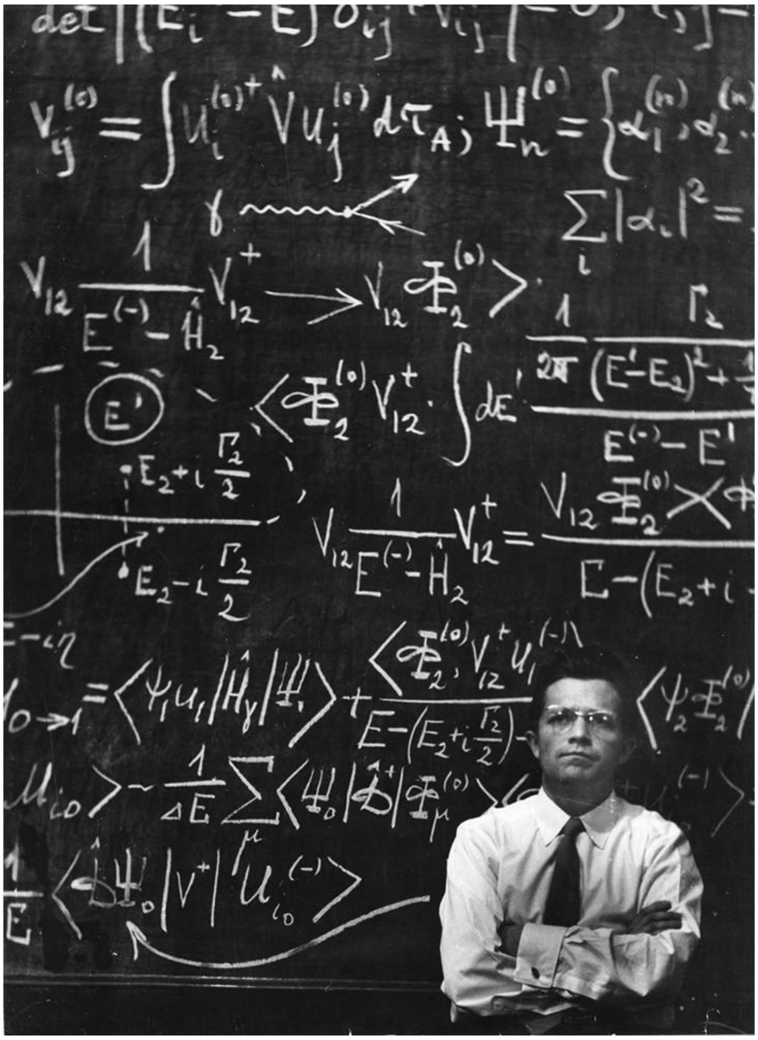
Cahier de calcul

— réponses et corrigés —



Duel, Vsevolold TARASEVITCH (1960)

Photographie du physicien V. V. BALACHOV devant son tableau.

Page web du *Cahier de calcul*,
dernières versions

Ce cahier de calcul a été écrit collectivement.

Coordination

Colas BARDAVID

Équipe des participants

Vincent BAYLE, Romain BASSON, Olivier BERTRAND, Ménard BOURGADE, Julien BUREAUX, Alain CAMANES, Mathieu CHARLOT, Mathilde COLIN DE VERDIÈRE, Keven COMMAULT, Miguel CONCY, Rémy EUPHERTE, Hélène GROS, Audrey HECHNER, Florian HECHNER, Marie HÉZARD, Nicolas LAILLET, Valérie LE BLANC, Thierry LIMOGES, Quang-Thai NGO, Xavier PELLEGRIN, Fabien PELLEGRINI, Jean-Louis POURTIER, Valérie ROBERT, Jean-Pierre TÉCOURT, Guillaume TOMASINI, Marc TENTI

Le pictogramme de l'horloge a été créé par Ralf SCHMITZER (The Noun Project).

La photographie de la couverture (*Duel*, Vsevolold Tarasevitch) est propriété du Centre de photographie Les Frères Lumière (Moscou).

Version 1.2.2 — 25 août 2024

Sommaire

Fiche n° 1. Fractions

Réponses

1.1 a) .... $\boxed{\dfrac{4}{5}}$

1.1 b) .... $\boxed{2^5}$

1.1 c) .... $\boxed{3}$

1.1 d) .... $\boxed{-2\times 3^{3k-2}}$

1.2 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{6}}$

1.2 b) .... $\boxed{\dfrac{7}{15}}$

1.2 c) .... $\boxed{9}$

1.2 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{9}}$

1.3 a) .... $\boxed{247}$

1.3 b) .... $\boxed{\dfrac{203}{24}}$

1.3 c) .... $\boxed{\dfrac{-10}{3}}$

1.3 d) .... $\boxed{1\ 000}$

1.4 .... $\boxed{\dfrac{16}{35}}$

1.5 a) .... $\boxed{2\ 022}$

1.5 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

1.5 c) .... $\boxed{1}$

1.5 d) .... $\boxed{2}$

1.6 a) .... $\boxed{\dfrac{-1}{n(n+1)^2}}$

1.6 b) .... $\boxed{-\dfrac{ab}{a-b}}$

1.6 c) .... $\boxed{\dfrac{3}{2}n}$

1.7 .... $\boxed{\dfrac{n^3+n}{n+1}}$

1.8 a) .... $\boxed{4+\dfrac{5}{6}}$

1.8 b) .... $\boxed{1+\dfrac{1}{k-1}}$

1.8 c) .... $\boxed{3+\dfrac{5}{x-2}}$

1.9 .... $\boxed{2t}$

1.10 a) .... $\boxed{\dfrac{3}{5}>\dfrac{5}{9}}$

1.10 b) .... $\boxed{\dfrac{12}{11}>\dfrac{10}{12}}$

1.10 c) .... $\boxed{\dfrac{125}{25}=\dfrac{105}{21}}$

1.11 .... $\boxed{\text{Non}}$

1.12 .... $\boxed{A>B}$

Corrigés

1.1 a) $\dfrac{32}{40}=\dfrac{8\times 4}{8\times 5}=\dfrac{4}{5}$

1.1 b) $8^3\times\dfrac{1}{4^2}=(2\times 4)^3\times\dfrac{1}{4^2}=2^3\times 4^3\times\dfrac{1}{4^2}=2^3\times 4=2^5$

1.1 c) $\dfrac{27^{-1}\times 4^2}{3^{-4}\times 2^4}=\dfrac{(3^3)^{-1}\times(2^2)^2}{3^{-4}\times 2^4}=\dfrac{3^4}{3^3}=3$

1.1 d) On a : $\dfrac{(-2)^{2k+1}\times 3^{2k-1}}{4^k\times 3^{-k+1}}=\dfrac{(-2)\times(-2)^{2k}\times 3^{2k}\times 3^{-1}}{4^k\times 3^{-k}\times 3}=\dfrac{(-2)\times 4^k\times 3^{2k}\times 3^k}{4^k\times 3^2}=-2\times 3^{3k-2}$.

1.2 a) On met au même dénominateur : $\dfrac{2}{4}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2\times 3}{4\times 3}-\dfrac{1\times 4}{3\times 4}=\dfrac{6}{12}-\dfrac{4}{12}=\dfrac{6-4}{12}=\dfrac{2}{12}=\dfrac{1}{6}$.

1.2 b) On transforme 0,2 en fraction et on met au même dénominateur :

$$\frac{2}{3}-0{,}2=\frac{2}{3}-\frac{2}{10}=\frac{2\times 10}{3\times 10}-\frac{2\times 3}{10\times 3}=\frac{20}{30}-\frac{6}{30}=\frac{20-6}{30}=\frac{14}{30}=\frac{7\times 2}{15\times 2}=\frac{7}{15}.$$

1.2 c) Pour multiplier des fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux :

$$\frac{36}{25}\times\frac{15}{12}\times 5=\frac{36}{25}\times\frac{15}{12}\times\frac{5}{1}=\frac{36\times 15\times 5}{25\times 12\times 1}=\frac{12\times 3\times 5\times 3\times 5}{5\times 5\times 12\times 1}=\frac{3\times 3}{1}=\frac{9}{1}=9.$$

1.2 d) Pour diviser une fraction par une autre, on la multiplie par la fraction inverse de la deuxième fraction :

$$-\frac{2}{15}\div\left(-\frac{6}{5}\right)=-\frac{2}{15}\times\left(-\frac{5}{6}\right)=\frac{2}{15}\times\frac{5}{6}=\frac{2\times 5}{15\times 6}=\frac{2\times 5}{3\times 5\times 2\times 3}=\frac{1}{9}.$$

1.3 a) On développe :

$$(2\times3\times5\times7)(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}) = \frac{2\times3\times5\times7}{2}+\frac{2\times3\times5\times7}{3}+\frac{2\times3\times5\times7}{5}+\frac{2\times3\times5\times7}{7}$$
$$= 3\times5\times7+2\times5\times7+2\times3\times7+2\times3\times5 = 105+70+42+30 = 247.$$

1.3 b) On simplifie d'abord, puis on applique les règles de calcul :

$$\left(\frac{136}{15}-\frac{28}{5}+\frac{62}{10}\right)\times\frac{21}{24} = \left(\frac{136}{15}-\frac{28}{5}+\frac{31}{5}\right)\times\frac{7}{8}$$
$$= \left(\frac{136}{15}+\frac{3}{5}\right)\times\frac{7}{8} = \left(\frac{136}{15}+\frac{9}{15}\right)\times\frac{7}{8} = \frac{145}{15}\times\frac{7}{8} = \frac{29}{3}\times\frac{7}{8} = \frac{203}{24}.$$

1.3 c) On simplifie d'abord les termes comportant des exposants :

$$\frac{5^{10}\times7^3-25^5\times49^2}{(125\times7)^3+5^9\times14^3} = \frac{5^{10}\times7^3-5^{10}\times7^4}{5^9\times7^3+5^9\times7^3\times2^3} = \frac{5^{10}\times7^3(1-7)}{5^9\times7^3(1+2^3)} = \frac{5\times(-6)}{9} = \frac{-10}{3}.$$

1.3 d) On calcule :

$$\frac{1\,978\times1\,979+1\,980\times21+1\,958}{1\,980\times1\,979-1\,978\times1\,979} = \frac{1\,978\times1\,979+1\,979\times21+21+1\,958}{1\,979\times(1\,980-1\,978)}$$
$$= \frac{1\,979\times(1\,978+21)+1\,979}{1\,979\times2} = \frac{1\,979\times(1\,978+21+1)}{1\,979\times2} = \frac{1\,979\times2\,000}{1\,979\times2}$$
$$= 1\,000.$$

1.4 On calcule :

$$\frac{0{,}5-\frac{3}{17}+\frac{3}{37}}{\frac{5}{6}-\frac{5}{17}+\frac{5}{37}}+\frac{0{,}5-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-0{,}2}{\frac{7}{5}-\frac{7}{4}+\frac{7}{3}-3{,}5} = \frac{\frac{3}{6}-\frac{3}{17}+\frac{3}{37}}{\frac{5}{6}-\frac{5}{17}+\frac{5}{37}}+\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}{\frac{7}{5}-\frac{7}{4}+\frac{7}{3}-\frac{7}{2}}$$
$$= \frac{3\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{17}+\frac{1}{37}\right)}{5\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{17}+\frac{1}{37}\right)}+\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}{-7\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)} = \frac{3}{5}-\frac{1}{7} = \frac{16}{35}.$$

1.5 a) On connaît l'identité remarquable : $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$.

Donc : $\dfrac{2\,022}{(-2\,022)^2+(-2\,021)(2\,023)} = \dfrac{2\,022}{(2\,022)^2+(1-2\,022)\times(1+2\,022)} = \dfrac{2\,022}{(2\,022)^2+1-2\,022^2} = 2\,022.$

1.5 b) On fait apparaître 2 021 dans 2 020 et 2 022 au dénominateur :

$$\frac{2\,021^2}{2\,020^2+2\,022^2-2} = \frac{2\,021^2}{(2\,021-1)^2+(2\,021+1)^2-2}$$
$$= \frac{2\,021^2}{2\,021^2-2\times2\,021\times1+1+2\,021^2+2\times2\,021\times1+1-2}$$
$$= \frac{2\,021^2}{2\,021^2-2\times2\,021\times1+2\,021^2+2\times2\,021\times1} = \frac{2\,021}{2\,021-2+2\,021+2} = \frac{1}{2}.$$

1.5 c) En posant $a = 1\,234$, on a : $1\,235 = a+1$ et $2\,469 = 2a+1$.

Donc : $\dfrac{1\,235\times2\,469-1\,234}{1\,234\times2\,469+1\,235} = \dfrac{(a+1)(2a+1)-a}{a(2a+1)+a+1} = \dfrac{2a^2+2a+1}{2a^2+2a+1} = 1.$

1.5 d) En posant $a = 1\,000$, on a : $999 = a-1$, $1\,001 = a+1$, $1\,002 = a+2$ et $4\,002 = 4a+2$.

Donc : $\dfrac{4\,002}{1\,000\times1\,002-999\times1\,001} = \dfrac{4a+2}{a(a+2)-(a-1)(a+1)} = \dfrac{2(2a+1)}{a^2+2a-(a^2-1)} = \dfrac{2(2a+1)}{2a+1} = 2.$

1.6 a) On met au même dénominateur. Cela donne :

$$\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n}{n(n+1)^2} + \frac{n(n+1)}{n(n+1)^2} - \frac{(n+1)^2}{n(n+1)^2} = \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2}$$
$$= \frac{n + n^2 + n - (n^2 + 2n + 1)}{n(n+1)^2} = \frac{-1}{n(n+1)^2}.$$

....

1.6 b) On rappelle la formule : $a^3 - b^3 = (a-b)\big(ab + a^2 + b^2\big)$. Cela donne :

$$\frac{a^3 - b^3}{(a-b)^2} - \frac{(a+b)^2}{a-b} = \frac{(a-b)\big(ab + a^2 + b^2\big)}{(a-b)^2} - \frac{(a+b)^2}{a-b} = \frac{ab + a^2 + b^2}{a-b} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{a-b} = -\frac{ab}{a-b}.$$

....

1.6 c) Pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on a :

$$\frac{\dfrac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\dfrac{2n+2}{n^2(n-1)^2}} = \frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)} \times \frac{n^2(n-1)^2}{2n+2} = \frac{6(n+1)}{2(n-1)} \times \frac{n(n-1)}{2(n+1)} = \frac{3}{2}n.$$

....

1.7 De $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, on a : $\dfrac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n^2} k}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k} = \dfrac{\dfrac{n^2(n^2+1)}{2}}{\dfrac{n(n+1)}{2}} = \dfrac{n^2(n^2+1)}{2}\,\dfrac{2}{n(n+1)} = \dfrac{n(n^2+1)}{n+1} = \dfrac{n^3+n}{n+1}.$

....

1.8 a) On trouve $\dfrac{29}{6} = \dfrac{4 \times 6 + 5}{6} = 4 + \dfrac{5}{6}.$

....

1.8 b) On trouve $\dfrac{k}{k-1} = \dfrac{k-1+1}{k-1} = 1 + \dfrac{1}{k-1}.$

....

1.8 c) On trouve $\dfrac{3x-1}{x-2} = \dfrac{3(x-2)+5}{x-2} = 3 + \dfrac{5}{x-2}.$

....

1.9 Pour $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, on a :

$$A = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{(1+t)^2} = \frac{(1+t)^2}{(1+t^2)(1+t)^2} - \frac{1+t^2}{(1+t^2)(1+t)^2} = \frac{1 + 2t + t^2 - \big(1+t^2\big)}{(1+t^2)(1+t)^2} = \frac{2t}{(1+t^2)(1+t)^2}.$$

Donc, $AB = \left(\dfrac{2t}{(1+t^2)(1+t)^2}\right) \times \big(1+t^2\big)(1+t)^2 = 2t.$

....

1.10 a) $\dfrac{3}{5} = \dfrac{27}{45} > \dfrac{5}{9} = \dfrac{25}{45}$

....

1.10 c) $\dfrac{125}{25} = 5 = \dfrac{105}{21}$

....

1.11 Nous allons étudier les produits en croix.

On sait que $A = B$, si et seulement si $33\,215 \times 208\,341 = 66\,317 \times 104\,348$. Le nombre de gauche est le produit de deux nombres impairs, il est impair. Par contre, le nombre de droite est le produit de deux nombres de parités différentes, il est pair. Par conséquent, l'égalité n'est pas vérifiée. A et B ne sont pas égaux.

....

1.12 On ré-écrit $A = \dfrac{10^5+1}{10^6+1}$ et $B = \dfrac{10^6+1}{10^7+1}$. Nous allons étudier les produits en croix.

D'une part calculons : $(10^5+1) \times (10^7+1) = 10^{12} + 10^7 + 10^5 + 1.$

D'autre part : $(10^6+1)^2 = 10^{12} + 2 \times 10^6 + 1.$

Comme $(10^5+1) \times (10^7+1) > (10^6+1) \times\, (10^6+1)$, on obtient : $A > B$.

....

Fiche n° 2. Puissances

Réponses

2.1 a) .... $\boxed{10^8}$

2.1 b) .... $\boxed{10^{15}}$

2.1 c) .... $\boxed{10^2}$

2.1 d) .... $\boxed{10^{-2}}$

2.1 e) .... $\boxed{10^4}$

2.1 f) .... $\boxed{10^{-8}}$

2.2 a) .... $\boxed{15^4}$

2.2 b) .... $\boxed{5^{-6}}$

2.2 c) .... $\boxed{2^7}$

2.2 d) .... $\boxed{(-7)^{-2}}$

2.2 e) .... $\boxed{3^5}$

2.2 f) .... $\boxed{3^{28}}$

2.3 a) ...... $\boxed{2^{-4}\cdot 3^{-1}}$

2.3 b) .... $\boxed{2^{21}\cdot 3}$

2.3 c) .... $\boxed{2}$

2.3 d) .... $\boxed{2^{38}\cdot 3^{26}}$

2.4 a) .... $\boxed{8}$

2.4 b) .... $\boxed{11}$

2.4 c) .... $\boxed{3^{10}}$

2.4 d) .... $\boxed{2^6\cdot 5}$

2.5 a) .... $\boxed{\dfrac{x}{x+1}}$

2.5 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{x-2}}$

2.5 c) .... $\boxed{\dfrac{2x}{x+1}}$

2.5 d) .... $\boxed{\dfrac{2}{x-2}}$

Corrigés

2.3 a) $\dfrac{2^3\cdot 3^2}{3^4\cdot 2^8\cdot 6^{-1}} = \dfrac{2^3\cdot 3^2}{3^4\cdot 2^8\cdot 2^{-1}\cdot 3^{-1}} = \dfrac{2^3\cdot 3^2}{3^{4-1}\cdot 2^{8-1}} = \dfrac{2^3\cdot 3^2}{3^3\cdot 2^7} = 2^{3-7}\cdot 3^{2-3} = 2^{-4}\cdot 3^{-1}$.

2.3 b) On factorise : $2^{21}+2^{22} = 2^{21}+2^{21}\cdot 2 = 2^{21}\cdot(1+2) = 2^{21}\cdot 3$.

2.3 c) On factorise au numérateur et au dénominateur : $\dfrac{3^{22}+3^{21}}{3^{22}-3^{21}} = \dfrac{(3+1)\cdot 3^{21}}{(3-1)\cdot 3^{21}} = \dfrac{4}{2} = 2$.

2.3 d) On simplifie en appliquant les règles habituelles de calcul avec les puissances, et en exploitant le fait que $(-a)^n = a^n$ lorsque n est pair : $\dfrac{\left(3^2\cdot(-2)^4\right)^8}{\left((-3)^5\cdot 2^3\right)^{-2}} = \dfrac{3^{16}\cdot 2^{32}}{3^{-10}\cdot 2^{-6}} = 2^{38}\cdot 3^{26}$.

2.4 a) On fait apparaître les facteurs premiers 2 et 3 : $\dfrac{8^{17}\cdot 6^{-6}}{9^{-3}\cdot 2^{42}} = \dfrac{2^{3\cdot 17}\cdot 2^{-6}\cdot 3^{-6}}{3^{2\cdot(-3)}\cdot 2^{42}} = \dfrac{2^{51-6}\cdot 3^{-6}}{3^{-6}\cdot 2^{42}} = 2^{45-42} = 2^3 = 8$.

2.4 b) Avec les facteurs premiers 5 et 11 : $\dfrac{55^2\cdot 121^{-2}\cdot 125^2}{275\cdot 605^{-2}\cdot 25^4} = \dfrac{(5\cdot 11)^2\cdot(11^2)^{-2}\cdot(5^3)^2}{5^2\cdot 11\cdot(11^2\cdot 5)^{-2}\cdot(5^2)^4} = \dfrac{5^8\cdot 11^{-2}}{5^8\cdot 11^{-3}} = 11$.

2.4 c) On fait apparaître les facteurs premiers 2, 3 et 5 : $\dfrac{12^{-2}\cdot 15^4}{25^2\cdot 18^{-4}} = \dfrac{(2^2)^{-2}\cdot 3^{-2}\cdot 3^4\cdot 5^4}{(5^2)^2\cdot 2^{-4}\cdot(3^2)^{-4}} = \dfrac{2^{-4}\cdot 3^2\cdot 5^4}{2^{-4}\cdot 3^{-8}\cdot 5^4} = 3^{10}$.

2.4 d) Même méthode que précédemment : $\dfrac{36^3\cdot 70^5\cdot 10^2}{14^3\cdot 28^2\cdot 15^6} = \dfrac{2^6\cdot 3^6\cdot 2^5\cdot 5^5\cdot 7^5\cdot 2^2\cdot 5^2}{2^3\cdot 7^3\cdot 2^4\cdot 7^2\cdot 3^6\cdot 5^6} = \dfrac{2^{13}\cdot 3^6\cdot 5^7\cdot 7^5}{2^7\cdot 3^6\cdot 5^6\cdot 7^5} = 2^6\cdot 5$.

2.5 a) On met au même dénominateur les deux premières écritures fractionnaires : $\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{2}{x^2-1} = \dfrac{x(x+1)-2(x-1)}{(x-1)(x+1)} - \dfrac{2}{x^2-1} = \dfrac{x^2+x-2x+2}{(x+1)(x-1)} - \dfrac{2}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{x^2-x}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{x}{x+1}$

2.5 b) Même méthode : $\dfrac{2}{x+2} - \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{8}{x^2-4} = \dfrac{2(x-2)-(x+2)}{(x+2)(x-2)} + \dfrac{8}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{2x-4-x-2+8}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{1}{x-2}$

2.5 c) On commence par simplifier les puissances superflues, puis c'est le même principe que précédemment : $\dfrac{x^2}{x^2-x} + \dfrac{x^3}{x^3+x^2} - \dfrac{2x^2}{x^3-x} = \dfrac{x}{x-1} + \dfrac{x}{x+1} - \dfrac{2x}{x^2-1} = \dfrac{x(x+1+x-1)}{(x-1)(x+1)} - \dfrac{2x}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{2x^2-2x}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{2x}{x+1}$

2.5 d) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{x+2}{x^2-4} + \dfrac{2}{x^2-2x} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x+2}{(x+2)(x-2)} + \dfrac{2}{x(x-2)} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{2}{x(x-2)} = \dfrac{x-2+x}{x(x-2)} + \dfrac{2}{x(x-2)} = \dfrac{2}{x-2}$

Fiche n° 3. Calcul littéral

Réponses

3.1 a) .... $\boxed{8x^3-6x^2+\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{8}}$

3.1 b) .... $\boxed{x^5-2x^4+x^3-x^2+2x-1}$

3.1 c) .... $\boxed{x^5-x^3+x^2-1}$

3.1 d) .... $\boxed{x^5+2x^4+x^3-x^2-2x-1}$

3.1 e) .... $\boxed{x^5-x^3-x^2+1}$

3.1 f) .... $\boxed{x^4+x^2+1}$

3.2 a) .... $\boxed{-2+12x-17x^2+8x^3-3x^4}$

3.2 b) .... $\boxed{-28+21x}$

3.2 c) .... $\boxed{2+x^3-x^4-x^5}$

3.2 d) .... $\boxed{-1-3x-3x^2+x^3}$

3.2 e) .... $\boxed{1+x^4}$

3.2 f) .... $\boxed{1+2x+3x^2+2x^3+x^4}$

3.3 a) .... $\boxed{-6(6x+7)}$

3.3 b) .... $\boxed{4(5x+4)(-5x+1)}$

3.3 c) .... $\boxed{2(3x-4)(10x+3)}$

3.3 d) .... $\boxed{-8(x+1)(x+16)}$

3.4 a) .... $\boxed{(x-1)^2}$

3.4 b) .... $\boxed{(x+2)^2}$

3.4 c) .... $\boxed{(x+1)(x+2)}$

3.4 d) .... $\boxed{3\left(x+\dfrac{7-\sqrt{37}}{6}\right)\left(x+\dfrac{7+\sqrt{37}}{6}\right)}$

3.4 e) .... $\boxed{2\left(x+\dfrac{3-\sqrt{233}}{4}\right)\left(x+\dfrac{3+\sqrt{233}}{4}\right)}$

3.4 f) .... $\boxed{-5(x-1)\left(x-\dfrac{1}{5}\right)}$

3.5 a) .... $\boxed{(x+y-z)(x+y+z)}$

3.5 b) .... $\boxed{3(14x+3y)(-4x+y)}$

3.5 c) .... $\boxed{(x+1)(y+1)}$

3.5 d) .... $\boxed{(x-1)(y-1)}$

3.5 e) .... $\boxed{(x+y)(x+1)^2}$

3.5 f) .... $\boxed{\left(a^2+b^2\right)\left(y-4x^2\right)\left(y+4x^2\right)}$

3.6 a) .... $\boxed{(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)}$

3.6 b) .... $\boxed{-8\left(x^2+1\right)(x-4)(x+4)}$

3.6 c) .... $\boxed{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)}$

3.6 d) .... $\boxed{\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)}$

3.6 e) .... $\boxed{\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)\left(p^2+q^2+r^2+s^2\right)}$

Corrigés

3.1 a) On utilise directement l'identité remarquable $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

....

3.1 b) On peut écrire : $(x-1)^3\left(x^2+x+1\right)=\left(x^3-3x^2+3x-1\right)\left(x^2+x+1\right)=x^5-2x^4+x^3-x^2+2x-1$. Pour être "efficace", il suffit de rechercher directement le coefficient du terme d'un degré donné (sachant que $(ax^n)(bx^p)=abx^{n+p}$). Par exemple, dans l'expression finale et en utilisant l'étape intermédiaire, le coefficient du terme de degré 2 est donné par $(-3)\times 1+3\times 1+(-1)\times 1=-1$. Ici, l'étape intermédiaire n'étant pas compliquée (à effectuer et à retenir), on peut (éventuellement) se passer de l'écrire.

....

3.1 c) Connaissant les identités remarquables $(x-1)(x+1)=x^2-1$ et $(x+1)\left(x^2-x+1\right)=x^3+1$, on a facilement :

$$(x+1)^2(x-1)\left(x^2-x+1\right)=[(x+1)(x-1)]\left[(x+1)\left(x^2-x+1\right)\right]=\left(x^2-1\right)\left(x^3+1\right)=x^5-x^3+x^2-1.$$

Que pensez-vous de la nécessité d'écrire les étapes intermédiaires ?

....

3.1 d) On calcule : $(x+1)^2(x-1)\left(x^2+x+1\right)=\left(x^2+2x+1\right)\left(x^3-1\right)=x^5+2x^4+x^3-x^2-2x-1$.

....

3.1 e) On calcule : $(x-1)^2(x+1)\big(x^2+x+1\big) = \big(x^2-1\big)\big(x^3-1\big) = x^5-x^3-x^2+1$.

....

3.3 a) Une identité remarquable fait apparaître le facteur commun $6x+7$. On calcule alors

$$-(6x+7)(6x-1)+36x^2-49 = -(6x+7)(6x-1)+(6x)^2-7^2 = (6x+7)[-(6x-1)+6x-7] = -6(6x+7).$$

....

3.3 b) On calcule $25-(10x+3)^2 = 5^2-(10x+3)^2 = (10x+8)(-10x+2) = 4(5x+4)(-5x+1)$.

....

3.4 c) La forme canonique est $\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$. On en déduit ensuite la factorisation à l'aide de l'identité remarquable $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

....

3.4 d) La forme canonique est $3\left[\left(x+\dfrac{7}{6}\right)^2-\dfrac{37}{36}\right]$.

....

3.4 e) La forme canonique est $2\left[\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{233}{16}\right]$.

....

3.4 f) La forme canonique est $-5\left[\left(x-\dfrac{3}{5}\right)^2-\dfrac{4}{25}\right]$.

....

3.5 b) On calcule $x^2+6xy+9y^2-169x^2 = (x+3y)^2-(13x)^2 = (14x+3y)(-12x+3y) = 3(14x+3y)(-4x+y)$.

....

3.5 e) On calcule $x^3+x^2y+2x^2+2xy+x+y = (x+y)(x^2+2x+1) = (x+y)(x+1)^2$.

....

3.6 a) On calcule $x^4-1 = \big(x^2-1\big)\big(x^2+1\big) = (x-1)(x+1)\big(x^2+1\big)$.

....

3.6 b) On calcule $\big(-9x^2+24\big)\big(8x^2+8\big)+64x^4-64 = -8\big(x^2+1\big)\big[9x^2-24-8\big(x^2-1\big)\big] = -8\big(x^2+1\big)(x-4)(x+4)$.

....

3.6 c) On calcule $x^4+x^2+1 = x^4+2x^2+1-x^2 = \big(x^2+1\big)^2-x^2 = \big(x^2+x+1\big)\big(x^2-x+1\big)$. La factorisation est alors terminée sur $\mathbb{R}$ puisque les deux équations, $x^2+x+1=0$ et $x^2-x+1=0$, n'ont pas de solutions réelles.

....

3.6 d) Une fois n'est pas coutume : on peut commencer par développer avant de factoriser. Ce qui donne

$$(ac+bd)^2+(ad-bc)^2 = a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2 = \big(a^2+b^2\big)\big(c^2+d^2\big).$$

Remarque : signalons tout de même qu'une autre voie (sans calcul) consiste à interpréter en termes de module d'un produit de deux nombres complexes !

....

Fiche n° 4. Racines carrées

Réponses

4.1 a) .... $\boxed{5}$

4.1 b) .... $\boxed{\sqrt{3}-1}$

4.1 c) .... $\boxed{-\sqrt{3}+2}$

4.1 d) .... $\boxed{\sqrt{7}-2}$

4.1 e) .... $\boxed{\pi-3}$

4.1 f) .... $\boxed{|3-a|}$

4.2 a) .... $\boxed{20}$

4.2 b) .... $\boxed{9+4\sqrt{5}}$

4.2 c) .... $\boxed{1+\sqrt{3}}$

4.2 d) .... $\boxed{3+\sqrt{2}}$

4.2 e) .... $\boxed{12\sqrt{7}}$

4.2 f) .... $\boxed{12}$

4.2 g) .... $\boxed{9-\dfrac{10}{3}\sqrt{2}}$

4.2 h) .... $\boxed{10}$

4.3 a) .... $\boxed{2-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}\sqrt{6}}$

4.3 b) .... $\boxed{3-2\sqrt{2}}$

4.3 c) .... $\boxed{1-\sqrt{10}+\sqrt{15}}$

4.3 d) .... $\boxed{\sqrt{15}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-2}$

4.3 e) .... $\boxed{-(\sqrt{2}+\sqrt{3})}$

4.3 f) .... $\boxed{-\dfrac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}}$

4.3 g) .... $\boxed{2\sqrt{2}}$

4.3 h) .... $\boxed{50-25\sqrt{3}}$

4.4 .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}}$

4.5 a) .... $\boxed{\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}}$

4.5 b) .... $\boxed{x-\sqrt{x^2-1}}$

4.5 c) .... $\boxed{1+\sqrt{x-1}}$

4.5 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x-1}}$

4.5 e) .... $\boxed{\dfrac{x(x-2)}{(x-1)\sqrt{x-1}}}$

4.5 f) .... $\boxed{-4(x-1)^2}$

4.6 a) .... $\boxed{\sqrt{2}}$

4.6 b) .... $\boxed{2\sqrt{2}}$

4.7 a) .... $\boxed{-11+5\sqrt{5}}$

4.7 b) .... $\boxed{1+\sqrt{2}}$

4.7 c) .... $\boxed{1+\sqrt{2}}$

4.7 d) .... $\boxed{\sqrt{3}}$

4.7 e) .... $\boxed{1+\sqrt{5}}$

4.7 f) .... $\boxed{\ln(1+\sqrt{2})}$

4.8 .... $\boxed{1}$

Corrigés

4.1 a) Quand a est un réel positif, $\sqrt{a}$ est le nombre positif dont le carré vaut a donc $\sqrt{(-5^2)}=5$.

....

4.1 f) On trouve $|3-a|$, c'est-à-dire $3-a$ si $a \leqslant 3$ et $a-3$ si $a \geqslant 3$.

....

4.2 c) On essaie de reconnaître une identité remarquable dans la racine :

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{1+2\sqrt{3}+3} = \sqrt{(1+\sqrt{3})^2} = 1+\sqrt{3}.$$

....

4.3 a) On calcule :

$$\begin{aligned}\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}} &= \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}} \times \frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} \\ &= \frac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{2})}{2^2-2} = \frac{4-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2} \\ &= 2-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{6}.\end{aligned}$$

....

4.4 On pose $A := \dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$. On a :

$$A = \frac{1}{1+\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)} = \frac{1-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(1+\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right)\left(1-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right)} = \frac{1-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{1-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}{4+2\sqrt{6}}.$$

Ainsi, la technique de la « quantité conjuguée » n'est pas suffisante ici ; mais on peut la réappliquer. On a

$$A = \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1\right)\left(4-2\sqrt{6}\right)}{\left(4+2\sqrt{6}\right)\left(4-2\sqrt{6}\right)} = \frac{4\sqrt{2}-4\sqrt{3}+4\sqrt{3}-6\sqrt{2}-4+2\sqrt{6}}{16-24} = \frac{2\sqrt{2}+4-2\sqrt{6}}{8} = \frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}.$$

Ainsi, on a $\boxed{\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}}$: ce qu'on cherchait.

Remarque : on pouvait aussi faire un autre type de quantité conjuguée :

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})} = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}.$$

....

4.5 c) On essaie de reconnaître une identité remarquable dans la racine :

$$\sqrt{x+2f(x)} = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = \sqrt{\sqrt{x-1}^2+2\sqrt{x-1}+1} = \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} = \sqrt{x-1}+1.$$

....

4.5 e) Le calcul donne $f''(x) = -\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{(x-1)^{3/2}}$ d'où :

$$f(x)+4f''(x) = \sqrt{x-1}-\frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}} = \frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}}((x-1)^2-1) = \frac{x(x-2)}{(x-1)\sqrt{x-1}}.$$

....

4.6 a) On calcule :

$$\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2 = 3+\sqrt{5}-2\sqrt{3+\sqrt{5}}\sqrt{3-\sqrt{5}}+3-\sqrt{5} = 6-2\sqrt{9-5} = 6-2\sqrt{4} = 6-4 = 2.$$

De plus, $\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}} \geqslant 0$, donc $\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt{2}$.

....

4.7 b) On calcule $3+2\sqrt{2} = 2+2\sqrt{2}+1 = (\sqrt{2})^2+2\times 1\times\sqrt{2}+1^2 = (1+\sqrt{2})^2$ et on trouve donc

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}.$$

....

4.7 e) On calcule : $2\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{6+2\sqrt{5}} = \sqrt{1+2\sqrt{5}+\sqrt{5}^2} = \sqrt{(1+\sqrt{5})^2} = 1+\sqrt{5}$.

....

4.8 Appelons A ce nombre barbare, et écrivons-le $A = \alpha-\beta$ en posant

$$\alpha = \sqrt[3]{3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}} \text{ et } \beta = \sqrt[3]{-3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}}.$$

Plutôt que de se lancer dans des choses compliquées, calculons A^3 à l'aide de l'identité remarquable. On a

$$A^3 = \alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3 = \alpha^3-\beta^3-3\alpha\beta(\alpha-\beta)$$

ce qui donne

$$A^3 = 6-3A\sqrt[3]{\left(3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}\right)\left(-3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}\right)}$$

d'où finalement $A^3 = 6-5A$, ce qui est équivalent à $(A-1)(A^2+A+6) = 0$ en observant que 1 est racine évidente de l'équation $t^3+5t-6 = 0$ d'inconnue t, puis finalement 1 est l'unique racine réelle de cette équation, et donc $A = 1$.

....

Fiche n° 5. Expressions algébriques

Réponses

5.1 a) .... $\boxed{7a^2+12a+7}$

5.1 b) .... $\boxed{a^2-1}$

5.1 c)............. $\boxed{4a^2-a-3}$

5.1 d)................ $\boxed{-a^2+1}$

5.2 a) .... $\boxed{8+6\mathrm{i}}$

5.2 b) .... $\boxed{8-6\mathrm{i}}$

5.2 c)................ $\boxed{18-26\mathrm{i}}$

5.2 d)............... $\boxed{-9-46\mathrm{i}}$

5.3 a)................ $\boxed{39-18\mathrm{i}}$

5.3 b) .... $\boxed{2197}$

5.3 c) .... $\boxed{-4+43\mathrm{i}\sqrt{5}}$

5.3 d) .... $\boxed{1}$

5.4 a)....................... $\boxed{3}$

5.4 b) .... $\boxed{1}$

5.4 c)....................... $\boxed{1}$

5.4 d) .... $\boxed{0}$

5.4 e)..................... $\boxed{-1}$

5.4 f)...................... $\boxed{31}$

5.5 a).................. $\boxed{a^2+2}$

5.5 b) .... $\boxed{a^3+3a}$

5.5 c)............ $\boxed{a^4+4a^2+2}$

5.6 a)................. $\boxed{a^2-2b}$

5.6 b)................. $\boxed{ab-3c}$

5.6 c)........... $\boxed{a^3-3ab+3c}$

5.6 d).................. $\boxed{ab-c}$

5.6 e)....................... $\boxed{ac}$

5.6 f) .... $\boxed{-2ac+b^2}$

5.7 a).......... $\boxed{a^2b-ac-2b^2}$

5.7 b) ... $\boxed{a^4-4a^2b+4ac+2b^2}$

5.7 c)....................... $\boxed{0}$

5.7 d) .... $\boxed{1}$

5.7 e)....................... $\boxed{a}$

Corrigés

5.1 a) On développe $(a+2)^3 = a^3+6a^2+12a+8$, puis on simplifie sachant que $a^3 = a^2-1$.

5.1 b) De $a^3 = a^2-1$, on déduit $a^6 = a^3(a^2-1) = a^5-a^3$ et donc $a^5-a^6 = a^3$. De plus $a^3 = a^2-1$.

5.1 c) On commence par $a^6 = (a^3)^2 = (a^2-1)^2 = a^4-2a^2+1 = -a^2-a$ puis $a^{12} = (-a^2-a)^2 = a^4+2a^3+a^2$.

5.1 d) L'égalité a^3-a^2+1 peut s'écrire $a(a-a^2)=1$ ce qui montre que $a\neq 0$ et $\dfrac{1}{a} = a-a^2$. Alors $\dfrac{1}{a^2} = 1-a$.

5.2 a) On développe : $(3+\mathrm{i})^2 = 9+6\mathrm{i}+\mathrm{i}^2$.

5.2 b) On développe : $(3-\mathrm{i})^2 = 9+6(-\mathrm{i})+(-\mathrm{i})^2 = 9-6\mathrm{i}+\mathrm{i}^2$.

5.2 c) D'après le calcul précédent : $(3-\mathrm{i})^3 = (8-6\mathrm{i})(3-\mathrm{i}) = 24-18\mathrm{i}-8\mathrm{i}+6\mathrm{i}^2$.

5.2 d) On développe directement : $(3-2\mathrm{i})^3 = 3^3-3\cdot 3^2(2\mathrm{i})^1+3\cdot 3^1(2\mathrm{i})^2-(2\mathrm{i})^3$.

5.3 a) On développe : $24-30\mathrm{i}+12\mathrm{i}-15\mathrm{i}^2$.

5.3 b) En remarquant que $(2+3\mathrm{i})(2-3\mathrm{i}) = 2^2-(3\mathrm{i})^2 = 4+9$, on obtient par associativité 13^3.

5.3 c) On développe : $(-4+\mathrm{i}\sqrt{5})^3 = -4^3+3\cdot 4^2(\mathrm{i}\sqrt{5})-3\cdot 4^1(\mathrm{i}\sqrt{5})^2+(\mathrm{i}\sqrt{5})^3 = -64+48\mathrm{i}\sqrt{5}+60-5\mathrm{i}\sqrt{5}$.

5.3 d) On développe : $(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})^3 = -\dfrac{1}{8}+3\cdot i\dfrac{\sqrt{3}}{8}+3\cdot\dfrac{3}{8}-i\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

5.4 a) De $a^5=1$, on déduit $a^7=a^2$ et $a^6=a$ donc tous les termes se simplifient sauf deux : $4-1=3$.

5.4 b) On commence par $a^{1234} = (a^{10})^{123} \times a^4 = a^4$ car $a^{10} = (a^5)^2 = 1$. De même $a^{2341} = a^1$, *etc.* et on obtient donc finalement $a^4 \times a^1 \times a^2 \times a^3 = a^{10} = 1$.

5.4 c) Ceci vaut a^S où $S = \sum_{k=0}^{1234} k = \frac{1234 \times (1234+1)}{2}$ est un entier multiple de 5.

