Cahier de calcul

révisions du collège et entraînements pour la Seconde

Seconde

1749 calculs

Page web du *Cahier de calcul*,
dernières versions

Ce cahier de calcul a été écrit collectivement par une équipe composée de professeurs en classes préparatoires et de professeurs en lycée.

Conception et coordination

Colas Bardavid

Aide à la conception

Jérôme Trochon

Équipe des auteurs

Mélissa Bailloeuil-Inglart
Aude Bernard-Champmartin
Ménard Bourgade
Van Bien Bui
Alain Camanes
Pierre Cauchois
Carole Chabanier
Baptiste Claustre
Geneviève Davion
Thomas Desorgeris
Céline Donadei
William Gregory
Benjamin Groux
Nicolas Laillet
Sandrine Larôme
François Laurent
Vincent Le Gruiec
Blaise Le Meaux
Arthur Meyer
Lionel Magnis
Quang-Thai Ngo
Alan Pellé
Hervé Svoboda
Jérôme Trochon

Tests et relecture

Anne-Lucie Delvallez, À compléter

Illustrations

Le pictogramme de l'horloge a été créé par Ralf Schmitzer (The Noun Project).
Le pictogramme de la roue crantée a été créé par AFY Studio (The Noun Project).
Le pictogramme de la calculatrice a été créé par Sita Raisita (The Noun Project).

À adapter

L'illustration de la couverture a été réalisée par Colas Bardavid, sur une idée de Yassine Patel, d'après les biomorphes de Clifford Pickover. Elle illustre les propriétés de certaines fonctions.

Version 0.4.0 — 15 janvier 2026

Sommaire

Calcul littéral

Inégalités et inéquations

Équations

Fonctions

Vecteurs

Géométrie

Pourcentages

Probabilités

Arithmétique

Avant-propos

Avant d'entrer dans le vif du sujet, à savoir le calcul, nous avons souhaité commencer ce livre par un texte sur l'intelligence artificielle. En effet, cette technologie va changer notre façon d'apprendre et nous avons considéré que donner quelques conseils à nos lecteurs à ce sujet pouvait s'avérer utile. Bonne lecture !

IA et apprentissage des mathématiques

Plaidoyer pour une utilisation raisonnée

Les Gants Magiques Musicaux

Imaginez que, demain ou après-demain, un nouvel objet révolutionnaire fasse son apparition : les Gants Magiques Musicaux (qu'on abrègera dans la suite en GMM).

PUB

Les GMM© permettent de jouer n'importe quel morceau au piano !

Enfilez-les, approchez-les de votre visage et dites à vos gants quel morceau vous souhaitez jouer : une sonate de Mozart, un prélude de Chopin ou une gymnopédie de Satie.

Les gants s'illuminent et commencent à bouger. Allez vous asseoir derrière votre piano. Positionnez vos mains au-dessus des touches. C'est parti : les GMM© s'animent et viennent jouer à votre place (et à la perfection) le morceau choisi.

Grâce aux GMM© : finis les cours de piano, finies les longues heures d'étude, finies les gammes. Grâce aux GMM©, tout le monde peut maintenant faire du piano sans effort !

!! Achetez les GMM© !!
— En promo pour le Black Friday, à partir de 399 € ! —

Cela n'arrivera pas.

En effet, même si un jour de tels gants « magiques » venaient à être inventés, les gens continueraient à apprendre à jouer du piano. Quand on apprend à jouer un morceau au piano, on est fier de savoir le jouer et toutes les heures à répéter ce morceau n'ont pas été vaines. En apprenant le piano, on cultive quelque chose à l'intérieur de soi, et cela participe à notre épanouissement.

Les gens n'apprennent pas à jouer du piano simplement pour être capables de jouer tel ou tel morceau. Les heures de cours, le processus d'apprentissage font aussi partie de ce qu'ils recherchent.

L’IA et les maths

L’intelligence artificielle (l’IA) a fait des progrès complètement incroyables ces dernières années.

Avec ChatGPT, Claude, Gemini et consorts, nous disposons aujourd’hui d’outils ultra puissants pour nous assister dans différentes tâches. Parmi elles, l’IA est désormais capable de résoudre des problèmes de mathématiques. Et, elle le fait très bien.

$\longrightarrow$ *Dès lors, pourquoi continuer à apprendre les mathématiques ?*

Pour la même raison que les GMM ne remplaceront jamais les leçons de piano.

Apprendre les mathématiques, c’est une façon de prendre soin de soi. C’est une façon de progresser, de grandir, de devenir adulte. Apprendre les mathématiques, c’est apprendre une façon de penser.

Il est tout à fait possible qu’après vos années d’étude vous n’utilisiez que peu, voire pas du tout, les mathématiques. Pourtant, avoir appris les mathématiques n’aura pas été inutile. En étudiant les mathématiques et en cherchant des exercices, vous aurez cultivé des qualités qui vous seront utiles partout et tout le temps : abstraction, réflexion, concentration, imagination, persévérance, etc.

Étudier les mathématiques, c’est une façon de cultiver un savoir-faire, c’est une façon de s’enrichir intérieurement, et c’est une chance.

$\longrightarrow$ *Peut-on, pour autant, utiliser l’IA quand on apprend les mathématiques ?*

Oui et non.

- Oui : vous pouvez demander à l’IA de vous expliquer quelque chose que vous n’avez pas compris.
- Non, et c’est très important :

  vous ne devez pas demander à l’IA de vous aider à résoudre un exercice.

  Chercher un exercice, cela fait partie de l’apprentissage des mathématiques. C’est même une des composantes essentielles de cet apprentissage. C’est dans les moments de recherche que vous progressez le plus en mathématiques. C’est pourquoi il est important de passer du temps à chercher, à « brouillonner », à tester des idées, à explorer des pistes, etc.

Pour résumer

$\longrightarrow$ Efforcez-vous de ne pas utiliser l’IA en mathématiques. Vous pouvez l’utiliser pour lui demander de vous expliquer quelque chose. Mais, vous ne devez jamais l’utiliser pour vous aider à résoudre un problème ou pour vous donner la solution. Ça ne sert à rien et c’est stérile.

$\longrightarrow$ En vous tenant à cette ligne de conduite, vous progressez en mathématiques et vous cultiverez des qualités de grande valeur. Vous vous entraînerez aussi à utiliser votre intelligence naturelle... Et, qui sait, dans quelques années, ce sera peut-être une compétence très rare et très recherchée !

Dans tout ce livre, l'usage de la calculatrice
est strictement et formellement interdit.

Utiliser une calculatrice pour les exercices serait tout simplement absurde :
le but même de ce livre est de fournir à ses lecteurs
un outil pour s'entraîner au calcul.

Introduction

Le calcul

Le calcul a parfois été délaissé par l'école.

On lui reprochait son côté rébarbatif, on disait que les calculatrices pouvaient s'en charger.
On lui préférait les activités de recherche, plus ludiques, plus intéressantes.
On déconseillait de donner aux élèves des fiches de calcul.

Certes, savoir chercher est essentiel ; mais, tout de même, ce faisant, on a formé des élèves à qui il manquait quelque chose de fondamental.

Les vertus du calcul

Le calcul a de nombreuses qualités, de nombreuses vertus.

- Le calcul est indispensable aux mathématiques.

  Sans calcul, les mathématiques seraient un paysage inerte, sans mouvement.
  C'est le calcul qui permet de transformer une expression $A(x)$ en une autre expression $B(x)$.
  C'est le calcul qui permet de montrer que deux quantités sont égales, que deux choses sont identiques.
  Quand on explore une situation mathématique, l'intuition est la boussole, c'est elle qui nous indique la direction à prendre. Mais c'est le calcul qui permet d'avancer, de passer d'une étape à la suivante.

- Le calcul permet de se familiariser avec les objets mathématiques compliqués.

  Certains objets mathématiques sont difficiles à appréhender. Qu'on pense par exemple aux vecteurs. On peut être dérouté la première fois qu'on doit raisonner avec les vecteurs. Dans ce cas, il est conseillé de beaucoup calculer avec les vecteurs. À force d'en faire, on s'y habitue ; à la fin, on n'est plus dérouté.

- Le calcul donne des idées.

  Face à un problème mathématique, être fort en calcul est très utile. On imagine rapidement ce qui va se passer, on peut prévoir « de tête » la direction globale du calcul et donc prendre une bonne direction.

- Le calcul est comme un échauffement mathématique.
- Le calcul est *a priori* une activité sans piège.

  Il suffit de suivre les règles méthodiquement.

- Le calcul peut même être ludique !

L'intérêt du calcul

C'est très simple.

Si vous voulez bien comprendre les mathématiques, le calcul est indispensable.

Quand on apprend à jouer au piano, faire des gammes est, de même, indispensable. Elles permettent de délier les doigts, elles permettent d'ancrer dans les mains des habitudes, des réflexes. Sans gamme, certains morceaux sont inabordables.

De même, la pratique du calcul permet de mieux comprendre les mathématiques.

Le cahier de calcul

Le cahier de calcul est l'outil idéal pour vous entraîner au calcul, **en toute autonomie**.

Il a été conçu par une large équipe de professeurs de mathématiques, en lycée et en classes préparatoires, tous soucieux de vous apporter **l'aide et les outils pour réussir**.

Pour profiter totalement de cet outil, **pratiquez régulièrement** : nous vous conseillons de faire (au moins) quinze minutes de calcul chaque jour.

Comment est-il organisé ?

Trois parties pour chaque fiche

Chaque fiche du cahier de calcul est divisée en trois parties :

- une première partie de calculs généraux, destinée à **vous entraîner sur les fondamentaux** ;
- la partie principale, qui porte sur le thème de **la fiche en question** ;
- une dernière partie, composée de **calculs plus avancés**, qui est prévue pour ceux qui veulent aller plus loin.

Des pictogrammes

La difficulté des fiches est indiquée par des étoiles : de ★☆☆☆ à ★★★★.

Le temps de résolution de chaque calcul (incluant la longueur et la technicité du calcul) est symbolisé par :

- des horloges 🕓 pour les exercices de la partie principale ;
- des roues crantées ⚙ pour les exercices plus difficiles.

Des cadres pour les réponses

Nous vous invitons à écrire directement les réponses dans les cadres prévus à cet effet.

Une erreur ? Une remarque ?

Si jamais vous voyez une erreur d'énoncé ou de corrigé, ou bien si vous avez une remarque à faire, n'hésitez pas à nous écrire à l'adresse `cahierdecalcul@gmail.com`*. Merci, en nous contactant, de donner l'identifiant de la fiche, écrit en gris clair en haut à droite de chaque fiche.*

Énoncés

Calcul élémentaire | Fiche de calcul n° 1 | 2nde-ELEM-01

Calculs avec le signe « moins »

★☆☆☆ Manipuler les nombres relatifs et les quatre opérations

● Calcul 1.1

Calculer.

a) $(-3) + (-8)$ .....

b) $(-4) - (+10)$ ....

c) $(-3{,}5) + 7$ ....

d) $(12{,}5) + (-4)$ ....

e) $11 + (-6{,}7)$ ......

f) $-5{,}2 - (-3{,}1)$ ...

g) $(-38) + 64$ ......

h) $17{,}6 - (-4{,}7)$ ....

i) $-83{,}4 + (-34{,}8)$.

● Calcul 1.2

Calculer.

a) $(-4) \times 8$ .....

b) $(+7) \times (-5)$ ..

c) $(-6) \times (-9)$ ..

d) $(-8) \times 2{,}5$ ...

e) $(-7) \times (-1{,}1)$

f) $(-2) \times 3{,}7$ ...

● Calcul 1.3

Calculer.

a) $(-48) \div 8$ ....

b) $(-36) \div (-9)$ ....

c) $-(-24) \div (-16)$.

d) $18 \div (-4)$ ....

e) $(-64) \div (-16)$ ...

f) $91 \div (-7)$ ....

● Calcul 1.4 — Plus compliqué.

Calculer.

a) $\dfrac{48}{-4}$ ....

b) $\dfrac{-24}{14 + (-8)}$ ....

c) $\dfrac{-12{,}5 \times 4}{(-12{,}5) + 7{,}5}$ ....

d) $\dfrac{53 + (-17)}{18 \div (-2)}$ ....

e) $\dfrac{(-56) \div 4}{35 \div (-5)}$ ....

f) $-\dfrac{(-4) \times (-12)}{(-72) \div 9}$ ....

Calcul 1.5

Calculer.

a) $(-2) + 3 - (-5)$ ....

b) $7{,}3 + (-15) - (-17)$ ....

c) $(-23) - (-17) + 3{,}6$ ....

d) $-47 - (-38) - 65$ ....

Calcul 1.6

Calculer.

a) $(3 - 5) - (4 - 6)$ ....

b) $(23 - 15) + (17 - 38)$ ....

c) $-27 + (-12) - (34 + (-15))$ ....

d) $-((-43) - (-24)) - ((-15) - (-39))$ ....

Calcul 1.7 — Avec des variables.

Calculer.

a) $(-x) + 3x$ ....

b) $12y + (-9y)$ ....

c) $(-32z) + 17z$ ....

d) $-29t - (-47t)$ ....

Calcul 1.8 — Avec des fractions.

Calculer.

a) $\dfrac{-12}{4}x + \dfrac{15}{3}x$ ....

b) $-\dfrac{24}{6}y + \left(-\dfrac{27}{9}y\right)$ ....

c) $\left(-\dfrac{36}{4}z\right) + \dfrac{18}{9}z$ ....

d) $\left(-\dfrac{48}{8}t\right) - \left(-\dfrac{72}{9}\right)t$ ....

Calcul 1.9 — Pour terminer.

Calculer.

a) $\dfrac{(-3x) + (-5x)}{(-36) \div 9}$ ....

b) $\dfrac{(-14y) - 28y}{(-49) \div (-7)}$ ....

c) $\dfrac{(-144z) \div 12}{24 \div (-6)}$ ....

d) $\dfrac{(-3) \times (-4t) + (-4t)}{((-28) \div 7) + (48 \div (-12))}$ .....

Réponses mélangées

-11 $-1,5$ -12 6 $-7y$ $-7z$ -35 $3{,}5$ -6 $2x$ $18t$

-58 $-15z$ 10 -14 2 $8{,}5$ -4 $-2{,}1$ $-t$ $9{,}3$ -13 4

-5 $-118{,}2$ 4 0 $-2{,}4$ $4{,}3$ -20 -74 $-6y$ -32 $2t$ 6

26 $2x$ $-7{,}4$ -13 $-4,5$ $22{,}3$ $3z$ $3y$ -4 $2x$ $7{,}7$ 54

► Réponses et corrigés page 142

Calcul élémentaire | Fiche de calcul n° 2 | 2nde-ELEM-02

Priorités dans les opérations

★☆☆☆ Maîtriser les priorités dans les calculs

● Calcul 2.1

Calculer :

a) $22 - (5 + 9)$ ....

b) $-2 - (-5 - 9)$ ....

c) $-3 - (10 - (-7))$ ....

d) $(-2 + 3) - \big((-5) - (-9)\big)$ ....

e) $-\big(5 - (-8)\big) - \big(-\big(-2\big) + (-9) \times (-4)\big)$ ....

f) $-2 - (-3 - (-4 - (-5 - (-6 - (-7)))))$ ....

● Calcul 2.2

Calculer :

a) $3 - (4 - 5)$ ....

b) $(3 - 4) - 5$ ....

c) $3 \times 4 - 5$ ....

d) $3 - 4 \times (-5)$ ....

e) $-(-3) \times (-4) - 5$ ....

f) $-3 - 4 \times (-5)$ ....

● Calcul 2.3

Calculer :

a) $2 + 3 \times 5 + 7 \times 6$ ....

b) $-2 - (-6)(-4)$ ....

c) $5 - 5 \times \big(2 \times (-1 + 3) \times (-4)\big)$ ....

d) $-7 + (-13 + 6) \times (-3 + 5)$ ....

e) $15 - 3(-5 - 9) \div (-2)$ ....

f) $-2 - (7 - 3) \times (2 - 4)$ ....

g) $-2 - (6 - (-3)) - \big(-2 \div (2 \div 4)\big)$ ....

h) $-(-2) \div \big(-(-10) \div (-5)\big) + 3 - 3 \div \big(3 \div (-9)\big)$ ....

• Calcul 2.4

Calculer :

a) $-2+4^2-3\times(-2)^2$ ....

b) $9-\big(6-3(-2)^2\big)$ ....

c) $5^2\div(-7-(-2))-3(-5)$ ......

d) $1-(-2)^4+(-3)^3-(-4)^2$ ......

• Calcul 2.5 — Quelques fractions.

Calculer, en donnant le résultat sous forme irréductible :

a) $\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{3}\times\dfrac{1}{5}$ ....

b) $-\dfrac{1}{6}+\dfrac{5}{6}\div\dfrac{1}{12}$ ....

c) $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\right)\times\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{6}\right)$ ....

d) $-\dfrac{3}{7}+\dfrac{2}{7}\div\left(-\dfrac{3}{14}+\dfrac{1}{7}\right)$ ....

• Calcul 2.6

Calculer :

a) $-(5+3x)-6x+(1-x)\times(-3)$ ....

b) $-(3x-5)-(-2)\times(2+3x)-3(1-2x)$ ....

• Calcul 2.7

Calculer :

a) $\big(-2\times(-4)\big)^2+\big(-2+(-4)\big)^2$ ....

b) $\big(-2+2(-4)\big)^2-\big(-2^3+6\big)^2$ ....

c) $-(3\times(-3))^2\div\big((-1-2)^2\div(1\div3)\big)$ ....

d) $\big(-(-3)\div(-3)\big)^2\times\big((-1-2)^2\times(1\div3)\big)$ ....

Réponses mélangées

2 -58 $-6x-8$ -7 7 -3 -3 15 85 -51 -20

11 $-\dfrac{31}{7}$ -21 $\dfrac{14}{15}$ -17 -26 3 $\dfrac{1}{3}$ -6 96 23

6 10 100 $\dfrac{1}{8}$ $9x+6$ 12 8 17 59 -6 $\dfrac{59}{6}$ 4

► Réponses et corrigés page 144

Premières fractions

Reprendre les bases sur les fractions

Calcul 3.1

Écrire les fractions suivantes sous la forme d'une fraction de dénominateur 100.

a) $\dfrac{7}{10}$ ....

b) $\dfrac{3}{4}$ ....

c) $\dfrac{13}{20}$ ....

Calcul 3.2 — Simplification de fractions.

Écrire les fractions suivantes sous leur forme irréductible.

a) $\dfrac{12}{18}$ ....

b) $-\dfrac{35}{21}$ ....

c) $\dfrac{42}{-28}$ ....

d) $\dfrac{18}{720}$ ....

e) $\dfrac{5 \times 24}{18 \times 25}$ ....

f) $\dfrac{11 \times 14}{7 \times 33}$ ....

Calcul 3.3

Lequel de ces nombres n'est pas égal à $\dfrac{1}{5}$?

a) 0,2 b) $\dfrac{6}{30}$ c) $\dfrac{20}{100}$ d) $\dfrac{5}{20}$ e) $\dfrac{3}{15}$

....

Calcul 3.4

Quel nombre n'est pas égal aux autres nombres ?

a) $\dfrac{20}{45}$ b) $\dfrac{12}{18}$ c) $\dfrac{-16}{-36}$ d) $\dfrac{4}{9}$ e) $\dfrac{32}{72}$

....

Calcul 3.5 — Avec des décimaux.

Écrire les nombres décimaux suivants sous la forme d'une fraction irréductible.

a) 1,2 ....

b) 2,5 ....

c) 0,25 ...

d) 0,8 ....

Réponses mélangées

$\dfrac{1}{4}$ $\dfrac{2}{3}$ $\dfrac{2}{3}$ $\dfrac{4}{5}$ $\dfrac{1}{40}$ d $\dfrac{4}{15}$ $\dfrac{65}{100}$

$\dfrac{6}{5}$ $-\dfrac{3}{2}$ $\dfrac{70}{100}$ b $\dfrac{75}{100}$ $-\dfrac{5}{3}$ $\dfrac{5}{2}$

► Réponses et corrigés page 146

Sommes et différences de fractions

★☆☆☆ Revoir les sommes et différences de fractions

Pour les cinq premiers exercices, effectuer le calcul et donner le résultat sous forme irréductible.

Calcul 4.1

a) $2+\dfrac{1}{3}$ b) $7+\dfrac{1}{5}$ c) $3+\dfrac{5}{9}$

Calcul 4.2

a) $5-\dfrac{11}{7}$ b) $\dfrac{16}{3}-2$ c) $3+\dfrac{-14}{6}$

Calcul 4.3

a) $\dfrac{15}{14}-\dfrac{9}{14}$ b) $\dfrac{5}{6}+\dfrac{16}{6}+\dfrac{21}{6}$ c) $\dfrac{39}{36}-\dfrac{27}{36}$

Calcul 4.4

a) $\dfrac{7}{4}+\dfrac{5}{12}$ b) $\dfrac{62}{12}+\dfrac{12}{48}$ c) $\dfrac{2}{10}+\dfrac{5}{10^2}+\dfrac{1}{10^3}$

Calcul 4.5

a) $\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{4}$ c) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{6}$ e) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}$

b) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}$ d) $\dfrac{20}{15}+\dfrac{-4}{9}$ f) $\dfrac{5}{9}+\dfrac{-15}{24}-\dfrac{24}{64}$

Calcul 4.6 — Des expressions.

Écrire les expressions suivantes sous la forme $ax+b$ où a et b sont des fractions irréductibles.

a) $\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{2}+\dfrac{x+1}{3}$ b) $\dfrac{2x+3}{6}+\dfrac{x-3}{4}$

Réponses mélangées

$\dfrac{11}{12}$ $\dfrac{36}{5}$ 7 $\dfrac{65}{12}$ $\dfrac{7}{12}x-\dfrac{1}{6}$ $\dfrac{23}{12}$ $\dfrac{13}{6}$ $\dfrac{8}{9}$ $\dfrac{10}{3}$ $\dfrac{251}{1000}$

$\dfrac{7}{3}$ $\dfrac{1}{3}$ $-\dfrac{4}{9}$ $\dfrac{3}{7}$ $\dfrac{1}{3}$ $\dfrac{2}{3}$ $\dfrac{24}{7}$ $\dfrac{32}{9}$ $\dfrac{7}{12}x-\dfrac{1}{4}$ $\dfrac{2}{3}$

► Réponses et corrigés page 147

Fractions — Fiche de calcul n° 5 — 2nde-FRAC-03

Produits et sommes de fractions

★☆☆☆ Effectuer des produits et des sommes de fractions

Calcul 5.1 — Avec des décimaux.

Écrire les nombres décimaux suivants sous forme de fractions irréductibles :

a) 0,25 ....

b) $-0{,}2$ ....

c) 0,75 ....

d) 0,060 ....

e) $-2{,}4$ ....

f) 10,04 ....

Calcul 5.2 — Simplification de fractions.

Écrire les fractions suivantes sous forme irréductible :

a) $\dfrac{42}{36}$ ....

b) $\dfrac{4-7}{3\times 7}$ ....

c) $\dfrac{2\,100}{840}$ ....

d) $\dfrac{42\times(-10)^2}{(-70)\times 60}$ ....

Calcul 5.3 — Produit de fractions.

a) Combien vaut $\dfrac{2^2\times 3\times 5}{7\times 3^2\times 5^2}\times\dfrac{5\times 7\times 5}{2\times 3\times 3\times 11}$? *Plusieurs réponses sont possibles.*

(a) $\dfrac{10}{297}$ (b) $\dfrac{2\times 5}{3^2\times 11}$ (c) $\dfrac{2\times 5}{3^3\times 11}$ (d) $\dfrac{10}{99}$ (e) $\dfrac{7\times 5}{3\times 11}$

....

b) Combien vaut $\dfrac{2\times 3-12}{2\times 3^2\times 5^2}\times\dfrac{5\times 3\times 5}{6-3\times 11}$?

(a) $\dfrac{1}{3^2}$ (b) $-\dfrac{1}{27}$ (c) $-\dfrac{1}{15}$ (d) $-\dfrac{1}{9}$ (e) $\dfrac{1}{3^3}$

....

Calcul 5.4

Calculer, en donnant le résultat sous forme irréductible :

a) $\dfrac{2}{9}\times\dfrac{15}{2^2}$ ....

b) $\dfrac{2^2\times 3\times 5}{7\times 3^2\times 5}\times\dfrac{7\times 5}{2\times 3\times 11}$ .....

c) $\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{-2}{4}\right)^3\times\left(\dfrac{5}{7}\right)^2\times\dfrac{6}{8}$ ......

d) $\dfrac{2}{12}\times\dfrac{12}{10}\times\dfrac{5}{8\times 6}\times\dfrac{6}{4}\times\dfrac{1}{2}$ ....

- **Calcul 5.5 — Somme de fractions.**

Calculer, en donnant le résultat sous forme irréductible :

a) $\dfrac{2}{5} - \dfrac{7}{3}$ ....

b) $-\dfrac{11}{15} + \dfrac{11}{35}$ .....

c) $\dfrac{7}{30} + \dfrac{115}{150}$ .....

d) $\dfrac{42}{36} - \dfrac{22}{-3}$ ......

e) $\dfrac{-15}{6} - \dfrac{2}{7}$ ......

f) $\dfrac{35}{21} - \dfrac{53}{12}$ ......

g) $\dfrac{42}{36} - 1$ ....

h) $\dfrac{-90}{87} + 1$ ......

i) $\dfrac{116}{87} - 1$ ....

- **Calcul 5.6**

Calculer, en donnant le résultat sous forme irréductible :

a) $\dfrac{2}{3} + \dfrac{5}{2} - \dfrac{1}{7}$ ....

b) $\dfrac{2}{-15} - \dfrac{7}{12} + \dfrac{3}{10}$ ....

c) $\dfrac{-20}{75} + \dfrac{3}{-45} + \dfrac{4}{12}$ ....

d) $\dfrac{-30}{21} + \dfrac{14}{-42} + \dfrac{-18}{12} - \dfrac{-45}{36}$ .....

- **Calcul 5.7**

Calculer, en donnant le résultat sous forme irréductible :

a) $2\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{4} \times \dfrac{2}{5}\right)\left(\dfrac{5}{4} - \dfrac{1}{4} \times \dfrac{5}{2}\right) - 1$ ....

b) $-\left(-\dfrac{5}{6} + \dfrac{3}{4} + 1\right) + \left(3 - \dfrac{1}{5}\right) \times \left(\dfrac{2}{7} - \dfrac{1}{4}\right) + 2$ ....

- **Calcul 5.8 — Des quatrièmes proportionnelles.**

Dans chaque cas, déterminer le nombre manquant pour obtenir un tableau de proportionnalité.

On donnera la réponse sous forme irréductible.

a)

$\dfrac{12}{45}$	$\dfrac{1}{2}$
....	$\dfrac{45}{12}$

b)

$\dfrac{1}{48}$	$-\dfrac{2}{3} + 1$
$\dfrac{3}{7} - \dfrac{1}{8}$	....

c)

$\left(-\dfrac{3}{2}\right)^3$	....
$\dfrac{1}{5} - (-3)^2$	$5 \times \dfrac{12}{15}$

Réponses mélangées

$-\dfrac{39}{14}$ $-\dfrac{11}{4}$ $-\dfrac{12}{5}$ $\dfrac{1}{4}$ e 2 $\dfrac{1}{64}$ $-\dfrac{1}{7}$ $-\dfrac{169}{84}$ $\dfrac{5}{2}$ $-\dfrac{5}{24}$

$\dfrac{34}{7}$ $-\dfrac{25}{1\,568}$ $\dfrac{5}{6}$ $\dfrac{71}{60}$ 1 -1 0 $\dfrac{10}{99}$ $-\dfrac{1}{5}$ a et c $\dfrac{135}{88}$

$-\dfrac{44}{105}$ $\dfrac{7}{6}$ $-\dfrac{1}{29}$ $-\dfrac{5}{12}$ $\dfrac{1}{6}$ $\dfrac{127}{42}$ $\dfrac{3}{50}$ $\dfrac{17}{2}$ $-\dfrac{29}{15}$ $\dfrac{251}{25}$ $\dfrac{3}{4}$ $\dfrac{1}{3}$

► Réponses et corrigés page 148

Fractions — Fiche de calcul n° 6 — 2nde-FRAC-04

Fractions de fractions

★☆☆☆ Savoir calculer avec des fractions de fractions

● Calcul 6.1

Calculer et donner le résultat sous forme de fraction irréductible ou sous forme d'un nombre entier.

a) $\dfrac{1}{2} \div 3$ ....

b) $3 \div \dfrac{1}{2}$ ....

c) $\dfrac{\frac{2}{-3}}{8}$ ....

d) $\dfrac{1}{\frac{2}{3}}$ ....

e) $\dfrac{\frac{-3}{4}}{-5}$ ....

f) $\dfrac{-3}{\frac{4}{-5}}$ ....

● Calcul 6.2

Calculer et donner le résultat sous forme de fraction irréductible ou sous forme d'un nombre entier.

a) $\left(2 + \dfrac{1}{3}\right) \div 4$ ..

b) $3 \div \left(-1 + \dfrac{2}{3}\right)$

c) $\dfrac{\frac{2}{3} - \frac{4}{5}}{-2}$ ......

d) $\dfrac{-4}{1 - \frac{3}{4}}$ ....

e) $\dfrac{12}{\frac{1}{6} - \frac{1}{5}}$ ......

f) $\dfrac{13}{\frac{3}{7} - \frac{-9}{5}}$ .....

● Calcul 6.3

Calculer et donner le résultat sous forme de fraction irréductible ou sous forme d'un nombre entier.

a) $\dfrac{3 \times \frac{2}{9}}{8}$ ....

b) $\dfrac{5 \times \frac{1}{3}}{15}$ ....

c) $\dfrac{27}{6 \times \frac{5}{4}}$ ....

d) $\dfrac{\frac{1}{3} - \frac{2}{5}}{\frac{1}{3} \times \frac{2}{5}}$ ......

e) $\dfrac{\frac{2}{3} + \frac{5}{4}}{\frac{3}{2} \div \frac{4}{5}}$ ......

f) $\dfrac{\frac{3}{5} \times \frac{20}{6}}{\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}}$ .....

● Calcul 6.4

Calculer et donner le résultat sous forme de fraction irréductible ou sous forme d'un nombre entier.

a) $\dfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}$ ....

b) $\dfrac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$ ....

c) $\dfrac{2}{1 - \frac{1}{3}}$ ....

d) $\dfrac{2}{1 - \frac{2}{1 - \frac{1}{3}}}$ ....

Calcul 6.5

Calculer et donner le résultat sous forme de fraction irréductible ou sous forme d'un nombre entier.

a) $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{9}}$ ....

b) $\dfrac{\frac{3}{5}-\frac{1}{2}}{3-\frac{1}{5}}$ ....

c) $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}+\frac{7}{8}}$ ....

d) $\dfrac{\frac{8}{7}-\frac{6}{5}}{\frac{4}{3}-2}$ ....

e) $\dfrac{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}$ ....

f) $\dfrac{\left(\frac{11}{5}-1\right)\left(\frac{11}{5}+1\right)}{\frac{11}{5}}$ ....

Calcul 6.6

Soit x un nombre réel. En considérant qu'elles sont bien définies, calculer les expressions suivantes.

On donnera le résultat sous forme d'un quotient.

a) $\dfrac{x}{1+\frac{1}{x}}$ ......

b) $\dfrac{1}{x-\frac{1}{x}}$ ......

c) $\dfrac{x}{x+\frac{2}{x}}$ ......

Calcul 6.7

Calculer et donner le résultat sous forme de fraction irréductible ou sous forme d'un nombre entier.

a) $\dfrac{\frac{21\times3\times5\times26}{30\times27}}{15}$ ....

b) $\dfrac{21\times3\times5\times26}{\frac{30\times27}{15}}$ ....

c) $\dfrac{\frac{2\times56\times12\times55}{-27\times80\times7}}{36\times12^2}$ ....

d) $\dfrac{2\times56\times12\times55}{\frac{-27\times80\times7}{36\times12^2}}$ ....

Calcul 6.8

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. En considérant qu'elles sont bien définies, calculer les expressions suivantes.

On donnera le résultat sous forme d'un quotient.

a) $\dfrac{1}{x+\frac{3}{x}}$ ......

b) $\dfrac{\frac{x}{1+\frac{1}{x}}}{1+x}$ ....

c) $\dfrac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$ ......

d) $\dfrac{\frac{1}{x-y}}{\frac{1}{x^2-y^2}}$ ....

e) $x+\dfrac{1}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}$ ..

f) $\dfrac{1}{x-\frac{1}{1+\frac{x+1}{2-x}}}$ ..

Réponses mélangées

$\frac{30}{41}$ $\frac{3}{35}$ -9 $\frac{1}{28}$ $\frac{18}{5}$ $\frac{91}{135}$ $\frac{96}{55}$ $\frac{x^2}{x+1}$ $\frac{x+y}{1}$ $\frac{x-1}{x+1}$

6 $\frac{3}{2}$ -1 $\frac{x^2}{x^2+2}$ -16 $\frac{-11}{11\,664}$ $\frac{15}{4}$ $\frac{15}{4}$ $-25\,344$ $\frac{3}{4x-2}$

$\frac{7}{12}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{x}{x^2-1}$ $\frac{x}{x^2+3}$ $\frac{27}{8}$ $\frac{1}{6}$ -360 $\frac{2}{3}$ $\frac{46}{45}$ 3 $\frac{3}{20}$

$\frac{2xy-x^2}{y-x}$ $\frac{x^2}{(1+x)^2}$ $\frac{1}{15}$ 9 $-\frac{1}{12}$ $\frac{35}{6}$ $\frac{1}{9}$ $-\frac{1}{2}$ $\frac{455}{3}$ $\frac{1}{12}$

► Réponses et corrigés page 150

Fractions — Fiche de calcul n° 7 — 2nde-FRAC-05

Fractions d'expressions

★☆☆☆ Faire du calcul littéral avec des fractions

Calcul 7.1

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Écrire sous forme d'une seule fraction simplifiée les expressions suivantes :

a) $1 + \dfrac{1}{n}$ ....

b) $1 - \dfrac{1}{n+1}$ ....

c) $\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}$ ....

d) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{(n+1)^2}$ ....

e) $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2}$ ....

f) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n(n+1)}$ ....

Calcul 7.2

Soit $x \in \mathbb{R}$. Écrire sous forme d'une seule fraction les expressions suivantes :

a) $1 + \dfrac{5}{x-2}$ (où $x \neq 2$) ....

b) $2 + \dfrac{5}{x-1}$ (où $x \neq 1$) ....

c) $3 - \dfrac{5}{x+25}$ (où $x \neq -25$) ....

d) $\dfrac{10}{2x-1} + 3$ (où $x \neq \dfrac{1}{2}$) ......

e) $\dfrac{7}{9x+2} - 3$ (où $x \neq -\dfrac{2}{9}$) .....

f) $15 - \dfrac{105}{5x+7}$ (où $x \neq -\dfrac{7}{5}$) ...

Calcul 7.3

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq -2$ et $x \neq 9$. Écrire sous forme d'une seule fraction les expressions suivantes :

a) $\dfrac{1}{x-9} - \dfrac{1}{x+2}$ ....

b) $\dfrac{3}{x+2} + \dfrac{8}{x-9}$ ....

c) $\dfrac{3x+1}{x+2} - \dfrac{5x-1}{2x+4}$ ....

d) $\dfrac{3x+4}{x-9} - \dfrac{1}{x+2}$ ....

e) $\dfrac{x}{x-9} - \dfrac{2x-1}{x+2}$ ....

f) $\dfrac{1}{3(x-9)} + \dfrac{2}{7(x+2)}$ .....

Calcul 7.4

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq -2$, $x \neq -1$ et $x \neq 0$.

Écrire sous forme d'une seule fraction simplifiée les expressions suivantes :

a) $\dfrac{1}{x(x+1)} - \dfrac{1}{x(x+2)} + \dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$ ....

b) $\dfrac{2}{(x+1)(x+2)} + \dfrac{1}{x(x+1)} - \dfrac{2}{x(x+2)}$ ....

c) $\dfrac{3}{x(x+1)} - \dfrac{4}{x(x+2)} + \dfrac{2}{(x+1)(x+2)}$ ....

Calcul 7.5

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On note $A = n(n+1)$, $B = n(n+1)(2n+1)$ et $C = (n-1)n^2(n+1)$.

Simplifier les expressions suivantes :

a) $\dfrac{B}{A}$ ....

c) $\dfrac{B}{C}$ ....

e) $\dfrac{A^2}{B}$ ....

b) $\dfrac{C}{A}$ ....

d) $\dfrac{A^2}{C}$ ....

f) $\dfrac{AB}{C}$ ....

Calcul 7.6

Même exercice.

a) $\dfrac{1}{A} + \dfrac{1}{B}$ ....

c) $\dfrac{A+C}{B}$ ....

b) $\dfrac{A}{B+C}$ ....

d) $\dfrac{A+B}{C}$ ....

Réponses mélangées

$\dfrac{2(n+1)}{n(n-1)}$ $\quad \dfrac{n-1}{n^2}$ $\quad \dfrac{n(n+1)}{2n+1}$ $\quad \dfrac{1}{n}$ $\quad \dfrac{2n+1}{n(n-1)}$ $\quad \dfrac{-27x+1}{9x+2}$ $\quad \dfrac{1}{x(x+2)}$

$\dfrac{11(x-1)}{(x-9)(x+2)}$ $\quad \dfrac{13x-40}{21(x-9)(x+2)}$ $\quad \dfrac{x+3}{x-2}$ $\quad \dfrac{-x^2+21x-9}{(x-9)(x+2)}$ $\quad 2n+1$ $\quad \dfrac{2x+3}{x-1}$

$-\dfrac{1}{n(n+1)}$ $\quad \dfrac{n+1}{n}$ $\quad \dfrac{1}{x(x+1)}$ $\quad \dfrac{n}{n+1}$ $\quad \dfrac{(n+1)(2n+1)}{n-1}$ $\quad \dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$

$\dfrac{6x+7}{2x-1}$ $\quad \dfrac{x+3}{2(x+2)}$ $\quad \dfrac{75x}{5x+7}$ $\quad \dfrac{2}{n(2n+1)}$ $\quad \dfrac{11}{(x-9)(x+2)}$ $\quad n(n-1)$

$\dfrac{3x^2+9x+17}{(x-9)(x+2)}$ $\quad \dfrac{1}{n^2+n+1}$ $\quad \dfrac{n+2}{(n+1)^2}$ $\quad \dfrac{n+1}{n-1}$ $\quad \dfrac{n^2-n+1}{2n+1}$ $\quad \dfrac{3x+70}{x+25}$

► Réponses et corrigés page 153

Fractions — Fiche de calcul n° 8 — 2nde-FRAC-06

Comparaison de fractions

★☆☆☆ S'entraîner à comparer des fractions entre elles

Consigne
Lorsqu'on demande de comparer deux fractions A et B, on demande d'écrire dans le cadre réponse « $A < B$ » ou « $A > B$ » (avec les A et B de l'énoncé).

Calcul 8.1 — En mettant au même dénominateur (I).

Dans chacun des cas suivants, comparer les deux fractions données en les mettant au même dénominateur.

a) $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{3}{8}$. $\boxed{}$ b) $\dfrac{2}{7}$ et $\dfrac{1}{3}$. $\boxed{}$ c) $\dfrac{22}{7}$ et $\dfrac{25}{8}$ $\boxed{}$ d) $\dfrac{15}{7}$ et $\dfrac{33}{15}$ $\boxed{}$

Calcul 8.2 — En mettant au même dénominateur (II).

Dans chacun des cas suivants, comparer les deux fractions données en les mettant au même dénominateur.

a) $\dfrac{4}{17}$ et $\dfrac{3}{13}$ .... $\boxed{}$

b) $\dfrac{5}{6}$ et $\dfrac{11}{14}$ .... $\boxed{}$

c) $\dfrac{29}{15}$ et $\dfrac{23}{12}$ .... $\boxed{}$

d) $\dfrac{2450}{500}$ et 4,91 .... $\boxed{}$

Calcul 8.3 — Une méthode moins standard !

Dans chacun des cas suivants, comparer les deux fractions données en les mettant au même numérateur.

Par exemple, pour comparer $\dfrac{7}{13}$ *et* $\dfrac{21}{38}$, *on utilise que* $\dfrac{7}{13} = \dfrac{21}{39}$. *Comme* $39 > 38$, *on a* $\dfrac{21}{39} < \dfrac{21}{38}$.

a) $\dfrac{28}{103}$ et $\dfrac{7}{32}$ .... $\boxed{}$ b) $\dfrac{81}{121}$ et $\dfrac{9}{13}$ .... $\boxed{}$ c) 0,81 et $\dfrac{9}{11}$ .... $\boxed{}$

Calcul 8.4

Dans chacun des cas suivants, comparer les deux fractions données en utilisant les méthodes précédentes.

a) $\dfrac{15}{35}$ et $\dfrac{6}{21}$ .... $\boxed{}$

b) $\dfrac{210}{49}$ et $\dfrac{52}{12}$ .... $\boxed{}$

c) $\dfrac{2}{75}$ et $\dfrac{3}{65}$ .... $\boxed{}$

d) $\dfrac{120}{189}$ et $\dfrac{5}{8}$ .... $\boxed{}$

Calcul 8.5 — Des entre-deux.

Dans chacun des cas suivants, déterminer un nombre rationnel α vérifiant les inégalités données.

a) $\dfrac{8}{10} < \alpha < \dfrac{9}{10}$ .... $\boxed{}$

b) $\dfrac{67}{10} < \alpha < \dfrac{68}{10}$ .... $\boxed{}$

c) $\dfrac{12}{11} < \alpha < \dfrac{11}{10}$ .... $\boxed{}$

d) $\dfrac{24}{7} < \alpha < \dfrac{7}{2}$ .... $\boxed{}$

Calcul 8.6 — Remettre de l'ordre (I).

Ordonner les nombres donnés dans l'ordre croissant.

a) $\frac{2}{9}$, $\frac{4}{15}$ et $\frac{5}{18}$ ....

b) $\frac{450}{240}$, $\frac{9}{5}$ et 1,85 .....

c) $\frac{2}{5}$, $\frac{14}{30}$, $\frac{5}{12}$ et $\frac{11}{24}$ ...

d) $\frac{16}{7}$, $\frac{7}{3}$ et 2,3 ....

Calcul 8.7 — Remettre de l'ordre (II).

Ordonner les nombres donnés dans l'ordre croissant.

a) $\frac{36}{10}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{86}{25}$ et 3,53 ....

b) $\frac{7}{8}$, $\frac{17}{20}$, $\frac{11}{12}$ et 0,9 ....

c) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}+\frac{1}{7}$ et $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ ....

Calcul 8.8

On définit $\max\big(a,b\big)$ comme étant le plus grand des deux nombres a et b.

Calculer les valeurs ci-dessous en mettant la fraction finale sous forme irréductible.

a) $\max\left(\frac{11}{7},\frac{12}{9}\right)-\max\left(\frac{4}{19},\frac{2}{9}\right)$ ...

b) $\max\left(\frac{1}{2-\frac{2}{7}},\frac{14}{23}\right)$ ....

Calcul 8.9 — Deux comparaisons plus difficiles.

Dans chacun des cas suivants, comparer les deux fractions données.

a) $\dfrac{1}{1+\frac{2}{a}}$ et $\dfrac{1}{1+\frac{1}{a+1}}$, où $a>0$ ....

b) $\dfrac{3}{3+\frac{2}{4a+1}}$ et $\dfrac{2}{2+\frac{3}{6a+1}}$, où $a>0$ ....

Réponses mélangées

$\frac{2}{75}<\frac{3}{65}$ $\frac{1}{2}>\frac{3}{8}$ $\frac{2}{7}<\frac{1}{3}$ $\frac{1}{1+\frac{2}{a}}<\frac{1}{1+\frac{1}{a+1}}$ $\frac{16}{7}<2{,}3<\frac{7}{3}$ $\frac{210}{49}<\frac{52}{12}$

$\frac{3}{3+\frac{2}{4a+1}}>\frac{2}{2+\frac{3}{6a+1}}$ $\frac{9}{5}<1{,}85<\frac{450}{240}$ $\frac{15}{35}>\frac{6}{21}$ $\frac{28}{103}>\frac{7}{32}$ $\frac{15}{7}<\frac{33}{15}$

$\frac{29}{15}>\frac{23}{12}$ $\frac{2450}{500}<4{,}91$ $\frac{4}{17}>\frac{3}{13}$ $\frac{85}{63}$ $\alpha=\frac{97}{28}$ (par exemple)

$\frac{17}{20}<\frac{7}{8}<0{,}9<\frac{11}{12}$ $\alpha=\frac{675}{100}$ (par exemple) $\alpha=\frac{85}{100}$ (par exemple) $\frac{120}{189}>\frac{5}{8}$

$\frac{86}{25}<\frac{7}{2}<3{,}53<\frac{36}{10}$ $\frac{2}{9}<\frac{4}{15}<\frac{5}{18}$ $\frac{22}{7}>\frac{2}{8}$ $\alpha=\frac{241}{220}$ (par exemple) $\frac{81}{121}<\frac{9}{13}$

$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}<\frac{1}{3}+\frac{1}{7}<\frac{1}{2}$ $\frac{14}{23}$ $\frac{5}{6}>\frac{11}{14}$ $\frac{2}{5}<\frac{5}{12}<\frac{11}{24}<\frac{14}{30}$ $0{,}81<\frac{9}{11}$

▶ Réponses et corrigés page 155

Fractions | Fiche de calcul n° 9 | 2nde-FRAC-07

Bilan sur les fractions

★☆☆☆ Poursuivre et approfondir les calculs avec des fractions

Calculs élémentaires

Calcul 9.1 — Quelques nombres entiers.

Écrire chacune des fractions suivantes sous forme de nombre entier.

a) $\dfrac{6}{3}$ ....

b) $\dfrac{30}{5}$ ....

c) $\dfrac{35}{7}$ ....

d) $\dfrac{4}{1}$ ....

e) $\dfrac{0}{2}$ ....

f) $\dfrac{0}{1}$ ....

Calcul 9.2

Écrire les fractions suivantes sous forme irréductible.

a) $\dfrac{2}{8}$ ....

b) $\dfrac{-6}{9}$ ....

c) $\dfrac{25}{-10}$ ....

d) $\dfrac{-24}{-20}$ ....

e) $-\dfrac{60}{140}$ ....

f) $-\dfrac{42}{-56}$ ....

Calcul 9.3 — Quelques sommes.

Effectuer les calculs suivants. *On donnera le résultat sous forme d'une fraction irréductible.*

a) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}$ ....

b) $\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{3}$ ....

c) $\dfrac{5}{2}+3$ ....

d) $\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{10}$ ....

e) $\dfrac{7}{4}+\dfrac{5}{6}$ ....

f) $\dfrac{9}{40}+\dfrac{7}{30}$ .....

Calcul 9.4 — Quelques différences.

Effectuer les calculs suivants. *On donnera le résultat sous forme d'une fraction irréductible.*

a) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}$ ....

b) $\dfrac{1}{4}+\dfrac{-2}{3}$ ......

c) $\dfrac{-5}{2}+3$ ......

d) $-\dfrac{4}{5}+\dfrac{-3}{10}$ ....

e) $\dfrac{7}{-4}+\dfrac{5}{6}$ ......

f) $\dfrac{-9}{-40}-\dfrac{7}{-30}$ ..

- **Calcul 9.5 — Quelques produits.**

Effectuer les calculs suivants. *On donnera le résultat sous forme d'une fraction irréductible.*

a) $\dfrac{2}{5} \times \dfrac{7}{3}$ ....

b) $\dfrac{10}{7} \times \dfrac{-3}{4}$ ....

c) $\dfrac{-5}{6} \times \dfrac{7}{-4}$ ....

d) $-\dfrac{6}{-7} \times \dfrac{-10}{3}$ ....

- **Calcul 9.6 — Quelques quotients.**

Effectuer les calculs suivants. *On donnera le résultat sous forme d'une fraction irréductible.*

a) $\dfrac{2}{5} \div \dfrac{7}{3}$ ....

b) $\dfrac{10}{7} \div \dfrac{-3}{4}$ ....

c) $\dfrac{-5}{6} \div \dfrac{7}{-4}$ ....

d) $-\dfrac{6}{-7} \div \dfrac{-10}{3}$ ....

e) $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}}$ ....

f) $\dfrac{\frac{4}{7}}{3}$ ....

g) $\dfrac{4}{\frac{7}{3}}$ ....

h) $\dfrac{\frac{-11}{8}}{\frac{-7}{5}}$ ....

Calculs plus avancés

- **Calcul 9.7**

Effectuer les calculs suivants. *On donnera le résultat sous forme d'une fraction irréductible.*

a) $\dfrac{5}{3} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{7}{6}$ ....

b) $\left(\dfrac{5}{3} + \dfrac{1}{2}\right) \times \dfrac{7}{6}$ ....

c) $\dfrac{3}{4} - \dfrac{5}{2} \times \dfrac{1}{3}$ ....

d) $\dfrac{2}{7} + \dfrac{3}{5} \div \dfrac{14}{3}$ ....

e) $\dfrac{4}{9} \times \dfrac{-3}{11} - \dfrac{7}{4} \times \dfrac{-2}{-11}$ ....

f) $\left(1 - \dfrac{1}{3}\right) \times \left(\dfrac{3}{-4} + \dfrac{1}{6}\right)$ ....

- **Calcul 9.8**

Effectuer les calculs suivants. *On donnera le résultat sous forme d'une fraction irréductible.*

a) $\dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{7} \times \left(\dfrac{-3}{10} - \dfrac{1}{5}\right)$ ....

b) $\dfrac{\frac{3}{4} + \frac{7}{5}}{\frac{3}{4} \times \frac{7}{5}}$ ....

c) $\dfrac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{2}{3} - \frac{1}{4}}$ ....

d) $\dfrac{-1 + \frac{2}{9} \times \frac{-3}{5}}{\left(-1 + \frac{2}{9}\right) \times \frac{-3}{5}}$ ....

- **Calcul 9.9 — Calcul littéral (I).**

Soit x un nombre réel. En considérant qu'elles sont bien définies, calculer les expressions suivantes.

On donnera le résultat sous forme d'une seule fraction.

a) $\dfrac{3x}{10} - \dfrac{2}{5} \times \dfrac{x}{7} + 1$ ....

b) $\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{x}\right) \times \left(\dfrac{1}{2}x + \dfrac{-4}{5}\right)$ ....

c) $\dfrac{-4}{3x-3} + \dfrac{1}{6} \times \left(\dfrac{2x+1}{-5} + \dfrac{7x-1}{10}\right)$ ....

d) $\dfrac{2 - \frac{3x}{8} \times \left(\frac{1}{6} + \frac{-2x+1}{4}\right)}{1 + \frac{2x-5}{3} \times \left(\frac{x-2}{8} + \frac{-3x+5}{4}\right)}$ ....

- **Calcul 9.10 — Calcul littéral (II).**

Soit x un nombre réel. En considérant qu'elles sont bien définies, calculer les expressions suivantes.

On donnera le résultat sous forme d'une seule fraction.

a) $\dfrac{2}{5x+2} - \dfrac{4x+3}{2x+1}$ ....

b) $\dfrac{-2x+1}{4-x^2} + 3x + \dfrac{4}{2-x}$ ....

c) $\dfrac{2x-1}{5x+2} \times \left(\dfrac{-3}{x-1} + \dfrac{4x}{5x-2}\right)$ ....

d) $\dfrac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}}$ ....

Calculs plus difficiles

- **Calcul 9.11 — Équations (I).**

Résoudre les équations suivantes. *On donnera le résultat sous forme d'une fraction irréductible.*

a) $\dfrac{2}{3} - \dfrac{3}{x} = \dfrac{8}{5}$ ....

b) $\dfrac{2x+5}{x-3} = \dfrac{-1}{4}$ ....

c) $-\dfrac{5}{7} + \dfrac{4}{3} \times \dfrac{x-1}{x} = \dfrac{-1}{2}$ ....

d) $\dfrac{1}{2 + \frac{3}{4+x}} = 5$ ....

● Calcul 9.12 — Équations (II).

Résoudre les équations suivantes. *On donnera le résultat sous forme d'un ensemble de solutions.*

a) $\dfrac{4x-2}{8} + \dfrac{15-3x}{12} = \left(x + \dfrac{1}{3}\right) \times \left(\dfrac{6}{x} - \dfrac{5}{x + \frac{1}{3}}\right)$

b) $\dfrac{10x-5}{4} = \dfrac{3}{x-1} + \dfrac{21}{8x+12}$

● Calcul 9.13 — Décomposition en éléments simples.

Déterminer un couple (a, b) permettant de vérifier chacune des propriétés suivantes.

a) Pour tout réel x différent de -1 et 0, on a $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1}$.

b) Pour tout réel x différent de -1 et 1, on a $\dfrac{1}{2(x-1)(x+1)} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1}$.

● Calcul 9.14 — Une équation à deux inconnues.

Déterminer un couple (a, b) de nombres rationnels tels que $0 < a < 10$, $0 < b < 10$ et $ab = 99$.

Réponses mélangées

$\dfrac{12}{7}$ $\dfrac{14}{15}$ $\dfrac{8x^3-42x^2+31x-6}{(x-1)(25x^2-4)}$ $\dfrac{43}{21}$ $\dfrac{-29}{66}$ $\dfrac{17x+70}{70}$ $\dfrac{-20x^2-19x-4}{(5x+2)(2x+1)}$

2 $\dfrac{-1}{12}$ $\dfrac{5}{6}$ 4 $\dfrac{1}{2}$ $\dfrac{-17}{7}$ $\left(\dfrac{999}{100}, \dfrac{1100}{111}\right)$ $\dfrac{-40}{21}$ 0 $\dfrac{29}{70}$

$\dfrac{-11}{10}$ $\left(\dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{4}\right)$ $\dfrac{-5}{12}$ $\dfrac{56}{47}$ $\dfrac{6}{5}$ $\dfrac{6}{5}$ $(1, -1)$ $\dfrac{91}{36}$ 0 $\dfrac{35}{24}$ 6

$\dfrac{18x^2-15x+192}{-40x^2+164x-64}$ 5 $\dfrac{11}{12}$ $\dfrac{3}{4}$ $\dfrac{6}{35}$ $\dfrac{-7}{18}$ $\dfrac{1}{6}$ $\dfrac{11}{24}$ $\dfrac{13}{28}$ $\dfrac{1}{4}$

$\dfrac{-9}{35}$ $\dfrac{5}{6}$ $\dfrac{2+x}{3+2x}$ $\{-\sqrt{8}, \sqrt{8}\}$ $\dfrac{11}{2}$ $\dfrac{9}{4}$ $\dfrac{-3x^3+14x+9}{4-x^2}$ $\dfrac{-11}{12}$

$\{-2, 0, 2\}$ $\dfrac{-17}{9}$ $\dfrac{31}{12}$ $\dfrac{-17}{3}$ $\dfrac{-15}{14}$ $\dfrac{-3}{7}$ $\dfrac{10}{21}$ $\dfrac{3x^2-6x-77}{60(x-1)}$

$\dfrac{11}{10}$ $\dfrac{55}{56}$ $\dfrac{4}{21}$ $\dfrac{-5}{2}$ $\dfrac{5x^2-38x+48}{30x}$ $\dfrac{-2}{3}$ $\dfrac{-20}{7}$ $\dfrac{11}{24}$ $\dfrac{-45}{14}$

► Réponses et corrigés page 157

Puissances — Fiche de calcul n° 10 — 2nde-PUISS-01

Généralités sur les puissances

★☆☆☆ S'entraîner à utiliser les règles de calcul sur les puissances

● Calcul 10.1 — Pour bien commencer.

Calculer chacune des expressions suivantes.

a) $-7+3^2$ ....

b) 4^2-2^4 ....

c) $-7^2+2\times 4^3$ ....

d) $5^2-\left(-2\right)^3$ ....

e) $9^2-2\times\left(-3\right)^2$ ....

f) $1-5-\left(-5\right)^3$ ....

g) $2^3-2^4+2^5$ ....

h) $11-6^2-\left(-2\right)^4$ ....

● Calcul 10.2 — Règles de calcul sur les puissances.

Soient a et b deux réels non nuls. Mettre sous la forme $a^n\times b^p$ avec $n,\,p\in\mathbb{N}$ les expressions suivantes.

a) $a^5\times\left(a\times b\right)^5$ ....

b) $\left(a^3\times b\right)^2\times a\times b^3$ ....

c) $\left(a\times a^2\times a^3+a^6\times\left(b-1\right)\right)^3$

d) $\left(a^2\times b\right)^2\times\left(b^5\times a\right)^4$ ....

e) $\left(\left(a^4\times b\right)^3\times b^3\times a^3\right)^5$ ....

f) $\left(\left(\left(a\times b^2\right)^3\right)^4\times a^2\right)^7$ ....

● Calcul 10.3 — Décomposition de nombres gigantesques.

Décomposer chacun des nombres suivants en produits de facteurs premiers en utilisant les règles de calcul sur les puissances.

a) 24^2 ....

b) 100^{13} ....

c) 90^6 ....

d) 280^{100} ....

e) $20^3\times 56^3\times 21^5$ ....

f) $44^{44}+44^{45}$ ....

● Calcul 10.4 — Factoriser (I).

Factoriser au maximum les expressions suivantes en utilisant les règles de calcul sur les puissances.

a) $2^{13}+2^{14}$ ....

b) $3^{25}+27^8+9^{13}$ ....

c) $5^{26}-25^{14}+125^9$ ....

d) $20^{30}\times 5^{12}-2^{40}\times 50^{20}$ ...

- **Calcul 10.5 — Factoriser (II).**

Factoriser au maximum les expressions suivantes en utilisant les règles de calcul sur les puissances.

a) $2^{17} \times 12^{14} - 32^8 \times 3^{17}$ ....

b) $\left(-64\right)^3 - 5 \times 16^5 + 9 \times 4^{10}$ ....

- **Calcul 10.6**

Dans chacun des cas suivants, déterminer si le nombre est positif ou négatif.

a) $-\left(-83{,}4\right)^{-1}$ .... b) $\left(-2\right)^{-1} + 0{,}2$ ... c) $-\left(-4\right)^{-1} + 0{,}4$ ..

- **Calcul 10.7 — Comparaison.**

Dans chacun des cas suivants, déterminer lequel de ces deux nombres est le plus petit.

a) 2^{-2} et $\left(-2\right)^2$ ....

b) 3^{-3} et 26^{-1} ....

c) $\left(-2^{-1}\right)^{-1}$ et -1 ....

d) $\left(\dfrac{1}{3^{-2}}\right)^{-1}$ et 2^{-3} ....

e) $\left(-6\right)^{-2}$ et $-\left(6^{-2}\right)$ ....

f) $\left(-2\right)^{-3}$ et $-\left(2^{-1}\right)^3$ ....

- **Calcul 10.8 — Écriture scientifique de nombres.**

Donner l'écriture scientifique de chacun des nombres ci-dessous.

a) $c_0 = 299\ 000\ 000$ ....

b) $\Delta\mu = 9\ 192 \times 10^6$ ....

c) $h = 0{,}006\,626 \times 10^{-31}$ ....

d) $N_A = 0{,}000\,060\,2 \times 10^{28}$ ....

- **Calcul 10.9 — QCM.**

Quelle est l'écriture scientifique du nombre $0{,}1^3 \times \left(200\right)^4 \times \left(-0{,}01\right)^2$?

(a) 8×10^{-2} (b) $1{,}6 \times 10^2$ (c) 8×10^2 (d) $1{,}6 \times 10^{-2}$ (e) 2×10

....

Réponses mélangées

24 $4^9 \times 15$ ou $2^{18} \times 15$ (b) $2^6 \times 3^{12} \times 5^6$ $a^7 \times b^5$ $2^{26} \times 5^{26}$

$2^{40} \times 3^{14} \times 5$ 13×3^{24} $a^8 \times b^{22}$ $2^{88} \times 3^2 \times 5 \times 11^{44}$ $c_0 = 2{,}99 \times 10^8$

$2^{15} \times 3^5 \times 5^3 \times 7^8$ $a^{75} \times b^{30}$ positif positif -19×5^{26} $\left(-2^{-1}\right)^{-1}$ $a^{18} \times b^3$

négatif il y a égalité $N_A = 6{,}02 \times 10^{23}$ $\Delta\mu = 9{,}192 \times 10^9$ $a^{98} \times b^{168}$ 0

$2^{300} \times 5^{100} \times 7^{100}$ $a^{10} \times b^5$ 121 2^{-2} $-\left(6^{-2}\right)$ $\left(\frac{1}{3^{-2}}\right)^{-1}$ $2^6 \times 3^2$

$h = 6{,}626 \times 10^{-34}$ 33 3^{-3} -41 3×2^{13} 63 $2^{63} \times 3 \times 5^{40}$ 79 2

► Réponses et corrigés page 161

Puissances et fractions

S'entraîner au calcul de puissances apparaissant dans des fractions

Calcul 11.1

Écrire les fractions suivantes sous la forme $2^a \times 3^b \times 5^c$, avec a, b et c entiers :

a) $\dfrac{2^4 \times 3^5 \times 5^3}{5^2 \times 3^4 \times 2^2}$ ....

b) $\dfrac{2 \times 3^5 \times 5^5}{5^2 \times 3^2 \times 2^2} \times \dfrac{3^2 \times 2^6 \times 5^3}{5^2 \times 3 \times 2^2}$ ....

c) $\dfrac{2 \times 3^3}{5 \times 3^2 \times 2^2} \times \dfrac{3^2 \times 2^4 \times 5^6}{5^3 \times 3}$ ......

d) $\dfrac{15^3 \times 2^2 \times 3 \times 25^2}{30^3} \times \dfrac{6^2 \times 10^2}{4 \times 15}$ ..

Calcul 11.2

Écrire les fractions suivantes sous la forme $2^a \times 3^b \times 5^c$, avec a, b et c entiers :

a) $\dfrac{2^4 \times 3^2 \times 5^3}{5^2 \times 3^4 \times 2^3}$ ....

b) $\dfrac{2 \times 3^3 \times 5^2}{5^7 \times 3^2 \times 2^3} \times \dfrac{3^3 \times 2^2 \times 5^4}{5^1 \times 3^5 \times 2^2}$ ....

c) $\dfrac{2^2 \times 3^3}{15 \times 2^2} \times \dfrac{3^1 \times 2^4 \times 5^2}{5^3 \times 3^0}$ ....

d) $\dfrac{2^3}{30 \times 6^2 \times 4} \times \dfrac{12^2}{10^2 \times 5} \times \dfrac{5^6}{2 \times 3}$ ..

Calcul 11.3

Écrire les fractions suivantes sous la forme $2^a \times 3^b \times 5^c$, avec a, b et c entiers :

a) $\dfrac{2^{-4} \times 3^2 \times 5^{-3}}{5^{-2} \times 3^4 \times 2^{-3}}$ ....

b) $\dfrac{6^{-2} \times 3^{-1}}{15 \times 9^2 \times 2^{-2}} \times \dfrac{3^1 \times 2^4 \times 5^{-2}}{25 \times 15 \times 3^2}$ ..

Calcul 11.4

Écrire les fractions suivantes sous la forme $2^a \times 3^b \times 5^c$, avec a, b et c entiers :

a) $\dfrac{2 \times 3^{-3} \times 5^2 \times (-3)^3 \times 2^2 \times 5^4}{(-5)^{-7} \times 3^2 \times 2^3 \times 5^1 \times 3^5 \times (-2)^{-2}}$ ....

b) $\dfrac{2^3}{5 \times \left(6^3 \times 2^2\right)^2} \times \dfrac{3^2 \times \left(4^2\right)^{-1}}{(-2)^2 \times 5^3} \times \dfrac{5^6}{2 \times 3}$ ....

Calcul 11.5

On considère un réel non nul x et un entier n. Simplifier au maximum les expressions suivantes :

a) $\dfrac{\left(3^n\right)^2 \times 6^{-n}}{12^{1-n}} \times 2^{2n}$ ....

b) $\dfrac{\left(x^n\right)^3}{x^{n+3}}$ ....

c) $\dfrac{x \times (2x)^{5n}}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^{-3n} \times \left((2x)^2\right)^{n+1}}$ ....

Calcul 11.6

Écrire les fractions suivantes sous la forme $-2^a \times 3^b \times 5^c$ ou $2^a \times 3^b \times 5^c$, avec a, b et c entiers :

a) $\dfrac{-2^{-3} \times 3^{-3} \times 5^{-2} \times (-3)^3 \times 2^2 \times 5^4}{(-5)^4 \times 3^{-2} \times 2^3 \times \left(2^3 \times 3^5\right)^{-2} \times (-2)^{-2}}$ ....

b) $\dfrac{2^4}{5 \times \left(6^3 \times 2^2\right)^2} \times \dfrac{9 \times \left(-2^4\right)^{-1}}{\dfrac{3^2}{500}} \times \dfrac{5^{2\times 3}}{2 \times 3}$ ....

c) $\dfrac{2^3}{5 \times \left(3^3 \times 2^5\right)^2} \times \dfrac{9 \times \left(2^{-3}\right)^{-1}}{2^2 \times \left(-5^2\right)} \times \left(\dfrac{-5^{-1}}{2^{-2} \times 3^3}\right)^{-2}$ ....

Calcul 11.7 — Des quatrièmes proportionnelles.

Dans chaque cas, déterminer le nombre manquant pour obtenir un tableau de proportionnalité.

On donnera la réponse sous forme irréductible.

a)

$\dfrac{3^2 \times 5}{(3^{-1} \times 5)^{-1}}$	$\dfrac{3}{2}$
....	$\dfrac{45^{-1}}{6^2}$

b)

$\dfrac{1}{48}$	$\dfrac{1}{3}$
$\dfrac{5}{2^3}$	....

c)

$\left(-\dfrac{3}{2}\right)^3$	....
$\dfrac{1}{5} \times (-3)^2$	$5 \times \dfrac{12}{15}$

Calcul 11.8 — Avec des décimaux.

Écrire les nombres décimaux suivants sous la forme $-2^a \times 3^b \times 5^c$ ou $2^a \times 3^b \times 5^c$, avec a, b et c entiers :

a) 0,25 ....

b) 0,2 ....

c) 0,75 ....

d) 0,006 ....

e) 2,4 ....

f) 6,25 ....

Réponses mélangées

$-\dfrac{15}{2}$ $\quad 2^{-14} \times 3^{-5} \times 5^2$ $\quad \dfrac{5}{162}$ $\quad 5^{-1}$ $\quad 2^2 \times 3 \times 5^{-1}$ $\quad 2 \times 3^{-2} \times 5$ $\quad \dfrac{x^{6n-1}}{4}$ $\quad 2^{-2} \times 5^2$

$-2^{-10} \times 3^2 \times 5^{-1}$ $\quad 2^4 \times 3^{12} \times 5^{-2}$ $\quad -2^{-9} \times 3^{-7} \times 5^8$ $\quad 2^2 \times 3^{-7} \times 5^{12}$ $\quad \dfrac{72^n}{12}$ $\quad 2^3 \times 3^4 \times 5^4$

$2^{-1} \times 3^{-2} \times 5^2$ $\quad 2^{-2} \times 3 \times 5^{-3}$ $\quad 2^4 \times 3^{-10} \times 5^{-6}$ $\quad 2^3 \times 3^2 \times 5^2$ $\quad 10$ $\quad 2^{-2}$ $\quad x^{2n-3}$

$2^{-1} \times 3^{-2} \times 5^{-1}$ $\quad 2 \times 3^2 \times 5^5$ $\quad 2^{-2} \times 3^{-1} \times 5^{-2}$ $\quad 2^{-2} \times 3$ $\quad 2^2 \times 3 \times 5$ $\quad 2^4 \times 3^3 \times 5^{-2}$

► Réponses et corrigés page 163

Puissances | Fiche de calcul n° 12 | 2nde-PUISS-03

Calcul littéral avec des puissances

★☆☆☆ S'entraîner à la manipulation des règles sur le calcul des puissances

● Calcul 12.1 — Pour commencer.

Soient a et b des réels non nuls, et soient m et n des entiers. Simplifier les expressions suivantes :

a) $a^3 \times a^5$ ....

b) $\dfrac{a^9}{a^2}$ ....

c) $2^m \times 2^n$ ......

d) $\dfrac{5^m}{5^4}$ ....

e) $a^5 \times b^5$ ....

f) $\dfrac{8^n}{8^m}$ ....

● Calcul 12.2

Soit m un entier. Simplifier les expressions suivantes :

a) $2^m \times 4$ ....

b) $3^m \times 9^5$ ....

c) $2^{26m} \times 4^{11m}$ ....

d) $\dfrac{9^{-14m}}{3^{7m}}$ ....

e) $8^{5m} \times 4^{-14m}$ ....

f) $9^{46m} \times 27^{-49m}$ ....

● Calcul 12.3

Soient a et b des réels non nuls, et m et n des entiers. Simplifier les expressions suivantes :

a) $a^4 \times a^3 \times a^{24}$ ....

b) $\dfrac{a^9 \times a^4}{a^8 \times a^7}$ ....

c) $\dfrac{5^m \times 4^m}{10^m \times 3^m}$ ....

d) $a^5 \times b^{23} \times a^{-3} \times b^{18}$ ....

e) $\dfrac{a^m \times a^2 \times a^{-3}}{a^5 \times a^{2m}}$ ....

f) $\dfrac{a^5 \times b^m \times a^{-12} \times b^2}{b^n \times a^4 \times a^{-11}}$ ....

● Calcul 12.4

Soient m et n des entiers. Simplifier les expressions suivantes :

a) $\dfrac{2^m \times 4^2}{8^3 \times 2^n}$ ....

b) $\dfrac{3^m \times 9^n}{27^6}$ ....

c) $\dfrac{8^n \times 3^m \times 16}{27 \times 2^n \times 9}$ ....

d) $81^m \times 25^n \times 3^{6m} \times 125^n$.

● Calcul 12.5

Simplifier les expression suivantes. Ici, m et n sont deux entiers et x et y sont deux réels.

a) $\dfrac{(x^4 \times y^m)^2}{(x^3 \times y^5)^4}$ ....

b) $\dfrac{x^m \times y^n}{(x^4 \times y^5)^n}$ ....

● Calcul 12.6

Ici, m et n sont deux entiers et x est un réel. Écrire les expressions suivantes sous la forme $(x-a)^b$.

a) $\dfrac{(x-5)^m}{(x-5)^2}$ .....

b) $\dfrac{(x-8)^6}{\left((x-8)^m\right)^3}$.

c) $\dfrac{(x-5)^5}{\left((x-5)^2\right)^m}$.

● Calcul 12.7 — Des quatrièmes proportionnelles (I).

Soient a et b des réels. Déterminer le nombre manquant pour obtenir un tableau de proportionnalité.

a)

a^4	a^8
a^3	....

b)

a^6	a^{-3}
....	$a \times b$

c)

....	b^{16}
a^{27}	$a^{14} \times b^{27}$

d)

$a^{197} \times b^{271}$	$a^{350} \times b^{124}$
....	$a^{75} \times b^{178}$

e)

....	$a^3 \times b^{-4}$
$a^8 \times b^{-2}$	$a^6 \times b$

f)

$a^{17} \times b^7$	$a^9 \times b^{23}$
$a^8 \times b^4$	....

● Calcul 12.8 — Des quatrièmes proportionnelles (II).

Soient m et n des entiers. Déterminer le nombre manquant pour obtenir un tableau de proportionnalité.

a)

2^4	2^m
2^5	....

b)

2^{3m}	2^8
....	2^{5m}

c)

....	$2^m \times 9^n$
$2^{3m} \times 3^n$	$2^{7m} \times 3^{n+3}$

d)

$2^m \times 3^n$	$2^{5m+2} \times 3^{2n}$
$2^{18m} \times 3^n$	....

e)

3^m	....
3^{5m+2}	3^{8m+5}

f)

2^5	....
4^m	2^m

Réponses mélangées

2^{m+1} $\quad a^{-2}$ $\quad a^7$ $\quad 2^{8m-8}$ $\quad (x-5)^{m-2}$ $\quad 2^{m+n}$ $\quad a^{-6-m}$ $\quad 2^{-13m}$ $\quad 3^{m+10}$ $\quad b^{20}$

$2^{22m+2} \times 3^{2n}$ $\quad a^8$ $\quad 2^{m-n-5}$ $\quad x^{-4} \times y^{2m-20}$ $\quad a^2 \times b^{41}$ $\quad 3^{4m+3}$ $\quad a^7$ $\quad 5^{m-4}$

$(a \times b)^5$ $\quad 8^{n-m}$ $\quad 2^{5-m}$ $\quad 3^{-35m}$ $\quad a^5 \times b^{-7}$ $\quad x^{m-4n} \times y^{-4n}$ $\quad 2^{2n+4} \times 3^{m-5}$

b^{m-n+2} $\quad a^{31}$ $\quad a^{13} \times b^{-11}$ $\quad (x-8)^{6-3m}$ $\quad a^{-78} \times b^{325}$ $\quad a^{10} \times b$ $\quad (x-5)^{5-2m}$

2^{m+2} $\quad 3^{10m} \times 5^{5n}$ $\quad 3^{-55m}$ $\quad 2^{48m}$ $\quad \left(\dfrac{2}{3}\right)^m$ $\quad 3^{m+2n-18}$ $\quad 2^{-3m} \times 3^{2n-3}$

► Réponses et corrigés page 165

Puissances — Fiche de calcul n° 13 — 2nde-PUISS-04

Bilan sur les puissances

★☆☆☆ Acquérir la maîtrise des calculs avec des puissances

Généralités sur les puissances

- **Calcul 13.1 — À la recherche du signe.**

Déterminer le signe des nombres suivants :

a) $-5^4 \times (-3)^2 \times (-1)^7$ .....

b) $-(-1)^7 \times (-3)^4 \times (-5^7)$.

c) $\dfrac{4^2 \times (-5)^3}{(-7^3)^5}$ ....

d) $-\dfrac{((-3)^3)^2 \times (-5^3)}{((-7)^3)^5}$ ......

- **Calcul 13.2 — Vrai ou Faux ?**

Dire si les égalités suivantes sont « vraies » ou « fausses » :

a) $2^{-4} = -16$ ....

b) $\dfrac{1}{5^{-3}} = 5^3$ ....

c) $5^9 + 5^9 + 5^9 + 5^9 + 5^9 = 5^{10}$.

d) $\dfrac{5^4}{5^{-3}} = 5^1$ ....

- **Calcul 13.3 — Vrai ou Faux ?**

Soit n un entier tel que $n \geqslant 2$, et soient a et b deux réels non nuls.

Dire si les égalités suivantes sont « vraies » ou « fausses » :

a) $2^{n+1} - 2^n = 2^n$ ....

b) $2^{2n} = 4^n$ ....

c) $(a^b)^n = a^{b^n}$ ....

d) $(ab)^n = a^n b^n$ ....

- **Calcul 13.4 — En écriture scientifique.**

Écrire en notation scientifique les nombres suivants (*par exemple, on a :* $314\,100 = 3{,}141 \times 10^5$) :

a) $1\,234\,567$ ....

b) $0{,}001\,2$ ....

c) $74{,}925 \times 10^{-3}$ ....

d) $2{,}5 \times 10^4 \times 4 \times 10^{-12}$ ....

● Calcul 13.5 — Quel est le plus grand ?

Dans chacun des cas, dire quel est le plus grand des deux nombres :

a) 8^{15} ou 2^{46} ? ....

b) 3^{-44} ou 27^{-15} ? ....

c) $25^6 \times 8^4$ ou 10^9 ? ....

d) $4^{-3} \times 125^{-2}$ ou 10^{-5} ? ...

● Calcul 13.6 — En puissance de deux.

Écrire les nombres suivants sous la forme 2^n, avec n entier relatif :

a) $\dfrac{8 \times 2^7}{4^3}$ ....

b) $128^3 \times (16^3)^{-2}$ ....

c) $\dfrac{4^{-3} \times 16^3}{(2^{-1})^4 \times 8^5}$ ....

d) $\dfrac{-4^5 \times (-4)^7}{(4^3)^{-2}}$ ....

● Calcul 13.7 — Des mélanges de puissances.

Écrire les nombres suivants sous la forme d'une seule puissance :

a) $\dfrac{10^2 \times (4^3)^3}{25}$ ....

b) $\dfrac{7 \times 2^9 \times 21^6}{14^5 \times 6^4}$ ....

c) $\dfrac{9^4 \times 4^7}{2^4 + 2^4 + 2^4 + 2^4}$ ....

d) $\dfrac{25^8 \times (\frac{1}{2^{-3}})^{-2}}{10^5}$ ....

● Calcul 13.8 — Puissances de 2, 3 et 5.

Écrire les nombres suivants sous la forme $2^n \times 3^m \times 5^p$, avec n, m et p entiers relatifs :

a) $\dfrac{5^2 \times 10^{-3} \times 6^4}{4^{-2} \times 3^{-1}}$ ....

b) $\dfrac{(-3)^{-4} \times 25^7 \times (-18)^2}{15^2 \times 12^{-3}}$ ....

c) $\dfrac{(2^5)^{-3}}{\frac{3^{-5} \times 5^7}{10^8}} \times 9^{-2}$ ....

Du calcul littéral et des puissances

● Calcul 13.9

Soit n un entier naturel.

Écrire les nombres suivants sous la forme d'une seule puissance, où l'exposant dépendra de n :

a) $\dfrac{(-2)^{4n} \times 2^{n+1}}{4^{2n-1}}$ ....

b) $\dfrac{(-5)^{2n} \times 25^3 \times 16^n}{20^{2n} \times 5^{1-3n}}$ ......

● Calcul 13.10

Soit x un réel non nul.

Écrire les nombres suivants sous la forme d'un carré :

a) $3x^3 \times 12x^5$ ....

b) $\dfrac{8x^5}{x^{-3} \times (2x^2)^3}$ ....

c) $(-2x)^{-4} \times x^6$ ....

d) $\dfrac{(9x^3)^{-1} \times x^4}{x^3}$ ....

● Calcul 13.11 — Puissances de a et b.

Soient a et b deux réels non nuls.

Écrire les nombres suivants sous la forme $a^m \times b^n$, avec m et n entiers relatifs :

a) $\left(\dfrac{a^3}{b^{-5}}\right)^{-1} \times a^2b^7$ ....

b) $\dfrac{(a^2b)^3 \times b^{-4}}{(a^{-2} \times b^2)^{-1}}$ ....

c) $\dfrac{(b^3a)^3 \times b^{-5}}{(a^2b^{-1})^2}$ ....

d) $\dfrac{a^2b^{-1}}{(a^3)^{-4} \times \frac{(ab^5)^3}{ba^2}}$ ....

● Calcul 13.12

Soient a et b deux réels non nuls, et soit n un entier naturel.

Écrire l'expression suivante sous la forme $a^k \times b^p$, avec k et p entiers relatifs dépendant de n :

a) $\dfrac{(a^{2n})^{-1} \times b^{n+2}}{(ab^n)^2}$ ....

b) $\dfrac{ab \times (a^3b^2)^n}{(a^2b)^{2n+1}}$ ....

c) $\dfrac{(ab^{n+1})^2 \times a^{2n}}{a^{n+2} \times \frac{1}{b^{n-2}}}$ ....

d) $\dfrac{a^{1-n}b^{2n}}{b^n \times \frac{1}{\frac{ab^2}{a^{3n-1}}}}$ ....

Calculs plus difficiles

● **Calcul 13.13 — Puissances de a, b et c.**

Soient a, b et c trois réels non nuls et soit n un entier naturel.

Écrire les nombres suivants sous la forme $a^k \times b^p \times c^r$, avec k, p et r entiers relatifs :

a) $\dfrac{(a^{n+3}b^{2-n}c)^{-1} \times a^{1-3n}}{ab^{4-n}c^{2n}}$ ....

b) $(a^2b^{n-3}c)^2 \times \dfrac{b^{1-3n}}{c^{-n}a^{n-1}}$ ....

c) $\dfrac{a^n bc^{1-n} \times (ab^n)^2}{a^{4-n} \times \frac{c}{(ab^{n+1})^3}}$ ....

d) $\dfrac{((a^2)^n)^{-1} \times c^{3-n}}{\frac{b^n c^{-1}}{a^{1-4n} \times \frac{b^3}{ac^n}}}$ ....

● **Calcul 13.14 — Calcul astucieux.**

Écrire le nombre suivant sous la forme 3^k, avec k entier relatif :

$\dfrac{(3^3+3^3+3^3)(6^6+6^6+6^6+6^6+6^6+6^6)}{2^5+2^5+2^5+2^5}$ ....

● **Calcul 13.15 — Un autre calcul astucieux.**

Soit n un entier relatif. Écrire le nombre suivant sous la forme 3^k, avec k un entier relatif :

$\left(\dfrac{9^{2n} - 5 \times 9^{2n-1}}{3^{4n+1} + 3^{4n}}\right)^2$ ....

Réponses mélangées

vrai $\left(\dfrac{1}{3x}\right)^2$ $a^{-4n-3}b^{2n-6}c^{-2n-1}$ 3^{11} $-$ $a^{-n-1}b^0$ $a^{-2n-2}b^{-n+2}$

$a^{2n+1}b^{5n+4}c^{-n}$ $-$ 2^{-5} 2^{20} 2^{46} $2^5 \times 3^5 \times 5^{-1}$ vrai 3^{-4} 2^{n+3} $+$

21^2 vrai $a^{-1}b^2$ 2^4 vrai $2^8 \times 3^1 \times 5^{12}$ $7{,}492\,5 \times 10^{-2}$ vrai $a^{-4n+3}b^{n+2}$

2^{-3} faux $a^{13}b^{-15}$ x^2 6^8 $2^{-7} \times 3^1 \times 5^1$ 3^{-44} 2^{36} 5^{3n+5} $+$

10^{-5} faux $(6x^4)^2$ $1{,}2 \times 10^{-3}$ $a^{-1}b^6$ 1×10^{-7} faux $a^{-6n}b^{-n+3}c^{-2n+4}$

$25^6 \times 8^4$ a^4b $a^{-n+5}b^{-n-5}c^{n+2}$ $\left(\dfrac{5}{2}\right)^{11}$ $\left(\dfrac{x}{4}\right)^2$ $1{,}234\,567 \times 10^6$ a^nb^{3n}

► Réponses et corrigés page 167

Racines carrées | Fiche de calcul n° 14 | 2nde-RAC-01

Calculs avec des racines I

★☆☆☆ S'entraîner au calcul avec des racines carrées

Calcul 14.1

Combien vaut $\sqrt{100 - 36}$?

(a) 4 (b) $\sqrt{4}$ (c) $\sqrt{8}$ (d) 8 (e) -8

Calcul 14.2 — Possible ou non ?

Dire « oui » ou « non » si le calcul est possible :

a) $\sqrt{-36}$

b) $\sqrt{(-15)^2}$

c) $\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2}$

d) $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2$

e) $\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{2}{5}}$

f) $\sqrt{\frac{2-6}{5-8}}$

Calcul 14.3

Calculer :

a) $\sqrt{\sqrt{81}}$

b) $\sqrt{1 + \sqrt{1}}^{\,2}$

c) $\sqrt{5^4}$

d) $\sqrt{(-3)^4}$

e) $\sqrt{\left(\sqrt{3} - 1\right)^2}$

f) $\sqrt{\left(1 - \sqrt{2}\right)^2}$

Calcul 14.4

Calculer :

a) $\dfrac{30}{\sqrt{25} - \sqrt{100}}$

b) $\sqrt{49} \times \sqrt{100}$

c) $\sqrt{3^2 + 4^2}$

d) $\sqrt{\sqrt{12 + 4}}$

Calcul 14.5 — En passant par une écriture intermédiaire.

En remarquant que $400 = 4 \times 10^2 = 2^2 \times 10^2$, on trouve que $\sqrt{400} = 2 \times 10 = 20$.

En procédant de même, calculer :

a) $\sqrt{10\,000}$

b) $\sqrt{0{,}01}$

c) $\sqrt{0{,}36}$

d) $\sqrt{0{,}000\,9}$

Calcul 14.6

Calculer, en donnant le résultat sous la forme la plus simple possible :

a) $\left(-5\sqrt{16}\right)^2$ ……

b) $\sqrt{\sqrt{3}^4}$ ……

c) $-2\sqrt{3}\times 9\sqrt{3}+5\sqrt{5}\times\left(-2\sqrt{5}\right)$ ……

d) $-\sqrt{15}\times\sqrt{6}\times\sqrt{10}$ ……

e) $\sqrt{2^4\times 3^2}$ ……

f) $\sqrt{\dfrac{25}{\left(-7\right)^2}}$ ……

Calcul 14.7 — Des encadrements.

Encadrer les nombres suivants par deux entiers consécutifs :

a) $\sqrt{2}$ ……

b) $\sqrt{150}$ ……

c) $\sqrt{58}$ ……

d) $\sqrt{91}$ ……

e) $2\sqrt{3}$ ……

f) $-3\sqrt{2}$ ……

Calcul 14.8

Développer et réduire, en donnant les résultats sous la forme la plus simple possible :

a) $1-\sqrt{3}-6\sqrt{3}\left(-2+3\sqrt{3}\right)$ ……

b) $-4+20\sqrt{13}+\sqrt{13}\left(-7+2\sqrt{13}\right)$ ……

Calcul 14.9

Développer et réduire, en donnant les résultats sous la forme la plus simple possible :

a) $\left(-2+3\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{7}-1\right)$ ……

b) $\left(2-\sqrt{11}\right)\left(2+\sqrt{11}\right)$ ……

c) $\left(-5\sqrt{2}+3\right)^2$ ……

d) $\dfrac{4}{3}\left(-3+6\sqrt{5}\right)^2$ ……

Réponses mélangées

-6 non 2 $-53+11\sqrt{3}$ $\dfrac{5}{7}$ oui $23-5\sqrt{7}$ $22+13\sqrt{13}$

$59-30\sqrt{2}$ $0{,}6$ -7 $0{,}03$ non   oui $3<2\sqrt{3}<4$ $9<\sqrt{91}<10$

9 $12<\sqrt{150}<13$ 3 -30 -104 3 $252-48\sqrt{5}$ 5

$1<\sqrt{2}<2$ oui $-5<-3\sqrt{2}<-4$ $7<\sqrt{58}<8$ oui 100

$\sqrt{3}-1$ $\sqrt{2}-1$ $0{,}1$ 400 d 12 2 70 25

► Réponses et corrigés page 170

Racines carrées — Fiche de calcul n° 15 — 2nde-RAC-02

Calculs avec des racines II

★☆☆☆ Approfondir les techniques de calcul avec des racines carrées

Calcul 15.1

Calculer, en donnant le résultat sous la forme « $a\sqrt{b}$ », avec a et b entiers et b le plus petit possible :

a) $\sqrt{12} \times \sqrt{3}$ ……

b) $2\sqrt{2} \times \left(-5\sqrt{32}\right)$ ……

c) $-\sqrt{40} \times 2\sqrt{5^2 - 15}$ ……

d) $\sqrt{5} \times \sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 - 1}$ ……

e) $\sqrt{\dfrac{1}{2}} \times \sqrt{6}$ ……

f) $\dfrac{-4\sqrt{6}}{\sqrt{5}} \times \sqrt{\dfrac{20}{3}}$ ……

Calcul 15.2 — Simplification de racines.

Calculer, en donnant le résultat sous la forme « $a\sqrt{b}$ », avec a et b entiers et b le plus petit possible :

a) $\sqrt{12}$ ……

b) $\sqrt{28}$ ……

c) $\sqrt{10\,000}$ ……

d) $\sqrt{60}$ ……

e) $\sqrt{52}$ ……

f) $\sqrt{200}$ ……

g) $\sqrt{75}$ ……

h) $\sqrt{150}$ ……

i) $\sqrt{80}$ ……

Calcul 15.3

Calculer, en donnant le résultat sous la forme « $a + b\sqrt{c}$ », avec c le plus petit possible :

a) $\sqrt{18} - \sqrt{8}$ ……

b) $\sqrt{80} - 4\sqrt{125} + 9\sqrt{20} - \sqrt{45}$ ……

c) $\sqrt{27} + 5 + 2\sqrt{75} - 2\sqrt{81}$ ……

d) $-5\sqrt{28} + 6\sqrt{63} - 4\sqrt{700}$ ……

Calcul 15.4

Développer et réduire, en donnant le résultat sous la forme la plus simple possible :

a) $\left(1 - 3\sqrt{5}\right)\left(1 - 2\sqrt{5}\right)$ ……

b) $\left(3\sqrt{7} - 2\right)\left(5 + 6\sqrt{7}\right)$ ……

c) $\left(-\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)\left(5 - 3\sqrt{2}\right)$ ……

d) $\left(-2\sqrt{8} + \sqrt{12}\right)\left(\sqrt{2} - 5\right)$ ……

- **Calcul 15.5**

Développer et réduire, en donnant le résultat sous la forme la plus simple possible :

a) $\left(-1+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}+2\right)\left(-\sqrt{2}+5\right)$ ....

b) $\left(-1+\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{2}+2\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)$ ....

- **Calcul 15.6**

Développer et réduire, en donnant le résultat sous la forme la plus simple possible :

a) $\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}\right)$ ....

b) $\left(-4\sqrt{2}+5\sqrt{3}-2\sqrt{5}\right)\left(4\sqrt{2}-\sqrt{3}-2\sqrt{5}\right)$ ....

- **Calcul 15.7 — Avec des fractions.**

Calculer, en donnant le résultat sans racine carrée au dénominateur :

a) $\dfrac{-5}{\sqrt{7}}$ ....

b) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ ....

c) $\dfrac{5\sqrt{6}}{\sqrt{18}}$ ....

d) $\dfrac{\sqrt{12}\times\sqrt{7}}{\sqrt{15}}$ ...

e) $\dfrac{-5}{\sqrt{7}}+\dfrac{7}{\sqrt{5}}$ ....

f) $\dfrac{3}{2\sqrt{5}}-\dfrac{5}{2\sqrt{3}}$ ..

- **Calcul 15.8 — Des quatrièmes proportionnelles.**

Dans chaque cas, déterminer le nombre manquant pour obtenir un tableau de proportionnalité.

On donnera la réponse sans racine au dénominateur.

a)

$\sqrt{3}$	$5\sqrt{2}$
....	$\sqrt{2}$

b)

$-\sqrt{7}$	$\sqrt{2}$
$3\sqrt{2}$	....

c)

$-\sqrt{3}$	$\sqrt{2}-1$
$\sqrt{3}-\sqrt{2}$	....

Réponses mélangées

$\dfrac{3-3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{3}$ $\quad 6-5\sqrt{2}+5\sqrt{3}-3\sqrt{6}$ $\quad \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ $\quad \dfrac{-25\sqrt{3}+9\sqrt{5}}{30}$ $\quad \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$ $\quad 5\sqrt{3}$

$-32\sqrt{7}$ $\quad -27+24\sqrt{6}-8\sqrt{15}$ $\quad -\sqrt{5}$ $\quad 5\sqrt{6}$ $\quad -40$ $\quad \sqrt{2}$ $\quad -2+5\sqrt{2}$

$116+3\sqrt{7}$ $\quad \sqrt{3}$ $\quad 10\sqrt{2}$ $\quad 100$ $\quad 2\sqrt{7}$ $\quad -8\sqrt{2}$ $\quad 31-5\sqrt{5}$ $\quad \dfrac{\sqrt{3}}{5}$

$2\sqrt{15}$ $\quad 1+3\sqrt{2}-\sqrt{3}$ $\quad \dfrac{49\sqrt{5}-25\sqrt{7}}{35}$ $\quad 2\sqrt{5}$ $\quad 6$ $\quad 6+8\sqrt{2}+2\sqrt{5}$ $\quad \dfrac{-5\sqrt{7}}{7}$

$-13+13\sqrt{3}$ $\quad 2\sqrt{3}$ $\quad \dfrac{2}{5}\sqrt{35}$ $\quad 2\sqrt{13}$ $\quad 4\sqrt{5}$ $\quad -80$ $\quad \begin{array}{c}-8+20\sqrt{2}\\ -10\sqrt{3}+2\sqrt{6}\end{array}$ $\quad -\dfrac{6\sqrt{7}}{7}$

▶ Réponses et corrigés page 172

Racines carrées — Fiche de calcul n° 16 — 2nde-RAC-03

Méthode de la quantité conjuguée

★☆☆☆ Obtenir une fraction sans racine carrée au dénominateur

Calcul 16.1 — Présentation de la méthode.

On considère la fraction

$$\frac{1}{1-\sqrt{2}},$$

dont on souhaite faire disparaître la racine carrée du dénominateur.

L'idée, pour cela, est de multiplier astucieusement le numérateur et le dénominateur par $1+\sqrt{2}$.

On dit alors qu'on a appliqué *la méthode de la quantité conjuguée.*

a) Calculer $\left(1-\sqrt{2}\right)\times\left(1+\sqrt{2}\right)$. ....

b) En suivant la méthode indiquée, simplifier la fraction comme souhaité. ....

Calcul 16.2 — Des premiers calculs.

En appliquant la méthode de la quantité conjuguée, faire disparaître les racines carrées des dénominateurs des fractions suivantes.

a) $\dfrac{1}{2+\sqrt{7}}$ ....

b) $\dfrac{1}{-4+\sqrt{2}}$ ....

c) $\dfrac{5}{\sqrt{3}+2}$ ....

d) $\dfrac{4}{-2-\sqrt{11}}$ ....

Calcul 16.3

Même consigne.

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$ ....

b) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$ ....

c) $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$ ....

d) $\dfrac{\sqrt{2}-\frac{1}{2}}{\sqrt{2}+\frac{1}{2}}$ ....

Calcul 16.4

Même consigne.

a) $\dfrac{4}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ ....

b) $\dfrac{5}{\sqrt{17}-2\sqrt{3}}$ ....

c) $\dfrac{-6}{3\sqrt{2}+\sqrt{15}}$ ....

d) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}-\sqrt{3}}$ ....

Calcul 16.5

Faire disparaître les racines carrées des dénominateurs des expressions suivantes, sans se soucier de leur domaine de validité.

a) $\dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$

b) $\dfrac{\sqrt{x}}{8x\sqrt{x}-3}$ ....

Calcul 16.6 — Des quatrièmes proportionnelles.

Dans chaque cas, déterminer le nombre manquant, sans racine au dénominateur, pour obtenir un tableau de proportionnalité.

a)

$\dfrac{3}{1+\sqrt{3}}$	....
$\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$	$\dfrac{2}{1-\sqrt{3}}$

b)

$\dfrac{2-\sqrt{3}}{5}$	$\dfrac{10}{2+\sqrt{3}}$
$\dfrac{3}{2-\sqrt{3}}$	....

c)

$\dfrac{2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$
....	$\dfrac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

d)

$\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$	....
$\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$	$\dfrac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$

e)

....	$\dfrac{2a+2}{1+\sqrt{2}}$
$\dfrac{a+1}{1-\sqrt{2}}$	$\dfrac{1+\sqrt{2}}{a+1}$

f)

$\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{a}$	$\dfrac{b}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$
$\dfrac{a+b}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$	....

Calcul 16.7 — Plus dur !

Faire disparaître les racines carrées des dénominateurs des fractions suivantes.

a) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ ......

b) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ ......

Calcul 16.8 — Plus long !

Exprimer sous la forme $a+b\sqrt{2}$, avec a et b deux nombres rationnels.

a) $2-\dfrac{3}{4-\dfrac{2}{1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}}}$ ......

b) $2-\dfrac{2}{3-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}}}$ ..

Réponses mélangées

$\dfrac{6-2\sqrt{2}}{7}$ $\quad \sqrt{17}+2\sqrt{3}$ $\quad 1$ $\quad \dfrac{\sqrt{7}-2}{3}$ $\quad 6(1-\sqrt{3})$ $\quad 4-2\sqrt{2}$ $\quad ab(a+b)(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

$\dfrac{3\sqrt{2}-2}{7}$ $\quad \sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}$ $\quad -9+5\sqrt{3}$ $\quad \dfrac{8-3\sqrt{2}}{4}$ $\quad 4(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ $\quad \dfrac{4(2-\sqrt{11})}{7}$

$-2(3\sqrt{2}-\sqrt{15})$ $\quad \dfrac{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ $\quad \dfrac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ $\quad 2(a+1)^3(1-\sqrt{2})$ $\quad -1$ $\quad \dfrac{5+\sqrt{5}}{4}$

$\dfrac{9-4\sqrt{2}}{7}$ $\quad 5(2-\sqrt{3})$ $\quad -1-\sqrt{2}$ $\quad 150(2+\sqrt{3})$ $\quad \dfrac{8x^2+3\sqrt{x}}{64x^3-9}$ $\quad -\dfrac{4+\sqrt{2}}{14}$ $\quad 4(2+\sqrt{2})$

► Réponses et corrigés page 174

Bilan sur les racines carrées

★☆☆☆ Consolider et approfondir la maîtrise des racines carrées

S'entraîner aux techniques fondamentales

- **Calcul 17.1 — Que de radicaux !**

Calculer les quantités suivantes, en donnant le résultat sous la forme d'un entier :

a) $\sqrt{44+\sqrt{21+\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{3+\sqrt{1}}}}}}$ ....

b) $\sqrt{\sqrt{10^2-8^2}+4\sqrt{5^2-3^2}+2\sqrt{\dfrac{9}{4}}}$ ....

- **Calcul 17.2**

Calculer les quantités suivantes, en donnant le résultat sous la forme la plus simple possible :

a) $\sqrt{\dfrac{3}{7}}\times\dfrac{\sqrt{28}}{\sqrt{12}}$ ....

b) $\dfrac{\sqrt{80}}{\sqrt{27}}\times\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{10}}$ ....

- **Calcul 17.3 — Avec des identités remarquables.**

Calculer les quantités suivantes, en donnant le résultat sous la forme la plus simple possible :

a) $\left(3\sqrt{5}+5\sqrt{2}\right)^2$ ....

b) $\left(2\sqrt{6}-7\sqrt{10}\right)^2$ ....

c) $\left(3\sqrt{6}-7\right)\left(3\sqrt{6}+7\right)$ ....

d) $\left(-1+3\sqrt{2}\right)^2\left(\sqrt{2}-1\right)^2$ ....

- **Calcul 17.4**

Calculer, en donnant le résultat sous la forme la plus simple possible :

$\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2$ ....

- **Calcul 17.5**

Soit n un nombre entier naturel. Simplifier les expressions suivantes :

a) $\sqrt{2^{2n-4}\times 5^{2n+6}}$ ....

b) $\sqrt{\dfrac{2^{8n}}{5^{4n+2}}}$ ....

c) $\sqrt{\dfrac{3^{4n}}{9^{2-6n}}}\times\dfrac{1}{\sqrt{81^n}}$ ....

d) $\sqrt{\dfrac{25^{2n}}{4^{6n-4}}}\times\dfrac{\sqrt{64^n}}{\sqrt{125^{2n+2}}}$ ....

- **Calcul 17.6 — Sans radical au dénominateur.**

Calculer les quantités suivantes, en donnant le résultat sans racine au dénominateur et avec un numérateur sous la forme la plus simple possible :

a) $\dfrac{\sqrt{5}-7}{\sqrt{3}}$ ....

c) $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$ ....

b) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{5}} - \dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{3}}$ ....

d) $\dfrac{6-\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} + \dfrac{5-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$ ....

- **Calcul 17.7 — Un calcul mystère.**

Calculer $\dfrac{1}{\sqrt{5}+2} - \sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}}$ ....

- **Calcul 17.8 — Le nombre d'or.**

On pose $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$; c'est le *nombre d'or*.

a) Calculer $\varphi^2 + 2\varphi - 5$. ....

b) Donner une relation entre φ^2 et φ. ....

c) Exprimer $1 + \dfrac{1}{\varphi}$ en fonction de φ. ....

d) À l'aide de la question précédente, exprimer φ^3 en fonction de φ. ....

e) Écrire φ^7 sous la forme « $a + b\varphi$ » avec a et b entiers. ....

Calcul littéral et racines carrées

- **Calcul 17.9**

Soit a un nombre réel strictement positif. Simplifier les expressions suivantes :

a) $\sqrt{a^3}^4$ ....

c) $\dfrac{3\sqrt{a^{-2}}^4}{-2\sqrt{a}^2}$ ....

b) $\sqrt{\left(\dfrac{-1}{a}\right)^4}^{-2}$ ....

d) $\left(\dfrac{\sqrt{16\sqrt{a}}}{\sqrt{a^{-4}}}\right)^2$ ....

- **Calcul 17.10 — Des racines emboîtées.**

Soit a un nombre réel strictement positif. Simplifier l'expression :

$\sqrt{a^2 \times \sqrt{a^4 \times \sqrt{a^8 \times \sqrt{a^{16}}}}}$ ....

