times\dfrac{2}{3}x\times 11 + 11^2 = \dfrac{4}{9}x^2 - \dfrac{44}{3}x + 121$.

**27.1** e) On a $(x-1)(x+2)(x+1)(x-2) = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2) = (x^2-1)(x^2-4) = x^4 - 5x^2 + 4$.

**27.1** f) On a

$$\begin{aligned}(xy - x^2 + y^2)(xy + x^2 - y^2) &= (xy - (x^2 - y^2))(xy + (x^2 - y^2)) = (xy)^2 - (x^2 - y^2)^2\\ &= x^2y^2 - (x^4 - 2x^2y^2 + y^4) = -x^4 + 3x^2y^2 - y^4.\end{aligned}$$

**27.2** a) On a

$$\begin{aligned}\frac{x}{xy - y^2} + \frac{2x - y}{xy - x^2} &= \frac{x}{y(x-y)} + \frac{2x-y}{x(y-x)} = \frac{x}{y(x-y)} - \frac{2x-y}{x(x-y)}\\ &= \frac{x^2}{xy(x-y)} - \frac{2xy - y^2}{xy(x-y)} = \frac{x^2 - 2xy + y^2}{xy(x-y)} = \frac{(x-y)^2}{xy(x-y)} = \frac{x-y}{xy}.\end{aligned}$$

**27.2** b) On a

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{x^2 - 4x} + \frac{6}{6 - 3x} + \frac{1}{x+2} &= \frac{x}{x-4} + \frac{2}{2-x} + \frac{1}{x+2} = \frac{x(2-x)(2+x) + 2(x-4)(2+x) + 1(x-4)(2-x)}{(x-4)(2-x)(2+x)}\\ &= \frac{-x^3 + x^2 + 6x - 24}{(x-4)(4-x^2)}.\end{aligned}$$

**27.2** c) On a

$$\begin{aligned}\frac{2x+y}{2x^2 - xy} + \frac{16x}{y^2 - 4x^2} + \frac{2x-y}{2x^2 + xy} &= \frac{2x+y}{x(2x-y)} + \frac{16x}{(y-2x)(y+2x)} + \frac{2x-y}{x(2x+y)}\\ &= \frac{2x+y}{x(2x-y)} - \frac{16x}{(2x-y)(2x+y)} + \frac{2x-y}{x(2x+y)}\\ &= \frac{(2x+y)^2}{x(2x-y)(2x+y)} - \frac{16x^2}{x(2x-y)(2x+y)} + \frac{(2x-y)^2}{x(2x-y)(2x+y)}\\ &= \frac{(2x+y)^2 - 16x^2 + (2x-y)^2}{x(2x-y)(2x+y)}\\ &= \frac{2y^2 - 8x^2}{x(2x-y)(2x+y)} = \frac{-2(4x^2 - y^2)}{x(4x^2 - y^2)} = \frac{-2}{x}.\end{aligned}$$

**27.2** d) On a

$$\left(x - \frac{x^2+y^2}{x+y}\right) \times \left(\frac{1}{y} + \frac{2}{x-y}\right) = \frac{x(x+y) - x^2 - y^2}{x+y} \times \frac{(x-y)+2y}{y(x-y)} = \frac{xy - y^2}{x+y} \times \frac{x+y}{y(x-y)}$$
$$= \frac{y(x-y)}{x+y} \times \frac{x+y}{y(x-y)} = 1.$$

**27.3** a) La proposition « 7 est impair » est vraie, mais pas « 5 est pair ». Il est donc faux de dire que les deux sont vraies.

**27.3** b) Il est vrai de dire que, parmi les propositions « 5 est pair » et « 7 est impair », au moins une est vraie.

**27.3** c) Les propositions « 12 est un multiple de 4 » et « 12 est un multiple de 6 » sont vraies, donc au moins l'une d'elles est vraie.