5.4 d) Cette somme partielle de suite géométrique vaut $\frac{a^5 - 1}{a - 1}$.

5.4 e) Cette somme géométrique vaut $\frac{a^{99} - 1}{a - 1} \times a^1 = \frac{a^{100} - a}{a - 1} = \frac{1 - a}{a - 1} = -1$.

5.4 f) En réordonnant les facteurs et en développant, on obtient :

$$(2 - a^1)(2 - a^4)(2 - a^2)(2 - a^3) = (5 - 2(a + a^4))(5 - 2(a^2 + a^3)) = 25 - 10(a + a^2 + a^3 + a^4) + 4(a + a^4)(a^2 + a^3).$$

Or $a + a^2 + a^3 + a^4 = -1$ et $(a + a^4)(a^2 + a^3) = a^3 + a^6 + a^4 + a^7 = a + a^2 + a^3 + a^4 = -1$ aussi.

5.5 a) On complète le carré : $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x}$.

5.5 b) On se ramène au résultat précédent : $x^3 - \frac{1}{x^3} = x\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{x}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x - \frac{1}{x}\right) = a(a^2 + 2) + a$.

5.5 c) De même : $x^4 + \frac{1}{x^4} = x^2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x^2}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2 = (a^2 + 2)^2 - 2$.

5.6 a) On développe $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$ puis on conclut par soustraction.

5.6 b) On reconnaît $x(xy + zx) + y(yz + xy) + z(zx + yz) = (x + y + z)(xy + yz + zx) - 3xyz$.

5.6 c) Le développement $(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3\left[x^2(y + z) + y^2(z + x) + z^2(x + y)\right] + 6xyz$ conduit par soustraction à $a^3 - 3(ab - 3c) - 6c$ d'après l'expression précédente.

5.6 d) *Première solution* : on développe et on obtient une combinaison des expressions précédentes.

Deuxième solution : on reconnaît $(a - z)(a - x)(a - y) = a^3 - (x + y + z)a^2 + (xy + yz + zx)a - xyz$.

5.6 e) En factorisant, on reconnaît $(x + y + z)xyz$.

5.6 f) On se ramène à $(xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2 = (xy + yz + zx)^2 - 2(x^2yz + y^2xz + z^2xy)$.

5.7 a) On cherche $x^2(xy+zx)+y^2(yz+xy)+z^2(zx+yz)$, c'est-à-dire $(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx)-x^2yz-y^2zx-z^2xy$.

5.7 b) *Première solution* : on développe $(x + y + z)^4$ puis on conclut par soustraction à l'aide des calculs précédents.

Deuxième solution : on remarque qu'il s'agit de calculer $(x^2)^2 + (y^2)^2 + (z^2)^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)$, donc qu'il suffit de développer $(a^2 - 2b)^2 - 2(b^2 - 2ac)$.

5.7 c) On réduit au même dénominateur $(x - y)(y - z)(z - x)$ puis on développe le numérateur.

5.7 d) On réduit au même dénominateur $(x-y)(y-z)(z-x)$ puis on factorise le numérateur par $(z-y)$:

$$\begin{aligned} x^2(z-y)+y^2(x-z)+z^2(y-x) &= x^2(z-y)+(y^2-z^2)x-yz(y-z) \\ &= (z-y)\big[x^2-(y+z)x+yz\big], \end{aligned}$$

et l'on reconnaît pour le dernier facteur : $x^2-(y+z)x+yz=(x-y)x-(x-y)z=(x-y)(x-z)$.

....

5.7 e) On procède de même :

$$\begin{aligned} x^3(z-y)+y^3(x-z)+z^3(y-x) &= x^3(z-y)+(y^3-z^3)x-yz(y^2-z^2) \\ &= (z-y)\big[x^3-(y^2+yz+z^2)x+yz(y+z)\big] \\ &= (z-y)\big[(x^2-y^2)x-yz(x-y)-z^2(x-y)\big] \\ &= (z-y)(x-y)\big[(x+y)x-yz-z^2\big] \\ &= (z-y)(x-y)\big[(x^2-z^2)+(x-z)y\big] \\ &= (z-y)(x-y)(x-z)[(x+z)+y], \end{aligned}$$

d'où $x+y+z=a$ après simplification par le dénominateur.

....

Fiche n° 6. Équations du second degré

Réponses

6.1 a) .... $\boxed{3, 3}$

6.1 b) .... $\boxed{-1/3, -1/3}$

6.1 c) .... $\boxed{2, -6}$

6.1 d) .... $\boxed{2, 3}$

6.1 e) .... $\boxed{0, \text{ donc } 5}$

6.1 f) .... $\boxed{0, \text{ donc } -3/2}$

6.1 g) .... $\boxed{\varnothing}$

6.1 h) .... $\boxed{1 \text{ donc } -5}$

6.1 i) .... $\boxed{1 \text{ donc } 8/3}$

6.1 j) .... $\boxed{-1 \text{ donc } -19/5}$

6.2 a) .... $\boxed{6, 7}$

6.2 b) .... $\boxed{-3, -5}$

6.2 c) .... $\boxed{-7, -11}$

6.2 d) .... $\boxed{-3, 11}$

6.2 e) .... $\boxed{a, b}$

6.2 f) .... $\boxed{a-b, a+b}$

6.3 a) .... $\boxed{2/3}$

6.3 b) .... $\boxed{-2/7}$

6.3 c) .... $\boxed{-1/m}$

6.3 d) .... $\boxed{2m/(m+3)}$

6.4 a) .... $\boxed{1 \text{ donc } (a-b)/(b-c)}$

6.4 b) .... $\boxed{1 \text{ donc } c(a-b)/(a(b-c))}$

6.4 c) .... $\boxed{m \text{ donc } -(m+a+b)}$

6.4 d) .... $\boxed{m \text{ donc } m(a-b)/(b-c)}$

6.4 e) .... $\boxed{m \text{ donc } ab/m}$

6.4 f) .... $\boxed{a+b \text{ puis } 2ab/(a+b).}$

6.5 a) .... $\boxed{x^2 - 22x + 117 = 0}$

6.5 b) .... $\boxed{x^2 - 6x - 187 = 0}$

6.5 c) .... $\boxed{x^2 - 4x + 1 = 0}$

6.5 d) .... $\boxed{x^2 - 2mx + 3 = 0}$

6.5 e) .... $\boxed{2x^2 - (4m+1)x + (2m^2 + m - 15) = 0}$

6.5 f) .... $\boxed{m^2x^2 + (m - 2m^2)x + (m^2 - m - 2) = 0}$

6.6 a) .... $\boxed{m = -3/4 \text{ et } x = 3/4}$

6.6 b) .... $\boxed{m = -1 \text{ et } x = -2, \text{ ou } m = 7 \text{ et } x = 2/3}$

6.6 c) .... $\boxed{m = 1 \text{ et } x = -1 \text{ ou } m = -1 \text{ et } x = 1}$

6.7 a) .... $\boxed{a = 2 \text{ et } b = 3}$

6.7 b) .... $\boxed{a = -2 \text{ et } b = 1}$

6.7 c) .... $\boxed{a = -3 \text{ et } b = 5}$

6.7 d) .... $\boxed{a = 1/2 \text{ et } b = 8}$

6.7 e) .... $\boxed{a = 1 \text{ et } b = 3\sqrt{7}}$

6.8 a) .... $\boxed{]-\infty, 1] \cup [\sqrt{2}, +\infty[}$

6.8 b) .... $\boxed{[-3, 5]}$

6.8 c) .... $\boxed{]-\infty, -1] \cup [2/3, +\infty[}$

6.8 d) .... $\boxed{]-\infty, -1/2[\cup [4, +\infty[}$

Corrigés

6.1 a) C'est une identité remarquable : $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$.

6.1 c) Le nombre 2 est racine évidente, l'autre est donc -6 en regardant le produit des racines qui vaut -12.

6.1 e) La racine 0 est la racine évidente par excellence ; la somme des racines valant ici 5 l'autre racine est 5.

6.1 g) La fonction $x \longmapsto 2x^2 + 3$ est strictement postivie car elle est minorée par 3, donc elle ne s'annule pas.

6.2 a) Ici on cherche des racines un peu moins évidentes : on remplace le problème par le problème équivalent de la détermination de deux nombres x_1, x_2 dont le produit vaut 42 et la somme 13. On teste donc les factorisations évidentes de 42, ici $42 = 6 \times 7$ et $13 = 6 + 7$.

....

6.2 b) On cherche deux nombres dont le produit vaut 15 et la somme -8 : les nombres -3 et -5 conviennent.

....

6.4 e) En réduisant au même dénominateur de part et d'autre l'équation devient $m(x^2 + ab) = x(m^2 + ab)$ qui est une équation du second degré. Sur la forme initiale de l'équation on lit que m est racine évidente, l'autre est donc ab/m. Peut-être aurait-on pu voir cette racine « évidente » directement ?

....

6.4 f) Le nombre 0 est bien tentant, mais n'est pas racine de l'équation. En revanche $a + b$ convient. L'équation se réécrit $(a+b)(x-a)(x-b) = ab(2x-(a+b))$, d'où une équation du second degré dont le coefficient devant x^2 vaut $a+b$ et le terme constant $2ab(a+b)$, donc la deuxième solution de cette équation est $\dfrac{2ab}{a+b}$.

....

6.5 a) La somme des racines vaut 22, leur produit 117. L'équation cherchée est donc $x^2 - 22x + 117 = 0$.

....

6.6 a) Une équation du second degré admet une racine double si, et seulement si, son discriminant est nul.

Ici, le discriminant vaut $\Delta = (2m+3)^2 - 4m^2 = 3(4m-3)$. Ainsi, l'équation admet une racine double si, et seulement si, m vaut $-3/4$ ce qui donne $x = 3/4$.

....

6.6 b) Ici, le déterminant vaut $\Delta = 4(m^2 - 6m - 7)$, donc une racine évidente est -1 donc l'autre vaut 7. Pour $m = -1$ on trouve $x = -2$ et pour $m = 7$ on trouve $x = 2/3$.

....

6.6 c) Ici le discriminant vaut $\Delta = 4((3m+1)^2 - (m+3)^2) = 32(m^2 - 1)$ donc l'équation admet une racine double si et seulement si m vaut 1, auquel cas l'équation s'écrit $x^2 + 2x + 1 = 0$ et la racine double est -1, ou m vaut -1, auquel cas l'équation s'écrit $x^2 - 2x + 1 = 0$ dont la racine double est 1.

....

6.8 a) Un trinôme est du signe du coefficient dominant à l'extérieur de l'intervalle des racines, et du signe opposé entre les racines. Ici, les racines sont $\sqrt{2}$ et 1, le trinôme est donc strictement positif sur $]-\infty, 1[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$ et strictement négatif sur $]1, \sqrt{2}[$.

....

6.8 b) Les racines sont -5 et 3. Le trinôme est donc strictement négatif sur $]-\infty, -3[\cup]5, +\infty[$ et strictement positif sur $]-3, 5[$.

....

6.8 c) Ici, les racines sont -1 et $2/3$. Le trinôme est donc strictement positif sur $]-\infty, -1[\cup]2/3, +\infty[$ et strictement négatif sur $]-1, 2/3[$.

....

6.8 d) Le signe d'un quotient est le même que celui d'un produit ! Donc le quotient considéré est strictement positif sur $]-\infty, -1/2[\cup]4, +\infty[$ et strictement négatif sur $]-1/2, 4[$ (attention à l'annulation du dénominateur !).

....

Fiche n° 7. Exponentielle et logarithme

Réponses

7.1 a) ... $\boxed{4\ln 2}$

7.1 b) ... $\boxed{9\ln 2}$

7.1 c) ... $\boxed{-3\ln 2}$

7.1 d) ... $\boxed{\frac{1}{2}\ln 2}$

7.1 e) ... $\boxed{3\ln 2}$

7.1 f) ... $\boxed{2\ln 2 + 2\ln 3}$

7.2 a) ... $\boxed{-\ln 3 - 2\ln 2}$

7.2 b) ... $\boxed{2\ln 3 - 2\ln 2}$

7.2 c) ... $\boxed{\ln 3 + 11\ln 2}$

7.2 d) ... $\boxed{3\ln 5 + 2\ln 2}$

7.2 e) ... $\boxed{-2\ln 5 + 4\ln 2}$

7.2 f) ... $\boxed{2\ln 5 - 2\ln 2}$

7.3 ... $\boxed{-2\ln 2 - 2\ln 5}$

7.4 a) ... $\boxed{\frac{25}{8}\ln(\sqrt{2}-1)}$

7.4 b) ... $\boxed{17 + 12\sqrt{2}}$

7.4 c) ... $\boxed{0}$

7.4 d) ... $\boxed{0}$

7.5 a) ... $\boxed{8}$

7.5 b) ... $\boxed{\frac{1}{2}}$

7.5 c) ... $\boxed{\frac{1}{3}}$

7.5 d) ... $\boxed{\frac{1}{9}}$

7.5 e) ... $\boxed{-\frac{1}{2}}$

7.5 f) ... $\boxed{\frac{3}{2}}$

7.6 a) ... $\boxed{-2}$

7.6 b) ... $\boxed{\frac{1}{\ln 2}}$

7.6 c) ... $\boxed{-17}$

7.6 d) ... $\boxed{1}$

7.6 e) ... $\boxed{-1}$

7.6 f) ... $\boxed{e}$

7.7 a) ... $\boxed{\text{impaire}}$

7.7 b) ... $\boxed{\text{impaire}}$

7.7 c) ... $\boxed{\text{impaire}}$

7.7 d) ... $\boxed{\text{impaire}}$

7.8 a) ... $\boxed{\mathbb{R}}$

7.8 b) ... $\boxed{\text{ok}}$

7.8 c) ... $\boxed{1}$

7.8 d) ... $\boxed{\text{-1}}$

7.9 a) ... $\boxed{x + \ln 2}$

7.9 b) ... $\boxed{\frac{e^x}{\sqrt{1+x}}}$

7.9 c) ... $\boxed{\ln|x-1|}$

7.9 d) ... $\boxed{-\frac{1}{1+x}}$

7.9 e) ... $\boxed{(1+x)^x}$

7.10 a) ... $\boxed{x \geqslant \frac{\ln 12 + 5}{3}}$

7.10 b) ... $\boxed{x \in [0,1]}$

7.10 c) ... $\boxed{x \geqslant \frac{2}{e}}$

7.10 d) ... $\boxed{x \geqslant -\frac{1}{12}}$

7.10 e) ... $\boxed{\varnothing}$

7.10 f) ... $\boxed{\frac{-13-\sqrt{273}}{2}}$

Corrigés

7.1 a) On a $16 = 4^2 = 2^4$ donc $\ln 16 = 4\ln 2$.

7.1 c) On a $0{,}125 = \frac{1}{8}$ donc $\ln 0{,}125 = -\ln 8 = -3\ln 2$.

7.1 e) On a $72 = 8 \times 9 = 2^3 \times 3^2$ donc $\ln 72 - 2\ln 3 = (3\ln 2 + 2\ln 3) - 2\ln 3 = 3\ln 2$.

7.2 c) On a $0{,}875 = \frac{7}{8}$ donc

$$\begin{aligned}\ln 21 + 2\ln 14 - 3\ln(0{,}875) &= (\ln 3 + \ln 7) + 2(\ln 2 + \ln 7) - 3(\ln 7 - \ln 8)\\ &= \ln 3 + 2\ln 3 + 3 \times 3\ln 2 = 3\ln 3 + 11\ln 2.\end{aligned}$$

7.3 On appelle A ce nombre. On a

$$A = (\ln 1 - \ln 2) + (\ln 2 - \ln 3) + \cdots + (\ln 98 - \ln 99) + (\ln 99 - \ln 100)$$

donc en simplifiant les termes deux par deux finalement il reste $A = \ln 1 - \ln 100$, c'est-à-dire $A = -\ln 100$ où $100 = 2^2 \times 5^2$, d'où le résultat $A = -2(\ln 2 + \ln 5)$

On peut écrire plus rigoureusement ce calcul :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=1}^{99} \ln \frac{k}{k+1} = \sum_{k=1}^{99} (\ln k - \ln(k+1)) \\ &= \sum_{k=1}^{99} \ln k - \sum_{k=1}^{99} \ln(k+1) = \sum_{k=1}^{99} \ln k - \sum_{j=2}^{100} \ln j \end{aligned}$$

en effectuant le changement d'indice $j = k+1$ d'où finalement $A = \ln 1 - \ln 100 = -2(\ln 2 + \ln 5)$.

7.4 a) On a $(1+\sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1$

On a donc

$$\alpha = \frac{7}{16} \ln(3+2\sqrt{2}) - 4\ln(\sqrt{2}+1) = \frac{7}{16} \ln((1+\sqrt{2})^2) + 4 \ln \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{7}{8} \ln(1+\sqrt{2}) + 4 \ln \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

d'où finalement $\alpha = -\dfrac{7}{8} \ln \dfrac{1}{1+\sqrt{2}} + 4 \ln \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{25}{8} \ln \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{25}{8} \ln(\sqrt{2}-1)$.

7.4 c) On a $\gamma = \ln\Big(\big((2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\big)^{20} \Big) = \ln\big(\big((4-3)^{20}\big)\big) = 0$

7.6 b) On a $\mathrm{e}^{-\ln \ln 2} = \mathrm{e}^{(-1)\ln(\ln 2)} = (\ln 2)^{-1} = \dfrac{1}{\ln 2}$.

7.6 e) On a $\ln\Big(\sqrt{\exp(-\ln \mathrm{e}^2)}\Big) = \dfrac{1}{2} \ln\big(\exp(-\ln \mathrm{e}^2)\big) = \dfrac{1}{2}(-\ln \mathrm{e}^2)) = \dfrac{1}{2} \times (-2) = -1$.

7.7 a) f_1 est définie sur $]-2021, +2021[$ qui est symétrique par rapport à 0 et

$$\forall x \in\,]-2021, +2021[, \quad f(-x) = \ln \frac{2021-x}{2021+x} = \ln \frac{1}{\frac{2021+x}{2021-x}} = -\ln \frac{2021+x}{2021-x} = -f_1(x).$$

7.7 b) On a $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \leqslant |x| < \sqrt{x^2+1}$ donc f_2 est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a

$$\begin{aligned} f_2(-x) &= \ln(-x + \sqrt{(-x)^2+1}) \\ &= \ln(-x + \sqrt{x^2+1}) \\ &= \ln \frac{(-x+\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})}{x+\sqrt{x^2+1}} \\ &= \ln \frac{-x^2+(x^2+1)}{x+\sqrt{x^2+1}} = \ln \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} = -f_2(x). \end{aligned}$$

7.10 f) Attention à l'ensemble de définition de ces deux équations...

Pour la première équation, on cherche les solutions dans $]-\infty, -5[\, \cap \Big(\,]61, +\infty[\, \cap\,]-\infty, -7[\, \Big)$, qui est l'ensemble vide, donc la première équation n'admet aucune solution.

Pour la seconde, on cherche les solutions dans $]-\infty, -5[\, \cap \Big(\,]-\infty, -7[\, \cup\,]61, +\infty[\, \Big)$, c'est-à-dire dans l'intervalle $]-\infty, -7[$. Dans ce cas, un réel x appartenant à $]-\infty, -7[$ est solution de l'équation si et seulement si x vérifie $x^2 + 13x - 26 = 0$. Or, ce trinôme admet deux racines réelles : $x_1 = \dfrac{-13-\sqrt{273}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-13+\sqrt{273}}{2}$. Seul x_1 convient car $x_1 \in\,]-\infty, -7[$ et $x_2 \notin\,]-\infty, -7[$.

Fiche n° 8. Trigonométrie

Réponses

8.1 a) .... $\boxed{0}$

8.1 b) .... $\boxed{0}$

8.1 c) .... $\boxed{-1-\sqrt{3}}$

8.1 d) .... $\boxed{-\dfrac{1}{2}}$

8.2 a) .... $\boxed{0}$

8.2 b) .... $\boxed{-\sin x}$

8.2 c) .... $\boxed{2\cos x}$

8.2 d) .... $\boxed{-2\cos x}$

8.3 a) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

8.3 b) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

8.3 c) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

8.3 d) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}}$

8.4 a) .... $\boxed{-\sin x}$

8.4 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{\cos x}}$

8.4 c) .... $\boxed{0}$

8.4 d) .... $\boxed{4\cos^3 x - 3\cos x}$

8.5 a) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$

8.5 b) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$

8.6 a) .... $\boxed{\tan x}$

8.6 b) .... $\boxed{2}$

8.6 c) .... $\boxed{8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1}$

8.7 a) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right\}}$

8.7 a) .... $\boxed{\left\{-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right\}}$

8.7 a) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

8.7 b) .... $\boxed{\left\{\dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right\}}$

8.7 b) .... $\boxed{\left\{\dfrac{-2\pi}{3}, \dfrac{-\pi}{3}\right\}}$

8.7 b) .... $\boxed{\left\{\dfrac{4\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{5\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

8.7 c) .... $\boxed{\left\{\dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}\right\}}$

8.7 c) .... $\boxed{\left\{-\dfrac{5\pi}{6}, -\dfrac{\pi}{6}\right\}}$

8.7 c) .... $\boxed{\left\{\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{11\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

8.7 d) .... $\boxed{\left\{\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}\right\}}$

8.7 d) .... $\boxed{\left\{-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right\}}$

8.7 d) .... $\boxed{\left\{\dfrac{3\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

8.7 e) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4} \dfrac{7\pi}{4}\right\}}$

8.7 e) .... $\boxed{\left\{-\dfrac{3\pi}{4}, -\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right\}}$

8.7 e) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

8.7 f) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}\right\}}$

8.7 f) .... $\boxed{\left\{-\dfrac{5\pi}{6}, -\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right\}}$

8.7 f) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{5\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

8.7 g) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{11\pi}{12}, \dfrac{13\pi}{12}, \dfrac{23\pi}{12}\right\}}$

8.7 g) .... $\boxed{\left\{-\dfrac{11\pi}{12}, -\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{\pi}{12}, \dfrac{11\pi}{12}\right\}}$

8.7 g) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{12}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{11\pi}{12}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

8.7 h) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{2}\right\}}$

8.7 h) .... $\boxed{\left\{-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right\}}$

8.7 h) $\left\{\dfrac{\pi}{6}+k\dfrac{2\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}\right\}$

8.7 i) $\left\{\dfrac{\pi}{7}, \dfrac{13\pi}{7}\right\}$

8.7 i) $\left\{-\dfrac{\pi}{7}, \dfrac{\pi}{7}\right\}$

8.7 i) $\left\{\dfrac{\pi}{7}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\dfrac{\pi}{7}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$

8.7 j) $\left\{\dfrac{5\pi}{14}, \dfrac{9\pi}{14}\right\}$

8.7 j) $\left\{\dfrac{5\pi}{14}, \dfrac{9\pi}{14}\right\}$

8.7 j) $\left\{\dfrac{5\pi}{14}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\dfrac{9\pi}{14}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$

8.8 a) $\left[0, \dfrac{3\pi}{4}\right]\cup\left[\dfrac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$

8.8 a) $\left[-\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$

8.8 b) $\left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right]$

8.8 b) $\left[-\pi, -\dfrac{\pi}{3}\right]\cup\left[\dfrac{\pi}{3}, \pi\right]$

8.8 c) $\left[0, \dfrac{\pi}{6}\right]\cup\left[\dfrac{5\pi}{6}, 2\pi\right]$

8.8 c) $\left[-\pi, \dfrac{\pi}{6}\right]\cup\left[\dfrac{5\pi}{6}, \pi\right]$

8.8 d) $\left[0, \dfrac{\pi}{6}\right]\cup\left[\dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}\right]\cup\left[\dfrac{11\pi}{6}, 2\pi\right]$

8.8 d) $\left[-\pi, -\dfrac{5\pi}{6}\right]\cup\left[-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}\right]\cup\left[\dfrac{5\pi}{6}, \pi\right]$

8.8 e) $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right[\cup\left[\dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$

8.8 e) $\left[-\dfrac{3\pi}{4}, -\dfrac{\pi}{2}\right[\cup\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right[$

8.8 f) $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right[\cup\left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{4}\right]\cup\left[\dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{2}\right[\cup\left]\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{7\pi}{4}\right]$

8.8 f) $\left[-\dfrac{3\pi}{4}, -\dfrac{\pi}{2}\right[\cup\left]-\dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{4}\right]\cup\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right[\cup\left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$

8.8 g) $\left[0, \dfrac{3\pi}{4}\right]\cup\left[\dfrac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$

8.8 g) $\left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$

8.8 h) $\left[0, \dfrac{3\pi}{8}\right]\cup\left[\dfrac{7\pi}{8}, \dfrac{11\pi}{8}\right]\cup\left[\dfrac{15\pi}{8}, 2\pi\right]$

8.8 h) $\left[-\pi, -\dfrac{5\pi}{8}\right]\cup\left[-\dfrac{\pi}{8}, \dfrac{3\pi}{8}\right]\cup\left[\dfrac{7\pi}{8}, \pi\right]$

Corrigés

8.3 b) On peut utiliser $\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}$ puis les formules d'addition.

8.4 b) On a

$$\frac{\sin 2x}{\sin x}-\frac{\cos 2x}{\cos x}=\frac{\sin 2x\cos x-\cos 2x\sin x}{\sin x\cos x}=\frac{\sin(2x-x)}{\sin x\cos x}=\frac{1}{\cos x}.$$

On peut aussi faire cette simplification à l'aide des formules de duplication :

$$\frac{\sin 2x}{\sin x}-\frac{\cos 2x}{\cos x}=\frac{2\sin x\cos x}{\sin x}-\frac{2\cos^2 x-1}{\cos x}=\frac{1}{\cos x}$$

8.4 d) On calcule

$$\begin{aligned}\cos(3x)&=\cos(2x+x)=\cos(2x)\cos x-\sin(2x)\sin x=(2\cos^2 x-1)\cos x-2\cos x\sin^2 x\\&=2\cos^3 x-\cos x-2\cos x(1-\cos^2 x)=4\cos^3 x-3\cos x.\end{aligned}$$

8.5 a) On a $\cos\dfrac{\pi}{4}=2\cos^2\dfrac{\pi}{8}-1$ donc $\cos^2\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}{2}=\dfrac{\sqrt{2}+2}{4}$. De plus, $\cos\dfrac{\pi}{8}\geqslant 0$ donc $\cos\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

8.5 b) On a $\sin^2\dfrac{\pi}{8}=1-\cos^2\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\dfrac{\pi}{8}\geqslant 0$ donc $\sin\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

8.6 a) On a $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$ donc $\dfrac{1-\cos(2x)}{\sin(2x)} = \dfrac{2\sin^2 x}{2\sin x\cos x} = \tan x$.

8.6 b) On a $\dfrac{\sin 3x}{\sin x} - \dfrac{\cos 3x}{\cos x} = \dfrac{\sin 3x\cos x - \cos 3x \sin x}{\sin x\cos x} = \dfrac{\sin(3x-x)}{\sin x\cos x} = \dfrac{\sin(2x)}{\sin x} = \dfrac{2\sin x\cos x}{\sin x\cos x} = 2$.

8.6 c) On a $\cos(4x) = 2\cos^2(2x) - 1 = 2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1 = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$.

8.7 e) Cela revient à résoudre « $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ».

8.7 g) Si on résout avec $x \in [0, 2\pi]$, alors $t = 2x \in [0, 4\pi]$.

Or, dans $[0, 4\pi]$, on a $\cos t = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ pour $t \in \left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}, \dfrac{13\pi}{6}, \dfrac{23\pi}{6}\right\}$ et donc pour $x \in \left\{\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{11\pi}{12}, \dfrac{13\pi}{12}, \dfrac{23\pi}{12}\right\}$.

8.7 h) $\sin x$ est solution de l'équation de degré 2 : $2t^2 + t - 1 = 0$ dont les solutions sont $t = -1$ et $t = \dfrac{1}{2}$. Ainsi, les x solutions sont les x tels que $\sin x = -1$ ou $\sin x = \dfrac{1}{2}$.

8.7 j) On a $\cos\dfrac{\pi}{7} = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{7}\right) = \sin\dfrac{5\pi}{14}$. Finalement, on résout $\sin x = \sin\dfrac{5\pi}{14}$.

8.8 d) Cela revient à résoudre $-\dfrac{1}{2} \leqslant \sin x \leqslant \dfrac{1}{2}$.

8.8 f) On résout « $\tan x \geqslant 1$ ou $\tan x \leqslant -1$ ».

8.8 g) Si $x \in [0, 2\pi]$, alors $t = x - \dfrac{\pi}{4} \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, 2\pi - \dfrac{\pi}{4}\right]$. On résout donc $\cos t \geqslant 0$ pour $t \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, 2\pi - \dfrac{\pi}{4}\right]$ ce qui donne $t \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right] \cup \left[\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{7\pi}{4}\right]$ et donc $x \in \left[0, \dfrac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\dfrac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$.

8.8 h) Si $x \in [0, 2\pi]$, alors $t = 2x - \dfrac{\pi}{4} \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, 4\pi - \dfrac{\pi}{4}\right]$. On résout donc $\cos t \geqslant 0$ pour $t \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, 4\pi - \dfrac{\pi}{4}\right]$ ce qui donne $t \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right] \cup \left[\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}\right] \cup \left[\dfrac{7\pi}{2}, \dfrac{15\pi}{4}\right]$ puis $x \in \left[0, \dfrac{3\pi}{8}\right] \cup \left[\dfrac{7\pi}{8}, \dfrac{11\pi}{8}\right] \cup \left[\dfrac{15\pi}{8}, 2\pi\right]$.

Fiche n° 9. Dérivation

Réponses

9.1 a) .... $\boxed{6x^2+2x-11}$

9.1 b) .... $\boxed{5x^4-6x^2+4x-15}$

9.1 c) .... $\boxed{(2x^2-2x+10)\exp(2x)}$

9.1 d) .... $\boxed{(6x-1)\ln(x-2)+\dfrac{3x^2-x}{x-2}}$

9.2 a) .... $\boxed{5(x^2-5x)^4(2x-5)}$

9.2 b) .... $\boxed{4(2x^3+4x-1)(3x^2+2)}$

9.2 c) .... $\boxed{8\cos^2(x)-6\cos(x)\sin(x)-4}$

9.2 d) .... $\boxed{-3(3\cos(x)-\sin(x))^2(3\sin(x)+\cos(x))}$

9.3 a) .... $\boxed{\dfrac{2x}{x^2+1}}$

9.3 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{x\ln(x)}}$

9.3 c) .... $\boxed{(-2x^2+3x+1)\exp(x^2+x)}$

9.3 d) .... $\boxed{6\cos(2x)\exp(3\sin(2x))}$

9.4 a) .... $\boxed{\dfrac{6x}{(x^2+1)^2}\cos\left(\dfrac{2x^2-1}{x^2+1}\right)}$

9.4 b) .... $\boxed{\dfrac{2x^2+2x-8}{(x^2+4)^2}\sin\left(\dfrac{2x+1}{x^2+4}\right)}$

9.4 c) .... $\boxed{\dfrac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}}$

9.4 d) .... $\boxed{\dfrac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}}$

9.5 a) .... $\boxed{\dfrac{(2x+3)(2\sin(x)+3)-(x^2+3x)\times 2\cos(x)}{(2\sin(x)+3)^2}}$

9.5 b) .... $\boxed{\dfrac{2-3x}{2\sqrt{x}(3x+2)^2}}$

9.5 c) .... $\boxed{-2\dfrac{(x^2+1)\sin(2x+1)+x\cos(2x+1)}{(x^2+1)^2}}$

9.5 d) .... $\boxed{\dfrac{(4x+3)\ln(x)-2x-3}{(\ln(x))^2}}$

9.6 a) .... $\boxed{2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)}$

9.6 b) .... $\boxed{\dfrac{9}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}}}$

9.6 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{1-x^2}}$

9.6 d) .... $\boxed{\dfrac{x\cos(x)-\sin(x)}{x\sin(x)}}$

9.7 a) .... $\boxed{\dfrac{10x-5}{(3-x)^2(2+x)^2}}$

9.7 b) .... $\boxed{\dfrac{2}{x+1}\left(x+\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)}$

9.7 c) .... $\boxed{\dfrac{2x^2+2x+5}{(x+2)(x-1)^2}}$

9.7 d) .... $\boxed{\dfrac{x^2}{(x+1)^2}}$

9.7 e) .... $\boxed{\dfrac{2}{x(1-\ln(x))^2}}$

Corrigés

9.1 a) On calcule : $f'(x)=(2x+3)(2x-5)+(x^2+3x+2)\times 2=6x^2+2x-11$.

9.1 b) On calcule : $f'(x)=(3x^2+3)(x^2-5)+(x^3+3x+2)\times 2x=5x^4-6x^2+4x-15$.

9.1 c) On calcule : $f'(x)=(2x-2)\exp(2x)+(x^2-2x+6)\times 2\exp(2x)=(2x^2-2x+10)\exp(2x)$.

9.1 d) On calcule : $f'(x)=(6x-1)\ln(x-2)+(3x^2-x)\times\dfrac{1}{x-2}=(6x-1)\ln(x-2)+\dfrac{3x^2-x}{x-2}$.

9.2 a) On calcule : $f'(x)=5(x^2-5x)^4(2x-5)$.

9.2 b) On calcule : $f'(x) = 2(2x^3 + 4x - 1)(6x^2 + 4) = 4(2x^3 + 4x - 1)(3x^2 + 2)$.

9.2 c) On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(\sin(x) + 2\cos(x))(\cos(x) - 2\sin(x)) = 2(\sin(x)\cos(x) - 2\sin^2(x) + 2\cos^2(x) - 4\cos(x)\sin(x) \\ &= -6\cos(x)\sin(x) - 4\sin^2(x) + 4\cos^2(x) = -6\cos(x)\sin(x) - 4(1 - \cos^2(x)) + 4\cos^2(x) \\ &= 8\cos^2(x) - 6\cos(x)\sin(x) - 4. \end{aligned}$$

9.2 d) On calcule : $f'(x) = 3(3\cos(x) - \sin(x))^2(-3\sin(x) - \cos(x)) = -3(3\cos(x) - \sin(x))^2(3\sin(x) + \cos(x))$. En développant, on trouve : $f'(x) = -54\cos^2(x)\sin(x) - 78\cos^3(x) - 9\sin(x) + 51\cos(x)$.

9.3 a) On calcule : $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$. C'est une application directe de la formule de dérivation quand $f = \ln \circ u$.

9.3 b) On calcule : $f'(x) = \dfrac{1/x}{\ln(x)} = \dfrac{1}{x\ln(x)}$.

9.3 c) On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-1)\exp(x^2 + x) + (2 - x)\exp(x^2 + x) \times (2x + 1) = (-1 + (2 - x)(2x + 1))\exp(x^2 + x) \\ &= (-1 + 4x + 2 - 2x^2 - x)\exp(x^2 + x) = (-2x^2 + 3x + 1)\exp(x^2 + x). \end{aligned}$$

9.3 d) On calcule : $f'(x) = \exp(3\sin(2x))(3 \times 2\cos(2x)) = 6\cos(2x)\exp(3\sin(2x))$.

9.4 a) On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos\left(\frac{2x^2-1}{x^2+1}\right) \times \frac{4x(x^2+1) - (2x^2-1) \times 2x}{(x^2+1)^2} = \cos\left(\frac{2x^2-1}{x^2+1}\right)\frac{4x^3 + 4x - 4x^3 + 2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{6x}{(x^2+1)^2}\cos\left(\frac{2x^2-1}{x^2+1}\right). \end{aligned}$$

9.4 b) On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin\left(\frac{2x+1}{x^2+4}\right) \times \frac{2(x^2+4) - (2x+1) \times 2x}{(x^2+4)^2} = -\sin\left(\frac{2x+1}{x^2+4}\right) \times \frac{2x^2 + 8 - 4x^2 - 2x}{(x^2+4)^2} \\ &= \frac{2x^2 + 2x - 8}{(x^2+4)^2}\sin\left(\frac{2x+1}{x^2+4}\right). \end{aligned}$$

9.4 c) On calcule : $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\sin(x)}}\cos(x) = \dfrac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}$.

9.4 d) On calcule : $f'(x) = \cos(\sqrt{x}) \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$.

9.5 a) On calcule : $f'(x) = \dfrac{(2x+3)(2\sin(x)+3) - (x^2+3x) \times 2\cos(x)}{(2\sin(x)+3)^2}$. En développant le numérateur, on trouve

$$f'(x) = \frac{-2x^2\cos(x) + 4x\sin(x) - 6x\cos(x) + 6\sin(x) + 6x + 9}{(2\sin(x)+3)^2}.$$

9.5 b) On calcule : $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(3x+2) - \sqrt{x} \times 3}{(3x+2)^2} = \dfrac{\frac{3x+2}{2\sqrt{x}} - \frac{3\sqrt{x} \times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{(3x+2)^2} = \dfrac{3x + 2 - 6x}{2\sqrt{x}(3x+2)^2} = \dfrac{2 - 3x}{2\sqrt{x}(3x+2)^2}$

9.5 c) On calcule : $f'(x) = \dfrac{-2\sin(2x+1) \times (x^2+1) - \cos(2x+1) \times 2x}{(x^2+1)^2} = -2\dfrac{(x^2+1)\sin(2x+1) + x\cos(2x+1)}{(x^2+1)^2}$.

9.5 d) On calcule : $f'(x) = \dfrac{(4x+3)\ln(x) - (2x^2+3x)\dfrac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \dfrac{(4x+3)\ln(x) - 2x - 3}{(\ln(x))^2}$

9.6 a) On calcule : $f'(x) = 2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) + x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) \times \left(\dfrac{-1}{x^2}\right) = 2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

9.6 b) On calcule : $f'(x) = \dfrac{\sqrt{9-x^2} - x\frac{1}{2\sqrt{9-x^2}}(-2x)}{\sqrt{9-x^2}^2} = \dfrac{\sqrt{9-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}}{9-x^2} = \dfrac{\frac{9-x^2+x^2}{\sqrt{9-x^2}}}{9-x^2} = \dfrac{9}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}}$

9.6 c) On a trois fonctions composées à la suite : $f = \ln(\sqrt{u})$). Donc on a, en appliquant deux fois la formule de dérivée d'une fonction composée : $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{u-x)}} \times u'(x) \times \dfrac{1}{\sqrt{u(x)}}$.

On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}} \times \frac{1(x-1)-(x+1)\times 1}{(x-1)^2} \times \frac{1}{\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}} \\ &= \frac{1}{2\times\dfrac{x+1}{x-1}} \times \frac{-2}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{-1}{x^2-1} = \frac{1}{1-x^2}. \end{aligned}$$

9.6 d) On calcule : $f'(x) = \dfrac{\cos(x)\times x - \sin(x)\times 1}{x^2} \times \dfrac{x}{\sin(x)} = \dfrac{x\cos(x) - \sin(x)}{x\sin(x)}$.

9.7 a) On calcule : $f'(x) = \dfrac{-(-1)}{(3-x)^2} + \dfrac{-1}{(2+x)^2} = \dfrac{(2+x)^2-(3-x)^2}{(3-x)^2(2+x)^2} = \dfrac{10x-5}{(3-x)^2(2+x)^2}$.

9.7 b) On calcule : $f'(x) = 2x - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{2x(x+1)-1}{x+1} = \dfrac{2x^2+2x-1}{x+1}$.

Pour le trinôme $2x^2+2x-1$, on calcule $\Delta = 4 - 4\times 2\times(-1) = 12$. On a deux racines :

$$x_1 = \frac{-2-\sqrt{12}}{2\times 2} = \frac{-2-2\sqrt{3}}{4} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}.$$

Enfin, on a $f'(x) = \dfrac{2(x-\frac{-1-\sqrt{3}}{2})(x-\frac{-1+\sqrt{3}}{2})}{x+1} = \dfrac{2}{x+1}\left(x+\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$.

9.7 c) On calcule : $f'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+2} - \dfrac{1\times(x-1)-(x+2)\times 1}{(x-1)^2} = \dfrac{2x+1}{x^2+x-2} + \dfrac{3}{(x-1)^2}$.

On cherche les racines du trinôme x^2+x-2 dont le discriminant est $\Delta = 1+8 = 9$; on identifie deux racines $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. D'où la forme factorisée : $x^2+x-2 = (x+2)(x-1)$.

Alors : $f'(x) = \dfrac{2x+1}{(x+2)(x-1)} + \dfrac{3}{(x-1)^2} = \dfrac{(2x+1)(x-1)}{(x+2)(x-1)^2} + \dfrac{3(x+2)}{(x+2)(x+1)^2} = \dfrac{2x^2+2x+5}{(x+2)(x-1)^2}$.

Le trinôme $2x^2+2x+5$ dont le discriminant est $\Delta = 4-4\times 2\times 5 = -36 < 0$ ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$.

On a : $f'(x) = \dfrac{2x^2+2x+5}{(x+2)(x-1)^2}$.

9.7 d) On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1\times(x+1)-x\times 1}{(x+1)^2} + 1 - 2\frac{1}{x+1} = \frac{1}{(x+1)^2} + 1 - \frac{2}{x+1} = \frac{1+(x+1)^2-2(x+1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1+x^2+2x+1-2x-2}{(x+1)^2} = \frac{x^2}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

9.7 e) On calcule : $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}(1-\ln(x)) - (1+\ln(x))\frac{-1}{x}}{(1-\ln(x))^2} = \dfrac{\frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x}}{(1-\ln(x))^2} = \dfrac{\frac{2}{x}}{(1-\ln(x))^2} = \dfrac{2}{x(1-\ln(x))^2}$.