● Calcul 17.11

Soit a un réel tel que $a > 1$. Simplifier les expressions suivantes :

a) $\sqrt{(5a)^2 - (4a)^2}$ ....

c) $\sqrt{a^2 - (a-1)^2}$ ....

b) $\sqrt{(a^2+1)^2 - (2a)^2}$ ....

d) $\sqrt{(a^2+2)^2 - 4a^2}$ ....

● Calcul 17.12

Soit x un nombre réel. Factoriser les expressions suivantes :

a) $2x^2 - 10$ ....

d) $(x+1)^2 - 6$ ....

b) $-3x^2 + 36$ ....

e) $2x^4 - 8$ ....

c) $\dfrac{1}{3}x^2 - 1$ ....

f) $(3x+2)^4 - 25$ ....

● Calcul 17.13

Soit x un réel strictement positif et différent de 1.

En utilisant la méthode de la quantité conjuguée, simplifier les calculs jusqu'à ce que le dénominateur ne comporte plus de racine :

a) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$ ....

c) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}-x}$ ....

b) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$ ....

d) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}-2}$ ....

● Calcul 17.14 — Des quatrièmes proportionnelles.

Soit a un réel strictement positif et soit n un entier.

Dans chaque cas, déterminer le nombre manquant pour obtenir un tableau de proportionnalité.

On donnera la réponse sans racine au dénominateur.

a)

$2\sqrt{a}+a$	....
$-a\sqrt{a}$	$a - \sqrt{4a}$

b)

$\sqrt{a^{4n}}$	....
$-\sqrt{a^n}$	$\dfrac{1}{\sqrt{a^{7n}}}$

● Calcul 17.15 — Encore des imbrications !

Soit a un réel tel que $a > 9$. Exprimer en fonction de a l'expression suivante :

$\dfrac{\sqrt{\sqrt{a}-3}}{\sqrt{\sqrt{a}+3}} - \dfrac{\sqrt{\sqrt{a}+3}}{\sqrt{\sqrt{a}-3}}$ ....

Calculs plus difficiles

● Calcul 17.16 — Possible ou non ?

Dire, « oui » ou « non », si le calcul est possible :

a) $\sqrt{\big(2-\sqrt{5}\big)\big(2+\sqrt{5}\big)}$ .... $\boxed{}$ b) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{5}-2}-1}$ .... $\boxed{}$

● Calcul 17.17

a) Déterminer l'unique couple (a, b) d'entiers tels que $\big(a+b\sqrt{3}\big)^2 = 13-4\sqrt{3}$ et $a<0$. $\boxed{}$

b) Déduire de la question précédente la valeur exacte de $\sqrt{13-4\sqrt{3}}$ .... $\boxed{}$

c) En procédant de même, donner la valeur exacte de $\sqrt{13+4\sqrt{3}}$. .... $\boxed{}$

d) Exprimer $\dfrac{1}{\sqrt{13-4\sqrt{3}}}$ sous la forme « $a+b\sqrt{3}$ » avec a et b rationnels. .... $\boxed{}$

● Calcul 17.18

a) Soit $x>0$. Simplifier $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$. .... $\boxed{}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$. .... $\boxed{}$

Réponses mélangées

$\sqrt{n+1}-1$ $\dfrac{8}{3}$ $-3\big(x-2\sqrt{3}\big)\big(x+2\sqrt{3}\big)$ $-\dfrac{3}{2}a^{-5}$ $16a^4\sqrt{a}$ $\dfrac{2^{4n}}{5^{2n+1}}$ a^6

0 a^4 non $\big(x+1-\sqrt{6}\big)\big(x+1+\sqrt{6}\big)$ $8+13\varphi$ $\dfrac{\sqrt{x}+1}{x-1}$ $\dfrac{-5+3\sqrt{5}}{2}$

$\dfrac{1}{3}\big(x-\sqrt{3}\big)\Big(x+\sqrt{3}\Big)$ $\dfrac{\sqrt{x^2+x}+x}{x}$ $1+2\sqrt{3}$ 3^{6n-2} $\sqrt{a^4+4}$ $\varphi^2 = 1+\varphi$

$2\big(x-\sqrt{5}\big)\big(x+\sqrt{5}\big)$ a^4 $2^{-3n+4}\times 5^{-n-3}$ $\dfrac{-6\sqrt{a+9}}{a-9}$ 7 $-a^{-2n}$ $3-2\sqrt{2}$

$2(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+2)$ a^2-1 $16+4\sqrt{6}-4\sqrt{10}-2\sqrt{15}$ $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ $\sqrt{2a-1}$

$514-56\sqrt{15}$ 5 $1+2\varphi$ non $\dfrac{10\sqrt{3}-3\sqrt{5}-2\sqrt{15}}{15}$ $\dfrac{(4-a)\sqrt{a}}{a}$ $\dfrac{1}{11}+\dfrac{24}{121}\sqrt{3}$

$\dfrac{\sqrt{x^2+4}+2}{x^2}$ $\dfrac{\sqrt{15}-7\sqrt{3}}{3}$ 1 $(-1,2)$ 5 $3a$ φ $(3x+2-\sqrt{5})\times(3x+2+\sqrt{5})\times\big(9x^2+12x+9\big)$

$\sqrt{x^2+1}+x$ $\dfrac{65+3\sqrt{2}+21\sqrt{3}}{7}$ $81-56\sqrt{2}$ $-1+2\sqrt{3}$ $2^{n-2}\times 5^{n+3}$ $95+30\sqrt{10}$

► Réponses et corrigés page 176

Calcul littéral — Fiche de calcul n° 18 — 2nde-LITT-01

Développement d'expressions I

S'entraîner à développer et réduire des expressions simples

Calcul 18.1 — Pour commencer.

Développer et réduire les expressions suivantes. *Le résultat est attendu sous la forme « $ax + b$ ».*

a) $2(x+1)$ ....

b) $(x+3) \times 4$ ....

c) $5(1+x)+1$ ....

d) $10(2x+3)+2x$ ....

e) $8(1+2x)+2(3x+4)$ .....

f) $4(x+2)+5(5+2x)+3$ ..

Calcul 18.2

Développer et réduire les expressions suivantes. *Le résultat est attendu sous la forme « $ax + b$ ».*

a) $-(2x+4)$ ....

b) $-3(x-5)$ ....

c) $-4(-x-2)+x$ ....

d) $-5(1-2x)-1$ ....

e) $(2x-5) \times (-6)$ ....

f) $-4(x-5)-(-2x+1)$ ....

Calcul 18.3 — Avec des fractions.

Développer et réduire les expressions suivantes. *Le résultat est attendu sous la forme « $ax + b$ ».*

a) $\dfrac{1}{2}(2x+4)$ ....

b) $\dfrac{5}{6}(3x-2)+\dfrac{1}{3}$ ....

c) $-\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{6}x-8\right)-\dfrac{1}{3}$ ....

d) $\dfrac{5}{6}(2-3x)-\dfrac{3}{4}(-2x+1)$ ..

Calcul 18.4

Développer et réduire les expressions suivantes. *Le résultat est attendu sous la forme « $ax^2 + bx + c$ ».*

a) $(2x-3)(5x+1)$ ....

b) $-(1-5x)(3x+2)$ ......

c) $2x(6-5x)+3x^2$ ....

d) $x(3x-5)-3x(x-1)$ ..

Calcul 18.5

Développer et réduire les expressions suivantes. *Le résultat est attendu sous la forme « $ax^2 + bx + c$ ».*

a) $\frac{1}{2}x\,(4x-3)$ ....

b) $\frac{-3}{5}\left(25x-10\right)-x\left(\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}\right)$

c) $\left(\frac{6}{5}x-\frac{4}{3}\right)\left(\frac{15}{4}x-10\right)-\frac{2}{3}$

d) $\frac{4}{5}\left(10x-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{8}+5x\right)$ ...

Calcul 18.6 — Avec plusieurs variables.

Développer et réduire au maximum les expressions suivantes.

a) $(3x-1)(-2y+3)$ ....

b) $a\,(-2b+5)-b\,(3a+1)$ ..

c) $(t+z)(2t-3z)$ ....

d) $uv\,(u-v)-2\,(v-u)$ ....

e) $-\frac{r}{2}\,(2-s)-\frac{s}{2}\,(2-r)$ ...

f) $p\left(q-\frac{1}{2}p\right)+\frac{1}{2}p\,(p-q)$ ..

Calcul 18.7 — Avec des racines carrées.

Développer et réduire les expressions suivantes. *Le résultat est attendu sous la forme « $a\sqrt{b}+c$ ».*

a) $\sqrt{3}\,(\sqrt{3}+1)$ ....

b) $4\sqrt{5}\left(\frac{1}{2}-3\sqrt{5}\right)$ ....

c) $(2\sqrt{7}+1)(2\sqrt{7}-2)$ ......

d) $\left(\sqrt{50}+\frac{1}{3}\right)(9+3\sqrt{2})$ ....

e) $(\sqrt{18}-3)(2-\frac{1}{2}\sqrt{2})$ .....

f) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})(2\sqrt{5}-3\sqrt{3})$ ..

Réponses mélangées

$\frac{5}{2}x-\frac{4}{3}$ $\quad rs-r-s$ $\quad u^2v-uv^2-2v+2u$ $\quad -5ab+5a-b$ $\quad 46\sqrt{2}+33$

$\frac{1}{2}pq$ $\quad 10x-6$ $\quad -6xy+9x+2y-3$ $\quad 14x+36$ $\quad -\frac{1}{8}x+\frac{17}{3}$ $\quad 15x^2+7x-2$

$-\sqrt{15}+1$ $\quad -2x$ $\quad \frac{9}{2}x^2-17x+\frac{38}{3}$ $\quad -7x^2+12x$ $\quad 10x^2-13x-3$ $\quad 22x+16$

$40x^2-x-\frac{1}{20}$ $\quad \frac{15}{2}\sqrt{2}-9$ $\quad -2x-4$ $\quad 2t^2-3z^2-tz$ $\quad 5x+8$ $\quad -12x+30$

$2\sqrt{5}-60$ $\quad \sqrt{3}+3$ $\quad 2x+2$ $\quad 4x+12$ $\quad 5x+6$ $\quad -2x+19$ $\quad -x+\frac{11}{12}$

$2x^2-\frac{3}{2}x$ $\quad -2\sqrt{7}+26$ $\quad 22x+30$ $\quad x+2$ $\quad -\frac{3}{2}x^2-\frac{63}{4}x+6$ $\quad -3x+15$

► Réponses et corrigés page 180

Calcul littéral — Fiche de calcul n° 19 — 2nde-LITT-02

Développement d'expressions II

★☆☆☆ S'entraîner à développer et réduire des expressions plus complexes

Calcul 19.1

Développer et réduire les expressions suivantes.

a) $(x+1)\big(x^2-2x+3\big)$ ....

b) $(x+y+z)^2$ ....

c) $-\big(2x^2-1\big)\big(x^3+y-7\big)$ ....

d) $(\sqrt{5}\,x+\sqrt{2}\,y)(\sqrt{2}\,x-\sqrt{5}\,y)$ ....

Calcul 19.2

Développer et réduire les expressions suivantes.

a) $(z+4)(z-4)(z^2+16)$ ....

b) $(u+\sqrt{2})(u^2+u\sqrt{2}+2)$ ....

c) $\big((1+\sqrt{2})a-b\big)\big(a^2-(1-\sqrt{2})b^3\big)$ ....

Calcul 19.3 — Des carrés et des carrés de carrés.

Développer et réduire les expressions suivantes.

a) $\big((x+3)(x-5)+15\big)^2$ ....

b) $\left(\left(\frac{1}{2}y-1\right)^2-\left(\frac{3}{2}y+1\right)^2\right)^2$ ....

Calcul 19.4

Développer et réduire les expressions suivantes.

a) $(x-1)\big(1+x+x^2\big)$ ....

b) $(v+1)\big(1-v+v^2-v^3+v^4\big)$ ....

- **Calcul 19.5**

Développer et réduire les expressions suivantes.

a) $(t+3)\big(-27+9t-3t^2+t^3\big)$ ....

b) $(z-\sqrt{2})\big(4+2\sqrt{2}\,z+2z^2+\sqrt{2}\,z^3+z^4\big)$ ....

- **Calcul 19.6**

Développer et réduire les expressions suivantes.

a) $(x-1)(x+5)^2$ ...

b) $-(u+3)(u-4)^2$.

c) $(v+1)^2(v-2)^2$ ..

d) $(x+y)^2(x-y)^2$ ..

- **Calcul 19.7**

Développer et réduire les expressions suivantes.

a) $(x+y)^2-(x-y)^2$ ...

b) $(u+2)^3-(u-2)^3$ ....

- **Calcul 19.8**

Développer et réduire les expressions suivantes.

a) $\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\big(x^2+2x+1\big)$ ....

b) $\left(1+\dfrac{2}{z}\right)\big(z^3-3z^2+z\big)$ ....

- **Calcul 19.9**

Développer et réduire les expressions suivantes.

a) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2$ ....

b) $\left(a+\dfrac{b}{a}\right)\left(b+\dfrac{a}{b}\right)$ ...

Réponses mélangées

x^3-1 $\qquad x^2+x-1-\dfrac{1}{x}$ $\qquad t^4-81$ $\qquad 4y^4+16y^3+16y^2$ $\qquad v^4-2v^3-3v^2+4v+4$

$ab+\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{a}+1$ $\qquad x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$ $\qquad x^3+9x^2+15x-25$ $\qquad x^4-2x^2y^2+y^4$

$-u^3+5u^2+8u-48$ $\qquad \sqrt{10}\,x^2-3xy-\sqrt{10}\,y^2$ $\qquad -2x^5+x^3-2x^2y+14x^2+y-7$ $\qquad 12u^2+16$

$4xy$ $\qquad z^3-z^2-5z+2$ $\qquad v^5+1$ $\qquad x^4-4x^3+4x^2$ $\qquad z^5-4\sqrt{2}$ $\qquad x^2+2+\dfrac{1}{x^2}$

$(1+\sqrt{2})a^3+ab^3-a^2b+(1-\sqrt{2})b^4$ $\qquad x^3-x^2+x+3$ $\qquad u^3+2\sqrt{2}\,u^2+4u+2\sqrt{2}$ $\qquad z^4-256$

► Réponses et corrigés page 182

Calcul littéral — Fiche de calcul n° 20 — 2nde-LITT-03

Relations entre variables

★☆☆☆ Exprimer une variable en fonction d'autres variables

Remarque
Dans cette fiche, quand on demande d'exprimer une variable en fonction des autres, on ne se souciera pas des conditions éventuelles sur les variables pour que cette écriture soit possible.

Calcul 20.1 — Pour commencer.

a) On suppose que $U = R \times I$ avec $R \neq 0$. Exprimer I en fonction de U et R. ......

b) On suppose que $M = \dfrac{a+b+c}{3}$. Exprimer a en fonction de M, b et c. ....

c) On suppose que $a = b \times q + r$ avec $q \neq 0$. Exprimer b en fonction de a, q et r. ...

Calcul 20.2

Dans chaque cas, exprimer t en fonction de C sachant que :

a) $C = 1 + \dfrac{t}{100}$ ......

b) $C = 1 - \dfrac{t}{100}$ ......

c) $10C + \dfrac{t}{10} = 34$ ....

d) $4C - \dfrac{3t}{5} = -44$ ....

Calcul 20.3

a) Sachant que $\left(1 - \dfrac{t}{100}\right)\left(1 + \dfrac{t'}{100}\right) = 1$, exprimer t' en fonction de t. ......

b) Sachant que $\left(1 + \dfrac{t}{100}\right)\left(1 - \dfrac{t'}{100}\right) = 1$, exprimer t' en fonction de t. ......

c) Sachant que $\left(1 + \dfrac{t}{100}\right)\left(1 + \dfrac{u}{100}\right)\left(1 - \dfrac{t'}{100}\right) = 1$, exprimer t' en fonction de t et u.

....

Calcul 20.4

On suppose que $\dfrac{a}{g} = \dfrac{g}{b}$ où a, b et g sont des réels strictement positifs. Exprimer :

a) b en fonction de a et g ...

b) g en fonction de a et b ...

● **Calcul 20.5 — Tout en inverse.**

On suppose que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{r}$ où p, q, r sont des réels non nuls tels que $p \neq r$. Exprimer :

a) r en fonction de p et q ...

b) q en fonction de p et r ...

● **Calcul 20.6 — Tout en fraction.**

Exprimer x en fonction de y, sachant que :

a) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ ....

b) $y = \dfrac{x+2}{1-x}$ ....

c) $y = \dfrac{4x-1}{x+5}$ ....

d) $y = \dfrac{\frac{x}{2}-6}{7x+1}$ ....

● **Calcul 20.7 — Avec des carrés.**

Exprimer x en fonction de y, sachant que :

a) $(2x+1)^2 - (2x-3)^2 = y$ ....

b) $\left(x + \dfrac{y}{2}\right)^2 - (x-y)^2 = 1$ ....

c) $\dfrac{(3x+1)^2 - (3x-4)^2}{y^2+1} = 3$ ...

d) $y = \dfrac{3x+1}{(3x-2)^2 - (3x+5)^2}$ ...

● **Calcul 20.8 — De plus en plus dur !**

Exprimer x en fonction de y, sachant que :

a) $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}$ ....

b) $y + x = \sqrt{x^2+2x+2}$ ....

c) $y = x + \sqrt{x(x+1)}$ ....

d) $y + \sqrt{x-1} = \sqrt{x+1}$ ....

Réponses mélangées

$\dfrac{y+1}{y-1}$ $\quad \dfrac{y}{4} + \dfrac{1}{3y}$ $\quad -\dfrac{21y+1}{42y+3}$ $\quad 340 - 100C$ $\quad \dfrac{20C+220}{3}$ $\quad \dfrac{g^2}{a}$

$\dfrac{2y+12}{1-14y}$ $\quad \dfrac{U}{R}$ $\quad \dfrac{y^2}{2y+1}$ $\quad \dfrac{10\,000(t+u)+100tu}{(100+t)(100+u)}$ $\quad \dfrac{a-r}{q}$ $\quad 3M - b - c$

$\dfrac{2-y^2}{2y-2}$ $\quad \dfrac{y^2+6}{10}$ $\quad \dfrac{pr}{p-r}$ $\quad \dfrac{y-2}{y+1}$ $\quad \dfrac{100t}{t+100}$ $\quad \dfrac{1+2y^2}{1-y^2}$ $\quad \dfrac{y+8}{16}$

$\dfrac{pq}{p+q}$ $\quad 100(1-C)$ $\quad \dfrac{y^4+4}{4y^2}$ $\quad \dfrac{100t}{100-t}$ $\quad \dfrac{5y+1}{4-y}$ $\quad 100(C-1)$ $\quad \sqrt{ab}$

► Réponses et corrigés page 184

Premières identités remarquables

★☆☆☆ S'entraîner à utiliser les identités remarquables

Calcul 21.1

Soient x et t deux nombres réels. Développer et réduire les expressions suivantes.

a) $(x+1)^2$ ....

b) $(2x-5)^2$ ....

c) $\left(3t+\dfrac{4}{3}\right)^2$ ....

d) $\left(\dfrac{3}{2}t-2\right)^2$ ....

Calcul 21.2

Soient x, y et t trois nombres réels tels que $y > 0$. Développer et réduire les expressions suivantes.

a) $(\sqrt{3}x-\sqrt{2})^2$ ......

b) $\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}}+1\right)^2$ ....

c) $\left(\dfrac{3}{\sqrt{y}}-\dfrac{1}{2}\right)^2$ ....

d) $\left(\sqrt{y}-\dfrac{1}{y}\right)^2$ ....

Calcul 21.3

Soient x et y deux nombres réels tels que $y > 0$. Développer et réduire les expressions suivantes.

a) $\left(\dfrac{y}{2}-\dfrac{1}{y}\right)^2$ ....

b) $(1-\sqrt{y})^2$ ....

c) $2(3x+1)^2$ ....

d) $3-(1-5x)^2$ ......

Calcul 21.4

Développer et simplifier les expressions suivantes.

a) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$ ....

b) $(5\sqrt{3}-4\sqrt{2})^2$ .....

Calcul 21.5

Calculer les expressions suivantes, en donnant le résultat sans racine carrée au dénominateur.

a) $\left(3+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$ ....

b) $\left(2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$ ....

c) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$ ....

d) $\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{5}}{4}\right)^2$ ....

Calcul 21.6

Développer et simplifier les expressions suivantes.

a) $\sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{6})^2$ ....

b) $1-(\sqrt{5}-\sqrt{7})(\sqrt{5}+\sqrt{7})$ ..

Calcul 21.7

Soit t un nombre réel. Développer et réduire les expressions suivantes.

a) $t^2-(t-1)^2$ ....

b) $2t^2-(t-1)(t+1)$ ....

c) $(t^2+4)(t-2)(t+2)$ ..

d) $(t+3)(2t-1)^2$ ....

Calcul 21.8

Soient a, b et t trois nombres réels tels que $t>0$. Développer et réduire les expressions suivantes.

a) $\left(\dfrac{a^2}{2}-b\right)^2$ ....

b) $\left(2\sqrt{t}+\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)^2$ ......

c) $(2ab+3bt)^2$ ....

d) $(a^3-b^3)(a^3+b^3)$ ..

Calcul 21.9

Soient x, y et t trois nombres réels. Développer et réduire les expressions suivantes.

a) $(5xt^2-3x^2y^3)^2$ ....

b) $\left(x+3y-\dfrac{1}{2}t\right)^2$ ....

c) $(3x-2y+5z)^2$ ....

d) $(x+y)^3$ ....

Réponses mélangées

$x^3+y^3+3x^2y+3xy^2$ — $4a^2b^2+12ab^2t+9b^2t^2$ — $9x^2+4y^2+25z^2-12xy+30xz-20yz$ — $\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{1}{y^2}-1$

$9t^2+8t+\dfrac{16}{9}$ — t^2+1 — $4t+4+\dfrac{1}{t}$ — $25x^2t^4-30x^3y^3t^2+9x^4y^6$ — a^6-b^6 — $\dfrac{9}{4}t^2-6t+4$

$\dfrac{5\sqrt{2}}{2}-2\sqrt{3}$ — x^2+2x+1 — $2t-1$ — $\dfrac{a^4}{4}-a^2b+b^2$ — $-25x^2+10x+2$ — $\dfrac{9}{2}-2\sqrt{2}$

$\dfrac{28}{3}+2\sqrt{3}$ — $107-40\sqrt{6}$ — $4t^3+8t^2-11t+3$ — $x^2+9y^2+\dfrac{1}{4}t^2-xt+6xy-3yt$ — $\dfrac{221}{16}-\dfrac{3\sqrt{30}}{4}$

$\dfrac{9}{y}-\dfrac{3}{\sqrt{y}}+\dfrac{1}{4}$ — $18x^2+12x+2$ — $3x^2-2\sqrt{6}x+2$ — t^4-16 — $y-\dfrac{2}{\sqrt{y}}+\dfrac{1}{y^2}$

$4x^2-20x+25$ — $y-2\sqrt{y}+1$ — $5-2\sqrt{6}$ — $\dfrac{t^2}{2}+\sqrt{2}t+1$ — 3 — $12+9\sqrt{2}$

► Réponses et corrigés page 186

Calcul littéral — Fiche de calcul n° 22 — 2nde-LITT-05

Factorisations

★☆☆☆ Pratiquer la factorisation pour acquérir des réflexes

● Calcul 22.1 — Pour commencer.

Souligner le facteur commun puis factoriser les expressions suivantes :

a) $(x+5)(2x-3)+(7x-4)(2x-3)$ ....

b) $(x-7)(7x-3)+2(7x-3)$ ....

c) $(2x-4)(3x+7)+3x+7$ ....

● Calcul 22.2

Souligner le facteur commun puis factoriser les expressions suivantes :

a) $(2t-1)(6t-5)+(3t-1)(2t-1)$ ....

b) $(y-3)(2y-4)-(y-3)(4y+9)$ ....

c) $(3a-\sqrt{2})(4a+2)-(2a+5)(3a-\sqrt{2})$ ....

d) $\left(3t-\dfrac{1}{4}\right)(-2t+7)-\left(3t-\dfrac{1}{4}\right)$ ....

● Calcul 22.3 — Le coup du « −1 ».

a) Compléter l'égalité suivante : .... $4-\dfrac{1}{3}x = \boxed{} \times \left(\dfrac{1}{3}x-4\right)$

b) En s'aidant de la question précédente, factoriser l'expression : $\left(\dfrac{1}{3}x-4\right)(x-8)+\left(4-\dfrac{1}{3}x\right)(-3x+2)$.

....

En utilisant la même démarche, factoriser les expressions suivantes :

c) $(3t-1)(t+4)-(2t+3)(1-3t)$ ....

d) $(9-2x)(7x+4)-(2x-9)\left(x+\dfrac{1}{3}\right)$ ....

Calcul 22.4 — À la recherche du facteur commun.

a) Compléter l'égalité suivante : .... $(6t-9) = \boxed{} \times (2t-3)$

b) En s'aidant de la question précédente, factoriser l'expression $(2t-3)(7t+1) + (6t-9)(2t+3)$.

.... $\boxed{}$

En s'inspirant de ce qui précède, factoriser les expressions suivantes :

c) $(x-7)(2x+3) + (14-2x)(5x+1)$ .... $\boxed{}$

d) $3(2x-5)(x-7) - (20-8x)(x+3)$ .... $\boxed{}$

e) $(3x-1)(7x+2) + (3x+5)(-\dfrac{1}{3}+x)$ .... $\boxed{}$

Calcul 22.5

Souligner le facteur commun puis factoriser les expressions suivantes :

a) $2(3x-4)(7x-1) + 4(7x-1)(2x+1)$ .... $\boxed{}$

b) $5(2t-1)(t+\sqrt{3}) - 3(2t-1)(t+4\sqrt{3})$ .... $\boxed{}$

c) $3(4z-1)(z+2) - (z+3)(z-4)(4z-1)$ .... $\boxed{}$

Calcul 22.6 — Avec des carrés !

a) Factoriser $(2x+3)^2 + (2x+3)(7x-4)$. .... $\boxed{}$

b) Factoriser $4(7x-1)^2 - 3(x+6)(7x-1)$. .... $\boxed{}$

Réponses mélangées

$(3x+7)(2x-3)$ $\quad$ $(7x-1)(14x-4)$ $\quad$ $(2x+3)(9x-1)$ $\quad$ $\dfrac{1}{3}x-4 = \boxed{-1} \times \left(4-\dfrac{1}{3}x\right)$

$(2t-1)(2t-7\sqrt{3})$ $\quad$ $(2x-3)(8x+1)$ $\quad$ $(2t-1)(9t-6)$ $\quad$ $(3a-\sqrt{2})(2a-3)$

$(x-7)(-8x+1)$ $\quad$ $(7x-1)(25x-22)$ $\quad$ $(7x-3)(x-5)$ $\quad$ $(2t-3)(13t+10)$

$(9-2x)\left(8x+\dfrac{13}{3}\right)$ $\quad$ $(2x-5)(7x-9)$ $\quad$ $\left(\dfrac{1}{3}x-4\right)(4x-10)$

$(y-3)(-2y-13)$ $\quad$ $(4z-1)(-z^2+4z+18)$ $\quad$ $(6t-9) = \boxed{3} \times (2t-3)$

$\left(x-\dfrac{1}{3}\right)(24x+11)$ $\quad$ $\left(3t-\dfrac{1}{4}\right)(-2t+6)$ $\quad$ $(3t-1)(3t+7)$

► Réponses et corrigés page 188

Calcul littéral — Fiche de calcul n° 23 — 2nde-LITT-06

Factorisations à l'aide de $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

★☆☆☆ Savoir repérer et appliquer la « troisième identité remarquable »

Calcul 23.1 — Premières factorisations simples.

Factoriser les expressions suivantes.

a) $x^2 - 3^2$ ....

b) $x^2 - 25$ ....

c) $4 - x^2$ ....

d) $4x^2 - 36$ ....

e) $49 - 9x^2$ ....

f) $-4x^2 + 1$ ....

Calcul 23.2

Factoriser les expressions suivantes.

a) $36 - (x + 2)^2$ ....

b) $(x + 1)^2 - (x + 3)^2$ ......

c) $(2x + 1)^2 - (x - 3)^2$ ....

d) $-(2 - x)^2 + (5x - 6)^2$ ...

Calcul 23.3 — Avec des fractions.

Factoriser les expressions suivantes.

Le résultat doit être donné sous la forme « $c\,(ax - b)(ax + b)$ » où c est une fraction et où a et b sont des nombres entiers.

a) $\dfrac{1}{4} - \dfrac{x^2}{9}$ ....

b) $\dfrac{4}{25}x^2 - \dfrac{1}{9}$ ....

c) $1 - \dfrac{1}{36}x^2$ ....

d) $-\dfrac{9}{4}x^2 + 25$ ....

Calcul 23.4 — Avec deux variables.

Factoriser les expressions suivantes.

a) $x^2 - y^2$ ....

b) $4y^2 - (x + 1)^2$ ....

c) $(x^2 - y)^2 - (x^2 + y)^2$ ...

d) $\dfrac{1}{4}x^2y^2 - (xy + 1)^2$ ......

- **Calcul 23.5 — Avec une autre identité remarquable.**

Factoriser les expressions suivantes, en utilisant une autre identité remarquable.

a) $9 - (x^2 + 2x + 1)$ ....

b) $(2x+1)^2 - (x^2 - 2x + 1)$ ....

c) $(1-5x)^2 - 4x^2 - 4x - 1$ ....

d) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{9} - \left(\frac{3}{2}x + 1\right)^2$ ....

- **Calcul 23.6 — Une factorisation astucieuse.**

On s'intéresse à l'expression $2x^2 - \frac{1}{2}$, qu'on souhaite factoriser.

a) Développer l'expression $\frac{1}{2}(4x^2 - 1)$. ....

b) En déduire une factorisation de $2x^2 - \frac{1}{2}$. ....

- **Calcul 23.7 — On s'entraîne !**

En s'inspirant de l'exercice précédent, factoriser les expressions suivantes.

Le résultat doit être donné sous la forme « $c\,(ax-b)(ax+b)$ » où c est une fraction et où a et b sont des nombres entiers.

a) $3x^2 - \frac{1}{3}$ ....

b) $\frac{1}{5}x^2 - 5$ ....

c) $7 - \frac{1}{7}x^2$ ....

d) $-\frac{1}{3} + \frac{x^2}{27}$ ....

Réponses mélangées

$2x^2 - \frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{5}(x-5)(x+5)$ $\quad \frac{1}{7}(7-x)(7+x)$ $\quad (2x-6)(2x+6)$ $\quad -\frac{1}{36}(x-6)(x+6)$

$(x-3)(x+3)$ $\quad -4yx^2$ $\quad -\frac{1}{4}(3x-10)(3x+10)$ $\quad \left(-x-\frac{4}{3}\right)\left(2x+\frac{2}{3}\right)$ $\quad \frac{1}{2}(2x-1)(2x+1)$

$\frac{1}{3}(3x-1)(3x+1)$ $\quad \frac{1}{27}(x-3)(x+3)$ $\quad (x+4)(3x-2)$ $\quad (1-2x)(1+2x)$ $\quad 3x\,(x+2)$

$\frac{1}{225}(6x-5)(6x+5)$ $\quad (4-x)(8+x)$ $\quad (7-3x)(7+3x)$ $\quad -2(2x+4)$ $\quad -7x\,(2-3x)$

$(x-5)(x+5)$ $\quad (2-x)(4+x)$ $\quad (2y-x-1)(2y+x+1)$ $\quad -\frac{1}{36}(2x-3)(2x+3)$

$(2-x)(2+x)$ $\quad \left(-\frac{1}{2}xy-1\right)\left(\frac{3}{2}xy+1\right)$ $\quad (6x-8)(4x-4)$ $\quad (x-y)(x+y)$

► Réponses et corrigés page 190

Calcul littéral — Fiche de calcul n° 24 — 2nde-LITT-07

Bilan sur les factorisations

★☆☆☆ Consolider et approfondir les techniques de factorisation

Techniques fondamentales

● **Calcul 24.1 — Quelques QCM pour commencer.**

a) Quelle est la forme factorisée de $2x+6$?

ⓐ $x(2+6)$ ⓑ $2(x+6)$ ⓒ $2(x+3)$

b) Quelle est la forme factorisée de $5x^2+15x$?

ⓐ $5x(x+3)$ ⓑ $5(x^2+15x)$ ⓒ $5x(x+15)$

c) Quelle est la forme factorisée de x^2-9 ?

ⓐ $(x-3)^2$ ⓑ $(x-9)(x+9)$ ⓒ $(x-3)(x+3)$

● **Calcul 24.2 — Avec des facteurs communs.**

Factoriser au maximum les expressions suivantes :

a) $(3x+1)(-4x+2)-(3x+1)^2$

b) $(2x-7)^2+(3-4x)(2x-7)$

c) $(x-5)^2+5-x$

d) $(5x-1)^2-(2-10x)(x+3)$

● **Calcul 24.3 — Identités remarquables.**

Factoriser au maximum les expressions suivantes :

a) $x^2+14x+49$

b) $4x^2+32x+64$

c) $x^2+81-18x$

d) $(3x-7)^2-16$

e) $36x^2-60x+25$

f) $(x-5)^2-(5x+7)^2$

Avec les identités remarquables

● **Calcul 24.4 — Étape par étape.**

a) Factoriser $5(x-1)^2 - 20$. ....

b) En déduire une factorisation de $2x^2 - 2 + 5(x-1)^2 - 20$. ....

c) De façon analogue, factoriser $2x^2 - 2 + x^2 + x$. ....

● **Calcul 24.5**

Factoriser au maximum les expressions suivantes :

a) $x^2 - 25 + (x-1)(x+5)$ ....

b) $(x+2)^2 - (3x+6)(1-x) - x - 2$ ....

c) $2(x-2)(x+1) + x^2 - 4 - 3(1-x)(4-2x)$ ....

● **Calcul 24.6 — Forçons les choses.**

Factoriser au maximum les expressions suivantes :

a) $x^2 - 2$ ....

b) $\dfrac{x^2}{5} - 1$ ....

c) $x^2 + 2\sqrt{2}x + 2$ ....

d) $2x^2 - 4\sqrt{3}x + 6$ ....

Autres techniques

● **Calcul 24.7 — De degré 3.**

a) Développer et réduire $(a-b)(a^2 + ab + b^2)$. ....

b) En déduire la forme factorisée de $x^3 - 27$. ....

c) En utilisant la question a), factoriser $x^6 - 27$. ....

d) En utilisant la question a), factoriser $x^9 - 1$. ....

Calcul 24.8 — Une astuce.

a) En remarquant que $3 = 4 - 1$, factoriser au maximum $x^2 - 4x + 3$. ....

b) En remarquant que $27 = 36 - 9$, factoriser au maximum $4x^2 + 24x + 27$. ....

Quelques applications

Calcul 24.9 — Simplifications de fractions.

Simplifier les expressions suivantes.

On ne se souciera pas de leur domaine de définition.

a) $\dfrac{(x-3)^2 + x^2 - 9}{x-3}$ ....

b) $\dfrac{x^2 - 16}{(x-2)(x+4)}$ ....

c) $\dfrac{-2x - 3 + (x-2)(2x+3)}{4x^2 + 12x + 9}$ ....

d) $\dfrac{x^4 - 1}{(x+1)(x+2)(x^2+1)}$ ....

Calcul 24.10 — Factoriser pour calculer plus vite.

En utilisant des factorisations et en faisant le moins d'étapes possible, donner le résultat de chacun des calculs suivants :

a) $35 \times 215 + 35 \times 785$ ....

b) $10\,001^2 - 9\,999^2$ ....

c) $996 \times 1\,004$ ....

Calcul 24.11 — Est-il premier ?

Soit n un entier supérieur à 2.

a) En vous inspirant du calcul 24.8, factoriser $n^2 + 4n + 3$. ....

b) L'entier $n^2 + 4n + 3$ peut-il être premier ? ....

Calcul 24.12 — Est-il multiple de 52 ?

L'entier $12^{52} + 12^{53}$ est-il un multiple de 52 ? « Oui » ou « Non » ? ....

On commencera par factoriser cet entier.

Calculs plus difficiles

● **Calcul 24.13**

Factoriser au maximum chacune des expressions suivantes :

a) $4x + 4y - xz^2 - yz^2$ ....

b) $x^8 - 1$ ....

c) $x^4 - 4x^2 + 4$ ....

d) $9(x+1)^2 - (x-5)^2$ ....

● **Calcul 24.14 — Factorisation par bloc.**

Le but de cet exercice est de factoriser $(2x-1)^2 - (5x+1)(6x-3) + 8x^2 - 2$.

a) Factoriser au maximum $(5x+1)(6x-3)$. ....

b) Factoriser au maximum $8x^2 - 2$. ....

c) Conclure. ....

Réponses mélangées

Oui $\quad 2(x+2)(2x-1) \quad (x-3)(x-1) \quad \left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x^4+3x^2+9\right)$

$(x+1)(3x-2) \quad 2x \quad 3(5x+1)(2x-1) \quad 35\,000 \quad \dfrac{\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)}{5} \quad (2x+3)(2x+9)$

c $\quad -2(2x-7)(x+2) \quad (x-3)(x^2+3x+9) \quad (x+7)^2 \quad 2\left(x-\sqrt{3}\right)^2$ $\quad$ a

$5(x-3)(x+1) \quad \dfrac{x-4}{x-2}$ $\quad$ Non $\quad a^3 - b^3 \quad (x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)\left(x^4+1\right) \quad (x-9)^2$

$-(2x-1)(9x+2) \quad 4(x+4)^2 \quad 2(x+5)(x-3) \quad -8(x+3)(3x+1)$ $\quad$ c

$\left(\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)\right)^2 \quad 999\,984 \quad \dfrac{x-3}{2x+3} \quad (5x-1)(7x+5) \quad 4(x+4)(2x-1)$

$\left(x+\sqrt{2}\right)^2 \quad 3(3x-11)(x-1) \quad \dfrac{x-1}{x+2} \quad (6x-5)^2 \quad (n+1)(n+3) \quad 2(2x-1)(2x+1)$

$(2-z)(2+z)(x+y) \quad 40\,000 \quad (x-2)(-3x+10) \quad (x-1)\left(x^2+x+1\right)\left(x^6+x^3+1\right)$

$\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right) \quad (x+1)(7x-17) \quad (x-5)(x-6) \quad (3x+1)(-7x+1)$

► Réponses et corrigés page 192

Inégalités et inéquations — Fiche de calcul n° 25 — 2nde-INEG-01

Manipulation d'inégalités

★☆☆☆ Maîtriser les opérations élémentaires sur les inégalités

Calcul 25.1 — Trouver l'intervalle (I).

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'intervalle (auquel appartient x) qui est défini par la condition donnée.

a) $x + 3 \geqslant -12$ ....

b) $x - 5 \leqslant 6$ ....

c) $3x > 12$ ....

d) $-4x \leqslant 24$ ....

e) $5x - 7 \geqslant 13$ ....

f) $4 - 7x < -45$ ....

Calcul 25.2 — Trouver l'intervalle (II).

Même exercice.

a) $-2 \leqslant x + 1 \leqslant 5$ ....

b) $3 \leqslant x - 2 < 11$ ....

c) $12 > 4x > -8$ ....

d) $-4 < -6x \leqslant 0$ ....

e) $5 > 2x - 1 \geqslant 1$ ....

f) $-17 \leqslant 3 - 5x \leqslant 33$ ....

Calcul 25.3 — Trouver l'intervalle (III).

Même exercice.

a) $x - 1 \in [-3, 2]$ ....

b) $x + 2 \in [1, 5[$ ....

c) $2x - 3 \in]-26, 74[$.

d) $-7x + 3 \in \left]\frac{2}{3}, \frac{15}{4}\right]$

Calcul 25.4 — Encadrement d'une expression (I).

a) Encadrer $\dfrac{1}{x}$ sachant que $x \in [2, 3]$. ....

b) Encadrer $\dfrac{-3}{x}$ sachant que $x \in [5, 9]$. ....

c) Encadrer $\dfrac{-4}{x+2}$ sachant que $x \in [-6, -3]$. ....

● Calcul 25.5 — Encadrement d'une expression (II).

a) Encadrer $2x + 3y$ sachant que $x \in [-2, 3]$ et $y \in [1, 2]$. ....

b) Encadrer $5z + 3t$ sachant que $z \in [-4, -2]$ et $t \in [-3, 0]$. .....

● Calcul 25.6 — Encadrement d'une expression (III).

a) Encadrer $-2x + 3y$ sachant que $x \in [-2, 3]$ et $y \in [1, 2]$. ......

b) Encadrer $5z - 3t$ sachant que $z \in [-4, -2]$ et $t \in [-3, 0]$. .....

● Calcul 25.7 — Encadrer un produit.

a) Encadrer le produit xy sachant que $x \in [2, 3]$ et $y \in [4, 7]$. ....

b) Encadrer le produit zt sachant que $z \in [-3, -2]$ et $t \in [1, 2]$. ....

c) Encadrer le produit uv sachant que $u \in [-1, 2]$ et $v \in [3, 6]$. ....

● Calcul 25.8 — Encadrer un quotient.

a) Encadrer le quotient $\dfrac{x}{y}$ sachant que $x \in [2, 3]$ et $y \in [4, 7]$.

....

b) Encadrer le quotient $\dfrac{z}{t}$ sachant que $z \in [-2, -1]$ et $t \in [-6, -3]$.

....

Réponses mélangées

$-20 \leqslant 5z - 3t \leqslant -1$ $\quad [-3, 4] \quad [-6, +\infty[\quad]-2, 3[\quad -6 \leqslant uv \leqslant 12 \quad]7, +\infty[$

$\dfrac{-3}{5} \leqslant \dfrac{-3}{x} \leqslant \dfrac{-1}{3} \quad [1, 3[\quad [-15, +\infty[\quad -6 \leqslant zt \leqslant -2 \quad -29 \leqslant 5z + 3t \leqslant -10$

$8 \leqslant xy \leqslant 21 \quad \dfrac{2}{7} \leqslant \dfrac{x}{y} \leqslant \dfrac{3}{4} \quad x \in \left]\dfrac{-23}{2}, \dfrac{77}{2}\right[\quad]-\infty, 11] \quad [-6, 4] \quad \left[0, \dfrac{2}{3}\right[$

$x \in [-2, 3] \quad [4, +\infty[\quad x \in [-1, 3[\quad x \in \left[-\dfrac{3}{28}, \dfrac{1}{3}\right[\quad [5, 13[\quad -1 \leqslant 2x + 3y \leqslant 12$

$1 \leqslant \dfrac{-4}{x+2} \leqslant 4 \quad \dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{2} \quad \dfrac{1}{6} \leqslant \dfrac{z}{t} \leqslant \dfrac{2}{3} \quad]4, +\infty[\quad -3 \leqslant -2x + 3y \leqslant 10$

► Réponses et corrigés page 196

Équations — Fiche de calcul n° 26 — 2nde-EQINEQ-04

Inéquations du premier degré

★☆☆☆ S'entraîner à la résolution des inéquations du premier degré

Consigne
Dans toutes les questions où l'on demande de résoudre une inéquation, on donnera les solutions sous forme d'intervalle.

Calcul 26.1

Le nombre x proposé est-il solution de l'inéquation correspondante ? « oui » ou « non » ?

a) $x = \dfrac{2}{3}$ et $3x - \dfrac{4}{7} \leqslant 2x + \dfrac{3}{7}$ ....

b) $x = \dfrac{-5}{7}$ et $-5x + \dfrac{4}{3} \leqslant -5x + \dfrac{-2}{3}$ ....

Calcul 26.2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $x + 5 \leqslant -2$ ....

b) $x - 7 < 3$ ....

c) $x - \dfrac{5}{4} \leqslant \dfrac{-3}{7}$ ....

d) $x + \dfrac{2}{3} \leqslant \dfrac{11}{-2}$ ....

Calcul 26.3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $3x + 4 \geqslant -5$ ....

b) $-7x + 2 < -3$ ....

c) $\dfrac{2}{3}x + \dfrac{-5}{4} \leqslant \dfrac{2}{3}$ ....

d) $\dfrac{-5}{8}x + \dfrac{-3}{2} > -\dfrac{5}{-4}$ ....

Calcul 26.4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $5x - 3 \leqslant 4x + 2$ ....

b) $3x - 4 > 5x - 7$ ....

c) $6\left(x + \dfrac{1}{2}\right) < -3(2x + 2)$ ....

d) $\dfrac{5}{3}\left(\dfrac{2}{7}x - 1\right) \geqslant -\dfrac{3}{2}\left(-x - \dfrac{7}{2}\right)$ ....

Calcul 26.5 — Avec des carrés.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $-3x^2 + x - 3 \leqslant -3x^2 - 2x + 4$ ....

b) $(x-5)^2 > (x+7)^2$ ....

c) $(2x-3)^2 < (2x+2)^2 - 4x$ ....

d) $3(2x^2 + 10) < 6(x^2 + 5)$ ....

Calcul 26.6 — Avec un paramètre.

Soit $a < 0$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $ax + 3 \geqslant a$ ....

b) $-ax + 7 < -a$ ....

c) $7x^2 - 2ax + a \geqslant 7x\left(x - \dfrac{1}{x}\right)$ ....

d) $-3x(6x + 4a) < -9x(2x + 4a)$ ....

Calcul 26.7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $\dfrac{3x+1}{4} > \dfrac{5x+1}{6}$ ....

b) $\dfrac{1-x}{4} - \dfrac{3x-2}{2} \leqslant \dfrac{2x+5}{6}$ ....

Réponses mélangées

$]0, +\infty[$ $\quad [-3, +\infty[$ $\quad$ non $\quad \left]-\infty, -\dfrac{37}{6}\right]$ $\quad \left]-\infty, -\dfrac{3}{4}\right[$ $\quad \left]-\infty, \dfrac{23}{28}\right]$

$\left[\dfrac{1}{5}, +\infty\right[$ $\quad]-\infty, 5]$ $\quad \left[\dfrac{7+a}{2a}, +\infty\right[\setminus \{0\}$ $\quad \varnothing$ $\quad]-\infty, 10[$ $\quad]-\infty, -1[$

$\left]-\infty, \dfrac{7}{3}\right]$ $\quad \left]-\infty, \dfrac{a+7}{a}\right[$ $\quad \left]-\infty, -\dfrac{581}{86}\right]$ $\quad$ oui $\quad \left]-\infty, \dfrac{a-3}{a}\right]$ $\quad \left]-\infty, -\dfrac{22}{5}\right[$

$\left]-\infty, \dfrac{3}{2}\right[$ $\quad \left]-\infty, \dfrac{23}{8}\right]$ $\quad \left]\dfrac{5}{7}, +\infty\right[$ $\quad]-\infty, 1[$ $\quad \left]\dfrac{5}{16}, +\infty\right[$ $\quad]-\infty, -7]$

► Réponses et corrigés page 199

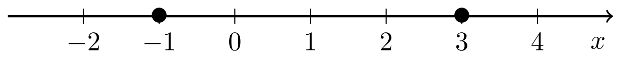
Inégalités et inéquations — Fiche de calcul n° 27 — 2nde-INEG-02

Inégalités et valeur absolue

★☆☆☆ S'entraîner à faire le lien entre valeur absolue et inégalités

Calcul 27.1

De quelle équation les deux nombres marqués d'un point sur l'axe gradué ci-dessous sont-ils les solutions ?



(a) $|x-3|=4$ (b) $|x+1|=2$ (c) $|x-1|=2$ (d) $|x+1|=4$

....

Calcul 27.2 — Premières équations.

Dans chacun des cas suivants, donner les solutions de l'équation.

a) $|x-3|=1$ ....

b) $|3x+2|=13$ ....

c) $|7x+21|=0$ ....

Calcul 27.3 — Premières inéquations.

On sait que :

$$|x| \leqslant 3 \quad \iff \quad -3 \leqslant x \leqslant 3.$$

De même, traduire chacune des inégalités suivantes par un encadrement de x.

a) $|x-3| \leqslant 1$ ....

b) $|x+4| \leqslant 5$ ....

c) $|2x-3| \leqslant 5$ ......

d) $|5x+10| \leqslant 25$ .....

Calcul 27.4

Dans chacun des cas suivants, donner l'ensemble des solutions de l'inéquation.

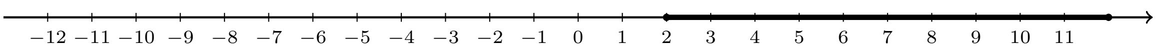
a) $|x-3| \leqslant 1$ ....

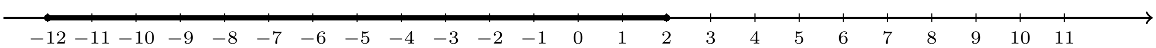
b) $|x+5| \leqslant 7$ ....

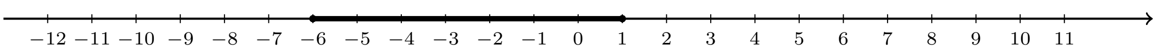
c) $|x-6| \leqslant 0$ ....

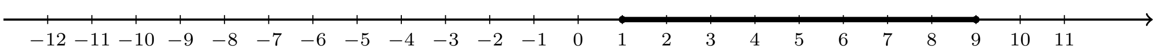
Calcul 27.5

Quel est l'ensemble des solutions de l'inéquation $|2x+5| \leqslant 7$?

a 

b 

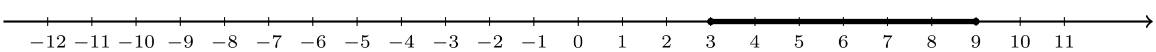
c 

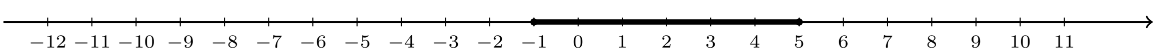
d 

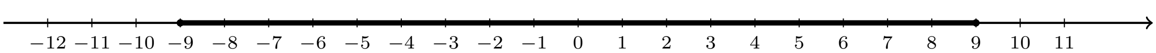
....

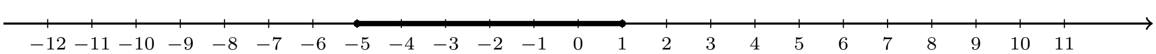
Calcul 27.6

Quel est l'ensemble des solutions de l'inéquation $|6-3x| \leqslant 9$?

a 

b 

c 

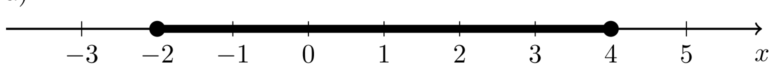
d 

....

Calcul 27.7 — Trouver une inéquation à partir de l'ensemble des solutions.

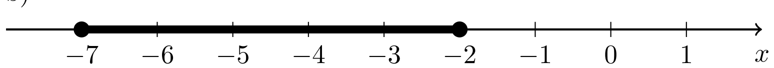
Dans chacun des cas suivants, proposer une inéquation, faisant intervenir la valeur absolue, dont l'ensemble des solutions est l'intervalle représenté sur l'axe gradué.

a)



....

b)



....

Réponses mélangées

c — $-1 \leqslant x \leqslant 4$ — $-9 \leqslant x \leqslant 1$ — $\{6\}$ — -5 et $\dfrac{11}{3}$ — b — $|x-1| \leqslant 3$ — $2 \leqslant x \leqslant 4$

2 et 4 — $[-12, 2]$ — $|x+4{,}5| \leqslant 2{,}5$ ou $|2x+9| \leqslant 5$ — c — -3 — $[2, 4]$ — $-7 \leqslant x \leqslant 3$

▶ Réponses et corrigés page 201

Tableaux de signes et inéquations I

★☆☆☆ S'entraîner à la résolution d'inéquations produits ou quotients

Calcul 28.1

Dresser les tableaux de signes des expressions suivantes :

a) $f(x) = (x-2)(x+3)$ ....

x	$-\infty$ $+\infty$

b) $g(x) = (7-x)(10+x)$ ....

x	$-\infty$ $+\infty$

c) $h(x) = (2x-3)(7x+4)$ ....

x	$-\infty$ $+\infty$

Calcul 28.2 — QCM.

L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $(x+5)(x+10) > 0$ est :

(a) $]-\infty, -10[\cup]-5, +\infty[$

(b) $]-10, -5[$

(c) $]-\infty, 5[\cup]10, +\infty[$

(d) $]5, 10[$

....

Calcul 28.3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes, en utilisant un tableau de signes.

a) $(9+x)(6-x) < 0$ ....

b) $(3-4x)(5x+7) \geqslant 0$ ....

c) $(2x-7)(x+9)(5-x) > 0$ ....

Calcul 28.4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes, en utilisant un tableau de signes.

a) $\dfrac{x+17}{x+11} \leqslant 0$ ....

b) $\dfrac{5-7x}{3x+2} < 0$ ....

c) $\dfrac{x+4}{3x+6} \geqslant 0$ ....

d) $\dfrac{(x-4)(3-2x)}{5-x} \geqslant 0$

Calcul 28.5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $\dfrac{9-x}{3x+2} \geqslant 2$ ....

b) $-1 + \dfrac{1}{1+x^2} > 0$ ....

Calcul 28.6

a) Factoriser l'expression $A(x) = (x-1)(x+2) - 3(x-1)$. .....

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(x-1)(x+2) \geqslant 3(x-1)$. .....

Calcul 28.7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

On commencera par factoriser les expressions en question, puis on dressera un tableau de signes.

a) $(x+8)(1-x) > (2x-1)(x+8)$ ....

b) $x^3 - x \leqslant 0$ ....

c) $49 - (3+x)^2 \leqslant 0$ ....

Réponses mélangées

$]-\infty,-1] \cup [0,1]$ $\qquad (x-1)^2$ $\qquad]-\infty,+\infty[$ $\qquad]-\infty,-9[\cup]6,+\infty[$ $\qquad]-\infty,-4]\cup]-2,+\infty[$

$\left[\dfrac{3}{2},4\right] \cup]5,+\infty[$ $\qquad \left]-\infty,-9\right[\cup \left]\dfrac{7}{2},5\right[$ $\qquad$ a $\qquad \left[-\dfrac{7}{5},\dfrac{3}{4}\right]$ $\qquad]-\infty,-10] \cup [4,+\infty[$

$\left]-\dfrac{2}{3},\dfrac{5}{7}\right]$ $\qquad \left]-\infty,-\dfrac{2}{3}\right[\cup \left]\dfrac{5}{7},+\infty\right[$ $\qquad \left]-8,\dfrac{2}{3}\right[$ $\qquad \varnothing$ $\qquad [-17,-11[$

► Réponses et corrigés page 203

Tableaux de signes et inéquations II

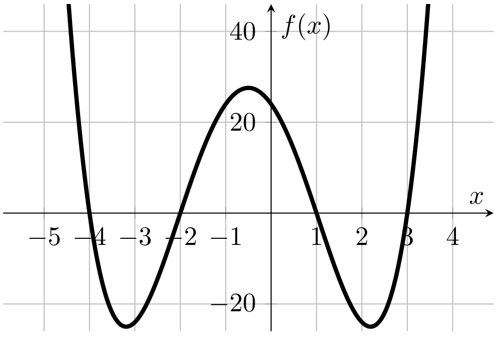
Savoir utiliser les tableaux de signes pour résoudre des inéquations

Calcul 29.1 — Pour commencer.

Dans le repère ci-contre, on a tracé la représentation graphique d'une fonction f définie sur $[-5, 4]$.

Compléter le tableau de signes suivant :

x	...		...		...		...		...		...
$f(x)$			0		0		0		0		



Calcul 29.2 — Quel est le signe ?

Voici les tableaux de signes de deux fonctions f et g, définies sur $[-4, 4]$:

x	-4		-2		4
$f(x)$		$-$	0	$+$	

x	-4		-1		4
$g(x)$		$+$	0	$-$	

Donner le signe des quantités suivantes :

a) $f(-3)$ ....

b) $g(-3)$ ....

c) $f(-3) \times g(-3)$ ..

d) $f(-2) \times g(-2)$ ..

e) $\dfrac{g(-2)}{f(-2)}$ ....

Calcul 29.3

a) Compléter le tableau de signes suivant, pour la fonction définie par $f(x) = (-5x + 4)(7x + 3)$.

x	$-\infty$		...		...		$+\infty$
...							
...							
...							

b) En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > 0$. ....

c) Déterminer l'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{-5x + 4}{7x + 3} \leqslant 0$. ..

● Calcul 29.4 — Résolution d'inéquations « produit ».

Donner l'ensemble des solutions des inéquations suivantes.

On établira au préalable un tableau de signes.

a) $(2x+7)(x+5) \geqslant 0$ ....

b) $(-3x+4)(-2x+5) < 0$ ....

● Calcul 29.5 — Résolution d'inéquations « produit/quotient ».

On veut résoudre l'inéquation :

$$\frac{(2x+1)(-3x+7)}{5x+13} \geqslant 0.$$

a) Donner l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles cette inéquation est définie. ..

b) Donner l'ensemble des solutions de cette inéquation.

On établira au préalable un tableau de signes.

....

● Calcul 29.6 — En se ramenant à l'étude du signe d'un produit ou d'un quotient.

Donner l'ensemble des solutions des inéquations suivantes.

On commencera par ramener l'inéquation considérée à une inéquation produit ou quotient, puis on établira un tableau de signes.

a) $(3x+1)(7x+4) \geqslant (3x+1)(-3x+2)$ ....

b) $(x+5)^2 < (x+5)(-3x+10)$ ....

c) $\dfrac{2x+4}{4x+1} \leqslant \dfrac{7x+3}{4x+1}$ ....

Réponses mélangées

$\left]-\infty, -\frac{13}{5}\right[\cup \left[-\frac{1}{2}, \frac{7}{3}\right]$ négatif $\left]\frac{4}{3}, \frac{5}{2}\right[$ 0 $\left]-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup \left[-\frac{1}{5}, +\infty\right[$

$\left]-\frac{3}{7}, \frac{4}{5}\right[$ négatif $\left]-5, \frac{5}{4}\right[$ $]-\infty, -5] \cup \left[-\frac{7}{2}, +\infty\right[$ $\mathbb{R} \setminus \{\frac{-13}{5}\}$

$\left]-\infty, -\frac{1}{4}\right[\cup \left[\frac{1}{5}, +\infty\right[$ non défini $\left]-\infty, -\frac{3}{7}\right[\cup \left[\frac{4}{5}, +\infty\right[$ positif

► Réponses et corrigés page 206

Inégalités et inéquations — Fiche de calcul n° 30 — 2nde-INEG-04

Tableaux de signes et inéquations III

★☆☆☆ S'entraîner à factoriser des expressions pour étudier leur signe

Consigne
Dans cette fiche, « résoudre une inéquation » signifiera « donner l'ensemble de ses solutions ».

● Calcul 30.1 — Quelques tableaux de signes pour commencer.

À l'aide d'un tableau de signes, résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $(x+3)(-3x+6) \geqslant 0$ . ...

b) $(12x-6)(5-x) > 0$ .. ..

c) $\dfrac{x+4}{7x-14} \leqslant 0$ ....

d) $\dfrac{3x-2}{x+8} \geqslant 0$ ....

● Calcul 30.2 — Avec des factorisations.

À l'aide d'une factorisation (puis d'un tableau de signes), résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $(1-2x)(5x-2)+3(1-2x) < 0$ ....

b) $(x-1)(3x+5) \geqslant (4x-3)(x-1)$ ....

c) $(4x+3)(-x+7) > (5-2x)(4x+3)$ ....

● Calcul 30.3

a) Mettre au même dénominateur l'expression $\dfrac{x+1}{x-2}+3$. ....

b) À l'aide d'un tableau de signes, résoudre l'inéquation $\dfrac{x+1}{x-2} \geqslant -3$. ....

● Calcul 30.4

En se basant sur la méthode de l'exercice précédent, résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $\dfrac{3x+1}{4x+5} \leqslant 2$ ....

b) $\dfrac{4x-7}{5-2x} < 1$ ....

c) $\dfrac{3}{4-x} \leqslant 2$ ....

d) $\dfrac{x+1}{-2x+3} \geqslant 3$ ... .

- **Calcul 30.5**

a) Mettre au même dénominateur l'expression $\dfrac{3}{x+1} - \dfrac{2}{x}$. ....

b) À l'aide d'un tableau de signes, résoudre l'inéquation $\dfrac{3}{x+1} \leqslant \dfrac{2}{x}$. ......

- **Calcul 30.6**

En se basant sur la méthode de l'exercice précédent, résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{3}{2x+6}$ ....

b) $\dfrac{x-1}{x+2} \leqslant \dfrac{x+2}{x}$ ....

- **Calcul 30.7 — Avec les identités remarquables (I).**

À l'aide d'une factorisation, puis d'un tableau de signes, résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $25 - 4x^2 \geqslant 0$ ......

b) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{1}{16} > 0$ ....

c) $(3x+1)^2 \leqslant 25$ .....

d) $(2x+4)^2 \geqslant 9x^2$ ....

- **Calcul 30.8 — Avec les identités remarquables (II).**

À l'aide d'une factorisation, puis d'un tableau de signes, résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $(2x+1)(5-x) + 4x^2 - 1 \leqslant 0$ ....

b) $(3x+1)^2 - (2x+5)^2 \geqslant 0$ ....

c) $8x^3 - 18x \leqslant 0$ ....

Réponses mélangées

$]1/2, 5[$ $\quad]-\infty, -1[\cup]0, 2]$ $\quad]-\infty, 5/4] \cup]2, +\infty[$ $\quad [-4/5, 4]$ $\quad]-\infty, 5/2] \cup]4, +\infty[$

$[-3, 2]$ $\quad [-2, 4/3]$ $\quad]-2, -4/5] \cup]0, +\infty[$ $\quad]-\infty, -2[\cup]-3/4, +\infty[$ $\quad]-\infty, 2[\cup]5/2, +\infty[$

$]-3, 0[\cup [6, +\infty[$ $\quad]-\infty, -3/2] \cup [0, 3/2]$ $\quad]-\infty, -6/5] \cup [4, +\infty[$ $\quad [-4, -1/2]$

$]-\infty, -3/4[\cup]3/4, +\infty[$ $\quad]-\infty, -1/5[\cup]1/2, +\infty[$ $\quad [1, 8]$ $\quad [-5/2, 5/2]$

$[8/7, 3/2[$ $\quad]-\infty, -8[\cup [2/3, +\infty[$ $\quad]-\infty, -9/5] \cup]-5/4, +\infty[$ $\quad [-4, 2[$

► Réponses et corrigés page 209

Équations | Fiche de calcul n° 31 | 2nde-EQINEQ-01

Équations du premier degré

★☆☆☆ Résoudre des équations du premier degré élémentaires

Cette fiche est entièrement composée d'équations dont on déterminera l'ensemble des solutions.

À chaque fois, on veillera à simplifier au maximum les nombres intervenant dans les ensembles.
En particulier, les expressions données ne devront pas avoir de racine carrée au dénominateur.

● Calcul 31.1

a) $3x + 2 = 3$ ....

b) $x - 7 = 3x + 3$ ....

c) $11x - 2 = 3 - 5x$ ....

d) $5x + 12 = -2 - 2x$ ......

● Calcul 31.2 — Avec des racines.

a) $\sqrt{8}x - 4 = \sqrt{2}x + 2$ ......

b) $3(2x+1) = 4x + 3 + 2\sqrt{3}$

c) $\sqrt{2}x - 1 = \sqrt{2} + x$ ......

d) $\sqrt{6}x + 2 = \sqrt{3}\left(\sqrt{2}x - 1\right)$

● Calcul 31.3 — Avec des fractions (I).

a) $\dfrac{x}{3} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{x}{3}$ ....

b) $\dfrac{1}{2}\dfrac{x}{\frac{1}{2} + \frac{3}{5}} = 2x - 1$ ....

c) $7\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{1}{6} - \dfrac{x}{6}$ ....

d) $\dfrac{1}{3}\left(2x - \dfrac{5}{2}\right) = \dfrac{x+1}{1 + \frac{1}{2}}$ ....

● Calcul 31.4 — Des fractions (II).

a) $\dfrac{2}{x} = \dfrac{3}{5}$ ....

b) $\dfrac{\sqrt{2}}{x - \frac{1}{2}} = \sqrt{8}$ ....

c) $\dfrac{2}{x-2} = -\dfrac{5}{x-1}$ ....

d) $\dfrac{1}{3(1-2x)} = -\dfrac{2}{4-x}$ ....

Réponses mélangées

$\left\{-\dfrac{5}{8}\right\}$ $\left\{3 + 2\sqrt{2}\right\}$ $\left\{\dfrac{10}{3}\right\}$ $\{-2\}$ $\left\{\dfrac{1}{3}\right\}$ pas de solution $\{1\}$ $\left\{\dfrac{11}{17}\right\}$

$\left\{3\sqrt{2}\right\}$ $\{-5\}$ $\left\{\dfrac{10}{13}\right\}$ $\{1\}$ $\left\{\sqrt{3}\right\}$ $\left\{\dfrac{12}{7}\right\}$ $\left\{\dfrac{5}{16}\right\}$ pas de solution

► Réponses et corrigés page 212

Équations du premier degré avec paramètre

★☆☆☆ Résoudre des équations du premier degré contenant un paramètre

Calcul 32.1

Soit a un réel. Déterminer les solutions des équations d'inconnue x suivantes. Elles seront exprimées en fonction de la lettre a.

a) $x + 3 = a$ ....

b) $2x + a = 3$ ....

c) $5 - 3x = 3a + 2$ ....

d) $1 - 2x = 3 - a^2$ ....

e) $1 + a^2x = -x - a^2$ ....

f) $x^2 - a^2x - 1 = (x-1)(x+2) + a^2$.

Calcul 32.2

Soit b un réel non nul. Déterminer les solutions des équations d'inconnue x suivantes. Elles seront exprimées en fonction de la lettre b.

a) $\dfrac{x}{b} - 3 = 2$ ....

b) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{3}{b} = 4$ ....

c) $\dfrac{2}{x} + \dfrac{b}{3} = \dfrac{b}{6}$ ....

d) $\dfrac{3}{bx} + x = x\left(1 - \dfrac{4b}{x}\right)$ ....

Calcul 32.3

a) Soit b un réel. Le nombre de solutions de l'équation $(x+1)(x+2b) = x^2 + (1+2b)(x+1)$

(a) vaut 0 (b) vaut 1 (c) dépend de la valeur de b

....

b) Soit m un réel. Le nombre de solutions de l'équation $mx + 3 = 2$

(a) vaut 0 (b) vaut 1 (c) dépend de la valeur de m

....

c) Soit a un réel. L'ensemble des solutions de l'équation $a(x+a) = a(2x-1)$

(a) peut être $\mathbb{R}$ (b) est toujours $\{1+a\}$ (c) peut être vide

....

Réponses mélangées

$5b$ $\dfrac{1-a^2}{1+a^2}$ (a) $1-a$ (a) $-\dfrac{3}{4b^2}$ $-\dfrac{12}{b}$

$\dfrac{6}{b} + 8$ (c) $\dfrac{a^2-2}{2}$ -1 $a-3$ $\dfrac{3-a}{2}$

▶ Réponses et corrigés page 214

Systèmes d'équations

★☆☆☆ S'entraîner à la résolution des systèmes d'équations

● Calcul 33.1 — Sont-ils solutions ?

Dire si, « oui » ou « non », les couples suivants sont solutions du système $\begin{cases} 2x - 4y = -10 \\ -3x + 6y = 15. \end{cases}$

a) $(4, 3)$ ....

b) $(3, 4)$ ....

c) $(-3, 1)$ ....

d) $(2, 3)$ ....

● Calcul 33.2

Dire si, « oui » ou « non », les couples suivants sont solutions du système $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - 4y = -15. \end{cases}$

a) $(4, 1)$ ....

b) $(-5, 0)$ ....

c) $(-1, 3)$ ....

d) $(-4, 5)$ ....

● Calcul 33.3 — Premiers systèmes.

Donner, dans chacun des cas suivants, le couple solution du système.

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$ ....

b) $\begin{cases} x - y = -6 \\ x + y = 2 \end{cases}$ ....

c) $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ x + 3y = -2 \end{cases}$ ....

d) $\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ 3x + 5y = 7 \end{cases}$ ....

● Calcul 33.4 — Avec des fractions.

Donner, dans chacun des cas suivants, le couple solution du système.

a) $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 5x + 8y = 4 \end{cases}$ ....

b) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x - 3y = \dfrac{3}{4} \\ 2x - 6y = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$ ....

c) $\begin{cases} -3x + y = -8 \\ 27x - 6y = -2 \end{cases}$ ....

d) $\begin{cases} x + \dfrac{3}{4}y = \dfrac{7}{8} \\ 4x + \dfrac{3}{5}y = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$ ....

- **Calcul 33.5 — À l'intersection de deux droites.**

Trouver les coordonnées du point d'intersection des droites d'équations $y = 2x + 4$ et $y = -3x + 5$.

....

- **Calcul 33.6 — Viennoiseries.**

Une personne achète des pains au chocolat à 1,20 euros et des croissants à 1 euro.

Au total, cela lui coûte 10,80 euros, sachant qu'elle a acheté 10 viennoiseries.

Combien a-t-elle acheté de croissants ?

....

- **Calcul 33.7 — Avec des racines.**

Donner, dans chacun des cas suivants, le couple solution du système.

a) $\begin{cases} 2\sqrt{2}\,x + 4y = -1 \\ 6\sqrt{2}\,x + 8y = 3 \end{cases}$ ....

b) $\begin{cases} x + (1-\sqrt{3})y = 1 \\ (2-\sqrt{3})x - y = 0 \end{cases}$ ....

- **Calcul 33.8 — Voyage en train.**

Un TGV part de Paris et dessert les gares de Rennes puis de Saint-Malo. Un groupe de 7 passagers monte dans ce train à Paris, dont 2 pour Rennes. Au total, ils ont dépensé 270 euros. Le lendemain, un groupe de 6 passagers monte dans ce train (au même tarif), dont 4 pour Rennes. Au total, ils paient 220 euros.

Quel est le prix d'un billet pour Saint-Malo ?

....

- **Calcul 33.9 — Des systèmes plus subtils.**

Donner, dans chacun des cas suivants, les éventuels couples solutions du système.

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ 15x - 10y = 40 \end{cases}$ .....

b) $\begin{cases} 2x + 8y = 5 \\ 3x + 12y = 3 \end{cases}$ ....

Réponses mélangées

$\left(x, \dfrac{3x-8}{2}\right)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$	$\left(-3, -\dfrac{3}{4}\right)$	$\left(\dfrac{1}{5}, \dfrac{22}{5}\right)$	oui	non	$\left(-\dfrac{50}{9}, -\dfrac{74}{3}\right)$	oui	
non	non	$(1, -1)$	$\left(\dfrac{5}{4}\sqrt{2}, -\dfrac{3}{2}\right)$	$(-1, 2)$	$\left(\dfrac{-3}{8}, \dfrac{5}{3}\right)$	40	non
$(-2, 4)$							
$(4, -2)$	$\left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$	$(2, 3)$	oui	non	Il n'y a pas de solution	6	

► Réponses et corrigés page 215

Équations du deuxième degré

★☆☆☆ Résoudre des équations de degré 2 dans des cas particuliers

Pour chacune des équations à résoudre, on donnera l'ensemble des solutions. À chaque fois, on veillera à simplifier au maximum les nombres apparaissant dans ces ensembles ; en particulier, les expressions données ne devront pas avoir de racine carrée au dénominateur.

Calcul 34.1

Résoudre les équations suivantes.

a) $x^2 = 49$ ....

b) $144 - x^2 = 0$ ....

c) $x^2 = \dfrac{64}{9}$ ....

d) $x^2 = 2\,500$ ....

e) $x^2 - 10\,000 = 0$ ....

f) $x^2 = 12$ ....

Calcul 34.2

Résoudre les équations suivantes.

a) $4x^2 - 16 = 0$ ....

b) $8 = 3x^2$ ....

c) $12x^2 = 11$ ....

d) $\dfrac{5}{4x^2} = \dfrac{4}{5}$ ....

e) $\dfrac{1}{8}x^2 - \dfrac{2}{45} = 0$ ....

f) $\dfrac{3}{7}x^2 = \dfrac{5}{2}$ ....

Calcul 34.3 — Égalités de carrés.

Résoudre les équations suivantes.

a) $(x + 7)^2 = 49$ ....

b) $(2x + 1)^2 = 25$ ....

c) $\left(\dfrac{3}{2}x + 1\right)^2 = 121$ ....

d) $(21x + 2)^2 = (x + 7)^2$ ....

e) $\left(2 + \dfrac{x}{2}\right)^2 = \left(3x + \dfrac{1}{2}\right)^2$ ..

f) $\left(\dfrac{2}{3} + \dfrac{x}{4}\right)^2 = \left(\dfrac{2x}{5} + \dfrac{1}{3}\right)^2$.

- **Calcul 34.4 — Équations produit nul (I).**

Résoudre les équations suivantes.

a) $(x+2)(4x+8)=0$ ......

b) $\dfrac{7x}{8}\left(6x+\dfrac{4}{3}\right)=0$ ....

c) $(x-7)\left(2x-\dfrac{22}{23}\right)=0$ ....

d) $\left(x-\dfrac{2}{3}\right)(3-2x)=0$ .....

- **Calcul 34.5 — Équations produit nul (II).**

Résoudre les équations suivantes.

a) $21x^2+\dfrac{7}{3}x=0$ ....

b) $\dfrac{64}{3}x^2=\dfrac{48}{5}x$ ....

c) $(x^2-81)(x+2)=0$ ..

d) $(1-2x)(x^2-2)=0$ ..

- **Calcul 34.6 — Avec des identités remarquables.**

En utilisant des identités remarquables, résoudre les équations suivantes.

a) $x^2+2x+1=0$ ....

b) $x^2-2\sqrt{2}\,x+2=0$ ...

c) $x^2+\dfrac{1}{4}=x$ ....

d) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=2$ ....

- **Calcul 34.7 — Des équations de degré 4.**

Résoudre les équations suivantes.

a) $(x^2-9)(x^2+9)=0$ .....

b) $x^4=81$ ....

Réponses mélangées

$\{-50,50\}$ $\left\{-\dfrac{2\sqrt{6}}{3},\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right\}$ $\{-2\sqrt{3},2\sqrt{3}\}$ $\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ $\left\{-\dfrac{\sqrt{210}}{6},\dfrac{\sqrt{210}}{6}\right\}$

$\left\{\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{2}\right\}$ $\{\sqrt{2}\}$ $\left\{-\dfrac{9}{22},\dfrac{1}{4}\right\}$ $\left\{-\dfrac{5}{7},\dfrac{3}{5}\right\}$ $\{-100,100\}$ $\{-2,2\}$ $\{-3,2\}$

$\{-12,12\}$ $\left\{-\dfrac{8}{3},\dfrac{8}{3}\right\}$ $\{-3,3\}$ $\left\{-\dfrac{20}{13},\dfrac{20}{9}\right\}$ $\left\{-\dfrac{\sqrt{33}}{6},\dfrac{\sqrt{33}}{6}\right\}$ $\{-3,3\}$

$\{-1\}$ $\{-14,0\}$ $\left\{-8,\dfrac{20}{3}\right\}$ $\left\{-\dfrac{2}{9},0\right\}$ $\left\{0,\dfrac{9}{20}\right\}$ $\{-1,1\}$ $\left\{-\sqrt{2},\sqrt{2},\dfrac{1}{2}\right\}$

$\left\{\dfrac{11}{23},7\right\}$ $\left\{-\dfrac{4\sqrt{5}}{15},\dfrac{4\sqrt{5}}{15}\right\}$ $\{-7,7\}$ $\left\{-\dfrac{5}{4},\dfrac{5}{4}\right\}$ $\{-9,-2,9\}$ $\{-2\}$ $\left\{-\dfrac{1}{9},0\right\}$

► Réponses et corrigés page 217

Équations | Fiche de calcul n° 35 | 2nde-EQINEQ-07

Bilan sur les équations et inéquations

★☆☆☆ Consolider et approfondir la maîtrise des équations et inéquations

Équations et inéquations du premier degré

● **Calcul 35.1**

Donner l'ensemble des solutions des équations suivantes.

On ne laissera pas de racine carrée au dénominateur des solutions.

a) $3 - 7x = 8 + 10x$ ....

b) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{1}{2} = 3 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ ....

● **Calcul 35.2**

Donner l'ensemble des solutions des équations suivantes.

On ne laissera pas de racine carrée au dénominateur des solutions.

a) $\dfrac{\frac{x}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{5}} = \dfrac{2 - \frac{x}{3}}{3}$ ....

b) $(5 - \sqrt{3})(4x + 1) = (20 - 5\sqrt{3})x + (8 - \sqrt{3})$ ....

● **Calcul 35.3**

Donner l'ensemble des solutions des inéquations suivantes.

a) $\dfrac{x-1}{2} \leqslant 2 - 2x$ ....

b) $\dfrac{3}{5}x - \dfrac{1}{5} \leqslant \dfrac{5}{7}x + 1$ ....

● **Calcul 35.4**

Donner l'ensemble des solutions des inéquations suivantes.

On ne laissera pas de racine carrée au dénominateur des solutions.

a) $x - \sqrt{2} \leqslant \sqrt{2}x - 1$ ....

b) $2(3x + 1) < 4x + 2 + \sqrt{2}$.

● **Calcul 35.5 — Deux systèmes linéaires.**

Donner la solution de chacun des systèmes linéaires suivants.

a) $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ .....

b) $\begin{cases} x - 3y = 1 \\ 2x - 2y = 5 \end{cases}$ .....

- **Calcul 35.6 — Avec un paramètre.**

On considère un réel a. Donner, en fonction de a, l'ensemble des solutions des équations ou inéquations suivantes, d'inconnue x.

a) $\sqrt{2}x + \sqrt{6}\,a = \sqrt{2}\,a - \sqrt{8}x$ ....

b) $\dfrac{x - \sqrt{2}\,a}{2} < \sqrt{2}\,a - x$ ....

Autour du second degré

- **Calcul 35.7**

Donner l'ensemble des solutions des équations suivantes.

a) $3 - 2x^2 = -15$ ....

b) $x^2 + 3x = 2x - 5x^2$ ...

- **Calcul 35.8**

En s'aidant d'un tableau de signes, donner l'ensemble des solutions des inéquations suivantes.

a) $x(x-1) \leqslant 2(x-1)$.

b) $(x-2)\big(x^2-8\big) \geqslant 0$.

- **Calcul 35.9 — Du faux second degré.**

Donner l'ensemble des solutions des équations suivantes.

a) $(x+2)^2 = (2x+1)^2 - 3(x-1)^2$ ....

b) $\dfrac{4x+1}{2x-1} = \dfrac{2x+3}{x-1}$ ....

- **Calcul 35.10 — Équations avec des fractions.**

Donner l'ensemble des solutions des équations suivantes.

a) $\dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3(x-1)}$ ....

b) $\dfrac{\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}} + 3 = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}$ ....

- **Calcul 35.11**

En s'aidant d'un tableau de signes, donner l'ensemble des solutions des inéquations suivantes.

a) $\dfrac{1}{2x-1} \leqslant 3 + \dfrac{2}{2x-1}$ ....

b) $\dfrac{1}{3x-2} - 4 \geqslant \dfrac{1}{2-3x} + 2$ ....

● **Calcul 35.12**

En s'aidant d'un tableau de signes, donner l'ensemble des solutions des inéquations suivantes.

a) $\dfrac{1}{x-1} \leqslant \dfrac{3}{2x-1}$ ....

b) $\dfrac{2}{3-x} - 1 \leqslant -\dfrac{2}{3+x} + 1$

● **Calcul 35.13 — Équations du second degré plus subtiles (I).**

Donner l'ensemble des solutions des équations suivantes.

a) $(x-1)^2 = 4$ ....

b) $(2x+3)^2 = \dfrac{1}{16}$ ....

c) $\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{2}}{5}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$ ....

d) $\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3$ ......

● **Calcul 35.14 — Équations du second degré plus subtiles (II).**

Donner l'ensemble des solutions des équations suivantes.

a) $(x-1)^2 = (3-2x)^2$ ......

b) $(x-3)^2 = \left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{5}\right)^2$ .....

c) $\left(\dfrac{x}{2} - 3\right)^2 = \left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}\right)^2$ ....

d) $\left(2x - \dfrac{2}{3}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{2} - 2x\right)^2$ ..

● **Calcul 35.15 — Du second degré dans du second degré.**

Donner l'ensemble des solutions des équations suivantes.

a) $(x^2-2)^2 = 4$ ......

b) $\left(x^2 - \dfrac{7}{4}\right)^2 = \dfrac{1}{16}$ ...

c) $(x^2-2)^2 = \dfrac{4}{9}$ .....

d) $x^4 = 64$ ....

Calculs plus difficiles

● **Calcul 35.16 — Du second degré plus corsé (I).**

Résoudre les équations suivantes.

a) $\left(\dfrac{5x^2-1}{3x^2-5}\right)^2 = 4$ ....

b) $\left(\dfrac{-6x^2+14}{x^2-1}\right)^2 = 4$ ....

● Calcul 35.17 — Du second degré plus corsé (II).

Résoudre les équations suivantes.

a) $\left(\left(x^2-4\right)^2-5\right)^2=16$ ....

b) $\left(\dfrac{4x^2-8}{x^2+1}\right)^2=36$ ....

● Calcul 35.18 — Système linéaire avec un paramètre.

On considère un réel α. Soient x et y tels que : $\begin{cases} x+\alpha y=1 \ (\mathrm{L}_1) \\ -\alpha x+\ y=3 \ (\mathrm{L}_2). \end{cases}$

a) Parmi les opérations suivantes, laquelle permet de déterminer la variable x ?

(a) $\mathrm{L}_1+\mathrm{L}_2$ (b) $\mathrm{L}_1+\alpha\,\mathrm{L}_2$ (c) $\mathrm{L}_1-\alpha\,\mathrm{L}_2$ (d) $\alpha\,\mathrm{L}_1+\mathrm{L}_2$

....

b) En déduire la valeur de x. ....

c) En déduire la valeur de y. ....

Réponses mélangées

$\left[-2\sqrt{2},2\right]\cup\left[2\sqrt{2},+\infty\right[$	$\left\{-\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{9\sqrt{3}}{2}\right\}$	$\left\{-\frac{13}{8},-\frac{11}{8}\right\}$	$\left]-\infty,\frac{1}{3}\right]\cup\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$			
$\{1\}$	$\left\{-\frac{1}{3}(\sqrt{3}-1)a\right\}$	$\frac{1-3\alpha}{1+\alpha^2}$	$\left[-\frac{21}{2},+\infty\right[$	$\left\{-\sqrt{2},\sqrt{2},-\sqrt{\frac{3}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}\right\}$		
$[-1,+\infty[$	$\left\{\frac{12}{5},\frac{21}{5}\right\}$	$\{5\}$	$\left\{\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\right\}$	$\{1\}$	$\left\{-\frac{2\sqrt{6}}{3},-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{6}}{3}\right\}$	
$\left\{\frac{4}{3},2\right\}$	$\left\{\left(\frac{13}{4},\frac{3}{4}\right)\right\}$	(c)	$[1,2]$	$\left]-\infty,\sqrt{2}\,a\right[$	$\{-3,3\}$	$\left\{\left(\frac{4}{7},\frac{2}{7}\right)\right\}$
$\{-3,-1,1,3\}$	$\left\{-\frac{3}{5},\frac{7}{5}\right\}$	$\left\{\pm\sqrt{7},\pm\sqrt{5},\pm\sqrt{3},\pm1\right\}$	$\{0\}$	$\left]\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right]$		
$\left\{\frac{2}{7}\right\}$	$\left\{-\frac{1}{6},0\right\}$	$\left\{\sqrt{3}\right\}$	$\{-1,3\}$	$\left]-\infty,\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$	$\left\{-2\sqrt{2},2\sqrt{2}\right\}$	
$\{-2,0,2\}$	$\left\{-\frac{5}{17}\right\}$	$]-\infty,-3[\cup\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]\cup]3,+\infty[$	$\left\{\frac{11}{4}\right\}$	$\left\{\frac{7}{24}\right\}$		
$\left]\frac{1}{2},1\right[\cup[2,+\infty[$	$\left\{5\sqrt{3}\right\}$	$\frac{3+\alpha}{1+\alpha^2}$	$\{-\sqrt{3},-\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{3}\}$	$]-\infty,1]$		

► Réponses et corrigés page 219

Images et antécédents

Savoir lire et calculer des images et des antécédents

Calcul 36.1

On considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4$. Calculer les images suivantes :

a) $f(0)$ ....

b) $f(2)$ ....

c) $f(-2)$ ....

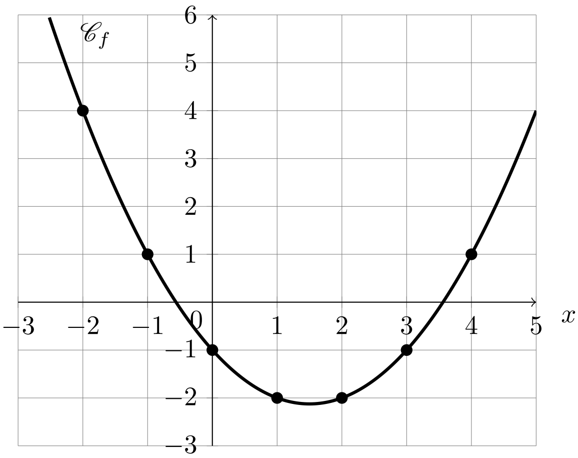
d) $f(\sqrt{7})$ ......

e) $f\left(-\dfrac{\sqrt{7}}{3}\right)$ ...

f) $f(1-\sqrt{2})$ ..

Calcul 36.2 — Lecture graphique.

On a représenté ci-dessous le graphe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f sur l'intervalle $[-3, 5]$.



Lire graphiquement les images par f des nombres :

a) -2 ...

b) 0 .....

c) 2 .....

d) 1 .....

e) 4 .....

f) -1 ...

Lire graphiquement, si possible, le ou les antécédents par la fonction f des nombres :

g) -2 ...

h) -1 ...

i) -3 ...

j) 1 .....

Calcul 36.3

On considère les fonctions f et g, définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 7x + \sqrt{2}$ et $g(x) = \dfrac{13}{5}x + 3$.

Déterminer le ou les antécédents des nombres suivants par f.

a) 0 ....

b) $\sqrt{2}$ ....

c) 1 ....

Déterminer le ou les antécédents des nombres suivants par g.

On donnera le résultat sans racine au dénominateur.

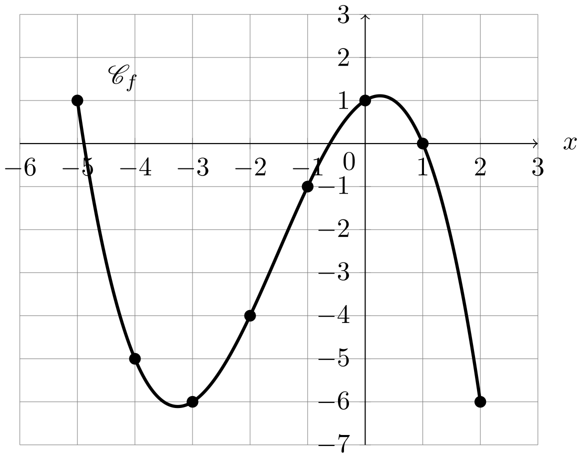
d) 0 ....

e) $3-\sqrt{5}$ ...

f) $\dfrac{\sqrt{7}+4}{\sqrt{3}}$ ..

● Calcul 36.4 — Encore des lectures graphiques !

On a représenté ci-dessous le graphe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f sur l'intervalle $[-5, 2]$.



Lire graphiquement les images par f des nombres :

a) -5 ...

b) -1 ...

c) 1 .....

d) 2 .....

Donner le nombre d'antécédents par f des nombres suivants :

e) -1 ...

f) 2 .....

Lire graphiquement le ou les antécédents entiers des nombres :

g) -5 ...

h) 1 .....

● Calcul 36.5

On considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+3)(3x-6)$.

a) Déterminer le ou les antécédents de 0 par f. ....

b) Développer $f(x)$. ....

c) Résoudre $f(x) = -18$. ....

d) Développer $3\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2$. ..

e) Résoudre $f(x) = -\dfrac{75}{4}$. ...

● Calcul 36.6 — Une fonction homographique.

On considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{4}\right\}$ par $f(x) = \dfrac{5x-2}{1-4x}$.

Déterminer, si possible, le ou les antécédents par f des nombres suivants.

On donnera le résultat sans racine au dénominateur.

a) 1 ....

b) $-\dfrac{5}{4}$ ......

c) $1-\sqrt{5}$ ..

Réponses mélangées

-3 et 2 $\quad 3 \quad -1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad -4 \quad 3 \quad$ 0 et 3 $\quad 0 \quad -\dfrac{29}{9}$

$3x^2+3x-18 \quad -2 \quad -6 \quad 4 \quad \dfrac{1}{3} \quad 1 \quad -2 \quad$ -5 et 0 $\quad$ aucun $\quad -4$

$-\dfrac{\sqrt{2}}{7} \quad \dfrac{5}{39}(-9+4\sqrt{3}+\sqrt{21}) \quad -\dfrac{5\sqrt{5}}{13} \quad -1-2\sqrt{2} \quad -\dfrac{1}{2}$ $\quad$ aucun $\quad$ 1 et 2

$\dfrac{1-\sqrt{2}}{7} \quad -\dfrac{15}{13} \quad -1 \quad 7+3\sqrt{5}$ $\quad$ -1 et 0 $\quad$ -1 et 4 $\quad 3x^2+3x+\dfrac{3}{4} \quad 0$

► Réponses et corrigés page 224

Fonctions — Fiche de calcul n° 37 — 2nde-FONC-02

Calcul avec les fonctions

★☆☆☆ S'entraîner à manipuler des expressions de fonctions

Calcul 37.1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x^2 + x$.

Calculer chacune des expressions suivantes :

a) $f(2x)$ ....

b) $f(-x)$ ....

c) $f\big(x^2\big)$ ....

d) $f\big(x^3\big)$ ....

e) $f\big(\sqrt{t}\big)$ ....

f) $f(1-x)$ ....

Calcul 37.2 — Paire ? Impaire ? Ni l'un ni l'autre ?

Pour chacune des fonctions définies par les expressions ci-dessous, choisir la réponse correcte parmi les trois propositions suivantes :

(a) paire (b) impaire (c) ni paire, ni impaire

a) $f_1(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ ....

b) $f_2(x) = \dfrac{x^4 - 3x^2 + 1}{x^6 + 1}$ ....

c) $f_3(x) = \dfrac{2+x}{1+x^2}$ ....

d) $f_4(x) = \dfrac{x^3 + 2x}{x^4 + 1}$ ....

Calcul 37.3 — Emboîtements de fonctions (I).

On considère les fonctions f, g et h définies par :

$$f(x) = \sqrt{x-3}, \qquad g(x) = \frac{1}{x^2 - 1} \qquad \text{et} \qquad h(x) = x^4.$$

Pour $x > 4$, calculer et simplifier chacune des expressions suivantes. *On ne prendra pas la peine de s'assurer que, pour de telles valeurs de x, les expressions sont bien définies.*

a) $f\big(h(x)\big)$ ....

b) $h\big(f(x)\big)$ ....

c) $g\big(f(x)\big)$ ....

d) $h\big(g(x)\big)$ ....

Calcul 37.4 — Emboîtements de fonctions (II).

On considère les fonctions f, g et h définies par

$$f(x) = x^2 + 2x + 2, \qquad g(x) = \frac{1}{x-1} \qquad \text{et} \qquad h(x) = \sqrt{x-1}.$$

Pour $x > 1$, calculer et simplifier chacune des expressions suivantes. *On ne prendra pas la peine de s'assurer que pour de telles valeurs de x les expressions sont bien définies.*

a) $f\big(g(x)\big)$ ....

b) $g\big(f(x)\big)$ ....

c) $f\big(h(x)\big)$ ....

d) $h\big(f(x)\big)$ ....

Calcul 37.5

On considère une fonction affine f, c'est-à-dire une fonction dont l'expression est de la forme $f(x) = ax+b$, où a et b sont deux réels. Déterminer l'expression de $f(x)$, avec les conditions suivantes :

a) $f\left(\frac{-5}{4}\right) = \frac{7}{3}$ et $f\left(\frac{-4}{3}\right) = \frac{1}{2}$ ....

b) $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{8}$ ....

Calcul 37.6

Même consigne que pour l'exercice précédent, avec les conditions suivantes :

a) $f\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{1}{5}f(1)$ et $f(3) - f(-3) = \frac{3}{5}$ ....

b) $f(1) = 3f(0)$ et $f(-2) + f(0) + f(4) = 21$ ....

c) $f(0) = -2$, $f(1) \times f(2) + f(6) = 52$ et $f(2) - f(1) < 0$ ....

Réponses mélangées

b $\quad x^9 - x^6 + x^3 \quad \frac{1}{(x+1)^2} \quad -6\sqrt{2}\,x + 5\sqrt{2} \quad \sqrt{x^4-3} \quad 6x+3$

$8x^3 - 4x^2 + 2x \quad -x^3 - x^2 - x \quad x+1 \quad x + 1 + 2\sqrt{x-1} \quad \frac{1}{x-4}$

b $\quad \frac{2x^2-2x+1}{(x-1)^2} \quad t\sqrt{t} - t + \sqrt{t} \quad x^6 - x^4 + x^2 \quad -x^3 + 2x^2 - 2x + 1$

$\frac{1}{(x-1)^4(x+1)^4}$ c $\quad 22x + \frac{179}{6} \quad -5x-2 \quad (x-3)^2 \quad \frac{1}{10}x + \frac{7}{80}$ a

► Réponses et corrigés page 226

Fonctions — Fiche de calcul n° 38 — 2nde-FONC-03

Points des courbes des fonctions

★☆☆☆ Bien comprendre le lien entre le graphe d'une fonction et son expression

Calcul 38.1 — Tester si un point est sur une courbe.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x + 4$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

a) Le point A de coordonnées $(2\,;14)$ appartient-il à $\mathscr{C}_f$? ....

b) Le point B de coordonnées $(4\,;0)$ appartient-il à $\mathscr{C}_f$? ....

Calcul 38.2 — Des images et des antécédents.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 5$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

a) Déterminer les coordonnées du point de la courbe $\mathscr{C}_f$ dont l'abscisse vaut 1. .....

b) Déterminer les coordonnées des deux points de la courbe $\mathscr{C}_f$ dont l'ordonnée vaut 5.

....

Calcul 38.3 — Où est A ?

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 10x + 1$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative, et on note A le point de $\mathscr{C}_f$ dont l'abscisse vaut 3.

Le point A est-il au-dessus de l'axe des abscisses ? ....

Calcul 38.4

On considère la fonction f définie, pour tout $x \neq 0$, par $f(x) = \dfrac{1}{x}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative, et on note (D) la droite d'équation $y = x$.

Déterminer les coordonnées des deux points d'intersections de $\mathscr{C}_f$ et (D).

Calcul 38.5

On considère la fonction g définie, pour tout $x \neq 0$, par $g(x) = \dfrac{1}{x}$. On note $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative.

a) À quelle condition portant sur a la quantité $g(a+1)$ est-elle bien définie ? ....

b) À quelle condition portant sur a le point $\mathrm{A}(a+1\,;2)$ appartient-il à $\mathscr{C}_g$? .....

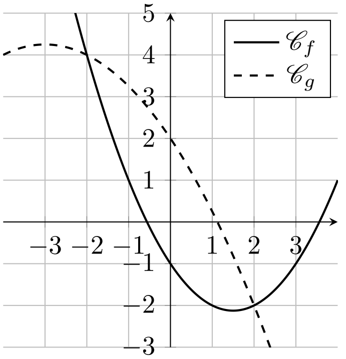
c) À quelle condition portant sur a le point $\mathrm{B}(a+1\,;a-1)$ appartient-il à $\mathscr{C}_g$? .

● **Calcul 38.6**

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 1 \qquad \text{et} \qquad g(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 2.$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives, tracées ci-dessous.



a) Graphiquement, combien l'équation $f(x) = g(x)$ semble-t-elle avoir de solutions ? ......

b) Déterminer ces solutions. ....

● **Calcul 38.7**

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - x + 1$ et $g(x) = x^2 + 1$.

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives.

Déterminer les coordonnées du ou des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

....

● **Calcul 38.8**

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la fonction f définie, pour tout $x \neq a$, par $f(x) = \dfrac{x+a}{x-a}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative. Pour quelle valeur du réel a la courbe $\mathscr{C}_f$ passe-t-elle par le point de coordonnées $(1\,;2)$?

....

Réponses mélangées

$a = \sqrt{2}$ ou $a = -\sqrt{2}$	non	$x = -2$ et $x = 2$	2	non	$(1\,;1)$ et $(-1\,;-1)$
$a \neq -1$	$(0\,;5)$ et $(4\,;5)$	$(1\,;2)$	$a = \dfrac{1}{3}$	$a = -\dfrac{1}{2}$	oui	$(0\,;1)$ et $(1\,;2)$

► Réponses et corrigés page 228

Fonctions — Fiche de calcul n° 39 — 2nde-FONC-04

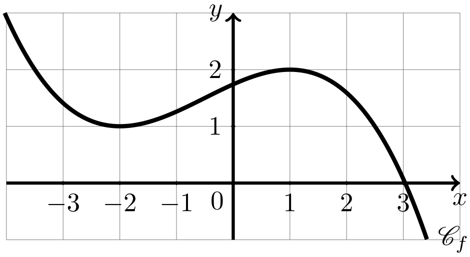
Tableaux de variations

Tracer et utiliser des tableaux de variations

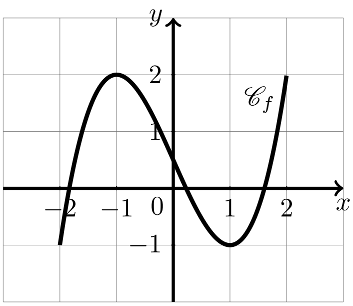
● Calcul 39.1

Dans chacun des cas suivants, tracer le tableau de variations de la fonction f définie sur l'intervalle I.

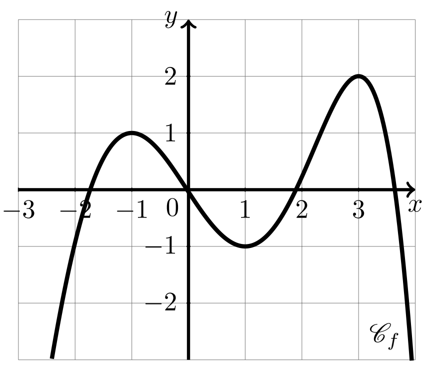
a) (avec $I = \mathbb{R}$)



b) (avec $I = [-2, 2]$)



c) (avec $I = \mathbb{R}$)



● Calcul 39.2

On considère le tableau de variations ci-dessous.

x	$-\infty$		-4		1		6		10		15		$+\infty$
variations de f		$\nearrow$	6	$\searrow$	5	$\nearrow$	8	$\searrow$	-2	$\nearrow$	4	$\searrow$	

Pour chacune des inégalités suivantes, choisir la réponse correcte parmi les trois propositions :

(a) vraie (b) fausse (c) on ne peut pas savoir

a) $f(7) \leqslant f(9)$ .... ☐

b) $f(2) < f(4)$ .... ☐

c) $f(11) \geqslant f(13)$ .... ☐

d) $f(-30) < f(-4)$ .... ☐

e) $f(11) \leqslant f(2)$ .... ☐

f) $f(0) \leqslant f(7)$ .... ☐

g) $f(0) \leqslant f(16)$ .... ☐

h) $f(13) > f(-3)$ .... ☐

i) $f(-5) \geqslant f(8)$ .... ☐

● Calcul 39.3

Voici un raisonnement permettant d'encadrer des racines carrées par des entiers.