**27.3** d) Aucune des deux propositions « 12 est un multiple de 5 » et « 12 est un multiple de 24 » n'est vraie.

**27.3** e) La proposition « $4 < 5$ » est vraie, mais « 8 divise 9 » est fausse.

**27.3** f) Les propositions « $4 < 5$ » et « 8 divise 16 » sont vraies, donc au moins l'une d'elles est vraie.

**27.4** a) Je peux habiter en Espagne sans habiter à Madrid.

**27.4** b) Je peux n'avoir aucune sœur mais avoir un ou plusieurs frères.

**27.4** c) Si $a$ et $b$ sont pairs, alors il existe $n \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{Z}$ tels que $a = 2n$ et $b = 2p$. L'entier $a + b = 2(n+p)$ est alors pair.

**27.4** d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x > 1$, alors on a $2x > x + 1 > 0$, donc $\dfrac{2x}{x+1} > \dfrac{x+1}{x+1} = 1$.

**27.5** a) L'entier naturel $x = 3$ vérifie $x^2 = 9 > 7$.

**27.5** b) On prend un contre-exemple. L'entier naturel $x = 2$ vérifie $x^2 = 4 < 7$.

**27.6** a) La négation de la proposition « pour tout $x$, la propriété $P(x)$ est vérifiée » est « il existe $x$ tel que $P(x)$ n'est pas vérifiée ».

**27.6** b) La négation de la proposition « il existe $x$ tel que la propriété $P(x)$ est vérifiée » est « pour tout $x$, $P(x)$ n'est pas vérifiée ».

**27.6** c) La négation de $P \Longrightarrow Q$ est : $P$ et non$(Q)$.

**27.6** d) Attention ! La négation de « la fonction $f$ est croissante » n'est pas « la fonction $f$ est décroissante ». En effet, certaines fonctions ne sont pas monotones.

.......................................................................................................................................

**27.6** e) Attention ! La négation de « la fonction $f$ est à valeurs strictement positives » n'est pas « la fonction $f$ est à valeurs négatives ». En effet, certaines fonctions peuvent prendre des valeurs positives et des valeurs négatives.

.......................................................................................................................................

**27.7** d) On remarque que la propriété peut se réécrire : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists n \in \mathbb{N}$, $(n \leqslant x$ et $x < n + 1)$.

.......................................................................................................................................

**27.8** b) Si je suis français, alors évidemment je suis européen. L'implication « $Q \Longrightarrow P$ » est donc vraie.

Je peux être européen sans être français. Je peux par exemple être italien. L'implication « $P \Longrightarrow Q$ » est fausse.

.......................................................................................................................................

**27.8** c) Un carré est un rectangle mais un rectangle n'est pas nécessairement un carré.

.......................................................................................................................................

**27.9** a) La propriété « $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \Longrightarrow Q(n)$ » est fausse car, pour $n = 7$, on a $n \geqslant 5$ mais on n'a pas $n \leqslant 6$.

La propriété « $\forall n \in \mathbb{N},\ Q(n) \Longrightarrow P(n)$ » est fausse car, pour $n = 4$, on a $n \leqslant 6$ mais on n'a pas $n \geqslant 5$.

.......................................................................................................................................

**27.9** b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a les équivalences $n^2 = n \iff n(n-1) = 0 \iff n = 0$ ou $n = 1$.

.......................................................................................................................................

**27.10** a) Les réels $x = -5$ et $y = -3$ vérifient $xy > 0$ mais $x \leqslant 0$.

La négation de la proposition en question (qui est « $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ xy > 0$ et $(x \leqslant 0$ ou $y \leqslant 0)$ ») est donc vraie.

.......................................................................................................................................

**27.10** b) Le produit de deux réels strictement positifs est strictement positif.

.......................................................................................................................................

**27.12** a) Soit $x \in \mathbb{N}$. L'entier naturel $y = x + 1$ vérifie $x \leqslant y$.

.......................................................................................................................................

**27.12** b) Soit $y \in \mathbb{N}$. L'entier naturel $x = y + 1$ vérifie $x > y$.

La négation de la proposition en question (qui est « $\forall y \in \mathbb{N}, \exists x \in \mathbb{N}, x > y$ ») est donc vraie.