Fiche n° 10. Primitives

Réponses

10.1 a) .... $\boxed{\ln|t+1|}$

10.1 b) .... $\boxed{-\dfrac{3}{t+2}}$

10.1 c) .... $\boxed{-\dfrac{3}{2(t+2)^2}}$

10.1 d) .... $\boxed{-\dfrac{\cos(4t)}{4}}$

10.2 a) .... $\boxed{\dfrac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}-\dfrac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}}$

10.2 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2t+1}}$

10.2 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\mathrm{Arcsin}(2t)}$

10.2 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{3}\mathrm{Arctan}(3t)}$

10.3 a) .... $\boxed{\dfrac{2}{3}\ln|1+t^3|}$

10.3 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{6}(1+2t^2)^{\frac{3}{2}}}$

10.3 c) .... $\boxed{-\sqrt{1-t^2}}$

10.3 d) .... $\boxed{\dfrac{3}{4}(1+7t^2)^{\frac{2}{3}}}$

10.3 e) .... $\boxed{\dfrac{1}{6}\ln(1+3t^2)}$

10.3 f) .... $\boxed{-\dfrac{1}{(1+3t^2)^2}}$

10.4 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{4}\ln^4 t}$

10.4 b) .... $\boxed{2\sqrt{\ln t}}$

10.4 c) .... $\boxed{\dfrac{2}{(3-\mathrm{e}^{2t})^2}}$

10.4 d) .... $\boxed{-\dfrac{2}{3t^{\frac{3}{2}}}}$

10.4 e) .... $\boxed{\ln|1-\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{t}|}$

10.4 f) .... $\boxed{-\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}}$

10.5 a) .... $\boxed{-\dfrac{1}{3}\cos^3 t}$

10.5 b) .... $\boxed{\mathrm{e}^{\sin t}}$

10.5 c) .... $\boxed{-\ln|\cos t|}$

10.5 d) .... $\boxed{-\ln|1-\sin t|}$

10.5 e) .... $\boxed{-2\cos\sqrt{t}}$

10.5 f) .... $\boxed{\dfrac{1}{\pi}\sin(\pi\ln t)}$

10.5 g) .... $\boxed{\tan t - t}$

10.5 h) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\tan^2 t+\ln|\cos t|}$

10.5 i) .... $\boxed{\dfrac{1}{4}\tan^4 t}$

10.5 j) .... $\boxed{2\sqrt{\tan t}}$

10.5 k) .... $\boxed{-\dfrac{1}{\tan t}}$

10.5 l) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(1-\sin t)^2}}$

10.5 m) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\mathrm{Arctan}(2t)}$

10.5 n) .... $\boxed{\mathrm{Arctan}(\mathrm{e}^t)}$

10.5 o) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}(\mathrm{Arcsin}(t))^2}$

10.5 p) .... $\boxed{\ln|\mathrm{Arcsin}(t)|}$

10.6 a) .... $\boxed{\dfrac{t}{2}+\dfrac{\sin(2t)}{4}}$

10.6 b) .... $\boxed{-\dfrac{\cos(4t)}{8}-\dfrac{\cos(2t)}{4}}$

10.6 c) .... $\boxed{-\cos t+\dfrac{1}{3}\cos^3 t}$

10.6 d) .... $\boxed{\ln(1+\sin^2 t)}$

10.6 e) .... $\boxed{\ln|\tan t|}$

10.6 f) .... $\boxed{-\mathrm{cotan}t+\tan t}$

10.6 g) .... $\boxed{\dfrac{1}{4}\ln|\tan 2t|}$

10.7 a) .... $\boxed{t+\ln|t|-\dfrac{1}{t}}$

10.7 b) .... $\boxed{\ln|t|-\dfrac{1}{2t^2}}$

10.7 c) .... $\boxed{t+\dfrac{t^3}{3}+\dfrac{t^5}{5}}$

10.7 d) .... $\boxed{t-\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t^3}{3}}$

10.7 e) .... $\boxed{t-2\ln|t+1|}$

10.7 f) .... $\boxed{t-\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t^3}{3}-\ln|t+1|}$

10.7 g) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\ln(1+t^2)-\operatorname{Arctan}(t)}$

10.7 h) .... $\boxed{\ln|t+1|+\dfrac{1}{t+1}}$

10.8 a) .... $\boxed{2(t-1)\text{ puis }\dfrac{1}{3}t^3-t^2+5t}$

10.8 b) .... $\boxed{-\dfrac{1}{t^2}\left(\dfrac{2}{t}+1\right)\text{ puis }-\dfrac{1}{t}+\ln|t|}$

10.8 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{2\sqrt{t}}+\dfrac{3}{t^4}\text{ puis }\dfrac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+\dfrac{1}{2t^2}}$

10.8 d) .... $\boxed{-\dfrac{4}{t^5}-\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{t^{5/2}}\text{ puis }-\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{t^3}-\dfrac{2}{\sqrt{t}}}$

10.8 e) .... $\boxed{2e^{2t}-3e^{-3t}\text{ puis }\dfrac{1}{2}e^{2t}-\dfrac{1}{3}e^{-3t}}$

10.8 f) .... $\boxed{3e^{3t-2}\text{ puis }\dfrac{1}{3}e^{3t-2}}$

10.8 g) ..... $\boxed{-\dfrac{t(t^3+2)}{(t-1)^2(t^2+t+1)^2}\text{ puis }\dfrac{1}{3}\ln(|t^3-1|)}$

10.8 h) .. $\boxed{-\dfrac{3t^2-2t-3}{(t^2+1)^2}\text{ puis }\dfrac{3}{2}\ln(t^2+1)-\operatorname{Arctan}(t)}$

10.8 i) .... $\boxed{\cos t(3\cos^2 t-2)\text{ puis }-\dfrac{1}{3}\cos^3 t}$

10.8 j) .... $\boxed{\sinh(t)^2+\cosh^2(t)\text{ puis }\dfrac{1}{2}\sinh^2(t)}$

10.8 k) .... $\boxed{-\dfrac{2t\sin\frac{1}{t}+\cos\frac{1}{t}}{t^4}\text{ puis }\cos\dfrac{1}{t}}$

10.8 l) .... $\boxed{\dfrac{2e^t}{(2+e^t)^2}\text{ puis }\ln(2+e^t)}$

10.8 m) ...... $\boxed{\dfrac{2\cos t+3}{(2+3\cos t)^2}\text{ puis }-\dfrac{1}{3}\ln|2+3\cos t|}$

10.8 n) .... $\boxed{\dfrac{1}{(1-t^2)^{3/2}}\text{ puis }-\sqrt{1-t^2}}$

10.8 o) .... $\boxed{2\dfrac{3\cos^2 t-1}{(1+\cos^2 t)^2}\text{ puis }-\ln(1+\cos^2(t))}$

10.8 p) .... $\boxed{(1-2t^2)e^{-t^2}\text{ puis }-\dfrac{1}{2}e^{-t^2}}$

10.8 q) .... $\boxed{\dfrac{\ln t-2}{t^2}\text{ puis }\ln t-\dfrac{1}{2}\ln^2 t}$

10.8 r) .... $\boxed{-\dfrac{1+\ln t}{t^2\ln^2 t}\text{ puis }\ln|\ln t|}$

10.8 s) .... $\boxed{\dfrac{\cos\ln t-\sin\ln t}{t^2}\text{ puis }-\cos(\ln t))}$

10.8 t) .... $\boxed{-\dfrac{e^t(e^{2t}-1)}{(1+e^{2t})^2})\text{ puis }\operatorname{Arctan}(e^t)}$

Corrigés

10.1 a) Admet des primitives sur $]-\infty,-1[$ ou $]-1,+\infty[$.

10.1 b) Admet des primitives sur $]-\infty,-2[$ ou $]-2,+\infty[$.

10.1 c) Admet des primitives sur $]-\infty,-2[$ ou $]-2,+\infty[$.

10.1 d) Admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

10.2 a) Admet des primitives sur $]0,+\infty[$.

10.2 b) Admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

10.2 c) Admet des primitives sur $]-1/2,1/2[$.

10.2 d) Admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

10.5 g) $\displaystyle\int^t \tan^2\theta \,\mathrm{d}\theta = \int^t ((1+\tan^2\theta)-1)\,\mathrm{d}\theta = \tan t - t + \text{cte}$

10.5 h) $\displaystyle\int^t \tan^3\theta \,\mathrm{d}\theta = \int^t ((\tan^2\theta+1)\tan\theta - \tan\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\tan^2 t + \ln|\cos t| + \text{cte}$

10.6 a) $\displaystyle\int^x \cos^2\theta \,\mathrm{d}\theta = \int^t \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\,\mathrm{d}\theta = \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} + \text{cte}$

10.6 b) On a

$$\begin{aligned}\int^t \cos(\theta)\sin(3\theta)\,\mathrm{d}\theta &= \int^t \frac{1}{2}(\sin(3\theta+\theta)+\sin(3\theta-\theta))\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int^t \frac{1}{2}(\sin(4\theta)+\sin(2\theta))\,\mathrm{d}\theta = -\frac{\cos(4t)}{8} - \frac{\cos(2t)}{4} + \text{cte}.\end{aligned}$$

10.6 c) $\displaystyle\int^t \sin^3\theta \,\mathrm{d}\theta = \int^t (1-\cos^2\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = -\cos t + \frac{1}{3}\cos^3 t + \text{cte}$

10.6 d) $\displaystyle\int^t \frac{\sin(2\theta)}{1+\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int^t \frac{2\sin\theta\cos\theta}{1+\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta = \ln(1+\sin^2 t) + \text{cte}$

10.6 e) $\displaystyle\int^t \frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \int^t \frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int^t \left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)\mathrm{d}\theta = \ln|\sin t| - \ln|\cos t| + \text{cte} = \ln|\tan t| + \text{cte}$

10.6 f) $\displaystyle\int^t \frac{\mathrm{d}\theta}{\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)} = \int^t \frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta = \int^t \left(\frac{1}{\sin^2\theta}+\frac{1}{\cos^2\theta}\right)\mathrm{d}\theta = -\text{cotan}(t) + \tan(t) + \text{cte}$

10.6 g) On a

$$\begin{aligned}\int^t \frac{\mathrm{d}\theta}{\sin(4\theta)} &= \int^t \frac{\cos^2(2\theta)+\sin^2(2\theta)}{2\sin(2\theta)\cos(2\theta)}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int^t \frac{1}{4}\left(\frac{2\cos(2\theta)}{\sin(2\theta)}+\frac{2\sin(2\theta)}{\cos(2\theta)}\right)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{4}\ln|\sin(2t)| - \frac{1}{4}\ln|\cos(2t)| + \text{cte} = \frac{1}{4}\ln|\tan 2t| + \text{cte}.\end{aligned}$$

10.7 c) On a $1-t^6 = 1^3-(t^2)^3 = (1-t^2)(1+t^2+t^4)$ donc finalement on cherche une primitive de $1+t^2+t^4$.

10.7 e) $\displaystyle\int^t \frac{\theta-1}{\theta+1}\,\mathrm{d}\theta = \int^t \frac{\theta+1-2}{\theta+1}\,\mathrm{d}\theta = \int^t \left(1-\frac{2}{\theta+1}\right)\mathrm{d}\theta = t - 2\ln|t+1| + \text{cte}$

10.7 f) $\displaystyle\int^t \frac{\theta^3}{\theta+1}\,\mathrm{d}\theta = \int^t \frac{\theta^3+1-1}{\theta+1}\,\mathrm{d}\theta = \int^t \frac{(\theta+1)(1-\theta+\theta^2)-1}{\theta+1}\,\mathrm{d}\theta = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \ln|t+1| + \text{cte}$

10.7 h) $\displaystyle\int^t \frac{\theta}{(\theta+1)^2}\,\mathrm{d}\theta = \int^t \frac{\theta+1-1}{(\theta+1)^2}\,\mathrm{d}\theta = \int^t \left(\frac{1}{\theta+1}-\frac{1}{(\theta+1)^2}\right)\mathrm{d}\theta = \ln|t+1| + \frac{1}{t+1} + \text{cte}$

Fiche n° 11. Calcul d'intégrales

Réponses

11.1 a) .... $\boxed{\text{Positif}}$

11.1 b) .... $\boxed{\text{Négatif}}$

11.1 c) .... $\boxed{\text{Positif}}$

11.2 a) .... $\boxed{14}$

11.2 b) .... $\boxed{50}$

11.2 c) .... $\boxed{\dfrac{147}{2}}$

11.2 d) .... $\boxed{-54}$

11.2 e) .... $\boxed{0}$

11.2 f) .... $\boxed{\dfrac{5}{2}}$

11.3 a) .... $\boxed{8}$

11.3 b) .... $\boxed{-2}$

11.3 c) .... $\boxed{\dfrac{8}{3}}$

11.3 d) .... $\boxed{0}$

11.3 e) .... $\boxed{-\dfrac{1}{30}}$

11.3 f) .... $\boxed{-\dfrac{2}{101}}$

11.4 a) .... $\boxed{0}$

11.4 b) .... $\boxed{1}$

11.4 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

11.4 d) .... $\boxed{18}$

11.4 e) ...... $\boxed{e^2 - e^{-3}}$

11.4 f) .... $\boxed{-\ln 3}$

11.5 a) .... $\boxed{78}$

11.5 b) ..... $\boxed{2(e^3 - 1)}$

11.5 c) . $\boxed{\dfrac{1}{\pi}\ln\left(1+\dfrac{\pi}{2}\right)}$

11.5 d) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{6}}$

11.5 e) .... $\boxed{6}$

11.5 f) ...... $\boxed{\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

11.6 a) .... $\boxed{0}$

11.6 b) .... $\boxed{0}$

11.6 c) ..... $\boxed{\ln\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)}$

11.6 d) .... $\boxed{-\dfrac{1}{384}}$

11.6 e) ... $\boxed{\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{e}\right)}$

11.6 f) .... $\boxed{\dfrac{7}{48}}$

11.7 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{e+1}}$

11.7 b) .... $\boxed{\dfrac{17}{2}}$

11.7 c) .... $\boxed{e^2}$

11.7 d) .... $\boxed{3e - 4}$

11.7 e) .... $\boxed{-\dfrac{1}{3}}$

11.7 f) .... $\boxed{\dfrac{5}{8}}$

11.8 a) .... $\boxed{0}$

11.8 b) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{4}}$

11.8 c) .... $\boxed{\dfrac{99}{\ln 10}}$

11.8 d) .... $\boxed{\dfrac{e - \frac{1}{e}}{2}}$

11.8 e) .... $\boxed{\dfrac{2}{3}}$

11.8 f) .... $\boxed{\dfrac{2\pi}{9}}$

Corrigés

11.1 a) On intègre une fonction positive et les bornes sont « dans le bon sens ».

11.1 b) $\displaystyle\int_5^{-3} |\sin 7x|\,dx = -\int_{-3}^{5} |\sin 7x|\,dx$. Cette dernière intégrale a ses bornes « dans le bon sens », on peut l'interpréter comme une aire. Elle est positive car on intègre une fonction positive. Le signe de l'intégrale initiale est donc négatif.

11.1 c) $\displaystyle\int_0^{-1} \sin x\,dx = -\int_{-1}^{0} \sin x\,dx$. Cette dernière intégrale a ses bornes « dans le bon sens », on peut l'interpréter comme une aire. sin est négative sur $[-\pi, 0]$ donc sur $[-1, 0]$, $\displaystyle\int_{-1}^{0} \sin x\,dx$ est donc négative. Le signe de l'intégrale initiale est donc positif.

11.2 a) Il s'agit de l'aire d'un rectangle de largeur 2 et de longueur 7.

11.2 b) On commence par mettre les bornes « dans le bon sens » : $\displaystyle\int_7^{-3} -5\,dx = -\int_{-3}^{7} -5\,dx = \int_{-3}^{7} 5\,dx$. Cette dernière intégrale est l'aire d'un rectangle dont les côtés mesurent 10 et 5.

11.2 c) Il s'agit de l'aire du triangle dont les sommets sont l'origine O, le point $A(7;0)$ et $B(7;21)$. Ce triangle est rectangle en A et son aire est $\dfrac{1}{2} \times AO \times AB$.

11.2 d) Les bornes sont « dans le bon sens », on peut donc interpréter l'intégrale comme une aire algébrique. Sur l'intervalle $[2, 8]$, la courbe de $f(x) = 1 - 2x$ est située sous l'axe des abscisses, l'aire algébrique sera négative.

Il s'agit de calculer l'aire du trapèze rectangle dont les sommets sont $A(2; 0)$, $B(8; 0)$, $C(8; -15)$ et $D(2; -3)$. L'aire de ce trapèze rectangle est $\dfrac{1}{2} \times AB \times (AD + BC) = \dfrac{1}{2} \times 6 \times (3 + 15)$.

11.2 e) Avec la relation de Chasles, on a $\displaystyle\int_{-2}^{2} \sin x \,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} \sin x \,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} \sin x \,\mathrm{d}x$.La fonction sinus étant impaire, les aires algébriques $\displaystyle\int_{-2}^{0} \sin x \,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{0}^{2} \sin x \,\mathrm{d}x$ sont opposées, il suit que leur somme est nulle.

11.2 f) Les bornes étant « dans le bon sens », on interprète cette intégrale comme une aire algébrique. Cette aire est composée de deux triangles rectangles (les intégrales de -2 à 0 et de 0 à 1).

11.3 a) Les bornes étant « dans le bon sens », on interprète cette intégrale comme une aire algébrique d'un rectangle.

11.3 b) $\displaystyle\int_{1}^{3} 2x - 5 \,\mathrm{d}x = \Big[x^2 - 5x\Big]_{1}^{3} = (3^2 - 15) - (1^2 - 5) = -2.$

11.3 c) $\displaystyle\int_{-2}^{0} x^2 + x + 1 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x\right]_{-2}^{0} = 0 - \left(\frac{1}{3}(-2)^3 + \frac{1}{2}(-2)^2 - 2\right) = \frac{8}{3}.$

11.3 d) La fonction intégrée est impaire, son intégrale sur un segment symétrique par rapport à 0 est donc nulle.

11.3 e) $\displaystyle\int_{0}^{1} x^5 - x^4 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{5}x^5\right]_{0}^{1} = \frac{1}{6} - \frac{1}{5} = -\frac{1}{30}.$

11.3 f) $\displaystyle\int_{1}^{-1} x^{100} \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{101}x^{101}\right]_{1}^{-1} = -\frac{2}{101}.$

11.4 a) La fonction intégrée est impaire, son intégrale sur un segment symétrique par rapport à 0 est donc nulle.

11.4 b) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos x \,\mathrm{d}x = \Big[\sin x\Big]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1.$

11.4 c) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{1}^{2} = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$

11.4 d) $\displaystyle\int_{1}^{100} \frac{1}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x = \Big[2\sqrt{x}\Big]_{1}^{100} = 18.$

11.4 e) $\displaystyle\int_{-3}^{2} \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{e}^x\Big]_{-3}^{2} = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-3}.$

11.4 f) $\displaystyle\int_{-3}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \Big[\ln|x|\Big]_{-3}^{-1} = -\ln 3.$

11.5 a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} (2x + 1)^3 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{8}(2x + 1)^4\right]_{-1}^{2} = \frac{625}{8} - \frac{1}{8} = 78.$

11.5 b) $\displaystyle\int_{-2}^{4} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x + 1} \,\mathrm{d}x = \Big[2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x + 1}\Big]_{-2}^{4} = 2(\mathrm{e}^3 - 1).$

11.5 c) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\pi x + 2} = \left[\frac{1}{\pi}\ln|\pi x + 2|\right]_{0}^{1} = \frac{1}{\pi}\ln\left(\frac{\pi + 2}{2}\right).$

11.5 d) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{3}\cos(3x)\right]_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{2}}{2}.$

11.5 e) $\displaystyle\int_0^{33} \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}\right]_0^{33} = \frac{2}{3}(10-1) = 6.$

11.5 f) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\mathrm{d}x = \left[-\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} = -\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}.$

11.6 a) $\displaystyle\int_1^3 \frac{x-2}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2-4x+5)\right]_1^3 = 0.$

11.6 b) La fonction intégrée est impaire, son intégrale sur un segment symétrique par rapport à 0 est donc nulle.

11.6 c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\cos x}x\,\mathrm{d}x = \Big[-\ln(\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{6}} = -\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$

11.6 d) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x(\cos x)^5\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{6}(\cos x)^6\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^6.$

11.6 e) $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2-1}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right).$

11.6 f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^4}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\frac{-1}{3}\frac{1}{(x^2+1)^3}\right]_0^1 = \frac{7}{48}.$

11.7 a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\right]_0^1 = -\frac{1}{\mathrm{e}+1}+\frac{1}{2}.$

11.7 b) $x+1$ est négatif sur $[-2,-1]$ et positif sur $[-1,3]$. On en déduit : $\displaystyle\int_{-2}^3 |x+1|\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{-1} -x-1\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^3 x+1\,\mathrm{d}x.$
Ces deux intégrales se calculent avec des primitives ou en les interprétant comme des aires de triangles.

11.7 c) $\displaystyle\int_{-1}^2 \max(1,\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 \mathrm{d}x + \int_0^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^2.$

11.7 d) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{3x-2\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = 3\int_1^{\mathrm{e}} \mathrm{d}x - 2\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = 3(\mathrm{e}-1) - 2\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^{\mathrm{e}} = 3\mathrm{e}-4.$

11.7 e) On calcule

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\sin(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos^2(x)-1)\sin(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{2}{3}\Big[\cos^3(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \Big[\cos(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

11.7 f) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} |\cos x\sin x|\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} |\frac{1}{2}\sin(2x)|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} |\sin(2x)|\,\mathrm{d}x$. Le signe de $\sin(2x)$ est négatif sur $\left[-\frac{\pi}{3},0\right]$ et positif sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, il suit que

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} |\sin(2x)|\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 -\sin(2x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big[\cos(2x)\Big]_{-\frac{\pi}{3}}^0 - \frac{1}{2}\Big[\cos(2x)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{5}{4}.$$

Le résultat final est donc $\dfrac{5}{8}$.

11.8 a) La fonction intégrée est impaire, son intégrale sur un segment symétrique par rapport à 0 est donc nulle.

11.8 b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \Big[\arctan(x)\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$

11.8 c) $\displaystyle\int_0^2 10^x\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \mathrm{e}^{x\ln 10}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{\ln 10}\mathrm{e}^{x\ln 10}\right]_0^2 = \frac{\mathrm{e}^{2\ln 10}-1}{\ln 10} = \frac{99}{\ln 10}.$

11.8 d) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{sh}(x)\Big]_0^1 = \mathrm{sh}(1) = \frac{\mathrm{e}-\frac{1}{\mathrm{e}}}{2}.$

11.8 e) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$

11.8 f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{2}{1+9x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{1+(3x)^2}\,\mathrm{d}x = 2\left[\frac{1}{3}\arctan(3x)\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{2}{3}\arctan(\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{9}.$

Fiche n° 12. Intégration par parties

Réponses

12.1 a) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{2}-1}$

12.1 b) .... $\boxed{\dfrac{5}{2}\mathrm{ch}(2)-\dfrac{1}{2}\mathrm{sh}(2)-\dfrac{3}{2}}$

12.1 c) .... $\boxed{4}$

12.1 d) .... $\boxed{\dfrac{(\ln(2))^2 2^{\ln(2)}-2\ln(2)-2^{\ln(2)}+2}{(\ln(2))^2}}$

12.1 e) .... $\boxed{1}$

12.1 f) .... $\boxed{2\ln 2-\dfrac{3}{4}}$

12.1 g) .... $\boxed{\ln(2)-2+\dfrac{\pi}{2}}$

12.1 h) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}}$

12.1 i) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1}$

12.1 j) .... $\boxed{-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}+\dfrac{4}{3}}$

12.1 k) .... $\boxed{\dfrac{4}{3}\sqrt{2}\ln(2)-\dfrac{8}{9}\sqrt{2}+\dfrac{4}{9}}$

12.1 l) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\ln 2-\dfrac{\pi^2}{32}}$

12.2 a) .... $\boxed{\begin{cases}\mathbb{R} \to \mathbb{R}\\ x \mapsto (-x+2)\mathrm{e}^x\end{cases}}$

12.2 b) .... $\boxed{\begin{cases}\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}\\ x \mapsto -\dfrac{1+\ln x}{x}\end{cases}}$

12.2 c) .... $\boxed{\begin{cases}\mathbb{R} \to \mathbb{R}\\ x \mapsto x\arctan(x)-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)\end{cases}}$

12.2 d) .... $\boxed{\begin{cases}\mathbb{R} \to \mathbb{R}\\ x \mapsto x\mathrm{sh}(x)-\mathrm{ch}(x)\end{cases}}$

12.3 a) .... $\boxed{\dfrac{5}{2}-\mathrm{e}^2}$

12.3 b) .... $\boxed{\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}+1}{2}}$

12.4 a) .... $\boxed{\begin{cases}\mathbb{R} \to \mathbb{R}\\ x \mapsto \dfrac{1}{2}(-\cos(x)\mathrm{sh}(x)+\sin(x)\mathrm{ch}(x))\end{cases}}$

12.4 b) .... $\boxed{\begin{cases}\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}\\ x \mapsto x\ln^2 x-2x\ln x+2x\end{cases}}$

12.4 c) .... $\boxed{\begin{cases}\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}\\ x \mapsto x^3\left(\dfrac{1}{3}\ln^2 x-\dfrac{2}{9}\ln x+\dfrac{2}{27}\right)\end{cases}}$

12.4 d) .... $\boxed{\begin{cases}]-1,1[\to \mathbb{R}\\ x \mapsto \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\arccos(x)}\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)\end{cases}}$

Corrigés

12.1 a) On choisit $u'(t)=\cos t$ et $v(t)=t$. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\,\mathrm{d}t=[t\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}-1.$

....

12.1 b) On choisit $u'(t)=\mathrm{sh}(2t)$ et $v(t)=2t+3$. $\displaystyle\int_0^1(2t+3)\mathrm{sh}(2t)\,\mathrm{d}t=\left[(2t+3)\frac{\mathrm{ch}(2t)}{2}\right]_0^1-\int_0^1\mathrm{ch}(2t)\,\mathrm{d}t=\frac{5}{2}\mathrm{ch}(2)-\frac{3}{2}-\frac{\mathrm{sh}(2)}{2}.$

....

12.1 c) On choisit $v(t)=t$ et $u'(t)=\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}$. $\displaystyle\int_0^2 t\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t=\left[2t\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\right]_0^2-2\int_0^2\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t=4e-4\left[\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\right]_0^2=4.$

....

12.1 d) On choisit $v(t)=t$ et $u'(t)=2^t$. $\displaystyle\int_1^{\ln(2)} t2^t\,\mathrm{d}t=\int_1^{\ln(2)} t\mathrm{e}^{t\ln(2)}\,\mathrm{d}t=\left[t\frac{1}{\ln(2)}2^t\right]_1^{\ln(2)}-\frac{1}{\ln(2)}\int_1^{\ln(2)}\mathrm{e}^{t\ln(2)}\,\mathrm{d}t=2^{\ln(2)}-\frac{2}{\ln(2)}-\frac{1}{(\ln(2))^2}[2^t]_1^{\ln(2)}=\frac{(\ln(2))^2 2^{\ln(2)}-2\ln(2)-2^{\ln(2)}+2}{(\ln(2))^2}.$

....

12.1 e) On choisit $u'(t)=1$ et $v(t)=\ln t$. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\ln t\,\mathrm{d}t=[t\ln t]_1^{\mathrm{e}}-\int_1^{\mathrm{e}}1\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}-(\mathrm{e}-1)=1.$

12.1 f) On choisit $u'(t) = t$ et $v(t) = \ln t$. $\displaystyle\int_1^2 t\ln t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}t^2\ln t\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}t\,\mathrm{d}t = 2\ln 2 - \frac{1}{4}\left[t^2\right]_1^2 = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$.

12.1 g) On choisit $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln(1+t^2)$. $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t = \left[t\ln(1+t^2)\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \ln(2) - 2\int_0^1\left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = \ln 2 - 2[t - \arctan(t)]_0^1 = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}$.

12.1 h) On choisit $u'(t) = t$ et $v(t) = \arctan t$. On a

$$\int_0^1 t\arctan t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\arctan t\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1\left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

12.1 i) On choisit $u'(t) = 1$ et $v(t) = \arcsin t$. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin t\,\mathrm{d}t = [t\arcsin t]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{12} + \left[\sqrt{1-t^2}\right]_0^{\frac{1}{2}}$.

12.1 j) On choisit $u'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t}}$ et $v(t) = t$. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t = \left[2t\sqrt{1+t}\right]_0^1 - 2\int_0^1 \sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{2} - \frac{4}{3}\left[(1+t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = -\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{4}{3}$.

12.1 k) On choisit $u'(t) = \sqrt{1+t}$ et $v(t) = \ln(1+t)$. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+t}\ln(1+t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}\ln(1+t)\right]_0^1 - \frac{2}{3}\int_0^1 \sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{4}{3}\sqrt{2}\ln(2) - \frac{2}{3}\left[\frac{2}{3}(1+t))^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{4}{3}\sqrt{2}\ln(2) - \frac{8}{9}\sqrt{2} + \frac{4}{9}$.

12.1 l) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} t\tan^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t\big(1+\tan^2 t\big)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{4}} t\,\mathrm{d}t$. On choisit dans la première intégrale, $v(t) = t$ et $u'(t) = 1 + \tan^2 t$. On obtient $\displaystyle[t\tan t]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan t\,\mathrm{d}t - \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + [\ln\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{\pi^2}{32} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi^2}{32}$.

12.2 a) Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$, y est continue et admet donc des primitives. Soit $x \in \mathbb{R}$, en choisissant $u'(t) = \mathrm{e}^t$ et $v(t) = -t+1$, on a $\displaystyle\int_0^x (-t+1)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \left[(-t+1)\mathrm{e}^t\right]_0^x + \int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = (-x+1)\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x - 2$. Ainsi, $x \mapsto (-x+2)\mathrm{e}^x$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto (-x+1)\mathrm{e}^x$.

12.2 b) Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, y est continue et admet donc des primitives. Soit $x > 0$, par intégration par parties avec $u'(t) = \dfrac{1}{t^2}$ et $v(t) = \ln t$, on a $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\ln t}{t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 1$. Ainsi, $x \mapsto -\dfrac{\ln x + 1}{x}$ est donc une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de f

12.2 c) La fonction est définie sur $\mathbb{R}$ et y est continue. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a en choisissant $u'(t) = 1$ et $v(t) = \arctan t$, $\displaystyle\int_0^x \arctan(t)\,\mathrm{d}t = [t\arctan t]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. D'où une primitive.

12.2 d) La fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a, en choisissant $v(t) = t$ et $u'(t) = \mathrm{ch}t$, $\displaystyle\int_0^x t\mathrm{ch}(t)\,\mathrm{d}t = [t\mathrm{sh}(t)]_0^x - \int_0^x \mathrm{sh}(t)\,\mathrm{d}t = x\mathrm{sh}(x) - \mathrm{ch}(x) + 1$. D'où une primitive.

12.3 a) On effectue deux intégrations par parties successives : pour la première, $u'(t) = \mathrm{e}^{2t}$ et $v(t) = t^2 + 3t - 4$ et ainsi $\displaystyle\int_0^1 (t^2+3t-4)\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t = \left[(t^2+3t-4)\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 (2t+3)\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\,\mathrm{d}t$. Puis, seconde intégration par parties avec, $v(t) = 2t+3$ et $u'(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{2t}}{2}$ d'où :$\displaystyle -\int_0^1 (2t+3)\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\,\mathrm{d}t = 2 - \left[(2t+3)\frac{\mathrm{e}^{2t}}{4}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t = \frac{11}{4} - \frac{5}{4}\mathrm{e}^2 + \frac{1}{4}\left[\mathrm{e}^{2t}\right]_0^1 = \frac{5}{2} - \mathrm{e}^2$.

12.3 b) On choisit d'abord $u' = \exp$ et $v = \sin$; d'où : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t \sin t \, \mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^t \sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t \cos t \, \mathrm{d}t$. Ensuite $u' = \exp$ et $v = \cos$, d'où : $\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - \left[\mathrm{e}^t \cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t \sin t \, \mathrm{d}t$. Finalement, $2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t \sin t \, \mathrm{d}t = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + 1$.

12.4 a) On effectue deux intégrations par parties successives pour déterminer, pour $x \in \mathbb{R}$, $\int_0^x \sin(t)\mathrm{sh}(t) \, \mathrm{d}t$. On commence par choisir $u' = \sin$ et $v = \mathrm{sh}$ cela donne $\int_0^x \sin(t)\mathrm{sh}(t) \, \mathrm{d}t = [-\cos(t)\mathrm{sh}(t)]_0^x + \int_0^x \cos(t)\mathrm{ch}(t) \, \mathrm{d}t$. Puis, on choisit $u' = \cos$ et $v = \mathrm{ch}$, ce qui donne $-\cos(x)\mathrm{sh}(x) + [\sin(t)\mathrm{ch}(t)]_0^x - \int_0^x \sin(t)\mathrm{sh}(t) \, \mathrm{d}t$. Finalement, $\int_0^x \sin(t)\mathrm{sh}(t) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}(-\cos(x)\mathrm{sh}(x) + \sin(x)\mathrm{ch}(x))$.

12.4 b) Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et y est continue. Soit $x > 0$, en choisissant $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln^2 t$ on obtient $\int_1^x \ln^2 t \, \mathrm{d}t = \left[t \ln^2 t\right]_1^x - \int_1^x 2 \ln t \, \mathrm{d}t$. Puis, en choisissant $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln t$, on obtient $x \ln^2 x - 2[t \ln t]_1^x + 2 \int_1^x 1 \, \mathrm{d}t = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x - 2$. Ainsi, $x \mapsto x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x$ est une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $x \mapsto \ln^2 x$.

12.4 c) La fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Si $x > 0$, alors, avec $u'(t) = t^2$ et $v(t) = \ln^2(t)$, on a : $\int_1^x t^2 \ln^2 t \, \mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3} \ln^2 t\right]_1^x - \frac{2}{3} \int_1^x t^2 \ln t \, \mathrm{d}t$ puis avec $u'(t) = t^2$ et $v(t) = \ln(t)$, on obtient $\frac{x^3}{3} \ln^2 x - \frac{2}{9}\left[t^3 \ln t\right]_1^x + \frac{2}{9} \int_1^x t^2 \, \mathrm{d}t = \frac{x^3 \ln^2 x}{3} - \frac{2}{9} x^3 \ln x + \frac{2}{27}(x^3 - 1)$. D'où une primitive.

12.4 d) La fonction est définie et continue sur $]-1, 1[$. Si $x \in]-1, 1[$, alors, en posant $u'(t) = 1$ et $v(t) = \mathrm{e}^{\arccos(t)}$, on obtient $\int_0^x \mathrm{e}^{\arccos(t)} \, \mathrm{d}t = \left[t\mathrm{e}^{\arccos(t)}\right]_0^x - \int_0^x \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} \mathrm{e}^{\arccos(t)} \, \mathrm{d}t$, ensuite, en posant $u'(t) = -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ et $v(t) = \mathrm{e}^{\arccos(t)}$, on obtient $x\mathrm{e}^{\arccos(x)} - \left[\sqrt{1-t^2}\mathrm{e}^{\arccos(t)}\right]_0^x + \int_0^x \sqrt{1-t^2} \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}} \mathrm{e}^{\arccos(t)} \, \mathrm{d}t = x\mathrm{e}^{\arccos(x)} - \sqrt{1-x^2}\mathrm{e}^{\arccos(x)} + \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^x \mathrm{e}^{\arccos(t)} \, \mathrm{d}t$. D'où $\int_0^x \mathrm{e}^{\arccos(t)} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\arccos(x)}\left(x - \sqrt{1-x^2}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$.

Fiche n° 13. Changements de variable

Réponses

13.1 a) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{2}}$

13.1 b) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{6}}$

13.1 c) .... $\boxed{2\arctan(\mathrm{e}) - \dfrac{\pi}{2}}$

13.1 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{4}}$

13.1 e) .... $\boxed{\dfrac{1}{12}}$

13.1 f) .... $\boxed{2\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)}$

13.2 a) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}}$

13.2 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{2\mathrm{e}+1}{3}\right)}$

13.2 c) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{2}}$

13.2 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{4} + \dfrac{\pi}{8}}$

13.2 e) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{12}}$

13.2 f) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{2}}$

13.3 a) .... $\boxed{2\mathrm{e}^2}$

13.3 b) .... $\boxed{-2((\sqrt{3}-1)\ln(\sqrt{3}-1) - 4 + 2\sqrt{3}}$

13.4 a) .... $\boxed{\left\{\begin{array}{ccc} \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan x + \ln\tan(x) \end{array}\right.}$

13.4 b) .... $\boxed{\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{2} - \dfrac{\mathrm{e}^{-2x}}{4} \end{array}\right.}$

13.4 c) .... $\boxed{\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2\arctan\left(\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}\right) \end{array}\right.}$

13.4 d) .... $\boxed{\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{3}{2}\ln(x^{\frac{2}{3}} + 1) \end{array}\right.}$

13.4 e) .... $\boxed{\left\{\begin{array}{ccc}]1, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arctan\sqrt{x^2 - 1} \end{array}\right.}$

Corrigés

13.1 a) On pose $t = \sin\theta$ avec $\theta \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. On a $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta} = \cos\theta$ et donc

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2\theta)+1}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

13.1 b) On pose $u = \sqrt{t}$ avec $t \in [1,3]$, donc $t = u^2$ et $u \in \left[1, \sqrt{3}\right]$. On a $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = 2u$ et donc $dt = 2udu$. Ainsi,

$$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2u}{u+u^3}\,\mathrm{d}u = 2\Big[\arctan u\Big]_1^{\sqrt{3}} = 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

13.1 c) On pose $u = \mathrm{e}^t$ avec $t \in [0,1]$, donc $t = \ln u$ et $u \in [1, \mathrm{e}]$. On a $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \dfrac{1}{u}$ et donc $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}u}{u}$. On obtient

$$\int_0^1 \frac{1}{\operatorname{ch} t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{2}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{2}{u+\frac{1}{u}}\frac{\mathrm{d}u}{u} = 2\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = 2\Big[\arctan u\Big]_1^{\mathrm{e}} = 2\arctan(\mathrm{e}) - \frac{\pi}{2}.$$

13.1 d) On pose $u = \sin t$ avec $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. On a $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \cos t$ et donc $\mathrm{d}u = \cos t\,\mathrm{d}t$. Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 u^3\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\cos t\,\mathrm{d}t$.
Finalement, on trouve

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\cos t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{4}u^4\right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

13.1 e) Remarquons qu'on a $\cos^3 t = (1-\sin^2 t)\cos t$. On pose $u = \sin t$ avec $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On a $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \cos t$ donc $\mathrm{d}u = \cos t\,\mathrm{d}t$. Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 u^3(1-u^2)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos^3 t\,\mathrm{d}t$. Finalement,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\cos^3 t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{4}u^4 - \frac{1}{6}u^6\right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

13.1 f) On pose $u = \sqrt{t}$ avec $t \in [1,4]$, donc $t = u^2$ et $u \in [1,2]$. On a $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = 2u$.

Ainsi, $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{t+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \frac{2u}{u^2+u}\,\mathrm{d}u = 2\int_1^2 \frac{1}{1+u}\,\mathrm{d}u = 2\Big[\ln(1+u)\Big]_1^2 = 2(\ln(3)-\ln(2))$.

13.2 a) On pose $u = \cos t$ avec $t \in [0,\pi]$. On a $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\sin t$. Ainsi, $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{3+u^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^\pi \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$ et finalement,

$\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int_{-1}^1 \frac{1}{1+\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{u}{\sqrt{3}}\right]_{-1}^1 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

13.2 b) On pose $u = \mathrm{e}^t$ avec $t \in [0,1]$, donc $t = \ln u$ et $u \in [1,\mathrm{e}]$. On a $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \dfrac{1}{u}$ donc $\mathrm{d}t = \dfrac{1}{u}\,\mathrm{d}u$.

Finalement, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2+\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{2+\frac{1}{u}}\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{2u+1}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{2}\ln(2u+1)\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2\mathrm{e}+1}{3}\right)$.

13.2 c) On pose $u = \dfrac{1}{2}t - 1$ avec $t \in [2,4]$, donc $t = 2u+2$ et $u \in [0,1]$. On a donc $\mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}u$.

Ainsi, $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{4t-t^2}}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-4u^2}}\,\mathrm{d}u = \Big[\arcsin u\Big]_0^1 = \frac{\pi}{2}$.

13.2 d) On pose $t = \tan u$ avec $u \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. On a $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = (1+\tan^2 u)$.

Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 u}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 u\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2u)+1}{2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}$.

13.2 e) On pose $u = \dfrac{1}{t}$ avec $t \in \left[\sqrt{2}, 2\right]$. On a $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = -\dfrac{1}{u^2}$.

Ainsi, $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t = -\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\frac{1}{u}\sqrt{\frac{1}{u^2}-1}}\frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u = -\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u = -\Big[\arcsin u\Big]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{12}$.