Comme la fonction « racine carrée » est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et comme on a $9 \leqslant 10 \leqslant 16$, on en déduit que :

$$\sqrt{9} \leqslant \sqrt{10} \leqslant \sqrt{16},$$

c'est-à-dire que :

$$3 \leqslant \sqrt{10} \leqslant 4.$$

En utilisant la même méthode, compléter les inégalités suivantes avec des nombres entiers consécutifs :

a) ☐ $\leqslant \sqrt{17} \leqslant$ ☐

b) ☐ $\leqslant \sqrt{95} \leqslant$ ☐

c) ☐ $\leqslant \dfrac{4+\sqrt{39}}{2} \leqslant$ ☐

d) ☐ $\leqslant \dfrac{5-\sqrt{53}}{2} \leqslant$ ☐

Réponses mélangées

(c) (a) (a) $-2 < \cdots < -1$ (b) (b) $9 < \cdots < 10$
(c) $5 < \cdots < 6$ (a) $4 < \cdots < 5$ (b) (b)

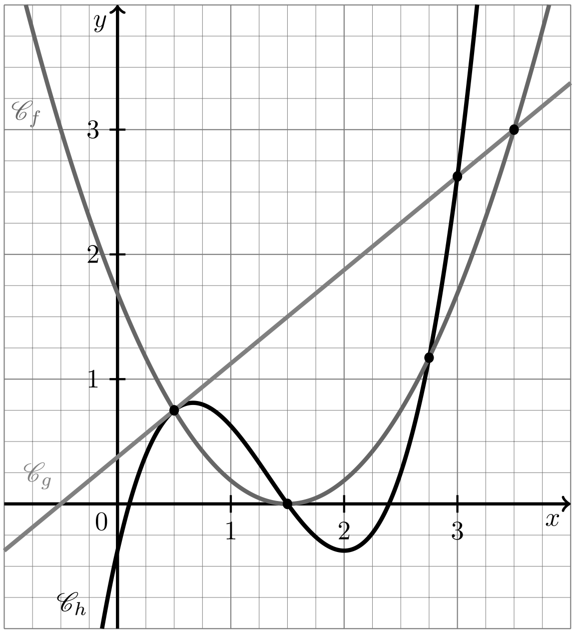
► Réponses et corrigés page 230

Fonctions et inéquations

★☆☆☆ Étudier les positions relatives de courbes représentatives de fonctions

Calcul 40.1

On considère trois fonctions f, g et h définies sur $[-1, 4]$, dont on a tracé ci-dessous les courbes représentatives respectives $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$.



Ranger par ordre croissant :

a) $f(1)$, $g(1)$ et $h(1)$ ....

b) $f(2)$, $g(2)$ et $h(2)$ ....

Donner l'ensemble des solutions de :

c) $f(x) \leqslant 3$ ....

d) $g(x) \geqslant f(x)$ ....

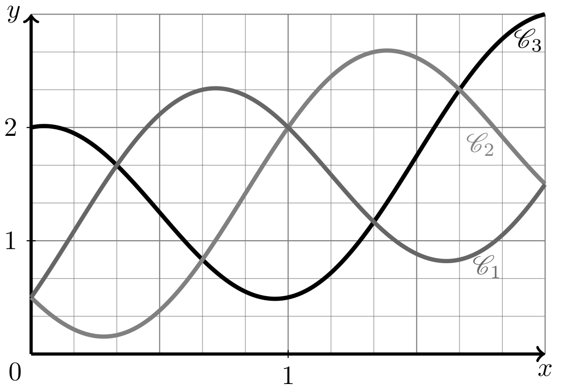
e) $h(x) > f(x)$ ....

f) $g(x) \leqslant h(x)$ ....

Calcul 40.2

On considère trois fonctions f, g et h définies sur $[0, 2]$, dont les courbes représentatives sont tracées ci-dessous. On sait que l'ensemble des solutions réelles de $f(x) \leqslant g(x)$ est $\left[\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right]$.

En vous appuyant sur le graphique, donner :



a) la courbe représentative de f ......

b) la courbe représentative de g ....

c) la courbe représentative de h ......

d) En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant h(x)$.

....

● Calcul 40.3 — Avec des fonctions affines.

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 3$ et $g(x) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{3}$.

Donner l'ensemble des solutions des inéquations suivantes.

a) $g(x) \geqslant \dfrac{7}{3}$ ....

b) $f(x) < g(x)$ ....

● Calcul 40.4 — Une première étude de signe.

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2 - 3x^2$ et $g(x) = -6x + 2$, dont on note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives respectives.

a) Écrire $f(x) - g(x)$ sous forme factorisée. ....

b) Compléter le tableau de signes ....

x	$-\infty$ $+\infty$
$3x$	
$2 - x$	
$f(x) - g(x)$	

c) Sur quel(s) intervalle(s) $\mathscr{C}_f$ est-elle strictement au-dessus de $\mathscr{C}_g$? ...

● Calcul 40.5

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 5$ et $g(x) = 5 - 3x^2$, dont on note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives respectives.

a) Écrire $f(x) - g(x)$ sous forme factorisée. ....

b) Compléter le tableau de signes ....

x	$-\infty$ $+\infty$
$f(x) - g(x)$	

c) Sur quel(s) intervalle(s) $\mathscr{C}_g$ est-elle strictement en dessous de $\mathscr{C}_f$? ..

Réponses mélangées

$h(2) < f(2) < g(2)$ $\quad f(1) < h(1) < g(1)$ $\quad \left[\dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{3}\right]$ $\quad \left\{\dfrac{1}{2}\right\} \cup [3,4]$

$[4, +\infty[$ $\quad \left]-\infty, -\dfrac{16}{9}\right[$ $\quad \left]\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right[\cup \left]\dfrac{11}{4}, 4\right]$ $\quad 3x(2-x)$ $\quad \mathscr{C}_3$ $\quad \mathscr{C}_1$

$\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{7}{2}\right]$ $\quad]-3,0[$ et $]0,+\infty[$ $\quad \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{7}{2}\right]$ $\quad \mathscr{C}_2$ $\quad x^2(x+3)$ $\quad]0,2[$

► Réponses et corrigés page 232

Bilan sur les fonctions

★☆☆☆ Revoir et approfondir les techniques sur les fonctions

Images et antécédents

● **Calcul 41.1**

On considère la fonction f définie par $f(x) = -\dfrac{1}{2}x + 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Calculer les nombres suivants :

a) l'image de 8 ....

b) l'image de -11 ....

c) l'antécédent de 11 ....

d) l'antécédent de -21 ....

Déterminer l'ensemble des solutions des inéquations suivantes :

e) $f(x) \geqslant \dfrac{5}{2}$ ....

f) $f(x) \leqslant -7$ ....

● **Calcul 41.2**

On considère la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 + 2$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Calculer les nombres suivants :

a) l'image de 3 ....

b) l'image de $\sqrt{2}$ ....

c) les antécédents de 5 ....

d) les antécédents de 77 ....

Déterminer l'ensemble des solutions des inéquations suivantes :

e) $f(x) \leqslant 14$ ....

f) $f(x) \geqslant 29$ ....

● **Calcul 41.3**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{(7x-3)(3x+1)}{21x^2+1}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Calculer les nombres suivants :

a) l'image de 2 ....

b) l'image de -2 ....

c) le ou les antécédents de 1 ....

d) le ou les antécédents de -3 ..

Domaines de définition

Calcul 41.4

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

a) $x \longmapsto \dfrac{1}{x+8}$

b) $x \longmapsto \dfrac{1}{14x-7}$

c) $x \longmapsto \dfrac{x^2}{(x-5)(x+\frac{1}{2})}$

d) $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2-1}$

e) $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$

f) $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{(8-x)(x+8)}}$

Calcul 41.5

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

a) $x \longmapsto \sqrt{x-3} \times \sqrt{x+2}$

b) $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{(x-3)(x+2)}}$

c) $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+2}}$

d) $x \longmapsto \sqrt{-\dfrac{x-3}{x+2}}$

e) $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-3}}$

f) $x \longmapsto \sqrt{\dfrac{x+2}{x-3}}$

Variations, positions relatives

Calcul 41.6

Soit f une fonction définie sur $[-3, 18]$, dont le tableau de variations est représenté ci-contre.

x	-3		2		9		15		18
f	$\frac{7}{2}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\frac{4}{3}$	$\searrow$	$-\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$

Pour chaque affirmation, répondre par :

(a) vrai (b) faux (c) on ne peut rien dire

a) $f(-3) \geqslant f(5)$

b) $f(6) \leqslant f(1)$

c) $f(16) \geqslant f(-1)$

d) $f(2) \geqslant f(17)$

e) $f\left(\dfrac{35}{2}\right) \leqslant f\left(\dfrac{23}{2}\right)$

f) $f\left(-\dfrac{8}{3}\right) < f\left(\dfrac{1}{625}\right)$

g) $f\left(\dfrac{5}{2}\right) \leqslant f\left(\dfrac{18}{5}\right)$

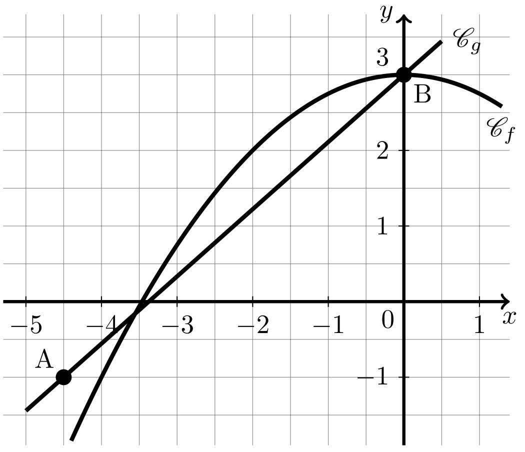
h) $f\left(-\dfrac{13}{5}\right) \geqslant f\left(-\dfrac{1}{6}\right)$

● **Calcul 41.7**

Dans le repère ci-contre, on a tracé la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie par :

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

On a également tracé $\mathscr{C}_g$ la représentation graphique de la fonction affine g passant par les points A et B.



a) Déterminer graphiquement, et sous forme fractionnaire, les coordonnées du point A. ....

b) Déterminer une expression de $g(x)$, pour $x \in \mathbb{R}$. ....

c) Calculer et factoriser, pour $x \in \mathbb{R}$, la différence $f(x) - g(x)$. ....

d) En déduire l'intervalle sur lequel $\mathscr{C}_g$ est en-dessous de $\mathscr{C}_f$. ....

Calculs plus difficiles

● **Calcul 41.8**

On définit la fonction f par $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

a) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -2\}$. Déterminer $f(x+1)$. ....

b) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Déterminer $f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$. ....

c) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 0[$. Déterminer $f\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}\right)$. ....

● **Calcul 41.9 — Parité et opérations.**

Soient f et g deux fonctions impaires. On note, pour $x \in \mathbb{R}$, $s(x) = f(x) + g(x)$ et $p(x) = f(x) \times g(x)$.

a) La fonction s est :

(a) paire (b) impaire

....

b) La fonction p est :

(a) paire (b) impaire

....

● **Calcul 41.10 — Polynôme de degré 2 et parité.**

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On définit f par $f(x) = ax^2 + bx + c$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

a) Calculer, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - f(-x)$. ....

b) Déterminer b pour que f soit une fonction paire. ....

● **Calcul 41.11**

a) Déterminer a et b tels que $\left(\sqrt{56} - 8\right)^2 - \left(\sqrt{56} - 7\right)^2 = a + b\sqrt{56}$. ....

b) Choisir la bonne réponse : (a) $a^2 \leqslant 56b^2$ (b) $a^2 \geqslant 56b^2$

....

c) La différence $\left(\sqrt{56} - 8\right)^2 - \left(\sqrt{56} - 7\right)^2$ est-elle positive ou négative ? ....

d) Le nombre $\sqrt{56}$ est-il plus proche de 7 ou de 8 ? ....

● **Calcul 41.12 — Trouver l'entier le plus proche.**

a) Déterminer un entier n tel que $n < \sqrt{43} < n + 1$. ....

b) Déterminer l'entier le plus proche de $\sqrt{43}$. ....

On pourra s'inspirer de l'exercice précédent.

Réponses mélangées

$\dfrac{1}{x(x+2)}$ $\quad]-8, 8[$ $\quad b = 0$ $\quad -\dfrac{x}{4}\left(x + \dfrac{32}{9}\right)$ $\quad 29$ $\quad \left[-\dfrac{32}{9}, 0\right]$ $\quad]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$

7 $\quad 6$ $\quad \mathbb{R} \setminus \{-8\}$ $\quad$ (b) $\quad 1$ $\quad [3, +\infty[$ $\quad a = 15$ et $b = -2$ $\quad$ (b)

$]-\infty, -2] \cup]3, +\infty[$ $\quad$ (a) $\quad$ (c) $\quad -5$ et 5 $\quad$ (b) $\quad \dfrac{(x-1)^2}{4x}$ $\quad$ (c)

$]-2, 3]$ $\quad -1$ et 1 $\quad]-\infty, -3]$ $\quad 7$ $\quad x$ $\quad [16, +\infty[$ $\quad \left(-9/2\,;-1\right)$

$]3, +\infty[$ $\quad -3$ $\quad$ positive $\quad [3, +\infty[$ $\quad$ (a) $\quad [-2, 2]$ $\quad$ (b) $\quad \mathbb{R} \setminus \{1/2\}$

0 et $1/42$ $\quad \dfrac{8}{9}x + 3$ $\quad]-2, +\infty[$ $\quad 2bx$ $\quad$ (a) $\quad$ (a) $\quad$ (a) $\quad \mathbb{R} \setminus \{-1/2, 5\}$

$\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ $\quad]-\infty, -2[\cup]3, +\infty[$ $\quad -2$ $\quad 13/2$ $\quad -20$ $\quad 8$ $\quad 77/85$ $\quad 44$

► Réponses et corrigés page 234

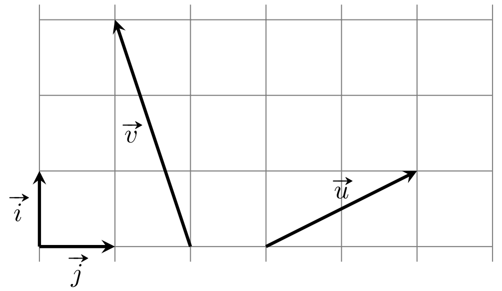
Vecteurs — Fiche de calcul n° 42 — 2nde-VEC-01

Représentation graphique des vecteurs

★☆☆☆ S'entraîner à travailler graphiquement avec les vecteurs

● Calcul 42.1 — Pour commencer.

On considère le graphique suivant :

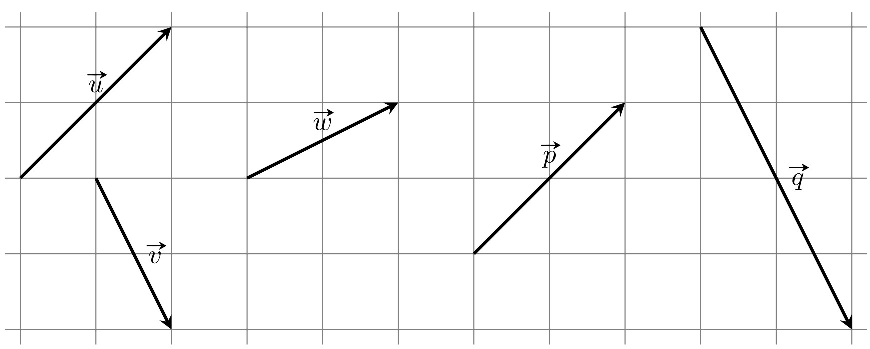


a) Quelles sont les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$? ....

b) Quelles sont les coordonnées du vecteur $\vec{v}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$? ....

● Calcul 42.2

On considère le graphique suivant :

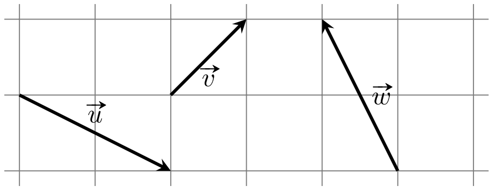


a) Quels sont les deux vecteurs qui sont égaux ? ....

b) Quel vecteur est colinéaire à $\vec{v}$? ....

- **Calcul 42.3 — Trouver la bonne somme.**

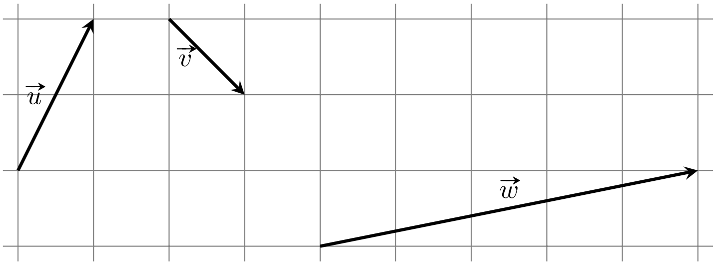
On considère le graphique suivant :



L'un des vecteurs est égal à la somme des deux autres. Écrire cette égalité. ...

- **Calcul 42.4**

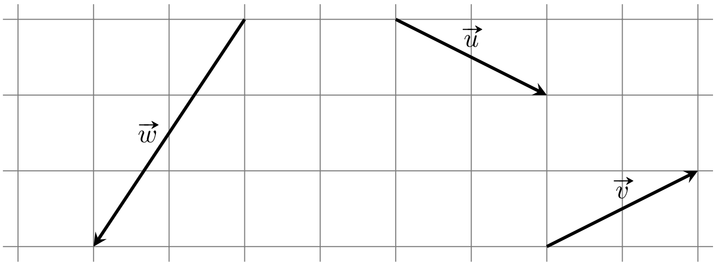
On considère le graphique suivant :



Trouver des nombres a et b tels que $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$. ....

- **Calcul 42.5**

On considère le graphique suivant :



Trouver des nombres a et b tels que $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$. ....

Réponses mélangées

$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v}$ $\qquad \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\qquad \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}$ $\qquad \overrightarrow{q}$ $\qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \overrightarrow{w} = 2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}$ $\qquad \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{p}$

► Réponses et corrigés page 238

Vecteurs — Fiche de calcul n° 43 — 2nde-VEC-02

Relation de Chasles

S'entraîner à utiliser la relation de Chasles

Calcul 43.1

Soient A, B, C et D quatre points du plan.

En utilisant la relation de Chasles, écrire à l'aide d'un seul vecteur les expressions suivantes :

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}$ ....

b) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CA}$ ....

c) $3\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{DC}+3\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{BD}$ ...

d) $4\overrightarrow{AB}+2\big(\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AD}\big)$ ....

Calcul 43.2

Soit ABCD un parallélogramme. Quelle relation est vraie parmi les propositions suivantes ?

(a) $2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

(b) $2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AD}=\vec{0}$

(c) $2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

(d) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$

....

Calcul 43.3

Soient A, B et C trois points du plan. On pose $\vec{u}=3\overrightarrow{CB}-2\overrightarrow{CA}$.

Dans chacun des cas suivants, exprimer le vecteur $\vec{u}$ en fonction des vecteurs :

a) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ....

b) $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ ....

Calcul 43.4

Soient A, B, C et M quatre points du plan et $\vec{v}$ le vecteur défini par $\vec{v}=2\overrightarrow{BM}+3\overrightarrow{AM}-5\overrightarrow{CM}$.

Dans chacun des cas suivants, exprimer le vecteur $\vec{v}$ en fonction des vecteurs :

a) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ..

b) $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ ..

c) $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ ..

Calcul 43.5

Soient D, E, F et G quatre points du plan et $\vec{w}$ le vecteur défini par $\vec{w}=4\overrightarrow{GD}+3\overrightarrow{GE}+7\overrightarrow{FG}$.

Dans chacun des cas suivants, exprimer le vecteur $\vec{w}$ en fonction des vecteurs :

a) $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{EF}$ ..

b) $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ ..

c) $\overrightarrow{FD}$ et $\overrightarrow{FE}$ ..

● Calcul 43.6

Soient A, B et M trois points du plan tels que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ s'écrive sous la forme $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, avec x et y deux nombres réels. Dans chacun des cas suivants, déterminer les valeurs de x et y :

a) $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BA}$ . . . .

b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ . . . .

c) $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC} + 5\overrightarrow{AM} = \vec{0}$ . . . . .

d) $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC} + 5\overrightarrow{BM} = \vec{0}$ . . . . .

● Calcul 43.7

Soient ABC un triangle et N et P les points définis respectivement par les relations vectorielles :

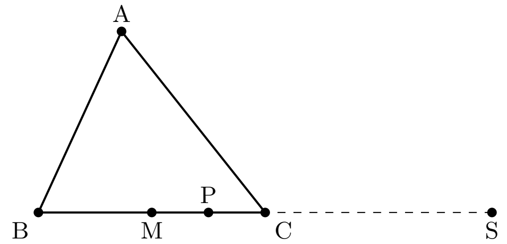
$$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BN}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$. . . . .

b) En déduire la valeur du réel x tel que $\overrightarrow{BP} = x\overrightarrow{BN}$. . . . .

● Calcul 43.8 — Exprimer un vecteur dans une base.

Soient ABC un triangle et M et P les milieux respectifs des segments [BC] et [MC]. Soit S le symétrique du point B par rapport au point C.



Exprimer les vecteurs suivants dans la base $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$:

a) $\overrightarrow{AM}$ . . . .

b) $\overrightarrow{AP}$ . . . .

c) $\overrightarrow{AS}$ . . . .

d) $\overrightarrow{PS}$ . . . .

Réponses mélangées

$8\overrightarrow{CD}$ $\quad \frac{3}{4}$ $\quad -2\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC}$ $\quad \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ $\quad x = -1$ et $y = 1$ $\quad -\frac{5}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{4}\overrightarrow{AC}$

$x = 0$ et $y = \frac{3}{5}$ $\quad$ c $\quad 6\overrightarrow{DB}$ $\quad -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ $\quad \overrightarrow{DC}$ $\quad 3\overrightarrow{DE} - 7\overrightarrow{DF}$ $\quad \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

$-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ $\quad \overrightarrow{DB}$ $\quad x = y = \frac{1}{3}$ $\quad -3\overrightarrow{BA} + 5\overrightarrow{BC}$ $\quad -3\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{CB}$

$4\overrightarrow{ED} - 7\overrightarrow{EF}$ $\quad 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ $\quad -2\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$ $\quad 4\overrightarrow{FD} + 3\overrightarrow{FE}$ $\quad x = -1$ et $y = \frac{3}{5}$

► Réponses et corrigés page 239

Vecteurs — Fiche de calcul n° 44 — 2nde-VEC-03

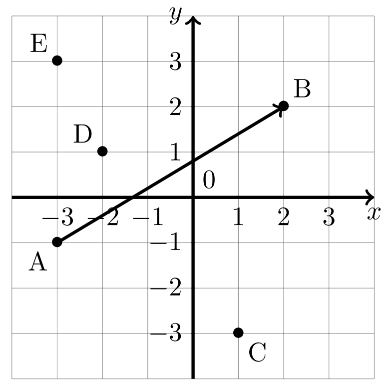
Vecteurs et coordonnées

★☆☆☆ S'entraîner au calcul en travaillant avec les vecteurs et leurs coordonnées

Dans toute cette fiche, le plan est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,; \vec{i}, \vec{j})$.

● Calcul 44.1 — Lecture graphique des coordonnées d'un vecteur.

Donner les coordonnées de chacun des vecteurs suivants :



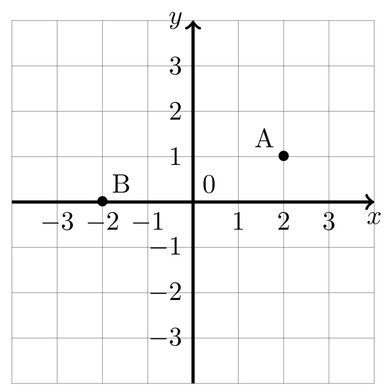
a) $\overrightarrow{AB}$ ....

b) $\overrightarrow{AC}$ ....

c) $\overrightarrow{BD}$ ....

d) $\overrightarrow{AE}$ ....

● Calcul 44.2 — Dessin de points définis par des vecteurs.



Placer les points suivants sur le graphique :

a) le point C tel que $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$

b) le point D tel que $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

c) le point E tel que $\overrightarrow{EA}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$

● Calcul 44.3 — Coordonnées de combinaisons linéaires de vecteurs.

On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}3\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$. Calculer les coordonnées des vecteurs suivants.

On simplifiera les expressions au maximum.

a) $\vec{u}+\vec{v}$ ....

b) $-\vec{w}$ ....

c) $\vec{u}-\vec{w}$ ....

d) $2\vec{v}$ ....

e) $3\vec{u}-2\vec{v}$ .....

f) $-\frac{5}{4}\vec{v}+\frac{7}{3}\vec{w}$ ..

● **Calcul 44.4 — Coordonnées d'un vecteur défini par deux points.**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Dans chacun des cas suivants, déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

On simplifiera les expressions au maximum.

a) $A(-2\,;1)$ et $B(-1\,;-3)$ ....

b) $A\left(\dfrac{5}{3}\,;\dfrac{13}{21}\right)$ et $B\left(\dfrac{7}{2}\,;\dfrac{-5}{14}\right)$ ....

c) $A(\sqrt{2}\,;-1)$ et $B(-3\sqrt{8}\,;\sqrt{3})$ ....

d) $A(-2^n\,;3\times 4^{n+1})$ et $B(2^n\,;2^{2n+1})$

● **Calcul 44.5 — Coordonnées du milieu d'un segment.**

Dans chacun des cas suivants, calculer les coordonnées du milieu I du segment [AB].

a) $A(3\,;-4)$ et $B(-6\,;5)$ .....

b) $A\left(\dfrac{4}{5}\,;\dfrac{-25}{6}\right)$ et $B\left(\dfrac{-7}{3}\,;\dfrac{14}{9}\right)$

● **Calcul 44.6 — Détermination de paramètres.**

Soit t un nombre réel. On considère les points $A(1\,;0)$, $B(3\,;-4)$, $C(5\,;t)$, $D(-2\,;3t-1)$ et $E(2\,;6-2t)$.

Dans chacun des cas suivants, calculer la valeur de t permettant de réaliser la propriété donnée.

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ ....

b) $2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DE}$ ...

c) $\overrightarrow{AD} = -\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

● **Calcul 44.7 — Résolution de deux équations vectorielles.**

a) On considère les deux points du plan $A(-1\,;4)$ et $I\left(\dfrac{3}{2}\,;1\right)$.

Calculer les coordonnées du point B tel que I soit le milieu de [AB]. ....

b) On considère les points du plan $A(2\,;-4)$, $B(7\,;-1)$ et $C(-4\,;2)$.

Calculer les coordonnées du point M tel qu'on a $\overrightarrow{BM} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AM} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{MC}$. ....

Réponses mélangées

$\begin{pmatrix}-12\\8\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}\frac{29}{2}\\\frac{-37}{6}\end{pmatrix}$ $\left(-\frac{3}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$ $\begin{pmatrix}-7\sqrt{2}\\\sqrt{3}+1\end{pmatrix}$ $\frac{7}{3}$ $\begin{pmatrix}-3\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

-8 $\begin{pmatrix}-1\\6\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}\frac{11}{6}\\\frac{-41}{42}\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}2^{n+1}\\-5\times 2^{2n+1}\end{pmatrix}$ $(-46\,;-4)$ $\begin{pmatrix}27\\-2\end{pmatrix}$

$(4\,;-2)$ 3 $\begin{pmatrix}2\\5\\2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$ $\left(\frac{-23}{30}\,;\frac{-47}{36}\right)$ $\begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$

► Réponses et corrigés page 242

Norme des vecteurs

★☆☆☆ Manipuler la formule donnant la norme d'un vecteur

Dans cette fiche, on se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Consigne
Toutes les réponses seront données sous la forme d'un nombre entier ou d'une fraction irréductible, ou encore sous la forme

$$a\sqrt{b} \quad \text{ou} \quad \frac{a\sqrt{b}}{c},$$

avec a, b et c des entiers, b étant le plus petit possible.

Calcul 45.1

Dans chacun des cas suivants, calculer la norme du vecteur $\vec{u}$.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ ....

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}-6\\2\end{pmatrix}$ ....

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ ....

d) $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{5}-\sqrt{3}\\\sqrt{5}+\sqrt{3}\end{pmatrix}$ ....

Calcul 45.2 — Avec deux points.

Dans chacun des cas suivants, calculer la distance AB.

a) $\mathrm{A}(2\,;-3)$ et $\mathrm{B}(-1\,;-7)$ ....

b) $\mathrm{A}\left(-2\,;\frac{1}{4}\right)$ et $\mathrm{B}\left(\frac{-1}{2}\,;1\right)$ ....

c) $\mathrm{A}(\sqrt{2}-2\,;2\sqrt{2})$ et $\mathrm{B}(3\sqrt{2}+1\,;1-4\sqrt{2})$ ....

Calcul 45.3 — Avec des sommes.

Dans chacun des cas suivants, calculer la norme du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}$ ....

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{-9}{5}\\2\end{pmatrix}$ ....

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\\frac{-1}{4}\end{pmatrix}$ ....

d) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\sqrt{3}\\1-5\sqrt{2}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\sqrt{3}\\2\sqrt{2}-1\end{pmatrix}$ ..

- **Calcul 45.4 — Premières équations.**

Soit x un nombre réel et soient $A(1\,;2-x)$ et $B(x-2\,;5)$ deux points du plan. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des valeurs de x telles que la condition donnée soit vraie.

a) $AB = 3\sqrt{10}$ ....

b) $AB = \sqrt{26}$ ....

c) $AB = 4$ ....

d) $AB = 3\sqrt{2}$ ....

- **Calcul 45.5**

Soit x un nombre réel. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des valeurs de x telles que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ aient la même norme.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix} x-1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 5-x \end{pmatrix}$ ....

b) $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$ ....

- **Calcul 45.6**

Soit x un réel non nul. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des valeurs de x telles que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ aient la même norme.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix} 7x \\ \sqrt{2}+1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ....

b) $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{2}{x} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ....

c) $\vec{u}\begin{pmatrix} 2x+3 \\ 4-x \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x-1 \\ 2x \end{pmatrix}$ ....

- **Calcul 45.7 — Avec des triangles.**

Soit x un nombre réel et soient $A(x\,;3)$, $B(5\,;4)$ et $C(1\,;x-1)$ trois points du plan.

a) Déterminer les valeurs de x telles que le triangle ABC soit isocèle en A. ....

b) Déterminer la valeur de x telle que le triangle ABC soit rectangle en B. ....

Réponses mélangées

4 $\quad 2\sqrt{10}$ $\quad \left\{-\frac{2}{7}, \frac{2}{7}\right\}$ $\quad \frac{\sqrt{229}}{10}$ $\quad \frac{\sqrt{13}}{4}$ $\quad \frac{3}{2}$ $\quad \left\{-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right\}$

$\left\{\frac{19}{8}\right\}$ $\quad \{-4\}$ $\quad \{-2, 2\}$ $\quad \frac{3\sqrt{5}}{4}$ $\quad 3\sqrt{14}$ $\quad 5$ $\quad 3\sqrt{10}$ $\quad \sqrt{13}$

$\{0\}$ $\quad x = 5$ $\quad \{-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\}$ $\quad x = -3$ et $x = 3$ $\quad \varnothing$ $\quad \{-6, 6\}$ $\quad 5$

▶ Réponses et corrigés page 244

Vecteurs colinéaires et déterminant

★☆☆☆ Utiliser le déterminant pour étudier la colinéarité de deux vecteurs

Dans cette fiche, on se place dans un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Consigne
Dans les quatre exercices suivants, on écrira λ sous forme de fraction irréductible ou, si le cas se présente, en tant que nombre entier.

Calcul 46.1

Dans chacun des cas suivants, déterminer le nombre réel λ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}12\\ 2\end{pmatrix}$ ....

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}-6\\ 9\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}8\\ -12\end{pmatrix}$ ....

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}-\frac{5}{4}\\ \frac{1}{4}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\ \frac{2}{5}\end{pmatrix}$ ....

d) $\vec{u}\begin{pmatrix}16\\ 12\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\ \frac{3}{2}\end{pmatrix}$ ....

Calcul 46.2

Dans chacun des cas suivants, déterminer le nombre réel λ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$.

a) $\vec{u} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} - \frac{4}{3}\vec{j}$ ....

b) $\vec{u} = \frac{2}{3}\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{v} = \frac{4}{5}\vec{i} + \frac{6}{5}\vec{j}$ ....

Calcul 46.3

Dans chacun des cas suivants, déterminer le nombre réel λ tel que $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC}$, sachant que :

a) $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ ....

b) $4\overrightarrow{AB} = 5\overrightarrow{BC}$ ....

c) $-2\overrightarrow{AC} + 7\overrightarrow{BC} = \vec{0}$ ....

d) $5\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{AC} = -7\overrightarrow{BC}$ ....

Calcul 46.4

Dans chacun des cas suivants, déterminer le nombre réel λ tel que $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC}$, sachant que :

a) $A(-4\,;3), B(-1\,;1), C(5\,;-3)$ ....

b) $A(-2\,;2), B(2\,;3), C(6\,;4)$ ....

c) $A\left(\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{2}\right), B\left(\frac{5}{3}\,;\frac{1}{3}\right), C\left(\frac{15}{2}\,;\frac{9}{2}\right)$ ....

Calcul 46.5

Dans chacun des cas suivants, calculer $\det(\vec{u}, \vec{v})$.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-21\\6\end{pmatrix}$ ....

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}12\\18\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-8\\-12\end{pmatrix}$ ....

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{7}{3}\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\\frac{9}{7}\end{pmatrix}$ ....

d) $\vec{u}\begin{pmatrix}2+\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\2-\sqrt{3}\end{pmatrix}$ ...

Calcul 46.6

Dans chacun des cas suivants, après avoir calculé le déterminant des vecteurs donnés, déterminer l'unique nombre réel x tel que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\x\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$ ....

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3x\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ ....

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\\frac{x+1}{4}\end{pmatrix}$ .....

d) $\vec{u}\begin{pmatrix}2x\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1-2x\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ ..

Calcul 46.7

Dans chacun des cas suivants, exprimer $\det(\vec{u}, \vec{v})$ en fonction de x.

On donnera le résultat sous forme factorisée.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\x+1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2x\\3x+1\end{pmatrix}$ ...

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}x^2\\x\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x^2-3x\\5x-1\end{pmatrix}$ .....

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}8x-12\\2x-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}5x+7\\2x-3\end{pmatrix}$.

d) $\vec{u}\begin{pmatrix}3x\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}8\\27x\end{pmatrix}$ ....

Calcul 46.8

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\3x\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2x\\x+3\end{pmatrix}$ ....

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}2x\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\2x\end{pmatrix}$ ....

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}5x+4\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\5x+4\end{pmatrix}$ ..

d) $\vec{u}\begin{pmatrix}9x+1\\3x-10\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3x-10\\9x+1\end{pmatrix}$

Réponses mélangées

-31	$\frac{5}{8}$	$(2x-3)(3x-19)$	$\frac{5}{6}$	0	$(9x-4)(9x+4)$	$\frac{1}{2}$	8	
$\left\{-\frac{11}{6}, \frac{3}{4}\right\}$	0	3	$\frac{1}{6}$	3	$\left\{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}$	$\frac{1}{15}$	$\left\{0, \frac{3}{5}\right\}$	$\frac{5}{9}$	$x(x-1)$
$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{3}{4}$	$x^2(4x+2)$	$\frac{13}{2}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{7}$	0	$\frac{1}{11}$	$\varnothing$

► Réponses et corrigés page 246

Barycentres

S'entraîner au travail avec les barycentres

Remarque
Cette fiche est uniquement destinée aux élèves ayant étudié les barycentres en classe.

Dans toute cette fiche, on se place dans le plan, muni d'un repère $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j})$.

Calcul 47.1 — Pour commencer.

On considère G le barycentre des points pondérés (A, a) et (B, b). Calculer les coordonnées de G dans chacun des cas suivants.

a) $a = 1$, $b = 1$ et $\mathrm{A}(3\,;6)$, $\mathrm{B}(5\,;10)$ ....

b) $a = 3$, $b = 4$ et $\mathrm{A}(-1\,;5)$, $\mathrm{B}(2\,;-6)$ ....

c) $a = \dfrac{1}{3}$, $b = \dfrac{2}{3}$ et $\mathrm{A}(2\,;4)$, $\mathrm{B}(2\,;7)$ ....

d) $a = \dfrac{2}{7}$, $b = \dfrac{2}{5}$ et $\mathrm{A}(1\,;5)$, $\mathrm{B}(2\,;7)$ ....

Calcul 47.2

On considère G le barycentre des points pondérés (A, a), (B, b) et (C, c). Calculer les coordonnées de G dans chacun des cas suivants.

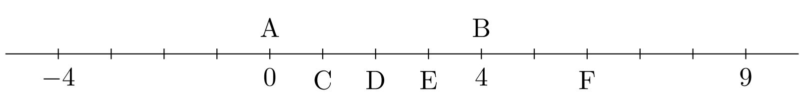
a) $a = 3$, $b = -4$, $c = 2$ et $\mathrm{A}(1\,;5)$, $\mathrm{B}(2\,;6)$, $\mathrm{C}(1\,;1)$ ....

b) $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$ et $\mathrm{A}(0\,;0)$, $\mathrm{B}(0\,;2)$ et $\mathrm{C}(1\,;3)$ ....

c) $a = 2$, $b = 3$, $c = 5$ et $\mathrm{A}(3\,;6)$, $\mathrm{B}(-5\,;2)$ et $\mathrm{C}(1\,;-4)$ ....

Calcul 47.3

On a placé plusieurs points sur un axe gradué.



a) Quel point (parmi C, D, E et F) est le barycentre de $(\mathrm{A}, 1)$ et $(\mathrm{B}, 3)$? ....

b) Quels sont les coefficients affectés respectivement à A et à B pour que D en soit le barycentre ?

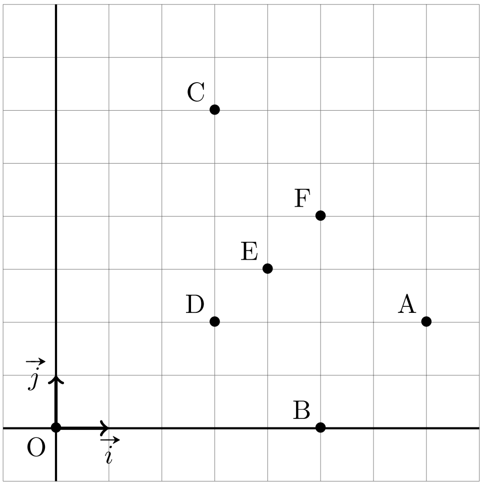
(a) 1 et -1 (b) 2 et 2 (c) 3 et 3

....

c) On suppose que F est le barycentre de $(\mathrm{A}, 1)$ et (B, b). Calculer la valeur de b. ....

Calcul 47.4

On considère plusieurs points, représentés sur la figure ci-contre.



a) Quel point est le barycentre de

$$(\mathrm{A}, 1) \quad \text{et} \quad (\mathrm{C}, 1)\ ?$$

(a) D (b) E (c) F

b) Quel point est le barycentre de

$$(\mathrm{B}, -1) \quad \text{et} \quad (\mathrm{C}, -1)\ ?$$

(a) D (b) E (c) F

c) On suppose que D est le barycentre de $(\mathrm{A}, -1)$, (B, b) et (C, c). Déterminer les valeurs de b et de c.

Calcul 47.5

On considère A le point de coordonnées $(3\,;0)$ et B le point de coordonnées $(6\,;3)$. Soit λ un réel. On note G le barycentre des points pondérés $(\mathrm{A}, 1-\lambda)$ et (B, λ).

a) Exprimer les coordonnées $(x_\mathrm{G}\,; y_\mathrm{G})$ de G en fonction de λ.

b) Exprimer y_G en fonction de x_G.

c) Encadrer x_G pour λ compris entre 0 et 1.

d) Encadrer y_G pour λ compris entre 0 et 1.

Réponses mélangées

$\mathrm{G}(4\,;8)$ (c) E $\mathrm{G}\left(\frac{1}{3}\,;\frac{5}{3}\right)$ $(3+3\lambda\,;3\lambda)$ -3 $\mathrm{G}\left(\frac{19}{12}\,;\frac{37}{6}\right)$

$b=2$ et $c=1$ $\mathrm{G}\left(\frac{5}{7}\,;-\frac{9}{7}\right)$ (b) ou (c) (b) $3 \leqslant x_\mathrm{G} \leqslant 6$

$y_\mathrm{G} = x_\mathrm{G} - 3$ $\mathrm{G}\left(-\frac{2}{5}\,;-\frac{1}{5}\right)$ $0 \leqslant y_\mathrm{G} \leqslant 3$ $\mathrm{G}(-3\,;-7)$ $\mathrm{G}(2\,;6)$

► Réponses et corrigés page 248

Vecteurs

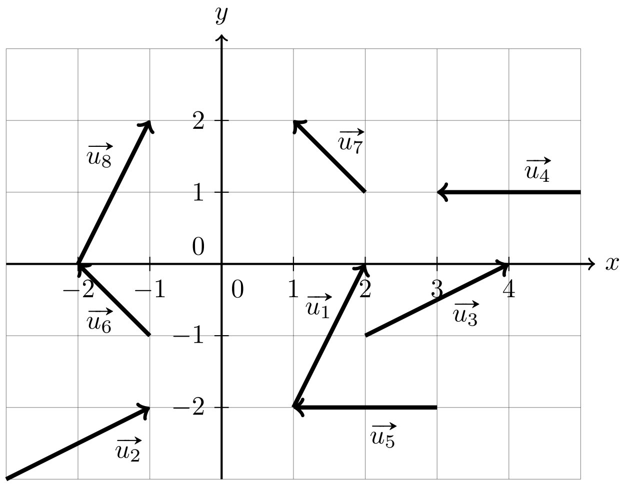
Fiche de calcul n° 48

2nde-VEC-07

Application des vecteurs à la géométrie

★☆☆☆ Utiliser les vecteurs pour résoudre des problèmes de géométrie

Calcul 48.1



Pour chacun des vecteurs suivants, déterminer un autre vecteur qui lui est égal :

a) $\overrightarrow{u_1}$ ....

b) $\overrightarrow{u_2}$ ....

c) $\overrightarrow{u_3}$ ....

d) $\overrightarrow{u_4}$ ....

Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants :

e) $\overrightarrow{u_5}$ ....

f) $\overrightarrow{u_6}$ ....

g) $\overrightarrow{u_7}$ ....

h) $\overrightarrow{u_8}$ ....

Calcul 48.2

On considère les mêmes vecteurs que dans l'exercice précédent, définis graphiquement.

Déterminer la norme des vecteurs suivants :

a) $\overrightarrow{u_1}$ ....

b) $\overrightarrow{u_5}$ ....

c) $\overrightarrow{u_6}$ ....

d) $\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$ ....

e) $\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_5}$ ....

f) $\overrightarrow{u_4} - \overrightarrow{u_2} - 2\overrightarrow{u_1}$ ..

Calcul 48.3 — Alignement de points.

Soit ABC un triangle. On considère le point D un point tel que $\overrightarrow{AD} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

a) Exprimer $\overrightarrow{BC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. ....

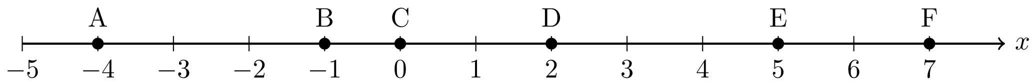
b) Exprimer $\overrightarrow{BD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. ....

c) Exprimer $\overrightarrow{CD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. ....

d) Les points B, C, D sont-ils alignés ? ....

● Calcul 48.4

On considère l'axe suivant, muni de six points :



Dans chacun des cas suivants, déterminer λ pour que l'égalité soit vraie.

a) $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{DE}$

b) $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CD}$

c) $\overrightarrow{BA} = \lambda\overrightarrow{BC}$

d) $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AD}$

e) $\overrightarrow{DB} = \lambda\overrightarrow{FB}$

f) $\overrightarrow{CD} = \lambda\overrightarrow{FA}$

● Calcul 48.5 — Colinéaires ou pas ?

Dans chacun des cas suivants, les vecteurs sont-ils colinéaires ? Répondre par « oui » ou « non ».

a) $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

c) $\vec{u}\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 7 \\ \frac{3}{7} \end{pmatrix}$

d) $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{7} \end{pmatrix}$

● Calcul 48.6

On considère les points $A(2\,;3), B(4\,;2), C(-2\,;1)$ et $D(2\,;-1)$ dans le repère ci-dessous.

a) Placer les points A, B, C et D sur le repère ci-dessous.

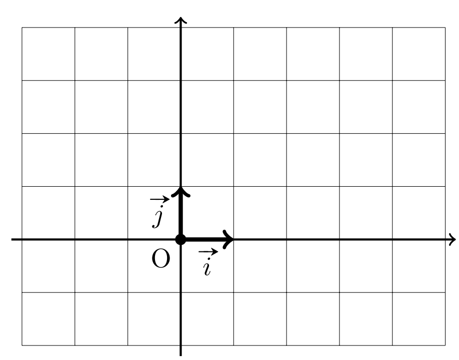
Calculer les coordonnées des vecteurs suivants :

b) $\overrightarrow{AC}$

c) $\overrightarrow{AB}$

d) $\overrightarrow{CD}$

e) $\overrightarrow{BC}$



f) Calculer le déterminant de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

g) Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

● Calcul 48.7

On considère les points $\mathrm{A}(-2\,;1), \mathrm{B}(4\,;1)$ et $\mathrm{C}(-1\,;2)$.

On note M le milieu de [AB], N le milieu de [MB] et S le point tel que $\overrightarrow{\mathrm{SA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{SC}} = \vec{0}$.

Déterminer les coordonnées des points suivants :

a) M .... ☐ b) N .... ☐ c) S .... ☐

d) Les droites (CN) et (MS) sont-elles parallèles ? .... ☐

● Calcul 48.8 — Parallèles ou pas ?

Pour chaque question, on donne les coordonnées de quatre points A, B, C et D.

Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ? Répondre par « oui » ou « non ».

a) $\mathrm{A}(2\,;2)$, $\mathrm{B}(5\,;4)$, $\mathrm{C}(1\,;4)$ et $\mathrm{D}(2\,;2)$ .... ☐

b) $\mathrm{A}\left(-\frac{20}{3}\,;2\right)$, $\mathrm{B}(\sqrt{2}\,;1)$, $\mathrm{C}(1\,;1)$ et $\mathrm{D}(1\,;\sqrt{2})$ .... ☐

c) $\mathrm{A}\left(\frac{1}{3}\,;-2\frac{\sqrt{5}}{9}\right)$, $\mathrm{B}(0\,;0)$, $\mathrm{C}\left(-1\,;\frac{10\sqrt{5}}{27}\right)$ et $\mathrm{D}\left(-\frac{4}{9}\,;0\right)$ .... ☐

● Calcul 48.9 — Parallèles !

On considère les points $\mathrm{A}(\sqrt{5}\,;2), \mathrm{B}(5\,;t), \mathrm{C}\left(1\,;\frac{4}{3}\right)$ et $\mathrm{D}(a\,;2)$, où a et t sont des réels.

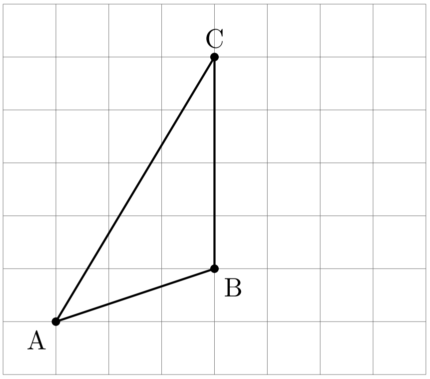
Dans chacun des cas suivants, déterminer la valeur de a pour que les droites (AB) et (CD) soient parallèles.

On donnera le résultat sans racine au dénominateur.

a) si $t = 0$ ...... ☐ b) si $t = 1$ ...... ☐ c) si $t = 2 + \sqrt{5}$ ☐

● Calcul 48.10

On considère le triangle ABC, représenté ci-contre.



a) Construire le point D tel que $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}$. ....

b) Construire le point E tel que $\overrightarrow{\mathrm{BE}} + \overrightarrow{\mathrm{BA}} = \vec{0}$. ....

c) Est-ce que $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{BD}}$? .... ☐

d) ABDC est-il un parallélogramme ? .... ☐

e) Trouver le réel λ tel que $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{CD}}$. ..... ☐

Calculs plus difficiles

● **Calcul 48.11**

On considère trois points $A\left(\dfrac{3}{2}\,;2\right), B\left(-\dfrac{2}{5}\,;\dfrac{3}{7}\right)$ et $C(\sqrt{2}\,;-\sqrt{2})$.

Dans chacun des cas suivants, déterminer les coordonnées du point D pour que les quadrilatères donnés soient des parallélogrammes.

a) ABCD . $\boxed{}$ b) DBCA . $\boxed{}$ c) ABDC . $\boxed{}$

● **Calcul 48.12 — Droite d'Euler.**

On considère un triangle ABC, de centre de gravité G et on note I, J, K les milieux de [BC], [AC] et [AB].

a) Soit M un point quelconque. Exprimer $\overrightarrow{MK}$ en fonction de $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$. .... $\boxed{}$

Faire de même pour :

b) $\overrightarrow{MJ}$ en fonction de $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MC}$ .... $\boxed{}$

c) $\overrightarrow{MI}$ en fonction de $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MC}$ .... $\boxed{}$

Calculer :

d) $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{CK}$ .... $\boxed{}$ e) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$ .... $\boxed{}$

Réponses mélangées

$\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}$	$\sqrt{13}$	$\overrightarrow{u_2}$	$-\dfrac{2}{11}$	non	2	$\vec{0}$	$\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-6\\-1\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{u_8}$
$\overrightarrow{u_3}$	non	$\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$	$\left(\frac{5}{2}\,;1\right)$	$(1\,;1)$	$\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{MC}$	1	oui	$3\sqrt{2}$	$\sqrt{61}$	
0	$\dfrac{3}{8}$	oui	$\left(-\dfrac{19}{10}+\sqrt{2}\,;-\dfrac{11}{7}-\sqrt{2}\right)$	$\left(-\frac{4}{3}\,;\frac{5}{3}\right)$	$\sqrt{2}$	oui	non	2	$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$	
oui	$-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$	$\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$	$\left(\dfrac{11}{10}-\sqrt{2}\,;\dfrac{17}{7}+\sqrt{2}\right)$	$\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$	$\frac{1}{2}\overrightarrow{MA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$				
$\frac{1}{2}\overrightarrow{MA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{MC}$	oui	1	$\sqrt{5}$	oui	$\left(\dfrac{19}{10}+\sqrt{2}\,;\dfrac{11}{7}-\sqrt{2}\right)$	oui	$\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\sqrt{5}$			
$\vec{0}$	$-\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}\sqrt{5}$	non	$\dfrac{1}{2}$	$\overrightarrow{u_5}$	$-\dfrac{7}{3}+\dfrac{2}{3}\sqrt{5}$	-3	$\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$	oui		

► Réponses et corrigés page 250

Géométrie — Fiche de calcul n° 49 — 2nde-GEO-03

Équations de droites

★☆☆☆ Faire le lien entre équation, pente et représentation géométrique d'une droite

● Calcul 49.1

Parmi les affirmations suivantes, déterminer lesquelles sont vraies.

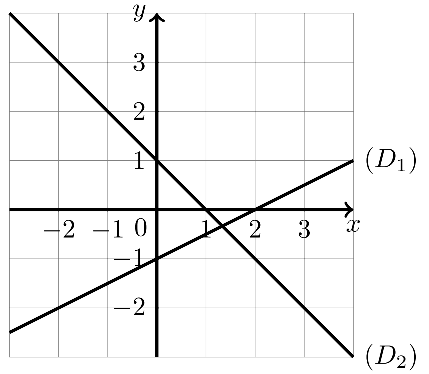
(a) Le point $\mathrm{A}(4\,;1)$ appartient à (D_1).

(b) Le point $\mathrm{B}(2\,;-1)$ appartient à (D_2).

(c) Le point $\mathrm{C}(-1\,;0)$ appartient à (D_1).

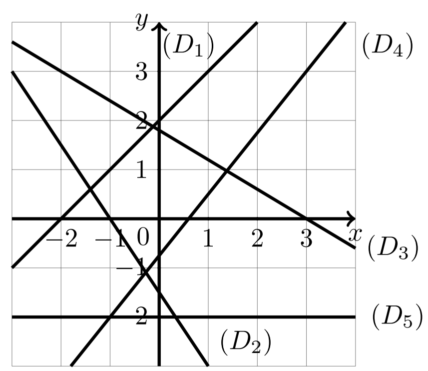
(d) Le point $\mathrm{E}(-2\,;-2)$ appartient à (D_2).

....



● Calcul 49.2 — Lecture graphique de pentes.

On considère les droites (D_1), (D_2), (D_3), (D_4) et (D_5) ci-dessous.



a) Choisir parmi les propositions suivantes la pente de la droite (D_1).

(a) -2 (b) -1 (c) 1 (d) 2

....

b) Choisir parmi les propositions suivantes la pente de la droite (D_2).

(a) $\dfrac{2}{3}$ (b) $\dfrac{3}{2}$ (c) $-\dfrac{2}{3}$ (d) $-\dfrac{3}{2}$

....

Déterminer la pente des droites suivantes :

c) (D_3) .... d) (D_4) .... e) (D_5) ....

Calcul 49.3

Dans chacun des cas suivants, déterminer si le point A appartient à la droite (D).

On répondra par « oui » ou « non ».

a) $\mathrm{A}(2\,;-1)$ et $(D) : 2x+3y+1=0$ ....

b) $\mathrm{A}(3\,;5)$ et $(D) : 7x-4y-1=0$ ....

c) $\mathrm{A}\left(\dfrac{3}{2}\,;\dfrac{-1}{3}\right)$ et $(D) : \dfrac{1}{2}x+4y+\dfrac{7}{12}=0$ ....

Calcul 49.4 — Intersection d'une droite avec l'axe des abscisses.

Dans chacun des cas suivants, déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (D) avec l'axe des abscisses.

a) $(D) : 4x+y+6=0$ ....

b) $(D) : -\dfrac{1}{2}x+\dfrac{2}{5}y+\dfrac{3}{4}=0$ ....

c) $(D) : 2\times 4^{n+1}x-3^{2n-1}y+2^{3n+2}=0$ (où $n\in\mathbb{N}$) ....

Calcul 49.5 — Combien vaut la pente ?

On considère les points $\mathrm{A}(2\,;-1)$ et $\mathrm{B}(-1\,;3)$.

Choisir parmi les propositions suivantes la pente de la droite (AB).

(a) $\dfrac{3}{4}$ (b) $\dfrac{4}{3}$ (c) $-\dfrac{3}{4}$ (d) $-\dfrac{4}{3}$

....

Calcul 49.6

Dans chacun des cas suivants, calculer la pente de la droite (AB).

a) $\mathrm{A}(-7\,;-10)$ et $\mathrm{B}(5\,;-2)$ ....

b) $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{3}\right)$ et $\mathrm{B}\left(\dfrac{-1}{4}\,;\dfrac{1}{2}\right)$ ....

c) $\mathrm{A}(-\sqrt{2}\,;\sqrt{24})$ et $\mathrm{B}(\sqrt{2}\,;\sqrt{6})$ ....

Calcul 49.7

Dans chacun des cas suivants, calculer la pente de la droite (D).

a) $(D) : y = 4x - 1$ ....

b) $(D) : 3x + y - 2 = 0$ ....

c) $(D) : 5x - 3y + 4 = 0$ ....

d) $(D) : 8x + 12y + 3 = 0$ ....

Calcul 49.8 — Détermination de paramètres.

Dans chacun des cas suivants, déterminer la valeur du paramètre réel m pour que le point A appartienne à la droite (D).

a) $\mathrm{A}(-1\,;1)$ et $(D) : mx + (3-m)y + 1 = 0$ ....

b) $\mathrm{A}(2\,;m)$ et $(D) : -2mx + y + 5 = 0$ ....

c) $\mathrm{A}(-m+1\,;2m-3)$ et $(D) : (m+2)x + (2m+3)y - 3m^2 = 0$ ....

Calcul 49.9 — Tracés de droites (I).

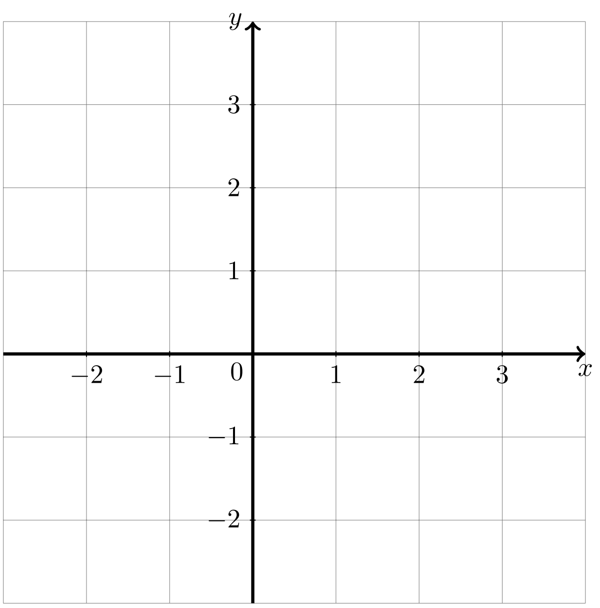
Tracer les droites suivantes sur le graphique ci-dessous.

a) La droite (D_1) de pente -1 et d'ordonnée à l'origine 2

b) La droite (D_2) de pente $\dfrac{1}{3}$ et d'ordonnée à l'origine 0

c) La droite (D_3) de pente $-\dfrac{1}{2}$ et d'ordonnée à l'origine $-\dfrac{1}{2}$

d) La droite (D_4) de pente 2 et d'ordonnée à l'origine -4



● Calcul 49.10 — Tracés de droites (II).

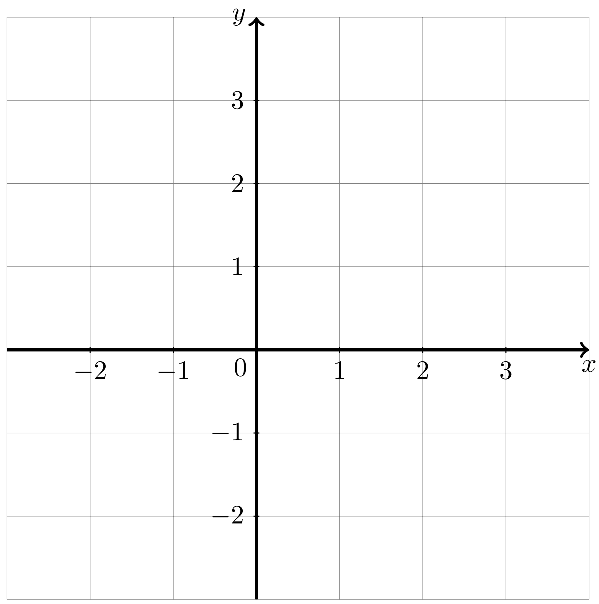
Tracer les droites suivantes sur le graphique ci-dessous.

a) La droite (D_1) d'équation $y = 2x - 1$

b) La droite (D_2) d'équation $y = -\dfrac{1}{3}x + 2$

c) La droite (D_3) d'équation $y = -\dfrac{5}{2}$

d) La droite (D_4) d'équation $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$



● Calcul 49.11 — Tracés de droites (III).

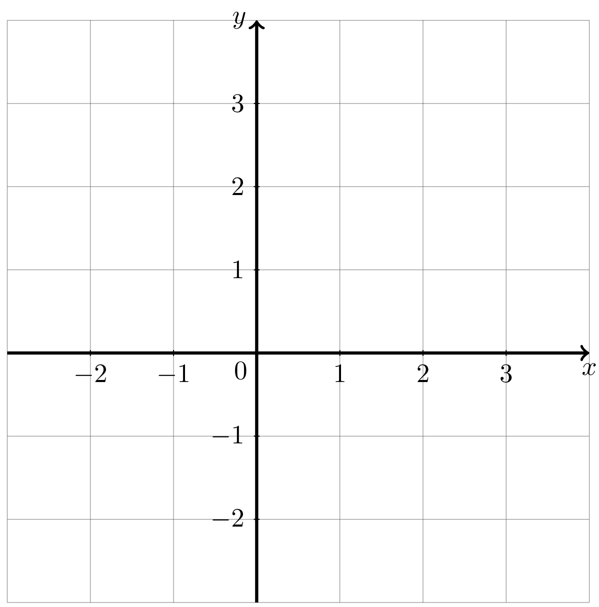
Tracer les droites suivantes sur le graphique ci-dessous.

a) La droite (D_1) d'équation $x = 3$

b) La droite (D_2) d'équation $6x - 3y + 3 = 0$

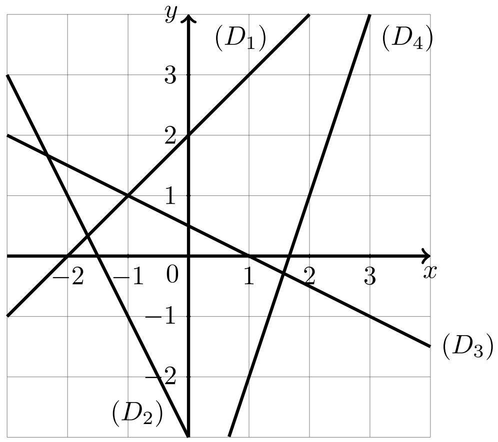
c) La droite (D_3) d'équation $x - 2y - 3 = 0$

d) La droite (D_4) d'équation $5x + 2y + 7 = 0$



● **Calcul 49.12 — Lecture graphique d'une équation de droite (I).**

On considère les droites (D_1), (D_2), (D_3) et (D_4) ci-dessous.



a) Choisir parmi les propositions suivantes l'équation réduite de la droite (D_1).

(a) $y = x - 2$
(b) $y = x + 2$
(c) $y = 2x + 1$
(d) $y = 2x + 2$

....

Déterminer les équations réduites des droites suivantes :

b) (D_2) ....

c) (D_3) ....

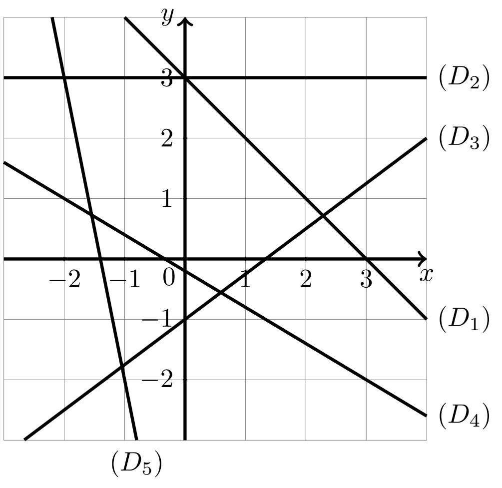
d) (D_4) ....

● **Calcul 49.13 — Lecture graphique d'une équation de droite (II).**

On considère les droites

$$(D_1), (D_2), (D_3), (D_4) \text{ et } (D_5),$$

tracées ci-contre.



Déterminer les équations réduites des droites suivantes :

a) (D_1) ....

b) (D_2) ....

c) (D_3) ....

d) (D_4) ....

e) (D_5) ....

Calcul 49.14 — Calcul d'une équation de droite (I).

a) On considère le point $A(1\,;2)$.

Quelle est l'équation réduite de la droite (D) de pente 3 et passant par A ?

(a) $y = 3x - 1$ (b) $y = 3x + 1$ (c) $y = 3x + 2$ (d) $y = 2x + 3$

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation réduite de la droite (D).

b) (D) a pour pente 6 et passe par le point $A(0\,;-2)$

c) (D) a pour pente -2 et passe par le point $A(2\,;-3)$

d) (D) a pour pente $\dfrac{3}{2}$ et passe par le point $A\left(-\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{8}\right)$

Calcul 49.15 — Calcul d'une équation de droite (II).

a) On considère les points $A(-2\,;-1)$ et $B(0\,;3)$.

Quelle est l'équation réduite de la droite (AB) ?

(a) $y = 2x + 1$ (b) $y = -2x+1$ (c) $y = 2x + 3$ (d) $y = -2x+3$

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation réduite de la droite (AB).

b) $A(-3\,;2)$ et $B(5\,;4)$

c) $A\left(\dfrac{5}{3}\,;-\dfrac{1}{6}\right)$ et $B\left(-\dfrac{3}{2}\,;\dfrac{5}{4}\right)$

d) $A(3 \times 5^{n+1}\,;4^{3n+6})$ et $B(-2 \times 7^n\,;8^{2n+4})$, où $n \in \mathbb{N}$

Réponses mélangées

$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (d) non $-\dfrac{2}{3}$ $y = -5x - 7$ (c) $\dfrac{2}{3}$ $y = 6x - 2$ $y = -\dfrac{3}{5}x - \dfrac{1}{5}$

oui 0 (d) $y = -2x - 3$ $\left(\dfrac{3}{2}\,;0\right)$ $\dfrac{5}{3}$ $\left(-\dfrac{3}{2}\,;0\right)$ $y = 3x - 5$

oui $y = 3$ $y = 2^{6n+12}$ $(-2^{n-1}\,;0)$ $y = -\dfrac{17}{38}x + \dfrac{11}{19}$ -7 $\dfrac{5}{4}$ 2

$y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$ $-\dfrac{2}{9}$ $-\dfrac{3}{5}$ $y = -2x + 1$ $y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{7}{8}$ $y = -x + 3$

$y = \dfrac{3}{4}x - 1$ -3 (a) et (b) $\dfrac{5}{3}$ $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{11}{4}$ (b) 4 (a) (c)

► Réponses et corrigés page 254

Géométrie

Fiche de calcul n° 50

2nde-GEO-04

Vecteurs directeurs d'une droite

S'entraîner à raisonner et à calculer avec les vecteurs directeurs

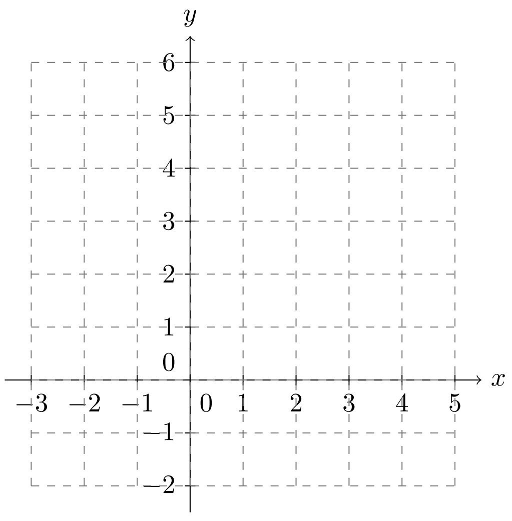
● Calcul 50.1 — Quelques dessins de droites.

Tracer, dans le repère donné ci-dessous, chacune des droites suivantes :

a) la droite (D_1) passant par $\mathrm{A}_1(2\,;4)$ et dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$;

b) la droite (D_2) passant par $\mathrm{A}_2(-1\,;5)$ et dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$;

c) la droite (D_3) passant par $\mathrm{A}_3(0\,;-2)$ et dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.



● Calcul 50.2 — Des équations de droites.

Dans chacun des cas suivants, donner l'équation réduite de la droite passant par le point A et ayant pour vecteur directeur $\vec{u}$:

a) $\mathrm{A}(2\,;-3)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$ ....

b) $\mathrm{A}(-1\,;5)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ ....

c) $\mathrm{A}(0\,;4)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$ ....

d) $\mathrm{A}(3\,;0)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$ ....

e) $\mathrm{A}(-2\,;-4)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ....

Calcul 50.3

Dans chacun des cas suivants, choisir parmi les réponses proposées les vecteurs qui sont des vecteurs directeurs de la droite (D).

Il peut y avoir plusieurs vecteurs directeurs.

a) (D) est la droite d'équation cartésienne $2x - 5y + 10 = 0$.

(a) $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ (b) $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}-5\\-2\end{pmatrix}$ (c) $\overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix}10\\4\end{pmatrix}$ (d) $\overrightarrow{u_4}\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$

....

b) (D) est une droite parallèle à l'axe des abscisses.

(a) $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$ (b) $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ (c) $\overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ (d) $\overrightarrow{u_4}\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$

....

c) (D) est la droite d'équation cartésienne $4x + 6y - 12 = 0$.

(a) $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$ (b) $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ (c) $\overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ (d) $\overrightarrow{u_4}\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix}$

....

Calcul 50.4

On considère les points $\mathrm{M}(1\,;2)$ et $\mathrm{N}(4\,;-2)$.

Parmi les équations suivantes, lesquelles correspondent à des droites admettant $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ pour vecteur directeur ?

(a) $6x + 4y - 5 = 0$

(b) $-4x + 3y + 7 = 0$

(c) $4x + 3y - 1 = 0$

(d) $-8x - 6y + 3 = 0$

....

Calcul 50.5

Une droite (D) passe par le point A et est parallèle à la droite (Δ).

Dans chacun des cas suivants, choisir les équations cartésiennes définissant (D).

a) $\mathrm{A}(-2\,;4)$ et $(\Delta) : 3x + 2y - 5 = 0$

(a) $3x + 2y + 14 = 0$

(b) $3x + 2y - 2 = 0$

(c) $6x + 4y + 5 = 0$

(d) $6x - 4y + 1 = 0$

....

b) $\mathrm{A}(0\,;0)$ et $(\Delta) : 6x - 2y + 1 = 0$

(a) $3x - y = 0$

(b) $6x - 2y = 0$

(c) $6x + 2y - 1 = 0$

(d) $3x + y - 1 = 0$

....

Réponses mélangées

(a), (b) et (c) (a) et (b) $y = 4$ $x = 3$ $y = x - 2$

(a), (b) et (d) $y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{7}{2}$ (c) et (d) (b) $y = -4x + 5$ (b)

► Réponses et corrigés page 258

Géométrie — Fiche de calcul n° 51 — 2nde-GEO-05

Droites parallèles et équations de droites

★☆☆☆ Étudier le parallélisme de deux droites à l'aide de leurs équations

● Calcul 51.1 — Droite parallèle à un axe ?

Parmi les affirmations suivantes, déterminer lesquelles sont vraies.

(a) La droite d'équation $y = 2$ est parallèle à l'axe des abscisses.

(b) La droite d'équation $y = 2$ est parallèle à l'axe des ordonnées.

(c) La droite d'équation $x = -\dfrac{1}{4}$ est parallèle à l'axe des ordonnées.

(d) La droite d'équation $3x - 5 = 0$ est parallèle à l'axe des abscisses.

....

● Calcul 51.2 — Parallélisme de deux droites définies par deux points.

On considère les points

$$\mathrm{A}(1\,;2),\quad \mathrm{B}(5\,;-3),\quad \mathrm{C}(-2\,;7)\quad \text{et}\quad \mathrm{D}(6\,;-3).$$

a) Calculer la pente de la droite (AB). ....

b) Calculer la pente de la droite (CD). ....

c) Déterminer si « oui » ou « non » les droites (AB) et (CD) sont parallèles. ....

● Calcul 51.3 — Alignement de trois points.

On considère les points

$$\mathrm{A}\left(\frac{5}{3}\,;-\frac{1}{4}\right),\quad \mathrm{B}\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{6}\right)\quad \text{et}\quad \mathrm{C}\left(\frac{-25}{6}\,;\frac{11}{6}\right).$$

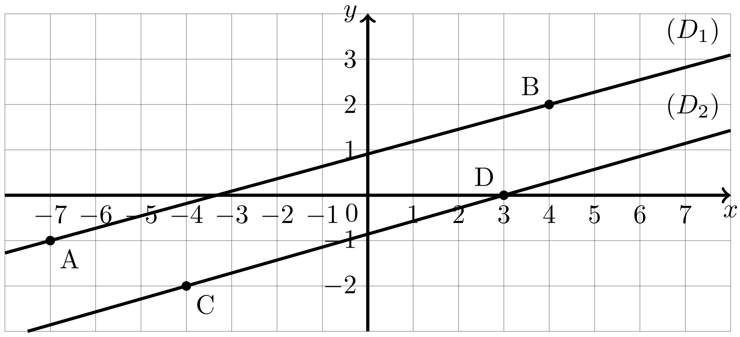
a) Calculer la pente de la droite (AB). ....

b) Calculer la pente de la droite (AC). ....

c) Déterminer si « oui » ou « non » les points A, B et C sont alignés. ....

● **Calcul 51.4 — Être ou ne pas être parallèle (I) ?**

On considère les droites (D_1) et (D_2) ci-dessous.



a) Déterminer la pente de la droite (D_1). ....

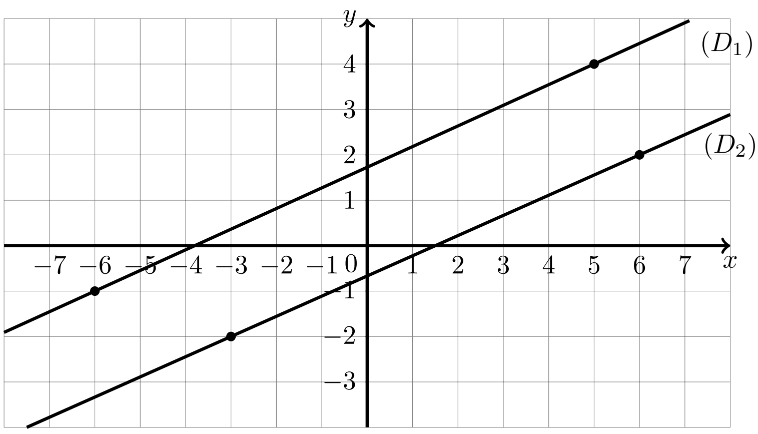
b) Déterminer la pente de la droite (D_2). ....

c) Calculer $\dfrac{3}{11} - \dfrac{2}{7}$. ....

d) Parmi les droites (D_1) et (D_2), laquelle a la plus grande pente ? ....

● **Calcul 51.5 — Être ou ne pas être parallèle (II) ?**

On considère les droites (D_1) et (D_2) ci-dessous.



Parmi les affirmations suivantes, déterminer laquelle est vraie.

(a) La droite (D_1) est parallèle à la droite (D_2).

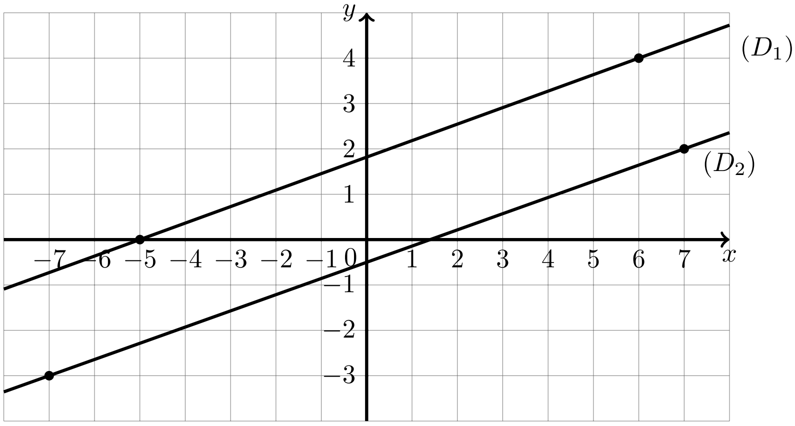
(b) La droite (D_1) a une plus grande pente que la droite (D_2).

(c) La droite (D_1) a une plus petite pente que la droite (D_2).

....

● Calcul 51.6 — Être ou ne pas être parallèle (III) ?

On considère les droites (D_1) et (D_2) ci-dessous.



Parmi les affirmations suivantes, déterminer laquelle est vraie.

(a) La droite (D_1) est parallèle à la droite (D_2).

(b) La droite (D_1) a une plus grande pente que la droite (D_2).

(c) La droite (D_1) a une plus petite pente que la droite (D_2).

....

● Calcul 51.7 — Vrai ou faux ?

On considère les points A$(-3\,;5)$, B$(-5\,;-3)$, C$(1\,;-5)$, D$(2\,;-1)$, E$(-10\,;2)$ et F$(-4\,;1)$.

Déterminer si « oui » ou « non » les affirmations suivantes sont vraies.

a) Les droites (AB) et (CD) sont parallèles. ....

b) Les droites (BC) et (DE) sont parallèles. ....

c) Les points A, B et F sont alignés. ....

● Calcul 51.8 — Parallélisme de deux droites définies par leurs équations.

Dans chacun des cas suivants, déterminer si « oui » ou « non » les droites (D_1) et (D_2) sont parallèles.

a) $(D_1) : y = 3x + 1$ et $(D_2) : y = 2x + 1$ ....

b) $(D_1) : 4x - 6y + 5 = 0$ et $(D_2) : -6x + 9y - 1 = 0$ ....

c) $(D_1) : 12x + 8y - 3 = 0$ et $(D_2) : -8x - 4y + 5 = 0$ ....

d) $(D_1) : \dfrac{6}{35}x + \dfrac{5}{14}y - \dfrac{193}{35} = 0$ et $(D_2) : \dfrac{33}{25}x + \dfrac{11}{4}y - \dfrac{147}{23} = 0$ ....

- **Calcul 51.9 — Trouver la bonne valeur du paramètre.**

Dans chacun des cas suivants, déterminer la valeur du paramètre réel m pour que les droites (D_1) et (D_2) soient parallèles.

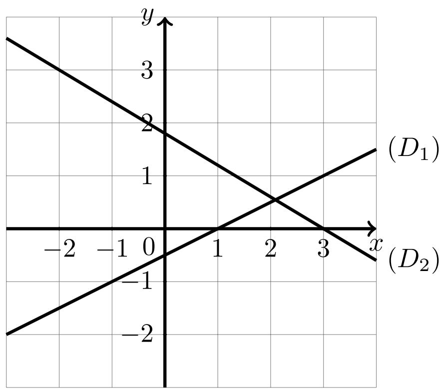
a) $(D_1) : y = 5x + 2$ et $(D_2) : y = (3m + 1)x - 3$ ....

b) $(D_1) : y = (m + 1)x - 1$ et $(D_2) : y = (2m - 1)x + m$ ....

c) $(D_1) : \dfrac{m}{2}x - 3y + 1 = 0$ et $(D_2) : x + \dfrac{1}{2m + 1}y - 4 = 0$ ....

- **Calcul 51.10 — Point d'intersection de deux droites.**

On considère les droites (D_1) et (D_2) ci-dessous.



a) Déterminer l'équation réduite de la droite (D_1). ....

b) Déterminer l'équation réduite de la droite (D_2). ....

On note $(x_0\,; y_0)$ les coordonnées du point d'intersection des droites (D_1) et (D_2).

c) Déduire des questions précédentes la valeur de x_0. ....

d) En déduire la valeur de y_0. ....

Réponses mélangées

oui   b   a et c   oui $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$ oui $-\dfrac{5}{14}$ $-\dfrac{5}{4}$

$-\dfrac{5}{4}$ $\dfrac{3}{11}$ $y = -\dfrac{3}{5}x + \dfrac{9}{5}$ $\dfrac{4}{3}$ oui   non $\dfrac{23}{11}$ $-\dfrac{1}{77}$ (D_2)

non $\dfrac{2}{7}$ non $-\dfrac{5}{14}$ b $-\dfrac{6}{13}$ 2   oui   oui $\dfrac{6}{11}$

► Réponses et corrigés page 260

Pourcentages — Fiche de calcul n° 52 — 2nde-PRCNT-01

Proportions

★☆☆☆ Utiliser des pourcentages et des fractions dans le calcul de proportions

Calcul 52.1 — Pour commencer.

Écrire les nombres suivants sous forme décimale, puis sous forme de pourcentage.

Par exemple, on a $\dfrac{12}{100} = 0{,}12 = 12\,\%$.

a) $\dfrac{1}{4}$ ....

b) $\dfrac{1}{2}$ ....

c) $\dfrac{1}{5}$ ....

d) $\dfrac{34}{200}$ ....

Calcul 52.2 — Différentes écritures.

a) Écrire 0,32 sous forme d'un pourcentage. ....

b) Écrire 83 % sous forme d'une valeur décimale. ....

c) Écrire 30 % sous forme d'une fraction irréductible. ....

d) Écrire $\dfrac{3}{2}$ sous forme d'un pourcentage. ....

Calcul 52.3 — Effectifs et proportions.

Une municipalité commande des plantes pour le fleurissement de la ville : 300 pétunias, 850 géraniums, 600 gazanias et pour finir des dipladénias soit 2000 plants au total.

a) Calculer sous forme décimale la proportion de géraniums dans la commande. ....

b) Calculer sous forme de pourcentage la proportion de gazanias dans la commande. ......

c) Calculer sous forme de fraction la proportion de dipladénias dans la commande. ....

Calcul 52.4

Dans une classe, il y a 24 élèves.

a) Un tiers des élèves de la classe font l'option latin. Calculer le nombre de latinistes.......

b) Les passionnés de jeux vidéos représentent 25 % de l'effectif. Calculer leur nombre. .....

c) Il y a 12 filles dans la classe. Calculer la proportion de filles sous la forme d'un pourcentage.

Calcul 52.5

a) Dans une boîte, 9 stylos sont défectueux, ce qui représente 15 % du total.

Calculer le nombre de stylos dans la boîte.

....

b) Dans un lycée, 37 % des élèves sont demi-pensionnaires soit 851 lycéens.

Calculer le nombre d'élèves dans le lycée.

....

c) Dans un aquarium, il y a 12 esturgeons soit un tiers des poissons.

Calculer le nombre total de poissons dans l'aquarium.

....

Calcul 52.6

a) Dans une basse-cour, la moitié des animaux sont des lapins et, parmi les lapins, le quart sont des Géants des Flandres. Calculer la proportion de lapins Géants des Flandres dans la basse-cour, sous forme d'un pourcentage. ....

b) Au rayon peinture d'une droguerie, 65 % des peintures sont acryliques et parmi celles-ci, 40 % sont applicables en extérieur. Calculer la proportion de peintures acryliques extérieures vendues par le magasin de bricolage, sous forme de fraction irréductible. ....

c) Dans une exploitation maraîchère, le quart de la surface est cultivée en salades et parmi les salades, 32 % sont des laitues. Calculer la proportion de surface en laitues dans l'exploitation, sous forme de nombre décimal. ....

Calcul 52.7

Dans une colonie de vacances, 10 % des participants ont moins de 10 ans. De plus 80% des personnes ayant moins de dix ans ont moins de 8 ans. Il y a 48 enfants de moins de 8 ans dans la colonie.

Calculer le nombre de participants. ....

Calcul 52.8

Il y a N personnes dans une salle. La proportion de personnes majeurs parmi ces N personnes vaut p. Parmi les majeurs, il y a n personnes qui ont le permis. Parmi les mineurs, aucun n'a le permis.

a) Calculer la proportion de majeurs ayant le permis. ....

b) Calculer la proportion de personnes n'ayant pas le permis. ....

Réponses mélangées

0,83   2300   0,08 $\frac{1}{8}$ $\frac{13}{50}$ 30 %   150 % $\frac{N-n}{N}$

0,25 = 25 %   12,5 %   0,5 = 50 %   8   60   32 % $\frac{n}{Np}$

0,17 = 17 %   6   50 % $\frac{3}{10}$ 0,425   600   36   0,2 = 20 %

► Réponses et corrigés page 263

Pourcentages — Fiche de calcul n° 53 — 2nde-PRCNT-02

Taux d'évolution

★☆☆☆ S'entraîner à la manipulation des coefficients multiplicateurs

Calcul 53.1

a) Un paquet de farine de blé coûte 1,20 €. Son prix augmente de 10 %.

Calculer le nouveau prix de ce paquet de farine. ....

b) Le prix du kilowattheure d'électricité a baissé de 15 %.

Calculer par combien le prix du kWh a été multiplié. ....

c) Un pantalon coûte initialement 60 €. Il est ensuite soldé de 30 %.

Calculer le nouveau prix de ce pantalon. ....

d) Le nombre de frelons asiatiques a augmenté de 200 % en cinq ans.

Calculer par combien la population de frelons asiatiques a été multipliée. ....

Calcul 53.2 — Des pourcentages au coefficient multiplicateur.

Calculer le coefficient multiplicateur associé à la variation en pourcentage proposée.

a) Une hausse de 30 % ....

b) Une hausse de 52 % ....

c) Une hausse de 100 % ....

d) Une baisse de 10 % ....

e) Une baisse de 50 % ....

f) Une baisse de 100 % ....

Calcul 53.3 — Du coefficient multiplicateur aux pourcentages.

Traduire par une évolution en pourcentage.

a) Multiplier par 1,2 ....

b) Multiplier par 1,5 ....

c) Multiplier par 0,9 ....

d) Multiplier par 0,5 ....

e) Diviser par 2 ....

f) Diviser par 4 ....

Calcul 53.4 — Retrouver la quantité initiale.

a) La population de truites dans un bassin augmente de 25 % en un an pour arriver à 455.

Calculer l'effectif initial.

. . . .

b) Le jour de ses 10 ans, la taille d'un enfant est de 140,4 cm. Elle a augmenté de 8 % au cours de sa dixième année. Calculer sa taille le jour de ses 9 ans.

. . . .

c) Un livret d'épargne est rémunéré au taux annuel de 2 %. Le montant des intérêts versés est de 58 €. Calculer la somme initiale.

. . . .

Calcul 53.5

Le nombre de clients d'un restaurant est passé de 300 en janvier à 360 en février.

a) Calculer la variation absolue entre janvier et février. . . . .

Calculer le taux d'évolution entre janvier et février :

b) sous forme d'un nombre décimal . . .

c) sous forme d'un pourcentage . . . .

d) L'augmentation de février à mars est de 5 %.

Calculer le nombre de clients en mars. . . . .

e) Calculer le taux d'évolution global de janvier à mars, en pourcentage. . . . .

f) En avril, il y a autant de clients qu'en janvier. La baisse de fréquentation de mars à avril est :

(a) de 26 % (b) supérieure à 26 % (c) inférieure à 26 %

. . . .

Calcul 53.6 — Quelle est la meilleure promo ?

a) Quelle promotion est la plus intéressante ?

(a) Une baisse de 30 %

(b) Deux baisses successives de 15 %

(c) Une première baisse de 20 % puis une baisse de 10 %

. . . .

b) Quelle promotion est la plus intéressante, sachant qu'on veut acheter trois produits identiques ?

(a) Une baisse de 30 %

(b) Deux achetés, un offert

(c) Le deuxième à moitié prix

. . . .

Calcul 53.7

Pour chacune des questions suivantes, choisir la bonne réponse.

a) Une population a augmenté de 15 %. Pour revenir à l'effectif initial, il doit y avoir une baisse :

(a) inférieure à 15 % (b) égale à 15 % (c) supérieure à 15 %

b) Une population a baissé de 15 %. Pour revenir à l'effectif initial, il doit y avoir une hausse :

(a) inférieure à 15 % (b) égale à 15 % (c) supérieure à 15 %

c) Une population a doublé. Pour revenir à l'effectif initial, il doit y avoir une baisse :

(a) égale à 100 % (b) égale à 50 % (c) égale à 25 %

Calcul 53.8 — Taux d'évolution réciproque.

Calculer les taux d'évolution réciproque sous forme de fraction irréductible.

a) Pour une hausse de 20 %

b) Pour une baisse de 10 %

c) Pour une hausse de 100 %

d) Pour une baisse de 50 %

Calcul 53.9 — Des formules générales.

On considère une population de taille initiale I et de taille finale F.

a) Calculer le taux d'évolution en fonction de I et F.

b) Calculer le taux d'évolution sous la forme d'un pourcentage.

c) Calculer le coefficient multiplicateur.

d) Calculer le coefficient multiplicateur réciproque.

e) Calculer le taux d'évolution réciproque.

f) Calculer le taux d'évolution réciproque sous la forme d'un pourcentage.

Calculs plus difficiles

● Calcul 53.10

On considère une population de taille N. Calculer en fonction de N la taille de population obtenue pour chacune des actions suivantes :

a) Augmenter de 30 % puis diminuer de 30 % la population ....

b) Baisser la population trois fois successivement de 5 % ....

● Calcul 53.11

a) Dans un troupeau, le nombre de brebis a augmenté en 2 ans de 44 %.

Calculer le taux annuel moyen d'évolution de ce troupeau, en pourcentage. ....

b) Une taxe a augmenté sur 2 ans de 21 %.

Calculer le taux annuel moyen d'évolution en pourcentage de cette taxe. ....

● Calcul 53.12 — Augmentation d'augmentations.

Une population compte initialement un effectif de N individus.

- La première année, il y a une augmentation de 5 %.
- Les deux années suivantes, l'augmentation progresse de 20 %.

a) Calculer l'augmentation prévue pour la deuxième année en pourcentage. ....

b) Calculer l'augmentation prévue la troisième année en pourcentage. ....

c) Calculer l'effectif de la population à la fin des trois années.

On donnera le résultat sous forme d'un produit.

....

Réponses mélangées

$\dfrac{F}{I}$	b	$0{,}95^3 \times N$	c	42 €	0,5	$\dfrac{1}{9}$	1,32 €	364	20 %
−50 %	2900	$\dfrac{F-I}{I}$	130	$0{,}91 \times N$	$1{,}193\,136 \times N$	1,52	+20 %		
0,85	378	$\dfrac{F-I}{I} \times 100\,\%$	6 %	$\dfrac{-1}{2}$	b	$\dfrac{-1}{6}$	$\dfrac{I}{F}$	c	a
1,3	60	$\dfrac{I-F}{F} \times 100\,\%$	26 %	−75 %	0,2	+50 %	3	7,2 %	
10 %	1	20 %	2	$\dfrac{I-F}{F}$	a	−50 %	0	0,9	−10 %

► Réponses et corrigés page 265

Généralités sur les probabilités

★☆☆☆ S'entraîner au calcul de probabilités

Calcul 54.1 — En lançant un dé.

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces, dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

a) On lance le dé et on note p la probabilité d'obtenir un nombre pair et q la probabilité d'obtenir un multiple de 3. Choisir la bonne réponse :

(a) $p = q$ (b) $p < q$ (c) $p > q$

b) Combien vaut la probabilité de ne pas obtenir de multiple de 3 ?

Calcul 54.2 — En lançant deux dés.

On dispose de deux dés équilibrés à 6 faces, dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

On les lance l'un après l'autre. Combien vaut la probabilité :

a) d'obtenir un 3 puis un 5 ?

b) d'obtenir deux fois la même valeur ?

c) que le plus grand des numéros soit égal à 6 ?

Calcul 54.3

Une pièce truquée est lancée une unique fois. Cette pièce peut renvoyer la valeur « Pile » ou la valeur « Face ». La probabilité qu'elle renvoie « Pile » est deux fois plus grande que la probabilité qu'elle renvoie « Face ».

Combien vaut la probabilité que la pièce renvoie « Pile » ?

Calcul 54.4

Une urne contient des boules de couleur bleue, rouge ou noire. On note n le nombre de boules bleues. On suppose qu'il y a deux fois plus de boules rouges que de boules bleues et qu'il y a 10 boules noires de plus que de boules bleues. On tire au hasard une boule de l'urne. On note A l'événement : « La boule tirée est rouge ou noire ».

a) Le nombre de boules dans l'urne vaut :

(a) $n + 12$ (b) $14n$ (c) $4n + 10$ (d) $\dfrac{5n}{2} - 10$

b) Combien vaut la probabilité de l'événement A ?

Calcul 54.5

On dispose d'un dé à quatre faces, dont les faces sont numérotées de 1 à 4. On note p_i la probabilité d'obtenir la face portant le nombre i. On suppose que les propriétés suivantes sont satisfaites :

$$p_2 = 2p_1, \quad p_3 = 3p_1 \quad \text{et} \quad p_4 = 4p_1.$$

a) Déterminer p_1. ....

b) Le dé est lancé une fois.

Combien vaut la probabilité d'obtenir une face avec un nombre pair ?

....

Calcul 54.6

Un dé équilibré à 6 faces est lancé deux fois de suite. On somme les valeurs obtenues lors de ces deux lancers. Combien vaut la probabilité d'obtenir la valeur 2 ?

(a) 0 (b) $\dfrac{1}{36}$ (c) $\dfrac{1}{6}$ (d) 1

....

Calcul 54.7 — Des sangliers et des chevreuils.

Une forêt contient x sangliers et y chevreuils. On sait que le nombre total de sangliers et de chevreuils est égal à 112 individus. On prélève des animaux au hasard, en les relâchant ensuite, et on évalue la probabilité d'obtenir un chevreuil à $\dfrac{1}{14}$.

a) En prélevant au hasard un de ces animaux, quelle est la probabilité d'obtenir un sanglier ?

....

b) Déterminer le nombre y de chevreuils. ....

c) On prélève 10 animaux successivement, en les relâchant à chaque fois.

Combien vaut la probabilité de n'avoir obtenu aucun chevreuil ?

(a) $\dfrac{1}{2}$ (b) $\left(\dfrac{13}{14}\right)^{10}$ (c) $1 - \left(\dfrac{13}{14}\right)^{10}$ (d) $\left(\dfrac{1}{14}\right)^{10}$ (e) $\dfrac{65}{7}$

....

Réponses mélangées

$\dfrac{1}{10}$ $\dfrac{13}{14}$ (c) $\dfrac{3n+10}{4n+10}$ $\dfrac{1}{6}$ $\dfrac{2}{3}$ $\dfrac{11}{36}$ $\dfrac{1}{36}$ $\dfrac{2}{3}$ (c) (b) (b) $\dfrac{3}{5}$ 8

► Réponses et corrigés page 267

Probabilités d'intersections et de réunions

★☆☆☆ Calculer des probabilités d'intersections et de réunions

Calcul 55.1 — Pour commencer.

On se place dans l'ensemble $\{1,2,3,4,5,6,7\}$; on y considère les trois parties :

$$A = \{1,2,3\}, \quad B = \{3,4,5,7\} \quad \text{et} \quad C = \{2,4,7\}.$$

Calculer les parties suivantes, en donnant leurs éléments *(par exemple,* $\{1,4,7\}$ *ou* $\{2,5,6\}$*, etc.)* :

a) $A \cup B$ ....

b) $A \cap B$ ....

c) $B \cap C$ ....

d) $\overline{A} \cup C$ ....

e) $\overline{B} \cap \overline{C}$ ....

f) $A \cup (\overline{B} \cap \overline{C})$ ....

Calcul 55.2 — Quelques descriptions d'événements.

On rappelle qu'un jeu de 32 cartes est composé de 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi et As en Trèfle, Pique, Carreau et Cœur. On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. On considère les événements suivants :

C : « La carte tirée est un cœur » ; T : « La carte tirée est un trèfle » ;
D : « La carte tirée est une dame ».

Décrire les événements suivants à l'aide d'une phrase.

a) $C \cap D$ ....

b) $C \cup T$ ....

c) $\overline{T} \cap \overline{C}$ ....

Écrire les événements suivants à l'aide des événements C, T et D :

d) « La carte tirée est une dame différente de la dame de cœur » ....

e) « La carte tirée est un pique ou un carreau » ....

f) « La carte tirée est la dame de cœur ou la dame de trèfle » ....

● **Calcul 55.3 — Formule d'inclusion-exclusion (I).**

On considère deux événements A et B. On rappelle que

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B).$$

Dans chacun des cas suivants, à l'aide des informations données, calculer $\mathrm{P}(A \cup B)$.

a) $\mathrm{P}(A) = 0{,}4, \quad \mathrm{P}(B) = 0{,}7 \quad$ et $\quad \mathrm{P}(A \cap B) = 0{,}2$ ....

b) $\mathrm{P}(A) = \dfrac{3}{4}, \quad \mathrm{P}(B) = \dfrac{1}{2} \quad$ et $\quad \mathrm{P}(A \cap B) = \dfrac{1}{3}$ ....

● **Calcul 55.4 — Formule d'inclusion-exclusion (II).**

On considère deux événements A et B. De nouveau, on rappelle que

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B).$$

a) On suppose que $\mathrm{P}(A) = 0{,}625$, que $\mathrm{P}(B) = 0{,}483$ et que $\mathrm{P}(A \cup B) = 0{,}874$.

Calculer $\mathrm{P}(A \cap B)$. ....

b) On suppose que $\mathrm{P}(\overline{A}) = 0{,}357$, que $\mathrm{P}(B) = 0{,}425$ et que $\mathrm{P}(A \cup B) = 0{,}763$.

Calculer $\mathrm{P}(A \cap B)$. ....

c) On suppose que $\mathrm{P}(\overline{A}) = \dfrac{5}{12}$, que $\mathrm{P}(A \cap B) = \dfrac{1}{3}$ et que $\mathrm{P}(A \cup B) = \dfrac{5}{8}$.

Calculer $\mathrm{P}(B)$. ....

d) On considère $p \in [0, 1]$ et on suppose que $\mathrm{P}(A) = \dfrac{1-p}{6}$, que $\mathrm{P}(\overline{B}) = \dfrac{2p+1}{3}$ et que $\mathrm{P}(A \cup B) = \dfrac{3-3p}{4}$.

Calculer $\mathrm{P}(A \cap B)$. ....

● **Calcul 55.5 — Probabilité d'être en panne.**

Deux serveurs informatiques, S_1 et S_2, sont connectés à un réseau.

On considère les événements A : « Le serveur S_1 est en panne » et B : « Le serveur S_2 est en panne ».

Une analyse de données a permis d'estimer les probabilités suivantes :

$$\mathrm{P}(A) = 0{,}05, \quad \mathrm{P}(B) = 0{,}08 \quad \text{et} \quad \mathrm{P}(A \cap B) = 0{,}01.$$

Calculer la probabilité des événements suivants.

a) C : « Le serveur S_1 fonctionne correctement » ....

b) D : « Au moins un serveur est en panne » ....

c) E : « Au moins un serveur fonctionne correctement » ....

● Calcul 55.6 — Au restaurant.

Un restaurant a servi 200 clients. Parmi eux, 120 clients ont commandé une entrée et un plat, tandis que 130 ont choisi un plat et un dessert. De plus, 90 clients ont pris entrée, plat et dessert. Tous les clients ont pris au moins un plat, sans entrée ni dessert pour certains.

On choisit au hasard un client ayant mangé dans ce restaurant. On définit les événements

A : « Le client a commandé une entrée » ;

B : « Le client a commandé un dessert ».

Calculer la probabilité des événements suivants, sous forme d'une fraction irréductible :

a) A ....

b) B ....

c) $A \cap B$ ....

d) « Le client a commandé une entrée ou un dessert » ....

e) « Le client a commandé uniquement un plat » ....

● Calcul 55.7 — Activités extra-scolaires.

Le tableau ci-dessous présente les activités extra-scolaires des élèves d'une école.

	Théâtre	**Musique**	**Sport**	**Total**
Filles	30	40	30	100
Garçons	20	30	25	75
Total	50	70	55	175

On choisit au hasard un élève de cette école.

Calculer la probabilité des événements suivants, sous forme d'une fraction irréductible :

a) A : « L'élève est un garçon pratiquant la musique » ....

b) F : « L'élève est une fille » ....

c) T : « L'élève fait du théâtre » ....

d) « L'élève est une fille ou fait du théâtre » ....

• Calcul 55.8 — Pour terminer !

Un restaurant scolaire, fréquenté par N élèves, propose au choix pour le dessert : un yaourt, un fruit ou une pâtisserie. Les élèves peuvent choisir au maximum deux desserts (forcément différents) parmi les trois et on suppose que chaque élève choisit au moins un dessert.

On sait que a élèves ont pris un yaourt, b élèves ont pris un fruit et c élèves ont pris une pâtisserie. De plus, on sait qu'exactement d élèves ont pris à la fois un yaourt et un fruit. Enfin, on sait qu'aucun élève n'a pris un fruit seul.

On choisit un élève au hasard et on définit les événements :

A : « Il a choisi un yaourt », B : « Il a choisi un fruit » et C : « Il a choisi une pâtisserie ».

a) A-t-on $N = a + b + c$? ....

Exprimer en fonction de N, a, b, c et d la probabilité des événements suivants :

b) « L'élève a choisi un yaourt ou un fruit » ....

c) D : « L'élève a choisi seulement une pâtisserie » ....

d) « L'élève a choisi un fruit et une pâtisserie » ....

e) « L'élève a choisi un yaourt et une pâtisserie » ....

f) E : « L'élève a choisi seulement un yaourt » ....

g) F : « L'élève a choisi un seul dessert » ....

Réponses mélangées

$\frac{13}{20}$	$\frac{a+c-N}{N}$	$(D \cap C) \cup (D \cap T)$	$\frac{2}{7}$	0,9	$D \cap \overline{C}$	0,95	$\frac{3}{8}$
$\{2, 4, 5, 6, 7\}$	$\{4, 7\}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1-p}{12}$	non	$\frac{4}{7}$	$\frac{N-a-b+d}{N}$	$\frac{9}{20}$
$\frac{N-c-d}{N}$	$\frac{2N-a-b-c}{N}$	$\frac{11}{12}$	0,12	$\frac{24}{35}$	$\frac{a+b-d}{N}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{6}{35}$
$\overline{C} \cap \overline{T}$	$\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$	$\{3\}$	« La carte tirée est la dame de cœur »	$\frac{b-d}{N}$	« La carte tirée est un cœur ou un trèfle »		
$\{1, 2, 3, 6\}$	0,234	0,99	$\frac{3}{5}$	$\{1, 6\}$	0,305	« La carte tirée n'est ni un trèfle, ni un cœur »	

► Réponses et corrigés page 269

Probabilités — Fiche de calcul n° 56 — 2nde-PROB-03

Probabilités conditionnelles

★☆☆☆ Se familiariser avec les probabilités conditionnelles

Remarque
Cette fiche est uniquement destinée aux élèves ayant étudié les probabilités conditionnelles en classe.