.......................................................................................................................................

**27.12** c) La première proposition est vraie, la seconde est fausse. Elles ne sont donc pas équivalentes.

.......................................................................................................................................

**27.13** En effet, la négation est : « $\exists \varepsilon > 0$, $\forall n_0 \in \mathbb{N}$, $\exists n \geqslant n_0, |u_n - \ell| \geqslant \varepsilon$ ».

.......................................................................................................................................

# Fiche n° 28. Théorie des ensembles

## Réponses

**28.1** a) ........ $\boxed{-\dfrac{14}{15}}$

**28.1** b) ........ $\boxed{\dfrac{3}{7}}$

**28.1** c) ........ $\boxed{\dfrac{4}{7}}$

**28.1** d) ........ $\boxed{2}$

**28.2** a) ........ $\boxed{(x-3)^2}$

**28.2** b) ........ $\boxed{3(x-2)(x+2)}$

**28.2** c) ........ $\boxed{\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2}$

**28.3** a) ........ $\boxed{\left[\dfrac{7}{6},+\infty\right[}$

**28.3** b) ........ $\boxed{\left]-\infty,\dfrac{2}{5}\right]}$

**28.3** c) ........ $\boxed{]-\infty,0[}$

**28.3** d) ........ $\boxed{\left]-\dfrac{9}{10},\dfrac{1}{12}\right]}$

**28.4** a) ........ $\boxed{x\in\left]-2,\dfrac{1}{2}\right]}$

**28.4** b) ........ $\boxed{\left]\dfrac{3\pi-2}{6},\dfrac{5\pi-3}{9}\right[}$

**28.4** c) ........ $\boxed{\left[-\dfrac{13}{7},\dfrac{7}{3}\right[}$

**28.4** d) ........ $\boxed{\left[\dfrac{1}{6},\dfrac{10}{21}\right[}$

**28.5** a) ........ oui

**28.5** b) ........ non

**28.5** c) ........ oui

**28.5** d) ........ non

**28.6** a) ........ non

**28.6** b) ........ oui

**28.6** c) ........ non

**28.6** d) ........ non

**28.7** a) ........ $\boxed{a\geqslant 2}$

**28.7** b) ........ $\boxed{a\leqslant 1}$

**28.7** c) ........ $\boxed{a\leqslant 1}$

**28.7** d) ........ $\boxed{a\geqslant 1}$

**28.8** a) ........ $\boxed{\left]-\dfrac{2}{3},+\infty\right[}$

**28.8** b) ........ $\boxed{[-5,+\infty[}$

**28.8** c) ........ $\boxed{\left]-\infty,\dfrac{4}{3}\right[}$

**28.8** d) ........ $\boxed{\left]\dfrac{32}{15},+\infty\right[}$

**28.9** ........ voir corrigé

## Corrigés

**28.3 c)** Soit $x$ non nul. Alors, on a les équivalences suivantes :

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\leqslant\frac{2}{3}\left(\frac{1}{x}-\frac{3}{4}\right)\iff\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\leqslant\frac{2}{3x}-\frac{1}{2}\iff\frac{1}{3x}\leqslant 0.$$

Donc l'ensemble des $x$ vérifiant l'inéquation est $]-\infty,0[$.

.................................................................................................

**28.4 a)** Soit $x$ un réel. Alors, on a les équivalences suivantes :

$$2+2x\in\,]-2,3]\iff -2<2+2x\leqslant 3\iff -4<2x\leqslant 1\iff -2<x\leqslant\frac{1}{2}.$$

.................................................................................................

**28.4 b)** Soit $x$ un réel. Alors, on a les équivalences suivantes :

$$3x+1>\frac{3\pi}{2}\iff 3x>\frac{3\pi-2}{2}\iff x>\frac{3\pi-2}{6}.$$

De même, on a les équivalences $3x+1<\dfrac{5\pi}{3}\iff 3x<\dfrac{5\pi-3}{3}\iff x<\dfrac{5\pi-3}{9}$.