13.2 f) On pose $u = \ln(t)$ avec $t \in [\mathrm{e},\ \mathrm{e}^2]$, donc $t = \mathrm{e}^u$ et $u \in [1,2]$. On a $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \mathrm{e}^u$ et

$$\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln t}{t+t\ln^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \frac{u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{2}\ln(1+u^2)\right]_1^2 = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}.$$

13.3 a) On pose $u = \sqrt{t}$ avec $t \in [1,4]$, donc on a $t = u^2$ avec $u \in [1,2]$.

On a alors $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = 2u$ d'où $\displaystyle\int_1^4 \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 2u\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u$. Cette nouvelle intégrale peut se calculer en faisant une intégration par parties. On trouve : $\displaystyle\int_1^2 2u\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = \Big[2u\mathrm{e}^u\Big]_1^2 - \int_1^2 2\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = 2\mathrm{e}^2$.

13.3 b) On pose $u = \sqrt{t}$ avec $t \in [3,4]$, donc on a $t = u^2$ avec $u \in [\sqrt{3}, 2]$.

On a alors $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = 2u$ d'où $\displaystyle\int_3^4 \frac{\ln\left(\sqrt{t}-1\right)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{\ln(u-1)}{u}2u\,\mathrm{d}u = 2\int_{\sqrt{3}}^2 \ln(u-1)\,\mathrm{d}u$.

On fait maintenant une intégration par parties :

$$2\int_{\sqrt{3}}^2 \ln(u-1)\,\mathrm{d}u = 2\Big[(u-1)\ln(u-1)\Big]_{\sqrt{3}}^2 - 2\int_{\sqrt{3}}^2 \mathrm{d}u = -2((\sqrt{3}-1)\ln(\sqrt{3}-1) - 4 + 2\sqrt{3}.$$

13.4 a) La fonction est bien continue. Soit $(a,x) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[^2$.

On calcule $\displaystyle\int_a^x \frac{\cos t + \sin t}{\sin t \cos^2 t}\,\mathrm{d}t$ qui est aussi $\displaystyle\int_a^x \frac{1 + \frac{\sin t}{\cos t}}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$ en posant $u = \tan t$.

On a $\dfrac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}u$ et, ainsi, $\displaystyle\int_a^x \frac{\cos t + \sin t}{\sin t \cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_{\tan a}^{\tan x} \left(1 + \frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u = \Big[u + \ln u\Big]_{\tan a}^{\tan x} = \tan x + \ln\tan(x) + C.$

13.4 b) Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$, y est continue et admet donc des primitives. Soit $x \in \mathbb{R}$. On s'intéresse à $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1 + \mathrm{th}(t)}\,\mathrm{d}t$ dans laquelle on pose $u = \mathrm{e}^t$ c'est-à-dire $t = \ln u$. On a donc $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \dfrac{1}{u}$ et ainsi

$$\int_0^x \frac{1}{1+\mathrm{th}(t)}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\mathrm{e}^x} \frac{1}{1 + \frac{u - \frac{1}{u}}{u + \frac{1}{u}}}\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \int_1^{\mathrm{e}^x} \frac{1}{2u} + \frac{1}{2u^3}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{2}\ln u - \frac{1}{4}\frac{1}{u^2}\right]_1^{\mathrm{e}^x} = \frac{x}{2} - \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{4} + C.$$

On pouvait aussi faire sans changement de variable en écrivant, pour $t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{1+\mathrm{th}(t)} = \frac{1}{1 + \frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}} = \frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2\mathrm{e}^t} = \frac{1}{2}(1 + \mathrm{e}^{-2t}).$$

13.4 c) La fonction est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et y est continue.

Avec le changement de variable $u = \sqrt{\mathrm{e}^t - 1}$, on a $t = \ln(1+u^2)$ et ainsi, $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \dfrac{2u}{1+u^2}$.

Soit $x > 0$. On a ainsi $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^t - 1}}\,\mathrm{d}t = \int_{\sqrt{\mathrm{e}-1}}^{\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}} \frac{1}{u}\frac{2u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = 2\Big[\arctan u\Big]_{\sqrt{\mathrm{e}-1}}^{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}} = 2\arctan(\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}) + C.$

13.4 d) La fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Le changement de variable $u = \sqrt[3]{t}$ donne $t = u^3$ et ainsi, $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = 3u^2$. Soit $x > 0$. On a

$$\int_1^x \frac{1}{t + \sqrt[3]{t}}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\sqrt[3]{x}} \frac{3u^2}{u^3 + u}\,\mathrm{d}u = \int_1^{\sqrt[3]{x}} \frac{3u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{3}{2}\ln(u^2+1)\right]_1^{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}\ln(x^{\frac{2}{3}} + 1) + C.$$

13.4 e) La fonction est définie et continue sur $]1, +\infty[$.

Le changement de variable $u = \sqrt{t^2 - 1}$ donne $t = \sqrt{u^2+1}$ et ainsi, $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \dfrac{u}{\sqrt{u^2+1}}$. Soit $a > 1$ et $x > 1$. On a

$$\int_a^x \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t = \int_{\sqrt{a^2-1}}^{\sqrt{x^2-1}} \frac{1}{u\sqrt{u^2+1}}\frac{u}{\sqrt{u^2+1}}\,\mathrm{d}u = \int_{\sqrt{a^2-1}}^{\sqrt{x^2-1}} \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \arctan\sqrt{x^2-1} + C.$$

Fiche n° 14. Intégration des fractions rationnelles

Réponses

14.1 a) .... $\boxed{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}$

14.1 b) .... $\boxed{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{3}\right)}$

14.2 a) .... $\boxed{2\ln\frac{9}{10}}$

14.2 b) .... $\boxed{\ln(a+1)}$

14.3 a) .... $\boxed{\frac{3}{2}+\ln(3)-\ln(2)}$

14.3 b) .... $\boxed{-\frac{1}{48}+\frac{51}{64}\ln\frac{21}{19}}$

14.4 a) .... $\boxed{\ln\left(\frac{7}{3}\right)}$

14.4 b) .... $\boxed{\ln\frac{33}{28}}$

14.5 a) .... $\boxed{\ln\left(2\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)}$

14.5 b) .... $\boxed{\frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+1}{2}\right)}$

14.6 a) .... $\boxed{1 \text{ et } 2}$

14.6 b) .... $\boxed{A=-1 \text{ et } B=1}$

14.6 c) .... $\boxed{2\ln\frac{4}{3}}$

14.7 a) .... $\boxed{\ln\frac{1}{3}}$

14.7 b) .... $\boxed{2\ln\frac{4}{3}}$

14.7 c) .... $\boxed{\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}}$

14.7 d) .... $\boxed{\frac{1}{4}\ln\frac{1}{5}}$

14.8 .... $\boxed{\frac{1}{2\sqrt{a}}\ln\left(\frac{\sqrt{a}-a}{a+\sqrt{a}}\right)}$

14.9 a) .... $\boxed{\frac{1}{a^2+x^2}}$

14.9 b) .... $\boxed{\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)}$

14.10 a) .... $\boxed{\frac{\pi}{4}}$

14.10 b) .... $\boxed{\frac{\pi}{6\sqrt{3}}}$

14.11 .... $\boxed{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}}$

14.12 a) .... $\boxed{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$

14.12 b) .... $\boxed{2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{8}}$

14.12 c) .... $\boxed{\sqrt{2}\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\sqrt{2}\frac{15}{16}}$

14.12 d) .... $\boxed{a\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\frac{3a^3}{4}}$

14.13 a) .... $\boxed{\frac{1}{2}}$

14.13 b) .... $\boxed{\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}}$

14.13 c) .... $\boxed{\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}}$

14.13 d) .... $\boxed{\ln(2)}$

14.14 a) .... $\boxed{\frac{\pi}{12}}$

14.14 b) .... $\boxed{\ln\left(\frac{a^2}{a^2-1}\right)}$

14.15 .... $\boxed{\frac{1}{3}\left(\ln(2)+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)}$

Corrigés

14.1 a) La fonction $t \longmapsto 1/(t+1)$ est bien définie et continue sur $[1,2]$. Une primitive de cette fonction est la fonction $t \longmapsto \ln(t+1)$. D'où le calcul :

$$\int_1^2 \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln(t+1)\Big]_1^2 = \ln(3)-\ln(2).$$

Enfin, on remarque que $\ln(3)-\ln(2)=\ln\left(\frac{3}{2}\right)$.

...

14.1 b) On procède comme précédemment mais on remarque qu'une primitive de $t \longmapsto 1/(2t+1)$ est $t \longmapsto \frac{\ln(2t+1)}{2}$: attention à ne pas oublier le facteur $1/2$! On calcule ensuite :

$$\int_1^2 \frac{1}{2t+1}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\ln(2t+1)}{2}\right]_1^2$$
$$= \frac{\ln(5)-\ln(3)}{2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{3}\right).$$

...

14.2 a) On commence par simplifier l'expression intégrée. Pour $t \in \mathbb{R}$ convenable, on a

$$\frac{1}{\frac{t}{2}+\frac{1}{4}} = \frac{2}{t+\frac{1}{2}},$$

en multipliant « en haut et en bas » par 2. Donc, on a

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{16}} \frac{1}{\frac{t}{2}+\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}t &= 2\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{16}} \frac{1}{t+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\Big[\ln\big(t+\tfrac{1}{2}\big)\Big]_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{16}} \\ &= 2\Big(\ln\frac{9}{16}-\ln\frac{5}{8}\Big) = 2\ln\frac{9\times 8}{5\times 16} = 2\ln\frac{9}{10}.\end{aligned}$$

Le résultat est < 0 puisque $9/10 < 1$.

C'est cohérent car on intègre une fonction $\geqslant 0$ entre $\frac{1}{8}$ et $\frac{1}{16}$, donc « à rebours ».

14.2 b) On calcule :

$$\int_0^{a^2} \frac{1}{t+a}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln(t+a)\Big]_0^{a^2} = \ln(a+a^2)-\ln(a) = \ln\big(a(a+1)\big)-\ln(a) = \ln(a+1).$$

14.3 a) On commence par faire la division euclidienne de l'expression t^2+t+1 et $t+1$. On trouve

$$t^2+t+1 = (t+1)t \ + \ 1.$$

Donc, on a (pour $t \in \mathbb{R}$ convenable) :

$$\frac{1+t+t^2}{1+t} = t + \frac{1}{1+t}$$

Donc,

$$\int_1^2 \frac{1+t+t^2}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 t\,\mathrm{d}t + \int_1^2 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2} + \big(\ln(3)-\ln(2)\big) = \frac{3}{2}+\ln(3)-\ln(2).$$

Pour la seconde intégrale, on a utilisé un calcul fait précédemment.

14.3 b) D'abord, on fait une division euclidienne et on trouve

$$3t^2+2t+1 = (4t+5)\Big(\frac{3}{4}t-\frac{7}{16}\Big)+\frac{51}{16}.$$

Puis, après calcul, on trouve

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \Big(\frac{3}{4}t-\frac{7}{16}\Big)\,\mathrm{d}t = \frac{5}{96}-\frac{7}{96} = -\frac{1}{48} \qquad \text{et} \qquad \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4t+5}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\Big(\ln(7)-\ln\frac{19}{3}\Big) = \frac{1}{4}\ln\frac{21}{19}.$$

Ainsi, l'intégrale cherchée vaut

$$-\frac{1}{48}+\frac{51}{64}\ln\frac{21}{19}.$$

14.4 a) On remarque que le numérateur est exactement la dérivée du dénominateur. On a donc

$$\int_1^2 \frac{2t+1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln(t^2+t+1)\Big]_1^2 = \ln(7)-\ln(3) = \ln\Big(\frac{7}{3}\Big).$$

14.4 b) On multiplie en haut et en bas par 2. On calcule :

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\frac{t^2}{2}+\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{2t}{t^2+\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln\Big(t^2+\frac{2}{3}\Big)\Big]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} &= \ln\frac{11}{12}-\ln\frac{7}{9} \\ &= \ln\Big(\frac{11\times 9}{12\times 7}\Big) = \ln\frac{33}{28}.\end{aligned}$$

14.5 a) On calcule :

$$\begin{aligned}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{t+\frac{1}{\sqrt{2}}}{t^2+\sqrt{2}t}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\Big[\ln(t^2+\sqrt{2}t)\Big]_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\big(\ln(4)-\ln(1+\sqrt{2})\big) \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{1+\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4(\sqrt{2}-1)}{(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}\right) = \frac{1}{2}\ln\big(4(\sqrt{2}-1)\big) \\ &= \ln\Big(2\sqrt{\sqrt{2}-1}\Big).\end{aligned}$$

14.5 b) On force à apparaître au numérateur la dérivée du dénominateur. On calcule :

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{1} \frac{t}{at^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2a}\int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{1} \frac{2at}{at^2+1}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2a}\Big[\ln(at^2+1)\Big]_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{1} \\ &= \frac{1}{2a}\big(\ln(a+1)-\ln(2)\big) = \frac{1}{2a}\ln\Big(\frac{a+1}{2}\Big).\end{aligned}$$

14.6 b) Supposons que A et B soient trouvés. En particulier, pour t convenable, on a

$$\frac{1}{t-2} = A + \frac{B(t-1)}{t-2}.$$

Cette égalité est encore valable pour $t=1$ (par exemple par continuité). En évaluant en $t=1$, on trouve $A=-1$. De même, on trouve $B=1$.

14.6 c) D'après ce qui précède, on a

$$\begin{aligned}\int_3^4 \frac{2}{t^2-3t+2}\,\mathrm{d}t = \int_3^4 \frac{2}{(t-1)(t-2)}\,\mathrm{d}t = 2\int_3^4 \frac{1}{(t-1)(t-2)}\,\mathrm{d}t &= 2\int_3^4 \frac{1}{t-2}-\frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\Big[\ln(t-2)-\ln(t-1)\Big]_3^4 = 2\Big[\ln\Big(\frac{t-2}{t-1}\Big)\Big]_3^4 \\ &= 2\Big(\ln\frac{2}{3}-\ln\frac{1}{2}\Big) = 2\Big(\ln\frac{2}{3}+\ln(2)\Big) = 2\ln\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

14.7 a) Soit $t\in[0,1]$. Déjà, on a

$$\frac{1}{t^2-4} = \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t+2}\Big).$$

Donc, on calcule

$$\int_0^1 \frac{4}{t^2-4}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \Big(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t+2}\Big)\,\mathrm{d}t = \Big[\ln(2-t)-\ln(2+t)\Big]_0^1 = \Big[\ln\Big(\frac{2-t}{2+t}\Big)\Big]_0^1 = \ln\frac{1}{3}.$$

14.7 b) Soit $t\in[2,3]$. Déjà, on a

$$\frac{1}{t^2-t} = \frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}.$$

Donc, on calcule

$$\int_2^3 \frac{2}{t^2-t}\,\mathrm{d}t = 2\int_2^3 \Big(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\Big)\,\mathrm{d}t = 2\Big[\ln(t-1)-\ln(t)\Big]_2^3 = 2\Big[\ln\Big(\frac{t-1}{t}\Big)\Big]_2^3 = 2\Big(\ln\frac{2}{3}-\ln\frac{1}{2}\Big) = 2\ln\frac{4}{3}.$$

14.7 c) Soit $t \in [0,1]$. Déjà, on a $t^2+4t+3=(t+1)(t+3)$ et

$$\frac{1}{(t+1)(t+3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+3}\right).$$

Donc, on calcule

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{t^2+4t+3}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+3}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\Big[\ln(t+1)-\ln(t+3)\Big]_0^1 = \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{t+1}{t+3}\right)\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{2} - \ln\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

14.7 d) Soit $t \in [0,\frac{1}{3}]$. Déjà, on a

$$\frac{1}{4t^2-1} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{t-\frac{1}{2}} - \frac{1}{t+\frac{1}{2}}\right).$$

Puis, on calcule

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{4t^2-1}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{t-\frac{1}{2}} - \frac{1}{t+\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4}\Big[\ln(\tfrac{1}{2}-t)-\ln(t+\tfrac{1}{2})\Big]_0^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}\left[\ln\left(\frac{\frac{1}{2}-t}{t+\frac{1}{2}}\right)\right]_0^{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1/6}{5/6}\right) = \frac{1}{4}\ln\frac{1}{5}.\end{aligned}$$

14.8 Déjà, on remarque que, pour $t \in \mathbb{R}$ convenable, on a

$$\frac{1}{t^2-a} = \frac{1}{2\sqrt{a}}\left(\frac{1}{t-\sqrt{a}} - \frac{1}{t+\sqrt{a}}\right).$$

Donc, on calcule

$$\int_0^a \frac{1}{t^2-a}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{a}}\Big[\ln(\sqrt{a}-t)+\ln(t+\sqrt{a})\Big]_0^a = \frac{1}{2\sqrt{a}}\left[\ln\left(\frac{\sqrt{a}-t}{t+\sqrt{a}}\right)\right]_0^a = \frac{1}{2\sqrt{a}}\ln\left(\frac{\sqrt{a}-a}{a+\sqrt{a}}\right).$$

14.9 a) Notons f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$f'(x) = \frac{1}{a^2} \times \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a^2+x^2}.$$

14.9 b) D'après ce qui précède, la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)$ répond à la question.

14.10 a) On a

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \Big[\arctan(t)\Big]_0^1 = \arctan(1)-\arctan(0) = \frac{\pi}{4}.$$

14.10 b) On a

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2+3}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan(0)\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

14.11 On a

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{t^2+2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right]_{-1}^{2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\arctan(\sqrt{2}) - \arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\arctan(\sqrt{2}) + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right).$$

Or, on sait (c'est un exercice « classique ») que $\forall x > 0,\ \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$. Donc, on a

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{t^2+2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

....

14.12 a) On force le terme en x à apparaître comme le second membre du développement d'une identité remarquable $(x+a)^2$, où a est à déterminer. Puis, on force à apparaître le troisième terme de l'identité remarquable (ici, a^2), qu'on ajoute-soustrait. On trouve :

$$\begin{aligned} x^2+x+1 &= x^2 + (2 \times \frac{1}{2} \times x) + 1 \\ &= x^2 + (2 \times \frac{1}{2} \times x) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 \\ &= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

....

14.12 b) On procède comme précédemment mais on commence par factoriser par 2. On trouve :

$$\begin{aligned} 2x^2-3x+1 &= 2\left(x^2 - \frac{3}{2} \times x + \frac{1}{2}\right) \\ &= 2\left(x^2 - 2 \times \frac{3}{4} \times x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\right) \\ &= 2\left(\left(x-\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}\right) = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}. \qquad \left(\text{car } \tfrac{1}{2} - \tfrac{9}{16} = -\tfrac{1}{16}\right) \end{aligned}$$

....

14.12 c) On trouve $\sqrt{2}x^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x + \sqrt{2} = \sqrt{2}\left(x+\frac{1}{4}\right)^2 + \sqrt{2}\frac{15}{16}$.

....

14.12 d) On trouve

$$ax^2 + a^2x + a^3 = a\left(x^2+ax\right) + a^3 = a\left(\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}\right) + a^3 = a\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3a^3}{4}.$$

....

14.13 a) On calcule

$$\int_0^1 \frac{1}{1+2t+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-1}{1+t}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

....

14.13 b) Déjà, on a, si $t \in \mathbb{R}$: $t^2+t+1 = \left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$. Donc, on calcule

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{0} \frac{1}{1+t+t^2}\,\mathrm{d}t &= \int_{-1}^{0} \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\theta^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta \qquad \left(\text{en posant } \theta = t + \tfrac{1}{2}\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{2\theta}{\sqrt{3}}\right)\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) \\ &= \frac{4}{\sqrt{3}} \times \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4\pi}{\sqrt{3}\times 6} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

....

14.13 c) On a

$$\int_0^1 \frac{1}{1-t+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{(t-1/2)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\theta^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= 2\int_0^{1/2} \frac{1}{\theta^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta = 2\left[\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\right]_0^{1/2} \qquad \text{(avec } a=\tfrac{\sqrt{3}}{2}\text{)}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

14.13 d) Déjà, on a $6t^2-5t+1 = 6\big(t-\frac{1}{2}\big)\big(t-\frac{1}{3}\big)$, pour $t\in\mathbb{R}$. Donc,

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{6t^2-5t+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6}\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\big(t-\frac{1}{2}\big)\big(t-\frac{1}{3}\big)}\,\mathrm{d}t.$$

Or, pour $t\in\mathbb{R}$ convenable, on a

$$\frac{1}{\big(t-\frac{1}{2}\big)\big(t-\frac{1}{3}\big)} = 6\left(\frac{1}{t-\frac{1}{2}} - \frac{1}{t-\frac{1}{3}}\right).$$

Donc,

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{6t^2-5t+1}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln\big(\tfrac{1}{2}-t\big) - \ln\big(\tfrac{1}{3}-t\big)\Big]_0^{\frac{1}{4}} = \left[\ln\left(\frac{\frac{1}{2}-t}{\frac{1}{3}-t}\right)\right]_0^{\frac{1}{4}}$$

$$= \ln\left(\frac{1/4}{1/12}\right) - \ln\left(\frac{1/2}{1/3}\right) = \ln(3)-\ln(3/2) = \ln(2).$$

14.14 a) On calcule

$$\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{1}{3t^2+2t+\frac{10}{3}}\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{1}{3\big(t^2+\frac{2}{3}t\big)+\frac{10}{3}}\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{1}{3\big(t+\frac{1}{3}\big)^2+\frac{10}{3}-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{1}{3\big(t+\frac{1}{3}\big)^2+3}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{\theta^2+1}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{3}\arctan(1) = \frac{\pi}{12}.$$

14.14 b) Déjà, on remarque qu'on a, pour $t\in\mathbb{R}$ convenable, $t^2-(2a+1)t+a^2+a = (t-a)\big(t-(a+1)\big)$ et

$$\frac{1}{(t-a)\big(t-(a+1)\big)} = \frac{1}{t-(a+1)} - \frac{1}{t-a}.$$

Donc, on a

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2-(2a+1)t+a^2+a}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\frac{1}{t-(a+1)} - \frac{1}{t-a}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \Big[\ln\big(a+1-t\big) - \ln\big(a-t\big)\Big]_0^1 = \left[\ln\left(\frac{a+1-t}{a-t}\right)\right]_0^1$$

$$= \left(\ln\left(\frac{a}{a-1}\right) - \ln\left(\frac{a+1}{a}\right)\right) = \ln\left(\frac{a^2}{a^2-1}\right).$$

14.15 Déjà, si $t \in [0,1]$, on a
$$\frac{1}{1+t^3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+t} + \frac{2-t}{1-t+t^2}\right).$$
Ensuite, on calcule : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \ln(2)$.

Et, on écrit : $\dfrac{2-t}{1-t+t^2} = \dfrac{-\frac{1}{2}(2t-1)+\frac{3}{2}}{1-t+t^2}$.

Et, on remarque que
$$\int_0^1 \frac{2t-1}{1-t+t^2}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln(1-t+t^2)\Big]_0^1 = \ln(1) - \ln(1) = 0.$$
Or, on a vu plus haut que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-t+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

Donc, on trouve
$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\left(\ln(2) + \frac{3}{2} \times \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3}\left(\ln(2) + \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right).$$

Fiche n° 15. Systèmes linéaires

Réponses

15.1 a) .... $\{(3,1)\}$

15.1 b) .... $\{(7,2)\}$

15.1 c) .... $\left\{(\frac{1}{3},\frac{2}{3})\right\}$

15.1 d) .... $\left\{(\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{\sqrt{2}}{2})\right\}$

15.2 a) .... $\left\{(1-\frac{a}{4},\frac{-1}{2}+\frac{3}{8}a)\right\}$

15.2 b) .... $(2,-3)$

15.2 c) .... $\left\{(\frac{1}{13}a+\frac{5}{13}a^2,\frac{2}{13}a-\frac{3}{13}a^2)\right\}$

15.2 d) .... $(a-2a^2,a+a^2)$

15.3 a) .... $\{(1+z,-z,z);z\in\mathbb{R}\}$

15.3 b) .... $\{(1,y,3+2y);y\in\mathbb{R}\}$

15.3 c) .... $\left\{(\frac{13}{6}-\frac{5}{3}z,-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}z,z);z\in\mathbb{R}\right\}$

15.3 d) .... $\left\{(x,\frac{-5}{12}-\frac{3}{2}x,\frac{-25}{24}-\frac{7}{4}x);x\in\mathbb{R}\right\}$

15.4 a) .... $\{(2,-1,3)\}$

15.4 b) .... $\{(-1,4,2)\}$

15.4 c) .... $\varnothing$

15.4 d) .... $\left\{(-\frac{2}{7}-z,\frac{3}{7},z)\,;\,z\in\mathbb{R}\right\}$

15.5 a) .... $\{(1,1/2,1/2)\}$

15.5 b) .... $\varnothing$

15.5 c) .... $\{(5z,1-4z,z)\ ;\ z\in\mathbb{R}\}$

15.5 d) .... $\left\{(1,\frac{1}{a+2},\frac{1}{a+2})\right\}$

15.6 a) .... $\{(5,3,-1)\}$

15.6 b) .... $\varnothing$

15.6 c) .... $\left\{(\frac{a^2+a-1}{a^3-1}c,\frac{a^2-a+1}{a^3-1}c,\frac{-a^2+a+1}{a^3-1}c)\right\}$

15.7 a) .... $\{(0,0,0)\}$

15.7 b) .... $\{(x,y,-x-y)\,;\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$

15.7 c) .... $\{(x,x,x)\,;\,x\in\mathbb{R}\}$

Corrigés

15.1 a) On calcule :

$$\begin{cases} x-2y=1\\ 3x+4y=13\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+2y\\ 3(1+2y)+4y=13\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+2y\\ 10y+3=13\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10y=10\\ x=1+2y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1\\ x=3\end{cases}$$

....

15.1 b) On calcule : $\begin{cases} 2x+y=16\\ x-y=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=16-2x\\ x-16+2x=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=5+16=21\\ y=16-2x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7\\ y=16-14=2\end{cases}$

....

15.1 c) On calcule : $\begin{cases} 3x-6y=-3\\ 2x+2y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=-1\\ x+y=1\end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-2y=-1\\ 3y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{2}{3}\\ x=-1+2\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}\end{cases}$

....

15.1 d) On calcule :

$$\begin{cases} 3x-4y=-\sqrt{2}\\ 6x+2y=3\sqrt{2}\end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-2L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 3x-4y=-\sqrt{2}\\ 8y+2y=2\sqrt{2}+3\sqrt{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-4y=-\sqrt{2}\\ 10y=5\sqrt{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ 3x=4\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ x=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\end{cases}$$

....

15.2 a) On calcule : $\begin{cases} 3x+2y=2 \\ 2x+4y=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-\dfrac{3}{2}x \\ 2x+4-6x=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-\dfrac{3}{2}x \\ -4x=a-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-\dfrac{a}{4} \\ y=1-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{8}a=\dfrac{-1}{2}+\dfrac{3}{8}a \end{cases}$

15.2 b) On calcule :

$$\begin{cases} x-ay=3a+2 \\ ax+y=2a-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=ay+3a+2 \\ a^2y+3a^2+2a+y=2a-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=ay+3a+2 \\ (a^2+1)y=2a-3-3a^2-2a \end{cases}$$

$$\underset{1+a^2\neq 0}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} y=\dfrac{-3-3a^2}{1+a^2}=-3 \\ x=-3a+3a+2=2 \end{cases}$$

15.2 c) On calcule :

$$\begin{cases} 3x+5y=a \\ 2x-y=a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-a^2 \\ 3x+5\times(2x-a^2)=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-a^2 \\ 13x-5a^2=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{13}a+\dfrac{5}{13}a^2 \\ y=2\times\left(\dfrac{1}{13}a+\dfrac{5}{13}a^2\right)-a^2=\dfrac{2}{13}a-\dfrac{3}{13}a^2 \end{cases}$$

15.2 d) On calcule :

$$\begin{cases} x+2y=3a \\ 2x+3y=5a-a^2 \end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-2L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x+2y=3a \\ -y=5a-a^2-6a=-a^2-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=a+a^2 \\ x=3a-2(a+a^2)=a-2a^2 \end{cases}$$

15.3 a) On calcule : $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 3x+y-2z=3 \end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-3L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x+2y+z=1 \\ -5y-5z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-z \\ x-2z+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+z \\ y=-z \end{cases}$

15.3 b) On calcule : $\begin{cases} 3x-2y+z=6 \\ x+2y-z=-2 \end{cases} \underset{L_1\leftarrow L_1+L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 4x=4 \\ x+2y-z=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 2y-z=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ z=2y+3 \end{cases}$

15.3 c) On calcule :

$$\begin{cases} x-y+3z=\dfrac{5}{2} \\ x+2y-z=\dfrac{3}{2} \end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x-y+3z=\dfrac{5}{2} \\ 3y-4z=\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{2}=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{-1}{3}+\dfrac{4}{3}z \\ x=\dfrac{-1}{3}+\dfrac{4}{3}z-3z+\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{-1}{3}+\dfrac{4}{3}z \\ x=\dfrac{13}{6}-\dfrac{5}{3}z \end{cases}$$

15.3 d) On calcule :

$$\begin{cases} 5x+y+2z=-\dfrac{5}{2} \\ 2x-y+2z=-\dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{5}{2}-5x-2z \\ 2x+\dfrac{5}{2}+5x+2z+2z=-\dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x+4z=-\dfrac{5}{3}-\dfrac{5}{2}=\dfrac{-25}{6} \\ y=-\dfrac{5}{2}-5x-2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=\dfrac{-25}{24}-\dfrac{7}{4}x \\ y=-\dfrac{5}{2}-5x+\dfrac{25}{12}+\dfrac{7}{2}x=\dfrac{-5}{12}-\dfrac{3}{2}x \end{cases}$$

15.4 a) On calcule :

$$\begin{cases} x+2y-z=-3 \\ 2x-y+z=8 \\ 3x+y+2z=11 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-3L_1}}{\iff} \begin{cases} x+2y-z=-3 \\ -5y+3z=14 \\ -5y+5z=20 \end{cases} \underset{L_3\leftarrow L_3-L_2}{\iff} \begin{cases} x+2y-z=-3 \\ -5y+3z=14 \\ 2z=6 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z=3 \\ x+2y-3=-3 \\ -5y+3\times 3=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=3 \\ x+2y=0 \\ -5y=14-9=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=3 \\ y=-1 \\ x=-2y=2 \end{cases}$$

15.4 b) On calcule :

$$\begin{cases} a-b-c=-7 \\ 3a+2b-c=3 \\ 4a+b+2c=4 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-4L_1}}{\iff} \begin{cases} a-b-c=-7 \\ 5b+2c=24 \\ 5b+6c=32 \end{cases} \underset{L_3\leftarrow L_3-L_2}{\iff} \begin{cases} a-b-c=-7 \\ 5b+2c=24 \\ 4c=8 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} c=2 \\ a-b-2=-7 \\ 5b+2\times 2=24 \end{cases} \iff \begin{cases} c=2 \\ b=4 \\ a=-5+4=-1 \end{cases}$$

15.4 c) On calcule : $\begin{cases} x+3y+z=1 \\ 2x-y+2z=-1 \\ x+10y+z=0 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-L_1}}{\iff} \begin{cases} x+3y+z=1 \\ -7y=-3 \\ 7y=-1 \end{cases} \underset{L_3\leftarrow L_3+L_2}{\iff} \begin{cases} x+3y+z=1 \\ -7y=-3 \\ 0=-4 \end{cases}.$

Le système est incompatible car l'équation $0=-4$ n'a pas de solution.

15.4 d) On va extraire y de la deuxième équation, puis résoudre par substitution. On calcule :

$$\begin{cases} 3x+2y+3z=0 \\ 2x-y+2z=-1 \\ 4x+5y+4z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+2z+1 \\ 3x+4x+4z+2+3z=0 \\ 4x+10x+10z+5+4z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+2z+1 \\ 7x+7z=-2 \\ 14x+14z=-4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+2z+1 \\ x=-z-\dfrac{2}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-z-\dfrac{2}{7} \\ \\ y=-2z-\dfrac{4}{7}+2z+1=\dfrac{3}{7} \end{cases}$$

15.5 a) On calcule :

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+2y=2 \\ 2x+2z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-2y \\ 2-2y+y-z=1 \\ 4-4y+2z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-2y \\ -y-z=-1 \\ -4y+2z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-2y \\ y=1-z \\ -4+4z+2z=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2-2y \\ y=1-z \\ 6z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=3/6=1/2 \\ y=1-1/2=1/2 \\ x=2-1=1 \end{cases}$$

15.5 b) On calcule :

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+2y-2z=2 \\ 2x-2y+2z=3 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-2L_1}}{\iff} \begin{cases} x+y-z=1 \\ y-z=1 \\ -4y+4z=1 \end{cases} \underset{L_3\leftarrow L_3+4L_2}{\iff} \begin{cases} x+y-z=1 \\ y-z=1 \\ 0=5 \end{cases}$$

Le système est incompatible car l'équation $0=5$ n'a pas de solution.

15.5 c) On calcule :

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+2y+3z=2 \\ 2x+3y+2z=3 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-2L_1}}{\iff} \begin{cases} x+y-z=1 \\ y+4z=1 \\ y+4z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-4z \\ x=-(1-4z)+z+1=5z-1+1=5z \end{cases}.$$

15.5 d) On calcule :

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+2y+az=2 \\ 2x+ay+2z=3 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-2L_1}}{\iff} \begin{cases} x+y-z=1 \\ y+(a+1)z=1 \\ (a-2)y+4z=1 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3+(2-a)L_2}{\iff} \begin{cases} x+y-z=1 \\ y+(a+1)z=1 \\ (4+(2-a)(a+1))z=3-a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=1 \\ y+(a+1)z=1 \\ (4+a+2-a^2)z=3-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=1 \\ y+(a+1)z=1 \\ (-a^2+a+6)z=3-a \end{cases}$$

On factorise le trinôme $-(a^2-a-6)=-(a+2)(a-3)$ qui est non nul dans le cas étudié.

D'où : $\begin{cases} x+y-z=1 \\ y+(a+1)z=1 \\ (-a^2+a+6)z=3-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=\dfrac{3-a}{-(a+2)(a-3)}=\dfrac{1}{a+2} \\ y=1-(a+1)\times\dfrac{1}{a+2} \\ x=1-y+z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=\dfrac{1}{a+2} \\ y=\dfrac{a+2-a-1}{a+2}=\dfrac{1}{a+2} \\ x=1-\dfrac{1}{a+2}+\dfrac{1}{a+2}=1 \end{cases}$

15.6 a) On calcule :

$$\begin{cases} x-2z=7 \\ 2x-y=7 \\ 2y-z=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7+2z \\ 14+4z-y=7 \\ 2y-z=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7+2z \\ y=7+4z \\ 14+8z-z=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7+2z \\ y=7+4z \\ 7z=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-1 \\ y=7-4=3 \\ x=7-2=5 \end{cases}$$

15.6 b) On calcule :

$$\begin{cases} x-z=2 \\ x-y=2 \\ y-z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+z \\ 2+z-y=2 \\ y-z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+z \\ y=z \\ 0=2 \end{cases}$$

Le système est incompatible car l'équation $0=2$ n'a pas de solution.

15.6 c) On calcule :

$$\begin{cases} x-az=c \\ a\,x-y=c \\ a\,y-z=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=c+az \\ a(c+az)-y=c \\ a\,y-z=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=c+az \\ y=(a-1)c+a^2z \\ a\big((a-1)c+a^2z\big)-z=c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=c+az \\ y=(a-1)c+a^2z \\ (a^3-1)z=(1+a-a^2)c \end{cases}$$

Dans $\mathbb{R}$, l'équation $a^3-1=0$ a pour unique solution $a=1$ (fonction $t\mapsto t^3$ strictement croissante). Or $a\neq 1$, donc $a^3-1\neq 0$, on peut déterminer z dans la troisième équation.

$$\begin{cases} x=c+az \\ y=(a-1)c+a^2z \\ (a^3-1)z=(1+a-a^2)c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=c\dfrac{-a^2+a+1}{(a-1)(a^2+a+1}=\dfrac{-a^2+a+1}{a^3-1}c \\ y=(a-1)c+a^2\dfrac{-a^2+a+1}{a^3-1}c=\dfrac{a^2-a+1}{a^3-1}c \\ x=c+a\dfrac{-a^2+a+1}{a^3-1}c=\dfrac{a^2+a-1}{a^3-1}c \end{cases}$$

15.7 a) On calcule :

$$\begin{cases} 4x+y+z=x \\ x+4y+z=y \\ x+y+4z=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y+z=0 \\ x+3y+z=0 \\ x+y+3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-3x-y \\ x+3y-3x-y=0 \\ x+y+3\times(-3x-y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-3x-y \\ x=y \\ -10x=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=y=z=0$$

15.7 b) On calcule : $\begin{cases} 4x+y+z=3x \\ x+4y+z=3y \\ x+y+4z=3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow z=-x-y$

15.7 c) On calcule :

$$\begin{cases} 4x+y+z=6x \\ x+4y+z=6y \\ x+y+4z=6z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2x-y \\ x-2y+2x-y=0 \\ x+y-2\times(2x-y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2x-y \\ 3x-3y=0 \\ -3x+3y=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ z=2x-x=x \end{cases}$$

Fiche n° 16. Nombres complexes

Réponses

16.1 a) .... $\boxed{4+32\mathrm{i}}$

16.1 b) .... $\boxed{13-\mathrm{i}}$

16.1 c) .... $\boxed{7-24\mathrm{i}}$

16.1 d) .... $\boxed{5}$

16.1 e) .. $\boxed{-119+120\mathrm{i}}$

16.1 f) ..... $\boxed{\dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{10}\mathrm{i}}$

16.1 g) ..... $\boxed{\dfrac{4}{29}-\dfrac{19}{29}\mathrm{i}}$

16.1 h) ..... $\boxed{\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}}$

16.2 a) .... $\boxed{12}$

16.2 b) .... $\boxed{8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}$

16.2 c) .... $\boxed{\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}$

16.2 d) .... $\boxed{2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}$

16.2 e) .... $\boxed{2e^{\mathrm{i}\frac{8\pi}{5}}}$

16.2 f) ..... $\boxed{5\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$

16.2 g) .... $\boxed{10\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}}$

16.2 h) $\boxed{2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$

16.3 a) .... $\boxed{1}$

16.3 b) ... $\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

16.3 c) .. $\boxed{-\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

Corrigés

16.1 a) On développe : $(2+6\mathrm{i})(5+\mathrm{i}) = 10+2\mathrm{i}+30\mathrm{i}+6\mathrm{i}^2 = 10+32\mathrm{i}-6 = 4+32\mathrm{i}$.

16.1 b) On développe : $(3-\mathrm{i})(4+\mathrm{i}) = 12+3\mathrm{i}-4\mathrm{i}-\mathrm{i}^2 = 12-\mathrm{i}+1 = 13-\mathrm{i}$.

16.1 c) On développe : $(4-3\mathrm{i})^2 = 4^2-2\times4\times3\mathrm{i}+(3\mathrm{i})^2 = 16-24\mathrm{i}-9 = 7-24\mathrm{i}$

16.1 d) On développe : $(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i}) = 1^2-(2\mathrm{i})^2 = 1+4 = 5$.

Ou bien : en posant $z = 1-2\mathrm{i}$, on reconnaît la quantité $z\bar{z}$, c'est-à-dire $|z|^2$. Ainsi, $(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i}) = 1^2+2^2 = 5$.

16.1 e) On développe :

$(2-3\mathrm{i})^4 = \left((2-3\mathrm{i})^2\right)^2 = (4-2\times2\times3\mathrm{i}-9)^2 = (-5-12\mathrm{i})^2 = (5+12\mathrm{i})^2 = 5^2+2\times5\times12\mathrm{i}-12^2 = -119+120\mathrm{i}$.
Ou bien : avec la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned}(2-3\mathrm{i})^4 &= \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}2^k(-3\mathrm{i})^{4-k}\\ &= (-3\mathrm{i})^4+4\times2\times(-3\mathrm{i})^3+6\times2^2\times(-3\mathrm{i})^2+4\times2^3\times(-3\mathrm{i})+2^4\\ &= 81+216i-216-96\mathrm{i}+16 = -119+120\mathrm{i}.\end{aligned}$$

16.1 f) On utilise l'expression conjuguée : $\dfrac{1}{3-\mathrm{i}} = \dfrac{3+\mathrm{i}}{(3-\mathrm{i})(3+\mathrm{i})} = \dfrac{3+\mathrm{i}}{3^2+1^2} = \dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{10}\mathrm{i}$

16.1 g) On utilise l'expression conjuguée et on développe :

$\dfrac{2-3\mathrm{i}}{5+2\mathrm{i}} = \dfrac{(2-3\mathrm{i})(5-2\mathrm{i})}{(5+2\mathrm{i})(5-2\mathrm{i})} = \dfrac{10-4\mathrm{i}-15\mathrm{i}-6}{5^2+2^2} = \dfrac{4}{29}-\dfrac{19}{29}\mathrm{i}$.

16.1 h) On utilise la définition de l'écriture exponentielle et la trigonométrie :

$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)-\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

16.2 a) On a $|12| = 12$ et $\arg(12) = 0$, donc la réponse est 12 (ou $12\mathrm{e}^{0\mathrm{i}}$).

16.2 b) On a $|-8| = 8$ et $-1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$.

16.2 c) On a $|\sqrt{3}\mathrm{i}| = \sqrt{3}$ et $\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$.

....

16.2 d) On a $|-2\mathrm{i}| = 2$ et $-\mathrm{i} = \bar{\mathrm{i}} = \overline{\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}} = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}$.

....