● Calcul 56.1 — Lecture d'un arbre.

On considère des événements A et B, vérifiant les conditions de l'arbre de probabilités ci-dessous.

Calculer les probabilités suivantes :

a) $\mathrm{P}(A)$ ....

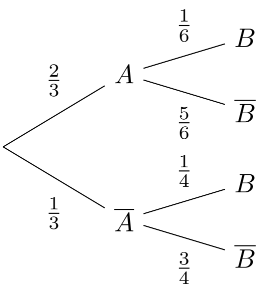
b) $\mathrm{P}(\overline{A})$ ....

c) $\mathrm{P}_A(B)$ ......

d) $\mathrm{P}_{\overline{A}}(B)$ ......

e) $\mathrm{P}(A \cap B)$ ....

f) $\mathrm{P}(\overline{A} \cap \overline{B})$ ...



● Calcul 56.2 — Des cases à compléter.

Compléter chacun des tableaux suivants :

a)

$\mathrm{P}(A)$	$\mathrm{P}_A(B)$	$\mathrm{P}(A \cap B)$
$\frac{1}{2}$	....	$\frac{2}{5}$
....	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{9}$
$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	....

b)

$\mathrm{P}(A)$	$\mathrm{P}_A(B)$	$\mathrm{P}(A \cap B)$
$\frac{3}{5}$	....	$\frac{2}{9}$
$\frac{7}{13}$	$\frac{3}{28}$	....
....	1	$\frac{2}{3}$

● Calcul 56.3

On rappelle que, par définition, on a $\mathrm{P}_A(B)\,\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \cap B)$. On peut en déduire, en particulier :

$$\mathrm{P}_A(B)\,\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}_B(A)\,\mathrm{P}(B).$$

Dans chacun des cas suivants, calculer $\mathrm{P}_B(A)$:

a) si $\mathrm{P}(A) = \frac{3}{8}$, $\mathrm{P}_A(B) = \frac{4}{7}$ et $\mathrm{P}(B) = \frac{2}{5}$ ....

b) si $\mathrm{P}(A) = \frac{4}{9}$, $\mathrm{P}_A(B) = \frac{4}{5}$ et $\mathrm{P}(B) = \frac{1}{2}$ ....

c) si $\mathrm{P}(A) = \frac{5}{9}$, $\mathrm{P}_A(B) = \frac{28}{37}$ et $\mathrm{P}(B) = \frac{7}{9}$ ....

Calcul 56.4

Dans chacun des cas suivants, calculer $\mathrm{P}_B(A)$:

a) si $\mathrm{P}(\overline{A}) = \dfrac{7}{8}$, $\mathrm{P}_A(B) = \dfrac{7}{12}$ et $\mathrm{P}(\overline{B}) = \dfrac{2}{9}$ ....

b) si $\mathrm{P}(A) = \dfrac{3}{8}$, $\mathrm{P}_A(\overline{B}) = \dfrac{1}{7}$ et $\mathrm{P}(\overline{B}) = 0$ ....

Calcul 56.5 — Pour celles et ceux qui aiment les pâtes !

Coralie prépare des pâtes au pesto : elle choisit entre des spaghettis (S) ou des fusillis (F), et entre du pesto vert (V) ou du pesto rouge (R).

La probabilité que Coralie choisisse les fusillis est de 0,2. Lorsqu'elle choisit les spaghettis, elle mange du pesto rouge avec une probabilité de 0,3. Avec les fusillis, elle mange du pesto rouge avec probabilité 0,8.

On donne la formule des probabilités totales : $\mathrm{P}(V) = \mathrm{P}(S \cap V) + \mathrm{P}(F \cap V)$.

a) Compléter l'arbre pondéré ci-contre.

b) Quelle est la probabilité que Coralie mange des spaghettis au pesto vert ?

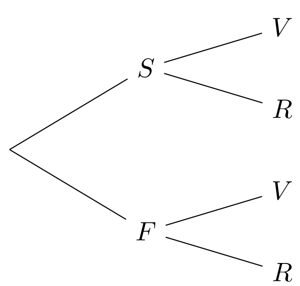
....

c) Quelle est la probabilité qu'elle mange du pesto vert ?

....

d) Sachant qu'elle a mangé du pesto vert, quelle est la probabilité qu'elle ait mangé des fusillis ?

....



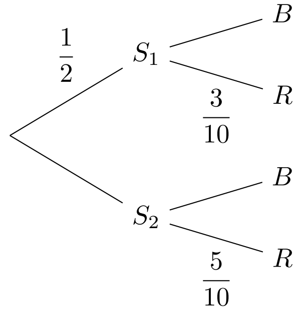
Calcul 56.6

On considère deux sacs S_1 et S_2 contenant 10 boules chacun. On ne connaît pas (*a priori*) la répartition exacte entre boules rouges et boules blanches dans chaque sac : le nombre de boules rouges (et donc de blanches) peut prendre toutes les valeurs possibles entre 0 et 10.

On note S_1 l'événement « on choisit le sac S_1 », de même pour S_2. On note R l'événement « on tire une boule rouge », et B l'événement « on tire une boule blanche ».

La situation est représentée par l'arbre de probabilité ci-dessous.

On donne la formule des probabilités totales : $\mathrm{P}(R) = \mathrm{P}(S_1 \cap R) + \mathrm{P}(S_2 \cap R)$.



On choisit au hasard un sac puis on tire une boule dans ce sac.

Calculer les probabilités suivantes :

a) $\mathrm{P}_{S_1}(R)$ .....

b) $\mathrm{P}_{S_2}(R)$ .....

En déduire les probabilités suivantes :

c) $\mathrm{P}(R)$ ....

d) $\mathrm{P}_R(S_1)$ .....

● Calcul 56.7 — Allez le foot !

Lors d'un match de football, une séance de tirs au but est organisée. On sait qu'Élie ne tire jamais au centre et qu'il tire à gauche en moyenne 3 fois sur 10. De plus, Élie sait que le gardien de l'équipe adverse arrête le tir avec une probabilité de 0,2 si le tireur vise à gauche et avec une probabilité 0,4 s'il vise à droite.

a) Quelle est la probabilité que le gardien n'arrête pas le tir, sachant qu'Élie vise à droite ?

b) Quelle est la probabilité qu'Élie vise à gauche et que le gardien arrête le tir ? ....

c) Quelle est la probabilité qu'il y ait but ? ....

● Calcul 56.8 — Le CDI.

Le CDI du lycée contient N livres en français et M livres en anglais. Arthur a déjà lu n livres de la bibliothèque dont m en anglais. Il choisit un livre au hasard dans le CDI.

a) Quelle est la probabilité qu'il ne l'ait pas lu ? ....

b) Quelle est la probabilité qu'il l'ait lu, sachant qu'il est en français ? ....

Cas concret : on suppose maintenant que $N = 808$, $M = 129$, $n = 236$ et $m = 28$.

> **Remarque**
> Pour la suite de l'exercice, on ne cherchera pas à simplifier les fractions : on se contentera de réponses de la forme « $\frac{22}{44}$ » ou encore « $\frac{700}{814}$ ».

Ben, un autre élève du lycée, a lu 37 livres en français dont 17 qu'Arthur a déjà lus et 87 livres en anglais dont 13 qu'Arthur a déjà lus.

c) Compléter le tableau ci-dessous.

Elève	Nombre de livres en français lus	Nombre de livres en anglais lus	Total
Arthur	....	....	....
Ben	....	....	....

d) Ben choisit un livre au hasard. Quelle est la probabilité qu'il l'ait déjà lu ? ....

e) Quelle est la probabilité qu'il soit en anglais, sachant qu'il l'a déjà lu ? ....

f) Quelle est la probabilité qu'il soit en français, sachant qu'Arthur et Ben l'ont déjà lu ?

● Calcul 56.9 — Groupes sanguins.

> **Remarque**
> Dans cet exercice, on ne cherchera pas à simplifier les fractions : on se contentera de réponses de la forme « $\frac{260+20+1}{260+200+1+1}$ ».

Il y a quatre groupes sanguins, nommés A, B, O ou AB, chacun pouvant être rhésus positif (R+) ou négatif (R−). On interroge les 508 élèves d'un lycée et on répertorie leurs réponses dans le tableau ci-dessous. Emma, une élève, s'interroge sur son groupe sanguin.

Groupe	**A**	**B**	**O**	**AB**
Rhésus +	260	9	200	1
Rhésus −	16	1	20	1

a) Quelle est la probabilité qu'elle soit R+, sachant qu'elle est du groupe A ? ....

b) Quelle est la probabilité qu'elle soit du groupe A, sachant qu'elle est R− ? ....

c) Quelle est la probabilité qu'elle soit R+, sachant qu'elle n'est pas du groupe B ? .

● Calcul 56.10 — Un arbre renversé.

On considère deux événements C et D tels que $\mathrm{P}(C) = 0{,}2$, $\mathrm{P}_C(D) = 0{,}9$ et $\mathrm{P}_{\overline{C}}(\overline{D}) = 0{,}9$.

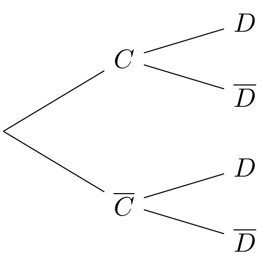
On donne la formule des probabilités totales : $\mathrm{P}(D) = \mathrm{P}(C \cap D) + \mathrm{P}(\overline{C} \cap D)$.

a) Compléter l'arbre **A**.

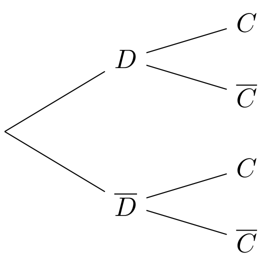
b) Calculer $\mathrm{P}(D)$. ....

c) Calculer $\mathrm{P}_D(C)$. ......

d) Calculer $\mathrm{P}_{\overline{D}}(C)$. ......



Arbre **A**



Arbre **B**

e) Compléter l'arbre **B**.

Réponses mélangées

$\frac{16}{16+1+20+1}$ $\frac{20}{37}$ $0{,}26$ $\frac{9}{13}$ $\frac{17}{30}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{260+200+1}{260+16+200+20+1+1}$ $\frac{260}{260+16}$

$\frac{n-m}{N}$ $\frac{N+M-n}{N+M}$ $\frac{1}{37}$ $\frac{32}{45}$ $\frac{3}{32}$ $\frac{15}{28}$ $\frac{9}{28}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{124}{937}$ $0{,}6$

$\frac{33}{50}$ $\frac{1}{6}$ $0{,}56$ $\frac{1}{15}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{10}$ $0{,}6$ $\frac{87}{124}$ $\frac{3}{50}$ $\frac{3}{8}$

► Réponses et corrigés page 272

Arithmétique — Fiche de calcul n° 57 — 2nde-ARI-01

Diviseurs et multiples

★☆☆☆ S'entraîner à travailler avec les notions de diviseur et de multiple

Calcul 57.1

Pour chacun des entiers a et b ci-dessous, poser la division euclidienne de a par b puis écrire le résultat sous la forme $a = b \times q + r$, où r est le reste et q le quotient.

Par exemple, la division euclidienne de 4 242 par 16, posée ci-contre, s'écrit :

$$
\begin{array}{r|l}
4\,2\,4\,2 & 1\,6 \\ \cline{2-2}
1\,0\,4 & 2\,6\,5 \\
8\,2 & \\
2 &
\end{array}
$$

$$4\,242 = 16 \times 265 + 2.$$

a) $a = 457$ et $b = 3$ ......

b) $a = 873$ et $b = 6$ ......

c) $a = 8\,394$ et $b = 12$ ....

d) $a = 6\,735$ et $b = 15$ ....

e) $a = 38\,647$ et $b = 11$ ..

f) $a = 57\,383$ et $b = 31$ ..

Calcul 57.2

Déterminer si les entiers de la première colonne du tableau sont divisibles par 2, 3, 5, 9 ou 10.

On indiquera s'il y a divisibilité par le symbole « ✓ » et on laissera la case vide sinon.

Nombre	2	3	5	9	10
252					
845					
9 945					
12 345					
21 879					

Nombre	2	3	5	9	10
1 054					
15 606					
110 751					
142 290					
191 479					

Calcul 57.3

Pour chacun des entiers ci-dessous, écrire la liste complète de ses diviseurs positifs.

a) 100 ......

b) 99 ....

c) 125 ......

d) 760 ......

Calcul 57.4 — Plus grand diviseur commun.

Dans chacun des cas suivants, donner le plus grand diviseur commun des deux entiers proposés.

a) 45 et 72 ....

b) 154 et 242 ....

c) 135 et 270 ....

d) 90 et 135 ....

Calcul 57.5 — Recherche de contre-exemples.

On considère a, b et c des entiers.

Les énoncés ci-dessous sont faux. Pour chacun d'entre eux, donner un contre-exemple.

a) Si a divise b, alors b divise a. ....

b) Si a divise $b+c$, alors a divise b et a divise c. ......

c) Si a divise b, alors $a+c$ divise $b+c$. ....

d) Si a divise bc, alors a divise b ou a divise c. ....

e) Si a divise b et c divise b, alors ac divise b. ....

Calcul 57.6 — Calcul de parités.

On suppose dans cet exercice que a est un entier pair et que b est un entier impair. Déterminer la parité des expressions suivantes en indiquant « pair » ou « impair ».

a) a^2 ....

b) b^2 ....

c) ab ....

d) $a+b$ ......

e) a^2+3b ...

f) a^2+16b^2 .

Réponses mélangées

impair — $a=c=1$ et $b=2$ — $31 \times 1\,851 + 2$ — 9 — $11 \times 3\,513 + 4$ — $\{1, 2, 4, 5, 8, 10, 19, 20, 38, 40, 76, 95, 152, 190, 380, 760\}$

$\{1, 5, 25, 125\}$ — $6 \times 145 + 3$ — $3 \times 152 + 1$ — impair — 135 — $a=1$ et $b=2$

pair — pair — 45 — $\{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$ — $a=b=c=2$ — pair — impair — 22

$a=2$ et $b=c=1$ — $12 \times 699 + 6$ — $\{1, 3, 9, 11, 33, 99\}$ — $15 \times 449 + 0$ — $a=4$ et $b=c=2$

► Réponses et corrigés page 275

Arithmétique — Fiche de calcul n° 58 — 2nde-ARI-02

Nombres premiers et applications

★☆☆☆ S'entraîner à travailler avec les nombres premiers

Calcul 58.1 — Pour se rafraîchir la mémoire.

Rappeler les neuf premiers nombres premiers, dans l'ordre croissant.

a) ....

b) ....

c) ....

d) ....

e) ....

f) ....

g) ....

h) ....

i) ....

Calcul 58.2

Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres suivants.

On attend le résultat sous la forme de puissances de nombres premiers. Par exemple, on a $12 = 2^2 \times 3$.

a) 15 ....

b) 21 ....

c) 20 ....

d) 49 ....

e) 50 ....

f) 24 ....

Calcul 58.3

Même consigne que pour le calcul précédent.

a) 150 ....

b) 100 ....

c) 99 ....

d) 360 ....

e) 80 ....

f) 64 ....

Calcul 58.4 — Pour rendre des fractions irréductibles.

Écrire chacune des fractions suivantes comme un quotient de produits de nombres premiers.

Par exemple, on écrira $\frac{12\times 3}{66} = \frac{2^2\times 3^2}{2\times 3\times 11}$ *; dans cet exercice, on ne demande pas de faire les éventuelles simplifications.*

a) $\dfrac{21 \times 4}{6^2 \times 18}$ ....

b) $\dfrac{2 \times 25}{30 \times 20}$ ....

c) $\dfrac{16 \times 17^2}{22 \times 3 \times 9}$ ....

d) $\dfrac{12 \times 25^2}{60 \times 44}$ ....

● Calcul 58.5 — Fractions irréductibles (I).

Écrire chacune des fractions ci-dessous sous forme irréductible.

On pourra s'inspirer du calcul précédent, écrire les fractions sous forme de quotients de produits de nombres premiers, les simplifier et obtenir des fractions irréductibles.

a) $\dfrac{10}{12}$ .. ☐ b) $\dfrac{18}{24}$ .. ☐ c) $\dfrac{26}{130}$. ☐ d) $\dfrac{100}{250}$. ☐

● Calcul 58.6 — Fractions irréductibles (II).

Même consigne que pour le calcul précédent.

a) $\dfrac{1\,800}{810}$ .... ☐

b) $\dfrac{85}{17}$ .... ☐

c) $\dfrac{3 \times 9 \times 99}{33^2}$ .... ☐

d) $\dfrac{14 \times 49 \times 2\sqrt{81}}{33^2 \times 42}$ .... ☐

● Calcul 58.7 — 97 est-il premier ?

L'objectif de cet exercice est de déterminer si 97 est un nombre premier ou non.

a) Trouver un entier positif n tel que $n^2 < 97 < (n+1)^2$. .... ☐

b) En déduire un entier m tel que $m < \sqrt{97} < m+1$. .... ☐

c) Déterminer l'ensemble des nombres premiers p tels que $1 < p < \sqrt{97}$. .... ☐

Les nombres suivants sont-ils des diviseurs de 97 ? Répondre par « oui » ou « non ».

d) 2 .... ☐ e) 3 .... ☐ f) 5 .... ☐ g) 7 .... ☐

h) On admet la propriété suivante : un entier naturel $n \geqslant 2$ est premier s'il ne possède aucun diviseur premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$.

En utilisant cette propriété, dire si « oui » ou « non » 97 est un nombre premier. .... ☐

Réponses mélangées

$\dfrac{20}{9}$ $\quad 2 \times 3 \times 5^2$ $\quad \dfrac{2^2 \times 3 \times 5^4}{2^4 \times 3 \times 5 \times 11}$ $\quad 7$ $\quad 3^2 \times 11$ $\quad 5$ $\quad \dfrac{3}{4}$ $\quad 19$ $\quad 23$ $\quad 2^3 \times 3^2 \times 5$

$\dfrac{98}{363}$ $\quad \dfrac{2 \times 5^2}{2^3 \times 3 \times 5^2}$ $\quad \dfrac{2}{5}$ $\quad$ non $\quad 2^2 \times 5^2$ $\quad 2^3 \times 3$ $\quad 17$ $\quad 3 \times 7$ $\quad 2$ $\quad$ non

non $\quad 2^2 \times 5$ $\quad$ oui $\quad 9$ $\quad 5$ $\quad 3 \times 5$ $\quad 9$ $\quad 2 \times 5^2$ $\quad 13$ $\quad 3$ $\quad \dfrac{1}{5}$ $\quad$ non

$\dfrac{2^2 \times 3 \times 7}{2^3 \times 3^4}$ $\quad \{2, 3, 5, 7\}$ $\quad \dfrac{2^4 \times 17^2}{2 \times 3^3 \times 11}$ $\quad 2^6$ $\quad 2^4 \times 5$ $\quad 7^2$ $\quad \dfrac{5}{6}$ $\quad \dfrac{27}{11}$ $\quad 11$

► Réponses et corrigés page 277

Réponses et corrigés

Fiche n° 1. Calculs avec le signe « moins »

Réponses

1.1 a) .... $\boxed{-11}$
1.1 b) .... $\boxed{-14}$
1.1 c) .... $\boxed{3{,}5}$
1.1 d) .... $\boxed{8{,}5}$
1.1 e) .... $\boxed{4{,}3}$
1.1 f) .... $\boxed{-2{,}1}$
1.1 g) .... $\boxed{26}$
1.1 h) .... $\boxed{22{,}3}$
1.1 i) .... $\boxed{-118{,}2}$
1.2 a) .... $\boxed{-32}$
1.2 b) .... $\boxed{-35}$
1.2 c) .... $\boxed{54}$
1.2 d) .... $\boxed{-20}$
1.2 e) .... $\boxed{7{,}7}$
1.2 f) .... $\boxed{-7{,}4}$
1.3 a) .... $\boxed{-6}$
1.3 b) .... $\boxed{4}$
1.3 c) .... $\boxed{-1,5}$
1.3 d) .... $\boxed{-4,5}$
1.3 e) .... $\boxed{4}$
1.3 f) .... $\boxed{-13}$
1.4 a) .... $\boxed{-12}$
1.4 b) .... $\boxed{-4}$
1.4 c) .... $\boxed{10}$
1.4 d) .... $\boxed{-4}$
1.4 e) .... $\boxed{2}$
1.4 f) .... $\boxed{6}$
1.5 a) .... $\boxed{6}$
1.5 b) .... $\boxed{9{,}3}$
1.5 c) .... $\boxed{-2{,}4}$
1.5 d) .... $\boxed{-74}$
1.6 a) .... $\boxed{0}$
1.6 b) .... $\boxed{-13}$
1.6 c) .... $\boxed{-58}$
1.6 d) .... $\boxed{-5}$
1.7 a) .... $\boxed{2x}$
1.7 b) .... $\boxed{3y}$
1.7 c) .... $\boxed{-15z}$
1.7 d) .... $\boxed{18t}$
1.8 a) .... $\boxed{2x}$
1.8 b) .... $\boxed{-7y}$
1.8 c) .... $\boxed{-7z}$
1.8 d) .... $\boxed{2t}$
1.9 a) .... $\boxed{2x}$
1.9 b) .... $\boxed{-6y}$
1.9 c) .... $\boxed{3z}$
1.9 d) .... $\boxed{-t}$

Corrigés

1.4 a) On a $\dfrac{48}{-4} = -12$.

1.4 b) On a $\dfrac{-24}{14+(-8)} = \dfrac{-24}{6} = -4$.

1.4 c) On a $\dfrac{-12{,}5 \times 4}{(-12{,}5)+7{,}5} = \dfrac{-50}{-5} = 10$.

1.4 d) On a $\dfrac{53+(-17)}{18 \div (-2)} = \dfrac{36}{-9} = -4$.

1.4 e) On a $\dfrac{(-56) \div 4}{35 \div (-5)} = \dfrac{-14}{-7} = 2$.

1.4 f) On a $-\dfrac{(-4)\times(-12)}{(-72)\div 9} = -\dfrac{48}{-8} = 6$.

1.5 a) On a $(-2)+3-(-5) = 1+5 = 6$.

1.5 b) On a $7{,}3+(-15)-(-17) = -7{,}7+17 = 9{,}3$.

1.5 c) On a $(-23)-(-17)+3{,}6 = -23+17+3{,}6 = -6+3{,}6 = -2{,}4$.

1.5 d) On a $-47-(-38)-65 = -47+38-65 = -9-65 = -74$.

1.6 a) On a $(3-5)-(4-6) = (-2)-(-2) = -2+2 = 0$.

1.6 b) On a $(23-15)+(17-38)=8+(-21)=-13$.

1.6 c) On a $-27+(-12)-(34+(-15))=-39-19=-58$.

1.6 d) On a :

$$-((-43)-(-24))-((-15)-(-39))=-(-43+24)-(-15+39)=-(-19)-24=19-24=-5.$$

1.7 a) On a $(-x)+3x=(-1+3)x=2x$.

1.7 b) On a $12y+(-9y)=(12+(-9))y=3y$.

1.7 c) On a $(-32z)+17z=(-32+17)z=-15z$.

1.7 d) On a $-29t-(-47t)=(29-(-47))t=(-29+47)t=18t$.

1.8 a) On a $\dfrac{-12}{4}x+\dfrac{15}{3}x=-3x+5x=2x$.

1.8 b) On a $-\dfrac{24}{6}y+\left(-\dfrac{27}{9}y\right)=-4y-3y=-7y$.

1.8 c) On a $\left(-\dfrac{36}{4}z\right)+\dfrac{18}{9}z=-9z+2z=-7z$.

1.8 d) On a $\left(-\dfrac{48}{8}t\right)-\left(-\dfrac{72}{9}\right)t=-6t+8t=2t$.

1.9 a) On a $\dfrac{(-3x)+(-5x)}{(-36)\div 9}=\dfrac{-8x}{-4}=2x$.

1.9 b) On a $\dfrac{(-14y)-28y}{(-49)\div(-7)}=\dfrac{-42y}{7}=-6y$.

1.9 c) On a $\dfrac{(-144z)\div 12}{24\div(-6)}=\dfrac{-12z}{-4}=3z$.

1.9 d) On a $\dfrac{(-3)\times(-4t)+(-4t)}{((-28)\div 7)+(48\div(-12))}=\dfrac{12t-4t}{(-4)+(-4)}=\dfrac{8t}{-8}=-t$.

Fiche n° 2. Priorités dans les opérations

Réponses

2.1 a) .... $\boxed{8}$

2.1 b) .... $\boxed{12}$

2.1 c) .... $\boxed{-20}$

2.1 d) .... $\boxed{-3}$

2.1 e) .... $\boxed{-51}$

2.1 f) .... $\boxed{3}$

2.2 a) .... $\boxed{4}$

2.2 b) .... $\boxed{-6}$

2.2 c) .... $\boxed{7}$

2.2 d) .... $\boxed{23}$

2.2 e) .... $\boxed{-17}$

2.2 f) .... $\boxed{17}$

2.3 a) .... $\boxed{59}$

2.3 b) .... $\boxed{-26}$

2.3 c) .... $\boxed{85}$

2.3 d) .... $\boxed{-21}$

2.3 e) .... $\boxed{-6}$

2.3 f) .... $\boxed{6}$

2.3 g) .... $\boxed{-7}$

2.3 h) .... $\boxed{11}$

2.4 a) .... $\boxed{2}$

2.4 b) .... $\boxed{15}$

2.4 c) .... $\boxed{10}$

2.4 d) .... $\boxed{-58}$

2.5 a) .... $\boxed{\dfrac{14}{15}}$

2.5 b) .... $\boxed{\dfrac{59}{6}}$

2.5 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{8}}$

2.5 d) .... $\boxed{-\dfrac{31}{7}}$

2.6 a) .... $\boxed{-6x-8}$

2.6 b) .... $\boxed{9x+6}$

2.7 a) .... $\boxed{100}$

2.7 b) .... $\boxed{96}$

2.7 c) .... $\boxed{-3}$

2.7 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{3}}$

Corrigés

2.1 b) On a $-2-(-5-9)=-2-(-14)=-2+14=12$.

2.1 c) On a $-3-(10-(-7))=-3-17=-20$.

2.1 d) On a $(-2+3)-\big((-5)-(-9)\big)=1-(-5+9)=1-4=-3$.

2.1 e) On a $-\big(5-(-8)\big)-\big(-\big(-2\big)+(-9)\times(-4)\big)=-13-(2+36)=-13-38=-51$.

2.1 f) On a :

$$\begin{aligned}-2-(-3-(-4-(-5-(-6-(-7))))) &= -2-(-3-(-4-(-5-1)))\\ &= -2-(-3-(-4-(-6)))\\ &= -2-(-3-2)=3.\end{aligned}$$

2.2 a) On a $3-(4-5)=3-(-1)=4$.

2.2 b) On a $(3-4)-5=-1-5=-6$.

2.2 c) On a $3\times4-5=12-5=7$.

2.2 d) On a $3-4\times(-5)=3+20=23$.

2.2 e) On a $-(-3)\times(-4)-5=-12-5=-17$.

2.2 f) On a $-3-4\times(-5)=-3+20=17$.

2.3 a) On a $2 + 3 \times 5 + 7 \times 6 = 2 + 15 + 42 = 59$.

2.3 b) On a $-2 - (-6)(-4) = -2 - 24 = -26$.

2.3 c) On a $5 - 5 \times \big(2 \times (-1 + 3) \times (-4)\big) = 5 - 5 \times (2 \times 2 \times (-4)) = 5 - 5 \times (-16) = 85$.

2.3 d) On a $-7 + (-13 + 6) \times (-3 + 5) = -7 - 7 \times 2 = -21$.

2.3 e) On a $15 - 3(-5 - 9) \div (-2) = 15 - 3 \times (-14) \div (-2) = 15 - 3 \times 7 = -6$.

2.3 f) On a $-2 - (7 - 3) \times (2 - 4) = -2 - 4 \times (-2) = -2 + 8 = 6$.

2.3 g) On a $-2 - (6 - (-3)) - \big(-2 \div (2 \div 4)\big) = -2 - 9 - (-2) \times 2 = -11 - 4 = -7$.

2.3 h) On a $-(-2) \div \big(-(-10) \div (-5)\big) + 3 - 3 \div \big(3 \div (-9)\big) = 2 \div (-2) + 3 - 3 \times (-3) = -1 + 3 + 9 = 11$.

2.4 a) On a $-2 + 4^2 - 3 \times (-2)^2 = -2 + 16 - 3 \times 4 = 14 - 12 = 2$.

2.4 b) On a $9 - \big(6 - 3(-2)^2\big) = 9 - (6 - 12) = 9 + 6 = 15$.

2.4 c) On a $5^2 \div (-7 - (-2)) - 3(-5) = 25 \div (-5) + 15 = -5 + 15 = 10$.

2.4 d) On a $1 - (-2)^4 + (-3)^3 - (-4)^2 = 1 - 16 - 27 - 16 = -58$.

2.5 a) On a $\frac{2}{3} + \frac{4}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{3} + \frac{4}{15} = \frac{10}{15} + \frac{4}{15} = \frac{14}{15}$.

2.5 b) On a $-\frac{1}{6} + \frac{5}{6} \div \frac{1}{12} = -\frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times 12 = -\frac{1}{6} + 10 = \frac{-1 + 60}{6} = \frac{59}{6}$.

2.5 c) On a $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) = \frac{2 + 1}{4} \times \frac{2 - 1}{6} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$.

2.5 d) On a $-\frac{3}{7} + \frac{2}{7} \div \left(-\frac{3}{14} + \frac{1}{7}\right) = -\frac{3}{7} + \frac{2}{7} \div \frac{-1}{14} = -\frac{3}{7} + \frac{2}{7} \times (-14) = -\frac{3}{7} - \frac{28}{7} = -\frac{31}{7}$.

2.6 a) On a $-(5 + 3x) - 6x + (1 - x) \times (-3) = -5 - 3x - 6x - 3 + 3x = -8 - 6x$.

2.6 b) On a $-(3x - 5) - (-2) \times (2 + 3x) - 3(1 - 2x) = -3x + 5 + 4 + 6x - 3 + 6x = 6 + 9x$.

2.7 a) On a $\big(-2 \times (-4)\big)^2 + \big(-2 + (-4)\big)^2 = 8^2 + (-6)^2 = 64 + 36 = 100$.

2.7 b) On a $\big(-2 + 2(-4)\big)^2 - \big(-2^3 + 6\big)^2 = (-10)^2 - (-2)^2 = 100 - 4 = 96$.

2.7 c) On a $-(3 \times (-3))^2 \div \big((-1 - 2)^2 \div (1 \div 3)\big) = -81 \div (9 \times 3) = -81 \div 27 = -3$.

2.7 d) On a $\big(-(-3) \div (-3)^2\big)^2 \times \big((-1 - 2)^2 \times (1 \div 3)\big) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 9 \div 3 = \frac{1}{3}$.

Fiche n° 3. Premières fractions

Réponses

3.1 a) .... $\boxed{\dfrac{70}{100}}$

3.1 b) .... $\boxed{\dfrac{75}{100}}$

3.1 c) .... $\boxed{\dfrac{65}{100}}$

3.2 a) .... $\boxed{\dfrac{2}{3}}$

3.2 b) .... $\boxed{-\dfrac{5}{3}}$

3.2 c) .... $\boxed{-\dfrac{3}{2}}$

3.2 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{40}}$

3.2 e) .... $\boxed{\dfrac{4}{15}}$

3.2 f) .... $\boxed{\dfrac{2}{3}}$

3.3 .... $\boxed{\text{d}}$

3.4 .... $\boxed{\text{b}}$

3.5 a) .... $\boxed{\dfrac{6}{5}}$

3.5 b) .... $\boxed{\dfrac{5}{2}}$

3.5 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{4}}$

3.5 d) .... $\boxed{\dfrac{4}{5}}$

Corrigés

3.1 a) On a $\dfrac{7}{10} = \dfrac{7 \times 10}{10 \times 10} = \dfrac{70}{100}$.

3.1 b) On a $\dfrac{3}{4} = \dfrac{3 \times 25}{4 \times 25} = \dfrac{75}{100}$.

3.2 a) On a $\dfrac{12}{18} = \dfrac{6 \times 2}{6 \times 3} = \dfrac{2}{3}$.

3.2 b) On a $-\dfrac{35}{21} = -\dfrac{7 \times 5}{7 \times 3} = -\dfrac{5}{3}$.

3.2 c) On a $\dfrac{42}{-28} = -\dfrac{14 \times 3}{14 \times 2} = -\dfrac{3}{2}$.

3.2 d) On a $\dfrac{18}{720} = \dfrac{18}{72 \times 10} = \dfrac{18 \times 1}{18 \times 4 \times 10} = \dfrac{1}{40}$.

3.2 e) On a $\dfrac{5 \times 24}{18 \times 25} = \dfrac{5 \times 6 \times 4}{6 \times 3 \times 5 \times 5} = \dfrac{4}{15}$.

3.2 f) On a $\dfrac{11 \times 14}{7 \times 33} = \dfrac{11 \times 2 \times 7}{7 \times 3 \times 11} = \dfrac{2}{3}$.

3.3 On a $\dfrac{5}{20} = \dfrac{5 \times 1}{5 \times 4} = \dfrac{1}{4}$.

3.4 On a $\dfrac{20}{45} = \dfrac{5 \times 4}{5 \times 9} = \dfrac{4}{9}$, puis, $\dfrac{-16}{-36} = \dfrac{-4 \times 4}{-4 \times 9} = \dfrac{4}{9}$ et $\dfrac{32}{72} = \dfrac{8 \times 4}{8 \times 9} = \dfrac{4}{9}$ alors que $\dfrac{12}{18} = \dfrac{2 \times 6}{2 \times 9} = \dfrac{6}{9} \neq \dfrac{4}{9}$.

3.5 a) On a $1{,}2 = \dfrac{12}{10} = \dfrac{2 \times 6}{2 \times 5} = \dfrac{6}{5}$.

3.5 b) On a $2{,}5 = \dfrac{25}{10} = \dfrac{5 \times 5}{5 \times 2} = \dfrac{5}{2}$.

3.5 c) On a $0{,}25 = \dfrac{25}{100} = \dfrac{25 \times 1}{25 \times 4} = \dfrac{1}{4}$.

3.5 d) On a $0{,}8 = \dfrac{8}{10} = \dfrac{2 \times 4}{2 \times 5} = \dfrac{4}{5}$.

Fiche n° 4. Sommes et différences de fractions

Réponses

4.1 a) .... $\boxed{\dfrac{7}{3}}$

4.1 b) .... $\boxed{\dfrac{36}{5}}$

4.1 c) .... $\boxed{\dfrac{32}{9}}$

4.2 a) .... $\boxed{\dfrac{24}{7}}$

4.2 b) .... $\boxed{\dfrac{10}{3}}$

4.2 c) .... $\boxed{\dfrac{2}{3}}$

4.3 a) .... $\boxed{\dfrac{3}{7}}$

4.3 b) .... $\boxed{7}$

4.3 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{3}}$

4.4 a) .... $\boxed{\dfrac{13}{6}}$

4.4 b) .... $\boxed{\dfrac{65}{12}}$

4.4 c) ..... $\boxed{\dfrac{251}{1000}}$

4.5 a) .... $\boxed{\dfrac{11}{12}}$

4.5 b) .... $\boxed{\dfrac{2}{3}}$

4.5 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{3}}$

4.5 d) .... $\boxed{\dfrac{8}{9}}$

4.5 e) .... $\boxed{\dfrac{23}{12}}$

4.5 f) .... $\boxed{-\dfrac{4}{9}}$

4.6 a) .. $\boxed{\dfrac{7}{12}x - \dfrac{1}{6}}$

4.6 b) .. $\boxed{\dfrac{7}{12}x - \dfrac{1}{4}}$

Corrigés

4.1 a) On a $2 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{2 \times 3}{3} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{6}{3} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{7}{3}$.

4.2 a) On a $5 - \dfrac{11}{7} = \dfrac{35 - 11}{7} = \dfrac{24}{7}$.

4.2 c) On a $3 + \dfrac{-14}{6} = 3 - \dfrac{7}{3} = \dfrac{9}{3} - \dfrac{7}{3} = \dfrac{2}{3}$.

4.3 a) On a $\dfrac{15}{14} - \dfrac{9}{14} = \dfrac{15 - 9}{14} = \dfrac{6}{14} = \dfrac{3}{7}$.

4.3 b) On a $\dfrac{5}{6} + \dfrac{16}{6} + \dfrac{21}{6} = \dfrac{5 + 16 + 21}{6} = \dfrac{42}{6} = 7$.

4.4 a) On a $\dfrac{7}{4} + \dfrac{5}{12} = \dfrac{7 \times 3}{4 \times 3} + \dfrac{5}{12} = \dfrac{21}{12} + \dfrac{5}{12} = \dfrac{26}{12} = \dfrac{13}{6}$.

4.4 b) On a $\dfrac{62}{12} + \dfrac{12}{48} = \dfrac{62}{12} + \dfrac{3}{12} = \dfrac{65}{12}$.

4.4 c) On a $\dfrac{2}{10} + \dfrac{5}{10^2} + \dfrac{1}{10^3} = \dfrac{2}{10} + \dfrac{5}{100} + \dfrac{1}{1000} = \dfrac{200}{1000} + \dfrac{50}{1000} + \dfrac{1}{1000} = \dfrac{251}{1000}$.

4.5 a) On a $\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{8}{12} + \dfrac{3}{12} = \dfrac{11}{12}$.

4.5 b) On a $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{3}{6} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$.

4.5 e) On a $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{4} = \dfrac{6}{12} + \dfrac{8}{12} + \dfrac{9}{12} = \dfrac{23}{12}$.

4.5 f) On a $\dfrac{5}{9} + \dfrac{-15}{24} - \dfrac{24}{64} = \dfrac{5}{9} - \dfrac{5}{8} - \dfrac{3}{8} = \dfrac{5}{9} - \dfrac{8}{8} = \dfrac{5}{9} - \dfrac{9}{9} = -\dfrac{4}{9}$.

4.6 a) On a $\dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{2} + \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{7}{12}x - \dfrac{1}{6}$.

4.6 b) On a $\dfrac{2x+3}{6} + \dfrac{x-3}{4} = \dfrac{2}{6}x + \dfrac{3}{6} + \dfrac{1}{4}x - \dfrac{3}{4} = \left(\dfrac{2}{6} + \dfrac{1}{4}\right)x + \dfrac{3}{6} - \dfrac{3}{4} = \dfrac{7}{12}x - \dfrac{1}{4}$.

Fiche n° 5. Produits et sommes de fractions

Réponses

5.1 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{4}}$

5.1 b) .... $\boxed{-\dfrac{1}{5}}$

5.1 c) .... $\boxed{\dfrac{3}{4}}$

5.1 d) .... $\boxed{\dfrac{3}{50}}$

5.1 e) .... $\boxed{-\dfrac{12}{5}}$

5.1 f) .... $\boxed{\dfrac{251}{25}}$

5.2 a) .... $\boxed{\dfrac{7}{6}}$

5.2 b) .... $\boxed{-\dfrac{1}{7}}$

5.2 c) .... $\boxed{\dfrac{5}{2}}$

5.2 d) .... $\boxed{-1}$

5.3 a) .... $\boxed{\text{a et c}}$

5.3 b) .... $\boxed{\text{e}}$

5.4 a) .... $\boxed{\dfrac{5}{6}}$

5.4 b) .... $\boxed{\dfrac{10}{99}}$

5.4 c) .... $\boxed{-\dfrac{25}{1\,568}}$

5.4 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{64}}$

5.5 a) .... $\boxed{-\dfrac{29}{15}}$

5.5 b) .... $\boxed{-\dfrac{44}{105}}$

5.5 c) .... $\boxed{1}$

5.5 d) .... $\boxed{\dfrac{17}{2}}$

5.5 e) .... $\boxed{-\dfrac{39}{14}}$

5.5 f) .... $\boxed{-\dfrac{11}{4}}$

5.5 g) .... $\boxed{\dfrac{1}{6}}$

5.5 h) .... $\boxed{-\dfrac{1}{29}}$

5.5 i) .... $\boxed{\dfrac{1}{3}}$

5.6 a) .... $\boxed{\dfrac{127}{42}}$

5.6 b) .... $\boxed{-\dfrac{5}{12}}$

5.6 c) .... $\boxed{0}$

5.6 d) .... $\boxed{-\dfrac{169}{84}}$

5.7 a) .... $\boxed{-\dfrac{5}{24}}$

5.7 b) .... $\boxed{\dfrac{71}{60}}$

5.8 a) .... $\boxed{2}$

5.8 b) .... $\boxed{\dfrac{34}{7}}$

5.8 c) .... $\boxed{\dfrac{135}{88}}$

Corrigés

5.1 a) On a $0{,}25 = \dfrac{25}{100} = \dfrac{1}{4}$.

5.1 b) On a $-0{,}2 = -\dfrac{2}{10} = -\dfrac{1}{5}$.

5.1 c) On a $0{,}75 = \dfrac{75}{100} = \dfrac{3}{4}$.

5.1 d) On a $0{,}060 = 0{,}06 = \dfrac{6}{100} = \dfrac{3}{50}$.

5.1 e) On a $-2{,}4 = -\dfrac{24}{10} = -\dfrac{12}{5}$.

5.1 f) On a $10{,}04 = \dfrac{1\,004}{100} = \dfrac{251 \times 4}{25 \times 4} = \dfrac{251}{25}$.

5.2 a) On a $\dfrac{42}{36} = \dfrac{7 \times 6}{6 \times 6} = \dfrac{7}{6}$.

5.2 b) On a $\dfrac{4-7}{3 \times 7} = \dfrac{-3}{3 \times 7} = -\dfrac{1}{7}$.

5.2 c) On a $\dfrac{2\,100}{840} = \dfrac{210}{84} = \dfrac{10 \times 21}{4 \times 21} = \dfrac{5}{2}$.

5.2 d) On a $\dfrac{42 \times (-10)^2}{(-70) \times 60} = -\dfrac{42}{7 \times 6} = -1$.

5.3 a) On a $\dfrac{2^2 \times 3 \times 5}{7 \times 3^2 \times 5^2} \times \dfrac{5 \times 7 \times 5}{2 \times 3 \times 3 \times 11} = \dfrac{2^2 \times 3 \times 5^3 \times 7}{2 \times 3^4 \times 5^2 \times 7 \times 11} = \dfrac{2 \times 5}{3^3 \times 11} = \dfrac{10}{297}$.

Seules les réponses (a) et (c) conviennent.

5.3 b) On a $\dfrac{2 \times 3 - 12}{2 \times 3^2 \times 5^2} \times \dfrac{5 \times 3 \times 5}{6 - 3 \times 11} = \dfrac{-6}{2 \times 3^2 \times 5^2} \times \dfrac{5 \times 3 \times 5}{-27} = \dfrac{1}{27} = \dfrac{1}{3^3}$.

Seule la réponse (e) convient.

5.4 a) On a $\dfrac{2}{9} \times \dfrac{15}{2^2} = \dfrac{2}{3^2} \times \dfrac{3 \times 5}{2^2} = \dfrac{5}{2 \times 3} = \dfrac{5}{6}$.

5.4 c) On a $\dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{-2}{4}\right)^3 \times \left(\dfrac{5}{7}\right)^2 \times \dfrac{6}{8} = -\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2^3} \times \dfrac{5^2}{7^2} \times \dfrac{2 \times 3}{2^3} = -\dfrac{5^2}{2^5 \times 7^2} = -\dfrac{25}{1\,568}$.

5.5 b) On a $-\dfrac{11}{15} + \dfrac{11}{35} = -\dfrac{11 \times 7}{105} + \dfrac{11 \times 3}{105} = \dfrac{-77 + 33}{105} = -\dfrac{44}{105}$.

5.5 c) On a $\dfrac{7}{30} + \dfrac{115}{150} = \dfrac{7}{30} + \dfrac{23}{30} = \dfrac{30}{30} = 1$. Ou encore (plus facilement ?) $\dfrac{7}{30} + \dfrac{115}{150} = \dfrac{35}{150} + \dfrac{115}{150} = \dfrac{150}{150} = 1$.

5.5 d) On a $\dfrac{42}{36} - \dfrac{22}{-3} = \dfrac{7}{6} + \dfrac{22}{3} = \dfrac{7 + 44}{6} = \dfrac{51}{6} = \dfrac{17}{2}$.

5.5 e) On a $\dfrac{-15}{6} - \dfrac{2}{7} = \dfrac{-5}{2} - \dfrac{2}{7} = \dfrac{-5 \times 7 - 2 \times 2}{2 \times 7} = -\dfrac{39}{14}$.

5.5 f) On a $\dfrac{35}{21} - \dfrac{53}{12} = \dfrac{5}{3} - \dfrac{53}{12} = \dfrac{20}{12} - \dfrac{53}{12} = -\dfrac{33}{12} = -\dfrac{11}{4}$.

5.5 h) On a $\dfrac{-90}{87} + 1 = \dfrac{-90 + 87}{87} = -\dfrac{3}{87} = -\dfrac{1}{29}$.

5.5 i) On a $\dfrac{116}{87} - 1 = \dfrac{116 - 87}{87} = \dfrac{29}{87} = \dfrac{1}{3}$.

5.6 a) On a $\dfrac{2}{3} + \dfrac{5}{2} - \dfrac{1}{7} = \dfrac{2 \times 2 \times 7}{3 \times 2 \times 7} + \dfrac{5 \times 3 \times 7}{2 \times 3 \times 7} - \dfrac{2 \times 3}{7 \times 2 \times 3} = \dfrac{28 + 105 - 6}{42} = \dfrac{127}{42}$.

5.6 b) On a $\dfrac{2}{-15} - \dfrac{7}{12} + \dfrac{3}{10} = -\dfrac{2}{3 \times 5} - \dfrac{7}{2^2 \times 3} + \dfrac{3}{2 \times 5} = \dfrac{-2 \times 2^2 - 7 \times 5 + 3 \times 2 \times 3}{2^2 \times 3 \times 5} = -\dfrac{25}{60} = -\dfrac{5}{12}$.

5.6 c) On a $\dfrac{-20}{75} + \dfrac{3}{-45} + \dfrac{4}{12} = \dfrac{-4}{15} + \dfrac{1}{-15} + \dfrac{1}{3} = -\dfrac{5}{15} + \dfrac{1}{3} = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} = 0$.

5.6 d) On a $\dfrac{-30}{21} + \dfrac{14}{-42} + \dfrac{-18}{12} - \dfrac{-45}{36} = \dfrac{-10}{7} - \dfrac{1}{3} - \dfrac{6}{4} + \dfrac{5}{4} = \dfrac{-10}{7} - \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{-(10 \times 12 + 28 + 21)}{84} = -\dfrac{169}{84}$.

5.7 a) On a $2\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{4} \times \dfrac{2}{5}\right)\left(\dfrac{5}{4} - \dfrac{1}{4} \times \dfrac{5}{2}\right) - 1 = \left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{10}\right)\left(\dfrac{5}{2} - \dfrac{5}{4}\right) - 1 = \dfrac{19}{30} \times \dfrac{5}{4} - 1 = \dfrac{19}{24} - 1 = -\dfrac{5}{24}$.

5.7 b) On a $-\left(-\dfrac{5}{6} + \dfrac{3}{4} + 1\right) + \left(3 - \dfrac{1}{5}\right) \times \left(\dfrac{2}{7} - \dfrac{1}{4}\right) + 2 = -\dfrac{11}{12} + \dfrac{1}{10} + 2 = \dfrac{71}{60}$.

5.8 a) L'inverse de $\dfrac{1}{2}$ étant 2, le nombre recherché est $2 \times \dfrac{12}{45} \times \dfrac{45}{12} = 2$.

5.8 b) L'inverse de $\dfrac{1}{48}$ étant 48, le nombre recherché est $48 \times \left(-\dfrac{2}{3} + 1\right) \times \left(\dfrac{3}{7} - \dfrac{1}{8}\right) = \dfrac{34}{7}$.

5.8 c) L'inverse de $\dfrac{1}{5} - (-3)^2 = -\dfrac{44}{5}$ étant $-\dfrac{5}{44}$, le nombre recherché est $-\dfrac{5}{44} \times \left(-\dfrac{3}{2}\right)^3 \times 5 \times \dfrac{12}{15} = \dfrac{135}{88}$.

Fiche nº 6. Fractions de fractions

Réponses

6.1 a) $\boxed{\dfrac{1}{6}}$

6.1 b) $\boxed{6}$

6.1 c) $\boxed{-\dfrac{1}{12}}$

6.1 d) $\boxed{\dfrac{3}{2}}$

6.1 e) $\boxed{\dfrac{3}{20}}$

6.1 f) $\boxed{\dfrac{15}{4}}$

6.2 a) $\boxed{\dfrac{7}{12}}$

6.2 b) $\boxed{-9}$

6.2 c) $\boxed{\dfrac{1}{15}}$

6.2 d) $\boxed{-16}$

6.2 e) $\boxed{-360}$

6.2 f) $\boxed{\dfrac{35}{6}}$

6.3 a) $\boxed{\dfrac{1}{12}}$

6.3 b) $\boxed{\dfrac{1}{9}}$

6.3 c) $\boxed{\dfrac{18}{5}}$

6.3 d) $\boxed{-\dfrac{1}{2}}$

6.3 e) $\boxed{\dfrac{46}{45}}$

6.3 f) $\boxed{\dfrac{15}{4}}$

6.4 a) $\boxed{\dfrac{2}{3}}$

6.4 b) $\boxed{\dfrac{3}{5}}$

6.4 c) $\boxed{3}$

6.4 d) $\boxed{-1}$

6.5 a) $\boxed{\dfrac{27}{8}}$

6.5 b) $\boxed{\dfrac{1}{28}}$

6.5 c) $\boxed{\dfrac{30}{41}}$

6.5 d) $\boxed{\dfrac{3}{35}}$

6.5 e) $\boxed{9}$

6.5 f) $\boxed{\dfrac{96}{55}}$

6.6 a) $\boxed{\dfrac{x^2}{x+1}}$

6.6 b) $\boxed{\dfrac{x}{x^2-1}}$

6.6 c) $\boxed{\dfrac{x^2}{x^2+2}}$

6.7 a) $\boxed{\dfrac{91}{135}}$

6.7 b) $\boxed{\dfrac{455}{3}}$

6.7 c) $\boxed{\dfrac{-11}{11\,664}}$

6.7 d) $\boxed{-25\,344}$

6.8 a) $\boxed{\dfrac{x}{x^2+3}}$

6.8 b) $\boxed{\dfrac{x^2}{(1+x)^2}}$

6.8 c) $\boxed{\dfrac{x-1}{x+1}}$

6.8 d) $\boxed{\dfrac{x+y}{1}}$

6.8 e) $\boxed{\dfrac{2xy-x^2}{y-x}}$

6.8 f) $\boxed{\dfrac{3}{4x-2}}$

Corrigés

6.1 a) On a $\dfrac{1}{2} \div 3 = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$.

6.1 b) On a $3 \div \dfrac{1}{2} = 3 \times 2 = 6$.

6.1 c) On a $\dfrac{\frac{2}{-3}}{8} = \dfrac{2}{-3} \times \dfrac{1}{8} = -\dfrac{1}{12}$.

6.1 e) On a $\dfrac{\frac{-3}{4}}{-5} = \dfrac{-3}{4} \times \dfrac{1}{-5} = \dfrac{3}{20}$.

6.1 f) On a $\dfrac{-3}{\frac{4}{-5}} = -3 \times \dfrac{-5}{4} = \dfrac{15}{4}$.

6.2 a) On a $\left(2 + \dfrac{1}{3}\right) \div 4 = \left(2 + \dfrac{1}{3}\right) \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{2}{4} + \dfrac{1}{12} = \dfrac{7}{12}$.

6.2 b) On a $3 \div \left(-1 + \dfrac{2}{3}\right) = 3 \div \left(\dfrac{-1}{3}\right) = 3 \times (-3) = -9$.

6.2 c) On a $\dfrac{\frac{2}{3}-\frac{4}{5}}{-2}=\dfrac{\frac{-2}{15}}{-2}=\dfrac{-2}{15}\times\dfrac{1}{-2}=\dfrac{1}{15}.$

6.2 d) On a $\dfrac{-4}{1-\frac{3}{4}}=\dfrac{-4}{\frac{1}{4}}=-4\times 4=-16.$

6.2 e) On a $\dfrac{12}{\frac{1}{6}-\frac{1}{5}}=\dfrac{12}{\frac{-1}{30}}=12\times(-30)=-360.$

6.2 f) On a $\dfrac{13}{\frac{3}{7}-\frac{-9}{5}}=\dfrac{13}{\frac{3}{7}+\frac{9}{5}}=\dfrac{13}{\frac{78}{35}}=\dfrac{13\times 35}{13\times 6}=\dfrac{35}{6}.$

6.3 a) On a $\dfrac{3\times\frac{2}{9}}{8}=\dfrac{\frac{2}{3}}{8}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{12}.$

6.3 b) On a $\dfrac{5\times\frac{1}{3}}{15}=\dfrac{\frac{5}{3}}{15}=\dfrac{5}{3}\times\dfrac{1}{3\times 5}=\dfrac{1}{9}.$

6.3 c) On a $\dfrac{27}{6\times\frac{5}{4}}=\dfrac{3\times 9}{3\times\frac{5}{2}}=9\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{18}{5}.$

6.3 d) On a $\dfrac{\frac{1}{3}-\frac{2}{5}}{\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}}=\dfrac{\frac{-1}{15}}{\frac{2}{15}}=\dfrac{-1}{2}.$

6.3 e) On a $\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{5}{4}}{\frac{3}{2}\div\frac{4}{5}}=\dfrac{\frac{23}{12}}{\frac{3}{2}\times\frac{5}{4}}=\dfrac{\frac{23}{12}}{\frac{15}{8}}=\dfrac{23}{4\times 3}\times\dfrac{4\times 2}{15}=\dfrac{46}{45}.$

6.3 f) On a $\dfrac{\frac{3}{5}\times\frac{20}{6}}{\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}}=\dfrac{\frac{3}{5}\times\frac{5\times 4}{3\times 2}}{\frac{8}{15}}=\dfrac{2}{\frac{8}{15}}=2\times\dfrac{15}{2\times 4}=\dfrac{15}{4}.$

6.4 a) On a $\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\frac{3}{2}}=\dfrac{2}{3}.$

6.4 b) On a $\dfrac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{1+\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{\frac{5}{3}}=\dfrac{3}{5}.$

6.4 c) On a $\dfrac{2}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{2}{\frac{2}{3}}=2\times\dfrac{3}{2}=3.$

6.4 d) On a $\dfrac{2}{1-\frac{2}{1-\frac{1}{3}}}=\dfrac{2}{1-3}=-1.$

6.5 a) On a $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{9}}=\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{9}}=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{9}{2}=\dfrac{27}{8}.$

6.5 b) On a $\dfrac{\frac{3}{5}-\frac{1}{2}}{3-\frac{1}{5}}=\dfrac{\frac{1}{10}}{\frac{14}{5}}=\dfrac{1}{5\times 2}\times\dfrac{5}{14}=\dfrac{1}{28}.$

6.5 c) On a $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}+\frac{7}{8}}=\dfrac{\frac{5}{4}}{\frac{41}{24}}=\dfrac{5}{4}\times\dfrac{6\times 4}{41}=\dfrac{30}{41}.$

6.5 d) On a $\dfrac{\frac{8}{7}-\frac{6}{5}}{\frac{4}{3}-2}=\dfrac{\frac{-2}{35}}{\frac{-2}{3}}=\dfrac{-2}{35}\times\dfrac{3}{-2}=\dfrac{3}{35}.$

6.5 e) On a $\dfrac{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\left(\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}\right)^2=3^2=9.$

6.5 f) On a $\dfrac{\left(\frac{11}{5}-1\right)\left(\frac{11}{5}+1\right)}{\frac{11}{5}}=\dfrac{\frac{6}{5}\times\frac{16}{5}}{\frac{11}{5}}=\dfrac{6}{5}\times\dfrac{16}{5}\times\dfrac{5}{11}=\dfrac{6\times 16}{5\times 11}=\dfrac{96}{55}.$

6.6 a) On a $\dfrac{x}{1+\frac{1}{x}} = \dfrac{x}{\frac{x+1}{x}} = x \times \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{x^2}{x+1}$.

6.6 b) On a $\dfrac{1}{x-\frac{1}{x}} = \dfrac{1}{\frac{x^2-1}{x}} = \dfrac{x}{x^2-1}$.

6.6 c) On a $\dfrac{x}{x+\frac{2}{x}} = \dfrac{x}{\frac{x^2+2}{x}} = x \times \dfrac{x}{x^2+2} = \dfrac{x^2}{x^2+2}$.

6.7 a) On a $\dfrac{\frac{21\times3\times5\times26}{30\times27}}{15} = \dfrac{21\times3\times5\times26}{30\times27\times15} = \dfrac{3\times7\times3\times5\times2\times13}{2\times15\times3\times9\times3\times5} = \dfrac{7\times13}{15\times9} = \dfrac{91}{135}$.

6.7 b) On a $\dfrac{21\times3\times5\times26}{\frac{30\times27}{15}} = \dfrac{21\times3\times5\times26\times15}{30\times27} = \dfrac{3\times7\times3\times5\times2\times13\times3\times5}{3\times5\times2\times3\times3\times3} = \dfrac{7\times13\times5}{3} = \dfrac{455}{3}$.

6.7 c) On a $\dfrac{\frac{2\times56\times12\times55}{-27\times80\times7}}{36\times12^2} = \dfrac{2\times56\times12\times55}{-27\times80\times7\times36\times12\times12} = \dfrac{11}{-27\times36\times12} = -\dfrac{11}{11\,664}$.

6.7 d) On a $\dfrac{2\times56\times12\times55}{\frac{-27\times80\times7}{36\times12^2}} = \dfrac{2\times7\times8\times3\times4\times5\times11\times9\times4\times12\times12}{-9\times3\times8\times5\times2\times7} = -4\times11\times4\times12\times12 = -25\,344$.

6.8 a) On a $\dfrac{1}{x+\frac{3}{x}} = \dfrac{1}{\frac{x^2+3}{x}} = \dfrac{x}{x^2+3}$.

6.8 b) On a $\dfrac{\frac{x}{1+\frac{1}{x}}}{1+x} = \dfrac{x}{\frac{x+1}{x}} \times \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x^2}{1+x} \times \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x^2}{(1+x)^2}$.

6.8 c) On a $\dfrac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \dfrac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x+1}{x}} = \dfrac{x-1}{x+1}$.

6.8 d) On a $\dfrac{\frac{1}{x-y}}{\frac{1}{x^2-y^2}} = \dfrac{x^2-y^2}{x-y} = \dfrac{(x-y)(x+y)}{x-y} = x+y$.

6.8 e) On a $x + \dfrac{1}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}} = x + \dfrac{1}{\frac{y-x}{xy}} = x + \dfrac{xy}{y-x} = \dfrac{2xy-x^2}{y-x}$.

6.8 f) On a $\dfrac{1}{1+\frac{x+1}{2-x}} = \dfrac{1}{\frac{2-x+x+1}{2-x}} = \dfrac{2-x}{3}$, donc $\dfrac{1}{x-\frac{1}{1+\frac{x+1}{2-x}}} = \dfrac{1}{x-\frac{2-x}{3}} = \dfrac{1}{\frac{4x-2}{3}} = \dfrac{3}{4x-2}$.

Fiche n° 7. Fractions d'expressions

Réponses

7.1 a) .... $\boxed{\dfrac{n+1}{n}}$

7.1 b) .... $\boxed{\dfrac{n}{n+1}}$

7.1 c) .... $\boxed{-\dfrac{1}{n(n+1)}}$

7.1 d) .... $\boxed{\dfrac{n+2}{(n+1)^2}}$

7.1 e) .... $\boxed{\dfrac{n-1}{n^2}}$

7.1 f) .... $\boxed{\dfrac{1}{n}}$

7.2 a) .... $\boxed{\dfrac{x+3}{x-2}}$

7.2 b) .... $\boxed{\dfrac{2x+3}{x-1}}$

7.2 c) .... $\boxed{\dfrac{3x+70}{x+25}}$

7.2 d) .... $\boxed{\dfrac{6x+7}{2x-1}}$

7.2 e) .... $\boxed{\dfrac{-27x+1}{9x+2}}$

7.2 f) .... $\boxed{\dfrac{75x}{5x+7}}$

7.3 a) .... $\boxed{\dfrac{11}{(x-9)(x+2)}}$

7.3 b) .... $\boxed{\dfrac{11(x-1)}{(x-9)(x+2)}}$

7.3 c) .... $\boxed{\dfrac{x+3}{2(x+2)}}$

7.3 d) .... $\boxed{\dfrac{3x^2+9x+17}{(x-9)(x+2)}}$

7.3 e) .... $\boxed{\dfrac{-x^2+21x-9}{(x-9)(x+2)}}$

7.3 f) .... $\boxed{\dfrac{13x-40}{21(x-9)(x+2)}}$

7.4 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{x(x+2)}}$

7.4 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}}$

7.4 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{x(x+1)}}$

7.5 a) .... $\boxed{2n+1}$

7.5 b) .... $\boxed{n(n-1)}$

7.5 c) .... $\boxed{\dfrac{2n+1}{n(n-1)}}$

7.5 d) .... $\boxed{\dfrac{n+1}{n-1}}$

7.5 e) .... $\boxed{\dfrac{n(n+1)}{2n+1}}$

7.5 f) .... $\boxed{\dfrac{(n+1)(2n+1)}{n-1}}$

7.6 a) .... $\boxed{\dfrac{2}{n(2n+1)}}$

7.6 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{n^2+n+1}}$

7.6 c) .... $\boxed{\dfrac{n^2-n+1}{2n+1}}$

7.6 d) .... $\boxed{\dfrac{2(n+1)}{n(n-1)}}$

Corrigés

7.1 b) On a $1-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{n+1}{n+1}-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{n+1-1}{n+1}=\dfrac{n}{n+1}$.

7.1 c) On a $\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n}=\dfrac{n}{n(n+1)}-\dfrac{n+1}{n(n+1)}=\dfrac{n-(n+1)}{n(n+1)}=-\dfrac{1}{n(n+1)}$.

7.1 d) On a $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{(n+1)^2}=\dfrac{n+1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}=\dfrac{n+1+1}{(n+1)^2}=\dfrac{n+2}{(n+1)^2}$.

7.1 f) On a $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n(n+1)}+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n+1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}$.

7.2 a) On a $1+\dfrac{5}{x-2}=\dfrac{x-2}{x-2}+\dfrac{5}{x-2}=\dfrac{x-2+5}{x-2}=\dfrac{x+3}{x-2}$.

7.2 b) On a $2+\dfrac{5}{x-1}=\dfrac{2(x-1)}{x-1}+\dfrac{5}{x-1}=\dfrac{2x-2}{x-1}+\dfrac{5}{x-1}=\dfrac{2x-2+5}{x-1}=\dfrac{2x+3}{x-1}$.

7.2 c) On a $3 - \dfrac{5}{x+25} = \dfrac{3(x+25)-5}{x+25} = \dfrac{3x+75-5}{x+25} = \dfrac{3x+70}{x+25}$.

7.2 e) On a $\dfrac{7}{9x+2} - 3 = \dfrac{7-3(9x+2)}{9x+2} = \dfrac{7-27x-6}{9x+2} = \dfrac{-27x+1}{9x+2}$.

7.2 f) On a $15 - \dfrac{105}{5x+7} = \dfrac{15(5x+7)-105}{5x+7} = \dfrac{75x+105-105}{5x+7} = \dfrac{75x}{5x+7}$.

7.3 a) On a $\dfrac{1}{x-9} - \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{x+2}{(x-9)(x+2)} - \dfrac{x-9}{(x-9)(x+2)} = \dfrac{x+2-(x-9)}{(x-9)(x+2)} = \dfrac{11}{(x-9)(x+2)}$.

7.3 b) On a $\dfrac{3}{x+2} + \dfrac{8}{x-9} = \dfrac{3(x-9)+8(x+2)}{(x-9)(x+2)} = \dfrac{3x-27+8x+16}{(x-9)(x+2)} = \dfrac{11x-11}{(x-9)(x+2)} = \dfrac{11(x-1)}{(x-9)(x+2)}$.

7.3 c) On a $\dfrac{3x+1}{x+2} - \dfrac{5x-1}{2x+4} = \dfrac{2(3x+1)-(5x-1)}{2(x+2)} = \dfrac{x+3}{2(x+2)}$.

7.3 d) On a $\dfrac{3x+4}{x-9} - \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{(3x+4)(x+2)-(x-9)}{(x-9)(x+2)} = \dfrac{3x^2+6x+4x+8-x+9}{(x-9)(x+2)} = \dfrac{3x^2+9x+17}{(x-9)(x+2)}$.

7.3 e) On a
$$\frac{x}{x-9} - \frac{2x-1}{x+2} = \frac{x(x+2)-(2x-1)(x-9)}{(x-9)(x+2)} = \frac{x^2+2x-\left(2x^2-18x-x+9\right)}{(x-9)(x+2)}$$
$$= \frac{x^2+2x-2x^2+18x+x-9}{(x-9)(x+2)} = \frac{-x^2+21x-9}{(x-9)(x+2)}.$$

7.3 f) On a $\dfrac{1}{3(x-9)} + \dfrac{2}{7(x+2)} = \dfrac{7(x+2)+2\times 3(x-9)}{3(x-9)\times 7(x+2)} = \dfrac{7x+14+6x-54}{21(x-9)(x+2)} = \dfrac{13x-40}{21(x-9)(x+2)}$.

7.4 a) On a
$$\frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{x(x+2)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{x+2}{x(x+1)(x+2)} - \frac{x+1}{x(x+1)(x+2)} + \frac{x}{x(x+1)(x+2)}$$
$$= \frac{x+2-(x+1)+x}{x(x+1)(x+2)} = \frac{x+2-x-1+x}{x(x+1)(x+2)}$$
$$= \frac{x+1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x(x+2)}.$$

7.4 b) On a
$$\frac{2}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{x(x+1)} - \frac{2}{x(x+2)} = \frac{2x+(x+2)-2(x+1)}{x(x+1)(x+2)} = \frac{2x+x+2-2x-2}{x(x+1)(x+2)}$$
$$= \frac{x}{x(x+1)(x+2)} = \frac{1}{(x+1)(x+2)}.$$

7.5 d) On a $\dfrac{A^2}{C} = \dfrac{\left[n(n+1)\right]^2}{(n-1)n^2(n+1)} = \dfrac{n^2(n+1)^2}{(n-1)n^2(n+1)} = \dfrac{n+1}{n-1}$.

7.5 f) On a $\dfrac{AB}{C} = \dfrac{n(n+1)\times n(n+1)(2n+1)}{(n-1)n^2(n+1)} = \dfrac{n^2(n+1)^2(2n+1)}{(n-1)n^2(n+1)} = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{n-1}$.

7.6 a) On a
$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{2n+1}{n(n+1)(2n+1)} + \frac{1}{n(n+1)(2n+1)}$$
$$= \frac{2n+2}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{2(n+1)}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{2}{n(2n+1)}.$$

7.6 b) On a
$$\frac{A}{B+C} = \frac{n(n+1)}{n(n+1)(2n+1)+(n-1)n^2(n+1)} = \frac{n(n+1)}{n(n+1)\left[(2n+1)+(n-1)n\right]}$$
$$= \frac{1}{2n+1+n^2-n} = \frac{1}{n^2+n+1}.$$

7.6 d) On a $\dfrac{A+B}{C} = \dfrac{n(n+1)+n(n+1)(2n+1)}{(n-1)n^2(n+1)} = \dfrac{n(n+1)\left[1+(2n+1)\right]}{(n-1)n^2(n+1)} = \dfrac{2n+2}{(n-1)n} = \dfrac{2(n+1)}{n(n-1)}$.

Fiche n° 8. Comparaison de fractions

Réponses

8.1 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{2} > \dfrac{3}{8}}$

8.1 b) .... $\boxed{\dfrac{2}{7} < \dfrac{1}{3}}$

8.1 c) .... $\boxed{\dfrac{22}{7} > \dfrac{2}{8}}$

8.1 d) .... $\boxed{\dfrac{15}{7} < \dfrac{33}{15}}$

8.2 a) .... $\boxed{\dfrac{4}{17} > \dfrac{3}{13}}$

8.2 b) .... $\boxed{\dfrac{5}{6} > \dfrac{11}{14}}$

8.2 c) .... $\boxed{\dfrac{29}{15} > \dfrac{23}{12}}$

8.2 d) .... $\boxed{\dfrac{2450}{500} < 4{,}91}$

8.3 a) .... $\boxed{\dfrac{28}{103} > \dfrac{7}{32}}$

8.3 b) .... $\boxed{\dfrac{81}{121} < \dfrac{9}{13}}$

8.3 c) .... $\boxed{0{,}81 < \dfrac{9}{11}}$

8.4 a) .... $\boxed{\dfrac{15}{35} > \dfrac{6}{21}}$

8.4 b) .... $\boxed{\dfrac{210}{49} < \dfrac{52}{12}}$

8.4 c) .... $\boxed{\dfrac{2}{75} < \dfrac{3}{65}}$

8.4 d) .... $\boxed{\dfrac{120}{189} > \dfrac{5}{8}}$

8.5 a) .. $\boxed{\alpha = \dfrac{85}{100} \text{ (par exemple)}}$

8.5 b) .. $\boxed{\alpha = \dfrac{675}{100} \text{ (par exemple)}}$

8.5 c) .. $\boxed{\alpha = \dfrac{241}{220} \text{ (par exemple)}}$

8.5 d) ... $\boxed{\alpha = \dfrac{97}{28} \text{ (par exemple)}}$

8.6 a) .... $\boxed{\dfrac{2}{9} < \dfrac{4}{15} < \dfrac{5}{18}}$

8.6 b) .... $\boxed{\dfrac{9}{5} < 1{,}85 < \dfrac{450}{240}}$

8.6 c) ..... $\boxed{\dfrac{2}{5} < \dfrac{5}{12} < \dfrac{11}{24} < \dfrac{14}{30}}$

8.6 d) .... $\boxed{\dfrac{16}{7} < 2{,}3 < \dfrac{7}{3}}$

8.7 a) .... $\boxed{\dfrac{86}{25} < \dfrac{7}{2} < 3{,}53 < \dfrac{36}{10}}$

8.7 b) ..... $\boxed{\dfrac{17}{20} < \dfrac{7}{8} < 0{,}9 < \dfrac{11}{12}}$

8.7 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} < \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{7} < \dfrac{1}{2}}$

8.8 a) .... $\boxed{\dfrac{85}{63}}$

8.8 b) .... $\boxed{\dfrac{14}{23}}$

8.9 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{1+\frac{2}{a}} < \dfrac{1}{1+\frac{1}{a+1}}}$

8.9 b) ... $\boxed{\dfrac{3}{3+\frac{2}{4a+1}} > \dfrac{2}{2+\frac{3}{6a+1}}}$

Corrigés

8.1 a) On a $\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{8} = \dfrac{1\times 4}{2\times 4} - \dfrac{3}{8} = \dfrac{1}{8} > 0$. Ainsi, $\dfrac{1}{2} > \dfrac{3}{8}$.

8.1 b) On a $\dfrac{2}{7} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2\times 3}{7\times 3} - \dfrac{1\times 7}{3\times 7} = \dfrac{-1}{21} < 0$. Ainsi, $\dfrac{2}{7} < \dfrac{1}{3}$.

8.1 c) On a $\dfrac{22}{7} - \dfrac{25}{8} = \dfrac{22\times 8}{7\times 8} - \dfrac{25\times 7}{8\times 7} = \dfrac{176-175}{56} = \dfrac{1}{56} > 0$. Ainsi, $\dfrac{22}{7} > \dfrac{25}{8}$.

8.2 b) On a $\dfrac{5}{6} - \dfrac{11}{14} = \dfrac{5\times 7}{6\times 7} - \dfrac{11\times 3}{14\times 3} = \dfrac{35-33}{42} = \dfrac{2}{42} > 0$. Ainsi, $\dfrac{5}{6} > \dfrac{11}{14}$.

8.2 c) On a $\dfrac{29}{15} - \dfrac{23}{12} = \dfrac{4\times 29}{60} - \dfrac{23\times 5}{60} = \dfrac{116-115}{60} = \dfrac{1}{60} > 0$. Ainsi, $\dfrac{29}{15} > \dfrac{23}{12}$.

8.2 d) On a $\dfrac{2450}{500} - 4{,}91 = \dfrac{245}{50} - \dfrac{491}{100} = \dfrac{490}{100} - \dfrac{491}{100} = \dfrac{-1}{100} < 0$. Ainsi, $\dfrac{2450}{500} < 4{,}91$.

8.3 a) On a $\dfrac{7}{32} = \dfrac{7\times 4}{32\times 4} = \dfrac{28}{128} < \dfrac{28}{103}$.

8.3 c) On a $0{,}81 = \dfrac{81}{100}$ et donc $\dfrac{9}{11} = \dfrac{9 \times 9}{11 \times 9} = \dfrac{81}{99} > \dfrac{81}{100}$. Ainsi, $0{,}81 < \dfrac{9}{11}$.

8.4 a) On travaille sur la fraction $\dfrac{15}{35}$ qui est réductible. On a $\dfrac{15}{35} = \dfrac{5 \times 3}{5 \times 7} = \dfrac{3}{7} = \dfrac{3 \times 3}{7 \times 3} = \dfrac{9}{21}$. Ainsi, $\dfrac{15}{35} > \dfrac{6}{21}$.

8.4 b) On a $\dfrac{210}{49} = \dfrac{30}{7}$ et $\dfrac{52}{12} = \dfrac{13}{3}$. Dès lors, $\dfrac{210}{49} - \dfrac{52}{12} = \dfrac{30}{7} - \dfrac{13}{3} = \dfrac{90}{21} - \dfrac{91}{21} = \dfrac{-1}{21} < 0$. Ainsi, $\dfrac{210}{49} < \dfrac{52}{12}$.

8.4 d) On utilise le fait que 120 est un multiple de 5. On a $\dfrac{5}{8} = \dfrac{5 \times 24}{8 \times 24} = \dfrac{120}{192} < \dfrac{120}{189}$. Ainsi, $\dfrac{120}{189} > \dfrac{5}{8}$.

8.5 c) On met au même dénominateur les extrémités de l'inégalité. On a $\dfrac{12}{11} = \dfrac{120}{110}$ et $\dfrac{11}{10} = \dfrac{121}{110}$.

On met alors chaque fraction sur un dénominateur plus grand pour trouver un nombre entier au numérateur.

On a $\dfrac{12}{11} = \dfrac{120}{110} = \dfrac{240}{220}$ et $\dfrac{11}{10} = \dfrac{121}{110} = \dfrac{242}{220}$. Le nombre $\alpha = \dfrac{241}{220}$ convient. (On aurait pu en prendre d'autres !)

8.6 a) Le nombre 90 est un multiple commun de chacun des dénominateurs car $90 = 9 \times 10 = 15 \times 6 = 18 \times 5$.

On a $\dfrac{2}{9} = \dfrac{20}{90}$, $\dfrac{4}{15} = \dfrac{24}{90}$ et $\dfrac{5}{18} = \dfrac{25}{90}$. Ces égalités permettent de conclure en comparant les numérateurs.

8.6 b) On utilise le fait que $\dfrac{450}{240} = \dfrac{45}{24} = \dfrac{15}{8}$ et que $1{,}85 = \dfrac{185}{100}$. En mettant au même dénominateur :

$$\frac{450}{240} = \frac{15}{8} = \frac{15 \times 25}{8 \times 25} = \frac{375}{200} \quad \text{et} \quad 1{,}85 = \frac{185}{100} = \frac{370}{200}.$$

8.7 c) On a $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{7} = \dfrac{10}{3 \times 7}$ et $\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} = \dfrac{9}{4 \times 5}$. Ainsi, $3 \times 7 \times 4 \times 5$ est un multiple commun des dénominateurs.

On a $\dfrac{1}{2} = \dfrac{210}{420}$, $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{7} = \dfrac{10}{21} = \dfrac{200}{420}$ et $\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} = \dfrac{9}{20} = \dfrac{189}{420}$. La conclusion s'ensuit en comparant les numérateurs.

8.8 a) On calcule chacun des max séparément puis on conclut. On a $\dfrac{11}{7} - \dfrac{12}{9} = \dfrac{99}{7 \times 9} - \dfrac{84}{9 \times 7} = \dfrac{15}{63} > 0$.

On a donc $\max\left(\dfrac{11}{7}, \dfrac{12}{9}\right) = \dfrac{11}{7}$. Ensuite, on a $\dfrac{2}{9} = \dfrac{4}{18} > \dfrac{4}{19}$ et donc $\max\left(\dfrac{4}{19}, \dfrac{2}{9}\right) = \dfrac{2}{9}$. Finalement, on a

$$\max\left(\frac{11}{7}, \frac{12}{9}\right) - \max\left(\frac{4}{19}, \frac{2}{9}\right) = \frac{11}{7} - \frac{2}{9} = \frac{99}{7 \times 9} - \frac{14}{9 \times 7} = \frac{85}{63}.$$

8.8 b) On a $\dfrac{1}{2 - \frac{2}{7}} = \dfrac{1}{\frac{14}{7} - \frac{2}{7}} = \dfrac{1}{\frac{12}{7}} = \dfrac{7}{12} = \dfrac{14}{24} < \dfrac{14}{23}$. Ainsi, $\max\left(\dfrac{1}{2 - \frac{2}{7}}, \dfrac{14}{23}\right) = \dfrac{14}{23}$.

8.9 a) On écrit chacune des expressions de la question sous la forme d'une seule fraction.

On a $\dfrac{1}{1 + \frac{2}{a}} = \dfrac{1}{\frac{a}{a} + \frac{2}{a}} = \dfrac{1}{\frac{a+2}{a}} = \dfrac{a}{a+2}$. De même, $\dfrac{1}{1 + \frac{1}{a+1}} = \dfrac{1}{\frac{a+1+1}{a+1}} = \dfrac{a+1}{a+2}$.

Ainsi, $\dfrac{1}{1 + \frac{2}{a}} - \dfrac{1}{1 + \frac{1}{a+1}} = \dfrac{a}{a+1} - \dfrac{a+1}{a+2} = \dfrac{-1}{a+2} < 0$ (car $a > 0$ et donc $a + 2 > 0$). Finalement, $\dfrac{1}{1 + \frac{2}{a}} < \dfrac{1}{1 + \frac{1}{a+1}}$.

8.9 b) On a $\dfrac{3}{3 + \frac{2}{4a+1}} = \dfrac{3}{\frac{3(4a+1)}{4a+1} + \frac{2}{4a+1}} = \dfrac{3}{\frac{12a+5}{4a+1}} = \dfrac{3(4a+1)}{12a+5} = \dfrac{12a+3}{12a+5}$. De même, on a $\dfrac{2}{2 + \frac{3}{6a+1}} = \dfrac{12a+2}{12a+5}$.

Ainsi, $\dfrac{3}{3 + \frac{2}{4a+1}} - \dfrac{2}{2 + \frac{3}{6a+1}} = \dfrac{1}{12a+5} > 0$ (car $a > 0$, donc $12a > 0$ et $12a + 5 > 0$) et la conclusion s'ensuit.

Fiche n° 9. Bilan sur les fractions

Réponses

9.1 a) $\boxed{2}$

9.1 b) $\boxed{6}$

9.1 c) $\boxed{5}$

9.1 d) $\boxed{4}$

9.1 e) $\boxed{0}$

9.1 f) $\boxed{0}$

9.2 a) $\boxed{\dfrac{1}{4}}$

9.2 b) $\boxed{\dfrac{-2}{3}}$

9.2 c) $\boxed{\dfrac{-5}{2}}$

9.2 d) $\boxed{\dfrac{6}{5}}$

9.2 e) $\boxed{\dfrac{-3}{7}}$

9.2 f) $\boxed{\dfrac{3}{4}}$

9.3 a) $\boxed{\dfrac{5}{6}}$

9.3 b) $\boxed{\dfrac{11}{12}}$

9.3 c) $\boxed{\dfrac{11}{2}}$

9.3 d) $\boxed{\dfrac{11}{10}}$

9.3 e) $\boxed{\dfrac{31}{12}}$

9.3 f) $\boxed{\dfrac{11}{24}}$

9.4 a) $\boxed{\dfrac{1}{6}}$

9.4 b) $\boxed{\dfrac{-5}{12}}$

9.4 c) $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

9.4 d) $\boxed{\dfrac{-11}{10}}$

9.4 e) $\boxed{\dfrac{-11}{12}}$

9.4 f) $\boxed{\dfrac{11}{24}}$

9.5 a) $\boxed{\dfrac{14}{15}}$

9.5 b) $\boxed{\dfrac{-15}{14}}$

9.5 c) $\boxed{\dfrac{35}{24}}$

9.5 d) $\boxed{\dfrac{-20}{7}}$

9.6 a) $\boxed{\dfrac{6}{35}}$

9.6 b) $\boxed{\dfrac{-40}{21}}$

9.6 c) $\boxed{\dfrac{10}{21}}$

9.6 d) $\boxed{\dfrac{-9}{35}}$

9.6 e) $\boxed{\dfrac{5}{6}}$

9.6 f) $\boxed{\dfrac{4}{21}}$

9.6 g) $\boxed{\dfrac{12}{7}}$

9.6 h) $\boxed{\dfrac{55}{56}}$

9.7 a) $\boxed{\dfrac{9}{4}}$

9.7 b) $\boxed{\dfrac{91}{36}}$

9.7 c) $\boxed{\dfrac{-1}{12}}$

9.7 d) $\boxed{\dfrac{29}{70}}$

9.7 e) $\boxed{\dfrac{-29}{66}}$

9.7 f) $\boxed{\dfrac{-7}{18}}$

9.8 a) $\boxed{\dfrac{13}{28}}$

9.8 b) $\boxed{\dfrac{43}{21}}$

9.8 c) $\boxed{\dfrac{6}{5}}$

9.8 d) $\boxed{\dfrac{-17}{7}}$

9.9 a) $\boxed{\dfrac{17x+70}{70}}$

9.9 b) $\boxed{\dfrac{5x^2-38x+48}{30x}}$

9.9 c) $\boxed{\dfrac{3x^2-6x-77}{60(x-1)}}$

9.9 d) $\boxed{\dfrac{18x^2-15x+192}{-40x^2+164x-64}}$

9.10 a) $\boxed{\dfrac{-20x^2-19x-4}{(5x+2)(2x+1)}}$

9.10 b) $\boxed{\dfrac{-3x^3+14x+9}{4-x^2}}$

9.10 c) $\boxed{\dfrac{8x^3-42x^2+31x-6}{(x-1)(25x^2-4)}}$

9.10 d) $\boxed{\dfrac{2+x}{3+2x}}$

9.11 a) $\boxed{\dfrac{-45}{14}}$

9.11 b) .... $\boxed{\dfrac{-17}{9}}$

9.11 c) .... $\boxed{\dfrac{56}{47}}$

9.11 d) .... $\boxed{\dfrac{-17}{3}}$

9.12 a) .... $\boxed{\{-\sqrt{8}, \sqrt{8}\}}$

9.12 b) .... $\boxed{\{-2, 0, 2\}}$

9.13 a) .... $\boxed{(1, -1)}$

9.13 b) .... $\boxed{\left(\dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{4}\right)}$

9.14 .... $\boxed{\left(\dfrac{999}{100}, \dfrac{1100}{111}\right)}$

Corrigés

9.1 a) On a $\dfrac{6}{3} = 6 \div 3 = 2$.

9.2 e) On a $-\dfrac{60}{140} = -\dfrac{6 \times 10}{14 \times 10} = -\dfrac{3 \times 2 \times 10}{7 \times 2 \times 10} = -\dfrac{3}{7}$.

9.2 f) On a $-\dfrac{42}{-56} = \dfrac{42}{56} = \dfrac{6 \times 7}{8 \times 7} = \dfrac{3 \times 2 \times 7}{4 \times 2 \times 7} = \dfrac{3}{4}$.

9.3 a) On a $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{3}{6} + \dfrac{2}{6} = \dfrac{3+2}{6} = \dfrac{5}{6}$.

9.3 b) On a $\dfrac{1}{4} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{3}{12} + \dfrac{8}{12} = \dfrac{3+8}{12} = \dfrac{11}{12}$.

9.3 c) On a $\dfrac{5}{2} + 3 = \dfrac{5}{2} + \dfrac{6}{2} = \dfrac{11}{2}$.

9.3 f) On a $\dfrac{9}{40} + \dfrac{7}{30} = \dfrac{27}{120} + \dfrac{28}{120} = \dfrac{55}{120} = \dfrac{11}{24}$.

9.4 a) On a $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{3}{6} - \dfrac{2}{6} = \dfrac{3-2}{6} = \dfrac{1}{6}$.

9.4 b) On a $\dfrac{1}{4} + \dfrac{-2}{3} = \dfrac{3}{12} + \dfrac{-8}{12} = \dfrac{3-8}{12} = \dfrac{-5}{12}$.

9.4 c) On a $\dfrac{-5}{2} + 3 = \dfrac{-5}{2} + \dfrac{6}{2} = \dfrac{1}{2}$.

9.4 d) On a $-\dfrac{4}{5} + \dfrac{-3}{10} = \dfrac{-8}{10} + \dfrac{-3}{10} = \dfrac{-11}{10}$.

9.4 e) On a $\dfrac{7}{-4} + \dfrac{5}{6} = \dfrac{-21}{12} + \dfrac{10}{12} = \dfrac{-11}{12}$.

9.5 a) On a $\dfrac{2}{5} \times \dfrac{7}{3} = \dfrac{2 \times 7}{5 \times 3} = \dfrac{14}{15}$.

9.5 d) On a $-\dfrac{6}{-7} \times \dfrac{-10}{3} = -\dfrac{6}{7} \times \dfrac{10}{3} = -\dfrac{2}{7} \times 10 = -\dfrac{20}{7}$.

9.6 a) On a $\dfrac{2}{5} \div \dfrac{7}{3} = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{3}{7} = \dfrac{6}{35}$.

9.6 c) On a $\dfrac{-5}{6} \div \dfrac{7}{-4} = \dfrac{-5}{6} \times \dfrac{-4}{7} = \dfrac{5}{3} \times \dfrac{2}{7} = \dfrac{10}{21}$.

9.6 e) On a $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{5}{4} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{5}{2} = \dfrac{5}{6}$.

9.6 f) On a $\dfrac{\frac{4}{7}}{3} = \dfrac{4}{7} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{21}$.

9.6 g) On a $\dfrac{4}{\frac{7}{3}} = 4 \times \dfrac{3}{7} = \dfrac{12}{7}$.

9.6 h) On a $\dfrac{\frac{-11}{8}}{\frac{-7}{5}} = \dfrac{-11}{8} \times \dfrac{5}{-7} = \dfrac{11}{8} \times \dfrac{5}{7} = \dfrac{55}{56}$.

9.7 a) On a $\dfrac{5}{3} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{7}{6} = \dfrac{5}{3} + \dfrac{7}{12} = \dfrac{20}{12} + \dfrac{7}{12} = \dfrac{27}{12} = \dfrac{9}{4}$.

9.7 b) On a $\left(\dfrac{5}{3} + \dfrac{1}{2}\right) \times \dfrac{7}{6} = \left(\dfrac{10}{6} + \dfrac{3}{6}\right) \times \dfrac{7}{6} = \dfrac{13}{6} \times \dfrac{7}{6} = \dfrac{91}{36}$.

9.7 c) On a $\dfrac{3}{4} - \dfrac{5}{2} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{3}{4} - \dfrac{5}{6} = \dfrac{9}{12} - \dfrac{10}{12} = \dfrac{-1}{12}$.

9.7 d) On a $\dfrac{2}{7} + \dfrac{3}{5} \div \dfrac{14}{3} = \dfrac{2}{7} + \dfrac{3}{5} \times \dfrac{3}{14} = \dfrac{2}{7} + \dfrac{9}{70} = \dfrac{20}{70} + \dfrac{9}{70} = \dfrac{29}{70}$.

9.7 e) On a $\dfrac{4}{9} \times \dfrac{-3}{11} - \dfrac{7}{4} \times \dfrac{-2}{-11} = \dfrac{-4}{3 \times 11} - \dfrac{7}{2 \times 11} = \dfrac{-8}{6 \times 11} - \dfrac{21}{6 \times 11} = \dfrac{-29}{66}$.

9.7 f) On a $\left(1 - \dfrac{1}{3}\right) \times \left(\dfrac{3}{-4} + \dfrac{1}{6}\right) = \left(\dfrac{3}{3} - \dfrac{1}{3}\right) \times \left(\dfrac{-9}{12} + \dfrac{2}{12}\right) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{-7}{12} = -\dfrac{1}{3} \times \dfrac{7}{6} = -\dfrac{7}{18}$.

9.8 a) On a $\dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{7} \times \left(\dfrac{-3}{10} - \dfrac{1}{5}\right) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{7} \times \left(\dfrac{-3}{10} - \dfrac{2}{10}\right) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{7} \times \dfrac{-1}{2} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{14} = \dfrac{7}{28} + \dfrac{6}{28} = \dfrac{13}{28}$.

9.8 b) On a $\dfrac{\frac{3}{4} + \frac{7}{5}}{\frac{3}{4} \times \frac{7}{5}} = \dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{4} \times \frac{7}{5}} + \dfrac{\frac{7}{5}}{\frac{3}{4} \times \frac{7}{5}} = \dfrac{1}{\frac{7}{5}} + \dfrac{1}{\frac{3}{4}} = \dfrac{5}{7} + \dfrac{4}{3} = \dfrac{15}{21} + \dfrac{28}{21} = \dfrac{43}{21}$.

9.8 c) On a $\dfrac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{2}{3} - \frac{1}{4}} = \dfrac{\frac{2}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{8}{12} - \frac{3}{12}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{12}} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{12}{5} = \dfrac{6}{5}$.

9.8 d) On a $\dfrac{-1 + \frac{2}{9} \times \frac{-3}{5}}{\left(-1 + \frac{2}{9}\right) \times \frac{-3}{5}} = \dfrac{-1 - \frac{2}{15}}{\frac{-7}{9} \times \frac{-3}{5}} = \dfrac{-\frac{17}{15}}{\frac{21}{45}} = -\dfrac{17}{15} \times \dfrac{45}{21} = -\dfrac{17 \times 3 \times 15}{15 \times 3 \times 7} = -\dfrac{17}{7}$.

9.9 a) On a $\dfrac{3x}{10} - \dfrac{2}{5} \times \dfrac{x}{7} + 1 = \dfrac{3x}{10} - \dfrac{2x}{35} + 1 = \dfrac{21x - 4x + 70}{70} = \dfrac{17x + 70}{70}$.

9.9 b) On a $\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{x}\right) \times \left(\dfrac{1}{2}x + \dfrac{-4}{5}\right) = \dfrac{x - 6}{3x} \times \dfrac{5x - 8}{10} = \dfrac{(x-6)(5x-8)}{30x} = \dfrac{5x^2 - 38x + 48}{30x}$.

9.9 c) On a $\dfrac{-4}{3x - 3} + \dfrac{1}{6} \times \left(\dfrac{2x+1}{-5} + \dfrac{7x-1}{10}\right) = \dfrac{-4}{3(x-1)} + \dfrac{1}{6} \times \dfrac{3x - 3}{10} = \dfrac{-80 + (3x-3)(x-1)}{60(x-1)} = \dfrac{3x^2 - 6x - 77}{60(x-1)}$.

9.9 d) On a $\dfrac{2 - \frac{3x}{8} \times \left(\frac{1}{6} + \frac{-2x+1}{4}\right)}{1 + \frac{2x-5}{3} \times \left(\frac{x-2}{8} + \frac{-3x+5}{4}\right)} = \dfrac{2 - \frac{3x}{8} \times \frac{5-6x}{12}}{1 + \frac{2x-5}{3} \times \frac{-5x+8}{8}} = \dfrac{\frac{18x^2-15x+192}{96}}{\frac{-10x^2+41x-16}{24}} = \dfrac{18x^2 - 15x + 192}{-40x^2 + 164x - 64}$.

9.10 a) On a $\dfrac{2}{5x+2} - \dfrac{4x+3}{2x+1} = \dfrac{2(2x+1) - (4x+3)(5x+2)}{(2x+1)(5x+2)} = \dfrac{4x + 2 - (20x^2 + 23x + 6)}{(5x+2)(2x+1)} = \dfrac{-20x^2 - 19x - 4}{(5x+2)(2x+1)}$.

9.10 b) On a $\dfrac{-2x+1}{4 - x^2} + 3x + \dfrac{4}{2 - x} = \dfrac{-2x + 1 + 12x - 3x^3 + 4(2+x)}{4 - x^2} = \dfrac{-3x^3 + 14x + 9}{4 - x^2}$.

9.10 c) On a $\dfrac{2x-1}{5x+2} \times \left(\dfrac{-3}{x-1} + \dfrac{4x}{5x-2}\right) = \dfrac{2x-1}{5x+2} \times \dfrac{4x^2 - 4x - 15x + 6}{(x-1)(5x-2)} = \dfrac{8x^3 - 42x^2 + 31x - 6}{(5x+2)(x-1)(5x-2)}$.

9.10 d) On a $\dfrac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{\frac{2+x}{1+x}}} = \dfrac{1}{1+\frac{1+x}{2+x}} = \dfrac{1}{\frac{3+2x}{2+x}} = \dfrac{2+x}{3+2x}$.

9.11 a) Soit x un réel différent de 0. On a les équivalences suivantes :

$$\frac{2}{3}-\frac{3}{x}=\frac{8}{5} \iff \frac{3}{x}=\frac{2}{3}-\frac{8}{5} \iff \frac{3}{x}=-\frac{14}{15} \iff \frac{x}{3}=-\frac{15}{14} \iff x=-\frac{45}{14}.$$

9.11 b) Soit x un réel différent de 3. On a les équivalences suivantes :

$$\frac{2x+5}{x-3}=\frac{-1}{4} \iff 4(2x+5)=-(x-3) \iff 8x+20=-x+3 \iff 9x=-17 \iff x=-\frac{17}{9}.$$

9.11 c) On note (E) l'équation. Soit x un réel différent de 0. On a les équivalences suivantes :

$$(E) \iff \frac{4}{3}\times\frac{x-1}{x}=\frac{-1}{2}+\frac{5}{7} \iff \frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{x}\right)=\frac{3}{14} \iff 1-\frac{1}{x}=\frac{9}{56} \iff \frac{1}{x}=\frac{47}{56} \iff x=\frac{56}{47}.$$

9.11 d) Soit x un réel différent de -4 et de $-\dfrac{11}{2}$. On a les équivalences suivantes :

$$\frac{1}{2+\frac{3}{4+x}}=5 \iff 10+\frac{15}{4+x}=1 \iff \frac{15}{4+x}=-9 \iff 4+x=-\frac{15}{9} \iff x=-\frac{51}{9}=-\frac{17}{3}.$$

9.12 a) On note (E) l'équation. Soit x un réel différent de 0 et de $-\dfrac{1}{3}$. On a les équivalences suivantes :

$$(E) \iff \frac{6x+24}{24}=6+\frac{2}{x}-5 \iff \frac{x}{4}+1=1+\frac{2}{x} \iff \frac{x}{4}=\frac{2}{x} \iff x^2=8 \iff \left(x=\sqrt{8} \text{ ou } x=-\sqrt{8}\right).$$

9.12 b) On note (E) l'équation. Soit x un réel différent de 1 et de $-\dfrac{3}{2}$. On a :

$$\begin{aligned}\frac{3}{x-1}+\frac{21}{8x+12}-\frac{10x-5}{4} &= \frac{24x+36+21x-21-(10x-5)(2x^2+x-3)}{4(2x+3)(x-1)} = \frac{-20x^3+80x}{4(2x+3)(x-1)}\\ &= \frac{-20(x^3-4x)}{4(2x+3)(x-1)}.\end{aligned}$$

Donc, on a les équivalences : $(E) \iff x^3-4x=0 \iff x(x^2-4)=0 \iff \left(x=0 \text{ ou } x^2=4\right) \iff x\in\{0,2,-2\}$.

9.13 a) Pour tout réel x différent de -1 et 0, on a $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+1}=\dfrac{(a+b)x+a}{x(x+1)}$. La propriété est donc vérifiée si on a $\begin{cases}a=1\\ a+b=0\end{cases}$, c'est-à-dire si $a=1$ et $b=-1$.

9.13 b) Pour tout réel x différent de -1 et 1, on a $\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x+1}=\dfrac{(2a+2b)x+2a-2b}{2(x-1)(x+1)}$. La propriété est donc vérifiée si on a $\begin{cases}2a+2b=0\\ 2a-2b=1.\end{cases}$ Or, on a les équivalences $\begin{cases}2a+2b=0\\ 2a-2b=1\end{cases} \iff \begin{cases}b=-a\\ 4a=1\end{cases} \iff \begin{cases}b=-a\\ a=\dfrac{1}{4}.\end{cases}$

On peut donc choisir $(a,b)=\left(\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{4}\right)$.

9.14 Soit (a,b) un couple de nombres rationnels tels que $0<a<10$, $0<b<10$ et $ab=99$. On a alors $b=\dfrac{99}{a}>\dfrac{99}{10}$ et, de même, on a $a>\dfrac{99}{10}$.

On choisit par exemple $a=\dfrac{999}{100}$ et $b=\dfrac{99}{a}=\dfrac{1100}{111}$. On a alors $0<a<\dfrac{1000}{100}=10$, $0<b<\dfrac{1110}{111}=10$ et $ab=99$.

Plus généralement, les solutions sont les couples (a,b) où a est un rationnel de l'intervalle $\left]\dfrac{99}{10},10\right[$ et $b=\dfrac{99}{a}$.

Fiche nº 10. Généralités sur les puissances

Réponses

10.1 a) .... $\boxed{2}$

10.1 b) .... $\boxed{0}$

10.1 c) .... $\boxed{79}$

10.1 d) .... $\boxed{33}$

10.1 e) .... $\boxed{63}$

10.1 f) .... $\boxed{121}$

10.1 g) .... $\boxed{24}$

10.1 h) .... $\boxed{-41}$

10.2 a) .... $\boxed{a^{10} \times b^5}$

10.2 b) .... $\boxed{a^7 \times b^5}$

10.2 c) .... $\boxed{a^{18} \times b^3}$

10.2 d) .... $\boxed{a^8 \times b^{22}}$

10.2 e) .... $\boxed{a^{75} \times b^{30}}$

10.2 f) .... $\boxed{a^{98} \times b^{168}}$

10.3 a) .... $\boxed{2^6 \times 3^2}$

10.3 b) .... $\boxed{2^{26} \times 5^{26}}$

10.3 c) .... $\boxed{2^6 \times 3^{12} \times 5^6}$

10.3 d) .... $\boxed{2^{300} \times 5^{100} \times 7^{100}}$

10.3 e) .... $\boxed{2^{15} \times 3^5 \times 5^3 \times 7^8}$

10.3 f) .... $\boxed{2^{88} \times 3^2 \times 5 \times 11^{44}}$

10.4 a) .... $\boxed{3 \times 2^{13}}$

10.4 b) .... $\boxed{13 \times 3^{24}}$

10.4 c) .... $\boxed{-19 \times 5^{26}}$

10.4 d) .... $\boxed{2^{63} \times 3 \times 5^{40}}$

10.5 a) .... $\boxed{2^{40} \times 3^{14} \times 5}$

10.5 b) .... $\boxed{4^9 \times 15 \text{ ou } 2^{18} \times 15}$

10.6 a) .... $\boxed{\text{positif}}$

10.6 b) .... $\boxed{\text{négatif}}$

10.6 c) .... $\boxed{\text{positif}}$

10.7 a) .... $\boxed{2^{-2}}$

10.7 b) .... $\boxed{3^{-3}}$

10.7 c) .... $\boxed{\left(-2^{-1}\right)^{-1}}$

10.7 d) .... $\boxed{\left(\frac{1}{3^{-2}}\right)^{-1}}$

10.7 e) .... $\boxed{-\left(6^{-2}\right)}$

10.7 f) .... $\boxed{\text{il y a égalité}}$

10.8 a) .... $\boxed{c_0 = 2{,}99 \times 10^8}$

10.8 b) .... $\boxed{\Delta\mu = 9{,}192 \times 10^9}$

10.8 c) .... $\boxed{h = 6{,}626 \times 10^{-34}}$

10.8 d) .... $\boxed{N_A = 6{,}02 \times 10^{23}}$

10.9 .... $\boxed{\text{(b)}}$

Corrigés

10.1 a) On a $-7 + 3^2 = -7 + 9 = 2$.