Ainsi, l'ensemble des réels $x$ vérifiant $3x+1\in\left]\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{5\pi}{3}\right[$ est $\left]\dfrac{3\pi-2}{6},\dfrac{5\pi-3}{9}\right[$.

**28.5** b) Il faut savoir si $\frac{3}{5} \leqslant \frac{7}{12}$. Or, on a l'équivalence $\frac{3}{5} \leqslant \frac{7}{12} \iff 36 \leqslant 35$. Donc, l'inclusion est fausse.

**28.5** d) On remarque que $3 + \frac{1}{4} = \frac{13}{4} = \frac{26}{8}$. Comme la borne de droite est exclue dans le deuxième intervalle, l'inclusion est fausse.

**28.6** a) On a $1 < \frac{4}{3}$ donc on ne peut pas avoir d'inclusion.

**28.6** b) Il faut savoir si $2 + \frac{8}{3} \leqslant \frac{13}{2}$. Or, $2 + \frac{8}{3} = \frac{14}{3}$, et on a les équivalences

$$\frac{14}{3} \leqslant \frac{13}{2} \iff 2 \times 14 \leqslant 3 \times 13 \iff 28 \leqslant 39.$$

Comme on a $28 \leqslant 39$, l'inclusion est donc vraie.

**28.7** b) Comme $a > 0$, on a les équivalences suivantes :

$$[a, +\infty[ \subset \left[a^2, +\infty\right[ \iff a \geqslant a^2 \iff 1 \geqslant a.$$

**28.7** c) Comme $a > 0$, on a les équivalences suivantes :

$$\left[\sqrt{a}, +\infty\right[ \subset \left[a^2, +\infty\right[ \iff \sqrt{a} \geqslant a^2 \iff 1 \geqslant a\sqrt{a} \iff 1 \geqslant a.$$

**28.8** a) L'intersection est non vide si, et seulement si, $a + 1 > \frac{1}{3}$, c'est-à-dire si, et seulement si, $a > -\frac{2}{3}$.

**28.8** b) On a les équivalences suivantes :

$$\left]-\infty, \frac{a}{3} + 2\right] \cap \left[\frac{1}{3}, 2\right] \neq \varnothing \iff \frac{a}{3} + 2 \geqslant \frac{1}{3} \iff \frac{a}{3} \geqslant -\frac{5}{3} \iff a \geqslant -5 \iff a \in [-5, +\infty[.$$

**28.9** On note $D = B \cup C$. Alors

$$\mathsf{Card}(A \cup B \cup C) = \mathsf{Card}(A \cup D) = \mathsf{Card}(A) + \mathsf{Card}(D) - \mathsf{Card}(A \cap D).$$

Or, on a également

$$\mathsf{Card}(D) = \mathsf{Card}(B) + \mathsf{Card}(C) - \mathsf{Card}(B \cap C).$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}
\mathsf{Card}(A \cap D) &= \mathsf{Card}(A \cap (B \cup C)) \\
&= \mathsf{Card}((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\
&= \mathsf{Card}(A \cap B) + \mathsf{Card}(A \cap C) - \mathsf{Card}((A \cap B) \cap (A \cap C)) \\
&= \mathsf{Card}(A \cap B) + \mathsf{Card}(A \cap C) - \mathsf{Card}(A \cap B \cap C).
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
&\mathsf{Card}(A \cup B \cup C) \\
&= \mathsf{Card}(A) + \mathsf{Card}(B) + \mathsf{Card}(C) - \mathsf{Card}(B \cap C) - \Big(\mathsf{Card}(A \cap B) + \mathsf{Card}(A \cap C) - \mathsf{Card}(A \cap B \cap C)\Big) \\
&= \mathsf{Card}(A) + \mathsf{Card}(B) + \mathsf{Card}(C) - \mathsf{Card}(A \cap B) - \mathsf{Card}(A \cap C) - \mathsf{Card}(B \cap C) + \mathsf{Card}(A \cap B \cap C).
\end{aligned}$$