16.2 e) On écrit que $-2 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ et on utilise les propriétés de l'exponentielle :

$-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{5}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{5}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi+\mathrm{i}\frac{3\pi}{5}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{8\pi}{5}}$.

....

16.2 f) On calcule $|5-5\mathrm{i}| = \sqrt{5^2+5^2} = \sqrt{2\times 5^2} = 5\sqrt{2}$ et on écrit

$5-5\mathrm{i} = 5\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 5\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} - \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

....

16.2 g) On calcule $|-5+5\mathrm{i}\sqrt{3}| = \sqrt{25+75} = 10$ puis on écrit

$-5+5\mathrm{i}\sqrt{3} = 10\left(-\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 10\left(\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$.

....

16.2 h) On écrit que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\right) = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

Ainsi, $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right| = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ $\left(\text{car } \cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) \geqslant 0 \text{ et } \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right| = 1\right)$ et $\arg\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right) = \arg(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}) = \dfrac{\pi}{4}$.

On en déduit que l'écriture exponentielle de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ est $2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

....

16.3 a) On remarque que le dénominateur de z est le conjugué du numérateur. Ainsi, $|z| = 1$.

....

16.3 b) De plus, en multipliant par le conjugué, on obtient

$$\begin{aligned} z &= \frac{(1+\sqrt{2}+\mathrm{i})^2}{(1+\sqrt{2}-\mathrm{i})(1+\sqrt{2}+\mathrm{i})} = \frac{(1+\sqrt{2})^2 + 2(1+\sqrt{2})\mathrm{i} - 1}{(1+\sqrt{2})^2+1} = \frac{1+2\sqrt{2}+2+2(1+\sqrt{2})\mathrm{i}-1}{1+2\sqrt{2}+2+1} \\ &= \frac{2+2\sqrt{2}+2(1+\sqrt{2})\mathrm{i}}{4+2\sqrt{2}} = \frac{2(1+\sqrt{2})(1+\mathrm{i})}{2\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}. \end{aligned}$$

....

16.3 c) Enfin, $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$, donc $z^{2021} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^{2021} = \mathrm{e}^{\frac{2021}{4}\mathrm{i}\pi}$.

Comme $2021 = 4\times 505 + 1$, on a $\mathrm{e}^{\frac{2021}{4}\mathrm{i}\pi} = \mathrm{e}^{505\mathrm{i}\pi + \frac{\pi}{4}\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{505\mathrm{i}\pi}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

....

Fiche n° 17. Trigonométrie et nombres complexes

Réponses

17.1 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{4}\cos(3x)+\dfrac{3}{4}\cos(x)}$

17.1 b) .... $\boxed{-\dfrac{1}{4}\cos(4x)+\dfrac{1}{2}\cos(2x)-\dfrac{1}{4}}$

17.1 c) ... $\boxed{-\dfrac{1}{8}\cos(6x)+\dfrac{1}{4}\cos(4x)-\dfrac{3}{8}\cos(2x)+\dfrac{1}{4}}$

17.1 d) ... $\boxed{-\dfrac{\sin(9x)}{8}+\dfrac{3\sin(5x)}{8}-\dfrac{\sin(3x)}{8}-\dfrac{3\sin(x)}{8}}$

17.1 e) .... $\boxed{\dfrac{\cos(9x)}{8}+\dfrac{3\cos(5x)}{8}+\dfrac{\cos(3x)}{8}+\dfrac{3\cos(x)}{8}}$

17.1 f) .... $\boxed{-\dfrac{1}{4}\sin(11x)+\dfrac{1}{4}\sin(5x)+\dfrac{1}{2}\sin(3x)}$

17.2 a) .... $\boxed{2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{12}}}$

17.2 b) .... $\boxed{\left(-2\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)\right)e^{-i\frac{5\pi}{12}}}$

17.2 c) .... $\boxed{2\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)e^{\frac{-7i\pi}{12}}}$

17.2 d) .... $\boxed{2\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)e^{\frac{5i\pi}{12}}}$

17.2 e) .... $\boxed{2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{13\pi}{12}}}$

17.2 f) .... $\boxed{2\sin\left(\dfrac{\pi}{24}\right)e^{-i\frac{11\pi}{24}}}$

17.2 g) .... $\boxed{\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)}e^{\frac{13i\pi}{24}}}$

17.2 h) .... $\boxed{2^{27}\cos^{27}\left(\dfrac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{4}}}$

17.3 a) .... $\boxed{2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{5\pi}{12}}}$

17.3 b) .... $\boxed{2\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)e^{-i\frac{\pi}{12}}}$

17.4 a) .... $\boxed{4\cos^3(x)-3\cos(x)}$

17.4 b) .... $\boxed{4\cos^3(x)\sin(x)-4\cos(x)\sin^3(x)}$

17.5 a) .... $\boxed{2\cos(2x)\cos(x)}$

17.5 b) .... $\boxed{2\cos(4x)\sin(x)}$

17.5 c) .... $\boxed{2\sin(x)\sin(2x)}$

17.5 d) .... $\boxed{2\sin(4x)\cos(x)}$

17.6 a) .... $\boxed{\dfrac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\sin(2x)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}}$

17.6 b) .... $\boxed{\dfrac{\sin(8x)}{2\sin(x)}}$

17.6 c) .... $\boxed{0}$

17.7 a) .... $\boxed{\dfrac{e^{\pi}+1}{2}}$

17.7 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{5}(e^{\pi}-2)}$

Corrigés

17.1 a) On calcule :

$$\begin{aligned}\cos^3(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{3ix}+3e^{2ix}e^{-ix}+3e^{ix}e^{-2ix}+e^{-3ix}\right) = \frac{1}{8}\left(e^{3ix}+e^{-3ix}\right)+\frac{3}{8}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\\ &= \frac{1}{4}\cos(3x)+\frac{3}{4}\cos x.\end{aligned}$$

....

17.1 b) On calcule :

$$\begin{aligned}\cos(2x)\sin^2(x) &= \left(\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}\right)\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2 = -\frac{1}{8}\left(e^{2ix}+e^{-2ix}\right)\left(e^{2ix}-2+e^{-2ix}\right)\\ &= -\frac{1}{8}\left(e^{4ix}+e^{-4ix}-2\left(e^{2ix}+e^{-2ix}\right)+2\right) = -\frac{1}{4}\cos(4x)+\frac{1}{2}\cos(2x)-\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

....

17.1 c) On calcule :

$$\cos^2(2x)\sin^2(x) = \left(\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}\right)^2\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2 = -\frac{1}{16}\left(e^{4ix}+2+e^{-4ix}\right)\left(e^{2ix}-2+e^{-2ix}\right)$$
$$= -\frac{1}{16}\left(e^{6ix}-2e^{4ix}+e^{2ix}+2e^{2ix}-4+2e^{-2ix}+e^{-2ix}-2e^{-4ix}+e^{-6ix}\right)$$
$$= -\frac{1}{16}\left(e^{6ix}+e^{-6ix}-2(e^{4ix}+e^{-4ix})+3(e^{2ix}+e^{-2ix})-4\right) = -\frac{1}{8}\cos(6x)+\frac{1}{4}\cos(4x)-\frac{3}{8}\cos(2x)+\frac{1}{4}.$$

17.1 d) On calcule :

$$\cos(3x)\sin^3(2x) = \left(\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2}\right)\left(\frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i}\right)^3 = -\frac{1}{16i}\left(e^{3ix}+e^{-3ix}\right)\left(e^{6ix}-3e^{2ix}+3e^{-2ix}-e^{-6ix}\right)$$
$$= -\frac{1}{16i}\left(e^{9ix}-e^{-9ix}-3(e^{5ix}-e^{-5ix})+e^{3ix}-e^{-3ix}+3(e^{ix}-e^{-ix})\right)$$
$$= -\frac{1}{8}\sin(9x)+\frac{3}{8}\sin(5x)-\frac{1}{8}\sin(3x)-\frac{3}{8}\sin(x).$$

17.2 a) $1+e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{12}}\left(e^{-\frac{i\pi}{12}}+e^{\frac{i\pi}{12}}\right) = \underbrace{2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{>0}e^{i\frac{\pi}{12}}.$

17.2 b) $1+e^{i\frac{7\pi}{6}} = e^{\frac{7i\pi}{12}}\left(e^{-\frac{7i\pi}{12}}+e^{\frac{7i\pi}{12}}\right) = \underbrace{2\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)}_{<0}e^{\frac{7i\pi}{12}} = \left(-2\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)e^{\frac{7i\pi}{12}}e^{-i\pi} = \left(-2\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)e^{-i\frac{5\pi}{12}}.$

17.2 c) $e^{-i\frac{\pi}{6}}-1 = e^{-i\frac{\pi}{12}}\left(e^{-i\frac{\pi}{12}}-e^{i\frac{\pi}{12}}\right) = e^{-i\frac{\pi}{12}}\left(-2i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{-i\frac{\pi}{12}-i\frac{\pi}{2}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{-\frac{7i\pi}{12}}.$

17.2 d) $1+ie^{i\frac{\pi}{3}} = 1+e^{i\frac{5\pi}{6}} = e^{\frac{5i\pi}{12}}2\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)e^{\frac{5i\pi}{12}}$

17.2 e) $-1-e^{i\frac{\pi}{6}} = -e^{i\frac{\pi}{12}}\left(e^{-i\frac{\pi}{12}}+e^{i\frac{\pi}{12}}\right) = \underbrace{-2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{<0}e^{i\frac{\pi}{12}} = 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{12}+i\pi} = 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{13\pi}{12}}.$

17.2 f) $1-e^{i\frac{\pi}{12}} = e^{i\frac{\pi}{24}}\left(-2i\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)e^{i\frac{\pi}{24}}e^{-i\frac{\pi}{2}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)e^{-i\frac{11\pi}{24}}.$

17.2 g) On fait le quotient de a) et f).

17.2 h) $\left(1+e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{27} = \left(2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^{27} = 2^{27}\cos^{27}\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{4}}.$

17.3 a) $e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}}{2}}\left(e^{i\frac{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}}{2}}+e^{i\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}}{2}}\right) = \underbrace{2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{>0}e^{i\frac{5\pi}{12}}.$

17.3 b) $e^{i\frac{\pi}{3}}-e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}}{2}}\left(e^{i\frac{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}}{2}}-e^{i\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}}{2}}\right) = -2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)ie^{5i\frac{\pi}{12}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{5i\frac{\pi}{12}-i\frac{\pi}{2}} = \underbrace{2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{>0}e^{-i\frac{\pi}{12}}.$

17.4 a) On calcule :

$$\cos(3x) = \mathrm{Re}(e^{3ix}) = \mathrm{Re}\left((e^{ix})^3\right) = \mathrm{Re}\left((\cos(x)+i\sin(x))^3\right)$$
$$= \mathrm{Re}(\cos^3(x)+3i\cos^2(x)\sin(x)-3\cos(x)\sin^2(x)-i\sin^3(x))$$
$$= \cos^3(x)-3\cos(x)\sin^2(x) = \cos^3(x)-3\cos(x)(1-\cos^2(x))$$
$$= 4\cos^3(x)-3\cos(x).$$

17.4 b) On calcule :

$$\begin{aligned}\sin(4x) &= \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}) = \mathrm{Im}\big((\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^4\big) = \mathrm{Im}\big((\cos(x)+\mathrm{i}\sin(x))^4\big)\\ &= \mathrm{Im}(\cos^4(x) + 4\mathrm{i}\cos^3(x)\sin(x) - 6\cos^2(x)\sin^2(x) - 4\mathrm{i}\cos(x)\sin^3(x) + \sin^4(x))\\ &= 4\cos^3(x)\sin(x) - 4\cos(x)\sin^3(x).\end{aligned}$$

17.5 a) $\cos(x)+\cos(3x) = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}) = \mathrm{Re}\Big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x+3x}{2}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-x)}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})\Big) = \mathrm{Re}\big(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}2\cos(x)\big) = 2\cos(2x)\cos(x).$

17.5 b) $\sin(5x)-\sin(3x) = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{5\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}) = \mathrm{Im}\big(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})\big) = \mathrm{Im}\big(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}2\mathrm{i}\sin(x)\big) = 2\cos(4x)\sin(x).$

17.5 c) $\cos(x)-\cos(3x) = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}) = \mathrm{Re}\Big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x+3x}{2}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-x)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})\Big) = \mathrm{Re}\big(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}(-2\mathrm{i})\sin(x)\big) = 2\sin(x)\sin(2x).$

17.5 d) $\sin(3x)+\sin(5x) = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{5\mathrm{i}x}) = \mathrm{Im}\big(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})\big) = \mathrm{Im}\big(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}2\cos(x)\big) = 2\sin(4x)\cos(x).$

17.6 a) Si $x\in 2\pi\mathbb{Z}$, alors cette somme vaut 0. Sinon, $\sin(x)+\sin(2x)+\sin(3x) = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x})$

$= \mathrm{Im}\big(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^2+(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^3\big)$. Or, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\neq 1$ donc $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^2+(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^3 = \dfrac{1-\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}$.

On utilise maintenant l'astuce de l'arc moitié. On obtient,

$$\sin(x)+\sin(2x)+\sin(3x) = \mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x}{2}}}\frac{-2\mathrm{i}\sin(2x)}{-2\mathrm{i}\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right) = \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3x}{2}}\frac{\sin(2x)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right) = \frac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\sin(2x)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

17.6 b) Si $x\in 2\pi\mathbb{Z}$, alors cette somme vaut 4.

Si x est de la forme $\pi+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$, la somme vaut -4.

Sinon, on calcule :

$$\begin{aligned}\cos(x)+\cos(3x)+\cos(5x)+\cos(7x) &= \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{5\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{7\mathrm{i}x})\\ &= \mathrm{Re}\Big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\big(1+(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x})+(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x})^2+(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x})^3\big)\Big).\end{aligned}$$

Or, $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}\neq 1$ donc

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\big(1+(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x})+(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x})^2+(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x})^3\big) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\frac{1-(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x})^4}{1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\frac{1-(\mathrm{e}^{8\mathrm{i}x})}{1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\frac{\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\frac{-2\mathrm{i}\sin(4x)}{-2\mathrm{i}\sin(x)} = \mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}\frac{\sin(4x)}{\sin(x)}.$$

Finalement, on a

$$\cos(x)+\cos(3x)+\cos(5x)+\cos(7x) = \frac{\cos(4x)\sin(4x)}{\sin(x)} = \frac{\sin(8x)}{2\sin(x)}.$$

17.6 c) On calcule :

$$\cos(x)+\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right) = \mathrm{Re}\Big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+\frac{2\pi}{3})}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+\frac{4\pi}{3})}\Big) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\underbrace{(1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2)}_{=0}\right) = 0.$$

17.7 a) On calcule :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \mathrm{e}^x\sin(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^\pi \mathrm{e}^x\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \mathrm{Im}(\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\int_0^\pi \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}}{1+\mathrm{i}}\right]_0^\pi\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{\pi+\mathrm{i}\pi}-1}{1+\mathrm{i}}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{-\mathrm{e}^\pi-1}{1+\mathrm{i}}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{(-\mathrm{e}^\pi-1)(1-\mathrm{i})}{2}\right)\\ &= \frac{\mathrm{e}^\pi+1}{2}.\end{aligned}$$

Fiche n° 18. Sommes et produits

Réponses

18.1 a) .... $\boxed{n(n+2)}$

18.1 b) .... $\boxed{\dfrac{7(n+1)(n+4)}{2}}$

18.1 c) .... $\boxed{\dfrac{n(5n+1)}{2}}$

18.1 d)......... $\boxed{\dfrac{(n-2)(n-7)}{6}}$

18.2 a) .... $\boxed{\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}}$

18.2 b)... $\boxed{n(n+1)(n^2+n+4)}$

18.2 c) .... $\boxed{\dfrac{9}{2}(3^{n-2}-1)}$

18.2 d)........... $\boxed{\dfrac{5^{n+1}-2^{n+1}}{3}}$

18.2 e)... $\boxed{\dfrac{7}{6}(7^n-1)+n(n+4)}$

18.2 f)................. $\boxed{\dfrac{n+1}{2n}}$

18.3 a)................. $\boxed{2^{q-p+1}}$

18.3 b) .... $\boxed{3^{\frac{n(n+1)}{2}}}$

18.3 c)................ $\boxed{5^n(n!)^{\frac{3}{2}}}$

18.3 d) .... $\boxed{0}$

18.4 a) .... $\boxed{\dfrac{n(n+1)}{2}}$

18.4 b) .... $\boxed{0}$

18.4 c)...... $\boxed{n2^{n+1}+2(1-2^n)}$

18.4 d) .... $\boxed{\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}}$

18.5 a) .... $\boxed{(n+3)^3-2^3}$

18.5 b) .... $\boxed{\ln(n+1)}$

18.5 c) .... $\boxed{1-\dfrac{1}{(n+1)!}}$

18.5 d)........... $\boxed{(n+1)!-1}$

18.6 a) .... $\boxed{n+1}$

18.6 b)................ $\boxed{1-4n^2}$

18.6 c)...................... $\boxed{\dfrac{1}{n}}$

18.6 d) .... $\boxed{\dfrac{n+1}{2n}}$

18.7 a).............. $\boxed{1-\dfrac{1}{n+1}}$

18.7 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+3}}$

18.8 a)................ $\boxed{2n^2+n}$

18.8 b) .... $\boxed{\dfrac{n(3n+1)}{2}}$

18.9 a) .... $\boxed{\dfrac{n^2(n+1)}{2}}$

18.9 b) .... $\boxed{\dfrac{n(n+3)}{4}}$

18.9 c).............. $\boxed{\dfrac{n(n^2-1)}{2}}$

18.9 d) .. $\boxed{\dfrac{n(n+1)(7n^2+13n+4)}{12}}$

18.9 e)......... $\boxed{\dfrac{n(n+1)}{2}\ln(n!)}$

18.9 f)....... $\boxed{\dfrac{n(n+1)(4n-1)}{6}}$

Corrigés

18.1 a) On utilise la formule suivante : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+2} n = n\sum_{k=1}^{n+2} 1 = (n+2-1+1)\times n = n(n+2)$.

....

18.1 b) On utilise la formule présente en prérequis : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+2} 7k = 7\times\frac{(n+2-2+1)(n+2+2)}{2} = \frac{7(n+1)(n+4)}{2}$.

....

18.1 c) On utilise la linéarité de la somme :

$$\sum_{k=1}^{n}(3k+n-1) = 3\sum_{k=1}^{n} k + (n-1)\sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{3n(n+1)}{2} + n(n-1) = \frac{n(5n+1)}{2}.$$

....

18.1 d) On utilise la linéarité de la somme :

$$\sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{k-4}{3}\right) = \frac{1}{3}\sum_{k=2}^{n-1}(k-4) = \frac{1}{3}\left(\sum_{k=2}^{n-1} k \;-\; 4\sum_{k=2}^{n-1} 1\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{(n-2)(n+1)}{2} - 4(n-2)\right) = \frac{(n-2)(n-7)}{6}.$$

....

18.2 a) On développe et utilise la linéarité de la somme $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + k = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k$.

Puis, on utilise la formule suivante : $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. D'où $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

18.2 b) On utilise la linéarité de la somme :

$$\sum_{k=0}^{n}\big(4k(k^2+2)\big) = 4\sum_{k=0}^{n} k^3 + 8\sum_{k=0}^{n} k = 4\frac{n^2(n+1)^2}{4} + 8\frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)(n(n+1)+4) = n(n+1)(n^2+n+4).$$

18.2 c) On utilise la formule pour les sommes géométriques : on a $\sum_{k=2}^{n-1} 3^k = 3^2\frac{1-3^{n-1-2+1}}{1-3} = \frac{9}{2}(3^{n-2}-1)$.

18.2 d) On factorise pour faire apparaître une somme géométrique :

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k 5^{n-k} = 5^n \sum_{k=0}^{n} 2^k 5^{-k} = 5^n \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{5}\right)^k = 5^n \frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n-0+1}}{1-\frac{2}{5}} = 5^{n+1}\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{3} = \frac{5^{n+1}-2^{n+1}}{3}.$$

18.2 e) On utilise la linéarité de la somme :

$$\sum_{k=1}^{n}(7^k+4k-n+2) = \sum_{k=1}^{n} 7^k + 4\sum_{k=1}^{n} k + (-n+2)\sum_{k=1}^{n} 1 = 7\frac{7^n-1}{6} + 4\frac{n(n+1)}{2} + (-n+2)n = \frac{7}{6}(7^n-1)+n+4.$$

18.2 f) On utilise la formule suivante : $\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n+1}{2n}$.

18.3 a) On utilise la formule suivante : $\prod_{k=p}^{q} 2 = 2 \times \cdots \times 2 = 2^{q-p+1}$.

18.3 b) On utilise la formule suivante : $\prod_{k=1}^{n} 3^k = 3^1 \times 3^2 \times \cdots \times 3^n = 3^{1+\cdots+n} = 3^{\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)} = 3^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

18.3 c) On factorise et on utilise que $\sqrt{k} = k^{\frac{1}{2}}$: on a

$$\prod_{k=1}^{n} 5\sqrt{k} \times k = 5^n \prod_{k=1}^{n} k^{\frac{3}{2}} = 5^n\left(\prod_{k=1}^{n} k\right)^{\frac{3}{2}} = 5^n (n!)^{\frac{3}{2}}.$$

18.3 d) Un produit est nul si l'un des termes est nul.

18.4 a) Avec ce changement ou renversement, on a $k = n+1-j$, les bornes varient alors de n à 1, on les remet dans le bon ordre. On a $\sum_{k=1}^{n} n+1-k = \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$.

18.4 b) On utilise la linéarité de la somme et on effectue ce changement ou renversement dans la seconde. On a $k = n+1-j$, les bornes varient alors de n à 1, on les remet dans le bon ordre. On a

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+1-k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}.$$

18.4 c) Avec le changement d'indice, on a, en notant $S_n = \sum_{k=1}^{n} k2^k$:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{j=0}^{n-1}(j+1)2^{j+1} = \sum_{j=0}^{n-1} j2^{j+1} + \sum_{j=0}^{n-1} 2^{j+1} = 2\sum_{j=0}^{n-1} j2^j + 2\sum_{j=0}^{n-1} 2^j \\ &= 2\left[\sum_{j=1}^{n} j2^j - n2^n\right] + 2\frac{1-2^n}{1-2} = 2S_n - n2^{n+1} - 2(1-2^n) \end{aligned}$$

D'où $S_n = n2^{n+1} + 2(1-2^n) = (n-1)2^{n+1} + 2$.

18.4 d) On a $\sum_{k=3}^{n+2}(k-2)^3 = \sum_{j=1}^{n} j^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

18.5 a) On reconnaît une somme télescopique :

$$\sum_{k=2}^{n+2}(k+1)^3 - k^3 = 3^3 - 2^3 + 4^3 - 3^3 + \cdots + (n+3)^3 - (n+2)^3 = (n+3)^3 - 2^3.$$

18.5 b) On calcule :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(2) + \cdots + \ln(n+1) - [\ln(1) + \cdots + \ln(n)] = \ln(n+1).$$

18.5 c) En écrivant $k = k+1-1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k+1-1}{(k+1)!}\right] = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!}\right] = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right] = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

18.5 d) En écrivant $k = k+1-1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k \times k! = \sum_{k=1}^{n}(k+1-1)k! = \sum_{k=1}^{n}[(k+1) \times k! - k!] = \sum_{k=1}^{n}[(k+1)! - k!] = (n+1)! - 1.$$

18.6 a) On écrit $\prod_{k=1}^{n} \dfrac{k+1}{k} = \dfrac{2}{1} \times \dfrac{3}{2} \times \cdots \times \dfrac{n+1}{n} = \dfrac{n+1}{1} = n+1$.

18.6 b) Dans cet exemple, il faut aller un terme plus loin pour voir le télescopage :

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{2k-3} &= \frac{3}{-1} \times \frac{5}{1} \times \frac{7}{3} \times \cdots \times \frac{2(n-1)+1}{2(n-1)-3} \times \frac{2n+1}{2n-3} \\ &= \frac{2(n-1)+1}{-1} \times \frac{2n+1}{1} = -(2n-2+1)(2n+1) = -(2n-1)(2n+1) = 1-4n^2. \end{aligned}$$

18.6 c) En mettant au même dénominateur : $\prod_{k=2}^{n}\left(1 - \dfrac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(\dfrac{k-1}{k}\right) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} \times \cdots \times \dfrac{n-1}{n} = \dfrac{1}{n}$.

18.6 d) Il faut remarquer l'identité remarquable et faire deux produits télescopiques :

$$\begin{aligned} \prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) &= \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+1)}{k \times k} = \left(\prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k}\right) \times \left(\prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{n-1}{n}\right) \times \left(\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n} \times \frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}. \end{aligned}$$

18.7 a) D'après la décomposition en éléments simples, on a $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1}$. En réduisant au même dénominateur et en identifiant, on trouve $a = 1$ et $b = -1$.

D'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$, en reconnaissant une somme télescopique.

18.7 b) D'après la décomposition en éléments simples, on a $\dfrac{1}{(k+2)(k+3)} = \dfrac{a}{k+2} + \dfrac{b}{k+3}$. En réduisant au même dénominateur et en identifiant, on trouve $a = 1$ et $b = -1$.

D'où $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+2)(k+3)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+3}$, en reconnaissant une somme télescopique.

18.8 a) Séparons les termes d'indices pairs et impairs. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k^2 &= \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant 2n \\ k \text{ pair}}} (-1)^k k^2 + \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant 2n \\ k \text{ impair}}} (-1)^k k^2 = \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant 2n \\ k \text{ pair}}} k^2 + \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant 2n \\ k \text{ impair}}} (-1)k^2 \\
&= \sum_{p=0}^{n} (2p)^2 - \sum_{p=0}^{n-1} (2p+1)^2 = \sum_{p=0}^{n} 4p^2 - \sum_{p=0}^{n-1} \big(4p^2 + 4p + 1\big) \\
&= \underbrace{4\sum_{p=0}^{n} p^2 - 4\sum_{p=0}^{n-1} p^2}_{=4n^2} - 4\sum_{p=0}^{n-1} p - \sum_{p=0}^{n-1} 1 = 4n^2 - 4\frac{n(n-1)}{2} - n = 2n^2 + n.
\end{aligned}$$

18.8 b) Séparons les termes plus petits que n et les autres. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2n} \min(k,n) &= \sum_{k=0}^{n} \min(k,n) + \sum_{k=n+1}^{2n} \min(k,n) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=n+1}^{2n} n = \frac{n(n+1)}{2} + n[2n - (n+1) + 1] = \frac{n(n+1)}{2} + n^2 = \frac{n(3n+1)}{2}.
\end{aligned}$$

18.9 a) Comme il n'y a que l'indice j dans la somme, nous pouvons factoriser :

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} j = \left(\sum_{j=1}^{n} j\right)\left(\sum_{j=1}^{n} 1\right) = \frac{n(n+1)}{2} n = \frac{n^2(n+1)}{2}.$$

18.9 b) On somme d'abord sur l'indice i ; on calcule donc

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j} i = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \times \frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} (j+1) = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n+1} k = \frac{n(n+3)}{4}.$$

Signalons, qu'en revanche, l'autre ordre de sommation ne permettait pas de conclure.

18.9 c) Il faut faire attention à l'inégalité stricte :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (i+j) &= \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} (i+j) = \sum_{j=2}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j-1} i + \sum_{i=1}^{j-1} j\right) = \sum_{j=2}^{n} \left[\frac{j(j-1)}{2} + j(j-1)\right] \\
&= \sum_{j=2}^{n} \left[\frac{3}{2}(j^2 - j)\right] = \frac{3}{2}\left(\sum_{j=2}^{n} j^2 - \sum_{j=2}^{n} j\right) = \frac{3}{2}\left[\left(\sum_{j=1}^{n} j^2\right) - 1 - \left(\sum_{j=1}^{n} j\right) + 1\right] \\
&= \frac{3}{2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right] = \frac{3n(n+1)(2n+1-3)}{3\times 2\times 2} = \frac{n(n+1)(n-1)}{2} = \frac{n(n^2-1)}{2}.
\end{aligned}$$

18.9 d) On développe d'abord puis on choisit l'ordre de sommation qui semble faciliter les calculs :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(i+j)^2 &= \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(i^2+2ij+j^2) = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} i^2 + 2\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij + \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} j^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} i^2\right) + 2\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} ij\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} j^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(i^2\sum_{j=i}^{n} 1\right) + 2\sum_{j=1}^{n}\left(j\sum_{i=1}^{j} i\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(j^2\sum_{i=1}^{j} 1\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} i^2(n-i+1) + 2\sum_{j=1}^{n} j\frac{j(j+1)}{2} + \sum_{j=1}^{n} j^3 = \sum_{i=1}^{n}\left[i^2(n+1)-i^3\right] + \sum_{j=1}^{n}(j^3+j^2) + \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\
&= (n+1)\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i^3 + \sum_{j=1}^{n} j^3 + \sum_{j=1}^{n} j^2 + \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\
&= (n+2)\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\
&= \frac{n(n+1)(7n^2+13n+4)}{12}.
\end{aligned}$$

18.9 e) On calcule :

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\ln(i^j) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} j\ln(i) = \left(\sum_{j=1}^{n} j\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\ln(i)\right) = \frac{n(n+1)}{2}\ln\left(\prod_{i=1}^{n} i\right) = \frac{n(n+1)}{2}\ln(n!).$$

18.9 f) On fait une sommation par paquets :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\max(i,j) &= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\max(i,j) + \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n}\max(i,j) + \sum_{1\leqslant j=i\leqslant n}\max(i,j) \\
&= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} j + \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} i + \sum_{i=1}^{n} i \\
&= 2\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} j + \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{par symétrie} \\
&= 2\sum_{j=2}^{n} j(j-1) + \frac{n(n+1)}{2} = 2\sum_{j=1}^{n} j(j-1) + \frac{n(n+1)}{2} \\
&= 2\left[\sum_{j=1}^{n} j^2 - \sum_{j=1}^{n} j\right] + \frac{n(n+1)}{2} = 2\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right] + \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)}{6}(4n+2-6+3) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}.
\end{aligned}$$

Fiche nº 19. Coefficients binomiaux

Réponses

19.1 a) .... $\boxed{10\,100}$

19.1 b) .... $\boxed{720}$

19.1 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{30}}$

19.1 d) .... $\boxed{15}$

19.1 e) .... $\boxed{56}$

19.1 f) .... $\boxed{140}$

19.2 a) .... $\boxed{\dfrac{9!}{5!}}$

19.2 b) .... $\boxed{\dbinom{9}{4}}$

19.2 c) .... $\boxed{2^n \times n!}$

19.2 d) .... $\boxed{\dfrac{(2n+1)!}{2^n \times n!}}$

19.3 a) .... $\boxed{\dfrac{n(n-1)}{2}}$

19.3 b) .... $\boxed{\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}}$

19.3 c) .... $\boxed{\dfrac{k+1}{n-k}}$

19.3 d) .... $\boxed{(n+2)(n+1)}$

19.3 e) .... $\boxed{\dfrac{1}{(n+1)!}}$

19.3 f) .... $\boxed{\dfrac{n! \times (n-3)}{2^{2n+2}}}$

19.4 a) .... $\boxed{\dfrac{(n+1)^3}{n \times (n+2)!}}$

19.4 b) ..... $\boxed{\dfrac{3(3n+2)(3n+1)}{a^3(n+1)^2}}$

19.5 a) .... $\boxed{3^n}$

19.5 b) .... $\boxed{0}$

19.5 c) .... $\boxed{6^n}$

19.5 d) .... $\boxed{12 \times 15^n}$

19.6 a) .... $\boxed{2 \times \displaystyle\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p}}$

19.6 b) .... $\boxed{2^{n-1}}$

19.7 a) .... $\boxed{2^n}$

19.7 b) .... $\boxed{n2^{n-1}}$

19.7 c) .... $\boxed{n(n+1)2^{n-2}}$

19.7 d) .... $\boxed{\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}}$

19.8 a) .... $\boxed{\dbinom{2n}{n}}$

19.8 b) .... $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2}$

19.8 c) .... $\boxed{\dbinom{2n}{n}}$

Corrigés

19.1 a) On calcule : $\dfrac{101!}{99!} = \dfrac{101 \times 100!}{99!} = \dfrac{101 \times 100 \times 99!}{99!} = 101 \times 100 = 10100.$

....

19.1 b) On calcule : $\dfrac{10!}{7!} = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720.$

....

19.1 c) On calcule : $\dfrac{1}{4!} - \dfrac{1}{5!} = \dfrac{5}{5 \times 4!} - \dfrac{1}{5!} = \dfrac{5-1}{5!} = \dfrac{4}{5!} = \dfrac{4}{5 \times 4 \times 3 \times 2} = \dfrac{1}{30}.$

....

19.1 d) On calcule : $\dbinom{6}{2} = \dfrac{6!}{2! \times 4!} = \dfrac{6 \times 5 \times 4!}{2 \times 4!} = \dfrac{6 \times 5}{2} = 15.$

....

19.1 e) On calcule : $\dbinom{8}{3} = \dfrac{8!}{3! \times 5!} = \dfrac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3! \times 5!} = \dfrac{8 \times 7 \times 6}{2 \times 3} = 8 \times 7 = 56.$

....

19.1 f) On calcule : $4 \times \dbinom{7}{4} = 4 \times \dfrac{7!}{4! \times 3!} = \dfrac{4 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{4 \times 3! \times 3!} = \dfrac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{2 \times 3} = 140.$

....

19.2 a) Par définition, $9! = (2 \times 3 \times 4 \times 5) \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 = 5! \times 6 \times 7 \times 8 \times 9$. Donc, $6 \times 7 \times 8 \times 9 = \dfrac{9!}{5!}$.

....

19.2 b) Comme pour le calcul précédent, on a $6 \times 7 \times 8 \times 9 = \dfrac{9!}{5!}$. Or, $2 \times 3 \times 4 = 4!$. Ainsi,

$$\frac{6 \times 7 \times 8 \times 9}{2 \times 3 \times 4} = \frac{9!}{5!} \times \frac{1}{4!} = \binom{9}{4} = \binom{9}{5}.$$

....

19.2 c) On peut mettre 2 en facteur de chaque nombre du produit $2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)$, produit qui contient n facteurs. Ainsi,

$$2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n) = 2^n \times (1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n) = 2^n \times n!.$$

19.2 d) On multiplie le produit $3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times (2n+1)$ par le produit $2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)$ de la question précédente. On obtient ainsi le produit de tous les entiers compris entre 2 et $(2n+1)$. Il s'agit donc de $(2n+1)!$.

Donc, on a

$$3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times (2n+1) = \frac{(2n+1)!}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)} = \frac{(2n+1)!}{2^n \times n!}.$$

19.3 a) Par définition, $\dbinom{n}{2} = \dfrac{n!}{2! \times (n-2)!} = \dfrac{n \times (n-1) \times (n-2)!}{2! \times (n-2)!} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

19.3 b) Par définition, $\dbinom{n}{3} = \dfrac{n!}{3! \times (n-3)!} = \dfrac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3)!}{3! \times (n-3)!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

19.3 c) On calcule

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}} = \frac{\frac{n!}{k! \times (n-k)!}}{\frac{n!}{(k+1)! \times (n-(k+1))!}} = \frac{n!}{k! \times (n-k)!} \times \frac{(k+1)! \times (n-(k+1))!}{n!}$$
$$= \frac{(k+1) \times k! \times (n-k-1)!}{k! \times (n-k) \times (n-k-1)!} = \frac{k+1}{n-k}.$$

19.3 d) On calcule $\dfrac{(n+2)!}{n!} = \dfrac{(n+2) \times (n+1) \times n!}{n!} = (n+2)(n+1)$.

19.3 e) On réduit au même dénominateur $\dfrac{1}{n!} - \dfrac{n}{(n+1)!} = \dfrac{n+1}{(n+1) \times n!} - \dfrac{n}{(n+1)!} = \dfrac{(n+1)-n}{(n+1)!} = \dfrac{1}{(n+1)!}$.

19.3 f) On réduit au même dénominateur

$$\frac{(n+1)!}{2^{2(n+1)}} - \frac{n!}{2^{2n}} = \frac{(n+1)!}{2^{2n+2}} - \frac{2^2 \times n!}{2^2 \times 2^{2n}} = \frac{(n+1)! - 4 \times n!}{2^{2n+2}} = \frac{(n+1) \times n! - 4 \times n!}{2^{2n+2}} = \frac{n! \times (n-3)}{2^{2n+2}}.$$

19.4 a) On met chaque terme au même dénominateur, à savoir $2n(n+2)!$) :

$$\frac{1}{n!} = \frac{2n(n+1)(n+2)}{n! \times 2n(n+1)(n+2)}$$
$$\frac{1}{2n \times (n+1)!} = \frac{n+2}{2n \times (n+1)! \times (n+2)}$$
$$\text{et} \quad \frac{1}{2 \times (n+2)!} = \frac{n}{2 \times (n+2)! \times n}.$$

D'où,

$$\frac{1}{n!} + \frac{1}{2n \times (n+1)!} + \frac{1}{2 \times (n+2)!} = \frac{2n(n+1)(n+2) + n + 2 + n}{2n \times (n+2)!}$$
$$= \frac{2(n+1)(n(n+2)+1)}{2n \times (n+2)!} = \frac{(n+1)(n^2+2n+1)}{n(n+2)!}.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{n!} + \frac{1}{2n \times (n+1)!} + \frac{1}{2 \times (n+2)!} = \frac{(n+1)^3}{n \times (n+2)!}.$$

19.4 b) On a

$$\frac{(3(n+1))!}{a^{3(n+1)} \times ((n+1)!)^3} \div \frac{(3n)!}{a^{3n} \times (n!)^3} = \frac{(3n+3)!}{a^{3n+3} \times ((n+1)!)^3} \times \frac{a^{3n} \times (n!)^3}{(3n)!}.$$

Or,

$$\begin{aligned} (3n+3)! &= (3n+3) \times (3n+2) \times (3n+1) \times (3n)! \\ a^{3n+3} &= a^{3n} \times a^3 \\ ((n+1)!)^3 &= ((n+1) \times n!)^3 = (n+1)^3 \times (n!)^3. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{(3(n+1))!}{a^{3(n+1)} \times ((n+1)!)^3} \div \frac{(3n)!}{a^{3n} \times (n!)^3} &= \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{a^3 \times (n+1)^3} \\ &= \frac{3(n+1)(3n+2)(3n+1)}{a^3 \times (n+1)^3} = \frac{3(3n+2)(3n+1)}{a^3 (n+1)^2}. \end{aligned}$$

19.5 a) On constate que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \times 1^{n-k} = (2+1)^n = 3^n$.

19.5 b) On constate que

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} (-1) \times \binom{n}{k} (-1)^k \times 1^{n-k} = -1 \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \times 1^{n-k} = (-1) \times (-1+1)^n = 0.$$

19.5 c) On calcule $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{2n-k} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} 2^n \times 2^{n-k} \binom{n}{k} = 2^n \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} \times 1^k = 2^n \times (1+2)^n = 2^n \times 3^n = 6^n$.

19.5 d) On calcule

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} 2^{k+2} \binom{n}{k} \times 3^{2n-k+1} &= \sum_{k=0}^{n} 2^2 \times 2^k \times \binom{n}{k} \times 3^{n+1} \times 3^{n-k} \\ &= 4 \times 3^{n+1} \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \times 3^{n-k} \\ &= 4 \times 3^{n+1} \times (2+3)^n = 4 \times 3^{n+1} \times 5^n = 4 \times 3 \times 3^n \times 5^n = 12 \times 15^n. \end{aligned}$$

19.6 a) On développe $\displaystyle(1+1)^n + (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1 + (-1)^k)$.

Or, $1 + (-1)^k = 2$ si k est pair et $1 + (-1)^k = 0$ si k est impair. Ainsi, on notant $P = \{k \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant k \leqslant n \text{ et } k \text{ pair}\}$, on a

$$(1+1)^n + (1-1)^n = \sum_{k \in P} \binom{n}{k} \times 2 = 2 \times \sum_{k \in P} \binom{n}{k}.$$

Or, si $k \in P$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $k = 2p$. Comme $0 \leqslant k \leqslant n$, on a alors $0 \leqslant 2p \leqslant n$ et donc $0 \leqslant p \leqslant \dfrac{n}{2}$.

Comme $p \in \mathbb{N}$, on peut aussi écrire $0 \leqslant p \leqslant \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Ainsi,

$$\sum_{k \in P} \binom{n}{k} = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p} \quad \text{et} \quad (1+1)^n + (1-1)^n = 2 \times \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p}.$$

19.6 b) On déduit de la première question que $\displaystyle\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p} = \frac{1}{2}((1+1)^n + (1-1)^n) = 2^{n-1}$.

19.7 a) On développe $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$. On évalue en $x = 1$ pour obtenir $(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

Ainsi, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

19.7 b) On dérive par rapport à x la relation $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$.

On obtient $n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \times k \times x^{k-1}$.

On évalue en $x = 1$ pour obtenir $n(1+1)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \times k$. Ainsi, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \times k = n2^{n-1}$.

19.7 c) On dérive deux fois par rapport à x la relation $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$.

On obtient $n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \times k \times (k-1) \times x^{k-2}$.

On évalue en $x = 1$ pour obtenir $n(n-1)(1+1)^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \times k \times (k-1)$. Ainsi, $\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \times k \times (k-1) = n(n-1)2^{n-2}$.