10.1 c) On a $-7^2 + 2 \times 4^3 = -49 + 2 \times 64 = -49 + 128 = 128 - 49 = 79$.

10.1 d) On a $5^2 - \left(-2\right)^3 = 25 - \left(-8\right) = 25 + 8 = 33$.

10.1 f) On a $1 - 5 - \left(-5\right)^3 = -4 - \left(-125\right) = -4 + 125 = 125 - 4 = 121$.

10.1 g) Grâce à une factorisation, on a $2^3 - 2^4 + 2^5 = 2^3 - 2^3 \times 2 + 2^3 \times 2^2 = 2^3 \times \left(1 - 2 + 2^2\right) = 8 \times 3 = 24$.

10.2 c) On a $\left(a \times a^2 \times a^3 + a^6 \times \left(b - 1\right)\right)^3 = \left(a^6 + a^6 \times \left(b - 1\right)\right)^3 = \left(a^6 \times b\right)^3 = a^{18} \times b^3$.

10.2 e) On a $\left(\left(a^4 \times b\right)^3 \times b^3 \times a^3\right)^5 = \left(a^{12} \times b^3 \times b^3 \times a^3\right)^5 = \left(a^{15} \times b^6\right)^5 = a^{75} \times b^{30}$.

10.2 f) On a $\left(\left(\left(a \times b^2\right)^3\right)^4 \times a^2\right)^7 = \left(\left(a^3 \times b^6\right)^4 \times a^2\right)^7 = \left(a^{12} \times b^{24} \times a^2\right)^7 = \left(a^{14} \times b^{24}\right)^7 = a^{98} \times b^{168}$.

10.3 a) On a $24 = 2^3 \times 3$, donc $24^2 = \left(2^3 \times 3\right)^2 = 2^{3\times 2} \times 3^2 = 2^6 \times 3^2$.

10.3 e) On a $20^3 \times 56^3 \times 21^5 = \left(2^2 \times 5\right)^3 \times \left(2^3 \times 7\right)^3 \times \left(3 \times 7\right)^5 = \left(2^6 \times 5^3\right) \times \left(2^9 \times 7^3\right) \times \left(3^5 \times 7^5\right) = 2^{15} \times 3^5 \times 5^3 \times 7^8$.

10.3 f) On a $44^{44} + 44^{45} = 44^{44} + 44^{44} \times 44 = 44^{44}\left(1+44\right) = 44^{44} \times 45 = \left(2^2 \times 11\right)^{44} \times 3^2 \times 5 = 2^{88} \times 3^2 \times 5 \times 11^{44}$.

10.4 a) On a $2^{13} + 2^{14} = 2^{13} + 2^{13} \times 2 = 3 \times 2^{13}$.

10.4 b) On a :

$$\begin{aligned} 3^{25} + 27^8 + 9^{13} &= 3^{25} + \left(3^3\right)^8 + \left(3^2\right)^{13} = 3^{25} + 3^{24} + 3^{26} \\ &= 3^{24} \times 3 + 3^{24} + 3^{24} \times 3^2 = 3^{24} \times \left(3 + 1 + 3^2\right) = 13 \times 3^{24}. \end{aligned}$$

10.4 d) On a :

$$\begin{aligned} 20^{30} \times 5^{12} - 2^{40} \times 50^{20} &= \left(2^2 \times 5\right)^{30} \times 5^{12} - 2^{40} \times \left(2 \times 5^2\right)^{20} = 2^{60} \times 5^{42} - 2^{60} \times 5^{40} \\ &= 2^{60} \times 5^{40}\left(5^2 - 1\right) = 2^{63} \times 3 \times 5^{40}. \end{aligned}$$

10.5 a) On a :

$$\begin{aligned} 2^{17} \times 12^{14} - 32^8 \times 3^{17} &= 2^{17} \times \left(2^2 \times 3\right)^{14} - \left(2^5\right)^8 \times 3^{17} = 2^{45} \times 3^{14} - 2^{40} \times 3^{17} \\ &= 2^{40} \times 3^{14}\left(2^5 - 3^3\right) = 2^{40} \times 3^{14} \times 5. \end{aligned}$$

10.6 a) On a $-\left(-83{,}4\right)^{-1} = -\dfrac{1}{-83{,}4} = \dfrac{1}{83{,}4} > 0$.

10.6 b) On a $\left(-2\right)^{-1} + 0{,}2 = \dfrac{1}{\left(-2\right)^1} + 0{,}2 = -0{,}5 + 0{,}2 = -0{,}3 < 0$.

10.6 c) On a $-\left(-4\right)^{-1} + 0{,}4 = -\dfrac{1}{\left(-4\right)^1} + 0{,}4 = \dfrac{1}{4} + 0{,}4 = 0{,}25 + 0{,}4 = 0{,}65 > 0$.

10.7 c) On a $\left(-2^{-1}\right)^{-1} = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-1} = -2$. De plus, $-2 < -1$.

10.7 d) On a $\left(\dfrac{1}{3^{-2}}\right)^{-1} = 9^{-1} = \dfrac{1}{9}$. De plus, $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$.

10.7 e) On a $\left(-6\right)^{-2} = \dfrac{1}{\left(-6\right)^2} = \dfrac{1}{36}$. On a $-\left(6^{-2}\right) = -\left(\dfrac{1}{6^2}\right) = -\dfrac{1}{36}$.

10.7 f) On a $\left(-2\right)^{-3} = \dfrac{1}{\left(-2\right)^3} = \dfrac{1}{-8} = -\dfrac{1}{8}$. On a $-\left(2^{-1}\right)^3 = -\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = -\dfrac{1}{8}$.

10.9 On a

$$\begin{aligned} 0{,}1^3 \times \left(200\right)^4 \times \left(-0{,}01\right)^2 &= \left(10^{-1}\right)^3 \times \left(2 \times 10^2\right)^4 \times \left(-10^{-2}\right)^2 \\ &= 10^{-3} \times 16 \times 10^8 \times 10^{-4} \\ &= 16 \times 10 \\ &= 1{,}6 \times 10^2. \end{aligned}$$

Fiche n° 11. Puissances et fractions

Réponses

11.1 a)	$\boxed{2^2 \times 3 \times 5}$
11.1 b)	$\boxed{2^3 \times 3^4 \times 5^4}$
11.1 c)	$\boxed{2^3 \times 3^2 \times 5^2}$
11.1 d)	$\boxed{2 \times 3^2 \times 5^5}$
11.2 a)	$\boxed{2 \times 3^{-2} \times 5}$
11.2 b)	$\boxed{2^{-2} \times 3^{-1} \times 5^{-2}}$
11.2 c)	$\boxed{2^4 \times 3^3 \times 5^{-2}}$
11.2 d)	$\boxed{2^{-1} \times 3^{-2} \times 5^2}$
11.3 a)	$\boxed{2^{-1} \times 3^{-2} \times 5^{-1}}$
11.3 b)	$\boxed{2^4 \times 3^{-10} \times 5^{-6}}$
11.4 a)	$\boxed{2^2 \times 3^{-7} \times 5^{12}}$
11.4 b)	$\boxed{2^{-14} \times 3^{-5} \times 5^2}$
11.5 a)	$\boxed{\dfrac{72^n}{12}}$
11.5 b)	$\boxed{x^{2n-3}}$
11.5 c)	$\boxed{\dfrac{x^{6n-1}}{4}}$
11.6 a)	$\boxed{2^4 \times 3^{12} \times 5^{-2}}$
11.6 b)	$\boxed{-2^{-9} \times 3^{-7} \times 5^8}$
11.6 c)	$\boxed{-2^{-10} \times 3^2 \times 5^{-1}}$
11.7 a)	$\boxed{\dfrac{5}{162}}$
11.7 b)	$\boxed{10}$
11.7 c)	$\boxed{-\dfrac{15}{2}}$
11.8 a)	$\boxed{2^{-2}}$
11.8 b)	$\boxed{5^{-1}}$
11.8 c)	$\boxed{2^{-2} \times 3}$
11.8 d)	$\boxed{2^{-2} \times 3 \times 5^{-3}}$
11.8 e)	$\boxed{2^2 \times 3 \times 5^{-1}}$
11.8 f)	$\boxed{2^{-2} \times 5^2}$

Corrigés

11.1 a) On rappelle les formules suivantes que l'on utilisera constamment dans cette fiche : pour deux entiers relatifs n et p, ainsi qu'un réel non nul x, on a $x^n \times x^p = x^{n+p}$ et $\dfrac{x^n}{x^p} = x^{n-p}$. On obtient alors :

$$\frac{2^4 \times 3^5 \times 5^3}{5^2 \times 3^4 \times 2^2} = 2^{4-2} \times 3^{5-4} \times 5^{3-2} = 2^2 \times 3^1 \times 5^1 = 2^2 \times 3 \times 5.$$

....

11.1 d) Voici deux autres formules que l'on rappelle et utilisera également dans cette fiche : pour deux réels non nuls x et y, ainsi qu'un entier relatif n, on a $x^n \times y^n = (x \times y)^n$ et $\dfrac{x^n}{y^n} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^n$. On obtient alors :

$$\begin{aligned}\frac{15^3 \times 2^2 \times 3 \times 25^2}{30^3} \times \frac{6^2 \times 10^2}{4 \times 15} &= \frac{(3 \times 5)^3 \times 2^2 \times 3 \times (5 \times 5)^2}{(2 \times 3 \times 5)^3} \times \frac{(2 \times 3)^2 \times (2 \times 5)^2}{(2^2 \times (3 \times 5)} \\ &= \frac{3^3 \times 5^3 \times 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 5^2}{2^3 \times 3^3 \times 5^3} \times \frac{2^2 \times 3^2 \times 2^2 \times 5^2}{2^2 \times 3 \times 5} \\ &= 2^{2-3+2+2-2} \times 3^{3+1-3+2-1} \times 5^{3+2+2-3+2-1} \\ &= 2 \times 3^2 \times 5^5.\end{aligned}$$

....

11.4 a) On rappelle que, pour un réel non nul x et un entier n, on a $(-x)^n = x^n$ lorsque n est pair et $(-x)^n = -x^n$ lorsque n est impair. Ainsi, on a $(-3)^3 = -3^3$, $(-5)^{-7} = -5^{-7}$ et $(-2)^{-2} = 2^{-2}$. On en déduit :

$$\begin{aligned}\frac{2 \times 3^{-3} \times 5^2 \times (-3)^3 \times 2^2 \times 5^4}{(-5)^{-7} \times 3^2 \times 2^3 \times 5^1 \times 3^5 \times (-2)^{-2}} &= \frac{2 \times 3^{-3} \times 5^2 \times (-3^3) \times 2^2 \times 5^4}{-5^{-7} \times 3^2 \times 2^3 \times 5^1 \times 3^5 \times 2^{-2}} \\ &= 2^{1+2-3+2} \times 3^{-3+3-2-5} \times 5^{2+4+7-1} \\ &= 2^2 \times 3^{-7} \times 5^{12}.\end{aligned}$$

....

11.4 b) On rappelle enfin la formule suivante : $(x^n)^p = x^{n\times p}$, où n et p sont des entiers relatifs, et x est un réel non nul. On a alors $\left(4^2\right)^{-1} = 4^{-2} = \left(2^2\right)^{-2} = 2^{-2\times 2} = 2^{-4}$ et $\left(6^3\times 2^2\right)^2 = 6^{3\times 2}\times 2^{2\times 2} = 6^6\times 2^4 = 2^6\times 3^6\times 2^4 = 2^{10}\times 3^6$. Puis, finalement :

$$\frac{2^3}{5\times\left(6^3\times 2^2\right)^2}\times\frac{3^2\times\left(4^2\right)^{-1}}{(-2)^2\times 5^3}\times\frac{5^6}{2\times 3} = \frac{2^3}{5\times 2^{10}\times 3^6}\times\frac{3^2\times 2^{-4}}{2^2\times 5^3}\times\frac{5^6}{2\times 3}$$
$$= 2^{3-10-4-2-1}\times 3^{2-6-1}\times 5^{6-1-3} = 2^{-14}\times 3^{-5}\times 5^2.$$

11.5 a) On a :

$$\frac{\left(3^n\right)^2\times 6^{-n}}{12^{1-n}}\times 2^{2n} = \frac{3^{2n}\times 2^{-n}\times 3^{-n}}{3^{1-n}\times 2^{2(1-n)}}\times 2^{2n} = 3^{2n-1}\times 2^{3n-2} = \left(3^2\times 2^3\right)^n\times\left(3\times 2^2\right)^{-1} = \frac{72^n}{12}.$$

11.5 b) On a $\dfrac{\left(x^n\right)^3}{x^{n+3}} = x^{3n-(n+3)} = x^{2n-3}$.

11.5 c) On a $\dfrac{x\times(2x)^{5n}}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^{-3n}\times\left((2x)^2\right)^{n+1}} = \dfrac{x\times 2^{5n}\times x^{5n}}{\left(x^{-3n}\times 2^{3n}\right)\times\left(2^{2(n+1)}\times x^{2(n+1)}\right)} = 2^{-2}\times x^{6n-1} = \dfrac{x^{6n-1}}{4}$.

11.6 b) Puisque $\dfrac{3^2}{500} = 3^2\times 2^{-2}\times 5^{-3} = 9\times 2^{-2}\times 5^{-3}$ et $\left(6^3\times 2^2\right)^2 = \left(2^5\times 3^3\right)^2 = 2^{10}\times 3^6$, on a :

$$\frac{2^4}{5\times\left(6^3\times 2^2\right)^2}\times\frac{9\times\left(-2^4\right)^{-1}}{\dfrac{3^2}{500}}\times\frac{5^{2\times 3}}{2\times 3} = \frac{2^4}{5\times\left(2^{10}\times 3^6\right)}\times\frac{-2^{-4}}{2^{-2}\times 5^{-3}}\times\frac{5^{2\times 3}}{2\times 3} = -2^{-9}\times 3^{-7}\times 5^8.$$

11.6 c) On a :

$$\frac{2^3}{5\times\left(3^3\times 2^5\right)^2}\times\frac{9\times\left(2^{-3}\right)^{-1}}{2^2\times\left(-5^2\right)}\times\left(\frac{-5^{-1}}{2^{-2}\times 3^3}\right)^{-2} = \frac{2^3}{5\times 3^6\times 2^{10}}\times\frac{3^2\times 2^3}{2^2\times\left(-5^2\right)}\times\frac{5^2}{2^4\times 3^{-6}} = -2^{-10}\times 3^2\times 5^{-1}.$$

11.7 a) Le nombre recherché est $\dfrac{3^2\times 5}{\left(3^{-1}\times 5\right)^{-1}}\times\dfrac{45^{-1}}{6^2}\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-1} = \dfrac{3^2\times 5}{3\times 5^{-1}}\times\dfrac{3^{-2}\times 5^{-1}}{2^2\times 3^2}\times\dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{2\times 3^4} = \dfrac{5}{162}$.

11.7 b) Le nombre recherché est $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{5}{2^3}\times\left(\dfrac{1}{48}\right)^{-1} = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{5}{2^3}\times\left(\dfrac{1}{2^4\times 3}\right)^{-1} = 2\times 5 = 10$.

11.7 c) Le nombre recherché est $\left(-\dfrac{3}{2}\right)^3\times\left(5\times\dfrac{12}{15}\right)\times\left(\dfrac{1}{5}\times(-3)^2\right)^{-1} = -\dfrac{3^3}{2^3}\times\left(5\times\dfrac{2^2\times 3}{3\times 5}\right)\times 5\times 3^{-2} = -\dfrac{15}{2}$.

11.8 a) On a $0{,}25 = 1/4 = 2^{-2}$.

11.8 b) On a $0{,}2 = 2/10 = 1/5 = 5^{-1}$.

11.8 d) On a $0{,}006 = \dfrac{6}{1\,000} = \dfrac{3}{500} = \dfrac{3}{5\times 10^2} = \dfrac{3}{5\times 2^2\times 5^2} = 2^{-2}\times 3\times 5^{-3}$.

11.8 e) On a $2{,}4 = \dfrac{24}{10} = \dfrac{12}{5} = \dfrac{2^2\times 3}{5} = 2^2\times 3\times 5^{-1}$.

11.8 f) On a $6{,}25 = \dfrac{625}{10^2} = \dfrac{5^4}{2^2\times 5^2} = 2^{-2}\times 5^2$; la difficulté étant d'établir $625 = 5^4$. Peut-être est-il plus simple d'écrire $6{,}25 = 6 + 0{,}25 = 6 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{25}{4} = \dfrac{5^2}{2^2} = 2^{-2}\times 5^2$?

Fiche n° 12. Calcul littéral avec des puissances

Réponses

12.1 a) $\boxed{a^8}$

12.1 b) $\boxed{a^7}$

12.1 c) $\boxed{2^{m+n}}$

12.1 d) $\boxed{5^{m-4}}$

12.1 e) $\boxed{(a \times b)^5}$

12.1 f) $\boxed{8^{n-m}}$

12.2 a) $\boxed{2^{m+2}}$

12.2 b) $\boxed{3^{m+10}}$

12.2 c) $\boxed{2^{48m}}$

12.2 d) $\boxed{3^{-35m}}$

12.2 e) $\boxed{2^{-13m}}$

12.2 f) $\boxed{3^{-55m}}$

12.3 a) $\boxed{a^{31}}$

12.3 b) $\boxed{a^{-2}}$

12.3 c) $\boxed{\left(\dfrac{2}{3}\right)^m}$

12.3 d) $\boxed{a^2 \times b^{41}}$

12.3 e) $\boxed{a^{-6-m}}$

12.3 f) $\boxed{b^{m-n+2}}$

12.4 a) $\boxed{2^{m-n-5}}$

12.4 b) $\boxed{3^{m+2n-18}}$

12.4 c) $\boxed{2^{2n+4} \times 3^{m-5}}$

12.4 d) $\boxed{3^{10m} \times 5^{5n}}$

12.5 a) $\boxed{x^{-4} \times y^{2m-20}}$

12.5 b) $\boxed{x^{m-4n} \times y^{-4n}}$

12.6 a) $\boxed{(x-5)^{m-2}}$

12.6 b) $\boxed{(x-8)^{6-3m}}$

12.6 c) $\boxed{(x-5)^{5-2m}}$

12.7 a) $\boxed{a^7}$

12.7 b) $\boxed{a^{10} \times b}$

12.7 c) $\boxed{a^{13} \times b^{-11}}$

12.7 d) $\boxed{a^{-78} \times b^{325}}$

12.7 e) $\boxed{a^5 \times b^{-7}}$

12.7 f) $\boxed{b^{20}}$

12.8 a) $\boxed{2^{m+1}}$

12.8 b) $\boxed{2^{8m-8}}$

12.8 c) $\boxed{2^{-3m} \times 3^{2n-3}}$

12.8 d) $\boxed{2^{22m+2} \times 3^{2n}}$

12.8 e) $\boxed{3^{4m+3}}$

12.8 f) $\boxed{2^{5-m}}$

Corrigés

12.1 a) On a $a^3 \times a^5 = a^{3+5} = a^8$.

12.1 b) On a $\dfrac{a^9}{a^2} = a^{9-2} = a^7$.

12.2 a) On a $2^m \times 4 = 2^m \times 2^2 = 2^{m+2}$.

12.2 b) On a $3^m \times 9^5 = 3^m \times (3^2)^5 = 3^m \times 3^{2\times 5} = 3^{m+10}$.

12.2 c) On a $4^{11m} = (2^2)^{11m} = 2^{22m}$ donc $2^{26m} \times 4^{11m} = 2^{26m+22m} = 2^{48m}$.

12.2 d) On a $\dfrac{9^{-14m}}{3^{7m}} = \dfrac{(3^2)^{-14m}}{3^{7m}} = 3^{-28m-7m} = 3^{-35m}$.

12.2 e) On a $8 = 2^3$ et $4 = 2^2$.

12.2 f) On a $27 = 3^3$.

12.3 a) On a $a^4 \times a^3 \times a^{24} = a^{4+3+24} = a^{31}$.

12.3 b) On a $\dfrac{a^9 \times a^4}{a^8 \times a^7} = \dfrac{a^{9+4}}{a^{8+7}} = \dfrac{a^{13}}{a^{15}} = a^{13-15} = a^{-2}$.

12.3 c) On a $\dfrac{5^m \times 4^m}{10^m \times 3^m} = \dfrac{5^m \times 2^{2m}}{5^m \times 2^m \times 3^m} = \dfrac{2^m}{3^m} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^m$.

12.3 d) On a $a^5 \times b^{23} \times a^{-3} \times b^{18} = a^{5+(-3)} \times b^{23+18} = a^2 b^{41}$.

12.3 e) On a $\dfrac{a^m \times a^2 \times a^{-3}}{a^5 \times a^{2m}} = a^{m+2+(-3)-5-2m} = a^{-m-6}$.

12.3 f) On a $\dfrac{a^5 \times b^m \times a^{-12} \times b^2}{b^n \times a^4 \times a^{-11}} = \dfrac{a^5 \times a^{-12}}{a^4 \times a^{-11}} \times \dfrac{b^m \times b^2}{b^n} = a^{5-12-(4-11)} \times b^{m+2-n} = a^0 b^{m+2-n} = 1 \times b^{m+2-n}$.

12.4 a) On a $\dfrac{2^m \times 4^2}{8^3 \times 2^n} = \dfrac{2^m \times (2^2)^2}{(2^3)^3 \times 2^n} = 2^{m+4-9-n} = 2^{m-n-5}$.

12.4 b) On a $\dfrac{3^m \times 9^n}{27^6} = \dfrac{3^m \times (3^2)^n}{(3^3)^6} = 3^{m+2n-18}$.

12.4 c) On a $\dfrac{8^n \times 3^m \times 16}{27 \times 2^n \times 9} = \dfrac{(2^3)^n \times 3^m \times 2^4}{3^3 \times 2^n \times 3^2} = 2^{3n+4-n} \times 3^{m-3-2} = 2^{2n+4} \times 3^{m-5}$.

12.4 d) On a $81^m \times 25^n \times 3^{6m} \times 125^n = (3^4)^m \times (5^2)^n \times 3^{6m} \times (5^3)^n = 3^{4m+6m} \times 5^{2n+3n} = 3^{10m} \times 5^{5n}$.

12.5 a) On a $\dfrac{(x^4 \times y^m)^2}{(x^3 \times y^5)^4} = \dfrac{(x^4)^2 \times (y^m)^2}{(x^3)^4 \times (y^5)^4} = x^{8-12} \times y^{2m-20}$.

12.5 b) On a $\dfrac{x^m \times y^n}{(x^4 \times y^5)^n} = \dfrac{x^m \times y^n}{x^{4n} \times y^{5n}} = x^{m-4n} \times y^{n-5n}$.

12.6 a) On a $\dfrac{(x-5)^m}{(x-5)^2} = (x-5)^{m-2}$.

12.6 b) On a $\dfrac{(x-8)^6}{\big((x-8)^m\big)^3} = \dfrac{(x-8)^6}{(x-8)^{3m}} = (x-8)^{6-3m}$.

12.6 c) On a $\dfrac{(x-5)^5}{\big((x-5)^2\big)^m} = \dfrac{(x-5)^5}{(x-5)^{2m}} = (x-5)^{5-2m}$.

12.7 a) On calcule $\dfrac{a^8 \times a^3}{a^4}$.

12.7 b) On calcule $\dfrac{a^6 \times (a \times b)}{a^{-3}}$.

12.7 e) On calcule $\dfrac{(a^3 \times b^{-4}) \times a^8 \times b^{-2}}{a^6 \times b}$.

12.8 c) On calcule $\dfrac{(2^m \times 9^n) \times (2^{3m} \times 3^n)}{2^{7m} \times 3^{n+3}} = \dfrac{2^m \times 2^{3m}}{2^{7m}} \times \dfrac{(3^2)^n \times 3^n}{3^{n+3}} = 2^{m+3m-7m} \times 3^{2n+n-(n+3)}$.

12.8 e) On calcule $\dfrac{3^m \times 3^{8m+5}}{3^{5m+2}}$.

12.8 f) On calcule $\dfrac{2^5 \times 2^m}{4^m}$ en utilisant que $4^m = (2^2)^m = 2^{2m}$.

Fiche n° 13. Bilan sur les puissances

Réponses

13.1 a) .... $\boxed{+}$

13.1 b) .... $\boxed{-}$

13.1 c) .... $\boxed{+}$

13.1 d) .... $\boxed{-}$

13.2 a) .... $\boxed{\text{faux}}$

13.2 b) .... $\boxed{\text{vrai}}$

13.2 c) .... $\boxed{\text{vrai}}$

13.2 d) .... $\boxed{\text{faux}}$

13.3 a) .... $\boxed{\text{vrai}}$

13.3 b) .... $\boxed{\text{vrai}}$

13.3 c) .... $\boxed{\text{faux}}$

13.3 d) .... $\boxed{\text{vrai}}$

13.4 a) .... $\boxed{1{,}234\,567 \times 10^{6}}$

13.4 b) .... $\boxed{1{,}2 \times 10^{-3}}$

13.4 c) .... $\boxed{7{,}492\,5 \times 10^{-2}}$

13.4 d) .... $\boxed{1 \times 10^{-7}}$

13.5 a) .... $\boxed{2^{46}}$

13.5 b) .... $\boxed{3^{-44}}$

13.5 c) .... $\boxed{25^{6} \times 8^{4}}$

13.5 d) .... $\boxed{10^{-5}}$

13.6 a) .... $\boxed{2^{4}}$

13.6 b) .... $\boxed{2^{-3}}$

13.6 c) .... $\boxed{2^{-5}}$

13.6 d) .... $\boxed{2^{36}}$

13.7 a) .... $\boxed{2^{20}}$

13.7 b) .... $\boxed{21^{2}}$

13.7 c) .... $\boxed{6^{8}}$

13.7 d) .... $\boxed{\left(\dfrac{5}{2}\right)^{11}}$

13.8 a) .... $\boxed{2^{5} \times 3^{5} \times 5^{-1}}$

13.8 b) .... $\boxed{2^{8} \times 3^{1} \times 5^{12}}$

13.8 c) .... $\boxed{2^{-7} \times 3^{1} \times 5^{1}}$

13.9 a) .... $\boxed{2^{n+3}}$

13.9 b) .... $\boxed{5^{3n+5}}$

13.10 a) .... $\boxed{(6x^{4})^{2}}$

13.10 b) .... $\boxed{x^{2}}$

13.10 c) .... $\boxed{\left(\dfrac{x}{4}\right)^{2}}$

13.10 d) .... $\boxed{\left(\dfrac{1}{3x}\right)^{2}}$

13.11 a) .... $\boxed{a^{-1}b^{2}}$

13.11 b) .... $\boxed{a^{4}b}$

13.11 c) .... $\boxed{a^{-1}b^{6}}$

13.11 d) .... $\boxed{a^{13}b^{-15}}$

13.12 a) .... $\boxed{a^{-2n-2}b^{-n+2}}$

13.12 b) .... $\boxed{a^{-n-1}b^{0}}$

13.12 c) .... $\boxed{a^{n}b^{3n}}$

13.12 d) .... $\boxed{a^{-4n+3}b^{n+2}}$

13.13 a) .. $\boxed{a^{-4n-3}b^{2n-6}c^{-2n-1}}$

13.13 b) ..... $\boxed{a^{-n+5}b^{-n-5}c^{n+2}}$

13.13 c) .... $\boxed{a^{2n+1}b^{5n+4}c^{-n}}$

13.13 d) .... $\boxed{a^{-6n}b^{-n+3}c^{-2n+4}}$

13.14 .... $\boxed{3^{11}}$

13.15 .... $\boxed{3^{-4}}$

Corrigés

13.2 a) On a $2^{-4} = \dfrac{1}{2^4} = \dfrac{1}{16} \neq -16$.

13.2 c) On a $5^9 + 5^9 + 5^9 + 5^9 + 5^9 = 5 \times 5^9 = 5^1 \times 5^9 = 5^{10}$.

13.2 d) On a $\dfrac{5^4}{5^{-3}} = 5^{4-(-3)} = 5^{4+3} = 5^7$.

13.3 a) On a $2^{n+1} - 2^n = 2^n \times 2^1 - 2^n = 2^n(2^1 - 1) = 2^n \times 1 = 2^n$.

13.3 b) On a $2^{2n} = (2^2)^n = 4^n$.

13.3 c) On a $(a^b)^n = a^{b\times n} \neq a^{b^n}$.

13.5 a) On a $8^{15} = (2^3)^{15} = 2^{45} < 2^{46}$.

13.5 b) On a $27^{-15} = (3^3)^{-15} = 3^{-45} = \dfrac{1}{3^{45}} < \dfrac{1}{3^{44}}$. D'où $27^{-15} < 3^{-44}$.

13.5 c) On a $25^6 \times 8^4 = (5^2)^6 \times (2^3)^4 = 5^{12} \times 2^{12} = (5 \times 2)^{12} = 10^{12} > 10^9$.

13.5 d) On a $4^{-3} \times 125^{-2} = (2^2)^{-3} \times (5^3)^{-2} = 2^{-6} \times 5^{-6} = (2 \times 5)^{-6} = 10^{-6} < 10^{-5}$.

13.6 a) On a $\dfrac{8 \times 2^7}{4^3} = \dfrac{2^3 \times 2^7}{(2^2)^3} = \dfrac{2^{10}}{2^6} = 2^4$.

13.6 b) On a $128^3 \times (16^3)^{-2} = (2^7)^3 \times 16^{-6} = 2^{21} \times (2^4)^{-6} = 2^{21} \times 2^{-24} = 2^{-3}$.

13.6 c) On a $\dfrac{4^{-3} \times 16^3}{(2^{-1})^4 \times 8^5} = \dfrac{(2^2)^{-3} \times (2^4)^3}{2^{-4} \times (2^3)^5} = \dfrac{2^{-6} \times 2^{12}}{2^{-4} \times 2^{15}} = \dfrac{2^6}{2^{11}} = 2^{-5}$.

13.6 d) On a $\dfrac{-4^5 \times (-4)^7}{(4^3)^{-2}} = \dfrac{-4^5 \times (-4^7)}{4^{-6}} = \dfrac{4^{12}}{4^{-6}} = 4^{18} = (2^2)^{18} = 2^{36}$.

13.7 a) On a $\dfrac{10^2 \times (4^3)^3}{25} = \dfrac{(2 \times 5)^2 \times 4^9}{5^2} = \dfrac{2^2 \times 5^2 \times (2^2)^9}{5^2} = 2^2 \times 2^{18} = 2^{20}$.

13.7 b) On a :

$$\begin{aligned}\frac{7 \times 2^9 \times 21^6}{14^5 \times 6^4} &= \frac{7 \times 2^9 \times (7 \times 3)^6}{(2 \times 7)^5 \times (2 \times 3)^4} = \frac{7 \times 2^9 \times 7^6 \times 3^6}{2^5 \times 7^5 \times 2^4 \times 3^4} \\ &= \frac{7^7 \times 2^9 \times 3^6}{2^9 \times 7^5 \times 3^4} = 7^2 \times 3^2 = (7 \times 3)^2 = 21^2.\end{aligned}$$

13.7 c) On a $\dfrac{9^4 \times 4^7}{2^4 + 2^4 + 2^4 + 2^4} = \dfrac{(3^2)^4 \times (2^2)^7}{4 \times 2^4} = \dfrac{3^8 \times 2^{14}}{2^2 \times 2^4} = \dfrac{3^8 \times 2^{14}}{2^6} = 3^8 \times 2^8 = (3 \times 2)^8 = 6^8$.

13.7 d) On a $\dfrac{25^8 \times (\frac{1}{2^{-3}})^{-2}}{10^5} = \dfrac{(5^2)^8 \times (2^3)^{-2}}{(2 \times 5)^5} = \dfrac{5^{16} \times 2^{-6}}{2^5 \times 5^5} = \dfrac{5^{11}}{2^{11}} = \left(\dfrac{5}{2}\right)^{11}$.

13.8 a) On a $\dfrac{5^2 \times 10^{-3} \times 6^4}{4^{-2} \times 3^{-1}} = \dfrac{5^2 \times (5 \times 2)^{-3} \times (2 \times 3)^4}{(2^2)^{-2} \times 3^{-1}} = \dfrac{5^2 \times 5^{-3} \times 2^{-3} \times 2^4 \times 3^4}{2^{-4} \times 3^{-1}} = 2^5 \times 3^5 \times 5^{-1}$.

13.8 b) On a $\dfrac{(-3)^{-4} \times 25^7 \times (-18)^2}{15^2 \times 12^{-3}} = \dfrac{3^{-4} \times (5^2)^7 \times (3^2 \times 2)^2}{(3 \times 5)^2 \times (2^2 \times 3)^{-3}} = \dfrac{3^{-4} \times 5^{14} \times 3^4 \times 2^2}{3^2 \times 5^2 \times 2^{-6} \times 3^{-3}} = 2^8 \times 3^1 \times 5^{12}$.

13.8 c) On a :

$$\begin{aligned}\frac{(2^5)^{-3}}{\frac{3^{-5} \times 5^7}{10^8}} \times 9^{-2} &= \frac{2^{-15}}{\frac{3^{-5} \times 5^7}{(2 \times 5)^8}} \times (3^2)^{-2} = \frac{2^{-15}}{\frac{3^{-5} \times 5^7}{2^8 \times 5^8}} \times 3^{-4} \\ &= \frac{2^{-15}}{3^{-5} \times 5^{-1} \times 2^{-8}} \times 3^{-4} = 2^{-7} \times 3^1 \times 5^1.\end{aligned}$$

13.9 b) On a $\dfrac{(-5)^{2n} \times 25^3 \times 16^n}{20^{2n} \times 5^{1-3n}} = \dfrac{5^{2n} \times (5^2)^3 \times (2^4)^n}{((2^2) \times 5)^{2n} \times 5^{1-3n}} = \dfrac{5^{2n+6} \times 2^{4n}}{2^{4n} \times 5^{2n} \times 5^{1-3n}} = \dfrac{5^{2n+6}}{5^{1-n}} = 5^{3n+5}$.

13.10 b) On a $\dfrac{8x^5}{x^{-3} \times (2x^2)^3} = \dfrac{8x^5}{x^{-3} \times 2^3 \times (x^2)^3} = \dfrac{2^3 \times x^5}{x^{-3} \times 2^3 \times x^6} = \dfrac{x^5}{x^3} = x^2$.

13.10 c) On a $(-2x)^{-4} \times x^6 = (-2)^{-4} \times x^{-4} \times x^6 = 2^{-4} \times x^2 = \dfrac{x^2}{2^4} = \left(\dfrac{x}{2^2}\right)^2 = \left(\dfrac{x}{4}\right)^2$.

13.10 d) On a $\dfrac{(9x^3)^{-1}\times x^4}{x^3} = \dfrac{9^{-1}\times (x^3)^{-1}\times x^4}{x^3} = \dfrac{9^{-1}\times x^{-3}\times x^4}{x^3} = \dfrac{9^{-1}\times x}{x^3} = \dfrac{9^{-1}}{x^2} = \dfrac{1}{9}\times\dfrac{1}{x^2} = \left(\dfrac{1}{3x}\right)^2$.

13.11 a) On a $\left(\dfrac{a^3}{b^{-5}}\right)^{-1}\times a^2b^7 = \dfrac{(a^3)^{-1}}{(b^{-5})^{-1}}\times a^2b^7 = \dfrac{a^{-3}}{b^5}\times a^2b^7 = a^{-1}b^2$.

13.11 b) On a $\dfrac{(a^2b)^3\times b^{-4}}{(a^{-2}\times b^2)^{-1}} = \dfrac{(a^2)^3\times b^3\times b^{-4}}{(a^{-2})^{-1}\times (b^2)^{-1}} = \dfrac{a^6\times b^{-1}}{a^2\times b^{-2}} = a^4b$.

13.11 c) On a $\dfrac{(b^3a)^3\times b^{-5}}{(a^2b^{-1})^2} = \dfrac{(b^3)^3\times a^3\times b^{-5}}{(a^2)^2\times (b^{-1})^2} = \dfrac{b^9\times a^3\times b^{-5}}{a^4\times b^{-2}} = \dfrac{b^4\times a^3}{a^4\times b^{-2}} = a^{-1}b^6$.

13.11 d) On a :

$$\begin{aligned}\frac{a^2b^{-1}}{(a^3)^{-4}\times \frac{(ab^5)^3}{ba^2}} &= \frac{a^2b^{-1}}{a^{-12}\times \frac{a^3\times(b^5)^3}{ba^2}} = \frac{a^2b^{-1}}{a^{-12}\times\frac{a^3\times b^{15}}{ba^2}}\\ &= \frac{a^2b^{-1}}{a^{-12}\times a\times b^{14}} = \frac{a^2b^{-1}}{a^{-11}\times b^{14}} = a^{13}b^{-15}.\end{aligned}$$

13.12 a) On a $\dfrac{(a^{2n})^{-1}\times b^{n+2}}{(ab^n)^2} = \dfrac{a^{-2n}\times b^{n+2}}{a^2\times (b^n)^2} = a^{-2n-2}b^{-n+2}$.

13.12 b) On a $\dfrac{ab\times (a^3b^2)^n}{(a^2b)^{2n+1}} = \dfrac{ab\times (a^3)^n\times (b^2)^n}{(a^2)^{2n+1}\times b^{2n+1}} = \dfrac{ab\times a^{3n}\times b^{2n}}{a^{4n+2}\times b^{2n+1}} = \dfrac{a^{3n+1}\times b^{2n+1}}{a^{4n+2}\times b^{2n+1}} = a^{-n-1}b^0$.

13.12 c) On a $\dfrac{(ab^{n+1})^2\times a^{2n}}{a^{n+2}\times\frac{1}{b^{n-2}}} = \dfrac{a^2\times (b^{n+1})^2\times a^{2n}}{a^{n+2}\times b^{-n+2}} = \dfrac{a^{2n+2}\times b^{2n+2}}{a^{n+2}\times b^{-n+2}} = a^nb^{3n}$.

13.12 d) On a $\dfrac{a^{1-n}b^{2n}}{b^n\times\frac{1}{\frac{ab^2}{a^{3n-1}}}} = \dfrac{a^{1-n}b^{2n}}{b^n\times\frac{1}{a^{1-(3n-1)}b^2}} = \dfrac{a^{1-n}b^{2n}}{b^n\times\frac{1}{a^{2-3n}b^2}} = \dfrac{a^{1-n}b^{2n}}{b^{n-2}\times a^{-2+3n}} = a^{-4n+3}b^{n+2}$.

13.13 a) On a $\dfrac{(a^{n+3}b^{2-n}c)^{-1}\times a^{1-3n}}{ab^{4-n}c^{2n}} = \dfrac{a^{-n-3}b^{-2+n}c^{-1}a^{1-3n}}{ab^{4-n}c^{2n}} = a^{-4n-3}b^{2n-6}c^{-2n-1}$.

13.13 b) On a $(a^2b^{n-3}c)^2\times\dfrac{b^{1-3n}}{c^{-n}a^{n-1}} = a^4b^{2n-6}c^2b^{1-3n}c^na^{-n+1} = a^{-n+5}b^{-n-5}c^{n+2}$.

13.13 c) On a :

$$\begin{aligned}\frac{a^nbc^{1-n}\times (ab^n)^2}{a^{4-n}\times\frac{c}{(ab^{n+1})^3}} &= \frac{a^nbc^{1-n}\times a^2b^{2n}}{a^{4-n}\times\frac{c}{a^3b^{3n+3}}} = \frac{a^{n+2}b^{2n+1}c^{1-n}}{a^{4-n}\times ca^{-3}b^{-3n-3}}\\ &= \frac{a^{n+2}b^{2n+1}c^{1-n}}{a^{-n+1}b^{-3n-3}c} = a^{2n+1}b^{5n+4}c^{-n}.\end{aligned}$$

13.13 d) On a :

$$\begin{aligned}\frac{((a^2)^n)^{-1}\times c^{3-n}}{\frac{b^nc^{-1}}{a^{1-4n}\times\frac{b^3}{ac^n}}} &= \frac{((a^{2n})^{-1}\times c^{3-n}}{\frac{b^nc^{-1}}{a^{1-4n}\times b^3\times a^{-1}\times c^{-n}}} = \frac{a^{-2n}c^{3-n}}{\frac{b^nc^{-1}}{a^{-4n}b^3c^{-n}}}\\ &= \frac{a^{-2n}c^{3-n}}{a^{4n}b^{n-3}c^{n-1}} = a^{-6n}b^{-n+3}c^{-2n+4}.\end{aligned}$$

13.14 On a $\dfrac{(3^3+3^3+3^3)(6^6+6^6+6^6+6^6+6^6+6^6)}{2^5+2^5+2^5+2^5} = \dfrac{(3\times 3^3)(6\times 6^6)}{4\times 2^5} = \dfrac{3^4\times 6^7}{2^7} = 3^4\times 3^7 = 3^{10}$.

13.15 On a $\left(\dfrac{9^{2n}-5\times 9^{2n-1}}{3^{4n+1}+3^{4n}}\right)^2 = \left(\dfrac{9^{2n-1}(9-5)}{3^{4n}(3+1)}\right)^2 = \left(\dfrac{9^{2n-1}\times 4}{3^{4n}\times 4}\right)^2 = \left(\dfrac{3^{4n-2}}{3^{4n}}\right)^2 = (3^{-2})^2 = 3^{-4}$.

Fiche nº 14. Calculs avec des racines I

Réponses

14.1 .... $\boxed{\text{d}}$

14.2 a) .... $\boxed{\text{non}}$

14.2 b) .... $\boxed{\text{oui}}$

14.2 c) .... $\boxed{\text{oui}}$

14.2 d) .... $\boxed{\text{oui}}$

14.2 e) .... $\boxed{\text{non}}$

14.2 f) .... $\boxed{\text{oui}}$

14.3 a) .... $\boxed{3}$

14.3 b) .... $\boxed{2}$

14.3 c) .... $\boxed{25}$

14.3 d) .... $\boxed{9}$

14.3 e) .... $\boxed{\sqrt{3}-1}$

14.3 f) .... $\boxed{\sqrt{2}-1}$

14.4 a) .... $\boxed{-6}$

14.4 b) .... $\boxed{70}$

14.4 c) .... $\boxed{5}$

14.4 d) .... $\boxed{2}$

14.5 a) .... $\boxed{100}$

14.5 b) .... $\boxed{0{,}1}$

14.5 c) .... $\boxed{0{,}6}$

14.5 d) .... $\boxed{0{,}03}$

14.6 a) .... $\boxed{400}$

14.6 b) .... $\boxed{3}$

14.6 c) .... $\boxed{-104}$

14.6 d) .... $\boxed{-30}$

14.6 e) .... $\boxed{12}$

14.6 f) .... $\boxed{\dfrac{5}{7}}$

14.7 a) .... $\boxed{1 < \sqrt{2} < 2}$

14.7 b) .... $\boxed{12 < \sqrt{150} < 13}$

14.7 c) .... $\boxed{7 < \sqrt{58} < 8}$

14.7 d) .... $\boxed{9 < \sqrt{91} < 10}$

14.7 e) .... $\boxed{3 < 2\sqrt{3} < 4}$

14.7 f) .... $\boxed{-5 < -3\sqrt{2} < -4}$

14.8 a) .... $\boxed{-53 + 11\sqrt{3}}$

14.8 b) .... $\boxed{22 + 13\sqrt{13}}$

14.9 a) .... $\boxed{23 - 5\sqrt{7}}$

14.9 b) .... $\boxed{-7}$

14.9 c) .... $\boxed{59 - 30\sqrt{2}}$

14.9 d) .... $\boxed{252 - 48\sqrt{5}}$

Corrigés

14.1 On a $\sqrt{100-36} = \sqrt{64} = 8$.

Même si on a bien $(-8)^2 = 64$, la réponse -8 n'est pas correcte car la racine carrée d'un nombre est toujours un nombre positif ou nul.

14.3 b) On a $\sqrt{1+\sqrt{1}}^{\,2} = \sqrt{2}^{\,2} = 2$.

14.3 c) On a $\sqrt{5^4} = \sqrt{(5^2)^2} = 5^2 = 25$.

14.3 d) On a $\sqrt{(-3)^4} = \sqrt{(3^2)^2} = 9$.

14.3 e) On a $3 > 1$, donc $\sqrt{3} > \sqrt{1}$ et donc $\sqrt{3} > 1$; donc $\sqrt{3} - 1 > 0$. Ainsi, on a $\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2} = \sqrt{3} - 1$.

14.3 f) De même, on a $\sqrt{2} > 1$, donc $1 - \sqrt{2} < 0$. On en déduit que $\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2} - 1$.

14.4 a) On a $\dfrac{30}{\sqrt{25}-\sqrt{100}} = \dfrac{30}{5-10} = \dfrac{30}{-5} = -6$.

14.4 b) On a $\sqrt{49} \times \sqrt{100} = 7 \times 10 = 70$.

14.4 c) On a $\sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$.

14.4 d) On a $\sqrt{\sqrt{12+4}} = \sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt{4} = 2$.

14.5 a) On a $\sqrt{10^4} = \sqrt{(10^2)^2} = 10^2 = 100$.

14.5 b) On a $\sqrt{0{,}01} = \sqrt{\left(10^{-1}\right)^2} = 10^{-1} = 0{,}1$.

14.5 d) On a $\sqrt{0{,}000\,9} = \sqrt{9\times 10^{-4}} = \sqrt{\left(3\times 10^{-2}\right)^2} = 3\times 10^{-2} = 0{,}03$.

14.6 a) On a $\left(-5\sqrt{16}\right)^2 = (-5)^2 \times 16 = 400$.

14.6 b) On a $\sqrt{\sqrt{3}^4} = \sqrt{3^2} = 3$.

14.6 c) On a $-2\sqrt{3}\times 9\sqrt{3} + 5\sqrt{5}\times\left(-2\sqrt{5}\right) = -18\times 3 - 10\times 5 = -104$.

14.6 d) On a $-\sqrt{15}\times\sqrt{6}\times\sqrt{10} = -\sqrt{3}\times\sqrt{5}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}\times\sqrt{5} = -2\times 3\times 5 = -30$.

14.6 e) On a $\sqrt{2^4\times 3^2} = \sqrt{\left(2^2\times 3\right)^2} = 12$.

14.7 b) On a $12^2 = 144$ et $13^2 = 169$ donc $12 < \sqrt{150} < 13$.

14.7 c) On a $49 < 58 < 64$, donc $\sqrt{49} < \sqrt{58} < \sqrt{64}$ c'est-à-dire $7 < \sqrt{58} < 8$.

14.7 e) On a $(2\sqrt{3})^2 = 4\times 3 = 12$. Or, $9 < 12 < 16$ donc $3 < 2\sqrt{3} < 4$.

14.7 f) On a $\left(-3\sqrt{2}\right)^2 = 18$ et $16 < 18 < 25$. D'où $4 < \sqrt{18} < 5$ et donc $-5 < -3\sqrt{2} < -4$.

14.8 a) On a $1-\sqrt{3}-6\sqrt{3}\left(-2+3\sqrt{3}\right) = 1-\sqrt{3}+12\sqrt{3}-18\times\sqrt{3}^2 = -53+11\sqrt{3}$.

14.8 b) On a $-4+20\sqrt{13}+\sqrt{13}\left(-7+2\sqrt{13}\right) = -4+20\sqrt{13}-7\sqrt{13}+2\sqrt{13}^2 = 13\sqrt{13}+22$.

14.9 a) On a $\left(-2+3\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{7}-1\right) = -2\sqrt{7}+3\times 7+2-3\sqrt{7} = 23-5\sqrt{7}$.

14.9 c) On a $\left(-5\sqrt{2}+3\right)^2 = \left(-5\sqrt{2}\right)^2 - 2\times 5\sqrt{2}\times 3 + 3^2 = 25\times 2 - 30\sqrt{2} + 9 = 59 - 30\sqrt{2}$.

14.9 d) On a $\dfrac{4}{3}\left(-3+6\sqrt{5}\right)^2 = \dfrac{4}{3}\left(9-36\sqrt{5}+36\times 5\right) = \dfrac{4}{3}\left(189-36\sqrt{5}\right) = 252-48\sqrt{5}$.

Fiche n° 15. Calculs avec des racines II

Réponses

15.1 a)	$\boxed{6}$
15.1 b)	$\boxed{-80}$
15.1 c)	$\boxed{-40}$
15.1 d)	$\boxed{2\sqrt{5}}$
15.1 e)	$\boxed{\sqrt{3}}$
15.1 f)	$\boxed{-8\sqrt{2}}$
15.2 a)	$\boxed{2\sqrt{3}}$
15.2 b)	$\boxed{2\sqrt{7}}$
15.2 c)	$\boxed{100}$
15.2 d)	$\boxed{2\sqrt{15}}$
15.2 e)	$\boxed{2\sqrt{13}}$
15.2 f)	$\boxed{10\sqrt{2}}$
15.2 g)	$\boxed{5\sqrt{3}}$
15.2 h)	$\boxed{5\sqrt{6}}$
15.2 i)	$\boxed{4\sqrt{5}}$
15.3 a)	$\boxed{\sqrt{2}}$
15.3 b)	$\boxed{-\sqrt{5}}$
15.3 c)	$\boxed{-13+13\sqrt{3}}$
15.3 d)	$\boxed{-32\sqrt{7}}$
15.4 a)	$\boxed{31-5\sqrt{5}}$
15.4 b)	$\boxed{116+3\sqrt{7}}$
15.4 c)	$\boxed{6-5\sqrt{2}+5\sqrt{3}-3\sqrt{6}}$
15.4 d)	$\boxed{-8+20\sqrt{2}-10\sqrt{3}+2\sqrt{6}}$
15.5 a)	$\boxed{-2+5\sqrt{2}}$
15.5 b)	$\boxed{6+8\sqrt{2}+2\sqrt{5}}$
15.6 a)	$\boxed{1+3\sqrt{2}-\sqrt{3}}$
15.6 b)	$\boxed{-27+24\sqrt{6}-8\sqrt{15}}$
15.7 a)	$\boxed{\dfrac{-5\sqrt{7}}{7}}$
15.7 b)	$\boxed{\dfrac{\sqrt{6}}{2}}$
15.7 c)	$\boxed{\dfrac{5\sqrt{3}}{3}}$
15.7 d)	$\boxed{\dfrac{2}{5}\sqrt{35}}$
15.7 e)	$\boxed{\dfrac{49\sqrt{5}-25\sqrt{7}}{35}}$
15.7 f)	$\boxed{\dfrac{-25\sqrt{3}+9\sqrt{5}}{30}}$
15.8 a)	$\boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{5}}$
15.8 b)	$\boxed{-\dfrac{6\sqrt{7}}{7}}$
15.8 c)	$\boxed{\dfrac{3-3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{3}}$

Corrigés

15.1 b) On a $2\sqrt{2}\times\left(-5\sqrt{32}\right) = -2\times\sqrt{2}\times 5\sqrt{16}\times\sqrt{2} = -2\times 5\times 4\times\sqrt{2}^2 = -80$.

15.1 c) On a $-\sqrt{40}\times 2\sqrt{5^2-15} = -\sqrt{4}\times\sqrt{10}\times 2\times\sqrt{10} = -40$.

15.1 f) On a $\dfrac{-4\sqrt{6}}{\sqrt{5}}\times\sqrt{\dfrac{20}{3}} = -\dfrac{4\sqrt{3}\times\sqrt{2}\times\sqrt{4}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{3}} = -8\sqrt{2}$.

15.2 e) On a $\sqrt{52} = \sqrt{4}\times\sqrt{13} = 2\sqrt{13}$.

15.2 h) On a $\sqrt{150} = \sqrt{25}\times\sqrt{6} = 5\sqrt{6}$.

15.3 b) On a $\sqrt{80}-4\sqrt{125}+9\sqrt{20}-\sqrt{45} = \sqrt{16}\times\sqrt{5}-4\sqrt{25}\times\sqrt{5}+9\times\sqrt{4}\times\sqrt{5}-\sqrt{9}\times\sqrt{5} = -\sqrt{5}$.

15.3 c) On a $\sqrt{27}+5+2\sqrt{75}-2\sqrt{81} = 3\sqrt{3}+5+2\times 5\times\sqrt{3}-2\times 9 = -13+13\sqrt{3}$.

15.4 a) On a $\left(1-3\sqrt{5}\right)\left(1-2\sqrt{5}\right) = 1-2\sqrt{5}-3\sqrt{5}+6\times 5 = 31-5\sqrt{5}$.

15.4 b) On a $\left(3\sqrt{7}-2\right)\left(5+6\sqrt{7}\right) = 15\sqrt{7}+18\times 7-10-12\sqrt{7} = 116+3\sqrt{7}$.

15.4 c) On a $\left(-\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(5-3\sqrt{2}\right) = -5\sqrt{2}+5\sqrt{3}+3\times 2-3\sqrt{6} = 6-5\sqrt{2}+5\sqrt{3}-3\sqrt{6}$.

15.4 d) On a : $\left(-2\sqrt{8}+\sqrt{12}\right)\left(\sqrt{2}-5\right) = -2\times 2\times \sqrt{2}^2+10\times 2\sqrt{2}+2\sqrt{3}\times\sqrt{2}-5\times 2\sqrt{3}$

$= -8+20\sqrt{2}-10\sqrt{3}+2\sqrt{6}$.

15.5 a) On a $\left(-1+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}+2\right)\left(-\sqrt{2}+5\right) = \left(-\sqrt{2}-2+2+2\sqrt{2}\right)\left(-\sqrt{2}+5\right) = \sqrt{2}\left(-\sqrt{2}+5\right) = -2+5\sqrt{2}$.

15.5 b) On a :

$$\begin{aligned}
&\left(-1+\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{2}+2\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)\\
&= \left(-2\sqrt{2}-2+2\sqrt{10}+2\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)\\
&= -2\times 2-2\sqrt{10}-2\sqrt{2}-2\sqrt{5}+2\times 2\sqrt{5}+2\times 5\sqrt{2}+2\sqrt{10}+2\times 5\\
&= 6+8\sqrt{2}+2\sqrt{5}.
\end{aligned}$$

15.6 a) On a $\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}\right) = \sqrt{2}+\sqrt{3}+2+2+\sqrt{6}+2\sqrt{2}-\sqrt{6}-3-2\sqrt{3} = 1+3\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

15.6 b) On a :

$$\begin{aligned}
&\left(-4\sqrt{2}+5\sqrt{3}-2\sqrt{5}\right)\left(4\sqrt{2}-\sqrt{3}-2\sqrt{5}\right)\\
&= -16\times 2+4\sqrt{6}+8\sqrt{10}+20\sqrt{6}-15-10\sqrt{15}-8\sqrt{10}+2\sqrt{15}+20\\
&= -27+24\sqrt{6}-8\sqrt{15}.
\end{aligned}$$

15.7 a) On a $\dfrac{-5}{\sqrt{7}} = \dfrac{-5\sqrt{7}}{\sqrt{7}^2} = \dfrac{-5\sqrt{7}}{7}$.

15.7 b) On a $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}^2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

15.7 c) On a $\dfrac{5\sqrt{6}}{\sqrt{18}} = \dfrac{5\sqrt{6}}{\sqrt{3}\times\sqrt{6}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$.

15.7 d) On a $\dfrac{\sqrt{12}\times\sqrt{7}}{\sqrt{15}} = \dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt{4}\times\sqrt{7}}{\sqrt{3}\times\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{7}}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{7}\times\sqrt{5}}{5} = \dfrac{2}{5}\sqrt{35}$.

15.7 f) On a $\dfrac{3}{2\sqrt{5}} - \dfrac{5}{2\sqrt{3}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{10} - \dfrac{5\sqrt{3}}{6} = \dfrac{9\sqrt{5}-25\sqrt{3}}{30}$.

15.8 b) On calcule $\dfrac{\sqrt{2}\times 3\sqrt{2}}{-\sqrt{7}} = \dfrac{3\times 2}{-\sqrt{7}} = \dfrac{-6\sqrt{7}}{7}$.

15.8 c) On calcule $\dfrac{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{-\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}-2-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{-\sqrt{3}} = \dfrac{3-3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{3}$.

Fiche n° 16. Méthode de la quantité conjuguée

Réponses

16.1 a) .... $\boxed{-1}$

16.1 b) .... $\boxed{-1-\sqrt{2}}$

16.2 a) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{7}-2}{3}}$

16.2 b) .... $\boxed{-\dfrac{4+\sqrt{2}}{14}}$

16.2 c) .... $\boxed{5\big(2-\sqrt{3}\big)}$

16.2 d) .... $\boxed{\dfrac{4\big(2-\sqrt{11}\big)}{7}}$

16.3 a) .... $\boxed{\dfrac{3\sqrt{2}-2}{7}}$

16.3 b) .... $\boxed{\dfrac{5+\sqrt{5}}{4}}$

16.3 c) .... $\boxed{4-2\sqrt{2}}$

16.3 d) .... $\boxed{\dfrac{9-4\sqrt{2}}{7}}$

16.4 a) .... $\boxed{4\big(\sqrt{3}+\sqrt{2}\big)}$

16.4 b) .... $\boxed{\sqrt{17}+2\sqrt{3}}$

16.4 c) ...... $\boxed{-2\big(3\sqrt{2}-\sqrt{15}\big)}$

16.4 d) .... $\boxed{1}$

16.5 a) ... $\boxed{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$

16.5 b) .... $\boxed{\dfrac{8x^2+3\sqrt{x}}{64x^3-9}}$

16.6 a) .... $\boxed{6\big(1-\sqrt{3}\big)}$

16.6 b) .... $\boxed{150\big(2+\sqrt{3}\big)}$

16.6 c) .... $\boxed{-9+5\sqrt{3}}$

16.6 d) .... $\boxed{4\big(2+\sqrt{2}\big)}$

16.6 e) ..... $\boxed{2(a+1)^3\big(1-\sqrt{2}\big)}$

16.6 f) ... $\boxed{ab(a+b)\big(\sqrt{3}-\sqrt{2}\big)}$

16.7 a) .... $\boxed{\dfrac{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$

16.7 b) .... $\boxed{\dfrac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}$

16.8 a) .... $\boxed{\dfrac{8-3\sqrt{2}}{4}}$

16.8 b) .... $\boxed{\dfrac{6-2\sqrt{2}}{7}}$

Corrigés

16.1 b) On a $\dfrac{1}{1-\sqrt{2}} = \dfrac{1+\sqrt{2}}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})} = \dfrac{1+\sqrt{2}}{-1} = -1-\sqrt{2}.$

16.2 a) On a $\dfrac{1}{2+\sqrt{7}} = \dfrac{2-\sqrt{7}}{(2+\sqrt{7})(2-\sqrt{7})} = \dfrac{2-\sqrt{7}}{2^2-\sqrt{7}^2} = \dfrac{2-\sqrt{7}}{4-7} = \dfrac{2-\sqrt{7}}{-3} = \dfrac{\sqrt{7}-2}{3}.$

16.2 b) On a $\dfrac{1}{-4+\sqrt{2}} = \dfrac{-4-\sqrt{2}}{(-4+\sqrt{2})(-4-\sqrt{2})} = -\dfrac{4+\sqrt{2}}{4^2-\sqrt{2}^2} = -\dfrac{4+\sqrt{2}}{14}.$

16.3 a) On a $\dfrac{\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}(3-\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})} = \dfrac{3\sqrt{2}-2}{3^2-\sqrt{2}^2} = \dfrac{3\sqrt{2}-2}{9-2} = \dfrac{3\sqrt{2}-2}{7}.$

16.3 c) On a $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{2\sqrt{2}\big(\sqrt{2}-1\big)}{2-1} = 4-2\sqrt{2}.$

16.3 d) On a $\dfrac{\sqrt{2}-\frac{1}{2}}{\sqrt{2}+\frac{1}{2}} = \dfrac{\big(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\big)^2}{\big(\sqrt{2}+\frac{1}{2}\big)\big(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\big)} = \dfrac{2-\sqrt{2}+\frac{1}{2}}{2-\frac{1}{4}} = \dfrac{\frac{5}{2}-\sqrt{2}}{\frac{7}{4}} = \dfrac{10-4\sqrt{2}}{7}.$

16.4 a) On a $\dfrac{4}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \dfrac{4(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \dfrac{4(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{\sqrt{3}^2-\sqrt{2}^2} = \dfrac{4(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3-2} = 4\big(\sqrt{3}+\sqrt{2}\big).$

16.4 b) On a $\dfrac{5}{\sqrt{17}-2\sqrt{3}} = \dfrac{5\big(\sqrt{17}+2\sqrt{3}\big)}{\sqrt{17}^2-\big(2\sqrt{3}\big)^2} = \dfrac{5\big(\sqrt{17}+2\sqrt{3}\big)}{17-4\times 3} = \dfrac{5\big(\sqrt{17}+2\sqrt{3}\big)}{5} = \sqrt{17}+2\sqrt{3}.$

16.4 d) On a $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}-\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}\big(\sqrt{12}+\sqrt{3}\big)}{12-3} = \dfrac{\sqrt{36}+3}{9} = \dfrac{9}{9} = 1.$

16.5 a) On a :

$$\frac{2\big(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\big)}{\big(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\big)\big(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\big)} = \frac{2\big(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\big)}{x^2+1-x^2+1}$$
$$= \frac{2\big(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\big)}{2} = \sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}.$$

16.5 b) On a $\dfrac{\sqrt{x}}{8x\sqrt{x}-3} = \dfrac{\sqrt{x}\big(8x\sqrt{x}+3\big)}{64x^3-9} = \dfrac{8x^2+3\sqrt{x}}{64x^3-9}.$

16.6 a) On calcule $\dfrac{\dfrac{3}{1+\sqrt{3}} \times \dfrac{2}{1-\sqrt{3}}}{\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}} = \dfrac{24}{(1-3)\big(1+\sqrt{3}\big)} = \dfrac{-12}{1+\sqrt{3}} = \dfrac{-12\big(1-\sqrt{3}\big)}{-2} = 6\big(1-\sqrt{3}\big).$

16.6 b) On calcule :

$$\frac{\dfrac{3}{2-\sqrt{3}} \times \dfrac{10}{2+\sqrt{3}}}{\dfrac{2-\sqrt{3}}{5}} = \frac{3\times 10\times 5}{(4-3)\big(2-\sqrt{3}\big)} = \frac{150}{2-\sqrt{3}} = \frac{150(2+\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{150(2+\sqrt{3})}{2^2-\sqrt{3}^2} = 150(2+\sqrt{3}).$$

16.6 c) On calcule $\dfrac{\big(2\sqrt{a}+a\big)\big(a-\sqrt{4a}\big)}{-a\sqrt{a}} = -\dfrac{2a\sqrt{a}-4a+a^2-2a\sqrt{a}}{a\sqrt{a}} = \dfrac{4\sqrt{a}-a\sqrt{a}}{a}.$

16.6 e) On calcule $\dfrac{\dfrac{2(a+1)}{1+\sqrt{2}} \times \dfrac{a+1}{1-\sqrt{2}}}{\dfrac{1+\sqrt{2}}{a+1}} = \dfrac{-2(a+1)^3}{1+\sqrt{2}} = \dfrac{-2(a+1)^3\big(1-\sqrt{2}\big)}{1^2-\sqrt{2}^2} = 2(a+1)^3\big(1-\sqrt{2}\big).$

16.7 a) On a $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \dfrac{\big(1+\sqrt{2}\big)+\sqrt{3}}{\big(1+\sqrt{2}\big)^2-3} = \dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}\big(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\big)}{4} = \dfrac{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$

16.7 b) On a $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \dfrac{\big(1+\sqrt{2}\big)-\sqrt{3}}{\big(1+\sqrt{2}\big)^2-3} = \dfrac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}\big(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}\big)}{4} = \dfrac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}.$

16.8 a) Effectuons ce calcul petit à petit. Déjà, on a $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$. Ainsi, on a :

$$\frac{2}{1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2}{\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}} = \frac{4}{2+\sqrt{2}} = \frac{4\big(2-\sqrt{2}\big)}{2} = 2\big(2-\sqrt{2}\big).$$

On a alors $\dfrac{3}{4-\dfrac{2}{1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}}} = \dfrac{3}{4-2\big(2-\sqrt{2}\big)} = \dfrac{3}{2\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$. On conclut alors que :

$$2-\frac{3}{4-\dfrac{2}{1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}}} = 2-\frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{8-3\sqrt{2}}{4}.$$

Fiche n° 17. Bilan sur les racines carrées

Réponses

17.1 a) .... $\boxed{7}$

17.1 b) .... $\boxed{5}$

17.2 a) .... $\boxed{1}$

17.2 b) .... $\boxed{\dfrac{8}{3}}$

17.3 a) .... $\boxed{95 + 30\sqrt{10}}$

17.3 b) .... $\boxed{514 - 56\sqrt{15}}$

17.3 c) .... $\boxed{5}$

17.3 d) .... $\boxed{81 - 56\sqrt{2}}$

17.4 .... $\boxed{16 + 4\sqrt{6} - 4\sqrt{10} - 2\sqrt{15}}$

17.5 a) .... $\boxed{2^{n-2} \times 5^{n+3}}$

17.5 b) .... $\boxed{\dfrac{2^{4n}}{5^{2n+1}}}$

17.5 c) .... $\boxed{3^{6n-2}}$

17.5 d) .... $\boxed{2^{-3n+4} \times 5^{-n-3}}$

17.6 a) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{15} - 7\sqrt{3}}{3}}$

17.6 b) .... $\boxed{\dfrac{10\sqrt{3} - 3\sqrt{5} - 2\sqrt{15}}{15}}$

17.6 c) .... $\boxed{3 - 2\sqrt{2}}$

17.6 d) .... $\boxed{\dfrac{65 + 3\sqrt{2} + 21\sqrt{3}}{7}}$

17.7 .... $\boxed{0}$

17.8 a) .... $\boxed{\dfrac{-5 + 3\sqrt{5}}{2}}$

17.8 b) .... $\boxed{\varphi^2 = 1 + \varphi}$

17.8 c) .... $\boxed{\varphi}$

17.8 d) .... $\boxed{1 + 2\varphi}$

17.8 e) .... $\boxed{8 + 13\varphi}$

17.9 a) .... $\boxed{a^6}$

17.9 b) .... $\boxed{a^4}$

17.9 c) .... $\boxed{-\dfrac{3}{2}a^{-5}}$

17.9 d) .... $\boxed{16a^4\sqrt{a}}$

17.10 .... $\boxed{a^4}$

17.11 a) .... $\boxed{3a}$

17.11 b) .... $\boxed{a^2 - 1}$

17.11 c) .... $\boxed{\sqrt{2a - 1}}$

17.11 d) .... $\boxed{\sqrt{a^4 + 4}}$

17.12 a) .... $\boxed{2\big(x - \sqrt{5}\big)\big(x + \sqrt{5}\big)}$

17.12 b) .... $\boxed{-3\big(x - 2\sqrt{3}\big)\big(x + 2\sqrt{3}\big)}$

17.12 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{3}\big(x - \sqrt{3}\big)\Big(x + \sqrt{3}\Big)}$

17.12 d) .... $\boxed{\big(x + 1 - \sqrt{6}\big)\big(x + 1 + \sqrt{6}\big)}$

17.12 e) .... $\boxed{2(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 2)}$

17.12 f) .... $\boxed{\begin{array}{c}(3x + 2 - \sqrt{5}) \times (3x + 2 + \sqrt{5}) \\ \times\big(9x^2 + 12x + 9\big)\end{array}}$

17.13 a) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{x} + 1}{x - 1}}$

17.13 b) .... $\boxed{\sqrt{x^2 + 1} + x}$

17.13 c) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{x^2 + x} + x}{x}}$

17.13 d) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{x^2 + 4} + 2}{x^2}}$

17.14 a) .... $\boxed{\dfrac{(4 - a)\sqrt{a}}{a}}$

17.14 b) .... $\boxed{-a^{-2n}}$

17.15 .... $\boxed{\dfrac{-6\sqrt{a} + 9}{a - 9}}$

17.16 a) .... $\boxed{\text{non}}$

17.16 b) .... $\boxed{\text{non}}$

17.17 a) .... $\boxed{(-1,2)}$

17.17 b) .... $\boxed{-1+2\sqrt{3}}$

17.17 c) .... $\boxed{1+2\sqrt{3}}$

17.17 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{11}+\dfrac{24}{121}\sqrt{3}}$

17.18 a) .... $\boxed{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$

17.18 b) .... $\boxed{\sqrt{n+1}-1}$

Corrigés

17.3 a) On a $\left(3\sqrt{5}+5\sqrt{2}\right)^2 = 9\times 5+2\times 15\sqrt{10}+25\times 2 = 95+30\sqrt{10}$.

....

17.3 b) On a $\left(2\sqrt{6}-7\sqrt{10}\right)^2 = 4\times 6-28\sqrt{60}+49\times 10 = 514-28\times 2\sqrt{15} = 514-56\sqrt{15}$.

....

17.3 c) On a $\left(3\sqrt{6}-7\right)\left(3\sqrt{6}+7\right) = 9\times 6-7^2 = 54-49 = 5$.

....

17.3 d) On a
$$\begin{aligned}\left(-1+3\sqrt{2}\right)^2\left(\sqrt{2}-1\right)^2 &= \left(1-6\sqrt{2}+18\right)\times\left(2-2\sqrt{2}+1\right)\\ &= \left(19-6\sqrt{2}\right)\times\left(3-2\sqrt{2}\right) = 57-38\sqrt{2}-18\sqrt{2}+12\times 2 = 81-56\sqrt{2}.\end{aligned}$$

....

17.4 On a $\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2 = 3+8+5+4\sqrt{6}-2\sqrt{15}-4\sqrt{10} = 16+4\sqrt{6}-4\sqrt{10}-2\sqrt{15}$.

....

17.5 a) On a $\sqrt{2^{2n-4}\times 5^{2n+6}} = \sqrt{\left(2^{n-2}\times 5^{n+3}\right)^2} = 2^{n-2}\times 5^{n+3}$.

....

17.5 b) On a $\sqrt{\dfrac{2^{8n}}{5^{4n+2}}} = \sqrt{\left(\dfrac{2^{4n}}{5^{2n+1}}\right)^2} = \dfrac{2^{4n}}{5^{2n+1}}$.

....

17.5 c) On a $\sqrt{\dfrac{3^{4n}}{9^{2-6n}}}\times\dfrac{1}{\sqrt{81^n}} = \sqrt{\left(\dfrac{3^{2n}}{\left(3^2\right)^{1-3n}}\times 3^{-2n}\right)^2} = \dfrac{3^{2n-2n}}{3^{2-6n}} = 3^{6n-2}$.

....

17.5 d) On a $\sqrt{\dfrac{25^{2n}}{4^{6n-4}}}\times\dfrac{\sqrt{64^n}}{\sqrt{125^{2n+2}}} = \dfrac{\sqrt{5^{4n}}}{\sqrt{2^{12n-8}}}\times\dfrac{\sqrt{2^{6n}}}{\sqrt{5^{6n+6}}} = \dfrac{5^{2n}\times 2^{3n}}{2^{6n-4}\times 5^{3n+3}} = 2^{-3n+4}\times 5^{-n-3}$.

....

17.6 a) On a $\dfrac{\sqrt{5}-7}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-7\right)}{\sqrt{3}^2} = \dfrac{\sqrt{15}-7\sqrt{3}}{3}$.

....

17.6 b) On a
$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{3}} &= \frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{5}-\frac{\sqrt{15}-2\sqrt{3}}{3}\\ &= \frac{3\sqrt{15}-3\sqrt{5}-45\sqrt{15}+10\sqrt{3}}{15} = \frac{10\sqrt{3}-3\sqrt{5}-2\sqrt{15}}{15}.\end{aligned}$$

....

17.6 c) On a $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \dfrac{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}{\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)} = \dfrac{6-4\sqrt{2}}{2} = 3-2\sqrt{2}$.

....

17.6 d) On a
$$\begin{aligned}\frac{6-\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}+\frac{5-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} &= \frac{(6-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}+\frac{(5-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}\\ &= \frac{18+6\sqrt{2}-3\sqrt{2}-2}{7}+\frac{10+5\sqrt{3}-2\sqrt{3}-3}{1} = \frac{65+3\sqrt{2}+21\sqrt{3}}{7}.\end{aligned}$$

....

17.7 On a $\dfrac{1}{\sqrt{5}+2} - \sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}} = \dfrac{\sqrt{5}-2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} - \sqrt{\dfrac{(\sqrt{5}-2)^2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}} = \sqrt{5}-2-(\sqrt{5}-2) = 0.$

17.8 a) On a $\varphi^2 + 2\varphi - 5 = \dfrac{1+2\sqrt{5}+5+4+4\sqrt{5}-20}{4} = \dfrac{-10+6\sqrt{5}}{4} = \dfrac{-5+3\sqrt{5}}{2}.$

17.8 b) On a $\varphi^2 = \dfrac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \dfrac{6+2\sqrt{5}}{4} = \dfrac{2+1+2\sqrt{5}}{2} = 1+\varphi.$

17.8 c) On a $1 + \dfrac{1}{\varphi} = \dfrac{\varphi+1}{\varphi} = \dfrac{\varphi^2}{\varphi} = \varphi.$

17.8 d) On a $\varphi^3 = \varphi \times \varphi^2 = \varphi\big(1+\varphi\big) = \varphi + \varphi^2 = \varphi + 1 + \varphi = 1 + 2\varphi.$

17.8 e) On a $\varphi^7 = \big(\varphi^3\big)^2 \times \varphi = \big(1+2\varphi\big)^2 \times \varphi = \big(1+4\varphi+4\varphi^2\big) \times \varphi = \varphi+4\varphi^3+4\varphi^2 = \varphi+4+8\varphi+4+4\varphi = 8+13\varphi.$

17.9 a) On a $\sqrt{a^3}^4 = \sqrt{\big(\sqrt{a^3}^2\big)}^2 = \big(a^3\big)^2 = a^6.$

17.9 b) On a $\sqrt{\left(\dfrac{-1}{a}\right)^4}^{-2} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{a^{-4}}} = a^4.$

17.9 c) On a $\dfrac{3\sqrt{a^{-2}}^4}{-2\sqrt{a}^2} = \dfrac{3a^{-4}}{-2a} = -\dfrac{3}{2}a^{-5}.$

17.9 d) On a $\left(\dfrac{\sqrt{16\sqrt{a}}}{\sqrt{a^{-4}}}\right)^2 = \dfrac{16\sqrt{a}}{a^{-4}} = 16a^4\sqrt{a}.$

17.10 On a $\sqrt{a^2\sqrt{a^4\sqrt{a^8\sqrt{a^{16}}}}} = \sqrt{a^2\sqrt{a^4\sqrt{a^8 \times a^8}}} = \sqrt{a^2\sqrt{a^4 \times a^8}} = \sqrt{a^2 \times a^6} = \sqrt{a^8} = a^4.$

17.11 a) On a $\sqrt{(5a)^2 - (4a)^2} = \sqrt{\big(25a^2 - 16a^2\big)} = \sqrt{9a^2} = 3a.$

17.11 b) On a $\sqrt{(a^2+1)^2 - (2a)^2} = \sqrt{a^4+2a^2+1-4a^2} = \sqrt{a^4-2a^2+1} = \sqrt{(a^2-1)^2} = a^2 - 1.$

17.11 c) On a $\sqrt{a^2 - (a-1)^2} = \sqrt{(a-a+1)(a+a-1)} = \sqrt{2a-1}.$

17.11 d) On a $\sqrt{(a^2+2)^2 - 4a^2} = \sqrt{a^4+4a^2+4-4a^2} = \sqrt{a^4+4}.$

17.12 a) On a $2x^2 - 10 = 2\big(x^2 - \sqrt{5}^2\big) = 2\big(x-\sqrt{5}\big)\big(x+\sqrt{5}\big).$

17.12 d) On a $(x+1)^2 - 6 = (x+1)^2 - \sqrt{6}^2 = (x+1-\sqrt{6})(x+1+\sqrt{6}).$

17.12 e) On a $2x^4 - 8 = 2\big((x^2)^2 - 2^2\big) = 2(x^2-2)(x^2+2) = 2(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+2).$

17.12 f) On a

$$\begin{aligned}(3x+2)^4 - 25 &= \big((3x+2)^2\big)^2 - 5^2 = \big((3x+2)^2 - 5\big)\big((3x+2)^2+5\big)\\ &= (3x+2-\sqrt{5})(3x+2+\sqrt{5})\big(9x^2+12x+9\big).\end{aligned}$$

17.13 a) On a $\dfrac{1}{\sqrt{x}-1} = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}^2-1} = \dfrac{\sqrt{x}+1}{x-1}$.

17.13 b) On a $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = \dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}^2-x^2} = \sqrt{x^2+1}+x$.

17.13 c) On a $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}-x} = \dfrac{\sqrt{x^2+x}+x}{\sqrt{x^2+x}^2-x^2} = \dfrac{\sqrt{x^2+x}+x}{x}$.

17.13 d) On a $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}-2} = \dfrac{\sqrt{x^2+4}+2}{\left(\sqrt{x^2+4}-2\right)\sqrt{x^2+4}+2} = \dfrac{\sqrt{x^2+4}+2}{x^2}$.

17.14 a) On calcule $\dfrac{\left(2\sqrt{a}+a\right)\left(a-\sqrt{4a}\right)}{-a\sqrt{a}} = -\dfrac{2a\sqrt{a}-4a+a^2-2a\sqrt{a}}{a\sqrt{a}} = \dfrac{4\sqrt{a}-a\sqrt{a}}{a} = \dfrac{(4-a)\sqrt{a}}{a}$.

17.14 b) On calcule $\dfrac{\sqrt{a}^{4n} \times \dfrac{1}{\sqrt{a^{7n}}}}{-\sqrt{a^n}} = -\dfrac{a^{2n}}{\sqrt{a}^{7n+n}} = -\dfrac{a^{2n}}{a^{4n}} = -\dfrac{1}{a^{2n}} = -a^{-2n}$.

17.15 On a $\dfrac{\sqrt{\sqrt{a}-3}}{\sqrt{\sqrt{a}+3}} - \dfrac{\sqrt{\sqrt{a}+3}}{\sqrt{\sqrt{a}-3}} = \dfrac{\sqrt{\sqrt{a}-3}^2}{\sqrt{\sqrt{a}+3}\sqrt{\sqrt{a}-3}} - \dfrac{\sqrt{\sqrt{a}+3}^2}{\sqrt{\sqrt{a}-3}\sqrt{\sqrt{a}+3}} = \dfrac{-6}{\sqrt{a-9}} = \dfrac{-6\sqrt{a-9}}{a-9}$.

17.16 a) On a $2^2 < \sqrt{5}^2$ donc $2-\sqrt{5} < 0$ ainsi, $\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)}$ n'existe pas.

17.16 b) Comparons $\sqrt{\sqrt{5}-2}$ à 1 en comparant leurs carrés : $\sqrt{5}-2$ et 1.

On a $\sqrt{5}-2-1 = \sqrt{5}-3$. Comme $5 < 9$, on a $\sqrt{5} < 3$ et donc $\sqrt{5}-2 < 1$. La quantité initiale n'existe donc pas.

17.17 a) On a $\left(a+b\sqrt{3}\right)^2 = a^2+2ab\sqrt{3}+b^2$. Ainsi, $\left(a+b\sqrt{3}\right)^2 = 13-4\sqrt{3} \iff \begin{cases} a^2+3b^2 = 13 \\ 2ab = -4. \end{cases}$

Les nombres a et b sont entiers, donc ils ne peuvent valoir que -1 et 2. On vérifie que les couples $(1,-2)$ et $(-1,2)$ vérifient l'équation $a^2+3b^2 = 13$. Comme $a < 0$, la seule solution est donc $(-1,2)$.

17.17 b) On a $-1+2\sqrt{3} > 0$ et $\left(-1+2\sqrt{3}\right)^2 = 13-4\sqrt{3}$, donc $\sqrt{13-4\sqrt{3}} = -1+2\sqrt{3}$.

17.17 d) On a $\dfrac{1}{\sqrt{13-4\sqrt{3}}} = \dfrac{1}{-1+2\sqrt{3}} = \dfrac{1+2\sqrt{3}}{(1+2\sqrt{3})\times(-1+2\sqrt{3})} = \dfrac{1+2\sqrt{3}}{12-1} = \dfrac{1}{11}+\dfrac{2}{11}\sqrt{3}$.

17.18 a) On a $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} = \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)} = \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{x+1-x} = \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$.

17.18 b) On a

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \\ &= \left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right) + \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) + \cdots + \left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right) + \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) \\ &= \sqrt{n+1}-\sqrt{1} = \sqrt{n+1}-1. \end{aligned}$$

Fiche n° 18. Développement d'expressions I

Réponses

18.1 a) $\boxed{2x+2}$

18.1 b) $\boxed{4x+12}$

18.1 c) $\boxed{5x+6}$

18.1 d) $\boxed{22x+30}$

18.1 e) $\boxed{22x+16}$

18.1 f) $\boxed{14x+36}$

18.2 a) $\boxed{-2x-4}$

18.2 b) $\boxed{-3x+15}$

18.2 c) $\boxed{5x+8}$

18.2 d) $\boxed{10x-6}$

18.2 e) $\boxed{-12x+30}$

18.2 f) $\boxed{-2x+19}$

18.3 a) $\boxed{x+2}$

18.3 b) $\boxed{\dfrac{5}{2}x-\dfrac{4}{3}}$

18.3 c) $\boxed{-\dfrac{1}{8}x+\dfrac{17}{3}}$

18.3 d) $\boxed{-x+\dfrac{11}{12}}$

18.4 a) $\boxed{10x^2-13x-3}$

18.4 b) $\boxed{15x^2+7x-2}$

18.4 c) $\boxed{-7x^2+12x}$

18.4 d) $\boxed{-2x}$

18.5 a) $\boxed{2x^2-\dfrac{3}{2}x}$

18.5 b) $\boxed{-\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{63}{4}x+6}$

18.5 c) $\boxed{\dfrac{9}{2}x^2-17x+\dfrac{38}{3}}$

18.5 d) $\boxed{40x^2-x-\dfrac{1}{20}}$

18.6 a) $\boxed{-6xy+9x+2y-3}$

18.6 b) $\boxed{-5ab+5a-b}$

18.6 c) $\boxed{2t^2-3z^2-tz}$

18.6 d) $\boxed{u^2v-uv^2-2v+2u}$

18.6 e) $\boxed{rs-r-s}$

18.6 f) $\boxed{\dfrac{1}{2}pq}$

18.7 a) $\boxed{\sqrt{3}+3}$

18.7 b) $\boxed{2\sqrt{5}-60}$

18.7 c) $\boxed{-2\sqrt{7}+26}$

18.7 d) $\boxed{46\sqrt{2}+33}$

18.7 e) $\boxed{\dfrac{15}{2}\sqrt{2}-9}$

18.7 f) $\boxed{-\sqrt{15}+1}$

Corrigés

18.1 a) En développant, on obtient $2(x+1) = 2\times x + 2\times 1 = 2x+2$.

18.1 b) En développant, on obtient $(x+3)\times 4 = x\times 4 + 3\times 4 = 4x+12$.

18.1 c) En développant, puis en réduisant, on obtient $5(1+x)+1 = 5\times 1 + 5\times x + 1 = 5x+6$.

18.1 d) On procède comme précédemment pour les questions suivantes.

18.2 a) On procède comme l'exercice précédent, en appliquant la règle des signes.

18.3 a) On procède comme les exercices précédents, en écrivant les fractions sous leur forme irréductible.

18.4 a) En développant, puis en réduisant on obtient :

$$(2x-3)(5x+1) = 2x\times 5x + 2x\times 1 - 3\times 5x - 3\times 1 = 10x^2-13x-3.$$

18.4 b) En développant par double distributivité, puis en développant par -1, on obtient :

$$-(1-5x)(3x+2) = -(3x+2-15x^2-10x) = -(-15x^2-7x+2) = 15x^2+7x-2.$$

18.4 c) On a :

$$2x\,(6-5x)+3x^2 = 12x-10x^2+3x^2 = -7x^2+12x.$$

18.4 d) On a :

$$x\,(3x-5)-3x\,(x-1) = 3x^2-5x-3x^2+3x = -2x.$$

18.5 a) On procède comme l'exercice précédent, en écrivant les fractions sous leur forme irréductible.

18.6 a) En développant, puis en réduisant, on obtient :

$$(3x-1)(-2y+3) = -6xy+9x+2y-3 = -6xy+9x+2y-3.$$

18.6 b) En développant, puis en réduisant, on obtient :

$$a\,(-2b+5)-b\,(3a+1) = -2ab+5a-3ab-b = -5ab+5a-b.$$

18.6 c) En développant, puis en réduisant, on obtient :

$$(t+z)(2t-3z) = 2t^2-3tz+2tz-3z^2 = 2t^2-3z^2-tz.$$

18.6 d) En développant, puis en réduisant, on obtient :

$$uv\,(u-v)-2\,(v-u) = u^2v-uv^2-2v+2u.$$

18.6 e) En développant, puis en réduisant, on obtient :

$$-\frac{r}{2}\,(2-s)-\frac{s}{2}\,(2-r) = -\frac{r}{2}\times 2-\frac{r}{2}\times s-\frac{s}{2}\times 2+\frac{s}{2}\times r = -r+\frac{rs}{2}-s+\frac{rs}{2} = rs-r-s.$$

18.6 f) En développant, puis en réduisant, on obtient :

$$p\,(q-\frac{1}{2}p)+\frac{1}{2}p\,(p-q) = pq-\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}p^2-\frac{1}{2}pq = \frac{1}{2}pq.$$

18.7 a) En développant, puis en réduisant, on obtient :

$$\sqrt{3}\,(\sqrt{3}+1) = \sqrt{3}\times\sqrt{3}+\sqrt{3}\times 1 = 3+\sqrt{3}.$$

18.7 b) En développant, puis en réduisant, on obtient :

$$4\sqrt{5}\left(\frac{1}{2}-3\sqrt{5}\right) = 4\sqrt{5}\times\frac{1}{2}-4\sqrt{5}\times 3\sqrt{5} = 2\sqrt{5}-12\times 5 = 2\sqrt{5}-60.$$

18.7 c) On procède de la même manière pour les questions suivantes.

Fiche n° 19. Développement d'expressions II

Réponses

19.1 a) .... $\boxed{x^3 - x^2 + x + 3}$

19.1 b) .... $\boxed{x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz}$

19.1 c) .... $\boxed{-2x^5 + x^3 - 2x^2y + 14x^2 + y - 7}$

19.1 d) .... $\boxed{\sqrt{10}\,x^2 - 3xy - \sqrt{10}\,y^2}$

19.2 a) .... $\boxed{z^4 - 256}$

19.2 b) .... $\boxed{u^3 + 2\sqrt{2}\,u^2 + 4u + 2\sqrt{2}}$

19.2 c) .... $\boxed{(1+\sqrt{2})a^3 + ab^3 - a^2b + (1-\sqrt{2})b^4}$

19.3 a) .... $\boxed{x^4 - 4x^3 + 4x^2}$

19.3 b) .... $\boxed{4y^4 + 16y^3 + 16y^2}$

19.4 a) .... $\boxed{x^3 - 1}$

19.4 b) .... $\boxed{v^5 + 1}$

19.5 a) .... $\boxed{t^4 - 81}$

19.5 b) .... $\boxed{z^5 - 4\sqrt{2}}$

19.6 a) .... $\boxed{x^3 + 9x^2 + 15x - 25}$

19.6 b) .... $\boxed{-u^3 + 5u^2 + 8u - 48}$

19.6 c) .... $\boxed{v^4 - 2v^3 - 3v^2 + 4v + 4}$

19.6 d) .... $\boxed{x^4 - 2x^2y^2 + y^4}$

19.7 a) .... $\boxed{4xy}$

19.7 b) .... $\boxed{12u^2 + 16}$

19.8 a) .... $\boxed{x^2 + x - 1 - \frac{1}{x}}$

19.8 b) .... $\boxed{z^3 - z^2 - 5z + 2}$

19.9 a) .... $\boxed{x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}}$

19.9 b) .... $\boxed{ab + \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} + 1}$

Corrigés

19.1 a) On a $(x+1)\big(x^2 - 2x + 3\big) = x^3 - 2x^2 + 3x + x^2 - 2x + 3 = x^3 - x^2 + x + 3$.

19.1 b) On écrit $(x+y+z)^2 = (x+y+z)(x+y+z)$, puis on développe :

$$(x+y+z)^2 = x^2 + xy + xz + yx + y^2 + yz + zx + zy + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz.$$

19.1 c) On a $-\big(2x^2 - 1\big)\big(x^3 + y - 7\big) = \big(-2x^2 + 1\big)\big(x^3 + y - 7\big) = -2x^5 + x^3 - 2x^2y + 14x^2 + y - 7$.

19.1 d) Sachant que $\sqrt{5} \times \sqrt{2} = \sqrt{10}$, on obtient $x^2\sqrt{10} - 5xy + 2xy - y^2\sqrt{10} = x^2\sqrt{10} - 3xy - y^2\sqrt{10}$.

19.2 a) On développe : $(z+4)(z-4)(z^2+16) = (z^2 - 16)(z^2 + 16) = z^4 - 256$.

19.2 b) On a $(u + \sqrt{2})(u^2 + u\sqrt{2} + 2) = u^3 + \sqrt{2}\,u^2 + 2u + \sqrt{2}\,u^2 + 2u + 2\sqrt{2} = u^3 + 2\sqrt{2}\,u^2 + 4u + 2\sqrt{2}$.

19.2 c) Il faut commencer par observer que $(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) = -1$. Ainsi, en développant,

$$\big((1+\sqrt{2})a - b\big)\big(a^2 - (1-\sqrt{2})b^3\big) = (1+\sqrt{2})a^3 + ab^3 - a^2b + (1-\sqrt{2})b^4.$$

19.3 a) On commence par développer le produit à l'intérieur des parenthèses. On a $(x+3)(x-5) = x^2 - 2x - 15$. Ainsi, $(x+3)(x-5)+15 = x^2 - 2x$ et enfin, $\big((x+3)(x-5)+15\big)^2 = \big(x^2 - 2x\big)^2 = \big(x^2 - 2x\big)\big(x^2 - 2x\big) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$.

19.3 b) On développe l'expression intérieure : $\left(\frac{1}{2}y-1\right)^2-\left(\frac{3}{2}y+1\right)^2=-2y^2-4y$, après réduction.
On développe ensuite $(-2y^2-4y)^2$ pour conclure, cela donne : $(-2y^2-4y)^2=4y^4+16y^3+16y^2$.

19.4 a) On développe et on observe que la plupart des termes s'annulent. Seuls les termes de degré extrême subsistent : c'est une somme télescopique. Plus en détail, on a $(x-1)\big(1+x+x^2\big)=x+x^2+x^3-1-x-x^2=x^3-1$.

19.4 b) C'est le même principe que dans la question précédente. On développe et on observe à nouveau qu'il ne reste que les termes de degré extrême. Plus en détail, on a :

$$(v+1)\big(1-v+v^2-v^3+v^4\big)=v-v^2+v^3-v^4+v^5+1-v+v^2-v^3+v^4=v^5+1.$$

19.5 a) On retrouve une structure similaire à l'exercice précédent. On a :

$$(t+3)\big(-27+9t-3t^2+t^3\big)=-27t+9t^2-3t^3+t^4-81+27t-9t^2+3t^3=t^4-81.$$

19.5 b) C'est toujours le même principe avec des opérations sur les racines carrées. On a :

$$\begin{aligned}(z-\sqrt{2})\big(4+2\sqrt{2}\,z+2z^2+\sqrt{2}\,z^3+z^4\big)&=4z+2\sqrt{2}\,z^2+2z^3+\sqrt{2}\,z^4+z^5-4\sqrt{2}-4z-2\sqrt{2}\,z^2-2z^3-\sqrt{2}\,z^4\\&=z^5-4\sqrt{2}.\end{aligned}$$

De manière générale, on peut montrer que pour tous réels x et a et tout entier naturel n,

$$(x-a)(x^n+x^{n-1}a+x^{n-2}a^2+\cdots+x^2a^{n-2}+xa^{n-1}+a^n)=x^{n+1}-a^{n+1}.$$

19.6 a) On développe : $(x-1)(x+5)^2=(x-1)(x^2+10x+25)=x^3+9x^2+15x-25$.

19.6 b) On développe : $-(u+3)(u-4)^2=(-u-3)(u^2-8u+16)=-u^3+5u^2+8u-48$.

19.6 c) On a $(v+1)^2=v^2+2v+1$ et $(v-2)^2=v^2-4v+4$. Ainsi, on a

$$(v+1)^2(v-2)^2=(v^2+2v+1)(v^2-4v+4)=v^4-2v^3-3v^2+4v+4.$$

19.6 d) On peut utiliser les propriétés des puissances pour simplifier les calculs.
On remarque que $(x+y)^2(x-y)^2=\big((x+y)(x-y)\big)^2$. Puisque $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$, on obtient le résultat final en développant $(x^2-y^2)^2$, ce qui donne $x^4-2x^2y^2+y^4$.

19.7 a) On a $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ et $(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$. Ainsi, par soustraction des deux résultats, on a $(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$.

19.7 b) On a $(u+2)^3=(u+2)(u^2+4u+4)=u^3+6u^2+12u+8$ et de manière analogue $(u-2)^3=u^3-6u^2+12u-8$. Ainsi, par soustraction des deux résultats, on a $(u+2)^3-(u-2)^3=12u^2+16$.

19.8 a) On a $\left(1-\frac{1}{x}\right)\big(x^2+2x+1\big)=x^2+2x+1-x-2-\frac{1}{x}=x^2+x-1-\frac{1}{x}$.

19.8 b) On a $\left(1+\frac{2}{z}\right)\big(z^3-3z^2+z\big)=z^3-3z^2+z+2z^2-6z+2=z^3-z^2-5z+2$.

Fiche n° 20. Relations entre variables

Réponses

20.1 a) $\boxed{\dfrac{U}{R}}$

20.1 b) $\boxed{3M - b - c}$

20.1 c) $\boxed{\dfrac{a-r}{q}}$

20.2 a) $\boxed{100(C-1)}$

20.2 b) $\boxed{100(1-C)}$

20.2 c) $\boxed{340 - 100C}$

20.2 d) $\boxed{\dfrac{20C+220}{3}}$

20.3 a) $\boxed{\dfrac{100t}{100-t}}$

20.3 b) $\boxed{\dfrac{100t}{t+100}}$

20.3 c) $\boxed{\dfrac{10\,000(t+u)+100tu}{(100+t)(100+u)}}$

20.4 a) $\boxed{\dfrac{g^2}{a}}$

20.4 b) $\boxed{\sqrt{ab}}$

20.5 a) $\boxed{\dfrac{pq}{p+q}}$

20.5 b) $\boxed{\dfrac{pr}{p-r}}$

20.6 a) $\boxed{\dfrac{y+1}{y-1}}$

20.6 b) $\boxed{\dfrac{y-2}{y+1}}$

20.6 c) $\boxed{\dfrac{5y+1}{4-y}}$

20.6 d) $\boxed{\dfrac{2y+12}{1-14y}}$

20.7 a) $\boxed{\dfrac{y+8}{16}}$

20.7 b) $\boxed{\dfrac{y}{4}+\dfrac{1}{3y}}$

20.7 c) $\boxed{\dfrac{y^2+6}{10}}$

20.7 d) $\boxed{-\dfrac{21y+1}{42y+3}}$

20.8 a) $\boxed{\dfrac{1+2y^2}{1-y^2}}$

20.8 b) $\boxed{\dfrac{2-y^2}{2y-2}}$

20.8 c) $\boxed{\dfrac{y^2}{2y+1}}$

20.8 d) $\boxed{\dfrac{y^4+4}{4y^2}}$

Corrigés

20.1 b) On a $M = \dfrac{a+b+c}{3}$, donc $3M = a+b+c$ et ainsi $a = 3M - b - c$.

20.1 c) On a $a = b \times q + r$, donc $b \times q = a - r$ et ainsi $b = \dfrac{a-r}{q}$.

20.2 a) On a $C = 1 + \dfrac{t}{100}$, donc $100C = 100 + t$. D'où $t = 100C - 100 = 100(C-1)$.

20.2 c) On a $10C + \dfrac{t}{10} = 34$, donc $100C + t = 340$. D'où $t = 340 - 100C$.

20.2 d) On a $4C - \dfrac{3t}{5} = -44$, donc $\dfrac{3t}{5} = 4C + 44$. D'où $t = \dfrac{5(4C+44)}{3} = \dfrac{20C+220}{3}$.

20.3 a) On a $\left(1 - \dfrac{t}{100}\right)\left(1 + \dfrac{t'}{100}\right) = 1$, soit $(100-t)(100+t') = 10\,000$. Donc, pour tout $t \neq 100$, on a $100 + t' = \dfrac{10\,000}{100-t}$. Ainsi, on a $t' = \dfrac{10\,000}{100-t} - 100 = \dfrac{100t}{100-t}$.

20.3 b) On a $\left(1 + \dfrac{t}{100}\right)\left(1 - \dfrac{t'}{100}\right) = 1$, soit $(100+t)(100-t') = 10\,000$. Donc, pour tout $t \neq -100$, on a $100 - t' = \dfrac{10\,000}{100+t}$. Ainsi, on a $t' = 100 - \dfrac{10\,000}{100+t} = \dfrac{100t}{100+t}$.

20.3 c) On a $\left(1+\dfrac{t}{100}\right)\left(1+\dfrac{u}{100}\right)\left(1-\dfrac{t'}{100}\right)=1$, d'où $(100+t)(100+u)(100-t')=1\,000\,000$. Pour $t,u\neq-100$, on a ainsi $100-t'=\dfrac{1\,000\,000}{(100+t)(100+u)}$ et donc $t'=100-\dfrac{1\,000\,000}{(100+t)(100+u)}=\dfrac{10\,000(t+u)+100tu}{(100+t)(100+u)}$.

20.4 b) On a $\dfrac{a}{g}=\dfrac{g}{b}$, donc $g^2=ab$, et ainsi $g=\sqrt{ab}$, car $g>0$.

20.5 a) On a $\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{p+q}{pq}$. Donc $r=\dfrac{pq}{p+q}$.

20.5 b) On a $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$, donc $\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{p}=\dfrac{p-r}{pr}$. Ainsi, $q=\dfrac{pr}{p-r}$.

20.6 a) On a $y=\dfrac{x+1}{x-1}$, donc $y(x-1)=x+1$, soit $(y-1)x=y+1$. Donc, pour tout $y\neq1$, $x=\dfrac{y+1}{y-1}$.

20.6 b) On a $y=\dfrac{x+2}{1-x}$, donc $y(1-x)=x+2$, soit $(y+1)x=y-2$. Donc, pour tout $y\neq-1$, $x=\dfrac{y-2}{y+1}$.

20.6 d) On a $2y(7x+1)=x-12$, soit $(1-14y)x=2y+12$. Donc, pour tout $y\neq\dfrac{1}{14}$, $x=\dfrac{2y+12}{1-14y}$.

20.7 a) On a $(2x+1)^2-(2x-3)^2=(4x^2+4x+1)-(4x^2-12x+9)=16x-8$. Donc, $y=16x-8$ et donc $16x=y+8$. Ainsi, on a $x=y+8/16$.

20.7 b) On a $\left(x+\dfrac{y}{2}\right)^2-(x-y)^2=\left(x^2+xy+\dfrac{y^2}{4}\right)-(x^2-2xy+y^2)=3xy-\dfrac{3y^2}{4}$. Donc, $3xy-\dfrac{3y^2}{4}=1$ et donc $3xy=1+\dfrac{3y^2}{4}$. Ainsi, pour tout $y\neq0$, on obtient $x=\dfrac{y}{4}+\dfrac{1}{3y}$.

20.7 c) On a $(3x+1)^2-(3x-4)^2=(9x^2+6x+1)-(9x^2-24x+16)=30x-15$. Donc, $\dfrac{30x-15}{y^2+1}=3$ et donc $30x-15=3y^2+3$. Ainsi, on a $x=3y^2+18/30=y^2+6/10$.

20.7 d) On a $(3x-2)^2-(3x+5)^2=(9x^2-12x+4)-(9x^2+30x+25)=-42x-21$. Donc, $y=\dfrac{3x+1}{-42x-21}$ et donc $(-42x-21)y=3x+1$. Ainsi $(42y+3)x=-(21y+1)$. Donc, pour tout $y\neq-\dfrac{1}{14}$, on obtient $x=-\dfrac{21y+1}{42y+3}$.

20.8 a) Comme $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}$, on a $y^2=\dfrac{x-1}{x+2}$, donc $y^2(x+2)=x-1$. Donc, $(1-y^2)x=1+2y^2$. Ainsi, pour tout $y\neq\pm1$, on obtient $x=\dfrac{1+2y^2}{1-y^2}$.

20.8 b) Comme $y+x=\sqrt{x^2+2x+2}$, on a $(y+x)^2=x^2+2x+2$ et donc $y^2+2xy+x^2=x^2+2x+2$. Donc, on a $x(2y-2)=2-y^2$, et pour tout $y\neq1$, on obtient $x=\dfrac{2-y^2}{2y-2}$.

20.8 c) Comme $y=x+\sqrt{x(x+1)}$, on a $y-x=\sqrt{x(x+1)}=\sqrt{x^2+x}$, et ainsi $(y-x)^2=x^2+x$. Donc, $y^2-2xy+x^2=x^2+x$ et donc $y^2-2xy=x$. D'où, $x(2y+1)=y^2$; ainsi, pour tout $y\neq-\dfrac{1}{2}$, on a $x=\dfrac{y^2}{2y+1}$.

20.8 d) Comme $y+\sqrt{x-1}=\sqrt{x+1}$, on a $(y+\sqrt{x-1})^2=x+1$ donc $y^2+2\sqrt{x-1}y+x-1=x+1$, et ainsi $2\sqrt{x-1}y=2-y^2$. Pour tout $y\neq0$, on obtient $\sqrt{x-1}=\dfrac{2-y^2}{2y}$, donc $x-1=\dfrac{(2-y^2)^2}{4y^2}$. D'où :

$$x=1+\frac{(2-y^2)^2}{4y^2}=1+\frac{4-4y^2+y^4}{4y^2}=\frac{y^4+4}{4y^2}.$$

Fiche n° 21. Premières identités remarquables

Réponses

21.1 a) $\boxed{x^2+2x+1}$

21.1 b) $\boxed{4x^2-20x+25}$

21.1 c) $\boxed{9t^2+8t+\dfrac{16}{9}}$

21.1 d) $\boxed{\dfrac{9}{4}t^2-6t+4}$

21.2 a) $\boxed{3x^2-2\sqrt{6}x+2}$

21.2 b) $\boxed{\dfrac{t^2}{2}+\sqrt{2}t+1}$

21.2 c) $\boxed{\dfrac{9}{y}-\dfrac{3}{\sqrt{y}}+\dfrac{1}{4}}$

21.2 d) $\boxed{y-\dfrac{2}{\sqrt{y}}+\dfrac{1}{y^2}}$

21.3 a) $\boxed{\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{1}{y^2}-1}$

21.3 b) $\boxed{y-2\sqrt{y}+1}$

21.3 c) $\boxed{18x^2+12x+2}$

21.3 d) $\boxed{-25x^2+10x+2}$

21.4 a) $\boxed{5-2\sqrt{6}}$

21.4 b) $\boxed{107-40\sqrt{6}}$

21.5 a) $\boxed{\dfrac{28}{3}+2\sqrt{3}}$

21.5 b) $\boxed{\dfrac{9}{2}-2\sqrt{2}}$

21.5 c) $\boxed{\dfrac{5\sqrt{2}}{2}-2\sqrt{3}}$

21.5 d) $\boxed{\dfrac{221}{16}-\dfrac{3\sqrt{30}}{4}}$

21.6 a) $\boxed{12+9\sqrt{2}}$

21.6 b) $\boxed{3}$

21.7 a) $\boxed{2t-1}$

21.7 b) $\boxed{t^2+1}$

21.7 c) $\boxed{t^4-16}$

21.7 d) $\boxed{4t^3+8t^2-11t+3}$

21.8 a) $\boxed{\dfrac{a^4}{4}-a^2b+b^2}$

21.8 b) $\boxed{4t+4+\dfrac{1}{t}}$

21.8 c) $\boxed{4a^2b^2+12ab^2t+9b^2t^2}$

21.8 d) $\boxed{a^6-b^6}$

21.9 a) $\boxed{25x^2t^4-30x^3y^3t^2+9x^4y^6}$

21.9 b) $\boxed{x^2+9y^2+\dfrac{1}{4}t^2-xt+6xy-3yt}$

21.9 c) $\boxed{9x^2+4y^2+25z^2-12xy+30xz-20yz}$

21.9 d) $\boxed{x^3+y^3+3x^2y+3xy^2}$

Corrigés

21.1 a) On a $(x+1)^2 = x^2+2\times x\times 1+1^2$.

21.1 c) On a $\left(3t+\dfrac{4}{3}\right)^2 = (3t)^2+2\times 3t\times\dfrac{4}{3}+\left(\dfrac{4}{3}\right)^2 = 9t^2+8t+\dfrac{16}{9}$.

21.1 d) On a $\left(\dfrac{3}{2}t-2\right)^2 = \left(\dfrac{3}{2}t\right)^2-2\times\dfrac{3}{2}t\times 2+2^2 = \dfrac{9}{4}t^2-6t+4$.

21.2 a) On a $(\sqrt{3}x-\sqrt{2})^2 = (\sqrt{3}x)^2-2\times\sqrt{3}x\times\sqrt{2}+\sqrt{2}^2 = 3x^2-2\sqrt{6}x+2$.

21.2 b) On a $\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}}+1\right)^2 = \left(\dfrac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+2\times\dfrac{t}{\sqrt{2}}\times 1+1^2 = \dfrac{t^2}{2}+\sqrt{2}t+1$.

21.2 c) On a $\left(\dfrac{3}{\sqrt{y}}-\dfrac{1}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{3}{\sqrt{y}}\right)^2-2\times\dfrac{3}{\sqrt{y}}\times\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{y}-\dfrac{3}{\sqrt{y}}+\dfrac{1}{4}$.

21.2 d) On a $\left(\sqrt{y}-\dfrac{1}{y}\right)^2 = \left(\sqrt{y}\right)^2-2\times\sqrt{y}\times\dfrac{1}{y}+\left(\dfrac{1}{y}\right)^2 = y-\dfrac{2}{\sqrt{y}}+\dfrac{1}{y^2}$.

21.3 a) On a $\left(\dfrac{y}{2}-\dfrac{1}{y}\right)^2 = \left(\dfrac{y}{2}\right)^2-2\times\dfrac{y}{2}\times\dfrac{1}{y}+\left(\dfrac{1}{y}\right)^2 = \dfrac{y^2}{4}-1+\dfrac{1}{y^2} = \dfrac{y^2}{4}+\dfrac{1}{y^2}-1$.

21.3 c) On a $2(3x+1)^2 = 2\big((3x)^2 + 2\times 3x\times 1 + 1^2\big) = 2(9x^2+6x+1) = 18x^2+12x+2$.

21.3 d) On a $3-(1-5x)^2 = 3-\big(1^2-2\times1\times5x+(5x)^2\big) = 3-(1-10x+25x^2) = 3-1+10x-25x^2 = -25x^2+10x+2$.

21.4 b) On a $(5\sqrt{3}-4\sqrt{2})^2 = (5\sqrt{3})^2-2\times5\sqrt{3}\times4\sqrt{2}+(4\sqrt{2})^2 = 5^2\times(\sqrt{3})^2-40\sqrt{6}+4^2\times(\sqrt{2})^2 = 107-40\sqrt{6}$.

21.5 a) On a $\left(3+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 3^2+2\times3\times\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 9+2\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{3} = \dfrac{28}{3}+2\sqrt{3}$.

21.5 c) On a $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\big((\sqrt{2})^2-2\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2\big) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(2-2\sqrt{6}+3) = \dfrac{5}{\sqrt{2}}-\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}-2\sqrt{3}$.

21.5 d) On a $\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \left(\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2-2\times\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\times\dfrac{\sqrt{5}}{4}+\left(\dfrac{\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \dfrac{27}{2}-\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\times\dfrac{\sqrt{5}}{4}+\dfrac{5}{16} = \dfrac{221}{16}-\dfrac{3\sqrt{30}}{4}$.

21.6 a) On a $\sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{6})^2 = \sqrt{2}\big((\sqrt{3})^2+2\times\sqrt{3}\times\sqrt{6}+(\sqrt{6})^2\big) = \sqrt{2}(3+2\sqrt{18}+6) = \sqrt{2}(9+2\sqrt{18}) = 12+9\sqrt{2}$.

21.6 b) On a $1-(\sqrt{5}-\sqrt{7})(\sqrt{5}+\sqrt{7}) = 1-\big((\sqrt{5})^2-(\sqrt{7})^2\big) = 1-(5-7) = 1-(-2) = 1+2 = 3$.

21.7 b) On a $2t^2-(t-1)(t+1) = 2t^2-(t^2-1) = 2t^2-t^2+1 = t^2+1$.

21.7 c) On a $(t^2+4)(t-2)(t+2) = (t^2+4)(t^2-2^2) = (t^2+4)(t^2-4) = (t^2)^2-4^2 = t^4-16$.

21.7 d) On a $(t+3)(2t-1)^2 = (t+3)(4t^2-4t+1) = 4t^3-4t^2+t+12t^2-12t+3 = 4t^3+8t^2-11t+3$.

21.8 b) On a $\left(2\sqrt{t}+\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)^2 = \big(2\sqrt{t}\big)^2+2\times2\sqrt{t}\times\dfrac{1}{\sqrt{t}}+\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)^2 = 4t+4+\dfrac{1}{t}$.

21.8 c) On a $(2ab+3bt)^2 = (2ab)^2+2\times2ab\times3bt+(3bt)^2 = 4a^2b^2+12ab^2t+9b^2t^2$.

21.8 d) On a $(a^3-b^3)(a^3+b^3) = (a^3)^2-(b^3)^2 = a^6-b^6$.

21.9 a) On a $(5xt^2-3x^2y^3)^2 = (5xt^2)^2-2\times5xt^2\times3x^2y^3+(3x^2y^3)^2 = 25x^2t^4-30x^3y^3t^2+9x^4y^6$.

21.9 b) On a :

$$\begin{aligned}\left(x+3y-\frac{1}{2}t\right)^2 &= x^2+2\times x\times\left(3y-\frac{1}{2}t\right)+\left(3y-\frac{1}{2}t\right)^2 = x^2+6xy-xt+9y^2-2\times3y\times\frac{1}{2}t+\left(\frac{1}{2}t\right)^2\\ &= x^2+9y^2+\frac{1}{4}t^2+6xy-xt-3yt.\end{aligned}$$

21.9 c) On a :

$$\begin{aligned}(3x-2y+5z)^2 &= (3x-2y)^2+2\times(3x-2y)\times5z+(5z)^2 = 9x^2-12xy+4y^2+30xz-20yz+25z^2\\ &= 9x^2+4y^2+25z^2-12xy+30xz-20yz.\end{aligned}$$

21.9 d) On a :

$$\begin{aligned}(x+y)^3 &= (x+y)(x+y)^2 = (x+y)(x^2+2xy+y^2) = x^3+2x^2y+xy^2+yx^2+2xy^2+y^3\\ &= x^3+y^3+3x^2y+3xy^2.\end{aligned}$$

Fiche n° 22. Factorisations

Réponses

22.1 a) .... $\boxed{(2x-3)(8x+1)}$

22.1 b) .... $\boxed{(7x-3)(x-5)}$

22.1 c) .... $\boxed{(3x+7)(2x-3)}$

22.2 a) .... $\boxed{(2t-1)(9t-6)}$

22.2 b) .... $\boxed{(y-3)(-2y-13)}$

22.2 c) .... $\boxed{(3a-\sqrt{2})(2a-3)}$

22.2 d) .... $\boxed{\left(3t-\frac{1}{4}\right)(-2t+6)}$

22.3 a) .... $\boxed{\frac{1}{3}x-4=\boxed{-1}\times\left(4-\frac{1}{3}x\right)}$

22.3 b) .... $\boxed{\left(\frac{1}{3}x-4\right)(4x-10)}$

22.3 c) .... $\boxed{(3t-1)(3t+7)}$

22.3 d) .... $\boxed{(9-2x)\left(8x+\frac{13}{3}\right)}$

22.4 a) .... $\boxed{(6t-9)=\boxed{3}\times(2t-3)}$

22.4 b) .... $\boxed{(2t-3)(13t+10)}$

22.4 c) .... $\boxed{(x-7)(-8x+1)}$

22.4 d) .... $\boxed{(2x-5)(7x-9)}$

22.4 e) .... $\boxed{\left(x-\frac{1}{3}\right)(24x+11)}$

22.5 a) .... $\boxed{(7x-1)(14x-4)}$

22.5 b) .... $\boxed{(2t-1)(2t-7\sqrt{3})}$

22.5 c) .... $\boxed{(4z-1)(-z^2+4z+18)}$

22.6 a) .... $\boxed{(2x+3)(9x-1)}$

22.6 b) .... $\boxed{(7x-1)(25x-22)}$

Corrigés

22.1 a) Le facteur commun est $2x-3$. Donc, on peut écrire :

$$(x+5)(2x-3)+(7x-4)(2x-3)=(2x-3)(x+5+7x-4)=(2x-3)(8x+1).$$

....

22.1 c) On a $(2x-4)(3x+7)+3x+7=(2x-4)(3x+7)+(3x+7)\times 1=(3x+7)(2x-4+1)=(3x+7)(2x-3)$.

....

22.2 a) On a $(2t-1)(6t-5)+(3t-1)(2t-1)=(2t-1)(6t-5+3t-1)=(2t-1)(9t-6)$.

....

22.2 b) Le facteur commun est $y-3$. Donc, on peut écrire :

$$(y-3)(2y-4)-(y-3)(4y+9)=(y-3)((2y-4)-(4y+9))=(y-3)(2y-4-4y-9)=(y-3)(-2y-13).$$

....

22.2 c) Le facteur commun est $(3a-\sqrt{2})$. Donc, on peut écrire :

$$\begin{aligned}(3a-\sqrt{2})(4a+2)-(2a+5)(3a-\sqrt{2})&=(3a-\sqrt{2})((4a+2)-(2a+5))\\&=(3a-\sqrt{2})(4a+2-2a-5)=(3a-\sqrt{2})(2a-3).\end{aligned}$$

....

22.2 d) On a :

$$\begin{aligned}\left(3t-\frac{1}{4}\right)\left(-2t+7\right)-\left(3t-\frac{1}{4}\right)&=\left(3t-\frac{1}{4}\right)\left(-2t+7\right)-\left(3t-\frac{1}{4}\right)\times 1\\&=\left(3t-\frac{1}{4}\right)\left((-2t+7)-1\right)=\left(3t-\frac{1}{4}\right)\left(-2t+6\right).\end{aligned}$$

....

22.3 b) On fait apparaître un facteur commun, en écrivant :

$$\begin{aligned}\Big(\frac{1}{3}x-4\Big)\big(x-8\big)+\Big(4-\frac{1}{3}x\Big)\big(-3x+2\big) &= \Big(\frac{1}{3}x-4\Big)\big(x-8\big)+(-1)\times\Big(\frac{1}{3}x-4\Big)\big(-3x+2\big)\\ &= \Big(\frac{1}{3}x-4\Big)\big(x-8-(-3x+2)\big)=\Big(\frac{1}{3}x-4\Big)\big(4x-10\big).\end{aligned}$$

22.3 c) On remarque que $(1-3t)=-1\times(3t-1)$; on prend donc $3t-1$ comme facteur commun. On a :

$$\begin{aligned}(3t-1)(t+4)-(2t+3)(1-3t) &= (3t-1)(t+4)-(2t+3)\times(-1)\times(3t-1)\\ &= (3t-1)(t+4-(-1)\times(2t+3))=(3t-1)(3t+7).\end{aligned}$$

22.4 b) On fait apparaître un facteur commun, en écrivant $6t-9=3(2t-3)$. On a :

$$\begin{aligned}(2t-3)(7t+1)+(6t-9)(2t+3) &= (2t-3)(7t+1)+3\times(2t-3)(2t+3)\\ &= (2t-3)(7t+1+3\times(2t+3))=(2t-3)(13t+10).\end{aligned}$$

22.4 c) On fait apparaître un facteur commun, en écrivant $14-2x=-2\times(x-7)$. On a :

$$\begin{aligned}(x-7)(2x+3)+(14-2x)(5x+1) &= (x-7)(2x+3)+(-2)\times(x-7)(5x+1)\\ &= (x-7)(2x+3-2(5x+1))=(x-7)(-8x+1).\end{aligned}$$

22.4 d) On remarque que $20-8x=-4\times(2x-5)$ et on procède comme précédemment.

22.4 e) On remarque que $3x-1=3\Big(x-\frac{1}{3}\Big)$ et on factorise par $x-\frac{1}{3}$. On a :

$$\begin{aligned}\big(3x-1\big)\big(7x+2\big)+\big(3x+5\big)\Big(-\frac{1}{3}+x\Big) &= 3\Big(x-\frac{1}{3}\Big)\big(7x+2\big)+\big(3x+5\big)\Big(x-\frac{1}{3}\Big)\\ &= \Big(x-\frac{1}{3}\Big)\Big(3\big(7x+2\big)+3x+5\Big)=\Big(x-\frac{1}{3}\Big)\big(24x+11\big).\end{aligned}$$

22.5 a) On a :

$$\begin{aligned}2(3x-4)(7x-1)+4(7x-1)(2x+1) &= (7x-1)\times 2(3x-4)+(7x-1)\times 4(2x+1)\\ &= (7x-1)(2(3x-4)+4(2x+1))=(7x-1)(14x-4).\end{aligned}$$

22.5 b) On a :

$$\begin{aligned}5(2t-1)(t+\sqrt{3})-3(2t-1)(t+4\sqrt{3}) &= (2t-1)(5(t+\sqrt{3})-3(t+4\sqrt{3}))\\ &= (2t-1)(5t+5\sqrt{3}-3t-12\sqrt{3})=(2t-1)(2t-7\sqrt{3}).\end{aligned}$$

22.5 c) On a :

$$\begin{aligned}3(4z-1)(z+2)-(z+3)(z-4)(4z-1) &= (4z-1)(3(z+2)-(z+3)(z-4))\\ &= (4z-1)(3z+6-(z^2-z-12))=(4z-1)(-z^2+4z+18).\end{aligned}$$

22.6 a) On remarque que $(2x+3)^2=(2x+3)(2x+3)$. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}(2x+3)^2+(2x+3)(7x-4) &= (2x+3)(2x+3)+(2x+3)(7x-4)\\ &= (2x+3)(2x+3+7x-4)=(2x+3)(9x-1).\end{aligned}$$

22.6 b) On a :

$$\begin{aligned}4(7x-1)^2-3(x+6)(7x-1) &= 4(7x-1)(7x-1)-3(x+6)(7x-1)\\ &= (7x-1)(4(7x-1)-3(x+6))=(7x-1)(28x-4-3x-18)\\ &= (7x-1)(25x-22).\end{aligned}$$

Fiche n° 23. Factorisations à l'aide de $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Réponses

23.1 a) .... $\boxed{(x-3)(x+3)}$

23.1 b) .... $\boxed{(x-5)(x+5)}$

23.1 c) .... $\boxed{(2-x)(2+x)}$

23.1 d) .... $\boxed{(2x-6)(2x+6)}$

23.1 e) .... $\boxed{(7-3x)(7+3x)}$

23.1 f) .... $\boxed{(1-2x)(1+2x)}$

23.2 a) .... $\boxed{(4-x)(8+x)}$

23.2 b) .... $\boxed{-2(2x+4)}$

23.2 c) .... $\boxed{(x+4)(3x-2)}$

23.2 d) .... $\boxed{(6x-8)(4x-4)}$

23.3 a) .... $\boxed{-\dfrac{1}{36}(2x-3)(2x+3)}$

23.3 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{225}(6x-5)(6x+5)}$

23.3 c) .... $\boxed{-\dfrac{1}{36}(x-6)(x+6)}$

23.3 d) .... $\boxed{-\dfrac{1}{4}(3x-10)(3x+10)}$

23.4 a) .... $\boxed{(x-y)(x+y)}$

23.4 b) .... $\boxed{(2y-x-1)(2y+x+1)}$

23.4 c) .... $\boxed{-4yx^2}$

23.4 d) .... $\boxed{\left(-\dfrac{1}{2}xy-1\right)\left(\dfrac{3}{2}xy+1\right)}$

23.5 a) .... $\boxed{(2-x)(4+x)}$

23.5 b) .... $\boxed{3x\,(x+2)}$

23.5 c) .... $\boxed{-7x\,(2-3x)}$

23.5 d) .... $\boxed{\left(-x-\dfrac{4}{3}\right)\left(2x+\dfrac{2}{3}\right)}$

23.6 a) .... $\boxed{2x^2-\dfrac{1}{2}}$

23.6 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}(2x-1)(2x+1)}$

23.7 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{3}(3x-1)(3x+1)}$

23.7 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{5}(x-5)(x+5)}$

23.7 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{7}(7-x)(7+x)}$

23.7 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{27}(x-3)(x+3)}$

Corrigés

23.1 a) On a $x^2 - 3^2 = (x-3)(x+3)$.

23.1 b) On a $x^2 - 25 = x^2 - 5^2 = (x-5)(x+5)$.

23.1 d) On a $4x^2 - 36 = (2x)^2 - 6^2 = (2x-6)(2x+6)$.

23.1 e) On a $49 - 9x^2 = 7^2 - (3x)^2 = (7-3x)(7+3x)$.

23.1 f) On a $-4x^2 + 1 = 1 - (2x)^2 = (1-2x)(1+2x)$.

23.2 a) On a $36 - (x+2)^2 = 6^2 - (x+2)^2 = (6-x-2)(6+x+2) = (4-x)(8+x)$.

23.3 a) On a :

$$\frac{1}{4}-\frac{x^2}{9}=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{x}{3}\right)^2=\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{3}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{3}\right)=\left(\frac{3-2x}{6}\right)\left(\frac{3+2x}{6}\right)$$
$$=-\frac{1}{36}(2x-3)(2x+3).$$

23.4 b) On a $4y^2-(x+1)^2=(2y)^2-(x+1)^2=(2y-x-1)(2y+x+1)$.

23.4 c) On a $(x^2-y)^2-(x^2+y)^2=(x^2-y-x^2-y)(x^2-y+x^2+y)=-2y(x^2+x)$.

23.4 d) On a :

$$\frac{1}{4}x^2y^2-(xy+1)^2=\left(\frac{1}{2}xy\right)^2-(xy+1)^2=\left(\frac{1}{2}xy-xy-1\right)\left(\frac{1}{2}xy+xy+1\right)=\left(-\frac{1}{2}xy-1\right)\left(\frac{3}{2}xy+1\right).$$

23.5 a) En appliquant la première identité remarquable, on obtient :

$$9-(x^2+2x+1)=3^2-(x+1)^2=(3-x-1)(3+x+1)=(2-x)(4+x).$$

23.5 b) En utilisant la deuxième identité remarquable, on obtient :

$$(2x+1)^2-(x^2-2x+1)=(2x+1)^2-(x-1)^2=(2x+1-x+1)(2x+1+x-1)=3x\,(x+2).$$

23.5 c) Pour commencer, on remarque qu'on a $(1-5x)^2-4x^2-4x-1=(1-5x)^2-(4x^2+4x+1)$. Puis en appliquant la première identité remarquable, on obtient :

$$(1-5x)^2-(4x^2+4x+1)=(1-5x)^2-(2x+1)^2=(1-5x-2x-1)(1-5x+2x+1)=-7x\,(-3x+2).$$

23.5 d) En appliquant la deuxième identité remarquable, on obtient :

$$\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}-\left(\frac{3}{2}x+1\right)^2=\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{3}{2}x+1\right)^2=\left(-x-\frac{4}{3}\right)\left(2x+\frac{2}{3}\right).$$

23.6 a) En développant, on retrouve l'expression de l'énoncé.

23.6 b) D'après ce qui précède, on a $2x^2-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(4x^2-1)$. En appliquant la troisième identité remarquable, on obtient :

$$\frac{1}{2}(4x^2-1)=\frac{1}{2}\big((2x)^2-1^2\big)=\frac{1}{2}(2x-1)(2x+1).$$

23.7 a) En factorisant l'expression par $\frac{1}{3}$, on a $3x^2-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}(9x^2-1)$. On applique la troisième identité remarquable :

$$\frac{1}{3}(9x^2-1)=\frac{1}{3}\big((3x)^2-1^2\big)=\frac{1}{3}(3x-1)(3x+1).$$

23.7 b) On procède comme précédemment, en factorisant l'expression de départ par $\frac{1}{5}$.

23.7 c) On procède comme précédemment, en factorisant l'expression par $\frac{1}{7}$.

23.7 d) On change l'ordre des termes, puis on procède comme ci-dessus, en factorisant l'expression par $\frac{1}{27}$.

Fiche n° 24. Bilan sur les factorisations

Réponses

24.1 a) c

24.1 b) .... a

24.1 c) c

24.2 a) .... $\boxed{(3x+1)(-7x+1)}$

24.2 b) .... $\boxed{-2(2x-7)(x+2)}$

24.2 c) .... $\boxed{(x-5)(x-6)}$

24.2 d) .... $\boxed{(5x-1)(7x+5)}$

24.3 a) .... $\boxed{(x+7)^2}$

24.3 b) .... $\boxed{4(x+4)^2}$

24.3 c) .... $\boxed{(x-9)^2}$

24.3 d) .... $\boxed{3(3x-11)(x-1)}$

24.3 e) .... $\boxed{(6x-5)^2}$

24.3 f) .... $\boxed{-8(x+3)(3x+1)}$

24.4 a) .... $\boxed{5(x-3)(x+1)}$

24.4 b) .... $\boxed{(x+1)(7x-17)}$

24.4 c) .... $\boxed{(x+1)(3x-2)}$

24.5 a) .... $\boxed{2(x+5)(x-3)}$

24.5 b) .... $\boxed{2(x+2)(2x-1)}$

24.5 c) .... $\boxed{(x-2)(-3x+10)}$

24.6 a) .... $\boxed{\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)}$

24.6 b) .... $\boxed{\dfrac{\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)}{5}}$

24.6 c) .... $\boxed{\left(x+\sqrt{2}\right)^2}$

24.6 d) .... $\boxed{2\left(x-\sqrt{3}\right)^2}$

24.7 a) .... $\boxed{a^3-b^3}$

24.7 b) .... $\boxed{(x-3)(x^2+3x+9)}$

24.7 c) .... $\boxed{\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x^4+3x^2+9\right)}$

24.7 d) .... $\boxed{(x-1)\left(x^2+x+1\right)\left(x^6+x^3+1\right)}$

24.8 a) .... $\boxed{(x-3)(x-1)}$

24.8 b) .... $\boxed{(2x+3)(2x+9)}$

24.9 a) .... $\boxed{2x}$

24.9 b) .... $\boxed{\dfrac{x-4}{x-2}}$

24.9 c) .... $\boxed{\dfrac{x-3}{2x+3}}$

24.9 d) .... $\boxed{\dfrac{x-1}{x+2}}$

24.10 a) .... $\boxed{35\,000}$

24.10 b) .... $\boxed{40\,000}$

24.10 c) .... $\boxed{999\,984}$

24.11 a) .... $\boxed{(n+1)(n+3)}$

24.11 b) .... Non

24.12 .... Oui

24.13 a) .... $\boxed{(2-z)(2+z)(x+y)}$

24.13 b) .... $\boxed{(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)\left(x^4+1\right)}$

24.13 c) .... $\boxed{\left(\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)\right)^2}$

24.13 d) .... $\boxed{4(x+4)(2x-1)}$

24.14 a) .... $\boxed{3(5x+1)(2x-1)}$

24.14 b) .... $\boxed{2(2x-1)(2x+1)}$

24.14 c) .... $\boxed{-(2x-1)(9x+2)}$

Corrigés

24.1 a) On a $2x + 2 \times 3 = 2(x+3)$.

24.1 c) On a $x^2 - 3^2 = (x-3)(x+3)$.

24.2 a) On a $(3x+1)(-4x+2-3x-1) = (3x+1)(-7x+1)$.

24.2 b) On a :

$$\begin{aligned}(2x-7)^2 + (3-4x)(2x-7) &= (2x-7)(2x-7+3-4x) = (2x-7)(-2x-4)\\ &= (2x-7-) \times -2(x+2) = -2(2x-7)(x+2).\end{aligned}$$

24.2 c) On a $(x-5)^2 - (x-5) = (x-5)(x-5-1) = (x-5)(x-6)$.

24.2 d) On a $(5x-1)^2 - (2-10x)(x+3) = (5x-1)^2 - 2(1-5x)(x+3)$. Comme $1-5x = -(5x-1)$, on a :

$$\begin{aligned}(5x-1)^2 - 2(1-5x)(x+3) &= (5x-1) + 2(5x-1)(x+3)\\ &= (5x-1)\big(5x-1+2(x+3)\big) = (5x-1)(7x+5).\end{aligned}$$

24.3 a) On a $x^2 + 2 \times x \times 7 + 7^2 = (x+7)^2$.

24.3 b) On a $4\big(x^2+8x+16\big) = 4\big(x^2 + 2 \times x \times 4 + 4^2\big) = 4(x+4)^2$.

24.3 c) On a $x^2 - 18x + 81 = x^2 - 2 \times x \times 9 + 9^2 = (x-9)^2$.

24.3 d) On a $(3x-7)^2 - 4^2 = (3x-7-4)(3x-7+4) = (3x-11)(3x-3) = (3x-11) \times 3(x-1) = 3(3x-11)(x-1)$.

24.3 e) On a $(6x)^2 - 2 \times 6x \times 5 + 5^2 = (6x-5)^2$.

24.3 f) On a :

$$\begin{aligned}(x-5)^2 - (5x+7)^2 &= \big(x-5-(5x+7)\big)(x-5+5x+7) = (-4x-12)(6x+2)\\ &= -4(x+3) \times 2(3x+1) = -8(x+3)(3x+1).\end{aligned}$$

24.4 a) On a $5\big((x-1)^2 - 4\big) = 5\big((x-1-2)(x-1+2)\big) = 5(x-3)(x+1)$.

24.4 b) On a :

$$\begin{aligned}2(x-1)(x+1) + 5(x-1)^2 - 20 &= 2(x-1)(x+1) + 5(x-3)(x+1)\\ &= (x+1)(2x-2+5x-15) = (x+1)(7x-17).\end{aligned}$$

24.4 c) D'une part, on a $2x^2 - 2 = 2(x^2-1) = 2(x-1)(x+1)$. D'autre part, on a : $x^2 + x = x(x+1)$.

Ainsi, on a $2x^2 - 2 + x^2 + x = 2(x-1)(x+1) + x(x+1) = (x+1)\big(2(x-1)+x\big) = (x+1)(3x-2)$.

24.5 a) On a $(x+5)(x-5) + (x-1)(x+5) = (x+5)(x-5+x-1) = (x+5)(2x-6) = 2(x+5)(x-3)$.

24.5 b) On a $(x+2)^2 - 3(x+2)(1-x) - (x+2) = (x+2)(4x-2) = 2(x+2)(2x-1)$.

24.5 c) On a :

$$\begin{aligned}2(x-2)(x+1)+x^2-4-3(1-x)(4-2x) &= 2(x-2)(x+1)+(x-2)(x+2)-3(1-x)\times(-2)(x-2)\\ &= 2(x-2)(x+1)+(x-2)(x+2)+6(1-x)(x-2)\\ &= (x-2)\big(2(x+1)+x+2+6(1-x)\big)\\ &= (x-2)(-3x+10).\end{aligned}$$

24.6 a) On a $x^2-\left(\sqrt{2}\right)^2=\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)$.

24.6 b) On a $\left(\dfrac{x}{\sqrt{5}}\right)^2-1^2=\left(\dfrac{x}{\sqrt{5}}-1\right)\left(\dfrac{x}{\sqrt{5}}+1\right)=\left(\dfrac{x-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right)\left(\dfrac{x+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right)=\dfrac{\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)}{5}$.

24.6 c) On a $x^2+2\times x\times\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2=\left(x+\sqrt{2}\right)^2$.

24.6 d) On a $2\left(x^2-2\sqrt{3}x+3\right)=2\left(x^2-2\times x\times\sqrt{3}+\sqrt{3}^2\right)=2\left(x-\sqrt{3}\right)^2$.

24.7 a) On a $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3+a^2b+ab^2-ba^2-ab^2-b^3=a^3-b^3$.

24.7 b) On a $x^3-3^3=(x-3)(x^2+3x+9)$.

24.7 d) On a $\left(x^3\right)^3-1=\left(x^3-1\right)\left(x^6+x^3+1\right)=(x-1)\left(x^2+x+1\right)\left(x^6+x^3+1\right)$.

24.8 a) On a $x^2-4x+4-1=(x-2)^2-1=(x-2-1)(x-2+1)=(x-3)(x-1)$.

24.8 b) On a :

$$\begin{aligned}4x^2+24x+36-9=(2x)^2+2\times 2x\times 6+6^2-9 &= (2x+3)^2-3^2\\ &= (2x+6-3)(2x+6+3)=(2x+3)(2x+9).\end{aligned}$$

24.9 a) On a $\dfrac{(x-3)^2+(x-3)(x+3)}{x-3}=\dfrac{(x-3)(x-3+x+3)}{x-3}=x-3+x+3=2x$.

24.9 c) On a $\dfrac{-(2x+3)+(x-2)(2x+3)}{(2x)^2+2\times 2x\times 3+3^2}=\dfrac{(2x-3)(-1+x-2)}{(2x+3)^2}=\dfrac{(2x+3)(x-3)}{(2x+3)^2}=\dfrac{x-3}{2x+3}$.

24.9 d) On a $\dfrac{\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)}{(x+1)(x+2)(x^2+1)}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{x-1}{x+2}$.

24.10 a) On a $35\times(215+785)=35\times 1\,000=35\,000$.

24.10 b) On a $(10\,001-9\,999)(10\,001+9\,999)=2\times 20\,000=40\,000$.

24.10 c) On a $(1\,000-4)(1\,000+4)=1\,000^2-4^2=1\,000\,000-16=999\,984$.

24.11 a) On a $n^2+4n+3=n^2+4n+4-1=(n+2)^2-1=(n+1)(n+3)$.

24.11 b) On a $n^2+4n+3=(n+1)(n+3)$, or comme $n\geqslant 2$ on a alors : $n+1>1$ et $n+3>1$, ainsi ce sont deux diviseurs stricts de n^2+4n+3. D'où notre entier ne peut pas être premier.

24.12 On a $12^{52} + 12^{53} = 12^{52} \times (1 + 12) = 12^{52} \times 13 = 12^{51} \times 3 \times 4 \times 13 = 12^{51} \times 3 \times 52$.

24.13 a) On a $4(x + y) - z^2(x + y) = \left(4 - z^2\right)(x + y) = (2 - z)(2 + z)(x + y)$.

24.13 b) On a :

$$\begin{aligned}(x^4)^2 - 1^2 &= (x^4 - 1)(x^4 + 1) = \left((x^2)^2 - 1^2\right)(x^4 + 1) \\ &= (x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1).\end{aligned}$$

24.13 c) On a $\left(x^2\right)^2 - 2 \times x^2 \times 2 + 2^2 = \left(x^2 - 2\right)^2 = \left(x^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2\right)^2 = \left(\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)\right)^2$.

24.13 d) On a $\left(3(x + 1)\right)^2 - (x - 5)^2 = (3x + 3 - x + 5)(3x + 3 + x - 5) = (2x + 8)(4x - 2) = 4(x + 4)(2x - 1)$.

24.14 a) On a $(5x + 1)(6x - 3) = (5x + 1) \times 2(2x - 1) = 2(5x - 1)(2x - 1)$.

24.14 b) On a $2\left(4x^2 - 1\right) = 2(2x - 1)(2x + 1)$.

24.14 c) On a :

$$\begin{aligned}(2x - 1)^2 - 3(5x + 1)(2x - 1) + 2(2x - 1)(2x + 1) &= (2x - 1)\left(2x - 1 - 15x - 3 + 4x + 2\right) \\ &= (2x - 1)(-9x - 2) = -(2x - 1)(9x + 2).\end{aligned}$$

Fiche n° 25. Manipulation d'inégalités

Réponses

25.1 a) .... $\boxed{[-15,+\infty[}$

25.1 b) .... $\boxed{]-\infty,11]}$

25.1 c) .... $\boxed{]4,+\infty[}$

25.1 d) .... $\boxed{[-6,+\infty[}$

25.1 e) .... $\boxed{[4,+\infty[}$

25.1 f) .... $\boxed{]7,+\infty[}$

25.2 a) .... $\boxed{[-3,4]}$

25.2 b) .... $\boxed{[5,13[}$

25.2 c) .... $\boxed{]-2,3[}$

25.2 d) .... $\boxed{\left[0,\frac{2}{3}\right[}$

25.2 e) .... $\boxed{[1,3[}$

25.2 f) .... $\boxed{[-6,4]}$

25.3 a) .... $\boxed{x\in[-2,3]}$

25.3 b) .... $\boxed{x\in[-1,3[}$

25.3 c) .... $\boxed{x\in\left]\frac{-23}{2},\frac{77}{2}\right[}$

25.3 d) .... $\boxed{x\in\left[-\frac{3}{28},\frac{1}{3}\right[}$

25.4 a) .... $\boxed{\frac{1}{3}\leqslant\frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{2}}$

25.4 b) .... $\boxed{\frac{-3}{5}\leqslant\frac{-3}{x}\leqslant\frac{-1}{3}}$

25.4 c) .... $\boxed{1\leqslant\frac{-4}{x+2}\leqslant 4}$

25.5 a) .... $\boxed{-1\leqslant 2x+3y\leqslant 12}$

25.5 b) .... $\boxed{-29\leqslant 5z+3t\leqslant -10}$

25.6 a) .... $\boxed{-3\leqslant -2x+3y\leqslant 10}$

25.6 b) .... $\boxed{-20\leqslant 5z-3t\leqslant -1}$

25.7 a) .... $\boxed{8\leqslant xy\leqslant 21}$

25.7 b) .... $\boxed{-6\leqslant zt\leqslant -2}$

25.7 c) .... $\boxed{-6\leqslant uv\leqslant 12}$

25.8 a) .... $\boxed{\frac{2}{7}\leqslant\frac{x}{y}\leqslant\frac{3}{4}}$

25.8 b) .... $\boxed{\frac{1}{6}\leqslant\frac{z}{t}\leqslant\frac{2}{3}}$

Corrigés

25.1 a) On a les équivalences suivantes : $x+3\geqslant -12 \iff x\geqslant -15 \iff x\in[-15,+\infty[$.

25.1 b) On a les équivalences suivantes : $x-5\leqslant 6 \iff x\leqslant 11 \iff x\in]-\infty,11]$.

25.1 c) On a les équivalences suivantes : $3x>12 \iff x>\frac{12}{3} \iff x>4 \iff x\in]4,+\infty[$.

25.1 d) On a les équivalences suivantes : $-4x\leqslant 24 \iff x\geqslant\frac{24}{-4} \iff x\geqslant -6 \iff x\in[-6,+\infty[$.

25.1 e) On a les équivalences suivantes : $5x-7\geqslant 13 \iff 5x\geqslant 20 \iff x\geqslant 4 \iff x\in[4,+\infty[$.

25.1 f) On a les équivalences suivantes : $4-7x<-45 \iff -7x<-49 \iff x>7 \iff x\in]7,+\infty[$.

25.2 a) On a les équivalences suivantes :

$$-2\leqslant x+1\leqslant 5 \iff -2+(-1)\leqslant x+1+(-1)\leqslant 5+(-1) \iff -3\leqslant x\leqslant 4 \iff x\in[-3,4].$$

25.2 b) On a les équivalences suivantes :

$$3\leqslant x-2<11 \iff 3+2\leqslant x-2+2<11+2 \iff 5\leqslant x<13 \iff x\in[5,13[.$$

25.2 c) On a les équivalences suivantes :

$$12 > 4x > -8 \iff \frac{12}{4} > \frac{4x}{4} > \frac{-8}{4} \iff 3 > x > -2 \iff x \in \left]-2, 3\right[.$$

25.2 d) On a les équivalences suivantes :

$$-4 < -6x \leqslant 0 \iff \frac{-4}{-6} > \frac{-6x}{-6} \geqslant \frac{0}{-6} \iff \frac{2}{3} > x \geqslant 0 \iff x \in \left[0, \frac{2}{3}\right[.$$

25.2 e) On a les équivalences suivantes : $5 > 2x - 1 \geqslant 1 \iff 6 > 2x \geqslant 2 \iff 3 > x \geqslant 1 \iff x \in [1, 3[$.

25.2 f) On a les équivalences suivantes :

$$-17 \leqslant 3 - 5x \leqslant 33 \iff -20 \leqslant -5x \leqslant 30 \iff 4 \geqslant x \geqslant -6 \iff x \in [-6, 4].$$

25.3 a) On a les équivalences suivantes : $-3 \leqslant x - 1 \leqslant 2 \iff -3 + 1 \leqslant x - 1 + 1 \leqslant 2 + 1 \iff -2 \leqslant x \leqslant 3$.

25.3 b) On a les équivalences suivantes :

$$x + 2 \in [1, 5[\iff 1 \leqslant x + 2 < 5 \iff 1 + (-2) \leqslant x + 2 + (-2) < 5 + (-2) \iff -1 \leqslant x < 3.$$

25.3 c) On a les équivalences suivantes :

$$2x - 3 \in \left]-26, 74\right[\iff -26 < 2x - 3 < 74 \iff -23 < 2x < 77 \iff \frac{-23}{2} < x < \frac{77}{2}.$$

25.3 d) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} -7x + 3 \in \left]\frac{2}{3}, \frac{15}{4}\right] &\iff \frac{2}{3} < -7x + 3 \leqslant \frac{15}{4} \iff \frac{-7}{3} < -7x \leqslant \frac{3}{4} \\ &\iff \frac{-7}{3} \times \frac{1}{-7} < \frac{-7x}{-7} \leqslant \frac{3}{4} \times \frac{1}{-7} \iff \frac{1}{3} > x \geqslant -\frac{3}{28}. \end{aligned}$$

25.4 a) On a les équivalences suivantes :

$$x \in [2, 3] \iff 2 \leqslant x \leqslant 3 \iff \frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{3} \iff \frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{2}.$$

25.4 b) On a les équivalences suivantes :

$$x \in [5, 9] \iff 5 \leqslant x \leqslant 9 \iff \frac{1}{5} \geqslant \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{9} \iff \frac{-3}{5} \leqslant \frac{-3}{x} \leqslant \frac{-1}{3}.$$

25.4 c) On a les équivalences suivantes :

$$x \in [-6, -3] \iff -6 \leqslant x \leqslant -3 \iff -4 \leqslant x + 2 \leqslant -1 \iff \frac{1}{-4} \geqslant \frac{1}{x+2} \geqslant \frac{1}{-1} \iff 1 \leqslant \frac{-4}{x+2} \leqslant 4.$$

25.5 a) On a les équivalences suivantes :

$$x \in [-2, 3] \iff -2 \leqslant x \leqslant 3 \iff -4 \leqslant 2x \leqslant 6 \qquad \text{et} \qquad y \in [1, 2] \iff 1 \leqslant y \leqslant 2 \iff 3 \leqslant 3y \leqslant 6.$$

Par addition membre à membre, on obtient $-4 + 3 \leqslant 2x + 3y \leqslant 6 + 6$ et donc $-1 \leqslant 2x + 3y \leqslant 12$.

25.5 b) On a les équivalences suivantes :

$$z \in [-4,-2] \iff -4 \leqslant z \leqslant -2 \iff -20 \leqslant 5z \leqslant -10 \quad \text{et} \quad t \in [-3,0] \iff -3 \leqslant t \leqslant 0 \iff -9 \leqslant 3t \leqslant 0.$$

Par addition membre à membre, on obtient $-20 + (-9) \leqslant 5z + 3t \leqslant -10 + 0$ et donc $-29 \leqslant 5z + 3t \leqslant -10$.

....

25.6 a) On a les équivalences suivantes :

$$x \in [-2,3] \iff -2 \leqslant x \leqslant 3 \iff -6 \leqslant -2x \leqslant 4 \qquad \text{et} \qquad y \in [1,2] \iff 1 \leqslant y \leqslant 2 \iff 3 \leqslant 3y \leqslant 6.$$

Par addition membre à membre, on obtient $-6 + 3 \leqslant -2x + 3y \leqslant 4 + 6$ et donc $-3 \leqslant -2x + 3y \leqslant 10$.

....

25.6 b) On a les équivalences suivantes :

$$z \in [-4,-2] \iff -4 \leqslant z \leqslant -2 \iff -20 \leqslant 5z \leqslant -10 \quad \text{et} \quad t \in [-3,0] \iff -3 \leqslant t \leqslant 0 \iff 0 \leqslant -3t \leqslant 9.$$

Par addition membre à membre, on obtient $-20 + 0 \leqslant 5z + (-3t) \leqslant -10 + 9$ et donc $-20 \leqslant 5z - 3t \leqslant -1$.

....

25.7 a) On a les équivalences $x \in [2,3] \iff 2 \leqslant x \leqslant 3$ et $y \in [4,7] \iff 4 \leqslant y \leqslant 7$. Par produit membre à membre, les bornes étant positives, on obtient $2 \times 4 \leqslant xy \leqslant 3 \times 7$ et donc $8 \leqslant xy \leqslant 21$.

....

25.7 b) On a les équivalences $z \in [-3,-2] \iff -3 \leqslant z \leqslant -2$ et $t \in [1,2] \iff 1 \leqslant y \leqslant 2$.

Par lecture des bornes, il faut déterminer la plus petite et la plus grande valeur qu'il est possible d'obtenir par produit, ce qui donne ici $-3 \times 2 \leqslant zt \leqslant -2 \times 1$ et donc $-6 \leqslant zt \leqslant -2$.

....

25.7 c) On a les équivalences $u \in [-1,2] \iff -1 \leqslant u \leqslant 2$ et $v \in [3,6] \iff 3 \leqslant v \leqslant 6$.

Par lecture des bornes, il faut déterminer la plus petite et la plus grande valeur qu'il est possible d'obtenir par produit, ce qui donne ici $-1 \times 6 \leqslant uv \leqslant 2 \times 6$ et donc $-6 \leqslant uv \leqslant 12$.

....

25.8 a) On a les équivalences suivantes :

$$x \in [2,3] \iff 2 \leqslant x \leqslant 3 \qquad \text{et} \qquad y \in [4,7] \iff 4 \leqslant y \leqslant 7 \iff \frac{1}{7} \leqslant \frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{4}.$$

Par produit membre à membre, les bornes étant positives, on obtient $2 \times \frac{1}{7} \leqslant x \times \frac{1}{y} \leqslant 3 \times \frac{1}{4}$ et donc $\frac{2}{7} \leqslant \frac{x}{y} \leqslant \frac{3}{4}$.

....

25.8 b) On a les équivalences suivantes :

$$z \in [-2,-1] \iff -2 \leqslant z \leqslant -1 \qquad \text{et} \qquad t \in [-6,-3] \iff -6 \leqslant t \leqslant -3 \iff \frac{-1}{3} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{-1}{6}.$$

Par lecture des bornes, il faut déterminer la plus petite et la plus grande valeur qu'il est possible d'obtenir par produit, ce qui donne ici $-1 \times \frac{-1}{6} \leqslant z \times \frac{1}{t} \leqslant -2 \times \frac{-1}{3}$ et donc $\frac{1}{6} \leqslant \frac{z}{t} \leqslant \frac{2}{3}$.

....

Fiche n° 26. Inéquations du premier degré

Réponses

26.1 a) .... $\boxed{\text{oui}}$

26.1 b) .... $\boxed{\text{non}}$

26.2 a) .... $\boxed{]-\infty, -7]}$

26.2 b) .... $\boxed{]-\infty, 10[}$

26.2 c) .... $\boxed{\left]-\infty, \frac{23}{28}\right]}$

26.2 d) .... $\boxed{\left]-\infty, -\frac{37}{6}\right]}$

26.3 a) .... $\boxed{[-3, +\infty[}$

26.3 b) .... $\boxed{\left]\frac{5}{7}, +\infty\right[}$

26.3 c) .... $\boxed{\left]-\infty, \frac{23}{8}\right]}$

26.3 d) .... $\boxed{\left]-\infty, -\frac{22}{5}\right[}$

26.4 a) .... $\boxed{]-\infty, 5]}$

26.4 b) .... $\boxed{\left]-\infty, \frac{3}{2}\right[}$

26.4 c) .... $\boxed{\left]-\infty, -\frac{3}{4}\right[}$

26.4 d) .... $\boxed{\left]-\infty, -\frac{581}{86}\right]}$

26.5 a) .... $\boxed{\left]-\infty, \frac{7}{3}\right]}$

26.5 b) .... $\boxed{]-\infty, -1[}$

26.5 c) .... $\boxed{\left]\frac{5}{16}, +\infty\right[}$

26.5 d) .... $\boxed{\varnothing}$

26.6 a) .... $\boxed{\left]-\infty, \frac{a-3}{a}\right]}$

26.6 b) .... $\boxed{\left]-\infty, \frac{a+7}{a}\right[}$

26.6 c) .... $\boxed{\left[\frac{7+a}{2a}, +\infty\right[\setminus \{0\}}$

26.6 d) .... $\boxed{]0, +\infty[}$

26.7 a) .... $\boxed{]-\infty, 1[}$

26.7 b) .... $\boxed{\left[\frac{1}{5}, +\infty\right[}$

Corrigés

26.1 a) L'inéquation revient à $\frac{30}{21} \leqslant \frac{37}{21}$, ce qui est vrai (on peut aussi résoudre l'inéquation et trouver $x \leqslant 1$).

26.1 b) L'inéquation revient à $\frac{4}{3} < \frac{-2}{3}$, ce qui est faux.

26.2 a) On ajoute -5 à chaque membre de l'inéquation, ce qui ne change pas le sens de l'inégalité.

26.2 b) On ajoute 7 à chaque membre de l'inéquation, ce qui ne change pas le sens de celle-ci.

26.2 c) On ajoute $\frac{5}{4}$ à chaque membre de l'inéquation, ce qui ne change pas le sens de celle-ci.

26.2 d) On ajoute $-\frac{2}{3}$ à chaque membre de l'inéquation, ce qui ne change pas le sens de celle-ci.

26.3 a) Après avoir soustrait 4 à chaque membre de l'inéquation, on obtient $3x \geqslant -9$. Puis, on divise chaque membre par 3, qui est un nombre positif, ce qui donne $x \geqslant -3$.

26.3 b) Après avoir soustrait 2 à chaque membre de l'inéquation, celle-ci revient à $-7x < -5$. Puis, on divise par -7, qui est un nombre négatif, ce qui donne $x > \frac{5}{7}$.

26.4 a) On ajoute $-4x + 3$ à chaque membre de l'inéquation, ce qui ne change pas le sens de l'inégalité.

26.4 b) On ajoute $-5x+4$ à chaque membre de l'inéquation, ce qui ne change pas le sens de l'inégalité. On obtient alors l'inéquation $-2x > -3$; puis, on divise chaque membre par -2, ce qui va changer le sens de l'inégalité et donner $x < \frac{3}{2}$.

....

26.4 c) Après développement, on obtient $6x+3 < -6x-6$; on additionne $6x-3$ à chaque membre et on obtient $12x < -9$. On peut ensuite diviser par 12, ce qui ne change pas le sens de l'inégalité, et donne $x < -\frac{3}{4}$.

....

26.5 a) On peut simplifier en ajoutant $3x^2$ à chaque membre de l'inéquation, ce qui nous ramène à une inéquation du premier degré. On ajoute de même $2x+3$ afin d'obtenir $3x \leqslant 7$, puis on divise par 3.

....

26.5 b) On développe les carrés pour obtenir $x^2 - 10x + 25 > x^2 + 14x + 49$. On peut ensuite simplifier en ajoutant $-x^2$ et ainsi obtenir une inéquation de degré 1.

....

26.5 c) On développe les carrés pour obtenir $4x^2 - 12x + 9 > 4x^2 + 4x + 4$. On peut ensuite simplifier en ajoutant $-4x^2$ et ainsi obtenir une inéquation de degré 1.

....

26.5 d) Après avoir développé, l'inéquation obtenue est $6x^2 + 30 < 6x^2 + 30$, ce qui revient à $0 < 0$. C'est impossible. On remarquera que l'inéquation $3(2x^2+10) \leqslant 6(x^2+5)$ aurait eu une infinité de solutions.

....

26.6 a) L'inéquation est équivalente à $ax \geqslant a - 3$; on divise par a, qui est négatif. Donc, on change le sens de l'inégalité. On obtient $x \leqslant \frac{a-3}{a}$.

....

26.6 b) Après avoir ajouté -7 à chaque membre de l'inéquation, on divise par $-a$, qui est un nombre strictement positif car a est strictement négatif. On obtient $x < \frac{a+7}{a}$.

....

26.6 c) Cette inéquation n'est pas définie pour $x = 0$.

Pour $x \neq 0$, l'inéquation est équivalente à $-2ax + a \geqslant -7$. Après avoir ajouté $-a$, on doit effectuer la division par $-2a$, qui est un nombre positif. On ne changera donc pas le sens de l'inégalité. Dans la réponse, suivant la valeur de a, il se peut que 0 ne soit pas dans l'intervalle $\left[\frac{7+a}{2a}, +\infty\right[$.

....

26.6 d) On développe et on obtient $-18x^2 - 12ax < -18x^2 - 36ax$. On additionne $18x^2$ à chaque membre, ce qui nous ramène à une inéquation du premier degré. Après addition de $36ax$, l'inéquation devient $24ax < 0$.

On divise ensuite par $24a$, qui est un nombre négatif, ce qui change le sens de l'inégalité. On obtient $x > 0$.

....

26.7 a) On multiplie par 12 chaque membre de l'inéquation pour obtenir $9x+3 > 10x+2$. On additionne alors $-10x-3$ à chaque membre de l'inéquation, qui devient $-x > -1$. La division par -1 change le sens de l'inégalité.

....

26.7 b) On multiplie par 12 chaque membre de l'inéquation pour obtenir $(3-3x) - (18x-12) \leqslant 4x+10$. On réduit le membre de gauche pour obtenir $-21x+15 \leqslant 4x+10$. On additionne alors $-4x-15$ à chaque membre de l'inéquation qui devient $-25x \leqslant -5$. La division par -25 change le sens de l'inégalité.

....

Fiche n° 27. Inégalités et valeur absolue

Réponses

27.1 .... $\boxed{\text{c}}$

27.2 a) .... $\boxed{2 \text{ et } 4}$

27.2 b) .... $\boxed{-5 \text{ et } \dfrac{11}{3}}$

27.2 c) .... $\boxed{-3}$

27.3 a) .... $\boxed{2 \leqslant x \leqslant 4}$

27.3 b) .... $\boxed{-9 \leqslant x \leqslant 1}$

27.3 c) .... $\boxed{-1 \leqslant x \leqslant 4}$

27.3 d) .... $\boxed{-7 \leqslant x \leqslant 3}$

27.4 a) .... $\boxed{[2, 4]}$

27.4 b) .... $\boxed{[-12, 2]}$

27.4 c) .... $\boxed{\{6\}}$

27.5 .... $\boxed{\text{c}}$

27.6 .... $\boxed{\text{b}}$

27.7 a) .... $\boxed{|x-1| \leqslant 3}$

27.7 b) ..... $\boxed{|x+4{,}5| \leqslant 2{,}5 \text{ ou } |2x+9| \leqslant 5}$

Corrigés

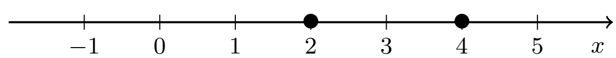
27.1 On voit que l'intervalle a pour milieu 1 et rayon 2 ; donc, l'équation $|x-1| = 2$ convient.

....

27.2 a) On a les équivalences suivantes :

$$|x-3| = 1 \iff \big(x-3 = -1 \quad \text{ou} \quad x-3 = 1\big) \iff \big(x = 2 \quad \text{ou} \quad x = 4\big).$$

Les solutions sont donc 2 et 4 ; les voici représentées sur l'axe réel :

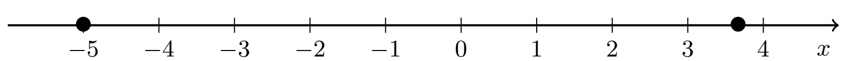


....

27.2 b) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} |3x+2| = 13 &\iff \big(3x+2 = -13 \quad \text{ou} \quad 3x+2 = 13\big) \iff \big(3x = -15 \quad \text{ou} \quad 3x = 11\big) \\ &\iff \left(x = -5 \quad \text{ou} \quad x = \frac{11}{3}\right), \end{aligned}$$

Les solutions sont donc -5 et $\dfrac{11}{3}$; les voici représentées sur l'axe réel :

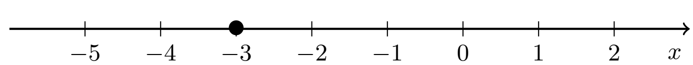


....

27.2 c) On a les équivalences suivantes :

$$|7x+21| = 0 \iff 7x+21 = 0 \iff 7x = -21 \iff x = -3.$$

La solution est donc -3 ; la voici représentée sur l'axe réel :



....

27.3 a) On a les équivalences suivantes :

$$|x-3| \leqslant 1 \iff -1 \leqslant x-3 \leqslant 1 \iff 2 \leqslant x \leqslant 4.$$

....

27.3 b) On a les équivalences suivantes :

$$|x+4| \leqslant 5 \iff -5 \leqslant x+4 \leqslant 5 \iff -9 \leqslant x \leqslant 1.$$

27.3 c) On a les équivalences suivantes :

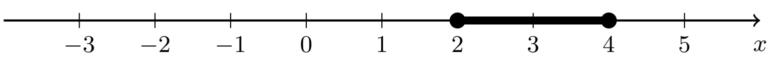
$$|2x-3| \leqslant 5 \iff -5 \leqslant 2x-3 \leqslant 5 \iff -2 \leqslant 2x \leqslant 8 \iff -1 \leqslant x \leqslant 4.$$

27.3 d) On a les équivalences suivantes :

$$|5x+10| \leqslant 25 \iff -25 \leqslant 5x+10 \leqslant 25 \iff -35 \leqslant 5x \leqslant 15 \iff -7 \leqslant x \leqslant 3.$$

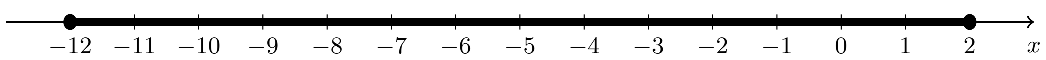
27.4 a) On a les équivalences suivantes : $|x-3| \leqslant 1 \iff -1 \leqslant x-3 \leqslant 1 \iff 2 \leqslant x \leqslant 4$.

Donc, l'ensemble des solutions est $[2,4]$, qu'on représente par :

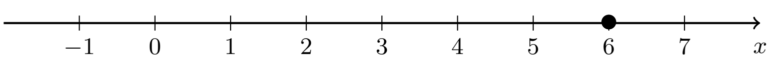


27.4 b) On a les équivalences suivantes : $|x+5| \leqslant 7 \iff -7 \leqslant x+5 \leqslant 7 \iff -12 \leqslant x \leqslant 2$.

Donc l'ensemble des solutions est $[-12,2]$, ce qu'on représente par :



27.4 c) On sait que $|x-6| \leqslant 0 \iff |x-6| = 0 \iff x-6=0 \iff x=6$: l'ensemble de solutions est $\{6\}$, ce qu'on représente par :



27.5 On a les équivalences suivantes :

$$|2x+5| \leqslant 7 \iff -7 \leqslant 2x+5 \leqslant 7 \iff -12 \leqslant 2x \leqslant 2 \iff -6 \leqslant x \leqslant 1.$$

27.6 On a les équivalences suivantes :

$$|6-3x| \leqslant 9 \iff -9 \leqslant 6-3x \leqslant 9 \iff -15 \leqslant -3x \leqslant 3 \iff -1 \leqslant x \leqslant 5.$$

27.7 a) Pour déterminer une inéquation qui admet l'intervalle donné pour ensemble des solutions, il faut déterminer le centre de l'intervalle et son rayon.
Dans le cas présent, on voit que l'intervalle des solutions est $[-2,4]$, dont le milieu est $\dfrac{-2+4}{2} = 1$ et le rayon est $\dfrac{4-(-2)}{2} = 3$. Donc, l'ensemble des solutions est l'ensemble des nombres situés à une distance inférieure ou égale à 3 du nombre 1, ce qui se traduit par l'inéquation $|x-1| \leqslant 3$.

27.7 b) On voit que l'intervalle des solutions est $[-7,-2]$, dont le milieu est $\dfrac{-7+(-2)}{2} = -4{,}5$ et le rayon est $\dfrac{-2-(-7)}{2} = 2{,}5$. Donc, l'ensemble des solutions est l'ensemble des nombres situés à une distance inférieure ou égale à 2,5 du nombre $-4{,}5$, ce qui se traduit par l'inéquation $|x-(-4{,}5)| \leqslant 2{,}5$, donc $|x+4{,}5| \leqslant 2{,}5$. On peut remarquer que l'inéquation $|2x+9| \leqslant 5$ convient également.

Fiche n° 28. Tableaux de signes et inéquations I

Réponses

28.1 a) .... voir corrigé

28.1 b) .... voir corrigé

28.1 c) .... voir corrigé

28.2 .... ⓐ

28.3 a) .... $\boxed{]-\infty, -9[\cup]6, +\infty[}$

28.3 b) .... $\boxed{\left[-\dfrac{7}{5}, \dfrac{3}{4}\right]}$

28.3 c) ..... $\boxed{]-\infty, -9[\cup \left]\dfrac{7}{2}, 5\right[}$

28.4 a) .... $\boxed{[-17, -11[}$

28.4 b) $\boxed{\left]-\infty, -\dfrac{2}{3}\right[\cup \left]\dfrac{5}{7}, +\infty\right[}$

28.4 c) .. $\boxed{]-\infty, -4] \cup]-2, +\infty[}$

28.4 d) .... $\boxed{\left[\dfrac{3}{2}, 4\right] \cup]5, +\infty[}$

28.5 a) .... $\boxed{\left]-\dfrac{2}{3}, \dfrac{5}{7}\right]}$

28.5 b) .... $\boxed{\varnothing}$

28.6 a) .... $\boxed{(x-1)^2}$

28.6 b) .... $\boxed{]-\infty, +\infty[}$

28.7 a) .... $\boxed{\left]-8, \dfrac{2}{3}\right[}$

28.7 b) ...... $\boxed{]-\infty, -1] \cup [0, 1]}$

28.7 c) ... $\boxed{]-\infty, -10] \cup [4, +\infty[}$

Corrigés

28.1 a) On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$x - 2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x + 3$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-2)(x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

....

28.1 b) On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-10		7		$+\infty$
$7 - x$		$+$		$+$	0	$-$	
$10 + x$		$-$	0	$+$		$+$	
$(7-x)(10+x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

....

28.1 c) On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\dfrac{4}{7}$		$\dfrac{3}{2}$		$+\infty$
$2x - 3$		$-$		$-$	0	$+$	
$7x + 4$		$-$	0	$+$		$+$	
$(2x-3)(7x+4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

....

28.3 a) On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-9		6		$+\infty$
$9+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$6-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(9+x)(6-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit que l'ensemble des solutions est $]-\infty,-9[\cup]6,+\infty[$.

28.3 b) On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\dfrac{7}{5}$		$\dfrac{3}{4}$		$+\infty$
$3-4x$		$+$		$+$	0	$-$	
$5x+7$		$-$	0	$+$		$+$	
$(3-4x)(5x+7)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

28.3 c) On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-9		$\dfrac{7}{2}$		5		$+\infty$
$2x-7$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+9$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$5-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$(2x-7)(x+9)(5-x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit que l'ensemble des solutions est $]-\infty,-9[\cup\left]\dfrac{7}{2},5\right[$.

28.4 a) On remarque que cette inéquation est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-11\}$. On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-17		-11		$+\infty$
$x+17$		$-$	0	$+$	||	$+$	
$x+11$		$-$		$-$	||	$+$	
$\dfrac{x+17}{x+11}$		$+$	0	$-$	||	$+$	

28.4 b) On remarque que cette inéquation est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$. On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\dfrac{2}{3}$		$\dfrac{5}{7}$		$+\infty$
$5 - 7x$		$+$	‖	$+$	0	$-$	
$3x + 2$		$-$	‖	$+$		$+$	
$\dfrac{5-7x}{3x+2}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	

28.5 a) Cette inéquation est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$. On a les équivalences suivantes :

$$\frac{9-x}{3x+2} \geqslant 2 \iff \frac{9-x}{3x+2} - 2 \geqslant 0 \iff \frac{9-x}{3x+2} - \frac{2(3x+2)}{3x+2} \geqslant 0 \iff \frac{5-7x}{3x+2} \geqslant 0.$$

Donc, l'ensemble des solutions, après avoir dressé un tableau de signes (qu'on ne fait pas ici), est $\left]-\dfrac{2}{3}, \dfrac{5}{7}\right]$.

28.5 b) On a les équivalences suivantes : $-1 + \dfrac{1}{1+x^2} > 0 \iff \dfrac{-1-x^2}{1+x^2} + \dfrac{1}{1+x^2} > 0 \iff \dfrac{-x^2}{1+x^2} > 0.$

Or, pour tout réel x, $1 + x^2 > 0$ et $-x^2 \leqslant 0$. Donc, l'inéquation n'a pas de solution.

28.6 a) On a $A(x) = (x-1)(x+2) - 3(x-1) = (x-1)\big[(x+2) - 3\big] = (x-1)^2$.

28.6 b) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}(x-1)(x+2) \geqslant 3(x-1) &\iff (x-1)(x+2) - 3(x-1) \geqslant 0.\\ &\iff (x-1)^2 \geqslant 0 \quad \text{d'après la question précédente.}\end{aligned}$$

Comme le carré d'un réel est toujours positif, l'inégalité $(x-1)^2 \geqslant 0$ est toujours vraie. Donc, l'ensemble des solutions est $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

28.7 a) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}(x+8)(1-x) > (2x-1)(x+8) &\iff (x+8)(1-x) - (2x-1)(x+8) > 0\\ &\iff (x+8)\big[(1-x) - (2x-1)\big] > 0 \iff (x+8)(2-3x) > 0.\end{aligned}$$

Après avoir dressé le tableau de signes, on obtient comme ensemble des solutions $\left]-8, \dfrac{2}{3}\right[$.

28.7 b) On a les équivalences suivantes :

$$x^3 - x \leqslant 0 \iff x(x^2-1) \leqslant 0 \iff x(x-1)(x+1) \leqslant 0.$$

Après avoir dressé le tableau de signes, on obtient comme ensemble des solutions $]-\infty, -1] \cup [0, 1]$.

28.7 c) On a les équivalences suivantes :

$$49 - (3+x)^2 \leqslant 0 \iff \big[7 - (3+x)\big]\big[7 + (3+x)\big] \leqslant 0 \iff (4-x)(10+x) \leqslant 0.$$

Après avoir dressé le tableau de signes, on obtient comme ensemble des solutions $]-\infty, -10] \cup [4, +\infty[$.

Fiche n° 29. Tableaux de signes et inéquations II

Réponses

29.1 .... $\boxed{\text{voir corrigé}}$

29.2 a) .... $\boxed{\text{négatif}}$

29.2 b) .... $\boxed{\text{positif}}$

29.2 c) .... $\boxed{\text{négatif}}$

29.2 d) .... $\boxed{0}$

29.2 e) .... $\boxed{\text{non défini}}$

29.3 a) .... $\boxed{\text{voir corrigé}}$

29.3 b) .... $\boxed{\left]-\frac{3}{7}, \frac{4}{5}\right[}$

29.3 c) .... $\boxed{\left]-\infty, -\frac{3}{7}\right[\cup \left[\frac{4}{5}, +\infty\right[}$

29.4 a) .... $\boxed{]-\infty, -5] \cup \left[-\frac{7}{2}, +\infty\right[}$

29.4 b) .... $\boxed{\left]\frac{4}{3}, \frac{5}{2}\right[}$

29.5 a) .... $\boxed{\mathbb{R} \setminus \{\frac{-13}{5}\}}$

29.5 b) .... $\boxed{\left]-\infty, -\frac{13}{5}\right[\cup \left[-\frac{1}{2}, \frac{7}{3}\right]}$

29.6 a) .... $\boxed{\left]-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup \left[-\frac{1}{5}, +\infty\right[}$

29.6 b) .... $\boxed{\left]-5, \frac{5}{4}\right[}$

29.6 c) .... $\boxed{\left]-\infty, -\frac{1}{4}\right[\cup \left[\frac{1}{5}, +\infty\right[}$

Corrigés

29.1 On a :

x	-5			-4		-2		1		3		4
$f(x)$			$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

29.2 a) On remarque que $-3 \in [-4, -2]$, où f est négative.

29.2 b) On remarque que $-3 \in [-4, -1]$, où g est positive.

29.2 e) Comme $f(-2)$ est nul, il s'agirait d'une division par zéro : l'expression n'est pas définie.

29.3 a) On a les équivalences suivantes :

$$-5x + 4 > 0 \iff -5x > -4 \iff x < \frac{4}{5} \qquad \text{et} \qquad 7x + 3 > 0 \iff 7x > -3 \iff x > \frac{-3}{7}.$$

On en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{-3}{7}$		$\frac{4}{5}$		$+\infty$
$-5x + 4$		$+$		$+$	0	$-$	
$7x + 3$		$-$	0	$+$		$+$	
$(7x+3)(-5x+4)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

29.3 b) On cherche les valeurs de x pour lesquelles le signe sur la dernière ligne du tableau est « + ». Ainsi, l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > 0$ est $\left]-\frac{3}{7}, \frac{4}{5}\right[$.

29.3 c) On cherche les valeurs de x pour lesquelles le signe sur la dernière ligne du tableau est « $-$ » ou « 0 ». Comme c'est un quotient on fait attention à la valeur interdite $-3/7$.

29.4 a) On a les équivalences suivantes :

$$2x + 7 > 0 \iff x > \frac{-7}{2} \qquad \text{et} \qquad x + 5 > 0 \iff x > -5.$$

Comme $-5 < -\frac{7}{2}$, on en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$		-5		$-\frac{7}{2}$		$+\infty$
$2x + 7$		$-$		$-$	0	$+$	
$x + 5$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 0$ est $]-\infty, -5] \cup \left[-\frac{7}{2}, +\infty\right[$.

29.4 b) Le tableau de signes permettant de résoudre l'inéquation considérée est :

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$-3x + 4$		$+$	0	$-$		$-$	
$-2x + 5$		$+$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

29.5 a) L'inéquation est définie si, et seulement si, $5x + 13 \neq 0$; c'est-dire, si, et seulement si, $x \neq -\frac{13}{5}$.

29.5 b) On a les équivalences suivantes :

$$2x + 1 > 0 \iff x > -\frac{1}{2}, \qquad -3x + 7 > 0 \iff x < \frac{7}{3} \qquad \text{et} \qquad 5x + 13 > 0 \iff x > -\frac{13}{5}.$$

Comme $-\frac{13}{5} < -\frac{1}{2} < \frac{7}{3}$, on en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{13}{5}$		$\frac{-1}{2}$		$\frac{7}{3}$		$+\infty$
$2x + 1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$-3x + 7$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$5x + 13$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\frac{(2x+1)(-3x+7)}{5x+13}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

En prenant garde à la valeur interdite, on en déduit que l'ensemble des solutions cherché est $\left]-\infty, -\frac{13}{5}\right[\cup \left[-\frac{1}{2}, \frac{7}{3}\right]$.

29.6 a) On se ramène à une étude de signe et donc à l'étude d'une inéquation de la forme « $\cdots \geqslant 0$ ».

On a l'équivalence suivante :

$$(3x+1)(7x+4) \geqslant (3x+1)(-3x+2) \iff (3x+1)(7x+4)-(3x+1)(-3x+2) \geqslant 0.$$

De plus, en factorisant, on a :

$$(3x+1)(7x+4)-(3x+1)(-3x+2) = (3x+1)(10x+2).$$

Ainsi, on a l'équivalence suivante :

$$(3x+1)(7x+4) \geqslant (3x+1)(-3x+2) \iff (3x+1)(7x+4-(-3x+2)) \geqslant 0 \iff (3x+1)(10x+2) \geqslant 0.$$

On procède ensuite comme précédemment, en établissant le tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{-1}{3}$		$-\frac{1}{5}$		$+\infty$
$(3x+1)(10x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

....

29.6 b) On se ramène à une étude de signe et donc à l'étude d'une inéquation de la forme « $\cdots < 0$ ».

On a l'équivalence suivante :

$$(x+5)^2 < (x+5)(-3x+10) \iff (x+5)^2-(x+5)(-3x+10) < 0.$$

Puis, on factorise par $(x+5)$ pour se ramener à une inéquation produit nul. On obtient les équivalences suivantes :

$$(x+5)^2 < (x+5)(-3x+10) \iff (x+5)(x+5-(-3x+10)) < 0 \iff (x+5)(4x-5) < 0.$$

Enfin, on dresse le tableau de signes de l'expression $(x+5)(4x-5)$:

x	$-\infty$		-5		$\frac{5}{4}$		$+\infty$
$(x+5)(4x-5)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

....

29.6 c) L'inéquation est définie si, et seulement si, $x \neq -\frac{1}{4}$.

On se ramène à une étude de signe grâce aux équivalences suivantes :

$$\frac{2x+4}{4x+1} \leqslant \frac{7x+3}{4x+1} \iff \frac{2x+4}{4x+1} - \frac{7x+3}{4x+1} \leqslant 0 \iff \frac{-5x+1}{4x+1} \leqslant 0.$$

Puis, on dresse le tableau de signes de l'expression $\dfrac{-5x+1}{4x+1}$:

x	$-\infty$		$\frac{-1}{4}$		$\frac{1}{5}$		$+\infty$
$\dfrac{-5x+1}{4x+1}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

On en déduit que l'ensemble des solutions de $\dfrac{2x+4}{4x+1} \leqslant \dfrac{7x+3}{4x+1}$ est $\left]-\infty, -\frac{1}{4}\right[\cup \left[\frac{1}{5}, +\infty\right[$.

....

Fiche n° 30. Tableaux de signes et inéquations III

Réponses

30.1 a) .... $\boxed{[-3, 2]}$

30.1 b) .... $\boxed{]1/2, 5[}$

30.1 c) .... $\boxed{[-4, 2[}$

30.1 d) .... $\boxed{]-\infty, -8[\cup [2/3, +\infty[}$

30.2 a) .... $\boxed{]-\infty, -1/5[\cup]1/2, +\infty[}$

30.2 b) .... $\boxed{[1, 8]}$

30.2 c) .... $\boxed{]-\infty, -2[\cup]-3/4, +\infty[}$

30.3 a) .... $\boxed{\dfrac{4x-5}{x-2}}$

30.3 b) .... $\boxed{]-\infty, 5/4] \cup]2, +\infty[}$

30.4 a) .... $\boxed{]-\infty, -9/5] \cup]-5/4, +\infty[}$

30.4 b) .... $\boxed{]-\infty, 2[\cup]5/2, +\infty[}$

30.4 c) .... $\boxed{]-\infty, 5/2] \cup]4, +\infty[}$

30.4 d) .... $\boxed{[8/7, 3/2[}$

30.5 a) .... $\boxed{\dfrac{x-2}{x(x+1)}}$

30.5 b) .... $\boxed{]-\infty, -1[\cup]0, 2]}$

30.6 a) .... $\boxed{]-3, 0[\cup [6, +\infty[}$

30.6 b) .... $\boxed{]-2, -4/5] \cup]0, +\infty[}$

30.7 a) .... $\boxed{[-5/2, 5/2]}$

30.7 b) .... $\boxed{]-\infty, -3/4[\cup]3/4, +\infty[}$

30.7 c) .... $\boxed{[-2, 4/3]}$

30.7 d) .... $\boxed{[-4/5, 4]}$

30.8 a) .... $\boxed{[-4, -1/2]}$

30.8 b) .... $\boxed{]-\infty, -6/5] \cup [4, +\infty[}$

30.8 c) .... $\boxed{]-\infty, -3/2] \cup [0, 3/2]}$

Corrigés

30.1 a) On dresse le tableau de signes de l'expression $(x+3)(-3x+6)$; on a :

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$-3x+6$		$+$		$+$	0	$-$	
$(x+3)(-3x+6)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(x+3)(-3x+6) \geqslant 0$ est donc $[-3, 2]$.

....

30.1 c) On dresse le tableau de signes de l'expression $\dfrac{x+4}{7x-14}$; on a :

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$7x-14$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{x+4}{7x-14}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{x+4}{7x-14} \leqslant 0$ est donc $[-4, 2[$.

....

30.2 a) En factorisant par $1-2x$, on est amené à résoudre l'inéquation $(1-2x)(5x+1)<0$.

30.2 b) En factorisant par $x-1$, on est amené à résoudre l'inéquation $(x-1)(-x+8)\geqslant 0$.

30.2 c) En factorisant par $4x+3$, on est amené à résoudre l'inéquation $(4x+3)(x+2)>0$.

30.3 a) On a $\dfrac{x+1}{x-2}+3=\dfrac{x+1}{x-2}+\dfrac{3(x-2)}{x-2}=\dfrac{x+1+3x-6}{x-2}=\dfrac{4x-5}{x-2}$.

30.4 a) On a les équivalences suivantes :

$$\frac{3x+1}{4x+5}\leqslant 2 \iff \frac{3x+1}{4x+5}-\frac{2(4x+5)}{4x+5}\leqslant 0 \iff \frac{3x+1-2(4x+5)}{4x+5}\leqslant 0 \iff \frac{-5x-9}{4x+5}\leqslant 0.$$

30.4 b) On a les équivalences suivantes :

$$\frac{4x-7}{5-2x}<1 \iff \frac{4x-7}{5-2x}-\frac{5-2x}{5-2x}<0 \iff \frac{4x-7-(5-2x)}{5-2x}<0 \iff \frac{6x-12}{5-2x}<0.$$

30.4 c) On a les équivalences suivantes :

$$\frac{3}{4-x}\leqslant 2 \iff \frac{3}{4-x}-\frac{2(4-x)}{4-x}\leqslant 0 \iff \frac{3-2(4-x)}{4-x}\leqslant 0 \iff \frac{2x-5}{4-x}\leqslant 0.$$

30.4 d) On a les équivalences suivantes :

$$\frac{x+1}{-2x+3}\geqslant 3 \iff \frac{x+1}{-2x+3}-\frac{3(-2x+3)}{-2x+3}\geqslant 0 \iff \frac{x+1-3(-2x+3)}{-2x+3}\geqslant 0 \iff \frac{7x-8}{-2x+3}\geqslant 0.$$

30.5 a) On a $\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{2}{x}=\dfrac{3x}{x(x+1)}-\dfrac{2(x+1)}{x(x+1)}=\dfrac{3x-2(x+1)}{x(x+1)}=\dfrac{x-2}{x(x+1)}$.

30.5 b) On a les équivalences suivantes :

$$\frac{3}{x+1}\leqslant\frac{2}{x} \iff \frac{3}{x+1}-\frac{2}{x}\leqslant 0 \iff \frac{x-2}{x(x+1)}\leqslant 0.$$

On dresse le tableau de signes de $\dfrac{x-2}{x(x+1)}$ et on a :

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\dfrac{x-2}{x(x+1)}$		$-$	$\|$	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{3}{x+1}\leqslant\dfrac{2}{x}$ est donc $]-\infty,-1[\,\cup\,]0,2]$.

30.6 a) On a les équivalences suivantes :

$$\frac{1}{x}\leqslant\frac{3}{2x+6} \iff \frac{1\times(2x+6)}{x\times(2x+6)}-\frac{3\times x}{x\times(2x+6)}\leqslant 0 \iff \frac{2x+6-3x}{x(2x+6)}\leqslant 0 \iff \frac{-x+6}{x(2x+6)}\leqslant 0$$

30.6 b) On a les équivalences suivantes :

$$\frac{x-1}{x+2} \leqslant \frac{x+2}{x} \iff \frac{x \times (x-1)}{x \times (x+2)} - \frac{(x+2)^2}{x \times (x+2)} \leqslant 0 \iff \frac{x^2 - x - (x^2+4x+4)}{x(x+2)} \leqslant 0 \iff \frac{-5x-4}{x(x+2)} \leqslant 0.$$

30.7 a) On a les équivalences suivantes : $25 - 4x^2 \geqslant 0 \iff 5^2 - (2x)^2 \geqslant 0 \iff (5-2x)(5+2x) \geqslant 0.$

30.7 b) On a les équivalences suivantes : $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{1}{16} > 0 \iff \left(\dfrac{x}{3}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 > 0 \iff \left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{4}\right)\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{4}\right) > 0.$

30.7 c) On a les équivalences suivantes :

$$(3x+1)^2 \leqslant 25 \iff (3x+1)^2 - 5^2 \leqslant 0 \iff (3x+1-5)(3x+1+5) \leqslant 0 \iff (3x-4)(3x+6) \leqslant 0.$$

30.7 d) On a les équivalences suivantes :

$$(2x+4)^2 \geqslant 9x^2 \iff (2x+4)^2 - (3x)^2 \geqslant 0 \iff (2x+4-3x)(2x+4+3x) \geqslant 0 \iff (-x+4)(5x+4) \geqslant 0.$$

30.8 a) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}(2x+1)(5-x) + 4x^2 - 1 \leqslant 0 &\iff (2x+1)(5-x) + (2x)^2 - 1^2 \leqslant 0\\ &\iff (2x+1)(5-x) + (2x-1)(2x+1) \leqslant 0\\ &\iff (2x+1)\big((5-x) + (2x+1)\big) \leqslant 0\\ &\iff (2x+1)(x+4) \leqslant 0.\end{aligned}$$

30.8 b) On a les équivalences suivantes :

$$(3x+1)^2 - (2x+5)^2 \geqslant 0 \iff \big((3x+1) - (2x+5)\big)\big((3x+1) + (2x+5)\big) \geqslant 0 \iff (x-4)(5x+6) \geqslant 0.$$

30.8 c) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}8x^3 - 18x \leqslant 0 &\iff 2x \times 4x^2 - 2x \times 9 \leqslant 0\\ &\iff 2x(4x^2 - 9) \leqslant 0\\ &\iff 2x\big((2x)^2 - 3^2\big) \leqslant 0\\ &\iff 2x(2x-3)(2x+3) \leqslant 0.\end{aligned}$$

Fiche n° 31. Équations du premier degré

Réponses

31.1 a) .... $\left\{\dfrac{1}{3}\right\}$

31.1 b) .... $\{-5\}$

31.1 c) .... $\left\{\dfrac{5}{16}\right\}$

31.1 d) .... $\{-2\}$

31.2 a) .... $\left\{3\sqrt{2}\right\}$

31.2 b) .... $\left\{\sqrt{3}\right\}$

31.2 c) .... $\left\{3+2\sqrt{2}\right\}$

31.2 d) .... pas de solution

31.3 a) .... $\left\{-\dfrac{5}{8}\right\}$

31.3 b) .... $\left\{\dfrac{11}{17}\right\}$

31.3 c) .... $\{1\}$

31.3 d) .... pas de solution

31.4 a) .... $\left\{\dfrac{10}{3}\right\}$

31.4 b) .... $\{1\}$

31.4 c) .... $\left\{\dfrac{12}{7}\right\}$

31.4 d) .... $\left\{\dfrac{10}{13}\right\}$

Corrigés

31.1 a) Soit x un réel. On a les équivalences suivantes : $3x+2=3 \iff 3x=1 \iff x=\dfrac{1}{3}$.

31.1 c) Soit x un réel. On a les équivalences suivantes : $11x-2=3-5x \iff 16x=5 \iff x=\dfrac{5}{16}$.

31.2 a) Soit x un réel. On a les équivalences suivantes :

$$\sqrt{8}x-4=\sqrt{2}x+2 \iff 2\sqrt{2}x-4=\sqrt{2}x+2 \iff \sqrt{2}x=6 \iff x=\frac{6}{\sqrt{2}}=\frac{2\times 3}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$$

31.2 c) Soit x un réel. On a les équivalences suivantes :

$$\sqrt{2}x-1=\sqrt{2}+x \iff (\sqrt{2}-1)x=\sqrt{2}+1 \iff x=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \iff x=\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} \iff x=3+2\sqrt{2}.$$

31.2 d) Soit x un réel. On a les équivalences suivantes :

$$\sqrt{6}x+2=\sqrt{3}\big(\sqrt{2}x-1\big) \iff \sqrt{6}x+2=\sqrt{6}x-\sqrt{3} \iff 2=-\sqrt{3},\ \text{ce qui est impossible.}$$

31.3 a) Soit x un réel. On a les équivalences suivantes :

$$\frac{x}{3}+\frac{2}{3}=\frac{1}{4}-\frac{x}{3} \iff \frac{2}{3}x=\frac{1}{4}-\frac{2}{3}=\frac{3-8}{12}=-\frac{5}{12} \iff x=-\frac{5}{12}\times\frac{3}{2}=-\frac{5}{8}.$$

31.3 b) Soit x un réel. On a les équivalences suivantes :

$$\frac{1}{2}\frac{x}{\frac{1}{2}+\frac{3}{5}}=2x-1 \iff \frac{x}{\frac{5+6}{10}}=2(2x-1) \iff \frac{10}{11}x=4x-2 \iff \left(4-\frac{10}{11}\right)x=2$$
$$\iff \frac{34}{11}x=2 \iff x=\frac{11}{17}.$$

31.3 d) Soit x un réel. On a les équivalences suivantes :

$$\frac{1}{3}\left(2x-\frac{5}{2}\right)=\frac{x+1}{1+\frac{1}{2}} \iff 2x-\frac{5}{2}=3\frac{x+1}{\frac{3}{2}}=2(x+1) \iff 2x-\frac{5}{2}=2x+2 \iff -\frac{5}{2}=2,$$

ce qui est impossible. Ainsi, l'équation n'a pas de solution.

31.4 a) Soit x un réel différent de 0. Alors, on a les équivalences suivantes :

$$\frac{2}{x}=\frac{3}{5} \iff 2=\frac{3}{5}x \iff x=\frac{10}{3}.$$

31.4 b) Soit x un réel différent de $\frac{1}{2}$. Alors, on a les équivalences suivantes :

$$\frac{\sqrt{2}}{x-\frac{1}{2}}=\sqrt{8} \iff \frac{\sqrt{2}}{x-\frac{1}{2}}=2\sqrt{2} \iff \frac{1}{x-\frac{1}{2}}=2 \iff x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \iff x=1.$$

31.4 c) Soit x un réel différent de 2 et de 1. Alors, on a les équivalences suivantes :

$$\frac{2}{x-2}=-\frac{5}{x-1} \iff \frac{x-2}{2}=-\frac{x-1}{5} \iff \frac{x}{2}-1=-\frac{x}{5}+\frac{1}{5} \iff \frac{x}{2}+\frac{x}{5}=1+\frac{1}{5}$$
$$\iff \frac{7}{10}x=\frac{6}{5} \iff x=\frac{12}{7}.$$

31.4 d) Soit x différent de $\frac{1}{2}$ (car $1-2x=0 \iff x=\frac{1}{2}$, on exclut donc cette valeur) et de 4.

Alors, en procédant précédemment, on a l'équivalence :

$$\frac{1}{3(1-2x)}=-\frac{2}{4-x} \iff x=\frac{10}{13}.$$

Fiche n° 32. Équations du premier degré avec paramètre

Réponses

32.1 a) ... $\boxed{a-3}$

32.1 b)... $\boxed{\dfrac{3-a}{2}}$

32.1 c) ... $\boxed{1-a}$

32.1 d).. $\boxed{\dfrac{a^2-2}{2}}$

32.1 e)...... $\boxed{-1}$

32.1 f) .. $\boxed{\dfrac{1-a^2}{1+a^2}}$

32.2 a) ...... $\boxed{5b}$

32.2 b)... $\boxed{\dfrac{6}{b}+8}$

32.2 c).... $\boxed{-\dfrac{12}{b}}$

32.2 d)... $\boxed{-\dfrac{3}{4b^2}}$

32.3 a)...... $\boxed{\text{a}}$

32.3 b) ..... $\boxed{\text{c}}$

32.3 c)...... $\boxed{\text{a}}$

Corrigés

32.1 b) On commence par isoler $2x$, puis on divise les deux membres de l'égalité par 2 : $2x + a = 3$ devient $2x = 3 - a$ puis $x = \dfrac{3-a}{2}$.

32.1 c) On a $5 - 3x = 3a + 2$, donc $-3x = 3a + 2 - 5$. Finalement, $x = \dfrac{3a-3}{-3} = 1 - a$.

32.1 d) On a $1 - 2x = 3 - a^2$, donc $-2x = 3 - a^2 - 1$. Ainsi, $x = \dfrac{2-a^2}{-2}$, donc $x = \dfrac{-(2-a^2)}{2} = \dfrac{a^2-2}{2}$.

32.1 e) On a $1 + a^2x = -x - a^2$, donc $a^2x + x = -a^2 - 1$. Alors, $(a^2+1)x = -(a^2+1)$. Comme $a^2 + 1 \neq 0$, alors $x = -\dfrac{a^2+1}{a^2+1} = -1$.

32.1 f) En développant, on obtient $x^2 - a^2x - 1 = x^2 + x - 2 + a^2$, puis en regroupant, $x^2 - x^2 - a^2x - x = 1 - 2 + a^2$. Ainsi, $-(1+a^2)x = -1 + a^2$ donc $x = \dfrac{1-a^2}{1+a^2}$.

32.2 b) On a $\dfrac{x}{2} - \dfrac{3}{b} = 4$, donc $\dfrac{x}{2} = 4 + \dfrac{3}{b}$ et $x = 2\left(4 + \dfrac{3}{b}\right) = 8 + \dfrac{6}{b}$.

32.2 c) On a $\dfrac{2}{x} + \dfrac{b}{3} = \dfrac{b}{6}$, donc $\dfrac{2}{x} = \dfrac{b}{6} - \dfrac{b}{3}$. Ainsi, $\dfrac{2}{x} = \dfrac{b}{6} - \dfrac{2b}{6} = -\dfrac{b}{6}$. Donc, $2 = -\dfrac{b}{6} \times x$ puis $2 \times \left(-\dfrac{6}{b}\right) = x$. Finalement, $x = -\dfrac{12}{b}$.

32.2 d) En développant le membre de droite, l'équation s'écrit $\dfrac{3}{bx} + x = x - 4b$. En soustrayant par x, on obtient $\dfrac{3}{bx} = -4b$, donc $\dfrac{bx}{3} = -\dfrac{1}{4b}$, puis on obtient le résultat en multipliant les deux membres par $\dfrac{3}{b}$.

32.3 a) En développant, on obtient $x^2 + (1+2b)x + 2b = x^2 + (1+2b)x + (1+2b)$, donc $0 = 1$ et cette équation ne possède pas de solution. Autrement dit, elle possède 0 solution. Ainsi, a est la bonne réponse.

32.3 b) Si $m = 0$, l'équation s'écrit $3 = 2$ et ne possède pas de solution. Si $m \neq 0$, l'équation possède comme unique solution $-\dfrac{1}{m}$. L'ensemble des solutions dépend donc de la valeur de m (réponse c).

32.3 c) Si $a = 0$, l'équation s'écrit $0 = 0$ et tous les réels sont solutions (la réponse a est vraie, la réponse b est fausse). Si $a \neq 0$, l'équation s'écrit $x + a = 2x - 1$, donc $x = 1 + a$ (la réponse c est donc fausse également).

Fiche n° 33. Systèmes d'équations

Réponses

33.1 a) .... $\boxed{\text{non}}$

33.1 b) .... $\boxed{\text{oui}}$

33.1 c) .... $\boxed{\text{oui}}$

33.1 d) .... $\boxed{\text{non}}$

33.2 a) .... $\boxed{\text{non}}$

33.2 b) .... $\boxed{\text{non}}$

33.2 c) .... $\boxed{\text{oui}}$

33.2 d) .... $\boxed{\text{non}}$

33.3 a) .... $\boxed{(2,3)}$

33.3 b) .... $\boxed{(-2,4)}$

33.3 c) .... $\boxed{(1,-1)}$

33.3 d) .... $\boxed{(-1,2)}$

33.4 a) .... $\boxed{(4,-2)}$

33.4 b) .... $\boxed{\left(-3,-\frac{3}{4}\right)}$

33.4 c) .... $\boxed{\left(-\frac{50}{9},-\frac{74}{3}\right)}$

33.4 d) .... $\boxed{\left(\frac{-3}{8},\frac{5}{3}\right)}$

33.5 .... $\boxed{\left(\frac{1}{5},\frac{22}{5}\right)}$

33.6 .... $\boxed{6}$

33.7 a) .... $\boxed{\left(\frac{5}{4}\sqrt{2},-\frac{3}{2}\right)}$

33.7 b) .... $\boxed{\left(\frac{2+\sqrt{3}}{3},\frac{1}{3}\right)}$

33.8 .... $\boxed{40}$

33.9 a) .. $\boxed{\left(x,\frac{3x-8}{2}\right),\ \text{pour tout } x\in\mathbb{R}}$

33.9 b) .. $\boxed{\text{Il n'y a pas de solution}}$

Corrigés

33.1 a) En remplaçant x par 4 et y par 3 dans le premier membre de la première équation, on obtient $2\times4-4\times3$, ce qui vaut -4 et pas -10. Ainsi, le couple $(4,3)$ n'est pas solution.

....

33.1 b) On a $2\times3-4\times4=-10$ et $-3\times3+6\times4=15$. Ainsi, le couple $(3,4)$ est solution.

....

33.2 a) En considérant la deuxième ligne, on a $3\times4-4\times1=8\neq-15$. Ainsi, $(4,1)$ n'est pas une solution.

....

33.2 b) En considérant la première ligne, on a $2\times(-5)+3\times0=-10\neq7$. Ainsi, $(-5,0)$ n'est pas solution.

....

33.3 a) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{cases} x+y=5 \\ 2x+y=7 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y=5 \\ x=2 \quad \mathrm{L}_2\leftarrow\mathrm{L}_2-\mathrm{L}_1 \end{cases} \iff \begin{cases} y=3 \\ x=2. \end{cases}$$

Ainsi, le couple solution est $(2,3)$.

L_1 *fait référence à la première ligne et* L_2 *à la deuxième.* $\mathrm{L}_2\leftarrow\mathrm{L}_2-\mathrm{L}_1$ *signifie « on a remplacé* L_2 *par* $\mathrm{L}_2-\mathrm{L}_1$ *».*

....

33.3 b) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{cases} x-y=-6 \\ x+y=2 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= y-6 \\ (y-6)+y &= 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= y-6 \\ 2y &= 8 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-2 \\ y=4. \end{cases}$$

Ainsi, le couple solution est $(-2,4)$.

....

33.3 c) On peut utiliser la méthode par substitution en faisant $\mathrm{L}_2\leftarrow\mathrm{L}_2-\mathrm{L}_1$ par exemple.

....

33.3 d) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{cases}2x+4y=6\\3x+5y=7\end{cases} \iff \begin{cases}x+2y=3 & \mathrm{L}_1 \leftarrow \frac{1}{2}\mathrm{L}_1\\3x+5y=7\end{cases} \iff \begin{cases}x & =3-2y\\3(3-2y)+5y & =7\end{cases} \iff \begin{cases}x & =3-2y\\-y+9 & =7.\end{cases}$$

En terminant les calculs, on trouve que le couple solution est $(-1,2)$.

33.4 a) On peut utiliser la méthode par substitution en remarquant que $x=-2y$.

33.4 b) On peut utiliser la méthode par addition/soustraction en commençant par $\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 4\mathrm{L}_1$.

33.4 c) On peut utiliser la méthode par addition/soustraction en commençant par $\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 + 9\mathrm{L}_1$.

33.4 d) En faisant $\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 4\mathrm{L}_1$, la deuxième ligne devient $\frac{12}{5}y=-4$ ce qui permet de conclure.

33.5 Il faut résoudre le système $\begin{cases}y=2x+4\\y=-3x+5.\end{cases}$ On peut procéder par substitution.

33.6 En notant c le nombre de croissants et p celui de pains au chocolats, on trouve le système :

$$\begin{cases}c+p=10\\1\times c+1{,}20\,p=10{,}80.\end{cases}$$

33.7 a) En faisant $\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 3\mathrm{L}_1$, la deuxième ligne devient $-4y=6$, ce qui permet de conclure.

33.7 b) En faisant $\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - (2-\sqrt{3})\mathrm{L}_1$, on trouve :

$$\mathrm{L}_2 \iff -y-(2-\sqrt{3})(1-\sqrt{3})y=-(2-\sqrt{3}) \iff y+(5-3\sqrt{3})y=2-\sqrt{3} \iff y=\frac{2-\sqrt{3}}{6-3\sqrt{3}} \iff y=\frac{1}{3}.$$

Puis, en reportant dans la ligne 1, on trouve : $\mathrm{L}_1 \iff x=1-\frac{1-\sqrt{3}}{3} \iff x=\frac{2+\sqrt{3}}{3}$.

33.8 En notant r et s respectivement le prix d'un billet pour Rennes et Saint-Malo, on trouve le système : $\begin{cases}2r+5s=270\\4r+2s=220\end{cases}$. On peut commencer par faire $\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 2\mathrm{L}_1$.

33.9 a) On a l'équivalence suivante : $\begin{cases}3x-2y=8\\15x-10y=40\end{cases} \iff \begin{cases}3x-2y & =8\\ & 0=0 \quad \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 5\mathrm{L}_1\end{cases}$.

On remarque que la deuxième ligne est toujours vraie. Elle est donc inutile.

On obtient donc : $\begin{cases}3x-2y=8\\15x-10y=40\end{cases} \iff 3x-2y=8 \iff y=\frac{8-3x}{-2}$.

Ainsi, un couple (x,y) est solution si et seulement s'il vérifie l'égalité $y=\frac{3x-8}{2}$. Il y a une infinité de solutions, qui sont tous les couples de la forme $\left(x,\frac{3x-8}{2}\right)$ (où x est dans $\mathbb{R}$).

33.9 b) On a l'équivalence suivante : $\begin{cases}2x+8y=5\\3x+12y=3\end{cases} \iff \begin{cases}2x+8y & =5\\ & 0=-9 \quad \mathrm{L}_2 \leftarrow 2\mathrm{L}_2 - 3\mathrm{L}_1\end{cases}$.

La dernière ligne est toujours fausse (quelques soient les valeurs de x et y). Il n'y a donc pas de solution.

Fiche n° 34. Équations du deuxième degré

Réponses

34.1 a) .... $\boxed{\{-7, 7\}}$

34.1 b) .... $\boxed{\{-12, 12\}}$

34.1 c) .... $\boxed{\left\{-\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right\}}$

34.1 d) .... $\boxed{\{-50, 50\}}$

34.1 e) .... $\boxed{\{-100, 100\}}$

34.1 f) .... $\boxed{\{-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\}}$

34.2 a) .... $\boxed{\{-2, 2\}}$

34.2 b) .... $\boxed{\left\{-\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right\}}$

34.2 c) .... $\boxed{\left\{-\frac{\sqrt{33}}{6}, \frac{\sqrt{33}}{6}\right\}}$

34.2 d) .... $\boxed{\left\{-\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right\}}$

34.2 e) .... $\boxed{\left\{-\frac{4\sqrt{5}}{15}, \frac{4\sqrt{5}}{15}\right\}}$

34.2 f) ...... $\boxed{\left\{-\frac{\sqrt{210}}{6}, \frac{\sqrt{210}}{6}\right\}}$

34.3 a) .... $\boxed{\{-14, 0\}}$

34.3 b) .... $\boxed{\{-3, 2\}}$

34.3 c) .... $\boxed{\left\{-8, \frac{20}{3}\right\}}$

34.3 d) .... $\boxed{\left\{-\frac{9}{22}, \frac{1}{4}\right\}}$

34.3 e) .... $\boxed{\left\{-\frac{5}{7}, \frac{3}{5}\right\}}$

34.3 f) .... $\boxed{\left\{-\frac{20}{13}, \frac{20}{9}\right\}}$

34.4 a) .... $\boxed{\{-2\}}$

34.4 b) .... $\boxed{\left\{-\frac{2}{9}, 0\right\}}$

34.4 c) .... $\boxed{\left\{\frac{11}{23}, 7\right\}}$

34.4 d) .... $\boxed{\left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right\}}$

34.5 a) .... $\boxed{\left\{-\frac{1}{9}, 0\right\}}$

34.5 b) .... $\boxed{\left\{0, \frac{9}{20}\right\}}$

34.5 c) .... $\boxed{\{-9, -2, 9\}}$

34.5 d) .... $\boxed{\left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{1}{2}\right\}}$

34.6 a) .... $\boxed{\{-1\}}$

34.6 b) .... $\boxed{\{\sqrt{2}\}}$

34.6 c) .... $\boxed{\left\{\frac{1}{2}\right\}}$

34.6 d) .... $\boxed{\{-1, 1\}}$

34.7 a) .... $\boxed{\{-3, 3\}}$

34.7 b) .... $\boxed{\{-3, 3\}}$

Corrigés

34.2 d) On a les équivalences suivantes :

$$\frac{5}{4x^2} = \frac{4}{5} \iff \frac{5^2}{4^4} = x^2 \iff \left(x = -\frac{5}{4} \quad \text{ou} \quad x = \frac{5}{4}\right).$$

34.2 e) On a les équivalences suivantes :

$$\frac{1}{8}x^2 - \frac{2}{45} = 0 \iff x^2 = \frac{2}{45} \times 8 = \frac{16}{45} \iff \left(x = -\sqrt{\frac{16}{45}} = -\frac{4\sqrt{5}}{15} \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{\frac{16}{45}} = \frac{4\sqrt{5}}{15}\right).$$

34.2 f) On a les équivalences suivantes :

$$\frac{3}{7}x^2 = \frac{5}{2} \iff x^2 = \frac{5}{2} \times \frac{7}{3} = \frac{5 \times 6 \times 7}{6^2} = \frac{30 \times 7}{6^2} = \frac{210}{6^2} \iff \left(x = -\frac{\sqrt{210}}{6} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\sqrt{210}}{6}\right).$$

34.3 c) On a l'équivalence suivante : $\left(\frac{3}{2}x + 1\right)^2 = 121 \iff \left(\frac{3}{2}x + 1 = 11 \quad \text{ou} \quad \frac{3}{2}x + 1 = -11\right)$.