Or, par linéarité, on a $\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \times k \times (k-1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k \times (k-1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k^2 - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k$. Donc,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k^2 = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \times k \times (k-1) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}.$$

19.7 d) On intègre entre 0 et x la relation $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$. On obtient

$$\frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1} - \frac{1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1} x^{k+1}.$$

On évalue en $x = 1$ pour obtenir

$$\frac{1}{n+1}(1+1)^{n+1} - \frac{1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1}.$$

Ainsi, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

19.8 a) On développe $(1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k$. Ainsi, le coefficient de x^n vaut $\binom{2n}{n}$.

19.8 b) On obtient une contribution en x^n dans le produit $(1+x)^n(1+x)^n$ à chaque fois que l'on multiplie un terme de la forme $a_k x^k$ dans le premier facteur avec un terme de la forme $b_{n-k}x^{n-k}$ dans le deuxième facteur, et ce pour toutes les valeurs de k entières naturelles et inférieures ou égales à n. Or, $(1+x)^n \times (1+x)^n = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\right) \times \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}\right)$.

Donc, le coefficient de x^n vaut $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

19.8 c) On déduit, en comparant les réponses aux questions précédentes, que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Fiche n° 20. Manipulation des fonctions usuelles

Réponses

20.1 a) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{6}}$

20.1 b) .... $\boxed{2}$

20.1 c) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{4}}$

20.1 d) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{6}}$

20.1 e) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{4}}$

20.1 f) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{3}}$

20.2 a) .... $\boxed{1}$

20.2 b) .... $\boxed{0}$

20.2 c) .... $\boxed{\dfrac{5}{4}}$

20.2 d) .... $\boxed{\dfrac{4}{3}}$

20.2 e) .... $\boxed{\dfrac{13}{12}}$

20.2 f) .... $\boxed{\dfrac{3}{5}}$

20.3 a) .... $\boxed{\mathrm{sh}(x+y)}$

20.3 b) .... $\boxed{\mathrm{ch}(x-y)}$

20.4 a) .... $\boxed{\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}}$

20.4 b) .... $\boxed{1}$

20.4 c) .... $\boxed{-\dfrac{\ln(3)}{\ln(2)}}$

20.4 d) .... $\boxed{\dfrac{\ln(4)}{\ln(20/3)}}$

20.5 a) .... $\boxed{\dfrac{\ln\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)}{\ln(2)}}$

20.5 b) .... $\boxed{\left\{0; \dfrac{1}{2}\right\}}$

20.5 c) .... $\boxed{1-\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}}$

20.5 d) .... $\boxed{\dfrac{\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}{\ln(3)}}$

20.6 a) .... $\boxed{1}$

20.6 b) .... $\boxed{0}$

20.6 c) .... $\boxed{\{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}}$

20.6 d) . $\boxed{\begin{array}{l}\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\\ \cup\left\{\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\end{array}}$

20.6 e) $\boxed{\begin{array}{l}\left\{\frac{1}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\\ \cup\left\{\pi-\frac{1}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\end{array}}$

20.6 f) .... $\boxed{1}$

20.7 a) . $\boxed{\{\ln(\sqrt{5}-2); \ln(\sqrt{5}+2)\}}$

20.7 b) .... $\boxed{\ln(1+\sqrt{2})}$

20.7 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\ln(2)}$

20.7 d) . $\boxed{[-\ln(4+\sqrt{15}), \ln(4+\sqrt{15})]}$

20.7 e) ..... $\boxed{\left[\ln(3+\sqrt{10}), +\infty\right[}$

20.7 f) .... $\boxed{\left]-\infty, \dfrac{1}{2}\ln(3)\right]}$

20.8 a) ... $\boxed{x \mapsto \ln(2) \times 2^x + 2x}$

20.8 b). $\boxed{x \mapsto \dfrac{15^x \ln(3/5) + 3^x \ln(3)}{(5^x+1)^2}}$

20.8 c) ...... $\boxed{x \mapsto (\ln(x)+1)x^x}$

20.8 d) . $\boxed{x \mapsto \dfrac{\pi}{2\sqrt{1-x^2}\arccos(x)^2}.}$

20.9 a) .... $\boxed{x \mapsto 2x\dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}}}$

20.9 b) ... $\boxed{x \mapsto \mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}^2(x)}$

20.9 c) .... $\boxed{x \mapsto \dfrac{1-\mathrm{th}^2(x)}{1+\mathrm{th}^2(x)}}$

20.9 d) .... $\boxed{x \mapsto \mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(\mathrm{ch}(x))}$

20.10 a) .... $\boxed{x \mapsto 0}$

20.10 b) .... $\boxed{x \mapsto 0}$

20.11 a) $\boxed{x \mapsto (\ln(x)+1)x^x \mathrm{e}^{-x^{2x}}}$

20.11 b). $\boxed{x \mapsto \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)^2}\,\dfrac{1}{2\sqrt{\ln(\mathrm{ch}(x))}}}$

20.11 c) .... $\boxed{x \mapsto \arcsin(x)}$

20.11 d) .... $\boxed{x \mapsto \arctan(x)}$

Corrigés

20.1 b) On calcule : $\dfrac{\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \dfrac{\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{6}} = 2.$

....

20.1 c) On remarque que $\arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}\right) = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}.$

....

20.1 d) On remarque que $\arctan\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = \arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \arctan\left(\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = \dfrac{\pi}{6}.$

....

20.1 f) On remarque que $\arccos\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}\right) = \arccos\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{3}.$

20.2 c) On calcule : $\mathrm{ch}(\ln(2)) = \dfrac{e^{\ln(2)} + e^{-\ln(2)}}{2} = \dfrac{2 + \frac{1}{2}}{2} = \dfrac{5}{4}$.

20.2 d) On calcule : $\mathrm{sh}(\ln(3)) = \dfrac{e^{\ln(3)} - e^{-\ln(3)}}{2} = \dfrac{3 - \frac{1}{3}}{2} = \dfrac{\frac{8}{3}}{2} = \dfrac{4}{3}$.

20.2 e) On calcule : $\mathrm{ch}(\ln(2/3)) = \dfrac{e^{\ln(2/3)} + e^{-\ln(2/3)}}{2} = \dfrac{\frac{2}{3} + \frac{3}{2}}{2} = \dfrac{\frac{13}{6}}{2} = \dfrac{13}{12}$.

20.2 f) On sait que $\mathrm{th}(\ln(2)) = \dfrac{e^{\ln(2)} - e^{-\ln(2)}}{e^{\ln(2)} + e^{-\ln(2)}} = \dfrac{2 - \frac{1}{2}}{2 + \frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}} = \dfrac{3}{5}$.

20.3 a) Développons :

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(y) + \mathrm{ch}(y)\mathrm{sh}(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,\frac{e^y - e^{-y}}{2} + \frac{e^y + e^{-y}}{2}\,\frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
&= \frac{(e^x + e^{-x})(e^y - e^{-y}) + (e^y + e^{-y})(e^x - e^{-x})}{4} \\
&= \frac{e^{x+y} - e^{x-y} + e^{y-x} - e^{-(x+y)} + e^{x+y} - e^{y-x} + e^{x-y} - e^{-(x+y)}}{4} \\
&= \frac{2e^{x+y} - 2e^{-(x+y)}}{4} = \mathrm{sh}(x+y).
\end{aligned}$$

20.4 a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors on a les équivalences $3^x = \dfrac{9^x}{2} \Leftrightarrow \ln(3^x) = \ln\left(\dfrac{9^x}{2}\right) \Leftrightarrow x\ln(3) = 2x\ln(3) - \ln(2) \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$.

20.4 b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors on a les équivalences $4^x = 2 \times 2^x \Leftrightarrow 2x\ln(2) = (x+1)\ln(2) \Leftrightarrow 2x = x + 1 \Leftrightarrow x = 1$.

20.4 c) Soit $x \in \mathbb{R}$.

Alors on a l'équivalence $2^x = 3.4^x \Leftrightarrow x\ln(2) = \ln(3) + 2x\ln(2) \Leftrightarrow x = -\dfrac{\ln(3)}{\ln(2)}$.

20.4 d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
10^{2x} = 4 \times 5^x \times 9^{\frac{x}{2}} &\Leftrightarrow \ln(10^{2x}) = \ln(4 \times 5^x \times 9^{\frac{x}{2}}) \Leftrightarrow 2x\ln(10) = \ln(4) + x\ln(5) + \frac{x}{2}\ln(9) \\
&\Leftrightarrow x\left(2\ln(5) + 2\ln(2) - \ln(5) - \frac{2\ln(3)}{2}\right) = \ln(4) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(4)}{2\ln(2) + \ln(5) - \ln(3)} = \frac{\ln(4)}{\ln(20/3)}.
\end{aligned}$$

20.5 a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = 2^x$. Alors $2^x + 4^x = 4 \Leftrightarrow X + X^2 - 4 = 0$. Cette équation a pour discriminant $1 + 16 = 17$, d'où deux racines, $\dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$. Seule la racine $\dfrac{\sqrt{17} - 1}{2}$ est positive, donc $2^x + 4^x = 4 \Leftrightarrow 2^x = \dfrac{\sqrt{17} - 1}{2} \Leftrightarrow$ $x\ln(2) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{17} - 1}{2}\right) \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)}{\ln(2)}$.

20.5 b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons $X = 4^x$. Alors $16^x - 3 \times 4^x + 2 = 0 \Leftrightarrow X^2 - 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow (X-1)(X-2) = 0 \Leftrightarrow 4^x = 1$ ou $4^x = 2 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \dfrac{1}{2}$.

20.5 c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = 3^x$.

Alors on a l'équivalence $2 \times 9^x - 3^x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2X^2 - X - 3 = 0$. Cette équation a pour discriminant $1 + 4 \times 2 \times 3 = 25$, donc les deux solutions de l'équation sont $\dfrac{1 \pm 5}{4}$, i.e. $\dfrac{3}{2}$ et -1. La seule solution positive est $\dfrac{3}{2}$, donc $2 \times 9^x - 3^x - 3 \Leftrightarrow 3^x = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x\ln(3) = \ln(3) - \ln(2) \Leftrightarrow x = 1 - \dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$.

....

20.5 d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = 3^x$.

Alors on a l'équivalence $3^x + 3^{2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow X^2 + X - 1 = 0$. Cette équation a pour discriminant $1 + 4 = 5$, donc les deux solutions de l'équation sont $\dfrac{-1 \pm 5}{2}$. La seule solution positive est $\dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$, donc $3^x + 3^{2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow 3^x = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} \Leftrightarrow x\ln(3) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)$.

....

20.6 a) Ici, pas de calcul : $\arcsin(1) = \dfrac{\pi}{2}$ et, par stricte croissance de arcsin, l'unique solution est 1.

....

20.6 b) Soit $x \in [-1, 1]$. Alors $\cos(\arccos(x)) = 0 \Leftrightarrow \arccos(x) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Mais comme arccos est à valeurs dans $[0, \pi]$, $\cos(\arccos(x)) = 0 \Leftrightarrow \arccos(x) = \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 0$.

....

20.6 c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $\arccos(\cos(x)) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

....

20.6 d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\arcsin(\sin(x)) = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \sin(x) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

....

20.6 e) Ici, pas besoin de connaître $\sin\left(\dfrac{1}{3}\right)$! Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\arcsin(\sin(x)) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sin(x) = \sin\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{1}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\pi - \frac{1}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

....

20.6 f) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $\tan(\arctan(x)) = 1 \Leftrightarrow \arctan(x) = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 1$.

....

20.7 a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $X = \mathrm{e}^x$. Alors on a les équivalences (comme $\mathrm{e}^x > 0$)

$$\mathrm{ch}(x) = \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow X + \frac{1}{X} = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow X^2 + 1 = 2\sqrt{5}X \Leftrightarrow X^2 - 2\sqrt{5}X + 1 = 0.$$

Il s'agit donc d'une équation du second degré, dont le discriminant est $20 - 4 = 16$, donc les deux solutions de l'équation sont $\dfrac{2\sqrt{5} \pm 4}{2} = \sqrt{5} \pm 2$. Ces deux quantités sont positives, on a donc l'équivalence $\mathrm{ch}(x) = \sqrt{5} \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = \sqrt{5} \pm 2 \Leftrightarrow x = \ln(\sqrt{5} \pm 2)$. Ainsi, les deux solutions sont $\{\ln(\sqrt{5} - 2); \ln(\sqrt{5} + 2)\}$

....

20.7 b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $X = \mathrm{e}^x$. Alors $\mathrm{sh}(x) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{X - \frac{1}{X}}{2} = 1 \Leftrightarrow X^2 - 2X - 1 = 0$, de discriminant $4 + 4 = 8$, de solutions $\dfrac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$. La seule solution positive est $1 + \sqrt{2}$, donc $\mathrm{sh}(x) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \ln(1 + \sqrt{2})$.

....

20.7 c) Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $X = \mathrm{e}^x$. Alors $\mathrm{th}(x) = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{X - \frac{1}{X}}{X + \frac{1}{X}} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow X^2 - 1 = \dfrac{1}{3}(X^2 + 1) \Leftrightarrow \dfrac{2}{3}X^2 - \dfrac{4}{3} = 0 \Leftrightarrow X^2 = 2 \Leftrightarrow X = \pm\sqrt{2}$. Ainsi, la seule solution positive étant $\sqrt{2}$, $\mathrm{th}(x) \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}\ln(2)$.

....

20.7 d) Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $X = \mathrm{e}^x$. Alors $\mathrm{ch}(x) \leqslant 4 \Leftrightarrow \dfrac{X + \frac{1}{X}}{2} \leqslant 4 \Leftrightarrow X^2 + 1 \leqslant 8X \Leftrightarrow X^2 - 8X + 1 \leqslant 0$. Ce polynôme du second degré a pour discriminant 60 et pour racines $\dfrac{8 \pm 2\sqrt{15}}{2} = 4 \pm \sqrt{15}$. Les deux racines sont positives, donc $\mathrm{ch}(x) \leqslant 4 \Leftrightarrow 4 - \sqrt{15}\mathrm{e}^x \leqslant 4 + \sqrt{15} \Leftrightarrow \ln(4 - \sqrt{15}) \leqslant x \leqslant \ln(4 + \sqrt{15})$. On remarque ensuite que $\dfrac{1}{4 - \sqrt{15}} = \dfrac{4 + \sqrt{15}}{(5 - \sqrt{15})(4 + \sqrt{15})} = 4 + \sqrt{15}$.

20.7 e) Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = \mathrm{e}^x$. Alors $\mathrm{sh}(x) \geqslant 3 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} \leqslant 6 \Leftrightarrow X - \dfrac{1}{X} \leqslant 6 \Leftrightarrow X^2 - 6X - 1 \leqslant 0$. Ce trinôme du second degré a pour discriminant 40, et a donc pour racines $\dfrac{6 \pm 2\sqrt{10}}{2} = 3 \pm \sqrt{10}$. La première racine est négative, la seconde positive, et $X \geqslant 0$, donc $\mathrm{sh}(x) \geqslant 3 \iff \mathrm{e}^x \geqslant 3 + \sqrt{10} \Leftrightarrow x \geqslant \ln(3 + \sqrt{10})$.

20.7 f) Soit $x \in \mathbb{R}$, posons $X = \mathrm{e}^x$. Alors, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{th}(x) \leqslant \frac{1}{2} &\iff \frac{X - \frac{1}{X}}{X + \frac{1}{X}} \leqslant \frac{1}{2} \iff \frac{X^2 - 1}{X^2 + 1} \leqslant \frac{1}{2} \\
&\iff X^2 - 1 \leqslant \frac{X^2 + 1}{2} \iff X^2 - 3 \leqslant 0 \\
&\iff X^2 \leqslant 3 \iff \mathrm{e}^{2x} \leqslant 3 \iff x \leqslant \frac{1}{2}\ln(3).
\end{aligned}$$

20.8 a) On n'oublie pas que $2^x = \mathrm{e}^{x\ln(2)}$. Donc la dérivée de $x \mapsto 2^x$ est $x \mapsto \ln(2).2^x$.

20.8 c) On écrit que $x^x = \mathrm{e}^{x\ln(x)}$. Ainsi la dérivée de la fonction est $x \mapsto (\ln(x) + 1)\mathrm{e}^{x\ln(x)}$.

20.8 d) On dérive un quotient : en notant f la fonction et si $x \in]-1, 1[$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arccos(x) + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin(x)}{\arccos(x)^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{1-x^2}\arccos(x)^2}.$$

20.9 a) On dérive une composée $x \mapsto 2x\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^4}}$.

20.9 c) Il s'agit de dériver th :

$$\mathrm{th}'(x) = \frac{\mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)^2} = \frac{\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2}{\mathrm{ch}(x)^2} = 1 - \frac{\mathrm{sh}(x)^2}{\mathrm{ch}(x)^2} = 1 - \mathrm{th}(x)^2.$$

La suite se dérive comme la dérivée d'une composée.

20.10 a) La fonction est dérivable sur $]-1, 1[$ et sa dérivée est $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$.

20.10 b) La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{-1}{x^2}\dfrac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{x^2+1} = 0$.

20.11 a) Il s'agit de dériver une composée. La dérivée de cette fonction est $x \mapsto (\ln(x) + 1)x^x F'(x^x) = (\ln(x) + 1)x^x\mathrm{e}^{-(x^x)^2} = (\ln(x) + 1)x^x\mathrm{e}^{-x^{2x}}$.

20.11 b) Il s'agit de dériver une composée. La dérivée de $x \mapsto \ln(\mathrm{ch}(x))$ est $x \mapsto \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \mathrm{th}(x)$.

Donc, la dérivée de $x \mapsto F(\sqrt{\ln(\mathrm{ch}(x))})$ est

$$x \longmapsto \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}\frac{1}{2\sqrt{\ln(\mathrm{ch}(x))}}\mathrm{e}^{-\ln(\mathrm{ch}(x))} = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)^2}\frac{1}{2\sqrt{\ln(\mathrm{ch}(x))}}$$

Fiche n° 21. Suites numériques

Réponses

21.1 a) .... $\boxed{\dfrac{12}{5}}$

21.1 b) .... $\boxed{8}$

21.1 c) .... $\boxed{\dfrac{(2n+5)\cdot 2^{n+3}}{5}}$

21.1 d) .... $\boxed{\dfrac{3(2n+1)\cdot 2^{3n+2}}{5}}$

21.2 a) .... $\boxed{13}$

21.2 b) .... $\boxed{29}$

21.3 a) .... $\boxed{2^{\frac{1}{8}}}$

21.3 b) .... $\boxed{2^{\frac{1}{64}}}$

21.4 a) .... $\boxed{2}$

21.4 b) .... $\boxed{2}$

21.5 a) .... $\boxed{2n\ln(n)}$

21.5 b) .... $\boxed{4n\ln(2n)}$

21.6 a) .... $\boxed{21}$

21.6 b) .... $\boxed{10\ 000}$

21.6 c) .... $\boxed{2\ 001}$

21.6 d) .... $\boxed{10\ 201}$

21.7 a) .... $\boxed{\dfrac{17}{24}}$

21.7 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{24}}$

21.8 a) .... $\boxed{\dfrac{3}{512}}$

21.8 b) .... $\boxed{\dfrac{3069}{512}}$

21.8 c) .... $\boxed{\dfrac{3}{1\ 024}}$

21.8 d) .... $\boxed{\dfrac{6141}{1024}}$

21.9 a) .... $\boxed{\dfrac{\pi\sqrt{5}}{5}}$

21.9 b) .... $\boxed{\dfrac{11\sqrt{5}}{25}}$

21.10 a) .... $\boxed{3^n+(-2)^n}$

21.10 b) .... $\boxed{211}$

21.11 a) .... $\boxed{\dfrac{(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n}{2}}$

21.11 b) .... $\boxed{2\sqrt{2}}$

21.12 a) .... $\boxed{257}$

21.12 b) .... $\boxed{65\ 537}$

21.12 c) .... $\boxed{F_n}$

21.12 d) .... $\boxed{F_{n+1}-2}$

21.12 e) .... $\boxed{F_{n+1}+2^{2^n+1}}$

21.12 f) .... $\boxed{F_{n+2}}$

Corrigés

21.1 a) $u_0 = \dfrac{2\times 0+3}{5}\times 2^{0+2} = \dfrac{12}{5}$.

21.1 b) $u_1 = \dfrac{2\times 1+3}{5}\times 2^{1+2} = \dfrac{5}{5}\times 8 = 8$.

21.1 c) $u_n = \dfrac{2(n+1)+3}{5}\times 2^{(n+1)+2} = \dfrac{(2n+5)\cdot 2^{n+3}}{5}$.

21.1 d) $u_{3n} = \dfrac{2\times 3n+3}{5}\times 2^{3n+2} = \dfrac{3(2n+1)\cdot 2^{3n+2}}{5}$

21.2 a) $u_1 = 2\times 1+3 = 5$ et $u_2 = 2\times 5+3 = 13$.

21.2 b) On calcule : $u_3 = 2\times 13+3 = 29$.

21.3 a) $v_3 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} = 2^{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2^3}} = 2^{\frac{1}{8}}$.

21.3 b) $v_6 = 2^{\left(\frac{1}{2}\right)^6} = 2^{\frac{1}{2^6}} = 2^{\frac{1}{64}}$.

21.4 a) $w_1 = \dfrac{1}{2}\times 2^2 = \dfrac{4}{2} = 2$ et, de même, $w_2 = 2$.

21.4 b) Il faudrait formaliser une preuve par récurrence.

21.5 a) $t_{2n} = \ln((2n)^{2n}) - \ln(2^{2n}) = 2n\ln(2) + 2n\ln(n) - 2n\ln(2) = 2n\ln(n)$.

21.5 b) $t_{4n} = \ln((4n)^{4n}) - \ln(2^{4n}) = 8n\ln(2) + 4n\ln(n) - 4n\ln(2) = 4n\ln(2) + 4n\ln(n) = 4n\ln(2n)$.

21.6 a) $a_{100} = a_0 + 100 \times 2 = 201$.

21.6 b) $s_{100} = \dfrac{100 \times (1+199)}{2} = \dfrac{100 \times 200}{2} = 100^2 = 10\ 000$.

21.6 c) $a_{1\ 000} = 1 + 1\ 000 \times 2 = 2\ 001$.

21.6 d) $s_{101} = \dfrac{101 \times (1+201)}{2} = \dfrac{101 \times 202}{2} = 101^2 = 10\ 201$.

21.7 a) $b_{102} = \dfrac{b_{101} + b_{103}}{2} = \dfrac{\frac{2}{3} + \frac{3}{4}}{2} = \dfrac{\frac{8+9}{12}}{2} = \dfrac{17}{24}$.

21.7 b) $r = u_{102} - u_{101} = \dfrac{17}{24} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{24}$.

21.8 a) $g_9 = 3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^9 = \dfrac{3}{2^9} = \dfrac{3}{512}$.

21.8 b) $\sigma_{10} = g_0 \times \dfrac{1 - \frac{1}{2^{10}}}{1 - \frac{1}{2}} = 6\dfrac{2^{10} - 1}{2^{10}} = \dfrac{3 \times 1\ 023}{512} = \dfrac{3069}{512}$.

21.8 c) $g_{10} = g_0 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{10} = 3 \times \dfrac{1}{2^{10}} = \dfrac{3}{1\ 024}$.

21.8 d) $\sigma_{11} = 6\dfrac{2^{11} - 1}{2^{11}} = \dfrac{3 \times 2\ 047}{1\ 024} = \dfrac{6141}{1024}$.

21.9 a) $h_{12} = \sqrt{h_{11} \times h_{13}} = \sqrt{\dfrac{5\pi \times 11\pi}{11 \times 25}} = \sqrt{\dfrac{\pi^2}{5}} = \dfrac{\pi\sqrt{5}}{5}$.

21.9 b) $r = \dfrac{h_{12}}{h_{11}} = \dfrac{\frac{\pi\sqrt{5}}{5}}{\frac{5\pi}{11}} = \dfrac{\pi\sqrt{5} \times 11}{5 \times 5\pi} = \dfrac{11\sqrt{5}}{25}$.

21.10 a) L'équation caractéristique est $r^2 - r - 6 = 0$ dont les racines sont 3 et -2. Ainsi $u_n = \alpha 3^n + \beta(-2)^n$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Les conditions initiales conduisent au système linéaire $\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 3\alpha - 2\beta = 1 \end{cases}$ dont les solutions sont $\alpha = \beta = 1$.

21.10 b) D'après le a) : $u_5 = 3^5 + (-2)^5 = 3^5 - 2^5 = 211$.

21.11 a) L'équation caractéristique est ici $r^2 - 2r - 1 = 0$. Ses racines sont $1+\sqrt{2}$ et $1-\sqrt{2}$ et $v_n = \lambda(1+\sqrt{2})^n + \mu(1-\sqrt{2})^n$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Les conditions initiales donnent ici $\lambda = \dfrac{1}{2}$ et $\mu = -\dfrac{1}{2}$.

21.11 b) Le plus simple (pour un si petit indice) est d'utiliser la relation de récurrence de la suite : $v_2 = 2v_1 + v_0 = 2\sqrt{2}$. Pour travailler les identités remarquables, d'après le a) : $v_2 = \dfrac{(1+\sqrt{2})^2 - (1-\sqrt{2})^2}{2} = \dfrac{3 + 2\sqrt{2} - (3 - 2\sqrt{2})}{2} = 2\sqrt{2}$.

21.12 a) $F_3 = 2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257$.

21.12 b) $F_5 = 2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 = 65\ 537$.

21.12 c) $(F_{n-1}-1)^2+1=\left(2^{2^{n-1}}\right)^2+1=2^{2^{n-1}\times 2}+1=2^{2^n}+1=F_n$.

21.12 d) $F_n\times(F_n-2)=\left(2^{2^n}+1\right)\left(2^{2^n}-1\right)=\left(2^{2^{n+1}}-1\right)=F_{n+1}-2$.

21.12 e) $F_n^2=\left(2^{2^n}+1\right)^2=\left(2^{2^n}\right)^2+2\cdot 2^{2^n}+1=2^{2^{n+1}}+1+2^{2^n+1}=F_{n+1}+2^{2^n+1}$.

21.12 f) $F_{n+1}^2-2(F_n-1)^2=F_{n+2}+2\cdot 2^{2^{n+1}}-2(F_{n+1}-1)=F_{n+2}+2\cdot 2^{2^{n+1}}-2\cdot 2^{2^{n+1}}=F_{n+2}$.

Fiche n° 22. Développements limités

Réponses

22.1 a) .... $3x - x^2 + \dfrac{x^3}{2} - \dfrac{x^4}{2} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4)$

22.1 b) .... $x - \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{11}{6}x^3 - \dfrac{25}{12}x^4 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4)$

22.1 c) .... $\dfrac{x^3}{2} - \dfrac{x^5}{24} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^6)$

22.1 d) .... $x + x^2 + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{30} - \dfrac{x^6}{90} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^6)$

22.2 a) .... $\mathrm{e} - \dfrac{\mathrm{e}x}{2} + \dfrac{11\mathrm{e}x^2}{24} - \dfrac{7\mathrm{e}x^3}{16} + \dfrac{2447\mathrm{e}x^4}{5760} + \underset{x\to 0}{\mathrm{O}}(x^5)$

22.2 b) .... $1 - \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{96}x^4 - \dfrac{19}{5760}x^6 + \underset{x\to 0}{\mathrm{O}}(x^7)$

22.2 c) .... $\mathrm{e}\left(1 + \mathrm{i}x - x^2 - \dfrac{5}{6}\mathrm{i}x^3\right) + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)$

22.2 d) .... $1 - x + \dfrac{3}{2}(x-1)^2 + \underset{x\to 1}{\mathrm{o}}\big((x-1)^2\big)$

22.3 a) .... $1 - \dfrac{3\pi^2}{8}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)^2 + \underset{x\to \frac{\pi}{3}}{\mathrm{o}}\left(\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)^2\right)$

22.3 b) .... $1 + 2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + 2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)^2 + \dfrac{8}{3}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)^3 + \underset{x\to \frac{\pi}{4}}{\mathrm{O}}\left(\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)^4\right)$

22.3 c) .... $-1 + \dfrac{\pi^2}{8}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)^4 - \dfrac{\pi^2}{48}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)^6 + \underset{x\to \frac{\pi}{2}}{\mathrm{o}}\left(\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)^7\right)$

22.4 a) .... $-\dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{12} - \dfrac{1}{720}x^2 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^2)$

22.4 b) .... $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{5}{6x^4} - \dfrac{5}{6x^5} + \underset{x\to +\infty}{\mathrm{O}}\left(\dfrac{1}{x^6}\right)$

22.4 c) .... $-\ln(x) + 1 - \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{3x^2} - \dfrac{1}{4x^3} + \underset{x\to +\infty}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$

22.4 d) .... $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\left(\mathrm{e}^x + \dfrac{\mathrm{e}^x}{3x} - \dfrac{7\mathrm{e}^x}{36x^2}\right) + \underset{x\to +\infty}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}\right)$

Corrigés

22.1 a) Il suffit d'effectuer la somme des parties régulières des dévelopements limités à l'ordre 4 en 0 de $\sin(x)$ et $\ln(1+x)$. On écrit donc $f(x) = 2\left(x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4)\right) + x - \dfrac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4) = 3x - x^2 + \dfrac{x^3}{2} - \dfrac{x^4}{2} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4)$.

....

22.1 b) Il suffit d'effectuer le produit des parties régulières des dévelopements limités à l'ordre 4 en 0 de $\ln(1+x)$ et $\dfrac{1}{x+1}$ et de ne conserver que les termes de degré au plus 4. Observez que le développement limité à l'odre 3 de $\dfrac{1}{x+1}$ suffit puisque celui de $\ln(1+x)$ à son terme constant nul. On écrit donc

$$f(x) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4)\right)\left(1 - x + x^2 - x^3 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)\right) = x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 - \frac{25}{12}x^4 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4).$$

22.1 c) Il suffit d'écrire : $\sin(x)(\cosh(x) - 1) = \left(x - \dfrac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4)\right)\left(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^5)\right) = \dfrac{x^3}{2} - \dfrac{x^5}{24} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^6).$

22.1 d) Il suffit d'écrire :

$$\mathrm{e}^x \sin(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^5)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^6)\right) = x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} - \frac{x^6}{90} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^6).$$

22.2 a) En utilisant les développements limités en 0 de $\ln(1+x)$ (à l'ordre 5) et de l'exponentielle (à l'ordre 4), on a : $(1+x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right) = \exp\left(1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x^3}{4} + \dfrac{x^4}{5} + \underset{x\to 0}{\mathrm{O}}(x^5)\right) = \mathrm{e}\exp\left(-\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x^3}{4} + \dfrac{x^4}{5} + \underset{x\to 0}{\mathrm{O}}(x^5)\right)$.

Puis : $(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}\left(1 + \left(-\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x^3}{4} + \dfrac{x^4}{5}\right) + \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x^3}{4}\right)^2 + \dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3}\right)^3 + \dfrac{1}{24}\left(-\dfrac{x}{2}\right)^4\right) + \underset{x\to 0}{\mathrm{O}}(x^5)$.

Observez qu'il n'est pas utile de faire apparaître tous les termes de la partie régulière du développement limité de $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ selon la puissance à laquelle on la considère.

D'où : $(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e} - \dfrac{\mathrm{e}x}{2} + \dfrac{11\mathrm{e}x^2}{24} - \dfrac{7\mathrm{e}x^3}{16} + \dfrac{2447\mathrm{e}x^4}{5760} + \underset{x\to 0}{\mathrm{O}}(x^5)$.

22.2 b) On a

$$\begin{aligned}\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \underset{x\to 0}{\mathrm{O}}(x^7)\\ \sqrt{u} &= 1 + \frac{1}{2}(u-1) - \frac{1}{8}(u-1)^2 + \frac{1}{16}(u-1)^3 + \underset{u\to 1}{\mathrm{O}}((u-1)^4)\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}\sqrt{\cos(x)} &= 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}\right) - \frac{1}{8}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^3 + \underset{x\to 0}{\mathrm{O}}(x^7)\\ &= 1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{96}x^4 - \frac{19}{5760}x^6 + \underset{x\to 0}{\mathrm{O}}(x^7).\end{aligned}$$

22.2 c) On a : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = 1 + \mathrm{i}x - \dfrac{x^2}{2} - \mathrm{i}\dfrac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)$ et $\mathrm{e}^x = \mathrm{e} + \mathrm{e}(x-1) + \mathrm{e}\dfrac{(x-1)^2}{2} + \mathrm{e}\dfrac{(x-1)^3}{6} + \underset{x\to 1}{\mathrm{o}}\big((x-1)^3\big)$.

D'où : $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}} = \mathrm{e} + \mathrm{e}\left(\mathrm{i}x - \dfrac{x^2}{2} - \mathrm{i}\dfrac{x^3}{6}\right) + \mathrm{e}\dfrac{\left(\mathrm{i}x - \dfrac{x^2}{2}\right)^2}{2} + \mathrm{e}\dfrac{(\mathrm{i}x)^3}{6} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3) = \mathrm{e}\left(1 + \mathrm{i}x - x^2 - \dfrac{5}{6}\mathrm{i}x^3\right) + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)$.

22.2 d) Etablir l'existence et donner le développement limité de $f(x) = \dfrac{\ln(2-x)}{x^2}$, en 1 à l'ordre 2, revient à le faire, en 0 à l'ordre 2, pour l'application g définie par $g(t) = f(1+t) = \dfrac{\ln(1-t)}{(1+t)^2}$. Or $\ln(1-t) = -t - \dfrac{t^2}{2} + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t^2)$ et $\dfrac{1}{(1+t)^2} = \left(1 - t + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t)\right)^2 = 1 - 2t + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t)$. D'où $g(t) = \left(-t - \dfrac{t^2}{2} + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t^2)\right)\left(1 - 2t + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t)\right) = -t + \dfrac{3}{2}t^2 + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t^2)$ et $f(x) = g(x-1) = 1 - x + \dfrac{3}{2}(x-1)^2 + \underset{x\to 1}{\mathrm{o}}\big((x-1)^2\big)$.

22.3 a) La formule de Taylor-Young affirme que $\cos(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + \underset{x\to\frac{\pi}{3}}{\mathrm{o}}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ (observez que l'ordre 1 sera suffisant !) et
$\sin(t) = 1 - \dfrac{1}{2}\left(t - \dfrac{\pi}{2}\right)^2 + \underset{t\to\frac{\pi}{2}}{\mathrm{o}}\left(\left(t - \dfrac{\pi}{2}\right)^2\right)$. D'où $\sin(\pi\cos(x)) = 1 - \dfrac{3\pi^2}{8}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)^2 + \underset{x\to\frac{\pi}{3}}{\mathrm{o}}\left(\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)^2\right)$

22.3 b) On sait que $\tan(t) = t + \dfrac{t^3}{3} + \underset{t\to0}{\mathrm{O}}(t^4)$. Ainsi,

$$\tan\left(t+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1+\tan(t)}{1-\tan(t)} = \frac{1+t+\dfrac{t^3}{3}+\underset{t\to0}{\mathrm{O}}(t^4)}{1-t-\dfrac{t^3}{3}+\underset{t\to0}{\mathrm{O}}(t^4)} = \left(1+t+\frac{t^3}{3}+\underset{t\to0}{\mathrm{O}}(t^4)\right)\left(1+t+t^2+\frac{4}{3}t^3+\underset{t\to0}{\mathrm{O}}(t^4)\right)$$
$$= 1+2t+2t^2+\frac{8}{3}t^3+\underset{t\to0}{\mathrm{O}}(t^4).$$

D'où finalement $\tan(x) = 1 + 2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) + 2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^2 + \dfrac{8}{3}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^3 + \underset{x\to\frac{\pi}{4}}{\mathrm{O}}\left(\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^4\right)$.

22.3 c) La formule de Taylor-Young affirme que $\sin(x) = 1 - \dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{24}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^4 + \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\mathrm{o}}\left(\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^5\right)$ (observez que l'ordre 5 sera suffisant !) et $\cos(t) = -1 + \dfrac{1}{2}(t-\pi)^2 + \underset{t\to\pi}{\mathrm{o}}\left((t-\pi)^3\right)$ (observez que l'ordre 3 sera suffisant !).

D'où :

$$\cos(\pi\sin(x)) = -1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{24}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4\right)^2 + \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\mathrm{o}}\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^7\right)$$
$$= -1 + \frac{\pi^2}{8}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4 - \frac{\pi^2}{48}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^6 + \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\mathrm{o}}\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^7\right).$$

22.4 a) On a :

$$\frac{1}{x(\mathrm{e}^x-1)} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x\left(x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^4}{24}+\dfrac{x^5}{120}+\underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^5)\right)} - \frac{1}{x^2}$$
$$= \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{1+\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{x^3}{24}+\dfrac{x^4}{120}+\underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^4)} - 1\right)$$
$$= \frac{1}{x^2}\left(-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{6}-\frac{x^3}{24}-\frac{x^4}{120}+\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}\right)^3 + \left(\frac{x}{2}\right)^4 + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^4)\right)$$
$$= -\frac{1}{2x} + \frac{1}{12} - \frac{1}{720}x^2 + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^2).$$

22.4 b) Etablir l'existence et donner le développement limité de $f(x) = \dfrac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x+1}$, en $+\infty$ à l'ordre 5, revient à le faire, en 0 à l'ordre 5, pour l'application g définie par $g(t) = f\left(\dfrac{1}{t}\right) = \dfrac{t\sin(t)}{1+t}$. Or $t\sin(t) = t^2 - \dfrac{t^4}{6} + \underset{t\to0}{\mathrm{O}}(t^6)$ et $\dfrac{1}{1+t} = 1-t+t^2-t^3+\underset{t\to0}{\mathrm{O}}(t^4)$. D'où $g(t) = t^2-t^3+\dfrac{5}{6}t^4-\dfrac{5}{6}t^5+\underset{t\to0}{\mathrm{O}}(t^6)$, puis $f(x) = \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{5}{6x^4}-\dfrac{5}{6x^5}+\underset{x\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\dfrac{1}{x^6}\right)$.

22.4 c) On a : $x\ln(x+1)-(x+1)\ln(x) = -\ln(x) + x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x) + 1 - \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{3x^2} - \dfrac{1}{4x^3} + \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$.

22.4 d) On a :

$$\left(\frac{1}{x}+1\right)^{x^2} = \exp\left(x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$
$$= \exp\left(x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{4x^4}+\underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)\right)$$
$$= \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{1}{3x}-\frac{1}{4x^2}+\underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$
$$= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\left(\mathrm{e}^x+\frac{\mathrm{e}^x}{3x}-\frac{7\mathrm{e}^x}{36x^2}\right)+\underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x^2}\right)$$

Fiche n° 23. Arithmétique

Réponses

23.1 a) .... $\boxed{(6,7)}$

23.1 b) .... $\boxed{(-7,2)}$

23.1 c) .... $\boxed{(-6,7)}$

23.1 d) .... $\boxed{(7,2)}$

23.2 a) .... $\boxed{20}$

23.2 b) .... $\boxed{4}$

23.3 a) .... $\boxed{2}$

23.3 b) .... $\boxed{4}$

23.4 .... $\boxed{1}$

23.5 a) .... $\boxed{154}$

23.5 b) .... $\boxed{\dfrac{65}{18}}$

23.5 c) .... $\boxed{29\ 160}$

23.5 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{29\ 160}}$

23.6 a) .... $\boxed{(216,192)}$

23.6 b) ...... $\boxed{(12,30)}$

23.7 a) .... $\boxed{(-5,2)}$

23.7 b) .. $\boxed{8 \pmod{13}}$

23.7 c) .. $\boxed{11 \pmod{13}}$

23.8 a) .... $\boxed{5}$

23.8 b) .. $\boxed{(2023,6406)}$

23.9 a) ... $\boxed{2\times 3\times 337}$

23.9 b) .... $\boxed{7\times 17^2}$

23.9 c) .... $\boxed{43\times 47}$

23.9 d) . $\boxed{\text{il est premier}}$

23.10 a) .... $\boxed{67}$

23.10 b) .... $\boxed{7}$

23.11 a) .... $\boxed{1}$

23.11 b) .... $\boxed{1}$

23.11 c) .... $\boxed{6}$

23.11 d) .... $\boxed{5}$

23.11 e) .... $\boxed{66}$

23.11 f) .... $\boxed{2}$

Corrigés

23.1 a) $61 = 6\times 9 + 7$.

23.1 b) Puisque $61 = 6\times 9+7$ alors $-61 = (-6)\times 9 - 7 = (-7)\times 9 + 2$.

23.1 c) $61 = 6\times 9 + 7$ implique $61 = (-6)\times(-9)+7$.

23.1 d) Comme $61 = 6\times 9+7$ alors $-61 = 6\times(-9) - 7 = 7\times(-9)+2$.

23.2 a) $524 = 26d + r$ avec $0 \leqslant r < d$. On en déduit que $26d \leqslant 524 < 27d$ et $\dfrac{524}{27} < d \leqslant \dfrac{524}{26}$. D'où $d = 20$.

23.2 b) $r = 524 - 26\times 20 = 4$.

23.3 a) $5 \equiv 2 \pmod 3$ et $5^2 \equiv 2^2 \equiv 4 \pmod 3$. Tout dépend de la parité de 2 021. Finalement $5^{2021} \equiv 5 \equiv 2 \pmod 3$.

23.3 b) $3^2 \equiv 4 \equiv -1 \pmod 5$ d'où $3^4 \equiv (-1)^2 \equiv 1 \pmod 5$. Le reste de 3^n modulo 5 dépend du reste de n modulo 4. Puisque $2\ 022 = 505\times 4 + 2 \equiv 2 \pmod 4$ alors $3^{2\ 022} \equiv 3^2 \equiv 4 \pmod 5$.