De plus, on a les équivalences :

$$\frac{3}{2}x + 1 = 11 \iff \frac{3}{2}x = 10 \iff x = \frac{20}{3} \qquad \text{et} \qquad \frac{3}{2}x + 1 = -11 \iff \frac{3}{2}x = -12 \iff x = -\frac{24}{3} = -8.$$

34.3 f) On a l'équivalence suivante :

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{x}{4}\right)^2=\left(\frac{2x}{5}+\frac{1}{3}\right)^2 \iff \left(\frac{2}{3}+\frac{x}{4}=\frac{2x}{5}+\frac{1}{3} \text{ ou } \frac{2}{3}+\frac{x}{4}=-\frac{2x}{5}-\frac{1}{3}\right).$$

De plus, on a les équivalences :

$$\frac{2}{3}+\frac{x}{4}=\frac{2x}{5}+\frac{1}{3} \iff -\frac{3}{20}x=-\frac{1}{3} \iff x=\frac{20}{9}$$

$$\text{et} \quad \frac{2}{3}+\frac{x}{4}=-\frac{2x}{5}-\frac{1}{3} \iff \frac{13}{20}x=-\frac{3}{3}=-1 \iff x=-\frac{20}{13}.$$

....

34.4 a) On a les équivalences : $(x+2)(4x+8)=0 \iff 4(x+2)^2=0 \iff x+2=0 \iff x=-2.$

....

34.5 a) On a les équivalences suivantes :

$$21x^2+\frac{7}{3}x=0 \iff 7x\left(3x+\frac{1}{3}\right)=0 \iff \left(7x=0 \text{ ou } 3x+\frac{1}{3}=0\right) \iff \left(x=0 \text{ ou } x=-\frac{1}{9}\right).$$

....

34.5 b) On a les équivalences suivantes :

$$\frac{64}{3}x^2=\frac{48}{5} \iff 8x\left(\frac{8}{3}x-\frac{6}{5}\right)=0 \iff \left(x=0 \text{ ou } x=\frac{6}{5}\times\frac{3}{8}=\frac{18}{40}=\frac{9}{20}\right).$$

....

34.5 d) On a les équivalences suivantes :

$$(1-2x)(x^2-2)=0 \iff \left(1-2x=0 \text{ ou } x^2-2=0\right) \iff \left(x=\frac{1}{2} \text{ ou } x=-\sqrt{2} \text{ ou } x=\sqrt{2}\right).$$

....

34.6 a) On a les équivalences suivantes :

$$x^2+2x+1=0 \iff (x+1)^2=0 \iff x+1=0 \iff x=-1.$$

....

34.6 b) On a les équivalences suivantes : $x^2-2\sqrt{2}\,x+2=0 \iff \left(x-\sqrt{2}\right)^2=0 \iff x=\sqrt{2}.$

....

34.6 c) On a les équivalences suivantes :

$$x^2+\frac{1}{4}=x \iff x^2-x+\frac{1}{4}=0 \iff x^2-2\times\frac{1}{2}\times x+\left(\frac{1}{2}\right)^2=0$$

$$\iff \left(x-\frac{1}{2}\right)^2=0 \iff x-\frac{1}{2}=0 \iff x=\frac{1}{2}.$$

....

34.6 d) On a les équivalences suivantes :

$$x^2+\frac{1}{x^2}=2 \iff x^2-2+\frac{1}{x^2}=0 \iff \left(x-\frac{1}{x}\right)^2=0$$

$$\iff x=\frac{1}{x} \iff x^2=1 \iff \left(x=-1 \text{ ou } x=1\right).$$

....

34.7 a) On a les équivalences suivantes :

$$(x^2-9)(x^2+9)=0 \iff \left(x^2-9=0 \text{ ou } x^2+9=0\right) \iff \left(x^2=9 \text{ ou } x^2=-9\right).$$

L'équation $x^2=9$ admettant pour solutions 3 et -3 et l'équation $x^2=-9$ n'admettant pas de solution réelle, on en déduit que l'ensemble des solutions recherché est $\{-3,3\}$.

....

34.7 b) On a les équivalences suivantes :

$$x^4=81 \iff x^4-81=0 \iff (x^2)^2-9^2=0 \iff (x^2-9)(x^2+9)=0.$$

D'après la question précédente, l'ensemble des solutions de l'équation est donc $\{-3,3\}$.

....

Fiche n° 35. Bilan sur les équations et inéquations

Réponses

35.1 a) $\left\{-\dfrac{5}{17}\right\}$

35.1 b) $\left\{5\sqrt{3}\right\}$

35.2 a) $\{1\}$

35.2 b) $\left\{\sqrt{3}\right\}$

35.3 a) $]-\infty,1]$

35.3 b) $\left[-\dfrac{21}{2},+\infty\right[$

35.4 a) $[-1,+\infty[$

35.4 b) $\left]-\infty,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[$

35.5 a) $\left\{\left(\dfrac{4}{7},\dfrac{2}{7}\right)\right\}$

35.5 b) $\left\{\left(\dfrac{13}{4},\dfrac{3}{4}\right)\right\}$

35.6 a) $\left\{-\dfrac{1}{3}(\sqrt{3}-1)a\right\}$

35.6 b) $\left]-\infty,\sqrt{2}\,a\right[$

35.7 a) $\{-3,3\}$

35.7 b) $\left\{-\dfrac{1}{6},0\right\}$

35.8 a) $[1,2]$

35.8 b) $\left[-2\sqrt{2},2\right]\cup\left[2\sqrt{2},+\infty\right[$

35.9 a) $\{1\}$

35.9 b) $\left\{\dfrac{2}{7}\right\}$

35.10 a) $\{5\}$

35.10 b) $\{0\}$

35.11 a) $\left]-\infty,\dfrac{1}{3}\right]\cup\left]\dfrac{1}{2},+\infty\right[$

35.11 b) $\left]\dfrac{2}{3},\dfrac{7}{9}\right]$

35.12 a) $\left]\dfrac{1}{2},1\right[\cup[2,+\infty[$

35.12 b) $]-\infty,-3[\cup\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]\cup]3,+\infty[$

35.13 a) $\{-1,3\}$

35.13 b) $\left\{-\dfrac{13}{8},-\dfrac{11}{8}\right\}$

35.13 c) $\left\{-\dfrac{3}{5},\dfrac{7}{5}\right\}$

35.13 d) $\left\{-\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\dfrac{9\sqrt{3}}{2}\right\}$

35.14 a) $\left\{\dfrac{4}{3},2\right\}$

35.14 b) $\left\{\dfrac{12}{5},\dfrac{21}{5}\right\}$

35.14 c) $\left\{\dfrac{11}{4}\right\}$

35.14 d) $\left\{\dfrac{7}{24}\right\}$

35.15 a) $\{-2,0,2\}$

35.15 b) $\left\{-\sqrt{2},\sqrt{2},-\sqrt{\dfrac{3}{2}},\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right\}$

35.15 c) $\left\{-\dfrac{2\sqrt{6}}{3},-\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right\}$

35.15 d) $\left\{-2\sqrt{2},2\sqrt{2}\right\}$

35.16 a) $\{-3,-1,1,3\}$

35.16 b) .... $\boxed{\{-\sqrt{3},-\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{3}\}}$

35.17 a) .... $\boxed{\left\{\pm\sqrt{7},\pm\sqrt{5},\pm\sqrt{3},\pm 1\right\}}$

35.17 b) .... $\boxed{\left\{\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right\}}$

35.18 a) .... $\boxed{\text{c}}$

35.18 b) .... $\boxed{\dfrac{1-3\alpha}{1+\alpha^2}}$

35.18 c) .... $\boxed{\dfrac{3+\alpha}{1+\alpha^2}}$

Corrigés

35.3 a) Soit x un réel. On a les équivalences suivantes :

$$\frac{x-1}{2} \leqslant 2-2x \iff x-1 \leqslant 4-4x \iff 5x \leqslant 5 \iff x \leqslant 1.$$

35.4 a) Soit x un réel. On a les équivalences suivantes :

$$x-\sqrt{2} \leqslant \sqrt{2}x-1 \iff x(1-\sqrt{2}) \leqslant \sqrt{2}-1 \iff x \geqslant \frac{\sqrt{2}-1}{1-\sqrt{2}} \iff x \geqslant -1,$$

l'avant-dernière inégalité se justifiant par le fait que $1-\sqrt{2}<0$.

35.5 b) Soient x et y deux réels. Alors, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{cases} x-3y=1 \\ 2x-2y=5 \end{cases} \underset{\mathrm{L}_2\leftarrow \mathrm{L}_2-2\mathrm{L}_1}{\iff} \begin{cases} x-3y=1 \\ 4y=3 \end{cases} \iff \begin{cases} y=\dfrac{3}{4} \\ x=1+3y=\dfrac{13}{4}. \end{cases}$$

35.7 b) Soit x un réel. On a les équivalences suivantes :

$$x^2+3x=2x-5x^2 \iff 6x^2+x=0 \iff (6x+1)x=0 \iff \left(x=-\frac{1}{6} \quad \text{ou} \quad x=0\right).$$

35.8 a) Soit x un réel. On a l'équivalence :

$$x(x-1) \leqslant 2(x-1) \iff (x-2)(x-1) \leqslant 0.$$

On résout alors cette dernière inéquation grâce à un tableau de signes.

35.9 b) Soit x un réel. On a les équivalences suivantes :

$$\frac{4x+1}{2x-1}=\frac{2x+3}{x-1} \iff (4x+1)(x-1)=(2x+3)(2x-1) \iff 4x^2-4x+x-1=4x^2-2x+6x-3$$
$$\iff 4x^2-4x+x-4x^2+2x-6x=-3+1 \iff -7x=-2 \iff x=\frac{2}{7}.$$

35.10 a) Soit x un réel différent de 1. On a les équivalences suivantes :

$$\frac{1}{x-1}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3(x-1)} \iff \frac{4}{3(x-1)}=\frac{1}{3} \iff \frac{3(x-1)}{4}=3 \iff x-1=4 \iff x=5.$$

35.10 b) Soit x un réel différent de $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$. On a les équivalences suivantes :

$$\frac{\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}}+3=1+\frac{\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} \iff \sqrt{2}(x+\sqrt{2})+3(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})+\sqrt{2}(x-\sqrt{2})$$
$$\iff \sqrt{2}x+2+3(x^2-2)=(x^2-2)+\sqrt{2}x-2$$
$$\iff 2(x^2-2)=-4 \iff x^2-2=-2 \iff x^2=0 \iff x=0.$$

35.11 a) Soit x un réel différent de $\frac{1}{2}$. Alors, on a les équivalences suivantes :

$$\frac{1}{2x-1} \leqslant 3 + \frac{2}{2x-1} \iff 0 \leqslant 3 + \frac{1}{2x-1} \iff 0 \leqslant \frac{6x-3}{2x-1} + \frac{1}{2x-1} \iff 0 \leqslant \frac{6x-2}{2x-1}.$$

On fait alors un tableau de signes pour étudier $\dfrac{6x-2}{2x-1} = 2\dfrac{3x-1}{2x-1}$. On remarque que :

$$3x - 1 \geqslant 0 \iff x \geqslant \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad 2x - 1 \geqslant 0 \iff x \geqslant \frac{1}{2}.$$

On a alors le tableau de signes ci-dessous, qui assure que l'ensemble des solutions est $\left]-\infty, \frac{1}{3}\right] \cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$3x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$2\dfrac{3x-1}{2x-1}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

35.11 b) Soit x un réel différent de $\frac{2}{3}$. On a les équivalences suivantes :

$$\frac{1}{3x-2} - 4 \geqslant \frac{1}{2-3x} + 2 \iff \frac{2}{3x-2} - 6 \geqslant 0 \iff \frac{2-18x+12}{3x-2} \geqslant 0 \iff 2\frac{7-9x}{3x-2} \geqslant 0.$$

On poursuit alors le calcul comme à la question précédente.

35.12 a) Soit x un réel différent de $\frac{1}{2}$ et 1. On a les équivalences :

$$\frac{1}{x-1} \leqslant \frac{3}{2x-1} \iff \frac{3}{2x-1} - \frac{1}{x-1} \geqslant 0 \iff \frac{3x-3-2x+1}{(2x-1)(x-1)} \geqslant 0 \iff \frac{x-2}{(2x-1)(x-1)} \geqslant 0.$$

On conclut ensuite avec un tableau de signes.

35.12 b) Soit x différent de 3 et de -3. Alors, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{2}{3-x} - 1 \leqslant -\frac{2}{3+x} + 1 &\iff \frac{2}{x-3} - \frac{2}{3+x} + 2 \geqslant 0 \iff \frac{1}{x-3} - \frac{1}{3+x} + 1 \geqslant 0 \\ &\iff \frac{3+x-x+3}{(x-3)(x+3)} + \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+3)} \geqslant 0 \\ &\iff \frac{6+x^2-9}{(x-3)(x+3)} \geqslant 0 \iff \frac{x^2-3}{(x-3)(x+3)} \geqslant 0 \iff \frac{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(x-3)(x+3)} \geqslant 0.\end{aligned}$$

On conclut alors avec un tableau de signes.

35.13 a) Soit x un réel. On a les équivalences suivantes :

$$(x-1)^2 = 4 \iff \big(x - 1 = 2 \quad \text{ou} \quad x - 1 = -2\big) \iff \big(x = 3 \quad \text{ou} \quad x = -1\big).$$

35.13 b) Soit x un réel. On a les équivalences suivantes :

$$(2x+3)^2 = \frac{1}{16} \iff \left(2x + 3 = \frac{1}{4} \quad \text{ou} \quad 2x + 3 = -\frac{1}{4}\right) \iff \left(x = -\frac{11}{8} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{13}{8}\right).$$

35.13 d) Soit x un réel. On a les équivalences suivantes :

$$\left(\frac{x}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=3 \iff \left(\frac{x}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad \frac{x}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}\right) \iff \left(x=\frac{9\sqrt{3}}{2} \quad \text{ou} \quad x=-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right).$$

35.14 a) Soit x un réel. On a les équivalences suivantes :

$$(x-1)^2=(3-2x)^2 \iff \Big(x-1=3-2x \quad \text{ou} \quad x-1=2x-3\Big) \iff \Big(3x=4 \quad \text{ou} \quad x=2\Big).$$

35.14 c) Soit x un réel. On a les équivalences suivantes :

$$\left(\frac{x}{2}-3\right)^2=\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)^2 \iff \left(\frac{x}{2}-3=\frac{x}{2}+\frac{1}{4} \quad \text{ou} \quad \frac{x}{2}-3=-\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) \iff \left(-3=\frac{1}{4} \quad \text{ou} \quad x=3-\frac{1}{4}\right).$$

Comme l'égalité $-3=\frac{1}{4}$ est impossible, la seule solution est $x=3-\frac{1}{4}=\frac{11}{4}$.

35.15 a) Soit x un réel. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}(x^2-2)^2=4 &\iff \Big(x^2-2=2 \quad \text{ou} \quad x^2-2=-2\Big) \iff \Big(x^2=4 \quad \text{ou} \quad x^2=0\Big)\\ &\iff \Big(x=-2 \quad \text{ou} \quad x=2 \quad \text{ou} \quad x=0\Big).\end{aligned}$$

35.15 d) Soit x un réel. On a les équivalences suivantes :

$$x^4=64 \iff (x^2)^2=64=8^2 \iff \Big(x^2=8 \quad \text{ou} \quad x^2=-8\Big).$$

Mais, comme x est réel, $x^2 \geqslant 0$ donc $x^2=-8$ est impossible. Ainsi, on a les équivalences suivantes :

$$x^4=64 \iff \Big(x=\sqrt{8} \quad \text{ou} \quad x=-\sqrt{8}\Big) \iff \Big(x=2\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad x=-2\sqrt{2}\Big).$$

35.16 a) Soit x tel que $3x^2-5\neq 0$, c'est-à-dire : soit x différent de $\sqrt{\frac{5}{3}}$ et de $-\sqrt{\frac{5}{3}}$.

Alors, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}\left(\frac{5x^2-1}{3x^2-5}\right)^2=4 &\iff \left(\frac{5x^2-1}{3x^2-5}=2 \quad \text{ou} \quad \frac{5x^2-1}{3x^2-5}=-2\right)\\ &\iff \Big(5x^2-1=6x^2-10 \quad \text{ou} \quad 5x^2-1=-6x^2+10\Big)\\ &\iff \Big(x^2=9 \quad \text{ou} \quad 11x^2=11\Big) \iff \Big(x=3 \quad \text{ou} \quad x=-3 \quad \text{ou} \quad x=1 \quad \text{ou} \quad x=-1\Big).\end{aligned}$$

35.16 b) Soit x un réel. Alors, on a les équivalences :

$$\begin{aligned}\left(\frac{-6x^2+14}{x^2-1}\right)^2=4 &\iff \left(\frac{-6x^2+14}{x^2-1}=2 \quad \text{ou} \quad \frac{-6x^2+14}{x^2-1}=-2\right)\\ &\iff \Big(-6x^2+14=2x^2-2 \quad \text{ou} \quad -6x^2+14=-2x^2+2\Big)\\ &\iff \Big(8x^2=16 \quad \text{ou} \quad 4x^2=12\Big) \iff \Big(x^2=2 \quad \text{ou} \quad x^2=3\Big)\\ &\iff \Big(x=\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad x=-\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad x=\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad x=-\sqrt{3}\Big).\end{aligned}$$

35.17 a) Soit x un réel. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}\left(\left(x^2-4\right)^2-5\right)^2=16 &\iff \left(x^2-4\right)^2-5=4 \quad \text{ou} \quad \left(x^2-4\right)^2-5=-4\\ &\iff \left(x^2-4\right)^2=9 \quad \text{ou} \quad \left(x^2-4\right)^2=1\\ &\iff x^2-4=3 \quad \text{ou} \quad x^2-4=-3 \quad \text{ou} \quad x^2-4=1 \quad \text{ou} \quad x^2-4=-1\\ &\iff x^2=7 \quad \text{ou} \quad x^2=1 \quad \text{ou} \quad x^2=5 \quad \text{ou} \quad x^2=3\\ &\iff x\in\left\{\pm\sqrt{7},\ \pm\sqrt{5},\ \pm\sqrt{3},\ \pm1\right\}.\end{aligned}$$

35.17 b) Soit x un réel. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}\left(\frac{4x^2-8}{x^2+1}\right)^2=36 &\iff \left(\frac{4x^2-8}{x^2+1}=6 \quad \text{ou} \quad \frac{4x^2-8}{x^2+1}=-6\right)\\ &\iff \left(4x^2-8=6x^2+6 \quad \text{ou} \quad 4x^2-8=-6x^2-6\right).\end{aligned}$$

Mais on a l'équivalence $4x^2-8=6x^2+6 \iff 2x^2=-14$, ce qui est impossible.

On a ainsi les équivalences suivantes :

$$\left(\frac{4x^2-8}{x^2+1}\right)^2 \iff 4x^2-8=-6x^2-6 \iff 10x^2=2 \iff x^2=\frac{1}{5} \iff \left(x=-\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{ou} \quad x=\frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

35.18 a) Soient x et y des réels. En faisant l'opération $\mathrm{L}_1-\alpha\,\mathrm{L}_2$, on obtient :

$$(1+\alpha^2)x=1-3\alpha,$$

ce qui permet de déterminer x.

35.18 c) Grâce à L_2, on en déduit que :

$$y=3+\alpha x=\frac{3+3\alpha^2}{1+\alpha^2}+\frac{\alpha-3\alpha^2}{1+\alpha^2}=\frac{3+\alpha}{1+\alpha^2}.$$

Fiche n° 36. Images et antécédents

Réponses

36.1 a) ... $\boxed{-4}$
36.1 b) ... $\boxed{0}$
36.1 c) ... $\boxed{0}$
36.1 d) ... $\boxed{3}$
36.1 e) ... $\boxed{-\dfrac{29}{9}}$
36.1 f) ... $\boxed{-1-2\sqrt{2}}$
36.2 a) ... $\boxed{4}$
36.2 b) ... $\boxed{-1}$
36.2 c) ... $\boxed{-2}$
36.2 d) ... $\boxed{-2}$
36.2 e) ... $\boxed{1}$
36.2 f) ... $\boxed{1}$
36.2 g) ... $\boxed{1 \text{ et } 2}$
36.2 h) ... $\boxed{0 \text{ et } 3}$
36.2 i) ... $\boxed{\text{aucun}}$
36.2 j) ... $\boxed{-1 \text{ et } 4}$
36.3 a) ... $\boxed{-\dfrac{\sqrt{2}}{7}}$
36.3 b) ... $\boxed{0}$
36.3 c) ... $\boxed{\dfrac{1-\sqrt{2}}{7}}$
36.3 d) ... $\boxed{-\dfrac{15}{13}}$
36.3 e) ... $\boxed{-\dfrac{5\sqrt{5}}{13}}$
36.3 f) ... $\boxed{\dfrac{5}{39}(-9+4\sqrt{3}+\sqrt{21})}$
36.4 a) ... $\boxed{1}$
36.4 b) ... $\boxed{-1}$
36.4 c) ... $\boxed{0}$
36.4 d) ... $\boxed{-6}$
36.4 e) ... $\boxed{3}$
36.4 f) ... $\boxed{0}$
36.4 g) ... $\boxed{-4}$
36.4 h) ... $\boxed{-5 \text{ et } 0}$
36.5 a) ... $\boxed{-3 \text{ et } 2}$
36.5 b) ... $\boxed{3x^2+3x-18}$
36.5 c) ... $\boxed{-1 \text{ et } 0}$
36.5 d) ... $\boxed{3x^2+3x+\dfrac{3}{4}}$
36.5 e) ... $\boxed{-\dfrac{1}{2}}$
36.6 a) ... $\boxed{\dfrac{1}{3}}$
36.6 b) ... $\boxed{\text{aucun}}$
36.6 c) ... $\boxed{7+3\sqrt{5}}$

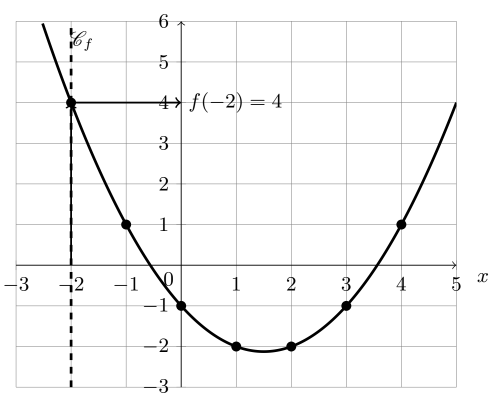
Corrigés

36.1 c) On a $f(-2) = (-2)^2 - 4 = 0$.

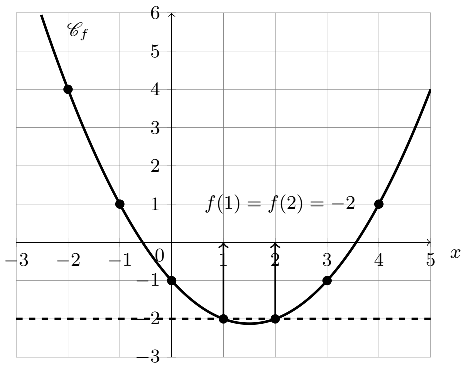
36.1 e) On a $f\left(-\dfrac{\sqrt{7}}{3}\right) = \left(-\dfrac{\sqrt{7}}{3}\right)^2 - 4 = \dfrac{7}{9} - 4 = -\dfrac{29}{9}$.

36.1 f) On a $f(1-\sqrt{2}) = (1-\sqrt{2})^2 - 4 = 1 - 2\sqrt{2} + 2 - 4 = -1 - 2\sqrt{2}$.

36.2 a) On a :



36.2 g) On a :



36.3 a) On a les équivalences suivantes : $f(x) = 0 \iff 7x + \sqrt{2} = 0 \iff x = -\dfrac{\sqrt{2}}{7}$.

36.3 b) On a les équivalences suivantes : $f(x) = \sqrt{2} \iff 7x + \sqrt{2} = \sqrt{2} \iff x = 0$.

36.3 c) On a les équivalences suivantes : $f(x) = 1 \iff 7x + \sqrt{2} = 1 \iff x = \dfrac{1-\sqrt{2}}{7}$.

36.3 d) On a les équivalences suivantes : $g(x) = 0 \iff \dfrac{13}{5}x + 3 = 0 \iff x = -\dfrac{15}{13}$.

36.3 e) On a les équivalences suivantes :

$$g(x) = 3 - \sqrt{5} \iff \frac{13}{5}x + 3 = 3 - \sqrt{5} \iff x = -\frac{5\sqrt{5}}{13}.$$

36.3 f) On a les équivalences suivantes :

$$g(x) = \frac{\sqrt{7}+4}{\sqrt{3}} \iff \frac{13}{5}x + 3 = \frac{\sqrt{7}+4}{\sqrt{3}} \iff x = \frac{5}{13}\,\frac{\sqrt{7}+4-3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5}{39}(-9+4\sqrt{3}+\sqrt{21}).$$

36.5 a) On a l'équivalence suivante : $f(x) = 0 \iff (x = -3 \quad \text{ou} \quad x = 2)$.

36.5 c) On a les équivalences suivantes :

$$f(x) = -18 \iff 3x^2 + 3x = 0 \iff 3x(x-1) = 0 \iff (x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -1).$$

36.5 e) On a les équivalences suivantes :

$$f(x) = -\frac{75}{4} \iff 3x^2 + 3x + \frac{3}{4} = 0 \iff 3\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) = 0 \iff 3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \iff x = -\frac{1}{2}.$$

36.6 a) On a les équivalences suivantes : $f(x) = 1 \iff 5x - 2 = 1 - 4x \iff x = \dfrac{1}{3}$.

36.6 b) On a les équivalences suivantes :

$$f(x) = -\frac{5}{4} \iff 4(5x-2) = -5(1-4x) \iff 8 = 5, \quad \text{qui n'a pas de solution.}$$

36.6 c) On a les équivalences suivantes :

$$f(x) = 1 - \sqrt{5} \iff 5x - 2 = (1-\sqrt{5})(1-4x) \iff (9-4\sqrt{5})x = 3 - \sqrt{5}$$
$$\iff x = \frac{3-\sqrt{5}}{9-4\sqrt{5}} = \frac{(3-\sqrt{5})(9+4\sqrt{5})}{(9-4\sqrt{5})(9+4\sqrt{5})} = 7 + 3\sqrt{5}.$$

Fiche nº 37. Calcul avec les fonctions

Réponses

37.1 a) .... $\boxed{8x^3 - 4x^2 + 2x}$

37.1 b) .... $\boxed{-x^3 - x^2 - x}$

37.1 c) .... $\boxed{x^6 - x^4 + x^2}$

37.1 d) .... $\boxed{x^9 - x^6 + x^3}$

37.1 e) .... $\boxed{t\sqrt{t} - t + \sqrt{t}}$

37.1 f) .... $\boxed{-x^3 + 2x^2 - 2x + 1}$

37.2 a) .... b

37.2 b) .... a

37.2 c) c

37.2 d) .... b

37.3 a) .... $\boxed{\sqrt{x^4 - 3}}$

37.3 b) .... $\boxed{(x-3)^2}$

37.3 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{x-4}}$

37.3 d) ...... $\boxed{\dfrac{1}{(x-1)^4(x+1)^4}}$

37.4 a) .... $\boxed{\dfrac{2x^2 - 2x + 1}{(x-1)^2}}$

37.4 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{(x+1)^2}}$

37.4 c) .... $\boxed{x + 1 + 2\sqrt{x-1}}$

37.4 d) .... $\boxed{x + 1}$

37.5 a) .... $\boxed{22x + \dfrac{179}{6}}$

37.5 b) .... $\boxed{-6\sqrt{2}\,x + 5\sqrt{2}}$

37.6 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{10}x + \dfrac{7}{80}}$

37.6 b) .... $\boxed{6x + 3}$

37.6 c) .... $\boxed{-5x - 2}$

Corrigés

37.1 a) On a $f(2x) = (2x)^3 - (2x)^2 + 2x = 8x^3 - 4x^2 + 2x$.

37.1 b) On a $f(-x) = (-x)^3 - (-x)^2 + (-x) = -x^3 - x^2 - x$.

37.1 c) On a $f(x^2) = (x^2)^3 - (x^2)^2 + x^2 = x^6 - x^4 + x^2$.

37.1 e) On a $f\big(\sqrt{t}\big) = (\sqrt{t})^3 - (\sqrt{t})^2 + \sqrt{t} = (\sqrt{t})^2\sqrt{t} - t + \sqrt{t} = t\sqrt{t} - t + \sqrt{t}$.

37.1 f) On a $(1-x)^2 = 1 - 2x + x^2$ et $(1-x)^3 = (1-x)(1-x)^2 = 1 - 3x + 3x^2 - x^3$. D'où :

$$\begin{aligned} f(1-x) &= 1 - 3x + 3x^2 - x^3 - (1 - 2x + x^2) + 1 - x \\ &= 1 - 3x + 3x^2 - x^3 - 1 + 2x - x^2 + 1 - x = -x^3 + 2x^2 - 2x + 1. \end{aligned}$$

37.2 a) Dans cet exercice, il est important de remarquer que pour tout réel x et tout entier n, $(-x)^n = (-1)^n x^n$ et, par conséquent, $(-x)^n = -x^n$ si n est impair et $(-x)^n = x^n$ si n est pair. En utilisant ce résultat, on obtient pour tout réel x, $f_1(-x) = \dfrac{-x}{1 + (-x)^2} = \dfrac{-x}{1 + x^2} = -f_1(x)$, ce qui montre que f_1 est une fonction impaire par définition.

37.2 c) Pour montrer qu'une fonction f_3 n'est pas paire, il suffit d'exhiber un réel x de son ensemble de définition tel que $f_3(-x) \neq f_3(x)$. Par exemple ici, $f_3(-1) = \dfrac{1}{2}$ tandis que $f_3(1) = \dfrac{3}{2}$. Ainsi, f_3 n'est pas paire. La fonction f_3 n'est pas non plus impaire, car un calcul montre, par exemple, que $f_3(-2) \neq -f_3(2)$.

37.2 d) On constate que, pour tout réel x, $f_4(-x) = \dfrac{(-x)^3 + 2(-x)}{(-x)^4 + 1} = \dfrac{-x^3 - 2x}{x^4 + 1} = \dfrac{-(x^3 + 2x)}{x^4 + 1} = -f_4(x)$.

37.3 b) On a $h\big(f(x)\big) = \big(\sqrt{x-3}\big)^4 = \big(\sqrt{x-3}\big)^2\big(\sqrt{x-3}\big)^2 = (x-3)^2$.

37.3 c) On a $g\big(f(x)\big) = \dfrac{1}{\big(\sqrt{x-3}\big)^2 - 1} = \dfrac{1}{x-3-1} = \dfrac{1}{x-4}$.

37.3 d) On a $h\big(g(x)\big) = \left(\dfrac{1}{x^2-1}\right)^4 = \dfrac{1}{(x^2-1)^4} = \dfrac{1}{\big((x-1)(x+1)\big)^4} = \dfrac{1}{(x-1)^4(x+1)^4}$.

37.4 a) On a $f\big(g(x)\big) = \left(\dfrac{1}{x-1}\right)^2 + \dfrac{2}{x-1} + 2 = \dfrac{1}{(x-1)^2} + \dfrac{2(x-1)}{(x-1)^2} + \dfrac{2(x-1)^2}{(x-1)^2} = \dfrac{2x^2-2x+1}{(x-1)^2}$.

37.4 b) On a $g\big(f(x)\big) = \dfrac{1}{x^2+2x+1} = \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

37.4 c) On a $f\big(h(x)\big) = \big(\sqrt{x-1}\big)^2 + 2\sqrt{x-1} + 2 = x - 1 + 2\sqrt{x-1} + 2 = x + 1 + 2\sqrt{x-1}$.

37.4 d) On a $h\big(f(x)\big) = \sqrt{x^2+2x+1} = \sqrt{(x+1)^2} = |x+1| = x+1$; en effet, $x+1$ est positif pour les valeurs de x considérées.

37.5 a) On cherche les deux réels a et b tels que $f(x) = ax + b$ avec les conditions proposées. On sait que le coefficient directeur a est donné par le calcul suivant : $a = \dfrac{f\big(\frac{-4}{3}\big) - f\big(\frac{-5}{4}\big)}{\frac{-4}{3} - \frac{-5}{4}} = \dfrac{\frac{1}{2} - \frac{7}{3}}{\frac{-4}{3} + \frac{5}{4}} = \dfrac{11}{6} \times (-12) = -22$.

Pour trouver ensuite le réel b, on peut par exemple utiliser la condition $f\left(\dfrac{-5}{4}\right) = \dfrac{7}{3}$. Celle-ci s'écrit explicitement $22 \times \dfrac{-5}{4} + b = \dfrac{7}{3}$. On obtient alors $b = \dfrac{179}{6}$ après résolution de l'équation.

37.5 b) On peut reprendre la même démarche que dans la question précédente. Il est utile d'observer que $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$ et, par conséquent, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) - f\left(\dfrac{3}{4}\right) = \sqrt{8} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

37.6 a) On cherche les deux réels a et b tels que $f(x) = ax + b$ avec les conditions proposées. La deuxième condition s'écrit explicitement $3a + b - (-3a + b) = \dfrac{3}{5}$. Après simplification, on obtient donc $6a = \dfrac{3}{5}$ et donc $a = \dfrac{1}{10}$. En tenant compte de ceci, la première condition s'écrit $\dfrac{-1}{20} + b = \dfrac{1}{50} + \dfrac{1}{5}b$. Cette équation donne $b = \dfrac{7}{80}$.

37.6 b) Sur le même principe, on cherche à expliciter les conditions en utilisant l'expression $f(x) = ax + b$. En faisant cela, on trouve que les réels a et b doivent respecter $a - 2b = 0$ et $2a + 3b = 21$. Il s'agit donc de résoudre le système de deux équations à deux inconnues (a et b) suivant :

$$\begin{cases} a - 2b = 0 & (\mathrm{L}_1) \\ 2a + 3b = 21 & (\mathrm{L}_2) \end{cases}$$

La combinaison linéaire $\mathrm{L}_2 - 2 \times \mathrm{L}_1$ permet de trouver $b = 3$, puis d'en déduire $a = 6$.

37.6 c) On cherche f sous la forme $f(x) = ax + b$. La première condition donne $b = -2$ et la troisième condition donne $a < 0$. Après simplification, la deuxième condition s'écrit $a^2 = 25$. En vertu de la troisième condition, on rejette la solution 5 pour ne garder que la solution négative, qui est -5. On aboutit donc à $f(x) = -5x - 2$.

Fiche n° 38. Points des courbes des fonctions

Réponses

38.1 a) .... $\boxed{\text{oui}}$

38.1 b) .... $\boxed{\text{non}}$

38.2 a) .... $\boxed{(1\,;2)}$

38.2 b) .... $\boxed{(0\,;5) \text{ et } (4\,;5)}$

38.3 .... $\boxed{\text{non}}$

38.4 ...... $\boxed{(1\,;1) \text{ et } (-1\,;-1)}$

38.5 a) .... $\boxed{a \neq -1}$

38.5 b) .... $\boxed{a = -\dfrac{1}{2}}$

38.5 c) ... $\boxed{a = \sqrt{2} \text{ ou } a = -\sqrt{2}}$

38.6 a) .... $\boxed{2}$

38.6 b) .... $\boxed{x = -2 \text{ et } x = 2}$

38.7 .... $\boxed{(0\,;1) \text{ et } (1\,;2)}$

38.8 .... $\boxed{a = \dfrac{1}{3}}$

Corrigés

38.1 a) On a $f(2) = 14$ donc le point $\mathrm{A}(2\,;14)$ est sur la courbe représentative de f.

38.2 a) Le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $x = 1$ a pour ordonnée $y = f(1) = 2$.

38.2 b) On a les équivalences suivantes :

$$f(x) = 5 \iff x^2 - 4x + 5 = 5 \iff x^2 - 4x = 0 \iff x(x-4) = 0.$$

Comme un produit est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul, on a les équivalences suivantes :

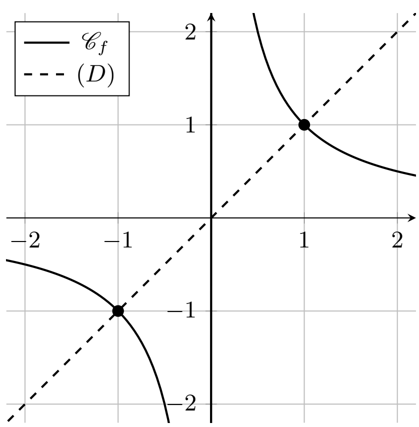
$$f(x) = 5 \iff \big(x = 0 \quad \text{ou} \quad x - 4 = 0\big) \iff \big(x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 4\big).$$

38.3 On a $f(3) = 27 - 30 + 1 = -2 < 0$ donc le point $\mathrm{A}(3\,;-2)$ est situé en dessous de l'axe des abscisses.

38.4 Il s'agit de résoudre l'équation $f(x) = x$. Soit $x \neq 0$. On a les équivalences suivantes :

$$f(x) = x \iff \frac{1}{x} = x \iff 1 = x^2 \iff x = \pm 1.$$

Il y a donc deux points d'intersection. Celui d'abscisse $x = 1$ et d'ordonnée $y = x = 1$, et celui d'abscisse $x = -1$ et d'ordonnée $y = x = -1$. On peut représenter ces solutions sur le graphique suivant :



38.5 a) La quantité $g(a+1) = \dfrac{1}{a+1}$ est bien définie pour $a + 1 \neq 0$, autrement dit pour $a \neq -1$.

38.5 b) Il s'agit de résoudre l'équation $2 = g(a+1)$. Déjà, il faut $a \neq -1$. Ensuite, on a les équivalences suivantes :

$$2 = g(a+1) \iff 2 = \frac{1}{a+1} \iff a+1 = \frac{1}{2} \iff a = -\frac{1}{2}.$$

38.5 c) Déjà, il faut $a \neq -1$. Ensuite, on a les équivalences suivantes :

$$a - 1 = g(a+1) \iff a - 1 = \frac{1}{a+1} \iff (a+1)(a-1) = 1 \iff a^2 + a - a - 1 = 1$$
$$\iff a^2 = 2 \iff a = \pm\sqrt{2}.$$

38.6 a) Il s'agit de compter le nombre de points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

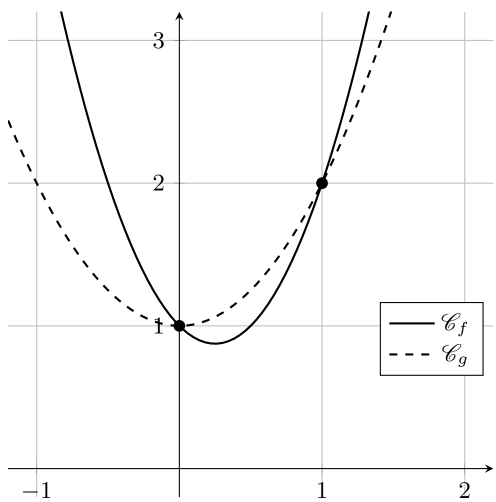
38.6 b) Il s'agit de résoudre l'équation $f(x) = g(x)$. On a les équivalences suivantes :

$$f(x) = g(x) \iff \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 2 \iff \frac{3}{4}x^2 = 3 \iff x^2 = 4 \iff x = \pm 2.$$

38.7 On commence par résoudre l'équation $f(x) = g(x)$. On a les équivalences suivantes :

$$f(x) = g(x) \iff 2x^2 - x + 1 = x^2 + 1 \iff x^2 - x = 0 \iff x(x-1) = 0 \iff \big(x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 1\big).$$

Il y a donc deux points d'intersection : le point d'abscisse $x = 0$ et d'ordonnée $y = f(0) = 1$, et le point d'abscisse $x = 1$ et d'ordonnée $y = f(1) = 3$. On peut représenter ces points sur le graphique suivant :



38.8 Déjà, pour que $f(1)$ soit bien défini il faut que $a \neq 1$. Soit $a \neq 1$. On a les équivalences suivantes :

$$f(1) = 2 \iff \frac{1+a}{1-a} = 2 \iff 1 + a = 2(1-a) \iff 3a = 1 \iff a = \frac{1}{3}.$$

Cette valeur de a est acceptable car on a bien $\frac{1}{3} \neq 1$.

Fiche n° 39. Tableaux de variations

Réponses

39.1 a) .... voir corrigé

39.1 b) .... voir corrigé

39.1 c) .... voir corrigé

39.2 a) .... (b)

39.2 b) .... (a)

39.2 c) .... (b)

39.2 d) .... (a)

39.2 e) .... (a)

39.2 f) .... (c)

39.2 g) .... (b)

39.2 h) .... (b)

39.2 i) .... (c)

39.3 a) .... $4 < \cdots < 5$

39.3 b) .... $9 < \cdots < 10$

39.3 c) .... $5 < \cdots < 6$

39.3 d) .... $-2 < \cdots < -1$

Corrigés

39.1 a) On a :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
variations de f		$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	

....

39.1 b) On a :

x	-2		-1		1		2
variations de f	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2

....

39.1 c) On a :

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
variations de f		$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	

....

39.2 a) La fonction f est strictement décroissante sur $[6, 10]$. Or, 7 et 9 sont dans $[6, 10]$ et $7 < 9$ donc $f(7) > f(9)$.

....

39.2 b) La fonction f est strictement croissante sur $[1, 6]$. Or, 2 et 4 sont dans $[1, 6]$ et $2 < 4$ donc $f(2) < f(4)$.

....

39.2 c) La fonction f est strictement croissante sur $[10, 15]$. Comme 11 et 13 appartiennent à $[10, 15]$ et comme on a $11 < 13$, on en déduit que $f(11) < f(13)$.

....

39.2 d) La fonction f est strictement croissante sur $]-\infty, -4]$. Or, -30 et -4 sont dans $]-\infty, -4]$ et $-30 < -4$ donc $f(-30) < f(-4)$.

....

39.2 e) Par lecture du tableau de variations de f, on remarque que, pour tout $x \in [10,15]$, $f(x) \leqslant 4$. De plus, pour tout $x \in [1,6]$, $5 \leqslant f(x)$. Donc $f(11) \leqslant 4$ et $5 \leqslant f(2)$; ainsi, on a $f(11) \leqslant f(2)$.

....

39.2 f) On a, par lecture du tableau, $f(0) \in [5,6]$ et $f(7) \in [-2,8]$. On ne peut donc pas comparer $f(0)$ et $f(7)$.

....

39.2 g) Par lecture du tableau, on a $f(0) \geqslant 5$ et $f(16) \leqslant 4$ donc $f(0) > f(16)$.

....

39.3 a) On a $16 \leqslant 17 \leqslant 25$, donc, par croissance de la fonction « racine carrée » sur $\mathbb{R}_+$, on a :

$$\sqrt{16} \leqslant \sqrt{17} \leqslant \sqrt{25}.$$

Autrement dit, on a $4 \leqslant \sqrt{17} \leqslant 5$.

....

39.3 b) En procédant comme dans la question précédente, on trouve $81 \leqslant 95 \leqslant 100$; donc $9 \leqslant \sqrt{95} \leqslant 10$.

....

39.3 c) En procédant comme dans la question précédente, on trouve $36 \leqslant 39 \leqslant 49$ donc $6 \leqslant \sqrt{39} \leqslant 7$.

On en déduit $\dfrac{4+6}{2} \leqslant \dfrac{4+\sqrt{39}}{2} \leqslant \dfrac{4+7}{2}$ puis $5 \leqslant \dfrac{4+\sqrt{39}}{2} \leqslant \dfrac{11}{2}$. Or, on a $\dfrac{11}{2} \leqslant 6$. Donc, $5 \leqslant \dfrac{4+\sqrt{39}}{2} \leqslant 6$.

....

39.3 d) De même, on a $49 \leqslant 53 \leqslant 64$ donc $7 \leqslant \sqrt{53} \leqslant 8$ et donc $-8 \leqslant -\sqrt{53} \leqslant -7$. On en déduit que $\dfrac{5-8}{2} \leqslant \dfrac{5-\sqrt{53}}{2} \leqslant \dfrac{5-7}{2}$ puis que $-\dfrac{3}{2} \leqslant \dfrac{5-\sqrt{53}}{2} \leqslant -1$ et enfin que $-2 \leqslant \dfrac{5-\sqrt{53}}{2} \leqslant -1$.

....

Fiche n° 40. Fonctions et inéquations

Réponses

40.1 a) .... $\boxed{f(1) < h(1) < g(1)}$

40.1 b) .... $\boxed{h(2) < f(2) < g(2)}$

40.1 c) .... $\boxed{\left[-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right]}$

40.1 d) .... $\boxed{\left[\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right]}$

40.1 e)........ $\boxed{\left]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[\cup \left]\frac{11}{4}, 4\right]}$

40.1 f) .... $\boxed{\left\{\frac{1}{2}\right\} \cup [3, 4]}$

40.2 a) .... $\boxed{\mathscr{C}_3}$

40.2 b) .... $\boxed{\mathscr{C}_2}$

40.2 c) .... $\boxed{\mathscr{C}_1}$

40.2 d) .... $\boxed{\left[\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right]}$

40.3 a) .... $\boxed{[4, +\infty[}$

40.3 b)........... $\boxed{\left]-\infty, -\frac{16}{9}\right[}$

40.4 a) .... $\boxed{3x(2-x)}$

40.4 b) .... $\boxed{\text{voir corrigé}}$

40.4 c) .... $\boxed{]0, 2[}$

40.5 a).............. $\boxed{x^2(x+3)}$

40.5 b) .... $\boxed{\text{voir corrigé}}$

40.5 c)...... $\boxed{]-3, 0[\text{ et }]0, +\infty[}$

Corrigés

40.2 a) Soit x un réel. D'après l'énoncé, si $\frac{2}{3} \leqslant x \leqslant \frac{5}{3}$ alors $f(x) \leqslant g(x)$. Or, sur l'intervalle $\left[\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right]$, seule la courbe $\mathscr{C}_3$ est en dessous d'une des deux autres courbes, en l'occurence $\mathscr{C}_2$.

Ainsi, la courbe représentative de f est $\mathscr{C}_3$.

....

40.3 a) Soit x un réel. On a les équivalences suivantes :

$$g(x) \geqslant \frac{7}{3} \iff \frac{1}{2}x + \frac{1}{3} \geqslant \frac{7}{3} \iff \frac{1}{2}x \geqslant \frac{6}{3} \iff x \geqslant 4 \iff x \in [4, +\infty[.$$

On en déduit que l'ensemble des solutions de $g(x) \geqslant \frac{7}{3}$ est $[4, +\infty[$.

....

40.3 b) Soit x un réel. On a les équivalences suivantes :

$$f(x) < g(x) \iff 2x + 3 < \frac{1}{2}x + \frac{1}{3} \iff 2x - \frac{1}{2}x < \frac{1}{3} - 3 \iff \frac{3}{2}x < -\frac{8}{3}$$
$$\iff x < -\frac{16}{9} \iff x \in \left]-\infty, -\frac{16}{9}\right[.$$

On en déduit que l'ensemble des solutions de $f(x) < g(x)$ est $\left]-\infty, -\frac{16}{9}\right[$.

....

40.4 a) On a $f(x) - g(x) = 2 - 3x^2 - (-6x + 2) = 6x - 3x^2 = 3x(2-x)$.

....

40.4 b) On a :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$3x$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

....

40.4 c) Du tableau de signes, on déduit que l'ensemble des solutions de $f(x) > g(x)$ est $]0, 2[$, et donc que $\mathscr{C}_f$ est strictement au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $]0, 2[$.

....

40.5 a) On a $f(x) - g(x) = x^3 + 5 - \left(5 - 3x^2\right) = x^3 + 3x^2 = x^2(x+3)$.

....

40.5 b) On étudie le signe de $f(x) - g(x)$. On a :

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
x^2		$+$		$+$	0	$+$	
$x + 3$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x) - g(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

....

40.5 c) On déduit du tableau de signes que l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > g(x)$ est

$$]-3, 0[\cup]0, +\infty[.$$

Ainsi, $\mathscr{C}_g$ est strictement en dessous de $\mathscr{C}_f$ sur les intervalles $]-3, 0[$ et $]0, +\infty[$.

....

Fiche n° 41. Bilan sur les fonctions

Réponses

41.1 a) .... $\boxed{-3}$

41.1 b) .... $\boxed{13/2}$

41.1 c) .... $\boxed{-20}$

41.1 d) .... $\boxed{44}$

41.1 e) .... $\boxed{]-\infty, -3]}$

41.1 f) .... $\boxed{[16, +\infty[}$

41.2 a) .... $\boxed{29}$

41.2 b) .... $\boxed{8}$

41.2 c) .... $\boxed{-1 \text{ et } 1}$

41.2 d) .... $\boxed{-5 \text{ et } 5}$

41.2 e) .... $\boxed{[-2, 2]}$

41.2 f) .... $\boxed{]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[}$

41.3 a) .... $\boxed{77/85}$

41.3 b) .... $\boxed{1}$

41.3 c) .... $\boxed{-2}$

41.3 d) .... $\boxed{0 \text{ et } 1/42}$

41.4 a) .... $\boxed{\mathbb{R} \setminus \{-8\}}$

41.4 b) .... $\boxed{\mathbb{R} \setminus \{1/2\}}$

41.4 c) .... $\boxed{\mathbb{R} \setminus \{-1/2, 5\}}$

41.4 d) .... $\boxed{\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}}$

41.4 e) .... $\boxed{]-2, +\infty[}$

41.4 f) .... $\boxed{]-8, 8[}$

41.5 a) .... $\boxed{[3, +\infty[}$

41.5 b) .... $\boxed{]-\infty, -2[\cup]3, +\infty[}$

41.5 c) .... $\boxed{[3, +\infty[}$

41.5 d) .... $\boxed{]-2, 3]}$

41.5 e) .... $\boxed{]3, +\infty[}$

41.5 f) .... $\boxed{]-\infty, -2] \cup]3, +\infty[}$

41.6 a) .... $\boxed{\text{a}}$

41.6 b) .... $\boxed{\text{c}}$

41.6 c) .... $\boxed{\text{b}}$

41.6 d) .... $\boxed{\text{a}}$

41.6 e) .... $\boxed{\text{c}}$

41.6 f) .... $\boxed{\text{b}}$

41.6 g) .... $\boxed{\text{a}}$

41.6 h) .... $\boxed{\text{a}}$

41.7 a) .... $\boxed{\left(-9/2\,;-1\right)}$

41.7 b) .... $\boxed{\dfrac{8}{9}x + 3}$

41.7 c) .... $\boxed{-\dfrac{x}{4}\left(x + \dfrac{32}{9}\right)}$

41.7 d) .... $\boxed{\left[-\dfrac{32}{9}, 0\right]}$

41.8 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{x(x+2)}}$

41.8 b) .... $\boxed{\dfrac{(x-1)^2}{4x}}$

41.8 c) .... $\boxed{x}$

41.9 a) .... $\boxed{\text{b}}$

41.9 b) .... $\boxed{\text{a}}$

41.10 a) .... $\boxed{2bx}$

41.10 b) .... $\boxed{b = 0}$

41.11 a) .... $\boxed{a = 15 \text{ et } b = -2}$

41.11 b) .... $\boxed{\text{b}}$

41.11 c) .... $\boxed{\text{positive}}$

41.11 d) .... $\boxed{7}$

41.12 a) .... $\boxed{6}$

41.12 b) .... $\boxed{7}$

Corrigés

41.2 e) On a les équivalences suivantes :

$$f(x) \leqslant 14 \iff 3x^2 + 2 \leqslant 14 \iff x^2 \leqslant 4 \iff |x| \leqslant 2.$$

On a donc $f(x) \leqslant 14 \iff x \in [-2, 2]$.

....

41.2 f) On a les équivalences suivantes :

$$f(x) \geqslant 29 \iff 3x^2 + 2 \geqslant 29 \iff x^2 \geqslant 9 \iff |x| \geqslant 3.$$

On a donc $f(x) \geqslant 29 \iff x \in]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$.

....

41.3 c) On a les équivalences suivantes :

$$f(x) = 1 \iff \frac{(7x-3)(3x+1)}{21x^2+1} = 1 \iff (7x-3)(3x+1) = 21x^2+1$$
$$\iff 21x^2 - 2x - 3 = 21x^2 + 1 \iff -2x - 4 = 0 \iff x = -2.$$

....

41.3 d) On a les équivalences suivantes :

$$f(x) = -3 \iff \frac{(7x-3)(3x+1)}{21x^2+1} = -3 \iff 21x^2 - 2x - 3 = -3(21x^2+1)$$
$$\iff 84x^2 - 2x = 0 \iff \left(x = 0 \ \text{ ou } \ x = \frac{1}{42}\right).$$

....

41.4 b) On a $14x - 7 = 0$ pour $x = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$, donc l'expression est correctement définie pour $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

....

41.4 c) Le dénominateur s'annule en $x = 5$ et en $x = -\frac{1}{2}$ donc la fonction est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, 5\right\}$.

....

41.4 d) On a les équivalences $x^2 - 1 = 0 \iff x^2 = 1 \iff \big(x = -1 \text{ ou } x = 1\big)$.

....

41.4 e) On a $x + 2 > 0$ lorsque $x > -2$, donc l'expression est correctement définie sur $]-2, +\infty[$.

....

41.4 f) On établit le tableau de signes de l'expression $(8-x)(x+8)$:

x	$-\infty$		-8		8		$+\infty$
$8-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+8$		$-$	0	$+$		$+$	
$(8-x)(x+8)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'expression $(8-x)(x+8)$ est strictement positive pour $x \in]-8, 8[$.

....

41.5 b) L'expression proposée est définie pour x tel que $(x-3)(x+2) > 0$. On établit le tableau de signes de cette expression :

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-3)(x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a $(x-3)(x+2) > 0$ pour $x \in]-\infty, -2[\cup]3, +\infty[$.

....

41.5 c) Pour que l'expression soit définie, il faut et il suffit que $x - 3 \geqslant 0$ et $x + 2 > 0$; ainsi, la fonction est correctement définie sur l'intersection $[3, +\infty[\cap]-2, +\infty[$, c'est-à-dire sur $[3, +\infty[$.

....

41.5 d) On cherche l'intervalle sur lequel $\frac{x-3}{x+2} \leqslant 0$. On établit le tableau de signes de cette expression :

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x-3}{x+2}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

On a $\frac{x-3}{x+2} \leqslant 0$ pour $x \in]-2, 3]$.

....

41.6 a) On a $f(-3) = \frac{7}{2}$. Puisque $5 \in [2,9]$ et f est croissante sur $[2,9]$, on a $1 \leqslant f(5) \leqslant \frac{4}{3}$. De plus, on a l'inégalité $\frac{4}{3} < \frac{4}{2} < \frac{7}{2}$; donc, on a $f(5) \leqslant \frac{7}{2}$. Finalement, on a $f(-3) \geqslant f(5)$.

41.6 b) On a $f(6) \in \left[1, \frac{4}{3}\right]$ et $f(1) \in \left[1, \frac{7}{2}\right]$. On n'a pas assez d'informations pour conclure.

41.6 c) On a $f(16) \in \left[-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right]$ et $f(-1) \in \left[1, \frac{7}{2}\right]$, donc $f(16) < 1$ alors que $f(-1) \geqslant 1$.

41.6 d) On a $f(2) = 1$ et $f(17) \in \left[-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right]$ or $1 \geqslant \frac{1}{2}$ donc $f(2) \geqslant f(17)$.

41.6 f) On a $-3 = -\frac{9}{3} \leqslant -\frac{8}{3} < 0$ et $0 < \frac{1}{625} \leqslant 2$ donc $-3 \leqslant -\frac{8}{3} < \frac{1}{625} \leqslant 2$. Par décroissance de f sur $[-3,2]$, on a $f\left(-\frac{8}{3}\right) \geqslant f\left(\frac{1}{625}\right)$.

41.6 g) On a $2 < \frac{5}{2} < 3$ et $3 < \frac{18}{5} < 4 < 9$. Par croissance de f sur $[2,9]$, on a $f\left(\frac{5}{2}\right) \leqslant f\left(\frac{18}{5}\right)$.

41.7 b) La fonction g étant affine, fixons $m, p \in \mathbb{R}$ tels que $g(x) = mx + p$ pour $x \in \mathbb{R}$.

- La courbe $\mathscr{C}_g$ passant par les points A et B, on a $g\left(-\frac{9}{2}\right) = -1$ et $g(0) = 3$.
- Déterminons le coefficient m. D'une part, $g(0) - g\left(-\frac{9}{2}\right) = 3 - (-1) = 4$. D'autre part, par définition de g, on a $g(0) - g\left(-\frac{9}{2}\right) = m \times 0 + p - \left(m \times \left(-\frac{9}{2}\right) + p\right) = \frac{9}{2}m$. On a donc $\frac{9}{2}m = 4$, donc $m = \frac{8}{9}$.
- Enfin, on a $3 = g(0) = m \times 0 + p$, donc $p = 3$.
- Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{8}{9}x + 3$.

41.7 c) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(x) - g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3 - \left(\frac{8}{9}x + 3\right) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{8}{9}x = -\frac{x}{4}\left(x + \frac{32}{9}\right)$.

41.7 d) On établit le tableau de signes de la différence $f(x) - g(x)$:

x	$-\infty$		$-\frac{32}{9}$		0		$+\infty$
$-\frac{x}{4}$		$+$	0	$+$		$-$	
$x + \frac{32}{9}$		$-$		$+$	0	$+$	
$f(x) - g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit que $f(x) - g(x) \geqslant 0$ lorsque $x \in \left[-\frac{32}{9}, 0\right]$, c'est-à-dire $f(x) \geqslant g(x)$ lorsque $x \in \left[-\frac{32}{9}, 0\right]$.

41.8 a) On a $f(x+1) = \frac{1}{(x+1)^2 - 1} = \frac{1}{x^2 + 2x + 1 - 1} = \frac{1}{x^2 + 2x} = \frac{1}{x(x+2)}$.

41.8 b) On a $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{1}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 - 1} = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2 - (x-1)^2} = \frac{(x-1)^2}{x^2 + 2x + 1 - (x^2 - 2x + 1)} = \frac{(x-1)^2}{4x}$.

41.8 c) On a $f\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right) = \frac{1}{\frac{1+x}{x} - 1} = \frac{1}{\frac{1+x-x}{x}} = x$.

41.9 a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $s(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -\big(f(x) + g(x)\big) = -s(x)$.

41.9 b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $p(-x) = f(-x) \times g(-x) = \big(-f(x)\big) \times \big(-g(x)\big) = f(x) \times g(x) = p(x)$.

41.10 a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(x) - f(-x) = ax^2 + bx + c - \big(ax^2 - bx + c\big) = 2bx$.

41.10 b) Supposons que f est paire. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(-x)$, c'est-à-dire $f(x) - f(-x) = 0$.

En particulier, pour $x = 1$, d'après la question précédente, on obtient $2b = 0$, donc $b = 0$.

Réciproquement, si $b = 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + c = a(-x)^2 + c = f(-x)$, donc f est paire.

41.11 a) On développe et on réduit :

$$\begin{aligned}\big(\sqrt{56} - 8\big)^2 - \big(\sqrt{56} - 7\big)^2 &= 56 - 2 \times 8 \times \sqrt{56} + 8^2 - \Big(56 - 2 \times 7 \times \sqrt{56} + 7^2\Big) \\ &= 2 \times (7 - 8)\sqrt{56} + 64 - 49 = -2\sqrt{56} + 15.\end{aligned}$$

41.11 b) On a $a^2 = 225$ et $56b^2 = 4 \times 56 = 224$, donc $a^2 \geqslant 56b^2$.

41.11 c) D'après la question précédente, on a $a^2 \geqslant 56b^2$. Par croissance de la fonction racine carrée, on en déduit que $|a| \geqslant |b|\sqrt{56}$, donc $15 \geqslant 2\sqrt{56}$, donc $15 - 2\sqrt{56} \geqslant 0$. Ainsi, on a $\big(\sqrt{56} - 8\big)^2 - \big(\sqrt{56} - 7\big)^2 \geqslant 0$.

41.11 d) Puisque $\big(\sqrt{56} - 8\big)^2 - \big(\sqrt{56} - 7\big)^2 \geqslant 0$, on a $\big(\sqrt{56} - 8\big)^2 \geqslant \big(\sqrt{56} - 7\big)^2$.

Par croissance de la fonction racine carrée, on a donc $\big|\sqrt{56} - 8\big| \geqslant \big|\sqrt{56} - 7\big|$. Ainsi, le nombre réel $\sqrt{56}$ est plus proche de 7 que de 8.

41.12 a) Puisque $36 < 43 < 49$, on a, par croissance stricte de la racine carrée, $\sqrt{36} < \sqrt{43} < \sqrt{49}$; autrement dit, on a $6 < \sqrt{43} < 7$. Avec $n = 6$, on a bien $n < \sqrt{43} < n + 1$.

41.12 b) L'objectif est de comparer $\big|\sqrt{43} - 6\big|$ et $\big|\sqrt{43} - 7\big|$. On calcule :

$$\big(\sqrt{43} - 6\big)^2 - \big(\sqrt{43} - 7\big)^2 = 43 - 12\sqrt{43} + 36 - 43 + 14\sqrt{43} - 49 = -13 + 2\sqrt{43}.$$

On a $13^2 = 169$ et $\big(2\sqrt{43}\big)^2 = 172$, donc $13^2 \leqslant \big(2\sqrt{43}\big)^2$.

Par croissance de la racine carrée, $13 \leqslant 2\sqrt{43}$ donc $-13 + 2\sqrt{43} \geqslant 0$, donc $\big(\sqrt{43} - 6\big)^2 - \big(\sqrt{43} - 7\big)^2 \geqslant 0$, donc $\big(\sqrt{43} - 6\big)^2 \geqslant \big(\sqrt{43} - 7\big)^2$.

Par croissance de la racine carrée, $\big|\sqrt{43} - 6\big| \geqslant \big|\sqrt{43} - 7\big|$, donc $\sqrt{43}$ est plus proche de 7.

Fiche n° 42. Représentation graphique des vecteurs

Réponses

42.1 a) .... $\boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$

42.1 b) .... $\boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}}$

42.2 a) .... $\boxed{\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{p}}$

42.2 b) .... $\boxed{\overrightarrow{q}}$

42.3 .... $\boxed{\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}}$

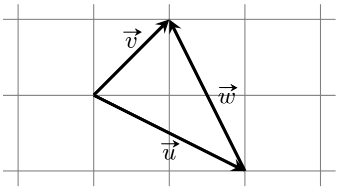
42.4 .... $\boxed{\overrightarrow{w} = 2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}}$

42.5 .... $\boxed{\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v}}$

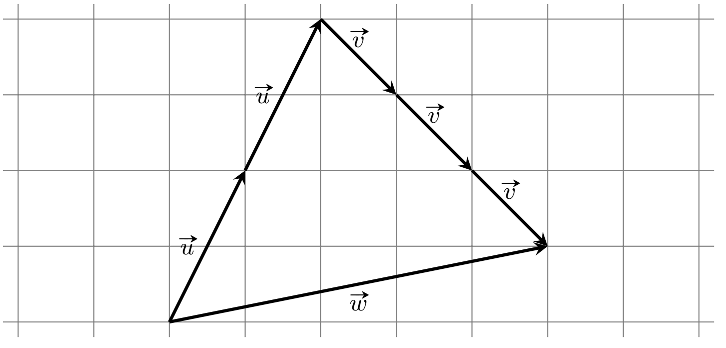
Corrigés

42.2 b) On constate que $\overrightarrow{q} = 2\overrightarrow{v}$.

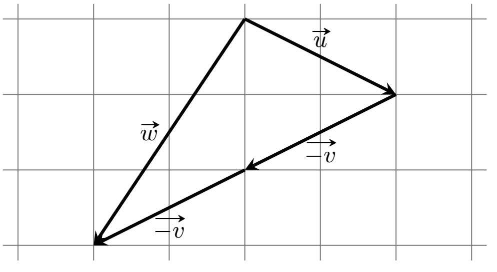
42.3 On peut représenter les choses de la manière suivante :



42.4 On peut représenter les choses de la manière suivante :



42.5 On peut représenter les choses de la manière suivante :



Fiche nº 43. Relation de Chasles

Réponses

43.1 a) .... $\boxed{\overrightarrow{DC}}$

43.1 b) .... $\boxed{\overrightarrow{DB}}$

43.1 c) .... $\boxed{8\overrightarrow{CD}}$

43.1 d) .... $\boxed{6\overrightarrow{DB}}$

43.2 .... $\boxed{\text{c}}$

43.3 a) .... $\boxed{3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}}$

43.3 b) .... $\boxed{-2\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}}$

43.4 a) .... $\boxed{-2\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC}}$

43.4 b) .... $\boxed{-3\overrightarrow{BA} + 5\overrightarrow{BC}}$

43.4 c) .... $\boxed{-3\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{CB}}$

43.5 a) .... $\boxed{4\overrightarrow{ED} - 7\overrightarrow{EF}}$

43.5 b) .... $\boxed{3\overrightarrow{DE} - 7\overrightarrow{DF}}$

43.5 c) .... $\boxed{4\overrightarrow{FD} + 3\overrightarrow{FE}}$

43.6 a) .... $\boxed{x = -1 \text{ et } y = 1}$

43.6 b) .... $\boxed{x = y = \dfrac{1}{3}}$

43.6 c) ...... $\boxed{x = -1 \text{ et } y = \dfrac{3}{5}}$

43.6 d) .... $\boxed{x = 0 \text{ et } y = \dfrac{3}{5}}$

43.7 a) .... $\boxed{-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}}$

43.7 b) .... $\boxed{\dfrac{3}{4}}$

43.8 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}}$

43.8 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}}$

43.8 c) .... $\boxed{-\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}}$

43.8 d) .... $\boxed{-\dfrac{5}{4}\overrightarrow{AB} + \dfrac{5}{4}\overrightarrow{AC}}$

Corrigés

43.1 a) On a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DC}$.

43.1 b) On a $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB}$.

43.1 c) On a :

$$\begin{aligned}3\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{DC} + 3\overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{BD} &= 3\overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BD} + 5\overrightarrow{CD} = 3(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) + 5\overrightarrow{CD}\\ &= 3\overrightarrow{CD} + 5\overrightarrow{CD} = 8\overrightarrow{CD}.\end{aligned}$$

43.1 d) On a $4\overrightarrow{AB} + 2\big(\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AD}\big) = 4\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AB} - 6\overrightarrow{AD} = 6\overrightarrow{DA} + 6\overrightarrow{AB} = 6(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) = 6\overrightarrow{DB}$.

43.2 On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} = \vec{0} &\iff \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0} \iff \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}\\ &\iff \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = \vec{0} \iff \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \iff \text{ABCD est un parallélogramme.}\end{aligned}$$

43.3 a) On a $\vec{u} = 3\overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{CA} = 3(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) - 2\overrightarrow{CA} = 3\overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

43.3 b) On a $\vec{u} = 3\overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{CA} = -3\overrightarrow{BC} - 2(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}) = -3\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{BA} = -3\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{BA} = -2\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$.

43.4 a) On a :

$$\begin{aligned}\vec{v} &= 2\overrightarrow{BM} + 3\overrightarrow{AM} - 5\overrightarrow{CM} = 2(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}) + 3\overrightarrow{AM} - 5(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM})\\ &= 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{AM} - 5\overrightarrow{CA} - 5\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{AM} - 5\overrightarrow{AM} - 5\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{BA}\\ &= -2\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

43.4 b) On a :

$$\begin{aligned}\vec{v} &= 2\overrightarrow{BM} + 3\overrightarrow{AM} - 5\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{BM} + 3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) - 5(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM})\\ &= 2\overrightarrow{BM} + 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BM} - 5\overrightarrow{CB} - 5\overrightarrow{BM}\\ &= 2\overrightarrow{BM} + 3\overrightarrow{BM} - 5\overrightarrow{BM} + 3\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{BC} = -3\overrightarrow{BA} + 5\overrightarrow{BC}.\end{aligned}$$

43.4 c) On a :

$$\begin{aligned}\vec{v} &= 2\overrightarrow{BM} + 3\overrightarrow{AM} - 5\overrightarrow{CM} = 2(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM}) + 3(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}) - 5\overrightarrow{CM}\\ &= 2\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CM} + 3\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{CM} - 5\overrightarrow{CM}\\ &= 2\overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CM} + 3\overrightarrow{CM} - 5\overrightarrow{CM} = -3\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{CB}.\end{aligned}$$

43.5 a) On a :

$$\begin{aligned}\vec{w} &= 4\overrightarrow{GD} + 3\overrightarrow{GE} + 7\overrightarrow{FG} = 4(\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{ED}) + 3\overrightarrow{GE} + 7(\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EG})\\ &= 4\overrightarrow{GE} + 4\overrightarrow{ED} + 3\overrightarrow{GE} + 7\overrightarrow{FE} + 7\overrightarrow{EG} = 7\overrightarrow{FE} + 4\overrightarrow{ED} + 4\overrightarrow{GE} + 3\overrightarrow{GE} - 7\overrightarrow{GE}\\ &= 4\overrightarrow{ED} - 7\overrightarrow{EF}.\end{aligned}$$

43.5 b) On a :

$$\begin{aligned}\vec{w} &= 4\overrightarrow{GD} + 3\overrightarrow{GE} + 7\overrightarrow{FG} = 4\overrightarrow{GD} + 3(\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DE}) + 7(\overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DG})\\ &= 4\overrightarrow{GD} + 3\overrightarrow{GD} + 3\overrightarrow{DE} + 7\overrightarrow{FD} + 7\overrightarrow{DG} = 4\overrightarrow{GD} + 3\overrightarrow{GD} - 7\overrightarrow{GD} + 3\overrightarrow{DE} + 7\overrightarrow{FD}\\ &= 3\overrightarrow{DE} - 7\overrightarrow{DF}.\end{aligned}$$

43.5 c) On a :

$$\begin{aligned}\vec{w} &= 4\overrightarrow{GD} + 3\overrightarrow{GE} + 7\overrightarrow{FG} = 4(\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FD}) + 3(\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FE}) - 7\overrightarrow{GF}\\ &= 4\overrightarrow{GF} + 3\overrightarrow{GF} - 7\overrightarrow{GF} + 4\overrightarrow{FD} + 3\overrightarrow{FE}\\ &= 4\overrightarrow{FD} + 3\overrightarrow{FE}.\end{aligned}$$

43.6 a) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BA} &\iff \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BA}\\ &\iff \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BA}\\ &\iff \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} \iff \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

43.6 b) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} &\iff \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}\\ &\iff 3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}\\ &\iff \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{MA}\\ &\iff \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AM} \iff \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

43.6 c) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC} + 5\overrightarrow{AM} = \vec{0} &\iff 2\overrightarrow{AB} - 3(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) + 5\overrightarrow{AM} = \vec{0}\\ &\iff 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BA} - 3\overrightarrow{AC} + 5\overrightarrow{AM} = \vec{0}\\ &\iff 5\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} + 5\overrightarrow{AM} = \vec{0}\\ &\iff 5\overrightarrow{AM} = -5\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} \iff \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

43.6 d) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC}+5\overrightarrow{BM}=\vec{0} &\iff 2\overrightarrow{AB}-3(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})+5(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM})=\vec{0}\\ &\iff 2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BA}-3\overrightarrow{AC}+5\overrightarrow{BA}+5\overrightarrow{AM}=\vec{0}\\ &\iff 2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}+5\overrightarrow{AM}=\vec{0}\\ &\iff 5\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AC}\\ &\iff \overrightarrow{AM}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

43.7 a) On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BN}&=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\big(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\big)\\ &=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.\end{aligned}$$

43.7 b) On a $\overrightarrow{BP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}=\frac{3}{4}\Big(-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\Big)=\frac{3}{4}\overrightarrow{BN}$.

43.8 a) Comme M est le milieu du segment [BC], on a $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. On a donc les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM} &\iff \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\\ &\iff \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})\\ &\iff \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\\ &\iff \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\\ &\iff \overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

43.8 b) Comme P est le milieu du segment [MC], on a $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MC}$. De plus, M étant le milieu du segment [BC], on a alors $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. On a donc $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$. D'après la relation de Chasles, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP}&=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})\\ &=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

43.8 c) Comme S est le symétrique du point B par rapport au point C, le point C est le milieu du segment [BS] et on a alors $\overrightarrow{BS}=2\overrightarrow{BC}$. D'après la relation de Chasles, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AS}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BS}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+2(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})\\ &=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

43.8 d) D'après la relation de Chasles, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PS}&=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AS}=-\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AS}=-(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC})+(-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC})\\ &=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=-\frac{5}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{4}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Fiche n° 44. Vecteurs et coordonnées

Réponses

44.1 a) .... $\boxed{\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}}$

44.1 b) .... $\boxed{\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}}$

44.1 c) .... $\boxed{\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}}$

44.1 d) .... $\boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}}$

44.2 a)... $\boxed{\text{voir corrigé}}$

44.2 b) .. $\boxed{\text{voir corrigé}}$

44.2 c)... $\boxed{\text{voir corrigé}}$

44.3 a)........ $\boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}}$

44.3 b) .... $\boxed{\begin{pmatrix} -3 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$

44.3 c)......... $\boxed{\begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}}$

44.3 d) ...... $\boxed{\begin{pmatrix} -12 \\ 8 \end{pmatrix}}$

44.3 e)........ $\boxed{\begin{pmatrix} 27 \\ -2 \end{pmatrix}}$

44.3 f) ...... $\boxed{\begin{pmatrix} \dfrac{29}{2} \\ \dfrac{-37}{6} \end{pmatrix}}$

44.4 a)........ $\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}}$

44.4 b) ..... $\boxed{\begin{pmatrix} \dfrac{11}{6} \\ \dfrac{-41}{42} \end{pmatrix}}$

44.4 c).... $\boxed{\begin{pmatrix} -7\sqrt{2} \\ \sqrt{3}+1 \end{pmatrix}}$

44.4 d).. $\boxed{\begin{pmatrix} 2^{n+1} \\ -5 \times 2^{2n+1} \end{pmatrix}}$

44.5 a)..... $\boxed{\left(-\frac{3}{2}\,;\frac{1}{2}\right)}$

44.5 b)... $\boxed{\left(\frac{-23}{30}\,;\frac{-47}{36}\right)}$

44.6 a)........... $\boxed{-8}$

44.6 b)............. $\boxed{3}$

44.6 c) .... $\boxed{\frac{7}{3}}$

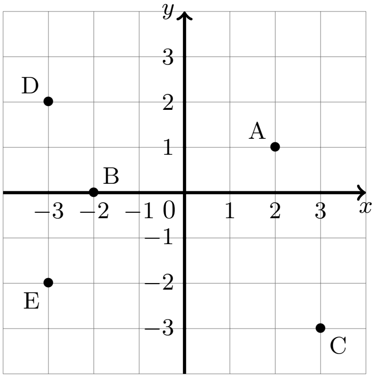
44.7 a)....... $\boxed{(4\,;-2)}$

44.7 b).... $\boxed{(-46\,;-4)}$

Corrigés

44.1 a) Pour aller du point A au point B, on se déplace de 5 unités vers la droite et de 3 unités vers le haut. On a donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

44.2 a) Pour placer le point C, on part du point A, on se déplace d'une unité vers la droite et de quatre unités vers le bas. On procède de même pour les autres points. On obtient alors le dessin suivant.



44.3 c) Le vecteur $\vec{u} - \vec{w}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 5-3 \\ 2-\left(-\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$.

44.3 d) Le vecteur $2\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2\times(-6) \\ 2\times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 8 \end{pmatrix}$.

44.3 e) Le vecteur $3\vec{u} - 2\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 3\times 5 - 2\times(-6) \\ 3\times 2 - 2\times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ -2 \end{pmatrix}$.

44.3 f) Le vecteur $-\dfrac{5}{4}\vec{v} + \dfrac{7}{3}\vec{w}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -\dfrac{5}{4}\times(-6) + \dfrac{7}{3}\times 3 \\ -\dfrac{5}{4}\times 4 + \dfrac{7}{3}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{15}{2} + 7 \\ -5 - \dfrac{7}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{29}{2} \\ -\dfrac{37}{6} \end{pmatrix}$.

44.4 a) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -1 - (-2) \\ -3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

44.4 b) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \dfrac{7}{2} - \dfrac{5}{3} \\ \dfrac{-5}{14} - \dfrac{13}{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{21}{6} - \dfrac{10}{6} \\ \dfrac{-15}{42} - \dfrac{26}{42} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{11}{6} \\ \dfrac{-41}{42} \end{pmatrix}$.

44.4 c) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -3\sqrt{8} - \sqrt{2} \\ \sqrt{3} - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6\sqrt{2} - \sqrt{2} \\ \sqrt{3} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7\sqrt{2} \\ \sqrt{3} + 1 \end{pmatrix}$.

44.4 d) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} 2^n - (-2^n) \\ 2^{2n+1} - 3\times 4^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n + 2^n \\ 2^{2n+1} - 3\times 2^{2n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 2^n \\ 2^{2n+1} - 3\times 2\times 2^{2n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} \\ -5\times 2^{2n+1} \end{pmatrix}.$$

44.5 a) Les coordonnées du point I sont $\left(\dfrac{3 + (-6)}{2} \,;\, \dfrac{-4 + 5}{2}\right) = \left(\dfrac{-3}{2} \,;\, \dfrac{1}{2}\right)$.

44.5 b) Les coordonnées du point I sont $\left(\dfrac{\frac{4}{5} + \frac{-7}{3}}{2} \,;\, \dfrac{\frac{-25}{6} + \frac{14}{9}}{2}\right) = \left(\dfrac{\frac{12}{15} + \frac{-35}{15}}{2} \,;\, \dfrac{\frac{-75}{18} + \frac{28}{18}}{2}\right) = \left(\dfrac{-23}{30} \,;\, \dfrac{-47}{36}\right)$.

44.6 a) On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 2 \\ t+4 \end{pmatrix}$. Donc, on a les équivalences $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} \iff t + 4 = -4 \iff t = -8$.

44.6 b) On a $2\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 - 5t \end{pmatrix}$. Donc, on a les équivalences :

$$2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DE} \iff 7 - 5t = -8 \iff 5t = 15 \iff t = 3.$$

44.6 c) On a $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} -3 \\ 3t - 1 \end{pmatrix}$ et $-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$. Donc, on a les équivalences :

$$\overrightarrow{AD} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \iff 3t - 1 = 6 \iff 3t = 7 \iff t = \frac{7}{3}.$$

44.7 a) On note $(x\,;y)$ les coordonnées de I. On a $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$ donc $\begin{pmatrix} x+1 \\ y-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$, d'où $x = 4$ et $y = -2$.

44.7 b) On note $(x\,;y)$ les coordonnées du point M. On a :

$$\begin{pmatrix} x - 7 \\ y + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3}(x-2) - \dfrac{1}{2}(-4-x) \\ \dfrac{2}{3}(y+4) - \dfrac{1}{2}(2-y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{4}{3} + 2 \\ \dfrac{2}{3}y + \dfrac{1}{2}y + \dfrac{8}{3} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{7}{6}x + \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{7}{6}y + \dfrac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

Pour conclure, on remarque qu'on a les équivalences $x - 7 = \dfrac{7}{6}x + \dfrac{2}{3} \iff \dfrac{1}{6}x = -\dfrac{23}{3} \iff x = -46$, ainsi que les équivalences $y + 1 = \dfrac{7}{6}y + \dfrac{5}{3} \iff \dfrac{1}{6}y = -\dfrac{2}{3} \iff y = -4$.

Fiche n° 45. Norme des vecteurs

Réponses

45.1 a) .... $\boxed{5}$

45.1 b) .... $\boxed{2\sqrt{10}}$

45.1 c) .... $\boxed{\dfrac{3}{2}}$

45.1 d) .... $\boxed{4}$

45.2 a) .... $\boxed{5}$

45.2 b) .... $\boxed{\dfrac{3\sqrt{5}}{4}}$

45.2 c) .... $\boxed{3\sqrt{10}}$

45.3 a) .... $\boxed{\sqrt{13}}$

45.3 b) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{229}}{10}}$

45.3 c) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{13}}{4}}$

45.3 d) .... $\boxed{3\sqrt{14}}$

45.4 a) .... $\boxed{\{-6, 6\}}$

45.4 b) .... $\boxed{\{-2, 2\}}$

45.4 c) .... $\boxed{\varnothing}$

45.4 d) .... $\boxed{\{0\}}$

45.5 a) .... $\boxed{\left\{\dfrac{19}{8}\right\}}$

45.5 b) .... $\boxed{\{-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\}}$

45.6 a) .... $\boxed{\left\{-\dfrac{2}{7}, \dfrac{2}{7}\right\}}$

45.6 b) .... $\boxed{\left\{-\dfrac{\sqrt{6}}{6}, \dfrac{\sqrt{6}}{6}\right\}}$

45.6 c) .... $\boxed{\{-4\}}$

45.7 a) .... $\boxed{x = -3 \text{ et } x = 3}$

45.7 b) .... $\boxed{x = 5}$

Corrigés

45.1 d) On a $\|\vec{u}\| = \sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2 + (\sqrt{5}+\sqrt{3})^2} = \sqrt{5 - 2\sqrt{15} + 3 + 5 + 2\sqrt{15} + 3} = \sqrt{10+6} = \sqrt{16} = 4.$

45.2 b) On a $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{\left(\dfrac{-1}{2} - (-2)\right)^2 + \left(1 - \dfrac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{9}{16}} = \sqrt{\dfrac{9}{4} + \dfrac{9}{16}} = \sqrt{\dfrac{45}{16}} = \dfrac{\sqrt{45}}{\sqrt{16}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{4}.$

45.2 c) On a :

$$\begin{aligned}\left\|\overrightarrow{AB}\right\| &= \sqrt{\left((3\sqrt{2}+1) - (\sqrt{2}-2)\right)^2 + \left((1-4\sqrt{2}) - 2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{(2\sqrt{2}+3)^2 + (-6\sqrt{2}+1)^2}\\ &= \sqrt{8 + 12\sqrt{2} + 9 + 72 - 12\sqrt{2} + 1} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}.\end{aligned}$$

45.3 b) On a $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} 2 + \frac{-9}{5} \\ -\frac{1}{2} + 2 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, d'où $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \sqrt{\left(\dfrac{1}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{25} + \dfrac{9}{4}} = \dfrac{\sqrt{229}}{10}.$

45.3 d) On a $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} \\ 1 - 5\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 1 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} 6\sqrt{3} \\ -3\sqrt{2} \end{pmatrix}$, d'où $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \sqrt{(6\sqrt{3})^2 + (-3\sqrt{2})^2}.$
Ainsi, on a $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \sqrt{36 \times 3 + 9 \times 2} = \sqrt{126} = \sqrt{9 \times 14} = 3\sqrt{14}.$

45.4 a) On a :

$$\begin{aligned}\mathrm{AB} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| &= \sqrt{((x-2)-1)^2 + (5-(2-x))^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (x+3)^2}\\ &= \sqrt{x^2 - 6x + 9 + x^2 + 6x + 9} = \sqrt{2x^2 + 18}.\end{aligned}$$

Comme $\mathrm{AB} = 3\sqrt{10}$, on a donc $\sqrt{2x^2+18} = 3\sqrt{10}$ et donc $2x^2 + 18 = (3\sqrt{10})^2$.
Or, on a les équivalences suivantes :

$$2x^2 + 18 = (3\sqrt{10})^2 \iff 2x^2 + 18 = 90 \iff 2x^2 = 72 \iff x^2 = 36 \iff \big(x = -6 \text{ ou } x = 6\big).$$

45.4 b) On a $\mathrm{AB} = \sqrt{2x^2+18}$. Comme $\mathrm{AB} = \sqrt{26}$, on a donc $\sqrt{2x^2+18} = \sqrt{26}$ et donc $2x^2+18 = 26$.

Or, on a les équivalences suivantes : $2x^2+18 = 26 \iff 2x^2 = 8 \iff x^2 = 4 \iff \big(x = -2 \quad \text{ou} \quad x = 2\big)$.

....

45.4 c) On a $\mathrm{AB} = \sqrt{2x^2+18}$. Comme $\mathrm{AB} = 4$, on a donc $\sqrt{2x^2+18} = 4$ et donc $2x^2+18 = 16$.

Or, on a les équivalences suivantes : $2x^2+18 = 16 \iff 2x^2 = -2 \iff x^2 = -1$, ce qui est impossible dans $\mathbb{R}$.

....

45.4 d) On a $\mathrm{AB} = \sqrt{2x^2+18}$. Comme $\mathrm{AB} = 3\sqrt{2}$, on a donc $\sqrt{2x^2+18} = 3\sqrt{2}$ et donc $2x^2+18 = (3\sqrt{2})^2$, c'est à dire $2x^2+18 = 18$. Or, on a les équivalences : $2x^2+18 = 18 \iff 2x^2 = 0 \iff x^2 = 0 \iff x = 0$.

....

45.5 a) On a $\|\vec{u}\| = \sqrt{(x-1)^2+3^2} = \sqrt{x^2-2x+10}$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2+(5-x)^2} = \sqrt{x^2-10x+29}$. D'où :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ ont la même norme} \iff x^2-2x+10 = x^2-10x+29 \iff 8x = 19 \iff x = \frac{19}{8}.$$

....

45.5 b) On a $\|\vec{u}\| = \sqrt{(-2)^2+3^2} = \sqrt{13}$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2+x^2} = \sqrt{x^2+1}$. Ainsi, on a :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ ont la même norme} \iff x^2+1 = 13 \iff x^2 = 12 \iff \big(x = -2\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad x = 2\sqrt{3}\big).$$

....

45.6 a) On a $\|\vec{u}\| = \sqrt{(7x)^2+\big(\sqrt{2}+1\big)^2} = \sqrt{49x^2+3+2\sqrt{2}}$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{\big(\sqrt{2}+1\big)^2+2^2} = \sqrt{7+2\sqrt{2}}$.

On en déduit les équivalences suivantes :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ ont la même norme} \iff 49x^2+3+2\sqrt{2} = 7+2\sqrt{2} \iff x^2 = \frac{4}{49} \iff \left(x = -\frac{2}{7} \quad \text{ou} \quad x = \frac{2}{7}\right).$$

....

45.6 b) On a $\|\vec{u}\| = \sqrt{\left(\dfrac{2}{x}\right)^2+1^2} = \sqrt{\dfrac{4}{x^2}+1}$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$. Ainsi, on a :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ ont la même norme} \iff \frac{4}{x^2}+1 = 25.$$

De plus, comme $x \neq 0$, on a les équivalences suivantes :

$$\frac{4}{x^2}+1 = 25 \iff \frac{4}{x^2} = 24 \iff \frac{1}{x^2} = 6 \iff x^2 = \frac{1}{6} \iff \left(x = -\frac{\sqrt{6}}{6} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\sqrt{6}}{6}\right).$$

....

45.7 a) On a $\mathrm{AB} = \sqrt{(5-x)^2+(4-3)^2} = \sqrt{(5-x)^2+1}$, $\mathrm{AC} = \sqrt{(1-x)^2+(x-1-3)^2} = \sqrt{(1-x)^2+(x-4)^2}$.
Le triangle ABC est isocèle en A si, et seulement si, AB = AC. Ainsi, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\text{ABC est un triangle isocèle en A} &\iff \sqrt{(5-x)^2+1} = \sqrt{(1-x)^2+(x-4)^2} \\
&\iff (5-x)^2+1 = (1-x)^2+(x-4)^2 \\
&\iff x^2-10x+26 = 2x^2-10x+17 \\
&\iff x^2 = 9 \iff \big(x = -3 \ \text{ ou } \ x = 3\big).
\end{aligned}$$

....

45.7 b) On a $\mathrm{BC} = \sqrt{(1-5)^2+(x-1-4)^2} = \sqrt{16+(x-5)^2}$ donc $\mathrm{BC}^2 = 16+(x-5)^2$. De même, on a $\mathrm{AC}^2 = (1-x)^2+(x-4)^2$ et $\mathrm{AB}^2 = (5-x)^2+1$.

Ainsi, d'après le théorème de Pythagore, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\text{ABC est rectangle en B} &\iff (1-x)^2+(x-4)^2 = (5-x)^2+1+16+(x-5)^2 \\
&\iff 2x^2-10x+17 = 2x^2-20x+67 \\
&\iff 10x = 50 \iff x = 5.
\end{aligned}$$

....

Fiche n° 46. Vecteurs colinéaires et déterminant

Réponses

46.1 a) $\boxed{\dfrac{1}{6}}$

46.1 b) $\boxed{-\dfrac{3}{4}}$

46.1 c) $\boxed{\dfrac{5}{8}}$

46.1 d) $\boxed{8}$

46.2 a) $\boxed{3}$

46.2 b) $\boxed{\dfrac{5}{6}}$

46.3 a) $\boxed{-\dfrac{3}{2}}$

46.3 b) $\boxed{\dfrac{5}{9}}$

46.3 c) $\boxed{\dfrac{5}{7}}$

46.3 d) $\boxed{\dfrac{13}{2}}$

46.4 a) $\boxed{\dfrac{1}{3}}$

46.4 b) $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

46.4 c) $\boxed{\dfrac{1}{6}}$

46.5 a) $\boxed{0}$

46.5 b) $\boxed{0}$

46.5 c) $\boxed{0}$

46.5 d) $\boxed{0}$

46.6 a) $\boxed{3}$

46.6 b) $\boxed{\dfrac{1}{15}}$

46.6 c) $\boxed{-31}$

46.6 d) $\boxed{\dfrac{1}{11}}$

46.7 a) $\boxed{x(x-1)}$

46.7 b) $\boxed{x^2(4x+2)}$

46.7 c) $\boxed{(2x-3)(3x-19)}$

46.7 d) $\boxed{(9x-4)(9x+4)}$

46.8 a) $\boxed{\left\{0, \dfrac{3}{5}\right\}}$

46.8 b) $\boxed{\left\{-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right\}}$

46.8 c) $\boxed{\varnothing}$

46.8 d) $\boxed{\left\{-\dfrac{11}{6}, \dfrac{3}{4}\right\}}$

Corrigés

46.1 a) On a $2 = 12\lambda$, donc $\lambda = \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}$. Comme $\dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{6} = 2\lambda$, cela confirme que $\lambda = \dfrac{1}{6}$.

46.1 b) On a $-6 = 8\lambda$, donc $\lambda = -\dfrac{6}{8} = -\dfrac{3}{4}$. Comme $9 = -\dfrac{3}{4} \times (-12) = -12\lambda$, cela confirme que $\lambda = -\dfrac{3}{4}$.

46.1 c) On a $-\dfrac{5}{4} = -2\lambda$, donc $\lambda = \dfrac{5}{8}$. Comme $\dfrac{2}{5}\lambda = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{5}{8} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$, cela confirme que $\lambda = \dfrac{5}{8}$.

46.2 a) On a $3 = \lambda \times 1$, donc $\lambda = 3$. Comme $-\dfrac{4}{3}\lambda = -\dfrac{4}{3} \times 3 = -4$, cela confirme que $\lambda = 3$.

46.2 b) On a $\dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{5}\lambda$, donc $\lambda = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{5}{4} = \dfrac{5}{6}$. Comme $\dfrac{6}{5}\lambda = \dfrac{6}{5} \times \dfrac{5}{6} = 1$, cela confirme que $\lambda = \dfrac{5}{6}$.

46.3 a) On a $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = 0$, donc $2\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC}$, soit $\overrightarrow{AB} = -\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC}$. Ainsi, $\lambda = -\dfrac{3}{2}$.

46.3 b) On a $4\overrightarrow{AB} = 5\overrightarrow{BC}$ et, par la relation de Chasles, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.
Ainsi, $4\overrightarrow{AB} = 5(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = 5\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{AB}$, soit $9\overrightarrow{AB} = 5\overrightarrow{AC}$. On en déduit $\overrightarrow{AB} = \dfrac{5}{9}\overrightarrow{AC}$, donc $\lambda = \dfrac{5}{9}$.

46.3 d) On a $5\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{AC} = -7\overrightarrow{BC}$ et, par la relation de Chasles, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.
Ainsi, $5\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{AC} = -7(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$. En développant et en regroupant, on obtient $\overrightarrow{AB} = \dfrac{13}{2}\overrightarrow{AC}$, donc $\lambda = \dfrac{13}{2}$.

46.4 c) On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\frac{7}{6}\\ \frac{5}{6}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}7\\ 5\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{6}\overrightarrow{AC}$ et ainsi $\lambda = \dfrac{1}{6}$.

46.5 d) On a $\det(\vec{u}, \vec{v}) = (2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) - 1 = 2^2 - (\sqrt{3})^2 - 1 = 4 - 3 - 1 = 0$.

46.6 b) On a $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 1 - 15x$. Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $1 - 15x = 0$; ainsi $x = \dfrac{1}{15}$.

46.6 c) On a :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = 2 \times \frac{x+1}{4} + 15 = \frac{x+31}{2}.$$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $\dfrac{x+31}{2} = 0$; ainsi $x = -31$.

46.6 d) On a :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = 2x \times \frac{3}{2} - \frac{1}{3}(1-2x) = \frac{11x-1}{3}.$$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $\dfrac{11x-1}{3} = 0$; ainsi $x = \dfrac{1}{11}$.

46.7 a) On a $\det(\vec{u}, \vec{v}) = x(3x+1) - 2x(x+1) = x(3x+1-2x-2) = x(x-1)$.

46.7 b) On a $\det(\vec{u}, \vec{v}) = x^2(5x-1) - x(x^2-3x) = x^2(5x-1) - x^2(x-3) = x^2(5x-1-x+3) = x^2(4x+2)$.

46.7 c) On a $\det(\vec{u}, \vec{v}) = (8x-12)(2x-3) - (2x-3)(5x+7) = (2x-3)(8x-12-5x-7) = (2x-3)(3x-19)$.

46.7 d) On a $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 3x \times 27x - 2 \times 8 = 81x^2 - 16 = (9x-4)(9x+4)$.

46.8 a) On a $\det(\vec{u}, \vec{v}) = x(x+3) - 6x^2 = x(x+3-6x) = x(3-5x)$. Donc, on a les équivalences suivantes :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} \iff x(3-5x) = 0 \iff \left(x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{3}{5}\right).$$

Ainsi, l'ensemble cherché est $\left\{0, \dfrac{5}{3}\right\}$.

46.8 b) On a $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 4x^2 - 9 = (2x-3)(2x+3)$. Donc, on a les équivalences suivantes :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} \iff (2x-3)(2x+3) = 0 \iff x = \pm\frac{3}{2}.$$

Ainsi, l'ensemble cherché est $\left\{-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right\}$.

46.8 c) On a $\det(\vec{u}, \vec{v}) = (5x+4)^2 + 1$ et donc $\det(\vec{u}, \vec{v}) \geqslant 1 > 0$. Ainsi, l'ensemble cherché est $\varnothing$.

46.8 d) On a $\det(\vec{u}, \vec{v}) = (9x+1)^2 - (3x-10)^2 = (9x+1+3x-10)(9x+1-3x+10) = (12x-9)(6x+11)$.
Donc, on a les équivalences suivantes :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} \iff (12x-9)(6x+11) = 0 \iff \left(x = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{11}{6}\right).$$

Ainsi, l'ensemble cherché est $\left\{-\dfrac{11}{6}, \dfrac{3}{4}\right\}$.

Fiche n° 47. Barycentres

Réponses

47.1 a) .... $\boxed{G(4\,;8)}$

47.1 b) .... $\boxed{G\left(\frac{5}{7}\,;-\frac{9}{7}\right)}$

47.1 c) .... $\boxed{G(2\,;6)}$

47.1 d) .... $\boxed{G\left(\frac{19}{12}\,;\frac{37}{6}\right)}$

47.2 a) .... $\boxed{G(-3\,;-7)}$

47.2 b) .... $\boxed{G\left(\frac{1}{3}\,;\frac{5}{3}\right)}$

47.2 c) .... $\boxed{G\left(-\frac{2}{5}\,;-\frac{1}{5}\right)}$

47.3 a) .... $\boxed{E}$

47.3 b) .... $\boxed{\text{b ou c}}$

47.3 c) .... $\boxed{-3}$

47.4 a) .... $\boxed{\text{c}}$

47.4 b) .... $\boxed{\text{b}}$

47.4 c) .... $\boxed{b = 2 \text{ et } c = 1}$

47.5 a) .... $\boxed{(3+3\lambda\,;3\lambda)}$

47.5 b) .... $\boxed{y_G = x_G - 3}$

47.5 c) .... $\boxed{3 \leqslant x_G \leqslant 6}$

47.5 d) .... $\boxed{0 \leqslant y_G \leqslant 3}$

Corrigés

47.1 a) Les pondérations de A et de B sont égales donc G est le milieu de [AB].

47.1 b) Les coordonnées de G se calculent par les moyennes pondérées des coordonnées de A et de B par les coefficients respectifs fournis : $x_G = \dfrac{3\times(-1)+4\times 2}{3+4}$ et $y_G = \dfrac{3\times 5 + 4\times(-6)}{3+4}$.

47.1 c) Les coordonnées de G se calculent par les moyennes pondérées des coordonnées de A et de B par les coefficients respectifs fournis : $x_G = \dfrac{\frac{1}{3}\times 2 + \frac{2}{3}\times 2}{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = \dfrac{\frac{2}{3}+\frac{4}{3}}{1} = 2$ et $y_G = \dfrac{\frac{1}{3}\times 4 + \frac{2}{3}\times 7}{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = \dfrac{\frac{4}{3}+\frac{14}{3}}{1} = 6$.

47.1 d) Les coordonnées de G se calculent par les moyennes pondérées des coordonnées de A et de B par les coefficients respectifs fournis :

$$x_G = \frac{\frac{2}{7}\times 1 + \frac{2}{5}\times 2}{\frac{2}{7}+\frac{2}{5}} = \frac{\frac{2\times 5}{7\times 5}+\frac{4\times 7}{5\times 7}}{\frac{2\times 5}{7\times 5}+\frac{2\times 7}{5\times 7}} = \frac{\frac{10}{35}+\frac{28}{35}}{\frac{10}{35}+\frac{14}{35}} = \frac{38}{24} = \frac{19}{12}$$

$$\text{et}\quad y_G = \frac{\frac{2}{7}\times 5 + \frac{2}{5}\times 7}{\frac{2}{7}+\frac{2}{5}} = \frac{\frac{10\times 5}{7\times 5}+\frac{14\times 7}{5\times 7}}{\frac{2\times 5}{7\times 5}+\frac{2\times 7}{5\times 7}} = \frac{\frac{50}{35}+\frac{98}{35}}{\frac{10}{35}+\frac{14}{35}} = \frac{148}{24} = \frac{37}{6}.$$

47.2 a) Les coordonnées de G se calculent par les moyennes des coordonnées de A, de B et de C pondérées par les coefficients respectifs fournis : $x_G = \dfrac{3\times 1 - 4\times 2 + 2\times 1}{3-4+2} = -3$ et $y_G = \dfrac{3\times 5 - 4\times 6 + 2\times 1}{3-4+2} = -7$.

47.2 b) Les coordonnées de G se calculent par les moyennes des coordonnées de A, de B et de C pondérées par les coefficients respectifs fournis : $x_G = \dfrac{1\times 0 + 1\times 0 + 1\times 1}{1+1+1} = \dfrac{1}{3}$ et $y_G = \dfrac{1\times 0 + 1\times 2 + 1\times 3}{1+1+1} = \dfrac{5}{3}$.

47.2 c) Les coordonnées de G se calculent par les moyennes des coordonnées de A, de B et de C pondérées par les coefficients respectifs fournis : $x_G = \dfrac{2\times 3 + 3\times(-5) + 5\times 1}{2+3+5} = \dfrac{-2}{5}$ et $y_G = \dfrac{2\times 6 + 3\times 2 + 5\times(-4)}{2+3+5} = \dfrac{-1}{5}$.

47.3 a) Les deux coefficients sont positifs donc le point cherché est entre A et B. La pondération de B est plus conséquente que celle de A donc le point est plus proche de B donc le point cherché est E.

....

47.3 b) Le point D est le milieu du segment [AB] ce qui revient à dire que les deux coefficients du barycentre sont égaux.

....

47.3 c) La coordonnée de F se calcule par les moyennes des coordonnées de A et de B pondérées par les coefficients respectifs fournis : $6 = \dfrac{1 \times 0 + b \times 4}{1 + b}$ qu'il restera à résoudre avec un produit en croix : $6 \times (1 + b) = 4b$.

....

47.4 a) On cherche le milieu du segment [AC].

....

47.4 b) Les coefficients barycentriques des points B et C sont égaux et non nuls donc on cherche le milieu du segment [BC].

....

47.4 c) On sait que D est le barycentre de $(\mathrm{A}, -1)$, (B, b) et (C, c). Par définition, on obtient :

$$-\overrightarrow{\mathrm{DA}} + b\,\overrightarrow{\mathrm{DB}} + c\,\overrightarrow{\mathrm{DC}} = \vec{0},$$

avec $-1 + b + c \neq 0$. Pour les coordonnées des vecteurs, cette dernière égalité équivaut à :

$$-\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ceci équivaut à $-4 + 2b + 0c = 0$ et $0 - 2b + 4c = 0$. On obtient $b = 2$ et $c = 1$. Une autre méthode permet de calculer les coordonnées de D par les moyennes des coordonnées de A, de B et de C pondérées par les coefficients respectifs fournis. On obtient les équations :

$$3 = \frac{-1 \times 7 + b \times 5 + c \times 3}{-1 + b + c} \qquad \text{et} \qquad 2 = \frac{-1 \times 2 + b \times 0 + c \times 6}{-1 + b + c}.$$

Or, on sait que la définition du barycentre impose $-1 + b + c \neq 0$. Ce système est donc équivalent à :

$$\begin{cases} -7 + 5b + 3c = -3 + 3b + 3c \\ -2 + 6c = -2 + 2b + 2c. \end{cases}$$

On obtient de même $b = 2$ et $c = 1$.

....

47.5 a) Les coordonnées de G se calculent par les moyennes pondérées des coordonnées de A et de B par les coefficients respectifs fournis :

$$x_{\mathrm{G}} = \frac{(1 - \lambda) \times 3 + \lambda \times 6}{1 - \lambda + \lambda} = \frac{3 + 3\lambda}{1}$$
$$\text{et} \quad y_{\mathrm{G}} = \frac{(1 - \lambda) \times 0 + \lambda \times 3}{1 - \lambda + \lambda} = \frac{3\lambda}{1}.$$

....

47.5 b) Les coordonnées de G sont $x_{\mathrm{G}} = 3 + 3\lambda$ et $y_{\mathrm{G}} = 3\lambda$. Dans x_{G}, on remplace 3λ par y_{G}. On obtient $x_{\mathrm{G}} = 3 + y_{\mathrm{G}}$. Il reste à isoler y_{G}, d'où $y_{\mathrm{G}} = x_{\mathrm{G}} - 3$.

....

47.5 c) On a obtenu précédemment $x_{\mathrm{G}} = 3 + 3\lambda$. On considère $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. En multipliant par 3, qui est positif, chacun des membres des inégalités, on obtient $0 \leqslant 3\lambda \leqslant 3$. Il reste à ajouter 3 à chacun de ces membres.

....

47.5 d) On a obtenu précédemment $y_{\mathrm{G}} = x_{\mathrm{G}} - 3$. Pour $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, on a aussi d'après la question précédente $3 \leqslant x_{\mathrm{G}} \leqslant 6$. Donc, en soustrayant 3 à chaque membre de l'inégalité, on a $0 \leqslant y_{\mathrm{G}} \leqslant 3$.

....

Fiche n° 48. Application des vecteurs à la géométrie

Réponses

48.1 a) $\boxed{\overrightarrow{u_8}}$

48.1 b) $\boxed{\overrightarrow{u_3}}$

48.1 c) $\boxed{\overrightarrow{u_2}}$

48.1 d) $\boxed{\overrightarrow{u_5}}$

48.1 e) $\boxed{\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}}$

48.1 f) $\boxed{\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}}$

48.1 g) $\boxed{\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}}$

48.1 h) $\boxed{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}$

48.2 a) $\boxed{\sqrt{5}}$

48.2 b) $\boxed{2}$

48.2 c) $\boxed{\sqrt{2}}$

48.2 d) $\boxed{3\sqrt{2}}$

48.2 e) $\boxed{\sqrt{13}}$

48.2 f) $\boxed{\sqrt{61}}$

48.3 a) $\boxed{-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}$

48.3 b) $\boxed{\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}}$

48.3 c) $\boxed{\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}}$

48.3 d) $\boxed{\text{oui}}$

48.4 a) $\boxed{1}$

48.4 b) $\boxed{2}$

48.4 c) $\boxed{-3}$

48.4 d) $\boxed{\frac{1}{2}}$

48.4 e) $\boxed{\frac{3}{8}}$

48.4 f) $\boxed{-\frac{2}{11}}$

48.5 a) $\boxed{\text{oui}}$

48.5 b) $\boxed{\text{oui}}$

48.5 c) $\boxed{\text{non}}$

48.5 d) $\boxed{\text{non}}$

48.6 a) $\boxed{\text{voir corrigé}}$

48.6 b) $\boxed{\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}}$

48.6 c) $\boxed{\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}}$

48.6 d) $\boxed{\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}}$

48.6 e) $\boxed{\begin{pmatrix}-6\\-1\end{pmatrix}}$

48.6 f) $\boxed{0}$

48.6 g) $\boxed{\text{oui}}$

48.7 a) $\boxed{(1\,;1)}$

48.7 b) $\boxed{\left(\tfrac{5}{2}\,;1\right)}$

48.7 c) $\boxed{\left(-\tfrac{4}{3}\,;\tfrac{5}{3}\right)}$

48.7 d) $\boxed{\text{oui}}$

48.8 a) $\boxed{\text{non}}$

48.8 b) $\boxed{\text{non}}$

48.8 c) $\boxed{\text{oui}}$

48.9 a) $\boxed{-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{5}}$

48.9 b) $\boxed{-\frac{7}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{5}}$

48.9 c) $\boxed{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{5}}$

48.10 a) $\boxed{\text{voir corrigé}}$

48.10 b) $\boxed{\text{voir corrigé}}$

48.10 c) $\boxed{\text{oui}}$

48.10 d) $\boxed{\text{oui}}$

48.10 e) $\boxed{1}$

48.11 a) $\boxed{\left(\frac{19}{10}+\sqrt{2}\,;\frac{11}{7}-\sqrt{2}\right)}$

48.11 b) $\boxed{\left(\frac{11}{10}-\sqrt{2}\,;\frac{17}{7}+\sqrt{2}\right)}$

48.11 c) $\boxed{\left(-\frac{19}{10}+\sqrt{2}\,;-\frac{11}{7}-\sqrt{2}\right)}$

48.12 a) $\boxed{\frac{1}{2}\overrightarrow{MA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}}$

48.12 b) $\boxed{\frac{1}{2}\overrightarrow{MA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{MC}}$

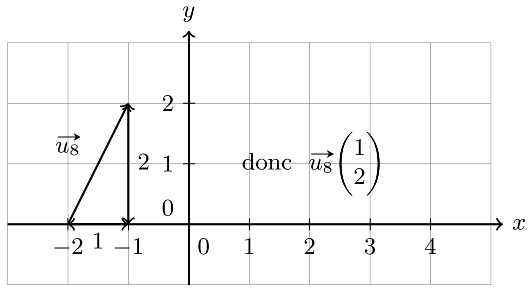
48.12 c) $\boxed{\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{MC}}$

48.12 d) $\boxed{\overrightarrow{0}}$

48.12 e) $\boxed{\overrightarrow{0}}$

Corrigés

48.1 h) On a :



....

48.2 a) On a $\|\overrightarrow{u_1}\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

....

48.2 b) On a $\|\overrightarrow{u_5}\| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2$.

....

48.2 c) On a $\|\overrightarrow{u_6}\| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.

....

48.2 d) On a $\|\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}\| = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$.

....

48.2 e) On a $\|\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_5}\| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$.

....

48.3 a) On a $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

....

48.3 b) On a $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \dfrac{4}{3}\overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

....

48.3 c) On a $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AC} + \dfrac{4}{3}\overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{AB} - \dfrac{4}{3}\overrightarrow{AC}$.

....

48.3 d) On a $\overrightarrow{BC} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BD}$. Ainsi, les points B, C, D sont alignés.

....

48.4 a) On a $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 3$ et $\left\|\overrightarrow{DE}\right\| = 3$; comme $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ ont le même sens, on a $\lambda = \dfrac{3}{3} = 1$.

....

48.4 c) On a $\left\|\overrightarrow{BA}\right\| = 3$ et $\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = 1$; comme $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ ont un sens opposé, on a $\lambda = -\dfrac{3}{1} = -3$.

....

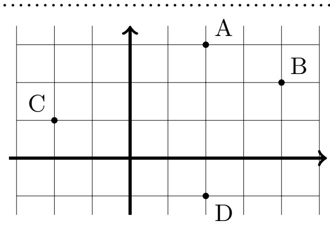
48.5 a) On calcule le déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$: il vaut $2 \times 6 - (-3) \times (-4) = 0$.

....

48.5 c) On calcule le déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$: il vaut $-\left(\dfrac{1}{4}\right) \times \left(\dfrac{3}{7}\right) - 3 \times 7 = -\dfrac{3}{28} - 21 \neq 0$.

....

48.6 a) On a :



....

48.6 b) On a $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2-2\\1-3\end{pmatrix} = \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}$, d'après l'expression des coordonnées de A et C.

....

48.6 c) On a $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}4-2\\2-3\end{pmatrix} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$, d'après l'expression des coordonnées de A et B.

48.6 f) On a, d'après l'expression en coordonnées de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$, $\det(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{CD}}) = 2 \times (-2) - 4 \times -1 = 0$.

48.6 g) D'après le calcul précédent, les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ sont colinéaires.

48.7 a) On a $\mathrm{M}\left(\dfrac{-2+4}{2}\,;\dfrac{1+1}{2}\right) = \mathrm{M}(1\,;1)$.

48.7 b) On a $\mathrm{N}\left(\dfrac{1+4}{2}\,;\dfrac{1+1}{2}\right) = \mathrm{N}\left(\dfrac{5}{2}\,;1\right)$.

48.7 c) On note $\mathrm{C}(x\,;y)$. D'après l'expression vectorielle, on a $\begin{pmatrix}-2-x+2(-1-x)\\1-y+2(2-y)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

48.7 d) On calcule $\overrightarrow{\mathrm{CN}}\begin{pmatrix}\frac{7}{2}\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{MS}}\begin{pmatrix}-\frac{7}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$. Ensuite, on calcule le déterminant de $\overrightarrow{\mathrm{CN}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{MS}}$, qui est égal à $\det(\overrightarrow{\mathrm{CN}}, \overrightarrow{\mathrm{MS}}) = \dfrac{7}{2} \times \dfrac{2}{3} - \dfrac{7}{3} = 0$. Donc, les droites qui portent ces vecteurs sont parallèles.

48.8 a) On calcule $\det(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{CD}}) = 3 \times (-2) - 2 \times 1 = -8 \neq 0$. Ainsi, les droites ne sont pas parallèles.

48.8 b) On calcule $\det(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{CD}}) = \left(\sqrt{2} + \dfrac{20}{3}\right) \times (\sqrt{2} - 1) - 1 \times 0 = -\dfrac{14}{3} - \dfrac{17}{3}\sqrt{2} \neq 0$.

48.8 c) On calcule $\det(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{CD}}) = -\dfrac{1}{3} \times \left(-\dfrac{10}{27}\sqrt{5}\right) - \dfrac{2}{9}\sqrt{5} \times \dfrac{5}{9} = 0$. Ainsi, les droites sont parallèles.

48.9 a) Dans les trois cas, le déterminant de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ vaut :

$$(5 - \sqrt{5}) \times \left(2 - \frac{4}{3}\right) - (t - 2) \times (a - 1) = \frac{4 - 2\sqrt{5}}{3} - at + 2a + t.$$

Il suffit de remplacer avec les valeurs de t et de résoudre l'équation déterminant $= 0$ pour conclure.

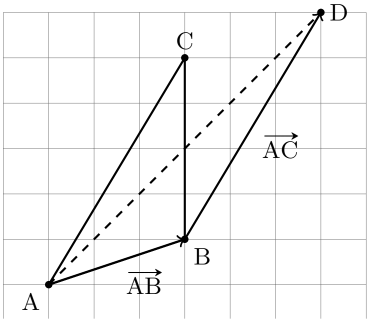
Ici, on a $\det(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{CD}}) = \dfrac{4 - 2\sqrt{5}}{3} + 2a$ et donc il est nul si, et seulement si, $a = -\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}\sqrt{5}$.

48.9 b) On reprend ce qui précède avec $t = 1$, le déterminant vaut alors $\dfrac{4 - 2\sqrt{5}}{3} + a + 1$.

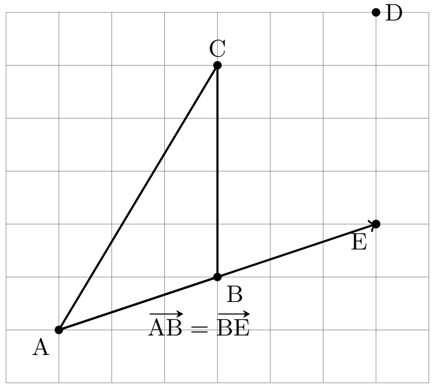
48.9 c) On a :

$$\det(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{CD}}) = 0 \iff \frac{4 - 2\sqrt{5}}{3} - a(2 + \sqrt{5}) + 2a + (2 + \sqrt{5}) = 0 \iff \frac{4 - 2\sqrt{5}}{3} + (2 + \sqrt{5}) - a\sqrt{5} = 0$$
$$\iff a\sqrt{5} = \frac{10}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{5} \iff a = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{5}.$$

48.10 a) On a :



48.10 b) On a :



48.10 c) On a $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BD}$.

48.10 d) Par définition de D, c'est un parallélogramme.

48.10 e) Comme ABDC est un parallélogramme, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et donc $\lambda = 1$.

48.11 a) On note $D(x, y)$. ABCD est un parallélogramme si, et seulement si, $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$. Or, on a :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -\frac{2}{5} - \frac{3}{2} \\ \frac{3}{7} - 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x - \sqrt{2} \\ y + \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Alors, on a l'égalité si $x = \sqrt{2} + \dfrac{2}{5} + \dfrac{3}{2} = \dfrac{19}{10} + \sqrt{2}$ et si $y = -\sqrt{2} - \dfrac{3}{7} + 2 = \dfrac{11}{7} - \sqrt{2}$.

48.12 a) On sait que K est le milieu de [AB]. Alors, $\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{AK} = \vec{0}$. De plus, on sait que

$$\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{MK} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} \\ &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}. \end{aligned}$$

48.12 d) On calcule :

$$\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{CK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \vec{0}.$$

48.12 e) On sait que le centre de gravité est le point G tel que $\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{GK} = \vec{0}$ et, par ce qui précède, on a :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{GK} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}.$$

Fiche n° 49. Équations de droites

Réponses

49.1 .... $\boxed{\text{a et b}}$

49.2 a) .... $\boxed{\text{c}}$

49.2 b) .... $\boxed{\text{d}}$

49.2 c) .... $\boxed{-\frac{3}{5}}$

49.2 d) .... $\boxed{\frac{5}{4}}$

49.2 e) .... $\boxed{0}$

49.3 a) .... $\boxed{\text{non}}$

49.3 b) .... $\boxed{\text{oui}}$

49.3 c) .... $\boxed{\text{oui}}$

49.4 a) .... $\boxed{\left(-\frac{3}{2}\,;0\right)}$

49.4 b) .... $\boxed{\left(\frac{3}{2}\,;0\right)}$

49.4 c) .... $\boxed{(-2^{n-1}\,;0)}$

49.5 .... $\boxed{\text{d}}$

49.6 a) .... $\boxed{\frac{2}{3}}$

49.6 b) .... $\boxed{-\frac{2}{9}}$

49.6 c) .... $\boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$

49.7 a) .... $\boxed{4}$

49.7 b) .... $\boxed{-3}$

49.7 c) .... $\boxed{\frac{5}{3}}$

49.7 d) .... $\boxed{-\frac{2}{3}}$

49.8 a) .... $\boxed{2}$

49.8 b) .... $\boxed{\frac{5}{3}}$

49.8 c) .... $\boxed{-7}$

49.9 a) .... $\boxed{\text{voir corrigé}}$

49.9 b) .... $\boxed{\text{voir corrigé}}$

49.9 c) .... $\boxed{\text{voir corrigé}}$

49.9 d) .... $\boxed{\text{voir corrigé}}$

49.10 a) .... $\boxed{\text{voir corrigé}}$

49.10 b) .... $\boxed{\text{voir corrigé}}$

49.10 c) .... $\boxed{\text{voir corrigé}}$

49.10 d) .... $\boxed{\text{voir corrigé}}$

49.11 a) .... $\boxed{\text{voir corrigé}}$

49.11 b) .... $\boxed{\text{voir corrigé}}$

49.11 c) .... $\boxed{\text{voir corrigé}}$

49.11 d) .... $\boxed{\text{voir corrigé}}$

49.12 a) .... $\boxed{\text{b}}$

49.12 b) .... $\boxed{y = -2x - 3}$

49.12 c) .... $\boxed{y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}$

49.12 d) .... $\boxed{y = 3x - 5}$

49.13 a) .... $\boxed{y = -x + 3}$

49.13 b) .... $\boxed{y = 3}$

49.13 c) .... $\boxed{y = \frac{3}{4}x - 1}$

49.13 d) .... $\boxed{y = -\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}}$

49.13 e) .... $\boxed{y = -5x - 7}$

49.14 a) .... $\boxed{\text{a}}$

49.14 b) .... $\boxed{y = 6x - 2}$

49.14 c) .... $\boxed{y = -2x + 1}$

49.14 d) .... $\boxed{y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{8}}$

49.15 a) .... $\boxed{\text{c}}$

49.15 b) .... $\boxed{y = \frac{1}{4}x + \frac{11}{4}}$

49.15 c) ...... $\boxed{y = -\frac{17}{38}x + \frac{11}{19}}$

49.15 d) .... $\boxed{y = 2^{6n+12}}$

Corrigés

49.2 b) Les points A$(-1\,;0)$ et B$(1\,;-3)$ appartiennent à (D_2) donc la pente est $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-3-0}{1-(-1)} = \dfrac{-3}{2}$.

49.2 e) La droite (D_5) est horizontale donc sa pente vaut 0.

49.3 a) On a $2 \times 2 + 3 \times (-1) + 1 = 2 \neq 0$ donc le point A n'appartient pas à la droite (D).

49.3 c) On a $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{2} + 4 \times \dfrac{-1}{3} + \dfrac{7}{12} = \dfrac{9}{12} - \dfrac{16}{12} + \dfrac{7}{12} = 0$ donc le point A appartient à la droite (D).

49.4 a) On note $\mathrm{M}(x\,;y)$ le point d'intersection de (D) avec l'axe des abscisses. Comme M appartient à l'axe des abscisses, on a $y=0$. Comme M appartient aussi à (D), on a $4x+y+6=0$, donc $4x+6=0$, d'où $x=-\dfrac{3}{2}$.

49.4 c) On note $\mathrm{M}(x\,;y)$ le point d'intersection de (D) avec l'axe des abscisses. Comme M appartient à l'axe des abscisses, on a $y=0$. Comme M appartient aussi à (D), on a $2\times 4^{n+1}x-3^{2n-1}y+2^{3n+2}=0$, donc $2^{2n+3}x+2^{3n+2}=0$, d'où $x=-\dfrac{2^{3n+2}}{2^{2n+3}}=-2^{n-1}$.

49.5 La pente de la droite (AB) est $\dfrac{y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A}}{x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A}}=\dfrac{3-(-1)}{-1-2}=\dfrac{4}{-3}=-\dfrac{4}{3}$.

49.6 a) La pente de la droite (AB) est $\dfrac{y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A}}{x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A}}=\dfrac{-2-(-10)}{5-(-7)}=\dfrac{8}{12}=\dfrac{2}{3}$.

49.6 b) La pente de la droite (AB) est $\dfrac{y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A}}{x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A}}=\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{\frac{-1}{4}-\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{3}{6}-\frac{2}{6}}{\frac{-1}{4}-\frac{2}{4}}=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{-3}{4}}=-\dfrac{1}{6}\times\dfrac{4}{3}=-\dfrac{2}{3\times 3}=-\dfrac{2}{9}$.

49.6 c) La pente de la droite (AB) est $\dfrac{y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A}}{x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{24}}{\sqrt{2}-(-\sqrt{2})}=\dfrac{\sqrt{6}-2\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{-\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{2\times\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

49.7 b) L'équation réduite de (D) étant $y=-3x+2$, sa pente vaut -3.

49.7 c) L'équation réduite de (D) étant $y=\dfrac{5}{3}x+\dfrac{4}{3}$, sa pente vaut $\dfrac{5}{3}$.

49.7 d) L'équation réduite de (D) étant $y=-\dfrac{8}{12}x-\dfrac{3}{12}$, soit $y=-\dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{4}$, sa pente vaut $-\dfrac{2}{3}$.

49.8 a) On a les équivalences suivantes : $A\in(D)\iff -m+(3-m)+1=0\iff -2m+4=0\iff m=2$.

49.8 c) On a les équivalences suivantes :

$$A\in(D)\iff(-m^2-2m+m+2)+(4m^2-9)-3m^2=0\iff -m-7=0\iff m=-7.$$

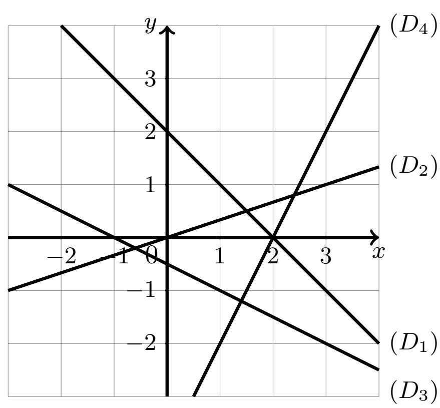
49.9 a)

La droite (D_1) a pour équation réduite $y=-x+2$ donc elle passe par les points $\mathrm{A}(0\,;2)$ et $\mathrm{B}(1\,;1)$ par exemple.

La droite (D_2) a pour équation réduite $y=\dfrac{1}{3}x$ donc elle passe par les points $\mathrm{O}(0\,;0)$ et $\mathrm{B}(3\,;1)$ par exemple.

La droite (D_3) a pour équation réduite $y=-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$ donc elle passe par les points $\mathrm{A}(1\,;-1)$ et $\mathrm{B}(-1\,;0)$ par exemple.

La droite (D_4) a pour équation réduite $y=2x-4$ donc elle passe par les points $\mathrm{A}(1\,;-2)$ et $\mathrm{B}(2\,;0)$ par exemple.



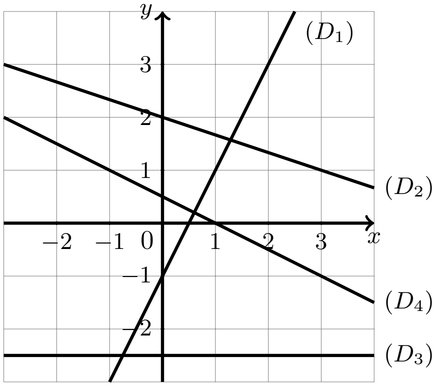
49.10 a)

La droite (D_1) passe par les points $A(0\,;-1)$ et $B(1\,;1)$ par exemple.

La droite (D_2) passe par les points $A(0\,;2)$ et $B(3\,;1)$ par exemple.

La droite (D_3) est parallèle à l'axe des abscisses et passe par le point $A\left(0\,;-\dfrac{5}{2}\right)$ par exemple.

La droite (D_4) passe par les points $A(-1\,;1)$ et $B(1\,;0)$ par exemple.



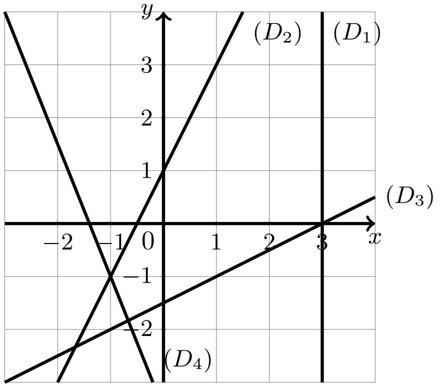
49.11 a)

La droite (D_1) est parallèle à l'axe des ordonnées et passe par le point $A(3\,;0)$ par exemple.

La droite (D_2) passe par les points $A(0\,;1)$ et $B(1\,;3)$ par exemple.

La droite (D_3) passe par les points $A(3\,;0)$ et $B(1\,;-1)$ par exemple.

La droite (D_4) passe par les points $A(-1\,;-1)$ et $B(-3\,;4)$ par exemple.



49.12 a) Les points $A(0\,;2)$ et $B(1\,;3)$ appartiennent à la droite (D_1) donc la pente est $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{3-2}{1-0} = 1$. De plus, l'ordonnée à l'origine vaut 2. L'équation réduite de (D_1) est donc $y = 1 \times x + 2$.

49.12 b) Les points $A(-1\,;-1)$ et $B(0\,;-3)$ appartiennent à (D_2) donc la pente est $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-3-(-1)}{0-(-1)} = -2$. De plus, l'ordonnée à l'origine vaut -3. L'équation réduite de (D_2) est donc $y = -2x - 3$.

49.12 c) Les points $A(-1\,;1)$ et $B(1\,;0)$ appartiennent à (D_3) donc la pente est $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{0-1}{1-(-1)} = -\dfrac{1}{2}$.

Il existe donc un réel b tel que l'équation réduite de (D_3) est $y = -\dfrac{1}{2}x + b$.

Or, le point B appartient à (D_3) donc on a $y_B = -\dfrac{1}{2}x_B + b$, d'où $b = y_B + \dfrac{1}{2}x_B = \dfrac{1}{2}$.

49.12 d) Les points $A(1\,;-2)$ et $B(2\,;1)$ appartiennent à la droite (D_4) donc la pente est $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{1-(-2)}{2-1} = 3$.
Il existe donc un réel b tel que l'équation réduite de (D_4) est $y = 3x + b$.
Or, le point B appartient à (D_4) donc on a $y_B = 3x_B + b$, d'où $b = y_B - 3x_B = -5$.

49.13 a) Les points $A(2\,;1)$ et $B(1\,;2)$ appartiennent à (D_1) donc la pente est $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{2-1}{1-2} = -1$. De plus, l'ordonnée à l'origine vaut 3. L'équation réduite de (D_1) est donc $y = -x + 3$.

49.13 b) La droite (D_2) est parallèle à l'axe des abscisses donc sa pente vaut 0. De plus, l'ordonnée à l'origine vaut 3. L'équation réduite de (D_2) est donc $y = 3$.

49.13 c) Les points $A(0\,;-1)$ et $B(4\,;2)$ appartiennent à (D_3) donc la pente est $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{2-(-1)}{4-0} = \dfrac{3}{4}$.
De plus, l'ordonnée à l'origine vaut -1.

49.13 d) Les points $A(-2\,;1)$ et $B(3\,;-2)$ appartiennent à (D_4) donc la pente est $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-2-1}{3-(-2)} = \dfrac{-3}{5}$.
Il existe donc un réel b tel que l'équation réduite de (D_4) est $y = -\dfrac{3}{5}x + b$.
Or, le point B appartient à (D_4) donc on a $y_B = -\dfrac{3}{5}x_B + b$, d'où $b = y_B + \dfrac{3}{5}x_B = -2 + \dfrac{9}{5} = -\dfrac{1}{5}$.

49.13 e) Les points $A(-2\,;3)$ et $B(-1\,;-2)$ appartiennent à (D_5) donc la pente est $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-2-3}{-1-(-2)} = -5$.
Il existe donc un réel b tel que l'équation réduite de (D_5) est $y = -5x + b$.
Or, le point B appartient à (D_5) donc on a $y_B = -5x_B + b$, d'où $b = y_B + 5x_B = -7$.

49.14 a) Il existe un réel b tel que l'équation réduite de la droite (D) est $y = 3x + b$.
Or, le point A appartient à (D) donc on a $y_A = 3x_A + b$, d'où $b = y_A - 3x_A = -1$.

49.14 b) Il existe un réel b tel que l'équation réduite de (D) est $y = 6x + b$.
Or, le point A appartient à (D) donc on a $y_A = 6x_A + b$, d'où $b = y_A - 6x_A = -2$.

49.14 c) Il existe un réel b tel que l'équation réduite de (D) est $y = -2x + b$.
Or, le point A appartient à (D) donc on a $y_A = -2x_A + b$, d'où $b = y_A + 2x_A = 1$.

49.14 d) Il existe un réel b tel que l'équation réduite de (D) est $y = \dfrac{3}{2}x + b$.
Or, le point A appartient à (D) donc on a $y_A = \dfrac{3}{2}x_A + b$, d'où $b = y_A - \dfrac{3}{2}x_A = \dfrac{7}{8}$.

49.15 a) La pente de la droite (AB) est $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{3-(-1)}{0-(-2)} = 2$. De plus, l'ordonnée à l'origine vaut 3.

49.15 b) La pente de la droite (AB) est $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{4-2}{5-(-3)} = \dfrac{1}{4}$.
Il existe donc un réel b tel que l'équation réduite de (AB) est $y = \dfrac{1}{4}x + b$.
Or, le point A appartient à (AB) donc on a $y_A = \dfrac{1}{4}x_A + b$, d'où $b = y_A - \dfrac{1}{4}x_A = \dfrac{11}{4}$.

49.15 c) La pente de la droite (AB) est $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{\frac{5}{4} - \left(-\frac{1}{6}\right)}{-\frac{3}{2} - \frac{5}{3}} = \dfrac{\frac{15+2}{12}}{\frac{-9-10}{6}} = \dfrac{17}{12} \times \dfrac{6}{-19} = -\dfrac{17}{38}$.
Il existe donc un réel b tel que l'équation réduite de (AB) est $y = -\dfrac{17}{38}x + b$.
Or, le point B appartient à (AB) donc on a $y_B = -\dfrac{17}{38}x_B + b$, d'où $b = y_B + \dfrac{17}{38}x_B = \dfrac{5}{4} - \dfrac{51}{76} = \dfrac{95-51}{76} = \dfrac{11}{19}$.

49.15 d) On a $y_A = (2^2)^{3n+6} = 2^{6n+12}$ et $y_B = (2^3)^{2n+4} = 2^{6n+12}$. La pente de la droite (AB) est donc égale à $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = 0$. L'équation réduite de (AB) est donc $y = y_B = 2^{6n+12}$.

Fiche nº 50. Vecteurs directeurs d'une droite

Réponses

50.1 a) .... voir corrigé

50.1 b) .... voir corrigé

50.1 c) .... voir corrigé

50.2 a) .... $\boxed{y = -4x + 5}$

50.2 b) .... $\boxed{y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{7}{2}}$

50.2 c) .... $\boxed{y = 4}$

50.2 d) .... $\boxed{x = 3}$

50.2 e) .... $\boxed{y = x - 2}$

50.3 a) .... a, b et c

50.3 b) .... b

50.3 c) .... a, b et d

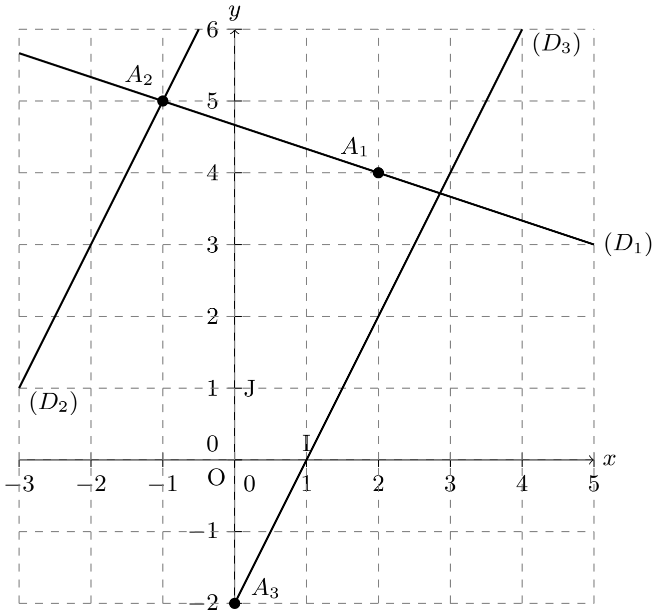
50.4 .... c et d

50.5 a) .... b

50.5 b) .... a et b

Corrigés

50.1 a)



....

50.2 a) Le vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$ permet de trouver le coefficient directeur ; c'est $m = \dfrac{4}{-1} = -4$.

L'équation réduite est donc de la forme $y = -4x + p$. Comme le point $A(2\,;-3)$ appartient à (D), en effectuant « $x = 2$ et $y = -3$ » dans l'équation, on a $-3 = -4 \times 2 + p$; on en déduit que $p = -3 + 8 = 5$.

L'équation réduite est donc $y = -4x + 5$.

....

50.2 b) Le vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ permet de trouver le coefficient directeur ; c'est $m = \dfrac{-3}{2}$.

L'équation réduite est donc de la forme $y = -\dfrac{3}{2}x + p$. Comme le point $A(-1\,;5)$ appartient à (D), en effectuant « $x = -1$ et $y = 5$ » dans l'équation, on a $5 = -\dfrac{3}{2} \times (-1) + p$; on en déduit que $p = 5 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{7}{2}$.

L'équation réduite est donc $y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{7}{2}$.

....

50.2 c) Le vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$ correspond à une droite horizontale, avec pour coefficient directeur $m = 0$. L'équation réduite est donc $y = 4$.

50.2 d) Le vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$ correspond à une droite verticale. Dans ce cas, la droite n'admet pas d'équation de la forme $y = mx + p$; son équation réduite est $x = 3$.

50.2 e) Le vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ permet de trouver le coefficient directeur $m = \dfrac{1}{1} = 1$.

L'équation réduite est donc de la forme $y = x + p$. Comme le point $A(-2\,;-4)$ appartient à (D), en effectuant « $x = -2$ et $y = -4$ » dans l'équation, on a $-4 = 1 \times (-2) + p$; on en déduit que $p = -4 + 2 = -2$.

L'équation réduite est donc $y = x - 2$.

50.3 a) Un vecteur directeur de la droite d'équation $ax + by + c = 0$ est $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$. Dans notre cas, on trouve ainsi que $\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D). Les autres bonnes réponses correspondent aux vecteurs colinéaires à $\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$.

50.3 b) Une droite parallèle à l'axe des abscisses a pour équation $y = c$ et pour vecteur directeur tout vecteur de la forme $\begin{pmatrix}k\\0\end{pmatrix}$, avec $k \neq 0$. Ici, seul $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ convient.

50.3 c) Grâce à l'équation de (D), on voit que $\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix}$ en est un vecteur directeur. Les vecteurs colinéaires à ce vecteur directeur sont $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{u_4}$.

50.4 Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{MN}}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (MN). Deux droites sont parallèles si deux de leurs vecteurs directeurs respectifs sont colinéaires.

Pour la droite d'équation $-8x - 6y + 3 = 0$, un vecteur directeur est $\begin{pmatrix}6\\-8\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$. Pour la droite d'équation $4x + 3y - 1 = 0$, un vecteur directeur est $\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$.

50.5 a) La droite (D) est parallèle à (Δ) : elles ont donc mêmes vecteurs directeurs. L'équation de (D) est donc de la forme $3x + 2y + c = 0$. Comme le point $\mathrm{A}(-2\,;4)$ appartient à (D), en effectuant « $x = -2$ et $y = 4$ » dans l'équation, on a $3(-2) + 2(4) + c = 0$; on en déduit que $c = -2$.

L'équation cartésienne de (D) est donc $3x + 2y - 2 = 0$.

50.5 b) La droite (D) est parallèle à (Δ) : elles ont donc mêmes vecteurs directeurs. L'équation de (D) est donc de la forme $6x - 2y + c = 0$. Comme le point $A(0\,;0)$ appartient à (D), en effectuant « $x = 0$ et $y = 0$ » dans l'équation $6x - 2y + c = 0$, on obtient $c = 0$.

L'équation cartésienne de (D) est donc $6x - 2y = 0$.

On peut simplifier cette équation en divisant par 2 et obtenir $3x - y = 0$.

Fiche nº 51. Droites parallèles et équations de droites

Réponses

51.1 .... $\boxed{\text{a et c}}$

51.2 a) .... $\boxed{-\dfrac{5}{4}}$

51.2 b) .... $\boxed{-\dfrac{5}{4}}$

51.2 c) .... $\boxed{\text{oui}}$

51.3 a) .... $\boxed{-\dfrac{5}{14}}$

51.3 b) .... $\boxed{-\dfrac{5}{14}}$

51.3 c) .... $\boxed{\text{oui}}$

51.4 a) .... $\boxed{\dfrac{3}{11}}$

51.4 b) .... $\boxed{\dfrac{2}{7}}$

51.4 c) .... $\boxed{-\dfrac{1}{77}}$

51.4 d) .... $\boxed{(D_2)}$

51.5 .... $\boxed{\text{b}}$

51.6 .... $\boxed{\text{b}}$

51.7 a) .... $\boxed{\text{oui}}$

51.7 b) .... $\boxed{\text{non}}$

51.7 c) .... $\boxed{\text{oui}}$

51.8 a) .... $\boxed{\text{non}}$

51.8 b) .... $\boxed{\text{oui}}$

51.8 c) .... $\boxed{\text{non}}$

51.8 d) .... $\boxed{\text{oui}}$

51.9 a) .... $\boxed{\dfrac{4}{3}}$

51.9 b) .... $\boxed{2}$

51.9 c) .... $\boxed{-\dfrac{6}{13}}$

51.10 a) .... $\boxed{y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}}$

51.10 b) .... $\boxed{y = -\dfrac{3}{5}x + \dfrac{9}{5}}$

51.10 c) .... $\boxed{\dfrac{23}{11}}$

51.10 d) .... $\boxed{\dfrac{6}{11}}$

Corrigés

51.2 a) La pente de la droite (AB) est $\dfrac{y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}}}{x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}} = \dfrac{-3-2}{5-1} = \dfrac{-5}{4}$.

51.2 b) La pente de la droite (CD) est $\dfrac{y_{\mathrm{D}} - y_{\mathrm{C}}}{x_{\mathrm{D}} - x_{\mathrm{C}}} = \dfrac{-3-7}{6-(-2)} = \dfrac{-10}{8} = \dfrac{-5}{4}$.

51.2 c) Les droites (AB) et (CD) ont la même pente ; elles sont donc parallèles.

51.3 a) La pente de la droite (AB) est $\dfrac{y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}}}{x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}} = \dfrac{\frac{1}{6} - \left(-\frac{1}{4}\right)}{\frac{1}{2} - \frac{5}{3}} = \dfrac{\frac{2+3}{12}}{\frac{6-20}{12}} = \dfrac{5}{-14} = -\dfrac{5}{14}$.

51.3 b) La pente de la droite (AC) est $\dfrac{y_{\mathrm{C}} - y_{\mathrm{A}}}{x_{\mathrm{C}} - x_{\mathrm{A}}} = \dfrac{\frac{11}{6} - \left(-\frac{1}{4}\right)}{\frac{-25}{6} - \frac{5}{3}} = \dfrac{\frac{22+3}{12}}{\frac{-50-20}{12}} = \dfrac{25}{-70} = -\dfrac{5}{14}$.

51.3 c) Les droites (AB) et (AC) ont la même pente et passent toutes deux par le point A. Donc, elles sont confondues. Les points A, B et C sont donc alignés.

51.4 a) La pente de la droite (D_1) est $\dfrac{y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}}}{x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}} = \dfrac{2-(-1)}{4-(-7)} = \dfrac{3}{11}$.

51.4 b) La pente de la droite (D_2) est $\dfrac{y_{\mathrm{D}} - y_{\mathrm{C}}}{x_{\mathrm{D}} - x_{\mathrm{C}}} = \dfrac{0-(-2)}{3-(-4)} = \dfrac{2}{7}$.

51.4 c) On a $\dfrac{3}{11} - \dfrac{2}{7} = \dfrac{21}{77} - \dfrac{22}{77} = \dfrac{-1}{77}$.

51.4 d) On a $\dfrac{3}{11} - \dfrac{2}{7} < 0$ donc $\dfrac{3}{11} < \dfrac{2}{7}$. La pente de (D_1) est donc plus petite que celle de (D_2).

51.5 Les points $\mathrm{A}(-6\,;-1)$ et $\mathrm{B}(5\,;4)$ appartiennent à (D_1) donc la pente de la droite (D_1) est $\dfrac{y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A}}{x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}} = \dfrac{5}{11}$.
De même, les points $\mathrm{C}(-3\,;-2)$ et $\mathrm{D}(6\,;2)$ appartiennent à (D_2) donc la pente de la droite (D_2) est $\dfrac{y_\mathrm{D} - y_\mathrm{C}}{x_\mathrm{D} - x_\mathrm{C}} = \dfrac{4}{9}$.
Or, on a $\dfrac{5}{11} = \dfrac{45}{99} > \dfrac{44}{99} = \dfrac{4}{9}$; donc, la pente de (D_1) est plus grande que celle de (D_2).

51.6 Les points $\mathrm{A}(-5\,;0)$ et $\mathrm{B}(6\,;4)$ appartiennent à (D_1) donc la pente de la droite (D_1) est $\dfrac{y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A}}{x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}} = \dfrac{4}{11}$.
De même, les points $\mathrm{C}(-7\,;-3)$ et $\mathrm{D}(7\,;2)$ appartiennent à (D_2) donc la pente de la droite (D_2) est $\dfrac{y_\mathrm{D} - y_\mathrm{C}}{x_\mathrm{D} - x_\mathrm{C}} = \dfrac{5}{14}$.
Or, on a $\dfrac{4}{11} = \dfrac{56}{11 \times 14} > \dfrac{55}{11 \times 14} = \dfrac{5}{14}$; donc, la pente de (D_1) est plus grande que celle de (D_2).

51.7 a) La pente de la droite (AB) est $\dfrac{y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A}}{x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}} = \dfrac{-3-5}{-5-(-3)} = \dfrac{-8}{-2} = 4$. La pente de la droite (CD) est égale à $\dfrac{y_\mathrm{D} - y_\mathrm{C}}{x_\mathrm{D} - x_\mathrm{C}} = \dfrac{-1-(-5)}{2-1} = 4$. Les droites (AB) et (CD) ont la même pente donc elles sont parallèles.

51.7 b) La pente de la droite (BC) est $\dfrac{y_\mathrm{C} - y_\mathrm{B}}{x_\mathrm{C} - x_\mathrm{B}} = \dfrac{-5-(-3)}{1-(-5)} = \dfrac{-2}{6} = -\dfrac{1}{3}$. La pente de la droite (DE) est égale à $\dfrac{y_\mathrm{E} - y_\mathrm{D}}{x_\mathrm{E} - x_\mathrm{D}} = \dfrac{2-(-1)}{-10-2} = \dfrac{3}{-12} = -\dfrac{1}{4}$. Les droites (BC) et (DE) n'ont pas la même pente : elles ne sont donc pas parallèles.

51.7 c) La pente de la droite (AB) vaut 4. La pente de la droite (AF) est $\dfrac{y_\mathrm{F} - y_\mathrm{A}}{x_\mathrm{F} - x_\mathrm{A}} = \dfrac{1-5}{-4-(-3)} = \dfrac{-4}{-1} = 4$.
Les droites (AB) et (AF) ont la même pente et passent toutes deux par le point A : elles sont donc confondues. Ainsi, les points A, B et F sont alignés.

51.8 a) La pente de (D_1) vaut 3 et la pente de (D_2) vaut 2. Les droites (D_1) et (D_2) n'ont pas la même pente et ne sont donc pas parallèles.

51.8 b) L'équation réduite de (D_1) est $y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{5}{6}$; donc, la pente de (D_1) vaut $\dfrac{2}{3}$. L'équation réduite de (D_2) est $y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{9}$; donc, la pente de (D_2) vaut $\dfrac{2}{3}$. Ainsi, les droites (D_1) et (D_2) sont parallèles.

51.8 c) L'équation réduite de (D_1) est $y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{3}{8}$; donc, la pente de (D_1) vaut $-\dfrac{3}{2}$. L'équation réduite de (D_2) est $y = -2x + \dfrac{5}{4}$; donc, la pente de (D_2) vaut -2. Ainsi, les droites (D_1) et (D_2) ne sont pas parallèles.

51.8 d) L'équation réduite de (D_1) est $y = \dfrac{14}{5}\left(-\dfrac{6}{35}x + \dfrac{193}{35}\right) = -\dfrac{2}{5} \times \dfrac{6}{5}x + \dfrac{14}{5} \times \dfrac{193}{35}$; donc, la pente de (D_1) vaut $-\dfrac{12}{25}$. L'équation réduite de (D_2) est $y = \dfrac{4}{11}\left(-\dfrac{33}{25}x + \dfrac{147}{23}\right) = -4 \times \dfrac{3}{25}x + \dfrac{4}{11} \times \dfrac{147}{23}$; donc, la pente de (D_2) vaut $-\dfrac{12}{25}$. Les droites (D_1) et (D_2) ont la même pente : elles sont donc parallèles.

51.9 a) Les droites (D_1) et (D_2) sont parallèles si, et seulement si, elles ont la même pente. Cela équivaut à avoir l'égalité $5 = 3m + 1$, c'est-à-dire $m = \dfrac{4}{3}$.

51.9 b) Les droites (D_1) et (D_2) sont parallèles si, et seulement si, elles ont la même pente, si, et seulement si, on a l'égalité $m + 1 = 2m - 1$, c'est-à-dire $2 = m$.

51.9 c) On suppose ici qu'on a $m \neq -\dfrac{1}{2}$. L'équation réduite de (D_1) est $y = \dfrac{m}{6}x + \dfrac{1}{3}$ et l'équation réduite de (D_2) est $y = -(2m+1)x + 4(2m+1)$. Or, on a les équivalences : $\dfrac{m}{6} = -(2m+1) \iff \dfrac{13m}{6} = -1 \iff m = -\dfrac{6}{13}$. Ainsi, les droites (D_1) et (D_2) ont la même pente si, et seulement si, on a $m = -\dfrac{6}{13}$.

51.10 a) Les points $\mathrm{A}(1\,;0)$ et $\mathrm{B}(3\,;1)$ appartiennent à la droite (D_1), dont la pente est $\dfrac{y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A}}{x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}} = \dfrac{1-0}{3-1} = \dfrac{1}{2}$.

On peut donc fixer un réel b tel que l'équation réduite de la droite (D_1) soit $y = \dfrac{1}{2}x + b$. Comme le point A appartient à (D_1), on a $y_\mathrm{A} = \dfrac{1}{2}x_\mathrm{A} + b$ et donc $b = y_\mathrm{A} - \dfrac{1}{2}x_\mathrm{A} = -\dfrac{1}{2}$.

L'équation réduite de (D_1) est donc $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$.

51.10 b) Les points $\mathrm{C}(-2\,;3)$ et $\mathrm{D}(3\,;0)$ appartiennent à (D_2), dont la pente est $\dfrac{y_\mathrm{D} - y_\mathrm{C}}{x_\mathrm{D} - x_\mathrm{C}} = \dfrac{0-3}{3-(-2)} = -\dfrac{3}{5}$.

On peut donc fixer un réel b tel que l'équation réduite de la droite (D_2) soit $y = -\dfrac{3}{5}x + b$. Comme le point D appartient à (D_2), on a $y_\mathrm{D} = -\dfrac{3}{5}x_\mathrm{D} + b$ et donc $b = y_\mathrm{D} + \dfrac{3}{5}x_\mathrm{D} = \dfrac{9}{5}$.

L'équation réduite de (D_2) est donc $y = -\dfrac{3}{5}x + \dfrac{9}{5}$.

51.10 c) Comme le point d'intersection appartient aux deux droites, on a $\dfrac{1}{2}x_0 - \dfrac{1}{2} = y_0 = -\dfrac{3}{5}x_0 + \dfrac{9}{5}$. On a donc la relation $\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{5}\right)x_0 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{9}{5}$, d'où $\dfrac{5+6}{10}x_0 = \dfrac{5+18}{10}$, c'est-à-dire $x_0 = \dfrac{23}{11}$.

51.10 d) On a alors $y_0 = \dfrac{1}{2}x_0 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{23}{22} - \dfrac{11}{22} = \dfrac{12}{22} = \dfrac{6}{11}$.

Fiche n° 52. Proportions

Réponses

52.1 a) ... $\boxed{0{,}25 = 25\,\%}$

52.1 b) ... $\boxed{0{,}5 = 50\,\%}$

52.1 c) ... $\boxed{0{,}2 = 20\,\%}$

52.1 d) ... $\boxed{0{,}17 = 17\,\%}$

52.2 a) ... $\boxed{32\,\%}$

52.2 b) ... $\boxed{0{,}83}$

52.2 c) ... $\boxed{\dfrac{3}{10}}$

52.2 d) ... $\boxed{150\,\%}$

52.3 a) ... $\boxed{0{,}425}$

52.3 b) ... $\boxed{30\,\%}$

52.3 c) ... $\boxed{\dfrac{1}{8}}$

52.4 a) ... $\boxed{8}$

52.4 b) ... $\boxed{6}$

52.4 c) ... $\boxed{50\,\%}$

52.5 a) ... $\boxed{60}$

52.5 b) ... $\boxed{2300}$

52.5 c) ... $\boxed{36}$

52.6 a) ... $\boxed{12{,}5\,\%}$

52.6 b) ... $\boxed{\dfrac{13}{50}}$

52.6 c) ... $\boxed{0{,}08}$

52.7 ... $\boxed{600}$

52.8 a) ... $\boxed{\dfrac{n}{Np}}$

52.8 b) ... $\boxed{\dfrac{N-n}{N}}$

Corrigés

52.1 a) Le nombre 25 % signifie $\dfrac{25}{100}$ dont l'écriture fractionnaire peut se simplifier en $\dfrac{1}{4}$.

52.1 b) L'écriture fractionnaire $\dfrac{1}{2}$ peut aussi s'écrire $\dfrac{50}{100}$. Donc, $\dfrac{1}{2} = \dfrac{50}{100} = 0{,}5 = 50\,\%$.

52.1 c) L'écriture fractionnaire $\dfrac{1}{5}$ peut aussi s'écrire $\dfrac{20}{100}$. Donc, $\dfrac{1}{5} = \dfrac{20}{100} = 0{,}2 = 20\,\%$.

52.1 d) L'écriture fractionnaire $\dfrac{34}{200}$ peut aussi s'écrire $\dfrac{17}{100}$. Donc, $\dfrac{34}{200} = \dfrac{17}{100} = 0{,}17 = 17\,\%$.

52.2 a) Le nombre 0,32 peut s'écrire sous forme fractionnaire $\dfrac{32}{100}$, ce qui donne le pourcentage 32 %.

52.2 b) Le pourcentage 83 % peut s'écrire sous forme fractionnaire $\dfrac{83}{100}$, ce qui donne le nombre décimal 0,83.

52.2 c) Le pourcentage 30 % peut s'écrire sous forme fractionnaire $\dfrac{30}{100}$, ce qui donne simplifié $\dfrac{3}{10}$.

52.2 d) On a $\dfrac{3}{2} = \dfrac{3 \times 50}{2 \times 50} = \dfrac{150}{100} = 150\,\%$.

52.3 a) La mairie a acheté 850 géraniums parmi 2000 plants, soit une proportion de $\dfrac{850}{2000}$. On pourra poser la division pour obtenir $\dfrac{850}{2000} = 0{,}425$.

52.3 b) La mairie a acheté 600 gazanias parmi 2000 plants, soit une proportion de $\dfrac{600}{2000}$. La simplification de la fraction donne $\dfrac{600}{2000} = \dfrac{60}{200} = \dfrac{30}{100}$ autrement dit 30 %.

52.3 c) La mairie a acheté 250 dipladénias autrement dit une proportion de $\dfrac{250}{2000}$ soit $\dfrac{1}{8}$ après simplification.

52.4 a) Un tiers des élèves de la classe font l'option latin signifie qu'une proportion de $\dfrac{1}{3}$ des 24 élèves sont latinistes. On calcule donc $24 \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{24}{3} = 8$. Donc 8 élèves sont latinistes.

52.4 b) On sait que 25 % des élèves de la classe aiment les jeux vidéos ce qui signifie qu'une proportion de $\dfrac{25}{100}$ des 24 élèves sont passionnés. On calcule donc $24 \times \dfrac{25}{100} = \dfrac{24}{4} = 6$. Donc 6 élèves aiment les jeux vidéos.

....

52.4 c) Dans la classe de 24 élèves, il y a 12 filles. Pour obtenir la proportion de filles, on calcule $\dfrac{12}{24} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5 = \dfrac{50}{100}$. Donc 50 % des élèves sont des filles.

....

52.5 a) Soit x le nombre total de stylos. On a $\dfrac{15}{100} \times x = 9$. Donc $x = \dfrac{100}{15} \times 9 = \dfrac{100 \times 9}{15}$. Il reste à poser la division euclidienne de 900 par 15 qui donne 60 et un reste nul.

....

52.5 b) Soit x le nombre total de lycéens. On a $\dfrac{37}{100} \times x = 851$. Donc $x = \dfrac{100}{37} \times 851$. Il reste à poser la division euclidienne de 851 par 37 qui donne 23 et un reste nul.

....

52.5 c) Soit x le nombre total de poissons dans l'aquarium. Un tiers des poissons de l'aquarium sont des esturgeons ce qui signifie qu'une proportion de $\dfrac{1}{3}$ des x poissons sont 12 esturgeons. On résout donc $x \times \dfrac{1}{3} = 12$, ce qui donne $x = 12 \times 3$. Donc il y a 36 poissons dans l'aquarium.

....

52.6 a) On calcule $\dfrac{1}{2}$ de $\dfrac{1}{4}$ soit $\dfrac{1 \times 1}{2 \times 4} = \dfrac{1}{8}$. En posant la division de 100 par 8, on trouve 12,5. Donc $\dfrac{1}{8} = \dfrac{12{,}5}{100}$, ce qui donne 12,5 %.

....

52.6 b) On calcule 40 % de 65 % soit $\dfrac{40 \times 65}{100 \times 100} = \dfrac{4 \times 10 \times 5 \times 13}{4 \times 25 \times 10 \times 2 \times 5} = \dfrac{13}{50}$.

....

52.6 c) On calcule le quart de 32 % soit $\dfrac{1}{4} \times \dfrac{32}{100} = \dfrac{8 \times 4}{4 \times 100} = \dfrac{8}{100} = 0{,}08$.

....

52.7 Les enfants de moins de 8 ans représentent 80 % des enfants de moins de 10 ans et sont au nombre de 48 soit $\dfrac{48 \times 100}{80} = 60$ enfants ont moins de 10 ans ; ce qui représente 10 % des participants de la colonie.

....

52.8 a) Le nombre de majeurs est Np donc la proportion de majeurs ayant le permis est $\dfrac{n}{Np}$.

....

52.8 b) Le nombre de personnes n'ayant pas le permis est $N - n$.

....

Fiche n° 53. Taux d'évolution

Réponses

53.1 a) .... $\boxed{1{,}32\,€}$

53.1 b) .... $\boxed{0{,}85}$

53.1 c) .... $\boxed{42\,€}$

53.1 d) .... $\boxed{3}$

53.2 a) .... $\boxed{1{,}3}$

53.2 b) .... $\boxed{1{,}52}$

53.2 c) .... $\boxed{2}$

53.2 d) .... $\boxed{0{,}9}$

53.2 e) .... $\boxed{0{,}5}$

53.2 f) .... $\boxed{0}$

53.3 a) .... $\boxed{+20\,\%}$

53.3 b) .... $\boxed{+50\,\%}$

53.3 c) .... $\boxed{-10\,\%}$

53.3 d) .... $\boxed{-50\,\%}$

53.3 e) .... $\boxed{-50\,\%}$

53.3 f) .... $\boxed{-75\,\%}$

53.4 a) .... $\boxed{364}$

53.4 b) .... $\boxed{130}$

53.4 c) .... $\boxed{2900}$

53.5 a) .... $\boxed{60}$

53.5 b) .... $\boxed{0{,}2}$

53.5 c) .... $\boxed{20\,\%}$

53.5 d) .... $\boxed{378}$

53.5 e) .... $\boxed{26\,\%}$

53.5 f) .... $\boxed{\text{c}}$

53.6 a) .... $\boxed{\text{a}}$

53.6 b) .... $\boxed{\text{b}}$

53.7 a) .... $\boxed{\text{a}}$

53.7 b) .... $\boxed{\text{c}}$

53.7 c) .... $\boxed{\text{b}}$

53.8 a) .... $\boxed{\dfrac{-1}{6}}$

53.8 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{9}}$

53.8 c) .... $\boxed{\dfrac{-1}{2}}$

53.8 d) .... $\boxed{1}$

53.9 a) .... $\boxed{\dfrac{F-I}{I}}$

53.9 b) .... $\boxed{\dfrac{F-I}{I}\times 100\,\%}$

53.9 c) .... $\boxed{\dfrac{F}{I}}$

53.9 d) .... $\boxed{\dfrac{I}{F}}$

53.9 e) .... $\boxed{\dfrac{I-F}{F}}$

53.9 f) .... $\boxed{\dfrac{I-F}{F}\times 100\,\%}$

53.10 a) .... $\boxed{0{,}91\times N}$

53.10 b) .... $\boxed{0{,}95^3\times N}$

53.11 a) .... $\boxed{20\,\%}$

53.11 b) .... $\boxed{10\,\%}$

53.12 a) .... $\boxed{6\,\%}$

53.12 b) .... $\boxed{7{,}2\,\%}$

53.12 c) .... $\boxed{1{,}193\,136\times N}$

Corrigés

53.1 a) Augmenter un prix de 10 % revient à le multiplier par $1+\dfrac{10}{100}=1{,}1$. On trouve $1{,}20\,€\times 1{,}1 = 1{,}32\,€$.

53.1 b) Baisser un prix de 15 % revient à le multiplier par $1-\dfrac{15}{100}=0{,}85$.

53.1 c) Baisser un prix de 30 % revient à le multiplier par $1-\dfrac{30}{100}=0{,}7$. On trouve $60\,€\times 0{,}7 = 42\,€$.

53.1 d) Augmenter une population de 200 % revient à la multiplier par $1+\dfrac{200}{100}=3$.

53.2 a) Augmenter de 30 % revient à multiplier par $1+\dfrac{30}{100}=1{,}3$.

53.2 b) Augmenter de 52 % revient à multiplier par $1+\dfrac{52}{100}=1{,}52$.

53.2 d) Baisser de 10 % revient à multiplier par $1 - \dfrac{10}{100} = 0{,}9$.

53.2 f) Baisser de 100 % revient à multiplier par $1 - \dfrac{100}{100} = 0$.

53.3 a) On a $1{,}2 = 1 + \dfrac{20}{100}$; donc, multiplier par 1,2 revient à augmenter de 20 %.

53.3 c) On a $0{,}9 = 1 - \dfrac{10}{100}$; donc, multiplier par 0,9 revient à baisser de 10 %.

53.3 f) Diviser une quantité par 4 revient à la multiplier par $\dfrac{1}{4} = 1 - \dfrac{75}{100}$.

53.4 a) On note x l'effectif initial. On résout l'équation $x \times \dfrac{5}{4} = 455$.

53.4 b) On note x la taille initiale. On résout l'équation $x \times \dfrac{108}{100} = 140{,}4$.

53.4 c) On note x la somme initiale. On résout l'équation $x \times \dfrac{2}{100} = 58$.

53.5 b) On utilise la formule donnant le taux d'évolution ; on trouve $\dfrac{360 - 300}{300} = 0{,}2$.

53.5 c) On a, par définition, $20\,\% = \dfrac{20}{100} = 0{,}2$.

53.5 d) On multiplie 360 par 1,05.

53.5 e) On calcule le produit des coefficients multiplicateurs $1{,}2 \times 1{,}05 = 1{,}26$ soit une hausse de 26 %.

53.5 f) Le nombre 78 représente 26 % de 300 et non de 378.

53.6 a) Pour la première promotion, le coefficient multiplicateur est 0,7. Pour la deuxième, ce coefficient vaut 0,722 5 et pour la dernière, on obtient 0,72. Le coefficient multiplicateur le plus petit des trois nous donne la baisse la plus conséquente.

53.6 b) Notons p le prix d'un produit en euros. La première proposition donne 3 produits pour $3 \times p \times 0{,}7 = 2{,}1\,p$. La seconde donne un tarif de $2p$ et la troisième un tarif de $2{,}5p$.

53.8 a) Le coefficient multiplicateur réciproque est $\dfrac{1}{1{,}2} = \dfrac{10}{12}$ donc le taux d'évolution est $\dfrac{10}{12} - 1 = \dfrac{-1}{6}$ soit une baisse d'un sixième.

53.11 a) Soit t l'augmentation annuelle moyenne, en pourcentage. La taille du troupeau a été multipliée chaque année par $1 + \dfrac{t}{100}$ ce qui donne, après deux augmentations successives l'équation $\left(1 + \dfrac{t}{100}\right)^2 = 1 + \dfrac{44}{100}$.
Or, la racine carrée de $\dfrac{144}{100}$ vaut $\dfrac{12}{10}$ et $1 + \dfrac{t}{100}$ est positif. On obtient $1 + \dfrac{t}{100} = \dfrac{12}{10}$ d'où $t = 20\,\%$.

53.12 c) On obtient l'effectif final égal à $1{,}05 \times 1{,}06 \times 1{,}072 \times N$.

Fiche n° 54. Généralités sur les probabilités

Réponses

54.1 a) .... $\boxed{c}$

54.1 b) .... $\boxed{\dfrac{2}{3}}$

54.2 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{36}}$

54.2 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{6}}$

54.2 c) .... $\boxed{\dfrac{11}{36}}$

54.3 .... $\boxed{\dfrac{2}{3}}$

54.4 a) .... $\boxed{c}$

54.4 b) ...... $\boxed{\dfrac{3n+10}{4n+10}}$

54.5 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{10}}$

54.5 b) .... $\boxed{\dfrac{3}{5}}$

54.6 .... $\boxed{b}$

54.7 a) .... $\boxed{\dfrac{13}{14}}$

54.7 b) .... $\boxed{8}$

54.7 c) .... $\boxed{b}$

Corrigés

54.1 a) Les faces paires sont numérotées 2, 4, 6. Les faces numérotées d'un nombre multiple de 3 sont 3, 6. Comme les issues sont équiprobables, $p = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$ et $q = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$. Donc, on a $q < p$.

54.1 b) Comme les issues sont équiprobables, la probabilité d'obtenir un multiple de 3 vaut $\dfrac{1}{3}$. Ainsi, la probabilité de ne pas obtenir de multiple de 3 vaut $1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$.

54.2 a) Il y a 36 résultats possibles et le seul cas favorable est le couple $(3, 5)$.

54.2 b) Les cas favorables sont au nombre de 6 : il s'agit des cas $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$, $(5, 5)$ et $(6, 6)$. Comme les issues sont équiprobables, la probabilité vaut donc $\dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$.

54.2 c) Les cas favorables sont au nombre de 11 : il s'agit des cas $(1, 6)$, $(2, 6)$, $(3, 6)$, $(4, 6)$, $(5, 6)$, $(6, 6)$, $(6, 1)$, $(6, 2)$, $(6, 3)$, $(6, 4)$, $(6, 5)$.

54.3 On note p la probabilité de renvoyer « Pile ». La probabilité de renvoyer « Face » vaut donc $\dfrac{p}{2}$. Ainsi, on a $p + \dfrac{p}{2} = 1$, et donc $p = \dfrac{2}{3}$.

54.4 a) Le nombre de boules rouges vaut $2n$ et le nombre de boules noires vaut $n + 10$. Ainsi, le nombre total de boules vaut $n + 2n + n + 10 = 4n + 10$.

54.4 b) L'événement contraire est : « Obtenir une boule bleue ». Ainsi, on a $\mathrm{P}(\overline{A}) = \dfrac{n}{4n+10}$ et

$$\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \frac{n}{4n+10} = \frac{4n+10-n}{4n+10}.$$

54.5 a) On a $p_1 + 2p_1 + 3p_1 + 4p_1 = 1$, donc $10p_1 = 1$, puis $p_1 = \dfrac{1}{10}$.

54.5 b) La probabilité vaut $p_2 + p_4 = 2p_1 + 4p_1 = 6p_1 = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$.

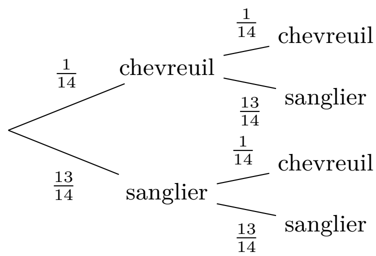
54.6 Pour obtenir la valeur 2, il faut que les deux lancers aient renvoyé la valeur 1. Ainsi, il n'y a qu'un seul cas favorable sur les 36 lancers possibles. Comme les issues sont équiprobables, la probabilité vaut $\dfrac{1}{36}$.

54.7 a) Il s'agit de l'événement complémentaire à « Obtenir un chevreuil ». Sa probabilité vaut donc $1-\dfrac{1}{14}=\dfrac{13}{14}$.

54.7 b) Comme $\dfrac{y}{112}=\dfrac{1}{14}$, alors $y=\dfrac{112}{14}=8$.

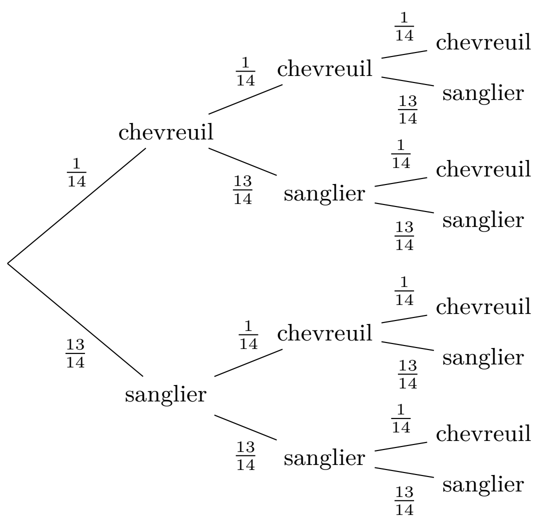
54.7 c) Si un seul animal est prélevé, la probabilité qu'on n'ait pas obtenu de chevreuil est égale à celle d'avoir obtenu un sanglier, c'est-à-dire $\dfrac{13}{14}$.

Si deux animaux sont prélevés, on peut représenter les prélèvements successifs par un arbre de probabilité :



La probabilité de n'obtenir aucun chevreuil est égale à celle de n'obtenir que des sangliers et elle vaut donc $\dfrac{13}{14}\times\dfrac{13}{14}=\left(\dfrac{13}{14}\right)^2$.

Si trois animaux sont prélevés, on ajoute une génération de plus à l'arbre de probabilité :



La probabilité de n'obtenir aucun chevreuil est égale à celle de n'obtenir que des sangliers et elle vaut donc $\dfrac{13}{14}\times\dfrac{13}{14}\times\dfrac{13}{14}=\left(\dfrac{13}{14}\right)^3$.

Si, comme demandé dans l'énoncé, 10 animaux sont prélevés, l'arbre possède 10 niveaux de branches. La probabilité de n'obtenir que des sangliers vaut alors $\underbrace{\dfrac{13}{14}\times\cdots\times\dfrac{13}{14}}_{10\text{ facteurs}}=\left(\dfrac{13}{14}\right)^{10}$.

Fiche n° 55. Probabilités d'intersections et de réunions

Réponses

55.1 a) $\boxed{\{1,2,3,4,5,7\}}$

55.1 b) $\boxed{\{3\}}$

55.1 c) $\boxed{\{4,7\}}$

55.1 d) $\boxed{\{2,4,5,6,7\}}$

55.1 e) $\boxed{\{1,6\}}$

55.1 f) $\boxed{\{1,2,3,6\}}$

55.2 a) « La carte tirée est la dame de cœur »

55.2 b) « La carte tirée est un cœur ou un trèfle »

55.2 c) « La carte tirée n'est ni un trèfle, ni un cœur »

55.2 d) $\boxed{D \cap \overline{C}}$

55.2 e) $\boxed{\overline{C} \cap \overline{T}}$

55.2 f) $\boxed{(D \cap C) \cup (D \cap T)}$

55.3 a) $\boxed{0{,}9}$

55.3 b) $\boxed{\dfrac{11}{12}}$

55.4 a) $\boxed{0{,}234}$

55.4 b) $\boxed{0{,}305}$

55.4 c) $\boxed{\dfrac{3}{8}}$

55.4 d) $\boxed{\dfrac{1-p}{12}}$

55.5 a) $\boxed{0{,}95}$

55.5 b) $\boxed{0{,}12}$

55.5 c) $\boxed{0{,}99}$

55.6 a) $\boxed{\dfrac{3}{5}}$

55.6 b) $\boxed{\dfrac{13}{20}}$

55.6 c) $\boxed{\dfrac{9}{20}}$

55.6 d) $\boxed{\dfrac{4}{5}}$

55.6 e) $\boxed{\dfrac{1}{5}}$

55.7 a) $\boxed{\dfrac{6}{35}}$

55.7 b) $\boxed{\dfrac{4}{7}}$

55.7 c) $\boxed{\dfrac{2}{7}}$

55.7 d) $\boxed{\dfrac{24}{35}}$

55.8 a) non

55.8 b) $\boxed{\dfrac{a+b-d}{N}}$

55.8 c) $\boxed{\dfrac{N-a-b+d}{N}}$

55.8 d) $\boxed{\dfrac{b-d}{N}}$

55.8 e) $\boxed{\dfrac{a+c-N}{N}}$

55.8 f) $\boxed{\dfrac{N-c-d}{N}}$

55.8 g) $\boxed{\dfrac{2N-a-b-c}{N}}$

Corrigés

55.1 d) On a $\overline{A} \cup C = \{4,5,6,7\} \cup \{2,4,7\} = \{2,4,5,6,7\}$.

55.1 e) On a $\overline{B} \cap \overline{C} = \{1,2,6\} \cap \{1,3,5,6\} = \{1,6\}$.

55.1 f) On a $A \cup (\overline{B} \cap \overline{C}) = \{1,2,3\} \cup \{1,6\} = \{1,2,3,6\}$.

55.2 a) L'événement $C \cap D$ se réalise si, et seulement si, les événements C et D se réalisent tous les deux.

55.2 b) L'événement $C \cup T$ se réalise si, et seulement si, l'un des deux événements C ou T se réalise.

55.2 c) L'événement $\overline{T} \cap \overline{C}$ se réalise si, et seulement si, aucun des deux événements T et C ne se réalise.

55.2 d) L'événement se réalise si, et seulement si, D se réalise et C ne se réalise pas.

55.2 e) L'événement se réalise si, et seulement si, aucun des deux événements C et T ne se réalise.

55.2 f) L'événement se réalise si, et seulement si, l'un des deux cas de figure suivants se produit :
- ou bien les événements D et C se réalisent tous deux ;
- ou bien les événements D et T se réalisent tous deux.

55.3 a) On a $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B) = 0{,}9$.

55.3 b) On a $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B) = \dfrac{9}{12} + \dfrac{6}{12} - \dfrac{4}{12} = \dfrac{11}{12}$.

55.4 a) On a $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cup B) = 0{,}234$.

55.4 b) On a $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cup B) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A}) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cup B) = 0{,}305$.

55.4 c) On a :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B) &= \mathrm{P}(A \cup B) + \mathrm{P}(A \cap B) - \mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \cup B) + \mathrm{P}(A \cap B) - 1 + \mathrm{P}(\overline{A}) \\ &= \frac{15}{24} + \frac{8}{24} - \frac{24}{24} + \frac{10}{24} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}.\end{aligned}$$

55.4 d) On a $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + 1 - \mathrm{P}(\overline{B}) - \mathrm{P}(A \cup B)$; donc, on a :

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1-p}{6} + 1 - \frac{2p+1}{3} - \frac{3-3p}{4} = \frac{2 - 2p + 12 - 8p - 4 - 9 + 9p}{12} = \frac{1-p}{12}.$$

55.5 a) On a $C = \overline{A}$ donc $\mathrm{P}(C) = \mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A) = 0{,}95$.

55.5 b) On a $D = A \cup B$ donc $\mathrm{P}(D) = \mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B) = 0{,}12$.

55.5 c) L'événement contraire de E est : « Les deux serveurs sont en panne ». On a donc $\overline{E} = A \cap B$; autrement dit, on a $E = \overline{A \cap B}$, d'où $\mathrm{P}(E) = 1 - \mathrm{P}(A \cap B) = 0{,}99$.

55.6 a) On considère ici l'ensemble Ω des 200 clients, muni de sa probabilité uniforme P. On a alors :

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{120}{200} = \frac{3}{5}.$$

55.6 b) De même, on a $\mathrm{P}(B) = \dfrac{\mathrm{Card}(B)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \dfrac{130}{200} = \dfrac{13}{20}$.

55.6 c) L'événement $A \cap B$ est : « Le client a commandé une entrée et un dessert ». On a donc de même :

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{\mathrm{Card}(A \cap B)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{90}{200} = \frac{9}{20}.$$

55.6 d) L'événement considéré est $A \cup B$. On a :

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B) = \frac{12}{20} + \frac{13}{20} - \frac{9}{20} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}.$$

55.6 e) L'événement considéré est l'événement contraire de $A \cup B$. Sa probabilité est donc $1 - \mathrm{P}(A \cup B) = \dfrac{1}{5}$.

55.7 a) On considère ici l'ensemble Ω des 175 élèves, muni de sa probabilité uniforme P. On a alors :

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{30}{175} = \frac{2 \times 3 \times 5}{5 \times 5 \times 7} = \frac{6}{35}.$$

55.7 b) On a $\mathrm{P}(F) = \dfrac{\mathrm{Card}(F)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \dfrac{100}{175} = \dfrac{4 \times 25}{7 \times 25} = \dfrac{4}{7}$.

55.7 c) On a $\mathrm{P}(T) = \dfrac{\mathrm{Card}(T)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \dfrac{50}{175} = \dfrac{2 \times 25}{7 \times 25} = \dfrac{2}{7}$.

55.7 d) L'événement considéré est $F \cup T$. On a $\mathrm{P}(F \cup T) = \mathrm{P}(F) + \mathrm{P}(T) - \mathrm{P}(F \cap T)$. Or, on a :

$$\mathrm{P}(F \cap T) = \frac{\mathrm{Card}(F \cap T)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{30}{175} = \frac{6}{35}.$$

On a donc $\mathrm{P}(F \cup T) = \dfrac{20}{35} + \dfrac{10}{35} - \dfrac{6}{35} = \dfrac{24}{35}$.

55.8 a) On n'a pas $N = a + b + c$: en effet, si (par exemple) des élèves ont mangé à la fois un yaourt *et* un fruit, alors on aura $a + b + c > N$.

55.8 b) L'événement considéré est $A \cup B$. On a :

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} + \frac{\mathrm{Card}(B)}{\mathrm{Card}(\Omega)} - \frac{\mathrm{Card}(A \cap B)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{a + b - d}{N}.$$

55.8 c) On a $D = \overline{A \cup B}$ donc $\mathrm{P}(D) = 1 - \mathrm{P}(A \cup B) = \dfrac{N - a - b + d}{N}$.

55.8 d) L'événement considéré est $B \cap C$. Comme aucun élève n'a pris un fruit seul, l'événement $B \cap A$ et l'événement $B \cap C$ ont pour réunion B. Comme ils sont incompatibles, on a $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B \cap A) + \mathrm{P}(B \cap C)$. D'où :

$$\mathrm{P}(B \cap C) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(B \cap A) = \frac{b - d}{N}.$$

55.8 e) L'événement considéré est $A \cap C$. On a $\mathrm{P}(A \cap C) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(A \cup C)$. Or, l'événement $A \cup C$ est certain puisqu'aucun élève n'a pris un fruit seul et chacun a pris au moins dessert. On a donc :

$$\mathrm{P}(A \cup C) = 1, \text{ d'où } \mathrm{P}(A \cap C) = \frac{a + c - N}{N}.$$

55.8 f) Les événements E, $A \cap B$ et $A \cap C$ sont deux à deux incompatibles et ont pour réunion A.

On a donc $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(E) + \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(A \cap C)$ et donc :

$$\mathrm{P}(E) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B) - \mathrm{P}(A \cap C) = \frac{a - d - (a + c - N)}{N} = \frac{N - c - d}{N}.$$

55.8 g) Puisqu'aucun élève n'a pris un fruit seul, l'événement considéré est $F = D \cup E$. Comme D et E sont incompatibles, on a $\mathrm{P}(F) = \mathrm{P}(D) + \mathrm{P}(E) = \dfrac{N - a - b + d}{N} + \dfrac{N - c - d}{N} = \dfrac{2N - a - b - c}{N}$.

Fiche n° 56. Probabilités conditionnelles

Réponses

56.1 a) $\boxed{\dfrac{2}{3}}$

56.1 b) $\boxed{\dfrac{1}{3}}$

56.1 c) $\boxed{\dfrac{1}{6}}$

56.1 d) $\boxed{\dfrac{1}{4}}$

56.1 e) $\boxed{\dfrac{1}{9}}$

56.1 f) $\boxed{\dfrac{1}{4}}$

56.2 a) voir corrigé

56.2 b) voir corrigé

56.3 a) $\boxed{\dfrac{15}{28}}$

56.3 b) $\boxed{\dfrac{32}{45}}$

56.3 c) $\boxed{\dfrac{20}{37}}$

56.4 a) $\boxed{\dfrac{3}{32}}$

56.4 b) $\boxed{\dfrac{9}{28}}$

56.5 a) voir corrigé

56.5 b) $\boxed{0{,}56}$

56.5 c) $\boxed{0{,}6}$

56.5 d) $\boxed{\dfrac{1}{15}}$

56.6 a) $\boxed{\dfrac{3}{10}}$

56.6 b) $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

56.6 c) $\boxed{\dfrac{2}{5}}$

56.6 d) $\boxed{\dfrac{3}{8}}$

56.7 a) $\boxed{0{,}6}$

56.7 b) $\boxed{\dfrac{3}{50}}$

56.7 c) $\boxed{\dfrac{33}{50}}$

56.8 a) $\boxed{\dfrac{N+M-n}{N+M}}$

56.8 b) $\boxed{\dfrac{n-m}{N}}$

56.8 c) voir corrigé

56.8 d) $\boxed{\dfrac{124}{937}}$

56.8 e) $\boxed{\dfrac{87}{124}}$

56.8 f) $\boxed{\dfrac{17}{30}}$

56.9 a) $\boxed{\dfrac{260}{260+16}}$

56.9 b) $\boxed{\dfrac{16}{16+1+20+1}}$

56.9 c) $\boxed{\frac{260+200+1}{260+16+200+20+1+1}}$

56.10 a) voir corrigé

56.10 b) $\boxed{0{,}26}$

56.10 c) $\boxed{\dfrac{9}{13}}$

56.10 d) $\boxed{\dfrac{1}{37}}$

56.10 e) voir corrigé

Corrigés

56.1 e) On sait que $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}_A(B) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{9}$.

56.1 f) On sait que $\mathrm{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \mathrm{P}(\overline{A})\,\mathrm{P}_{\overline{A}}(\overline{B}) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4}$.

56.2 a) On a :

$\mathrm{P}(A)$	$\mathrm{P}_A(B)$	$\mathrm{P}(A \cap B)$
$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{4}{5}$	$\dfrac{2}{5}$
$\dfrac{14}{27}$	$\dfrac{3}{7}$	$\dfrac{2}{9}$
$\dfrac{3}{5}$	$\dfrac{4}{5}$	$\dfrac{12}{25}$

56.2 b) On a :

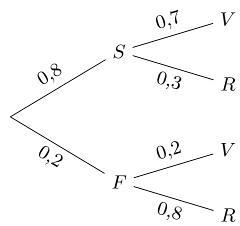
$\mathrm{P}(A)$	$\mathrm{P}_A(B)$	$\mathrm{P}(A \cap B)$
$\dfrac{3}{5}$	$\dfrac{10}{27}$	$\dfrac{2}{9}$
$\dfrac{7}{13}$	$\dfrac{3}{28}$	$\dfrac{3}{52}$
$\dfrac{2}{3}$	1	$\dfrac{2}{3}$

56.3 a) On utilise la formule rappelée dans l'énoncé pour déduire $\mathrm{P}_B(A) = \dfrac{\mathrm{P}_A(B)\,\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B)} = \dfrac{\frac{3}{8} \times \frac{4}{7}}{\frac{2}{5}} = \dfrac{30}{56} = \dfrac{15}{28}$.

56.4 a) On a $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A}) = \dfrac{1}{8}$ et $\mathrm{P}(B) = \dfrac{7}{9}$. Alors, $\mathrm{P}_B(A) = \dfrac{\frac{1}{8} \times \frac{7}{12}}{\frac{7}{9}} = \dfrac{3}{32}$.

56.4 b) On a $\mathrm{P}_A(B) = 1 - \mathrm{P}_A(\overline{B}) = \dfrac{6}{7}$ et $\mathrm{P}(\overline{B}) = 1$. Alors, $\mathrm{P}_B(A) = \dfrac{\frac{3}{8} \times \frac{6}{7}}{1} = \dfrac{9}{28}$.

56.5 a) On a l'arbre suivant :



56.5 b) On lit l'arbre : $\mathrm{P}(S \cap V) = 0{,}8 \times 0{,}7 = 0{,}56$.

56.5 c) On a, d'après la formule des probabilités totales : $\mathrm{P}(V) = \mathrm{P}(S \cap V) + \mathrm{P}(F \cap V) = 0{,}56 + 0{,}04 = 0{,}6$.

56.5 d) On a $\mathrm{P}_V(F) = \dfrac{\mathrm{P}(F \cap V)}{\mathrm{P}(V)} = \dfrac{0{,}04}{0{,}6} = \dfrac{4}{60} = \dfrac{1}{15}$.

56.6 c) D'après la formule des probabilités totales, $\mathrm{P}(R) = \mathrm{P}(S_1 \cap R) + \mathrm{P}(S_2 \cap R) = \dfrac{3}{20} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{2}{5}$.

56.6 d) On sait que $\mathrm{P}_R(S_1) = \dfrac{\mathrm{P}(R \cap S_1)}{\mathrm{P}(R)} = \dfrac{3}{8}$.

56.7 b) On note EG l'événement « Élie vise à gauche » et A l'événement « le gardien arrête le tir ». On définit de même ED pour « Élie vise à droite ». On a : $\mathrm{P}(EG \cap A) = \dfrac{3}{10} \times \dfrac{2}{10} = \dfrac{3}{50}$.

56.7 c) On a : $\mathrm{P}(ED \cap A) = \dfrac{7}{10} \times \dfrac{4}{10} = \dfrac{14}{50}$.

La probabilité que le gardien arrête le tir est $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(ED \cap A) + \mathrm{P}(EG \cap A) = \dfrac{17}{50}$.

Ainsi, la probabilité qu'il y ait but est $\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A) = 1 - \dfrac{17}{50} = \dfrac{33}{50}$.

56.8 a) Arthur a lu n livres sur $N + M$, la probabilité qu'il l'ait déjà lu est donc de $\dfrac{n}{N+M}$.

On déduit donc que la probabilité qu'il ne l'ait pas lu est de $1 - \dfrac{n}{N+M} = \dfrac{N+M-n}{N+M}$.

56.8 b) Il y a N livres en français et il en a lu $n-m$ en français. La probabilité est donc de $\dfrac{n-m}{N}$.

56.8 c) On a le tableau suivant :

Prénom	**Nombre de livres en français lus**	**Nombre de livres en anglais lus**	**Total**
Arthur	208	28	236
Ben	37	87	124

56.8 d) Ben a lu 124 livres sur les 937, la probabilité qu'il l'ait déjà lu est donc de $\dfrac{124}{937}$.

56.8 f) Arthur et Ben on déjà lu $13+17=30$ livres en commun. Ainsi, la probabilité qu'il soit en français, sachant qu'ils l'ont déjà lu, est de $\dfrac{17}{30}$.

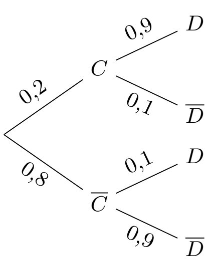
56.9 a) Il y a $260+16$ élèves du groupe A. La probabilité qu'elle soit du « rhésus $-$ » vaut $\dfrac{260}{260+16}\left(=\dfrac{65}{69}\right)$.

56.9 b) Il y a $16+1+20+1=38$ personnes du « rhésus $-$ ».

La probabilité qu'elle soit du groupe A est donc de $\dfrac{16}{16+1+20+1}\left(=\dfrac{8}{19}\right)$.

56.9 c) Il y a $260+16+200+20+1+1=498$ personnes qui ne sont pas du groupe B. La probabilité qu'elle soit du « rhésus + » est donc de $\dfrac{260+200+1}{260+16+200+20+1+1}\left(=\dfrac{461}{498}\right)$.

56.10 a) On a l'arbre suivant :

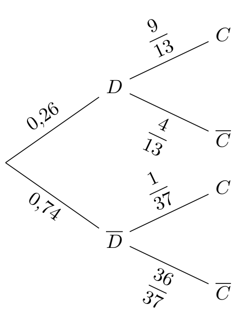


56.10 b) On a $\mathrm{P}(D)=0{,}2\times0{,}9+0{,}8\times0{,}1=0{,}18+0{,}08=0{,}26$.

56.10 c) On a $\mathrm{P}_D(C)=\dfrac{0{,}2\times0{,}9}{0{,}26}=\dfrac{0{,}18}{0{,}26}=\dfrac{9}{13}$.

56.10 d) On a $\mathrm{P}(\overline{D})=0{,}74$ et $\mathrm{P}(\overline{D}\cap C)=0{,}02$ donc $\mathrm{P}_{\overline{D}}(C)=\dfrac{0,02}{0,74}=\dfrac{2}{74}=\dfrac{1}{37}$.

56.10 e) On a l'arbre suivant :



Fiche n° 57. Diviseurs et multiples

Réponses

57.1 a) . . . . $\boxed{3 \times 152 + 1}$

57.1 b) . . . . $\boxed{6 \times 145 + 3}$

57.1 c) . . . . $\boxed{12 \times 699 + 6}$

57.1 d) . . . . $\boxed{15 \times 449 + 0}$

57.1 e) . . . . $\boxed{11 \times 3\,513 + 4}$

57.1 f) . . . . $\boxed{31 \times 1\,851 + 2}$

57.2 . . . . $\boxed{\text{voir corrigé}}$

57.3 a) . . . . $\boxed{\{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}}$

57.3 b) . . . . . $\boxed{\{1, 3, 9, 11, 33, 99\}}$

57.3 c) . . . . $\boxed{\{1, 5, 25, 125\}}$

57.3 d) . . $\boxed{\{1, 2, 4, 5, 8, 10, 19, 20, 38, 40, 76, 95, 152, 190, 380, 760\}}$

57.4 a) . . . . $\boxed{9}$

57.4 b) . . . . $\boxed{22}$

57.4 c) . . . . $\boxed{135}$

57.4 d) . . . . $\boxed{45}$

57.5 a) . . . . $\boxed{a = 1 \text{ et } b = 2}$

57.5 b) . . . . . $\boxed{a = 2 \text{ et } b = c = 1}$

57.5 c) . . . . . $\boxed{a = c = 1 \text{ et } b = 2}$

57.5 d) . . . . . $\boxed{a = 4 \text{ et } b = c = 2}$

57.5 e) . . . . $\boxed{a = b = c = 2}$

57.6 a) . . . . $\boxed{\text{pair}}$

57.6 b) . . . . $\boxed{\text{impair}}$

57.6 c) . . . . $\boxed{\text{pair}}$

57.6 d) . . . . $\boxed{\text{impair}}$

57.6 e) . . . . $\boxed{\text{impair}}$

57.6 f) . . . . $\boxed{\text{pair}}$

Corrigés

57.1 d) On a :

$$\begin{array}{rcccc|l}
 & 6 & 7 & 3 & 5 & 1\,5 \\ \cline{6-6}
- & 6 & 0 & & & 4\,4\,9 \\ \cline{2-3}
 & & 7 & 3 & & \\
- & & 6 & 0 & & \\ \cline{3-4}
 & & 1 & 3 & 5 & \\
- & & 1 & 3 & 5 & \\ \cline{3-5}
 & & & & 0 &
\end{array}$$

Cela s'écrit $6\,735 = 15 \times 449 + 0$.

Nous sommes dans le cas où le reste est nul, nous venons donc de montrer que 15 divise $6\,735$.

. . . .

57.1 f) On a :

$$\begin{array}{rccccc|l}
 & 5 & 7 & 3 & 8 & 3 & 3\,1 \\ \cline{7-7}
- & 3 & 1 & & & & 1\,8\,5\,1 \\ \cline{2-3}
 & 2 & 6 & 3 & & & \\
- & 2 & 4 & 8 & & & \\ \cline{2-4}
 & & 1 & 5 & 8 & & \\
- & & 1 & 5 & 5 & & \\ \cline{3-5}
 & & & & 3 & 3 & \\
- & & & & 3 & 1 & \\ \cline{5-6}
 & & & & & 2 &
\end{array}$$

Cela s'écrit $57\,383 = 31 \times 1\,851 + 2$.

. . . .

57.2 Pour compléter rapidement ces tableaux, il faut utiliser les critères de divisibilité. On obtient alors :

Nombre	2	3	5	9	10
252	✓	✓		✓	
845			✓		
9 945		✓	✓	✓	
12 345		✓	✓		
21 879		✓		✓	

Nombre	2	3	5	9	10
1 054	✓				
15 606	✓	✓		✓	
110 751		✓			
142 290	✓	✓	✓	✓	✓
191 479					

57.3 a) La liste des diviseurs positifs de 100 est $\{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$. Si l'on voulait la liste complète des diviseurs, il faudrait rajouter tous les opposés de ces nombres.

57.3 b) La liste des diviseurs positifs de 99 est $\{1, 3, 9, 11, 33, 99\}$.

57.4 a) Comme dans l'exercice précédent, on cherche les diviseurs de 45 et de 72. On trouve que les diviseurs positifs de 45 sont $\{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$ et ceux de 72 sont $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}$. On remarque alors que le plus grand nombre qui divise à la fois 45 et 72 est 9.

57.4 b) Les diviseurs positifs de 154 sont $\{1, 2, 7, 11, 14, 22, 77, 154\}$ et ceux de 242 sont $\{1, 2, 11, 22, 121, 242\}$. On remarque alors que le plus grand diviseur commun de 154 et 242 est 22.

57.4 c) On pourrait faire comme précédemment, mais comme toujours, il est bon d'analyser la situation avant de se lancer. Ici, le plus grand diviseur de 135 est évidemment 135. Le plus grand diviseur commun de 135 et 270 est donc inférieur ou égal à 135. Mais on remarque que $270 = 135 \times 2$. Ainsi, 135 est également un diviseur de 270, et par suite, le plus grand diviseur commun de 135 et 270 est 135.

57.5 a) Il est inutile d'aller chercher loin. Un bon contre-exemple est celui qui met le doigt sur le problème le plus simplement possible. Bien sûr, il existe une infinité de bonnes réponses à cet exercice. Ici, 1 divise 2 mais 2 ne divise pas 1.

57.5 b) On constate que 2 divise $1 + 1 = 2$, bien que 2 ne divise pas 1.

57.6 a) Comme a est un entier pair et b est impair, fixons pour toute la suite deux entiers p et q tels que $a = 2p$ et $b = 2q + 1$. Ainsi, $a^2 = (2p)^2 = 4p^2 = 2 \times (2p^2)$. Par définition, a^2 est donc pair.

57.6 b) Sur le même principe que la question précédente, on écrit

$$b^2 = (2q + 1)^2 = 4q^2 + 4q + 1 = 2 \times (2q^2 + 2q) + 1.$$

Ainsi, b^2 est impair par définition.

57.6 c) On a $ab = 2p \times (2q + 1) = 2 \times p(2q + 1)$, où $p(2q + 1)$ est un entier. Ainsi, ab est pair par définition.

57.6 e) Pour changer, tirons des leçons des premières questions. Nous savons déjà que a^2 est pair. De plus, le produit de deux nombres impairs est impair, si cela nous échappe, on peut le redémontrer comme précédemment. Ainsi, $3b$ est impair. Enfin, la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est impaire, donc $a^2 + 3b$ est impair.

Fiche n° 58. Nombres premiers et applications

Réponses

58.1 a) .... $\boxed{2}$

58.1 b) .... $\boxed{3}$

58.1 c) .... $\boxed{5}$

58.1 d) .... $\boxed{7}$

58.1 e) .... $\boxed{11}$

58.1 f) .... $\boxed{13}$

58.1 g) .... $\boxed{17}$

58.1 h) .... $\boxed{19}$

58.1 i) .... $\boxed{23}$

58.2 a) .... $\boxed{3 \times 5}$

58.2 b) .... $\boxed{3 \times 7}$

58.2 c) .... $\boxed{2^2 \times 5}$

58.2 d) .... $\boxed{7^2}$

58.2 e) .... $\boxed{2 \times 5^2}$

58.2 f) .... $\boxed{2^3 \times 3}$

58.3 a) .... $\boxed{2 \times 3 \times 5^2}$

58.3 b) .... $\boxed{2^2 \times 5^2}$

58.3 c) .... $\boxed{3^2 \times 11}$

58.3 d) .... $\boxed{2^3 \times 3^2 \times 5}$

58.3 e) .... $\boxed{2^4 \times 5}$

58.3 f) .... $\boxed{2^6}$

58.4 a) .... $\boxed{\dfrac{2^2 \times 3 \times 7}{2^3 \times 3^4}}$

58.4 b) .... $\boxed{\dfrac{2 \times 5^2}{2^3 \times 3 \times 5^2}}$

58.4 c) .... $\boxed{\dfrac{2^4 \times 17^2}{2 \times 3^3 \times 11}}$

58.4 d) .... $\boxed{\dfrac{2^2 \times 3 \times 5^4}{2^4 \times 3 \times 5 \times 11}}$

58.5 a) .... $\boxed{\dfrac{5}{6}}$

58.5 b) .... $\boxed{\dfrac{3}{4}}$

58.5 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{5}}$

58.5 d) .... $\boxed{\dfrac{2}{5}}$

58.6 a) .... $\boxed{\dfrac{20}{9}}$

58.6 b) .... $\boxed{5}$

58.6 c) .... $\boxed{\dfrac{27}{11}}$

58.6 d) .... $\boxed{\dfrac{98}{363}}$

58.7 a) .... $\boxed{9}$

58.7 b) .... $\boxed{9}$

58.7 c) .... $\boxed{\{2, 3, 5, 7\}}$

58.7 d) .... $\boxed{\text{non}}$

58.7 e) .... $\boxed{\text{non}}$

58.7 f) .... $\boxed{\text{non}}$

58.7 g) .... $\boxed{\text{non}}$

58.7 h) .... $\boxed{\text{oui}}$

Corrigés

58.3 a) On a $150 = 10 \times 15 = 2 \times 5 \times 3 \times 5 = 2 \times 3 \times 5^2$.

58.3 b) On a $100 = (10)^2 = (2 \times 5)^2 = 2^2 \times 5^2$.

58.3 c) On a $99 = 3 \times 33 = 3 \times 3 \times 11 = 3^2 \times 11$.

58.3 d) On a $360 = 36 \times 10 = 4 \times 9 \times 2 \times 5 = 2^3 \times 3^2 \times 5$.

58.3 e) On a $80 = 8 \times 10 = 2^4 \times 5$.

58.3 f) On a $64 = 32 \times 2 = 16 \times 2 \times 2 = 2^4 \times 2 \times 2 = 2^6$.

58.4 a) On écrit $21 = 3 \times 7$ et $4 = 2^2$, puis $6^2 = 2^2 \times 3^2$ et $18 = 2 \times 3^2$. Finalement, on trouve $\dfrac{2^2 \times 3 \times 7}{2^3 \times 3^4}$.

58.4 b) On écrit $25 = 5^2$, puis $30 = 2 \times 3 \times 5$ et $20 = 2^2 \times 5$. Finalement, on trouve $\dfrac{2 \times 5^2}{2^3 \times 3 \times 5^2}$.

58.4 c) On écrit $16 = 2^4$, puis $22 = 2 \times 11$ et $3 \times 9 = 3^3$. Finalement, on trouve $\dfrac{2^4 \times 17^2}{2 \times 3^3 \times 11}$.

58.4 d) On écrit $12 = 2^2 \times 3$ et $25^2 = 5^4$, puis $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ et $44 = 2^2 \times 11$. Finalement, on trouve :

$$\frac{2^2 \times 3 \times 5^4}{2^4 \times 3 \times 5 \times 11}.$$

58.5 a) On a $\dfrac{10}{12} = \dfrac{2 \times 5}{2^2 \times 3} = \dfrac{5}{2 \times 3} = \dfrac{5}{6}$.

58.5 b) On a $\dfrac{18}{24} = \dfrac{2 \times 3^2}{2^3 \times 3} = \dfrac{3}{4}$.

58.5 c) On a $\dfrac{26}{130} = \dfrac{2 \times 13}{2 \times 5 \times 13} = \dfrac{1}{5}$.

58.5 d) On a $\dfrac{100}{250} = \dfrac{10 \times 10}{25 \times 10} = \dfrac{10}{25} = \dfrac{2 \times 5}{5 \times 5} = \dfrac{2}{5}$.

58.6 a) On a $\dfrac{1800}{810} = \dfrac{180}{81} = \dfrac{10 \times 18}{9 \times 9} = \dfrac{2 \times 5 \times 2 \times 9}{3^4} = \dfrac{2^2 \times 3^2 \times 5}{3^4} = \dfrac{20}{9}$.

58.6 b) On a $\dfrac{85}{17} = \dfrac{5 \times 17}{17} = 5$.

58.6 c) On écrit $3 \times 9 \times 99 = 3^5 \times 11$ et $33^2 = 3^2 \times 11^2$ pour aboutir à $\dfrac{3^3}{11} = \dfrac{27}{11}$.

58.6 d) On écrit $14 = 2 \times 7$, $49 = 7^2$ et $2\sqrt{81} = 2 \times 3^2$, puis $33^2 = 3^2 \times 11^2$ et $42 = 2 \times 3 \times 7$. D'où :

$$\frac{14 \times 49 \times 2\sqrt{81}}{33^2 \times 42} = \frac{2 \times 7^2}{3 \times 11^2} = \frac{98}{363}.$$

58.7 a) On a $9^2 = 81$ et $(9+1)^2 = 100$. Ainsi, 9 est bien solution des inéquations proposées.

58.7 c) D'après les questions précédentes, on a $\sqrt{97} < 10$. Donc, l'ensemble des nombres premiers p qui sont tels que $1 < p < \sqrt{97}$ est $\{2, 3, 5, 7\}$.

58.7 e) On a $97 = 32 \times 3 + 1$, donc 3 n'est pas un diviseur de 97.

58.7 g) On a $97 = 13 \times 7 + 6$, donc 7 n'est pas un diviseur de 97.

58.7 h) Grâce à la propriété admise, il suffit de tester la divisibilité de 97 par les nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{97}$; donc, d'après ce qui précède, il suffit de tester la divisibilité de 97 par $2, 3, 5$ et 7.
Comme aucun d'eux n'est un diviseur, on en déduit que 97 est un nombre premier.