23.4 $2\ 023 \equiv 3 \pmod{10}$ et $3^2 \equiv 9 \equiv -1 \pmod{10}$, par conséquent $3^4 \equiv (-1)^2 \equiv 1 \pmod{10}$. Les restes modulo 10 des puissances de 3 sont périodiques de période 4. Puisque $2\ 022 = 505\times 4 + 2 \equiv 2 \pmod 4$ alors $\forall n \geqslant 2, 2\ 022^n \equiv 0 \pmod 4$. Finalement $2\ 023^{2022^{2021}} \equiv 3^0 \equiv 1 \pmod{10}$.

23.5 a) L'algorithme d'Euclide s'écrit ici : $10\ 010 = 3\times 2\ 772 + 1\ 694$, $2\ 772 = 1\times 1\ 694 + 1\ 078$, $1\ 694 = 1\times 1\ 078 + 616$, $1\ 078 = 1\times 616 + 462$, $616 = 1\times 462 + 154$ et $462 = 3\times 154 + 0$. Le dernier reste non nul est $10\ 010 \wedge 2\ 772 = 154$.

23.5 b) En utilisant le résultat du a), on établit que $10\ 001 = 154\times 65$ et $2\ 772 = 154\times 18$ d'où $\dfrac{10\ 001}{2\ 772} = \dfrac{65}{18}$.

23.5 c) L'algorithme d'Euclide pour 729 et 360 donne : $729 = 2 \times 360 + 9$ et $360 = 40 \times 9 + 0$. D'où $729 \wedge 360 = 9$ et, comme $a \times b = (a \wedge b) \times (a \vee b)$, $729 \vee 360 = \dfrac{360 \times 729}{9} = 40 \times 729 = 29\ 160$.

Ces calculs (et surtout les calculs fractionnaires) auraient été plus digestes en utilisant la décomposition en facteurs premiers des deux entiers : $360 = 36 \times 10 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ et $729 = 3^6$. Ainsi $729 \vee 360 = 2^3 \times 3^6 \times 5$... Il faut néanmoins effectuer ce produit d'une façon ou d'une autre.

....

23.5 d) D'après les calculs faits au c), puisque $\dfrac{360}{729 \wedge 360} = \dfrac{360}{9} = 40$ et $\dfrac{729}{729 \wedge 360} = \dfrac{729}{9} = 81$, on réduit au même dénominateur : $\dfrac{1}{360} - \dfrac{2}{729} = \dfrac{81}{360 \times 81} - \dfrac{2 \times 40}{729 \times 40} = \dfrac{81 - 80}{29\ 160} = \dfrac{1}{29\ 160}$.

....

23.6 a) Puisque $a \wedge b = 24$, il existe $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ premiers entre eux tels que $a = 24x$ et $b = 24y$. Le système s'écrit alors $\begin{cases} (24x)^2 - (24y)^2 = 24^2 \times 17 \\ x \wedge y = 1 \end{cases}$ soit $\begin{cases} (x + y)(x - y) = 17 \\ x \wedge y = 1 \end{cases}$. Ainsi les deux entiers $x + y$ et $x - y$ sont-ils des diviseurs de 17. Puisque x et y sont des naturels, on a $x - y \leqslant x + y$ et donc nécessairement $x + y = 17$ et $x - y = 1$. On obtient une unique solution : $(x, y) = (9, 8)$. On vérifie que $(a, b) = (216, 192)$ est bien (l'unique !) solution du système de départ.

....

23.6 b) Puisque $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2, ab = (a \wedge b) \times (a \vee b)$, le système de l'énoncé équivaut à $\begin{cases} a \times b = 360 \\ a \wedge b = 6 \\ 6 < a < b \end{cases}$. Posons $a = 6x$ et $b = 6y$ de sorte que $x \wedge y = 1$. On obtient le système équivalent $\begin{cases} xy = 10 \\ x \wedge y = 1 \\ 1 < x < y \end{cases}$.

Puisque $10 = 2 \times 5$ et $1 < x < y$, la seule solution du système est $(x, y) = (2, 5)$ et, par conséquent $(a, b) = (12, 30)$.

....

23.7 a) L'algorithme d'Euclide pour 13 et 5 donne : $13 = 2 \times 5 + 3$; $5 = 1 \times 3 + 2$; $3 = 1 \times 2 + 1$. On "remonte" ces égalités : $1 = 3 - 1 \times 2 = 3 - (5 - 1 \times 3) = 2 \times 3 - 1 \times 5 = 2 \times (13 - 2 \times 5) - 1 \times 5 = 2 \times 13 - 5 \times 5$. Et $(-5, 2)$ est solution.

....

23.7 b) D'après le a) : $5 \times (-5) + 2 \times 13 = 1$ d'où $5 \times (-5) \equiv 1 \pmod{13}$. Ainsi $\mathrm{inv}_{13}(5) \equiv 8 \equiv -5 \pmod{13}$.

....

23.7 c) $5x + 4 \equiv 7 \pmod{13} \iff 5x \equiv 3 \pmod{13}$. On en déduit que $8 \times 5x \equiv 8 \times 3 \equiv 24 \equiv 11 \pmod{13}$ et, puisque 8 est l'inverse de 5 modulo 13, que $x \equiv 11 \pmod{13}$. Réciproquement, on vérifie que tous les entiers congrus à 11 modulo 13 sont solutions de l'équation. Son ensemble de solutions est donc $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 11 \pmod{13}\}$.

....

23.8 a) L'algorithme d'Euclide pour 19 et 6 se résume à $19 = 3 \times 6 + 1$ et $6 = 6 \times 1 + 0$. Ceci donne directement une solution particulière de (E) : $(1, 3)$. Si (x, y) est solution de (E) alors $19x - 6y = 19 \times 1 - 6 \times 3$ et $19(x - 1) = 6(y - 3)$. $19 \wedge 6 = 1$ et 19 divise $6(y - 3)$, d'après le théorème de Gauss, 19 divise $y - 3$. Ainsi $\exists k \in \mathbb{Z}, y = 19k + 3$. On en déduit que $19(x - 1) = 6 \times 19k$ et finalement que $x = 6k + 1$. On a prouvé que si (x, y) est solution de (E) alors $\exists k \in \mathbb{Z}, (x, y) = (6k + 1, 19k + 3)$. Réciproquement, un couple de cette forme vérifie $19(6k+1) - 6(19k+3) = 19 - 18 = 1$ et est bien solution de (E). D'où l'ensemble des solutions de l'équation : $\mathcal{S} = \{(6k + 1, 19k + 3) \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

$$\begin{cases} (x, y) \in \mathcal{S} \\ 1999 \leqslant x \leqslant 2023 \end{cases} \iff \begin{cases} (x, y) = (6k + 1, 19k + 3) \\ 1999 \leqslant 6k + 1 \leqslant 2023 \end{cases} \iff \begin{cases} (x, y) = (6k + 1, 19k + 3) \\ 333 \leqslant k \leqslant 337 \end{cases}.$$

Il y a $N = 337 - 333 + 1 = 5$ entiers entre 333 et 337 inclus.

....

23.8 b) $k \mapsto 19k + 3$ est une fonction croissante de k, le plus grand y est donc atteint lorsque $k = 337$. D'où $(x_0, y_0) = (2023, 6406)$.

....

23.9 a) 2 022 est pair et divisible par 3 et $2\ 022 = 2 \times 3 \times 337$. Puisque $\sqrt{337} < 19$ il faut tester la divisibilité de cet entier par tous les premiers inférieurs ou égaux à 17. 337 n'est pas divisible par 5 et on obtient successivement $337 \equiv 1 \pmod{7}$, $337 \equiv 7 \pmod{11}$, $337 \equiv 12 \pmod{13}$ et $337 \equiv 14 \pmod{17}$. 337 est donc premier.

....

23.9 b) En appliquant les critères, on établit que 2 023 n'est pas divisible par 2, 3 ou 5. La division euclidienne de 2023 par 7 s'écrit $2\ 023 = 7 \times 289$. Si on ne reconnaissait pas le carré de 17, il fallait tester la divisibilité par 11 (évidemment négatif), 13 et 17 pour obtenir la décomposition $2\ 023 = 7 \times 17^2$.

....

23.9 c) On a $\sqrt{2\ 021} < 45$: il suffit donc de tester la divisibilité par tous les premiers jusqu'à 43. 2 021 n'est pas divisible par 2, 3 ou 5. On obtient (en posant les divisions) un résultat négatif pour le test de divisibilité par tous les premiers compris entre 7 et 41. Par contre 43 divise 2 021 et le quotient vaut 47. Enfin, on a $2\ 021 = 43 \times 47$, les deux facteurs étant premiers.

....

23.9 d) On a $\sqrt{2\ 027} \approx 45$. Il faut donc tester la divisibilité par tous les premiers jusqu'à 43. C'est le bon moment pour programmer une fonction en Python qui teste la divisibilité de son argument par tous les entiers impairs compris entre 3 et sa racine carrée. Le test est ici systématiquement négatif, 2 027 est donc premier.

....

23.10 a) On écrit $477 = q \times n + 8$ avec $0 \leqslant 8 < n$. D'où $q \times n = 469$. n est donc un diviseur de 469 strictement supérieur à 8. Puisque la décomposition en facteurs premiers de 469 est $469 = 7 \times 67$, on a nécessairement $n = 67$.

....

23.10 b) Puisque $469 = 7 \times 67$, on a nécessairement $q = 7$.

....

23.11 a) D'après le théorème de Fermat, puisque 3 est premier à la fois avec 5 et 7, $3^4 \equiv 1 \pmod 5$ et $3^6 \equiv 1 \pmod 7$. On en déduit, d'une part, que $3^{24} = (3^4)^6 \equiv 1^6 \equiv 1 \pmod 5$ et, de l'autre, que $3^{24} = (3^6)^4 \equiv 1^4 \equiv 1 \pmod 7$. C'est un corollaire connu du théorème de Gauss (à démontrer en exercice !) que puisque $3^{24} - 1$ est divisible par 5 et 7, deux entiers premiers entre eux, alors $3^{24} - 1$ est divisible par $5 \times 7 = 35$. D'où $3^{24} \equiv 1 \pmod{35}$

....

23.11 b) On déduit immédiatement du a) que $3^{72} \equiv (3^{24})^3 \equiv 1^3 \equiv 1 \pmod{35}$.

....

23.11 c) Puisque $2 \wedge 5 = 2 \wedge 7 = 1$, on établit comme aux a) et b) que $2^{72} \equiv 1 \pmod{35}$. D'où $6^{72} = (2 \times 3)^{72} = 2^{72} \times 3^{72} \equiv 1 \times 1 \pmod{35}$. Enfin, $6^{75} = 6^{72} \times 6^3 \equiv 1 \times 6^3 \equiv 6 \pmod{35}$.

Il y avait plus simple, sinon. On a $6^2 = 1 \pmod{35}$, d'où le résultat final.

....

23.11 d) En procédant comme aux a) et b) avec $5^{6\times10+1}$ modulo 7×11, on obtient que $5^{61} \equiv 5 \pmod{77}$.

....

23.11 e) Idem avec $(7 \times 11)^{10\times12+2} \pmod{11 \times 13}$: $77^{61} \equiv 77^2 \equiv 66 \pmod{77}$.

....

23.11 f) Idem pour $(5 \times 7 \times 11)^{12\times16\times18} \pmod{13 \times 17 \times 19}$. On obtient pour reste 1.

....

Fiche n° 24. Polynômes

Réponses

24.1 a) .... $\boxed{\begin{array}{l} Q = X^2 + 2X + 1 \\ R = 2 \end{array}}$

24.1 b) .... $\boxed{\begin{array}{l} Q = X^2 - 4X + 7 \\ R = -3X - 8 \end{array}}$

24.1 c) .... $\boxed{\begin{array}{l} Q = X^2 - 1 \\ R = -X^2 + X + 1 \end{array}}$

24.1 d) .... $\boxed{\begin{array}{l} Q = 13X + \dfrac{25}{2} \\ R = \dfrac{1}{2}\big(29X^2 - 5X - 23\big) \end{array}}$

24.2 a) .... $\boxed{R = 1}$

24.2 b) .... $\boxed{R = 0}$

24.2 c) .... $\boxed{R = -2nX + 4n - 1}$

24.2 d) .... $\boxed{R = X^2 + X - 1}$

24.3 a) .... $\boxed{R = 2X - 3}$

24.3 b) .... $\boxed{R = -2X^3 - 3X^2 + 1}$

24.3 c) .... $\boxed{R = -8X^3 + 21X^2 - 20X + 5}$

24.3 d) .... $\boxed{R = -29X^3 + 11X^2 + 2X - 1}$

24.4 a) .... $\boxed{R = -36X + 24}$

24.4 b) .... $\boxed{24 - 36\mathrm{i}}$

24.5 a) .... $\boxed{R = -108X - 150}$

24.5 b) .... $\boxed{-150 - 108\sqrt{2}}$

24.6 a) .... $\boxed{76 - 92\sqrt{2}}$

24.6 b) .... $\boxed{8 - 206\mathrm{i}}$

24.7 a) .... $\boxed{(X-1)^2(X^2+1)}$

24.7 b) .... $\boxed{(X^2 - 2X + 2)(X^2 - 2X + 5)}$

24.7 c) .... $\boxed{(X-1)^2(X^2+1)(X+1)(X-2)}$

Corrigés

24.1 a)

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
X^3 & + & X^2 & - & X & + & 1 & X - 1 \\ \cline{8-8}
-(X^3 & - & X^2) & & & & & X^2 + 2X + 1 \\ \cline{1-3}
 & & 2X^2 & - & X & + & 1 & \\
 & & -(2X^2 & - & 2X) & & & \\ \cline{3-5}
 & & & & X & + & 1 & \\
 & & & & -(X & - & 1) & \\ \cline{5-7}
 & & & & & & 2 &
\end{array}
$$

Ainsi, $Q = X^2 + 2X + 1$ et $R = 2$.

....

24.2 a) Notons Q le quotient de la division euclidienne de A par B. Ainsi,

$$X^n = Q \times (X-1) + R, \quad \text{où } deg(R) < deg(B) = 1.$$

Ainsi, R est un polynôme constant. On évalue la relation précédente en 1. On obtient alors $1^n = Q(1) \times (1-1) + R(1)$. Donc, $R = 1$.

....

24.2 b) On constate que $X^{3n+2} + X^{3n+1} + X^{3n} = X^{3n} \times (X^2 + X + 1)$. Ainsi, $X^2 + X + 1 | X^{3n+2} + X^{3n+1} + X^{3n}$. Donc, $R = 0$.

....

24.2 c) Notons Q le quotient de la division euclidienne de A par B. Ainsi,

$$(*) \quad (X-3)^{2n} + (X-2)^n - 2 = Q \times (X-2)^2 + R, \quad \text{où } deg(R) < deg(B) = 2.$$

Ainsi, R est de la forme $R = aX + b$. On évalue la relation $(*)$ en 2. On obtient alors

$$(2-3)^{2n} + (2-2)^n - 2 = Q(2) \times (2-2)^2 + R(2).$$

Donc, $-1 = 2a + b$. On dérive la relation $(*)$. On obtient alors

$$2n(X-3)^{2n-1} + n(X-2)^{n-1} = Q' \times (X-2)^2 + Q \times 2(X-2) + R'$$

On évalue cette dernière relation en 2. On obtient ainsi

$$2n(2-3)^{2n-1} + n(2-2)^{n-1} = Q'(2) \times (2-2)^2 + Q(2) \times 2(2-2) + R'(2).$$

Donc, $-2n = a$. On en déduit que $a = -2n$ puis que $b = -1 - 2a = 4n - 1$. Ainsi, $R = -2nX + 4n - 1$.

....

24.2 d) Notons Q le quotient de la division euclidienne de A par B. Ainsi,

$$(*) \quad X^{n+2} + X^{n+1} - X^n = Q \times (X^3 - 2X + 1) + R, \quad \text{où } deg(R) < deg(B) = 3.$$

Ainsi, R est de la forme $R = a(X^2 + bX + c)$. On constate que $X^3 - 2X + 1$ s'annule en 1. Ainsi, $X - 1$ divise $X^3 - 2X + 1$. Par division euclidienne, on obtient $X^3 - 2X + 1 = (X-1)(X^2 + X - 1)$. On constate également que $X^{n+2} + X^{n+1} - X^n = X^n \times (X^2 + X - 1)$. Donc, $(*)$ devient $(X^2 + X - 1) \times (X^n - Q \times (X-1)) = R$. Ainsi, $X^2 + X - 1 | R$. Or, $deg(R) \leqslant 2$. Donc, $R = a(X^2 + X - 1)$. On évalue $(*)$ en 1. On obtient $a = 1$. Donc, $R = X^2 + X - 1$.

....

24.3 a) Trouver le reste de la division d'un polynôme par X^4 revient à trouver les coefficients constants, de degré 1, de degré 2 et de degré 3 du dividende. Ici, $P = A + B = X^5 + X^4 + 2X - 3 = X^4(X+1) + 2X - 3$. Ainsi, $R = 2X - 3$.

....

24.3 b) Trouver le reste de la division d'un polynôme par X^4 revient à trouver les coefficients constants, de degré 1, de degré 2 et de degré 3 du dividende. Ici, $P = A \times B = Q \times X^4 - 2X^3 - 3X^2 + 1$. Ainsi, $R = -2X^3 - 3X^2 + 1$.

....

24.3 c) Trouver le reste de la division d'un polynôme par X^4 revient à trouver les coefficients constants, de degré 1, de degré 2 et de degré 3 du dividende. Ici,

$$P = A \circ B = ((X-2)^2)^2 - 3(X-2)^2 + 1 = (X-2)^4 - 3(X-2)^2 + 1 = Q \times X^4 - 8X^3 + 21X^2 - 20X + 5.$$

Ainsi, $R = -8X^3 + 21X^2 - 20X + 5$.

....

24.3 d) Trouver le reste de la division d'un polynôme par X^4 revient à trouver les coefficients constants, de degré 1, de degré 2 et de degré 3 du dividende. Ici,

$$P = A \circ B = 2(X^3 + X^2 - 2X + 1)^3 - 3(X^3 + X^2 - 2X + 1)^2 - (X^3 + X^2 - 2X + 1) + 1 = Q \times X^4 - 29X^3 + 11X^2 + 2X - 1.$$

Ainsi, $R = -29X^3 + 11X^2 + 2X - 1$.

....

24.4 a) On trouve $Q = X^4 - 2X^3 - 9X^2 - 20X - 44$ et $R = -36X + 24$.

....

24.4 b) On a $P = Q \times (X^2 + 1) + R$. On évalue en i. Ainsi, $P(\mathrm{i}) = Q(\mathrm{i}) \times (\mathrm{i}^2 + 1) + R(\mathrm{i})$. Donc $P(\mathrm{i}) = R(\mathrm{i}) = 24 - 36\mathrm{i}$.

....

24.5 a) On trouve $Q = X^4 - 2X^3 - 6X^2 - 26X - 65$ et $R = -108X - 150$.

....

24.5 b) On a $P = Q \times (X^2 - 2) + R$. On évalue en $\sqrt{2}$. Ainsi, $P(\sqrt{2}) = Q(\sqrt{2}) \times (\sqrt{2}^2 - 2) + R(\sqrt{2})$. Donc, $P(\sqrt{2}) = R(\sqrt{2}) = -150 - 108\sqrt{2}$.

....

24.6 a) On commence par chercher un polynôme simple ayant $\sqrt{2} - 1$ pour racine. Posons $X = \sqrt{2} - 1$. Ainsi, $X^2 = 2 - 2\sqrt{2} + 1 = 3 - 2\sqrt{2}$. Or, $\sqrt{2} = X + 1$. Donc, $X^2 = 3 - 2(X+1) = -2X + 1$. Ainsi, $\sqrt{2} - 1$ est racine de $X^2 + 2X - 1$. On effectue ensuite la division euclidienne de P par $X^2 + 2X - 1$. On trouve $Q = X^4 - 4X^3 + X^2 - 28X + 4$ et $R = -92X - 16$. Donc, $P = Q \times (X^2 + 2X - 1) + R$. On évalue enfin en $\sqrt{2} - 1$. On obtient
$P(\sqrt{2}-1) = Q(\sqrt{2}-1) \times ((\sqrt{2}-1)^2 + 2(\sqrt{2}-1) - 1) + R(\sqrt{2}-1)$. Donc, $P(\sqrt{2}-1) = R(\sqrt{2}-1) = 76 - 92\sqrt{2}$.

....

24.6 b) On commence par chercher un polynôme simple ayant $1 + \mathrm{i}$ pour racine. Posons $X = 1 + \mathrm{i}$. Ainsi, $X^2 = 1 + 2\mathrm{i} + (\mathrm{i})^2 = 2\mathrm{i}$. Or, $\mathrm{i} = X - 1$. Donc, $X^2 = 2(X - 1)$. Ainsi, $\mathrm{i} + 1$ est racine de $X^2 - 2X + 2$. On effectue ensuite la division euclidienne de P par $X^2 - 2X + 2$. On trouve $Q = X^4 - 10X^2 - 42X - 117$ et $R = -206X + 214$. Donc, $P = Q \times (X^2 - 2X + 1) + R$. On évalue enfin en $\mathrm{i} + 1$. On obtient $P(\mathrm{i}+1) = Q(\mathrm{i}+1) \times ((\mathrm{i}+1)^2 - 2(\mathrm{i}+1) + 2) + R(\mathrm{i}+1)$. Donc, $P(\mathrm{i} + 1) = R(\mathrm{i} + 1) = 8 - 206\mathrm{i}$.

....

24.7 a) On constate que $P(1) = 0$. Ainsi, 1 est racine de P. On constate que $P'(1) = 0$. Ainsi, 1 est racine double. Donc, P est divisible par $(X-1)^2$. On effectue la division euclidienne correspondante pour trouver $P = (X-1)^2(X^2+1)$. On aurait aussi pu remarquer que i est racine et donc aussi $\bar{\mathrm{i}}$ car le polynôme est à coefficients réels.

....

24.7 b) On constate que $P(1+\mathrm{i}) = 0$. Comme P est à coefficients réels, $\overline{1+\mathrm{i}} = 1-\mathrm{i}$ est aussi racine de P. Ainsi, P est divisible par $(X - (1+\mathrm{i}))(X - (1-\mathrm{i}))$, c'est-à-dire par $X^2 - 2X + 2$. On effectue la division euclidienne correspondante pour trouver $P = (X^2 - 2X + 2)(X^2 - 2X + 5)$.

....

24.7 c) On constate que $P(\mathrm{i}) = 0$. Comme P est à coefficients réels, $\bar{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$ est aussi racine de P. Ainsi, P est divisible par $X^2 + 1$. Par ailleurs, on constate que $P(1) = 0$ et $P'(1) = 0$. Ainsi, 1 est racine double de P et donc P est divisible aussi par $(X-1)^2$. Ainsi, P est divisible par $(X-1)^2(X^2+1)$. On effectue la division euclidienne correspondante pour trouver $P = (X-1)^2(X^2+1)(X+1)(X-2)$. Au lieu d'effectuer la division euclidienne, on aurait pu constater que -1 et 2 sont aussi racines de P.

....

Fiche n° 25. Décomposition en éléments simples

Réponses

25.1 a) .... $\boxed{X-3-\dfrac{1}{X}+\dfrac{1}{X+1}+\dfrac{7}{X+2}}$

25.1 b) .... $\boxed{1-\dfrac{2}{X}+\dfrac{1}{2(X+1)}+\dfrac{3}{2(X-1)}}$

25.1 c) .... $\boxed{1+\dfrac{\pi}{2(X-\pi)}-\dfrac{\pi}{2(X+\pi)}}$

25.2 a) .... $\boxed{\dfrac{\mathrm{e}-1}{(\mathrm{e}-2)(X+\mathrm{e})}+\dfrac{1}{(2-\mathrm{e})(X+2)}}$

25.2 b) .... $\boxed{\dfrac{3}{2(X-1)}-\dfrac{1+i}{4(X-i)}-\dfrac{1-i}{4(X+i)}}$

25.2 c) . $\boxed{1-\frac{5}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(X+\sqrt{3})}-\frac{4}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-X)}}$

25.3 a) ..... $\boxed{\dfrac{-3}{X-2}+\dfrac{1}{X-3}+\dfrac{2}{X-1}+\dfrac{1}{(X-1)^2}}$

25.3 b) .. $\boxed{\frac{2}{X}+\frac{2}{X^2}-\frac{11}{4(X-1)}+\frac{3}{2(X-1)^2}+\frac{3}{4(X+1)}}$

25.3 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{\pi^2 X}-\dfrac{1}{\pi^2(X+\pi)}-\dfrac{1+\pi}{\pi(X+\pi)^2}}$

25.3 d) ..... $\boxed{\frac{2}{X-i}+\frac{1}{(X-i)^2}-\frac{2}{X-(1+i)}+\frac{1}{(X-(1+i))^2}}$

25.4 a) ... $\boxed{\dfrac{1}{X+1}-\dfrac{1}{2(X-1)}-\dfrac{1+3i}{4(X-i)}-\dfrac{1-3i}{4(X+i)}}$

25.4 b) . $\boxed{\dfrac{1}{2X}+\dfrac{5}{6(X+2)}+\dfrac{2}{3(X-1)}+\dfrac{1}{(X-1)^2}.}$

25.5 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{2(n+1)}-\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{4}}$

25.5 b) .... $\boxed{-\dfrac{2}{n+2}+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{3}}$

25.6 a) .... $\boxed{\dfrac{2}{X+1}+\dfrac{1}{(X+1)^2}+\dfrac{1-2X}{X^2+1}}$

25.6 b) ...... $\boxed{\dfrac{1}{2(X-1)}-\dfrac{3}{2(X+1)}+\dfrac{X-1}{X^2+X+1}}$

25.7 a) .... $\boxed{1-2\ln(3)}$

25.7 b) .... $\boxed{-\dfrac{1}{2}\ln(3)+\dfrac{2}{3}\ln(2)}$

25.7 c) .... $\boxed{\dfrac{2}{3}-4\ln(2)+2\ln(3)}$

25.7 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{18}-\dfrac{1}{9}\ln(5)+\dfrac{2}{9}\ln(2)}$

25.7 e) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{8}}$

25.7 f) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\ln(2)-\dfrac{1}{4}\ln(3)}$

25.8 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{1+x}\right|}$

25.8 b) .... $\boxed{x\mapsto\dfrac{1}{4(1-2x)^2}}$

25.8 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)}$

25.8 d) .... $\boxed{\dfrac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}X+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)}$

25.8 e) .... $\boxed{2}$

25.8 f) . $\boxed{\frac{x^2}{2}+2x+\frac{1}{6}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{16}{3}\ln|x-2|}$

25.8 g) $\boxed{x\mapsto\frac{1}{6}\ln(x^2+2)-\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{\sqrt{2}}{3}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}$

25.8 h) .... $\boxed{x\mapsto\dfrac{1}{2}\dfrac{2x-1}{x^2-1}+\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1-x}{1+x}\right|}$

Corrigés

25.1 a) Pour commencer, effectuons la division euclidienne de X^4-2 par $X(X+1)(X+2)=X^3+3X^2+2X$: on trouve $X^4-2=(X^3+3X^2+2X)(X-3)+7X^2+6X-2$. Ainsi, on a

$$\frac{X^4}{X(X+1)(X+2)}=X-3+\frac{7X^2+6X-2}{X(X+1)(X+2)}.$$

On écrit ensuite la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle précédente :

$$\frac{7X^2+6X-2}{X(X+1)(X+2)}=\frac{a}{X}+\frac{b}{X+1}+\frac{c}{X+2}.$$

Pour calculer a, on multiplie la fraction par X, on l'écrit sous forme irréductible, et on évalue en 0 :

$$\frac{7X^2+6X-2}{X(X+1)(X+2)} \times X = \frac{7X^2+6X-2}{(X+1)(X+2)}, \text{ ce qui, évalué en 0, donne } a = \frac{-2}{2} = -1.$$

Pour calculer b, on multiplie la fraction par $X+1$, on l'écrit sous forme irréductible, et on évalue en -1 :

$$\frac{7X^2+6X-2}{X(X+1)(X+2)} \times (X+1) = \frac{7X^2+6X-2}{X(X+2)}, \text{ ce qui, évalué en } -1, \text{ donne } b = \frac{7-6-2}{(-1)(-1+2)} = 1.$$

Enfin, pour c,

$$\frac{7X^2+6X-2}{X(X+1)(X+2)} \times (X+2) = \frac{7X^2+6X-2}{X(X+1)}, \text{ ce qui, évalué en } -2, \text{ donne } c = \frac{28-12-2}{(-2)(-2+1)} = \frac{14}{2} = 7.$$

D'où

$$\frac{7X^2+6X-2}{X(X+1)(X+2)} = \frac{-1}{X} + \frac{1}{X+1} + \frac{7}{X+2},$$

donc

$$\frac{X^4-2}{X(X+1)(X+2)} = X-3-\frac{1}{X}+\frac{1}{X+1}+\frac{7}{X+2}.$$

25.3 a) Pour cette décomposition en éléments simples, pas de partie entière. On écrit la décomposition théorique :

$$\frac{X+1}{(X-1)^2(X-2)(X-3)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X-2} + \frac{d}{X-3}.$$

Par les méthodes du premier exercice, on détermine facilement $c=-3$ et $d=1$. De même, en multipliant par $(X-1)^2$ et en évaluant en 1, on obtient $b=1$. Ensuite, en évaluant en 0, on obtient

$$\frac{1}{6} = \frac{a}{-1} + b + \frac{c}{-2} + \frac{d}{-3},$$

donc $a = 1+\frac{3}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{6} = 2$. Ainsi,

$$\frac{X+1}{(X-1)^2(X-2)(X-3)} = \frac{-3}{X-2} + \frac{1}{X-3} + \frac{2}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2}.$$

25.4 a) Il suffit de remarquer que $X^4-1 = (X-1)(X+1)(X-i)(X+i)$ et de se ramener à la méthode des pôles simples vue précédemment !

25.4 b) Il faut remarquer que $X^4-3X^2+2X = (X-1)^2(X+2)X$, puis utiliser les méthodes des pôles multiples !

25.5 a) Si l'on considère la fraction rationnelle $\frac{1}{(X-1)X(X+1)}$, alors

$$\frac{1}{(X-1)X(X+1)} = -\frac{1}{X} + \frac{1}{2(X+1)} + \frac{1}{2(X-1)}.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{(k-1)k(k+1)} = -\frac{1}{k} + \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{2(k-1)} = \frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{2k} - \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2(k-1)}\right)$$

Donc

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k(k+1)} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{2k} - \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2(k-1)}\right)$$

$$= \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2n} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2(2-1)}\right) \text{ par télescopage } \qquad = \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4}.$$

25.5 b) On remarque que

$$\frac{k^2-5k-2}{(k-1)k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k} + \frac{2}{k+1} - \frac{2}{k+2} - \frac{1}{k-1} = \frac{1}{k} - \frac{2}{k+2} - \left(\frac{1}{k-1} - \frac{2}{k+1}\right).$$

Par télescopage, on obtient que cette somme vaut $-\dfrac{2}{n+2} + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{3}$.

25.6 a) Déjà, il n'y pas de partie entière. Ensuite, la forme de la décomposition en éléments simples est

$$\frac{a}{X+1} + \frac{b}{(X+1)^2} + \frac{cX+d}{X^2+1}.$$

En multipliant par $(X+1)^2$ et en évaluant en -1, on obtient $b=1$.
En évaluant en 0, on obtient

$$4 = a+b+d,$$

donc $a+d=3$.
En multipliant par X, en évaluant en $x \in \mathbb{R}$ et en faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient

$$0 = a+c,$$

donc $c=-a$.
Enfin, en évaluant en 1, on obtient

$$\frac{6}{8} = \frac{a}{2} + \frac{b}{4} + \frac{c+d}{2},$$

donc

$$3 = 2a+b+2c+2d,$$

soit, comme $a+c=0$, et $b=1$, on en déduit que $2d = 3-1 = 2$, donc $d=1$.
Donc $a=2$, donc $c=-2$. Donc

$$\frac{2X+4}{(X+1)^2(X^2+1)} = \frac{2}{X+1} + \frac{1}{(X+1)^2} + \frac{1-2X}{X^2+1}.$$

25.7 a) On effectue la décomposition en éléments simples de $\dfrac{X^2+1}{(X-1)(X+1)}$:

$$\frac{X^2+1}{(X-1)(X+1)} = 1 - \frac{1}{X+1} + \frac{1}{X-1}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\int_{-1/2}^{1/2} \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)}\,\mathrm{d}x &= \int_{-1/2}^{1/2} 1 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x \\
&= 1 + \Big[-\ln(x+1) + \ln(1-x)\Big]_{-1/2}^{1/2} \\
&= 1 - \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln\left(\frac{3}{2}\right) = 1 - 2\ln(3).
\end{aligned}$$

25.7 e) On remarque que

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{4x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^{1/2} \frac{1}{(2x)^2+1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\arctan(2x)\right]_0^{1/2} = \frac{1}{2}(\arctan(1) - \arctan(0)) = \frac{\pi}{8}.$$

25.7 f) On effectue la décomposition en éléments simples $\boxed{\text{sur } \mathbb{R}}$ de $\dfrac{X}{X^4-1}$.

On a $X^4-1 = (X-1)(X+1)(X^2+1)$. Donc, on écrit

$$\frac{X}{X^4-1} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{cX+d}{X^2+1}$$

Par la méthode déjà décrite, $a = \dfrac{1}{4}$, $b = \dfrac{1}{4}$. En multipliant par x et en faisant $x \to +\infty$, $0 = a+b+c$, donc $c = -\dfrac{1}{2}$.

Enfin, en évaluant en 0, $-a+b+d=0$ donc $d=0$. Donc

$$\frac{X}{X^4-1}=\frac{1}{4(X-1)}+\frac{1}{4(X+1)}-\frac{X}{2(X^2+1)}=\frac{X}{2(X^2-1)}-\frac{X}{2(X^2+1)}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{x}{x^4-1}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{x}{x^2-1}-\frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\ln(x^2-1)-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_2^3\\ &= \frac{1}{4}(\ln(8)-\ln(10)-\ln(3)+\ln(5))\\ &= \frac{1}{4}(3\ln(2)-\ln(2)-\ln(5)-\ln(3)+\ln(5))=\frac{1}{2}\ln(2)-\frac{1}{4}\ln(3)\end{aligned}$$

25.8 a) On écrit que, $\dfrac{1}{X^2-1}=\dfrac{1}{2(X-1)}-\dfrac{1}{2(X+1)}$, donc une primitive de $x\mapsto \dfrac{1}{2(x-1)}-\dfrac{1}{2(x+1)}$ est

$$x\mapsto \frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{1+x}\right|.$$

25.8 c) On écrit que, si $x\in\mathbb{R}$,

$$\frac{1}{x^2+2}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2},$$

de primitive $x\mapsto \dfrac{1}{2}\sqrt{2}\arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$

25.8 d) L'idée pour primitiver cet élément simple est d'utiliser une forme canonique afin de se ramener à arctan :

$$\frac{1}{X^2+X+1}=\frac{1}{\left(X+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}\frac{1}{\frac{4}{3}\left(X+\frac{1}{2}\right)^2+1}=\frac{4}{3}\frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}X+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}.$$

Ainsi, une primitive de $x\mapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}$ est $x\longmapsto \dfrac{4}{3}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}X+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}X+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

25.8 e) L'idée est de faire apparaître $\dfrac{u'}{u}$:

$$\frac{x}{x^2+2x+3}=\frac{1}{2}\frac{2x+2}{x^2+2x+3}-\frac{1}{x^2+2x+3}.$$

Or, une primitive de $x\mapsto \dfrac{1}{2}\dfrac{2x+2}{x^2+2x+3}$ est $x\mapsto\dfrac{1}{2}\ln|x^2+2x+3|$. De plus,

$$\frac{1}{x^2+2x+3}=\frac{1}{(x+1)^2+2}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2},$$

de primitive $x\mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}\right)$. Donc une primitive de la fonction $x\mapsto\dfrac{x}{x^2+2x+3}$ est

$$x\mapsto \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+3|-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)$$

25.8 f) La décomposition en éléments simples de $\dfrac{X^4}{(X-1)(X-2)(X+1)}$ est

$$\frac{X^4}{(X-1)(X-2)(X+1)}=X+2+\frac{1}{6(X+1)}-\frac{1}{2(X-1)}+\frac{16}{3(X-2)},$$

donc $x\mapsto \dfrac{x^2}{2}+2x+\dfrac{1}{6}\ln|x+1|-\dfrac{1}{2}\ln|x-1|+\dfrac{16}{3}\ln|x-2|$.

Fiche n° 26. Calcul matriciel

Réponses

26.1 a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 9 & -7 & 3 \end{pmatrix}$

26.1 b) $\begin{pmatrix} -2 & -6 & -5 \\ 15 & -1 & 11 \\ 18 & -26 & -1 \end{pmatrix}$

26.1 c) 17 (matrice 1×1)

26.1 d) $\begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 2 & 14 & -4 \\ -1 & -7 & 2 \end{pmatrix}$

26.1 e) $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

26.1 f) $\begin{pmatrix} -5 & 15 & 3 \end{pmatrix}$

26.1 g) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

26.1 h) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

26.1 i) $\begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 7 & 49 & -14 \\ -2 & -14 & 4 \end{pmatrix}$

26.2 a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

26.2 b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

26.2 c) $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

26.2 d) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

26.2 e) $\begin{pmatrix} 8 & 19 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$

26.2 f) $\begin{pmatrix} 2^k & 3^k - 2^k \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$

26.2 g) $\begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$

26.2 h) $\begin{pmatrix} \cos(3\theta) & -\sin(3\theta) \\ \sin(3\theta) & \cos(3\theta) \end{pmatrix}$

26.2 i) $\begin{pmatrix} \cos(k\theta) & -\sin(k\theta) \\ \sin(k\theta) & \cos(k\theta) \end{pmatrix}$

26.2 j) $\begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ \vdots & (n) & \vdots \\ n & \cdots & n \end{pmatrix}$

26.2 k) $\begin{pmatrix} n^2 & \cdots & n^2 \\ \vdots & (n^2) & \vdots \\ n^2 & \cdots & n^2 \end{pmatrix}$

26.2 l) $n^{k-1}D$

26.3 a) $2 \times 3^{j-i} \times 5^{i-1}$

26.3 b) $2^{i+1}3^{j-i}(2^n - 1)$

26.3 c) $2 \times 3^{i+j}\left(1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right)$

26.3 d) $\dbinom{i-1}{j} + \dbinom{i-1}{j-2}$

26.4 a) $2^{i-j}\dbinom{i-1}{j-1}$

26.4 b) $\begin{matrix} (1-\delta_{i,1})(\delta_{i-1,j+1} + \delta_{i,j}) \\ +(1-\delta_{i,n})(\delta_{i,j} + \delta_{i+1,j-1}) \end{matrix}$

26.5 a) $\dfrac{1}{2(\pi - e)}\begin{pmatrix} 2 & -e \\ -2 & \pi \end{pmatrix}$

26.5 b) $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1-2\mathrm{i} \\ 1 & -1+\mathrm{i} \end{pmatrix}$

26.5 c) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -6 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

26.5 d) $\dfrac{1}{4\pi}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

26.5 e) $\dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & 4 & -2 \\ -16 & -6 & 7 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

26.5 f) $\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

26.5 g) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & 0 \\ 8 & -6 & 4 & 2 \\ -7 & 5 & -3 & -1 \\ -5 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}}$

26.5 h) .... $\boxed{\text{Non inversible !}}$

26.5 i) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$

26.6 a) .... $\boxed{\lambda \neq 1}$

26.6 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{1-\lambda}\begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 2\lambda+2 & \lambda & -2\lambda-1 \\ \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}}$

26.6 c) .... $\boxed{\lambda \neq 1}$

26.6 d) ..... $\boxed{\dfrac{1}{1-\lambda}\begin{pmatrix} -1-\lambda+\lambda^2 & 1-\lambda & 2-\lambda \\ 1 & 0 & -1 \\ 1-\lambda^2 & \lambda-1 & \lambda-1 \end{pmatrix}}$

Corrigés

26.2 a) Un calcul direct donne $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

26.2 b) Un calcul direct donne $A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

26.2 c) La conjecture est alors immédiate : les termes diagonaux sont égaux à 1 et le terme $(1,2)$ est égal à k.

26.2 d) On calcule : $B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.

26.2 e) On calcule : $B^3 = B^2 \times B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 19 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$.

26.2 f) On remarque que les termes diagonaux valent 2^k et 3^k respectivement, et que, pour A^2, $4+5=9$, pour A^3, $8+19=27$, donc on peut conjecturer que $A^k = \begin{pmatrix} 2^k & 3^k-2^k \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$.

26.2 g) On calcule :

$$C^2 = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2 & -2\cos(\theta)\sin(\theta) \\ 2\sin(\theta)\cos(\theta) & -\sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

26.2 j) Deux possibilités de faire le calcul : « à la main », ou bien avec la formule théorique du produit.
À la main, on remarque que lorsque l'on effectue le produit $D \times D$, chaque coefficient résultera du produit d'une ligne de 1 par une colonne de 1, donc sera égal à n : $D \times D = \begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ \vdots & (n) & \vdots \\ n & \cdots & n \end{pmatrix} = nD$.
En utilisant les coefficients, on peut écrire que

$$[D^2]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [D]_{ik}[D]_{kj} = \sum_{k=1}^{n} 1 = n.$$

26.2 k) Comme $D^2 = nD$, $D^3 = D \times nD = nD^2 = n \times nD = n^2 D$.

26.2 l) La conjecture est alors évidente.

26.3 a) On calcule :

$$[A \times B]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \binom{i-1}{k-1} 2^k 3^{j-k}$$

Mais si $k > i$, $\binom{i-1}{k-1} = 0$, donc

$$\begin{aligned}
[A \times B]_{ij} &= \sum_{k=1}^{i} \binom{i-1}{k-1} 2^k 3^{j-k} \\
&= \sum_{\ell=0}^{i-1} \binom{i-1}{\ell} 2^{\ell+1} 3^{j-\ell-1} \quad \text{en faisant le changement d'indice } \ell = k-1 \\
&= 2 \times 3^{j-1} \sum_{\ell=0}^{i-1} \binom{i-1}{\ell} \left(\frac{2}{3}\right)^{\ell} \\
&= 2 \times 3^{j-1} \times \left(\frac{2}{3} + 1\right)^{i-1} \\
&= 2 \times 3^{j-1} \times \frac{5^{i-1}}{3^{i-1}} = 2 \times 3^{j-i} \times 5^{i-1}
\end{aligned}$$

26.3 b) On calcule :

$$[B^2]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} 2^i 3^{k-i} 2^k 3^{j-k} = 2^i 3^{j-i} \sum_{k=1}^{n} 2^k = 2^{i+1} 3^{j-i} (2^n - 1).$$

26.3 c) On calcule :

$$\begin{aligned}
[B^\top \times B]_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} [B^\top]_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} 2^k 3^{i-k} 2^k 3^{j-k} = 3^{i+j} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^{2k} = 3^{i+j} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{4}{9}\right)^{k} \\
&= \frac{4}{9} 3^{i+j} \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{4 \times 3^{i+j}}{5} \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right).
\end{aligned}$$

26.3 d) On calcule

$$[A \times C]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \binom{i-1}{k-1} (\delta_{k,j+1} + \delta_{k,j-1}) = \binom{i-1}{j} + \binom{i-1}{j-2}$$

26.4 a) Déjà, la matrice A^2 est triangulaire inférieure (produit de deux matrices triangulaires inférieures). Soit $j \leqslant i$. Alors

$$\begin{aligned}
[A^2]_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik} [A]_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \binom{i-1}{k-1} \binom{k-1}{j-1} \\
&= \sum_{k=j}^{i} \binom{i-1}{k-1} \binom{k-1}{j-1} \\
&= \sum_{k=j}^{i} \frac{(i-1)!}{(k-1)!(i-k)!} \frac{(k-1)!}{(j-1)!(k-j)!} \\
&= \sum_{k=j}^{i} \frac{(i-1)!}{(j-1)!(i-j)!} \frac{(i-j)!}{(k-j)!(i-j-(k-j))!} \\
&= \binom{i-1}{j-1} \sum_{k=j}^{i} \binom{i-j}{k-j} = \binom{i-1}{j-1} \sum_{\ell=0}^{i-j} \binom{i-j}{\ell} \qquad \text{(en posant } \ell = k-j\text{)} \\
&= 2^{i-j} \binom{i-1}{j-1}.
\end{aligned}$$

26.4 b) Pour vérifier ses calculs, il est conseillé de regarder des exemples !

$$n=4\ :\ \begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&2&0&1\\1&0&2&0\\0&1&0&1\end{pmatrix},\ n=5\ :\ \begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\0&2&0&1&0\\1&0&2&0&1\\0&1&0&2&0\\0&0&1&0&1\end{pmatrix}$$

On calcule :

$$\begin{aligned}[C^2]_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} c_{ik}c_{kj} = \sum_{k=1}^{n}(\delta_{i,k+1}+\delta_{i,k-1})(\delta_{k,j+1}+\delta_{k,j-1})\\ &= \sum_{k=1}^{n}\delta_{i,k+1}\delta_{k,j+1} + \sum_{k=1}^{n}\delta_{i,k+1}\delta_{k,j-1} + \sum_{k=1}^{n}\delta_{i,k-1}\delta_{k,j+1} + \sum_{k=1}^{n}\delta_{i,k-1}\delta_{k,j-1}.\end{aligned}$$

Si $(i,j)\notin\{1,n\}^2$. Donc

$$[C^2]_{ij} = \delta_{i-1,j+1} + 2\delta_{i,j} + \delta_{i+1,j-1}.$$

Ceci est confirmé par la structure « tridiagonale espacée » .
Sinon, pour (i,j) quelconque dans $[\![1,n]\!]^2$, on trouve

$$[C^2]_{ij} = (1-\delta_{i,1})(\delta_{i-1,j+1}+\delta_{i,j}) + (1-\delta_{i,n})(\delta_{i,j}+\delta_{i+1,j-1}),$$

car $\delta_{1,k+1}=0=\delta_{n,k-1}$ pour tout k entre 1 et n.

26.5 a) On remarque que $2\pi-2e = 2(\pi-e)\neq 0$, donc A est inversible d'inverse $\dfrac{1}{2(\pi-e)}\begin{pmatrix}2&-e\\-2&\pi\end{pmatrix}$.

26.5 c) Effectuons un pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&1&0&0\\0&2&1&0&1&0\\3&-1&2&0&0&1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&1&0&0\\0&2&1&0&1&0\\0&2&2&-3&0&1\end{array}\right)L_3\leftarrow L_3-3L_1$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&1&0&0\\0&1&1/2&0&1/2&0\\0&2&2&-3&0&1\end{array}\right)L_2\leftarrow L_2/2$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1/2&1&1/2&0\\0&1&1/2&0&1/2&0\\0&0&1&-3&-1&1\end{array}\right)\begin{array}{l}L_1\leftarrow L_1+L_2\\ \\ L_3\leftarrow L_3-2L_2\end{array}$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&5/2&1&-1/2\\0&1&0&3/2&1&-1/2\\0&0&1&-3&-1&1\end{array}\right)\begin{array}{l}L_1\leftarrow L_1-1/2L_3\\ L_2\leftarrow L_2-1/2L_3\\ \\ \end{array}$$

Donc B est inversible d'inverse $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}5&2&-1\\3&2&-1\\-6&-2&2\end{pmatrix}$

26.5 d) Il ne faut pas avoir peur du π et écrire que $C=\pi\begin{pmatrix}1&1&2\\1&0&0\\-1&-2&0\end{pmatrix}$. On calcule alors (par pivot de Gauss) que $\begin{pmatrix}1&1&2\\1&0&0\\-1&-2&0\end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}0&4&0\\0&-2&-2\\2&-1&1\end{pmatrix}$, donc C est inversible d'inverse $\dfrac{1}{4\pi}\begin{pmatrix}0&4&0\\0&-2&-2\\2&-1&1\end{pmatrix}$

26.5 h) On remarque que $L_3 = L_1+2L_2+2L_4$.

26.6 a) Effectuons un pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \lambda & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) L_2 \leftrightarrow L_1$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1+2\lambda & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2+2\lambda & 0 & \lambda & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + \lambda L_1 \end{array}$$

Si $\lambda = 1$, alors la matrice n'est pas inversible. Sinon,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1+2\lambda & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2+2\lambda & 0 & \lambda & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 3/(1-\lambda) & 1/(1-\lambda) & 1/(1-\lambda) & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1+2\lambda & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + \dfrac{1}{1-\lambda} L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 4/(1-\lambda) & 1/(1-\lambda) & -3/(1-\lambda) \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 2\lambda+2 & \lambda & -2\lambda-1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - \dfrac{3}{1-\lambda} L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - (1+2\lambda) L_3 \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4/(1-\lambda) & -1/(1-\lambda) & 3/(1-\lambda) \\ 0 & 1 & 0 & (2\lambda+2)/(1-\lambda) & \lambda/(1-\lambda) & (-2\lambda-1)/(1-\lambda) \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow -L_1 \\ L_2 \leftarrow \dfrac{1}{1-\lambda} L_2 \end{array}$$

Dans ce cas, l'inverse de la matrice est $\dfrac{1}{1-\lambda}\begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 2\lambda+2 & \lambda & -2\lambda-1 \\ \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

Fiche n° 27. Algèbre linéaire

Réponses

27.1 a) .... $\boxed{(3,-1)}$

27.1 b) .... $\boxed{(-1,3)}$

27.1 c) .... $\boxed{(9/11, 2/11)}$

27.1 d) .... $\boxed{(-2, 4/5, 11/5)}$

27.1 e) .... $\boxed{(-1, 1/2, 1/2)}$

27.1 f) .... $\boxed{(0,2,4,1)}$

27.1 g) .... $\boxed{(1/2, -\sqrt{3}/2)}$

27.2 a) .... $\boxed{2}$

27.2 b) .... $\boxed{1}$

27.2 c) .... $\boxed{1}$

27.2 d) .... $\boxed{2}$

27.2 e) .... $\boxed{2}$

27.2 f) .... $\boxed{1}$

27.3 a) .... $\boxed{2}$

27.3 b) .... $\boxed{2}$

27.3 c) .... $\boxed{3}$

27.3 d) .... $\boxed{4}$

27.4 a) .... $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}}$

27.4 b) .... $\boxed{\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$

27.4 c) .... $\boxed{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -19 & -43 \\ 9 & 21 \end{pmatrix}}$

27.4 d) .... $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$

27.4 e) .... $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

27.5 a) .... $\boxed{\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 15 & 0 \end{pmatrix}}$

27.5 b) .... $\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

Corrigés

27.1 a) Notons $u = \lambda(0,1) + \mu(-1,2)$. Alors, $\begin{cases} -\mu & = 1 \\ \lambda + 2\mu & = 1 \end{cases}$. Ainsi, $u = 3(0,1) - (-1,2)$.

....

27.1 b) Notons $u = \lambda(0,1) + \mu(-1,2)$. Alors, $\begin{cases} -\mu & = 1 \\ \lambda + 2\mu & = 1 \end{cases}$. Ainsi, $u = -(-1,2) + 3(0,1)$.

....

27.1 c) Notons $u = \lambda(1,2) + \mu(12,13)$. Alors,

$$\begin{cases} \lambda + 12\mu & = 3 \\ 2\lambda + 13\mu & = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 12\mu & = 3 \\ -11\mu & = -2 \end{cases}$$

Ainsi, $u = \dfrac{9}{11}(1,2) + \dfrac{2}{11}(12,13)$.

....

27.1 d) On note $u = \lambda(0,1,3) + \mu(4,5,6) + \nu(-1,0,1)$. Alors,

$$\begin{cases} 4\mu - \nu & = 1 \\ \lambda + 5\mu & = 2 \\ 3\lambda + 6\mu + \nu & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 5\mu & = 2 \\ 4\mu - \nu & = 1 \\ -9\mu + \nu & = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 5\mu & = 2 \\ -\nu + 4\mu & = 1 \\ -5\mu & = -4 \end{cases}$$

Ainsi, $u = -2(0,1,3) + \dfrac{4}{5}(4,5,6) + \dfrac{11}{5}(-1,0,1)$.

....

27.1 e) Notons $u = \lambda(1,0,1) + \mu(1,1,1) + \nu(-1,-1,3)$. Alors,

$$\begin{cases} \lambda + \mu - \nu & = -1 \\ \mu - \nu & = 0 \\ \lambda + \mu + 3\nu & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu - \nu & = -1 \\ \mu - \nu & = 0 \\ 4\nu & = 2 \end{cases}$$

Ainsi, $u = -(1,0,1) + \dfrac{1}{2}(1,1,1) + \dfrac{1}{2}(-1,-1,3)$.

....

27.1 f) Notons $u = \lambda + \mu X + \nu X(X-1) + \delta X(X-1)(X-2)$.

En évaluant en 0, $\lambda = 0$.

En évaluant en 1, $\mu = 2$.

En évaluant en 2, $2\mu + 2\nu = 8 + 4 = 12$ soit $\nu = 4$.

En identifiant les coefficients de X^3 dans chacun des membres, $1 = \delta$.

Finalement, $u = 2X + 4X(X-1) + X(X-1)(X-2)$.

....

27.1 g) En utilisant les formules d'addition, $u(x) = \dfrac{1}{2}\cos(x) - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)$.

....

27.2 a) Les colonnes de la matrice ne sont pas colinéaires.

....

27.2 b) Toutes les lignes sont proportionnelles à la première qui est non nulle.

....

27.2 c) Toutes les lignes sont proportionnelles à la première qui est non nulle.

....

27.2 d) Les deux premiers vecteurs colonnes sont non colinéaires, le troisième est la somme des deux premiers.

....

27.2 e) Les deux vecteurs colonnes ne sont pas colinéaires.

....

27.2 f) Toutes les colonnes sont égales à la première qui est non nulle.

....

27.3 a) En effectuant les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$, on obtient $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

En effectuant l'opération élémentaire $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$, on obtient $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\mathrm{Rg}(A) = 2$.

....

27.3 b) Si $\sin\theta = 0$, i.e. il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = n\pi$, alors la matrice est égale à $\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$ et elle est de rang 2.

Sinon, on effectue l'opération élémentaire $L_1 \leftarrow \sin(\theta)L_1 - \cos(\theta)L_2$ pour obtenir la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ qui est de rang 2 car $\sin(\theta) \neq 0$.

....

27.3 c) En effectuant l'opération élémentaire $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

En effectuant l'opération élémentaire $L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Ainsi, le rang de la matrice vaut 3.

....

27.3 d) En effectuant les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & -4 \\ 0 & 6 & -7 & -13 \\ 0 & 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

En effectuant l'opération élémentaire $C_2 \leftrightarrow C_3$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & -7 & 6 & -13 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

En effectuant l'opération élémentaire $L_3 \leftarrow 5L_3 - 7L_2$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 9 & -37 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

Comme les deux dernières lignes sont linéairement indépendantes, le rang de la matrice vaut 4.

....

27.4 a) D'une part, $f(1,0) = (1,3) = 1 \cdot (1,0) + 3 \cdot (0,1)$. D'autre part, $f(0,1) = (1,-5) = 1 \cdot (1,0) - 5 \cdot (0,1)$. Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$.

....

27.4 b) D'une part, $f(0,1) = (1,-5) = -5 \cdot (0,1) + 1 \cdot (1,0)$. D'une part, $f(1,0) = (1,3) = 3 \cdot (0,1) + 1 \cdot (1,0)$. Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

....

27.4 c) $f(1,2) = (4,-1)$ et $f(3,4) = (10,-1)$. De plus, la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base canonique vaut

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $P\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19/2 \\ 9/2 \end{pmatrix}$ et $P\begin{pmatrix} 10 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -43/2 \\ 21/2 \end{pmatrix}$. Donc $f(1,2) = -\frac{19}{2}(1,2) + \frac{9}{2}(3,4)$ et $f(3,4) = -\frac{43}{2}(1,2) + \frac{21}{2}(3,4)$. Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -19 & -43 \\ 9 & 21 \end{pmatrix}$.

....

27.4 d) Comme $f(1,0,0) = (1,3,0) = (1,0,0) + 3(0,1,0) + 0(1,1,1)$, $f(0,1,0) = (1,0,1) = 0 \cdot (1,0,0) - (0,1,0) + (1,1,1)$ et $f(1,1,1) = (2,2,1) = (1,0,0) + (0,1,0) + (1,1,1)$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

....

27.4 e) Comme $f(1) = 1$, $f(X) = X + 2$ et $f(X^2) = (X+2)^2 = X^2 + 4X + 4$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

....

27.5 a) Comme $f(0,1,3) = (4,-1) = -1(0,1) + 4(1,0)$, $f(4,5,6) = (15,-1) = -1(0,1) + 15(1,0)$ et $f(-1,0,1) = (0,-1) = -(0,1) + 0(1,0)$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 4 & 15 & 0 \end{pmatrix}$.

....

27.5 b) Comme $f(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot X + 0 \cdot X^2 + 0 \cdot X^3$, $f(X) = 1 = 1 + 0 \cdot X + 0 \cdot X^2 + 0 \cdot X^3$ et $f(X^2) = 2X = 0 \cdot 1 + 2X + 0 \cdot X^2 + 0 \cdot X^3$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

....

Fiche n° 28. Équations différentielles

Réponses

28.1 a) .... $\boxed{x \mapsto 56\mathrm{e}^{12x}}$

28.1 b) .... $\boxed{x \mapsto 6\mathrm{e}^{x} - 1}$

28.1 c) .... $\boxed{x \mapsto \dfrac{8\mathrm{e}^{3x} - 5}{3}}$

28.1 d) .... $\boxed{x \mapsto 9\mathrm{e}^{2x} - 6}$

28.2 a) .... $\boxed{x \mapsto \mathrm{e}^{(6-x)/5}}$

28.2 b) .... $\boxed{x \mapsto 1 - 2\mathrm{e}^{-2x/7+2}}$

28.2 c) .... $\boxed{x \mapsto \left(\dfrac{6}{\sqrt{5}} + \pi\right)\mathrm{e}^{\sqrt{5}x} - \dfrac{6}{\sqrt{5}}}$

28.2 d) .... $\boxed{x \mapsto \left(12 + \dfrac{2\mathrm{e}}{\pi}\right)\mathrm{e}^{\pi x - \pi^2} - \dfrac{2\mathrm{e}}{\pi}}$

28.3 a) .... $\boxed{x \mapsto \mathrm{e}^{2x}}$

28.3 b) .... $\boxed{x \mapsto \mathrm{e}^{x}}$

28.3 c) .... $\boxed{x \mapsto 2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x}}$

28.3 d) .... $\boxed{x \mapsto (2-3\mathrm{i})\mathrm{e}^{x} + (3\mathrm{i}-1)\mathrm{e}^{2x}}$

28.4 a) .... $\boxed{x \mapsto \mathrm{e}^{x}}$

28.4 b) .... $\boxed{x \mapsto 7\mathrm{e}^{-x} - 5\mathrm{e}^{-2x}}$

28.4 c) .... $\boxed{x \mapsto \dfrac{4}{3}\mathrm{e}^{x} - \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-2x}}$

28.4 d) .... $\boxed{x \mapsto (2-x)\mathrm{e}^{x}}$

28.4 e) .... $\boxed{x \mapsto (2-x)\mathrm{e}^{2-2x}}$

28.5 a) .... $\boxed{x \mapsto \cos x + 2\sin x}$

28.5 b) .... $\boxed{x \mapsto \mathrm{e}^{-x/2}\left(\cos\dfrac{\sqrt{3}x}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)}$

28.5 c) .... $\boxed{x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\sin(x)}$

28.5 d) .... $\boxed{x \mapsto \mathrm{e}^{x}\left(\dfrac{-1+\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\right)}$

Corrigés

28.1 a) Notons y_0 l'unique solution de ce problème de Cauchy. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - 12y = 0$ est $\left\{x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{12x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{12x}$.

Alors, $y_0(0) = 56 = \lambda$. Finalement, $y_0 : x \mapsto 56\mathrm{e}^{12x}$.

....

28.1 b) Notons y_0 l'unique solution de ce problème de Cauchy. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - y = 0$ est $\{x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{x},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$. De plus, si μ est une solution particulière constante, alors $0 = \mu + 1$ soit $\mu = -1$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{x} - 1$. Alors, $y_0(0) = 5 = \lambda - 1$. Finalement, $y_0 : x \mapsto 6\mathrm{e}^{x} - 1$.

....

28.1 c) Notons y_0 l'unique solution de ce problème de Cauchy. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - 3y = 0$ est $\left\{x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{3x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. De plus, si μ est une solution particulière constante, alors $0 = 3\mu + 5$ soit $\mu = -5/3$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{3x} - 5/3$.

Alors, $y_0(0) = 1 = \lambda - 5/3$. Finalement, $y_0 : x \mapsto \dfrac{8\mathrm{e}^{3x} - 5}{3}$.

....

28.1 d) Notons y_0 l'unique solution de ce problème de Cauchy. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - 2y = 0$ est $\left\{x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{2x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. De plus, si μ est une solution particulière constante, alors $0 = 2\mu + 12$ soit $\mu = -6$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{2x} - 6$.

Alors, $y_0(0) = 3 = \lambda - 6$. Finalement, $y_0 : x \mapsto 9\mathrm{e}^{2x} - 6$.

....

28.2 a) Notons y_0 l'unique solution de ce problème de Cauchy. L'équation est homogène et son ensemble de solutions est $\left\{x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{-x/5},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{-x/5}$.

Alors, $y_0(1) = \mathrm{e} = \lambda\mathrm{e}^{-1/5}$. Finalement, $y_0 : x \mapsto \mathrm{e}^{(6-x)/5}$.

....

28.2 b) Notons y_0 l'unique solution de ce problème de Cauchy. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' + \dfrac{2}{7}y = 0$ est $\left\{x \mapsto \lambda e^{-2x/7},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. De plus, si μ est une solution particulière constante, alors $0 + 2\mu = 2$ soit $\mu = 1$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{-2x/7} + 1$. Alors, $y_0(7) = -1 = \lambda e^{-2} + 1$. Finalement, $y_0 : x \mapsto -2e^{-2x/7+2} + 1$.

....

28.2 c) Notons y_0 l'unique solution de ce problème de Cauchy. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - \sqrt{5}y = 0$ est $\left\{x \mapsto \lambda e^{\sqrt{5}x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. De plus, si μ est une solution particulière constante, alors $0 - \sqrt{5}\mu = 6$ soit $\mu = -\dfrac{6}{\sqrt{5}}$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{\sqrt{5}x} - \dfrac{6}{\sqrt{5}}$.

Alors, $y_0(0) = \pi = \lambda - \dfrac{6}{\sqrt{5}}$. Finalement, $y_0 : x \mapsto \left(\dfrac{6}{\sqrt{5}} + \pi\right)e^{\sqrt{5}x} - \dfrac{6}{\sqrt{5}}$.

....

28.2 d) Notons y_0 l'unique solution de ce problème de Cauchy. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - \pi y = 0$ est $\{x \mapsto \lambda e^{\pi x},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$. De plus, si μ est une solution particulière constante, alors $0 = \pi\mu + 2e$ soit $\mu = -\dfrac{2e}{\pi}$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{\pi x} - \dfrac{2e}{\pi}$. Alors, $y_0(\pi) = 12 = \lambda e^{\pi^2} - \dfrac{2e}{\pi}$.

Finalement, $y_0 : x \mapsto \left(12 + \dfrac{2e}{\pi}\right)e^{\pi x - \pi^2} - \dfrac{2e}{\pi}$.

....

28.3 a) Soit y_0 la solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 3r + 2 = 0$ dont les solutions sont 2 et 1 (car $2 + 1 = 3$ et $2 \cdot 1 = 2$ donc on reconnaît $r^2 - (2+1)r + 2 \cdot 1$). L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{2x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\right\}$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{2x}$.

Alors, $y(0) = \lambda + \mu = 1$ et $y'(0) = \lambda + 2\mu = 2$. Ce système se réduit en $\lambda + \mu = 1$ et $\mu = 1$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto e^{2x}$.

....

28.3 b) Soit y_0 la solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 3r + 2 = 0$ dont les solutions sont 2 et 1 (car $2 + 1 = 3$ et $2 \cdot 1 = 2$ donc on reconnaît $r^2 - (2+1)r + 2 \cdot 1$). L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{2x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\right\}$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{2x}$.

Alors, $y(0) = \lambda + \mu = 1$ et $y'(0) = \lambda + 2\mu = 1$. Ce système se réduit en $\lambda + \mu = 1$ et $\mu = 0$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto e^{x}$.

....

28.3 c) Soit y_0 la solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 3r + 2 = 0$ dont les solutions sont 2 et 1 (car $2+1 = 3$ et $2 \cdot 1 = 2$ et on reconnaît $r^2 - (2+1)r + 2 \cdot 1$). L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{2x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\right\}$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{2x}$.

Alors, $y(0) = \lambda + \mu = 1$ et $y'(0) = \lambda + 2\mu = 3$. Ce système se réduit en $\lambda + \mu = 1$ et $\mu = 2$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto 2e^{2x} - e^{x}$.

....

28.3 d) Soit y_0 la solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 3r + 2 = 0$ dont les solutions sont 2 et 1 (car $2+1 = 3$ et $2 \cdot 1 = 2$ et on reconnaît $r^2 - (2+1)r + 2 \cdot 1$). L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{2x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\right\}$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{2x}$.

Alors, $y(0) = \lambda + \mu = 1$ et $y'(0) = \lambda + 2\mu = 3i$. Ce système se réduit en $\lambda + \mu = 1$ et $\mu = 3i - 1$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto (2 - 3i)e^{x} + (3i - 1)e^{2x}$.

....

28.4 a) Soit y_0 la solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 1 = 0$ dont les solutions sont -1 et 1. L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{-x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\right\}$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{-x}$.

Alors, $y(0) = \lambda + \mu = 1$ et $y'(0) = \lambda - \mu = 1$. En additionnant et soustrayant ces relations, on obtient $\lambda = 1$ et $\mu = 0$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto e^{x}$.

....

28.4 b) Soit y_0 la solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2 + 3r + 2 = 0$ dont les solutions sont -1 et -2 (car $-1 - 2 = -3$ et $(-2) \cdot (-1) = 2$ et on reconnaît $r^2 - (-2-1)r + (-2) \cdot (-1)$). L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu e^{-2x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\right\}$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu e^{-2x}$.

Alors, $y(0) = \lambda + \mu = 2$ et $y'(0) = -\lambda - 2\mu = 3$. Le système se réduit en $\lambda + \mu = 2$ et $-\mu = 5$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto 7e^{-x} - 5e^{-2x}$.

....

28.4 c) Soit y_0 la solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2+r-2=0$. Le discriminant du trinôme vaut 9 et ses racines sont -2 et 1. L'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$\left\{x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{-2x},\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2\right\}.$$

Ainsi, il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{-2x}$.

Alors, $y(0)=\lambda+\mu=1$ et $y'(0)=\lambda-2\mu=2$. Le système se réduit en $\lambda+\mu=1$ et $-3\mu=1$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto \dfrac{4}{3}e^{x} - \dfrac{1}{3}e^{-2x}$.

....

28.4 d) Soit y_0 la solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2-2r+1=0$ dont la racine double est 1. L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{x \mapsto (\lambda+\mu x)e^{x},\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2\right\}$. Ainsi, il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto (\lambda+\mu x)e^{x}$.

Alors, $y(0)=\lambda=2$ et $y'(0)=\lambda+\mu=1$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto (2-x)e^{x}$.

....

28.4 e) Soit y_0 la solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2+4r+4=0$ dont la racine double est -2. L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{x \mapsto (\lambda+\mu x)e^{-2x},\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2\right\}$. Ainsi, il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto (\lambda+\mu x)e^{-2x}$.

Alors, $y(1)=(\lambda+\mu)e^{-2}=1$ et $y'(1)=(-2\lambda+\mu-2\mu)e^{-2}=-3$. Le système s'écrit $\lambda+\mu=e^2$ et $2\lambda+\mu=3e^2$. Il se réduit en $\lambda+\mu=e^2$ et $\lambda=2e^2$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto (2-x)e^{2-2x}$.

....

28.5 a) Soit y_0 l'unique solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2+1=0$ dont les solutions sont i et $-$i. Ainsi, l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation homogène est

$$\left\{x \mapsto \lambda\cos x + \mu\sin x,\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

Il existe donc $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda\cos x + \mu\sin x$.

Alors, $y_0(0)=1=\lambda$ et $y_0'(0)=2=\mu$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto \cos x + 2\sin x$.

....

28.5 b) Soit y_0 l'unique solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2+r+1=0$. Les résultats sur les racines de l'unité assurent que les solutions de cette équation sont $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\bar{j}$. Ainsi, l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation homogène est

$$\left\{x \mapsto e^{-x/2}\left(\lambda\cos\frac{\sqrt{3}x}{2} + \mu\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\right),\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

Il existe donc $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto e^{-x/2}\left(\lambda\cos\dfrac{\sqrt{3}x}{2} + \mu\sin\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)$.

Alors, $y_0(0)=1=\lambda$ et $y_0'(0)=-1=-\dfrac{\lambda}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mu$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto e^{-x/2}\left(\cos\dfrac{\sqrt{3}x}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)$.

....

28.5 c) Soit y_0 l'unique solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2+2r+2=0$. Le discriminant réduit du trinôme vaut -1 et ses racines sont $-1-i$ et $-1+i$. Ainsi, l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation homogène est $\left\{x \mapsto e^{-x}(\lambda\cos(x)+\mu\sin(x)),\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}$. Il existe donc $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto e^{-x}(\lambda\cos(x)+\mu\sin(x))$.

Alors, $y_0(0)=0=\lambda$ et $y_0'(0)=1=-\lambda+\mu$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto e^{-x}\sin(x)$.

....

28.5 d) L'équation caractéristique associée est $r^2-2r+5=0$. Le discriminant réduit du trinôme vaut -4 et ses racines sont $1-2i$ et $1+2i$. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation homogène est $\left\{x \mapsto e^{x}\left(\lambda e^{2ix}+\mu e^{-2ix}\right),\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2\right\}$. Il existe donc $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto e^{x}\left(\lambda e^{2ix}+\mu e^{-2ix}\right)$.

Alors, $y_0(0)=i=\lambda+\mu$ et $y_0'(0)=-i=(\lambda+\mu)+(2i\lambda-2i\mu)$. Le système réduit s'écrit $\lambda+\mu=i$ et $4i\lambda=2-2i$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto e^{x}\left(\dfrac{-1+i}{2}e^{2ix}+\dfrac{1+i}{2}e^{-2ix}\right)$.

En utilisant les formules d'Euler, cette solution peut également s'écrire $y_0 : x \mapsto ie^{x}(\cos(2x)-\sin(2x))$.

....

Fiche n° 29. Séries numériques

Réponses

29.1 a) .... $\boxed{\text{divergente}}$

29.1 b) .... $\boxed{2}$

29.1 c) .... $\boxed{2+\sqrt{2}}$

29.1 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{2\times 3^9}}$

29.2 a) .... $\boxed{\mathrm{e}}$

29.2 b) .... $\boxed{\mathrm{e}^2-3}$

29.2 c) .... $\boxed{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}}$

29.3 a) .... $\boxed{\dfrac{\pi^2}{6}}$

29.3 b) .... $\boxed{\text{divergente}}$

29.3 c) .... $\boxed{\text{divergente}}$

29.4 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{12}}$

29.4 b) .... $\boxed{\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}}$

29.4 c) .... $\boxed{\dfrac{1-7\mathrm{i}}{350}}$

29.4 d) ... $\boxed{\dfrac{-2-5\sqrt{2}i}{54}}$

29.5 a) .... $\boxed{1}$

29.5 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{4}}$

29.5 c) .... $\boxed{\ln(2)}$

29.5 d) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{4}}$

29.6 a) .... $\boxed{\text{divergente}}$

29.6 b) .... $\boxed{4}$

29.7 a) .... $\boxed{2}$

29.7 b) .... $\boxed{\dfrac{11}{4}}$

29.7 c) .... $\boxed{16}$

29.7 d) ..... $\boxed{\dfrac{2\mathrm{e}^3}{(\mathrm{e}-1)^3}}$

Corrigés

29.1 a) La série est géométrique de raison $2 \notin]-1,1[$, donc elle diverge.

....

29.1 b) La série est géométrique de raison $\dfrac{1}{2} \in]-1,1[$, donc elle converge. De plus, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

....

29.1 c) La série est géométrique de raison $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \in]-1,1[$, donc elle converge. De plus, on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{2}{2-\sqrt{2}} = 2+\sqrt{2}.$$

....

29.1 d) La série est géométrique de raison $\dfrac{1}{3} \in]-1,1[$, donc elle converge. De plus, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$. Donc,

$$\sum_{k=10}^{+\infty}\frac{1}{3^k} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{3^k} - \sum_{k=0}^{9}\frac{1}{3^k} = \frac{3}{2} - \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\times\frac{1}{3^{10}}.$$

Autre solution : avec le changement d'indice $j = k-10$, on a

$$\sum_{k=10}^{+\infty}\frac{1}{3^k} = \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{3^{j+10}} = \frac{1}{3^{10}}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{3^j} = \frac{1}{3^{10}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\times\frac{1}{3^{10}}.$$

....

29.2 a) On reconnaît la série exponentielle $\displaystyle\sum_k \frac{1^k}{k!}$.

....

29.2 b) On reconnaît la série exponentielle $\displaystyle\sum_k \frac{2^k}{k!}$, et on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2^k}{k!} = \mathrm{e}^2$, donc $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{2^k}{k!} = \mathrm{e}^2 - \frac{2^0}{0!} - \frac{2^1}{1!} = \mathrm{e}^2-3$.

....

29.2 c) On a $\dfrac{1}{2^k\times k!} = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!}$ et on reconnaît donc une série exponentielle.

....

29.3 a) Il s'agit d'une série de Riemann convergente, et vous savez peut-être que sa somme est $\dfrac{\pi^2}{6}$; en général, si $a > 1$, on ne connaît pas la valeur exacte de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^a}$.

29.3 b) Il s'agit d'une série de Riemann divergente.

29.3 c) La série harmonique diverge !

29.4 a) On a $\dfrac{1}{2^{2k}} = \dfrac{1}{4^k}$, donc la série est géométrique de raison $\dfrac{1}{4} \in \left]-1,1\right[$: elle converge. De plus,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

Donc, $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{4^k} - \frac{1}{4^0} - \frac{1}{4^1} = \frac{1}{12}$.

29.4 b) On a $\mathrm{e}^{-(k-1)} = \mathrm{e}^{-k}\mathrm{e}^1 = \mathrm{e} \times \dfrac{1}{\mathrm{e}^k}$. Or la série géométrique de raison $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \in \left]-1,1\right[$ converge.

De plus, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{\mathrm{e}}} = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$, donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(k-1)} = \mathrm{e}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^k} - \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^0} = \mathrm{e}\left(\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1} - 1\right) = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$.

Autre solution : le changement d'indice $j = k-1$ donne $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(k-1)} = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-j} = \sum_{j=0}^{+\infty} (\mathrm{e}^{-1})^j = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-1}} = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$.

29.4 c) Il s'agit d'une série géométrique de raison $\dfrac{\mathrm{i}}{7}$ et $\left|\dfrac{\mathrm{i}}{7}\right| \in \left]-1,1\right[$, donc la série converge. De plus,

$$\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{\mathrm{i}^k}{7^{k-1}} = \frac{\mathrm{i}^3}{7^2} \sum_{k=3}^{+\infty} \left(\frac{\mathrm{i}}{7}\right)^{k-3} = \frac{\mathrm{i}^3}{7^2} \frac{1}{1-\frac{\mathrm{i}}{7}} = \frac{-\mathrm{i}}{49-7\mathrm{i}}.$$

Enfin, en multipliant par l'expression conjuguée, on trouve

$$\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{\mathrm{i}^k}{7^{k-1}} = \frac{-\mathrm{i}(49+7\mathrm{i})}{49^2+7^2} = \frac{1-7\mathrm{i}}{350}.$$

29.4 d) On reconnaît une série géométrique de raison $\dfrac{1}{1-\mathrm{i}\sqrt{2}}$ qui est de module $\dfrac{1}{\sqrt{1^2+\sqrt{2}^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \in \left]-1,1\right[$. Ainsi, la série converge. De plus,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=4}^{+\infty} \frac{1}{(1-\mathrm{i}\sqrt{2})^k} &= \frac{1}{(1-\mathrm{i}\sqrt{2})^4} \sum_{k=4}^{+\infty} \left(\frac{1}{1-\mathrm{i}\sqrt{2}}\right)^{k-4} \\
&= \frac{1}{(1-\mathrm{i}\sqrt{2})^4} \frac{1}{1-\frac{1}{1-\mathrm{i}\sqrt{2}}} = \left(\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{2}}{3}\right)^4 \frac{\mathrm{i}\sqrt{2}-1}{\mathrm{i}\sqrt{2}} \\
&= \left(\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{2}}{3}\right)^4 \frac{\sqrt{2}+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

En développant, on obtient $(1+\mathrm{i}\sqrt{2})^4 = -7-4\mathrm{i}\sqrt{2}$, donc $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{2}}{3}\right)^4 = \dfrac{-7-4\mathrm{i}\sqrt{2}}{81}$ et

$$\sum_{k=4}^{+\infty} \frac{1}{(1-\mathrm{i}\sqrt{2})^k} = \frac{-7-4\mathrm{i}\sqrt{2}}{81} \times \frac{\sqrt{2}+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} = \frac{-2-5\mathrm{i}\sqrt{2}}{54}.$$

29.5 a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On remarque que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

29.5 b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On remarque que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3+3k^2+2k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} + 1 - \frac{1}{2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}.$$

29.5 c) Soit $n \geqslant 2$ fixé. On remarque que

$$\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2}{k^2-1}\right) = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2}{(k-1)(k+1)}\right) = \sum_{k=2}^{n}(2\ln(k) - \ln(k+1) - \ln(k-1)) = \ln(2) - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2).$$

29.5 d) Soit $n \geqslant 0$ fixé. On remarque que pour tout k,

$$\arctan\left(\frac{(k+2)-(k+1)}{1+(k+2)(k+1)}\right) = \arctan(k+2) - \arctan(k+1).$$

Donc, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{(k+2)-(k+1)}{1+(k+2)(k+1)}\right) = \sum_{k=0}^{n}(\arctan(k+2) - \arctan(k+1)) = \arctan(n+2) - \arctan(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{4}.$

29.6 a) La série diverge grossièrement.

29.6 b) On reconnaît une série géométrique dérivée, de raison $\frac{1}{2} \in]-1,1[$, donc convergente, dont la somme vaut

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 4.$$

29.7 a) On a $k2^{-k} = \frac{1}{2}k\frac{1}{2^{k-1}}$; la série $\displaystyle\sum_k k\frac{1}{2^{k-1}}$ est une série géométrique dérivée, de raison $\frac{1}{2} \in]-1,1[$, et est donc convergente. Sa somme est $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k\frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 4.$

29.7 b) La série converge comme somme d'une série géométrique de raison $\frac{1}{3} \in]-1,1[$ et d'une série géométrique dérivée de même raison, et

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(3k+1)\frac{1}{3^k} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k}{3^{k-1}} + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{3^k} - \frac{1}{3^0} = \frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2} + \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1 = \frac{9}{4} + \frac{3}{2} - 1 = \frac{11}{4}.$$

29.7 c) On reconnaît une série géométrique dérivée deux fois, de raison $\frac{1}{2}$, convergente, de somme $\dfrac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} = 16.$

29.7 d) On a affaire à une série géométrique dérivée deux fois.

Fiche n° 30. Structures euclidiennes

Réponses

30.1 a) .... $\boxed{4\ln 2 - 2}$

30.1 b) .... $\boxed{\dfrac{7}{12}}$

30.1 c) .... $\boxed{2\sin(1) + \cos(1) - 1}$

30.1 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}(e^2 - 1)}$

30.2 a) .... $\boxed{11}$

30.2 b) .... $\boxed{10}$

30.2 c) .... $\boxed{0}$

30.3 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{6\sqrt{5}}}$

30.3 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{5\sqrt{3}}}$

30.3 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{3}}$

30.4 a) .... $\boxed{(1, 2\sqrt{3}(X - \frac{1}{2}))}$

30.4 b) .... $\boxed{(\sqrt{3}X, \sqrt{\frac{15}{43}}(4X^2 - 9X + 4))}$

30.5 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}$

30.5 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$

30.5 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{11}\begin{pmatrix} 9 & -6 & 2 \\ -6 & -7 & 6 \\ 2 & 6 & 9 \end{pmatrix}}$

Corrigés

30.1 a) On calcule : $\langle f_1, f_6\rangle = \displaystyle\int_0^1 2\ln(1+t)\,\mathrm{d}t$. Pour cela, on a le choix : première possibilité faire une intégration par parties, seconde possibilité utiliser une primitive connue de ln (sur $\mathbb{R}_+^*$) qui est $t \longmapsto t\ln t - t$ et on a alors besoin de faire un changement de variable. Si on applique la seconde technique, on trouve

$$\langle f_1, f_6\rangle = \int_0^1 2\ln(1+t) = 2\int_1^2 \ln(t) = 2\Big[t\ln t - t\Big]_1^2 = 4\ln 2 - 2.$$

....

30.1 b) Calculer $\displaystyle\int_0^1 t^2(1+t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^2 + t^3\,\mathrm{d}t$.

....

30.1 c) On calcule : $\displaystyle\int_0^1 \cos(t)(1+t)\,\mathrm{d}t$. Par intégration par parties, on a

$$\int_0^1 \cos(t)(1+t)\,\mathrm{d}t = \Big[\sin(t)(1+t)\Big]_0^1 - \int_0^1 \sin(t)\,\mathrm{d}t = 2\sin(1) + \cos(1) - 1.$$

....

30.1 d) On calcule : $\displaystyle\int_0^1 e^t e^t\,\mathrm{d}t = \int_0^1 e^{2t} = \frac{1}{2}(e^2 - 1)$.

....

30.2 a) On calcule $\mathrm{tr}(A^\mathsf{T} B) = 11$. On pouvait aussi faire la somme des produits des coefficients de A et de B, puisque

$$\langle A, B\rangle = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij} b_{ij}$$

si A et B sont deux matrices carrées de taille n.

....

30.2 b) $\mathrm{tr}(B^\mathsf{T} B) = 10$

....

30.2 c) Le calcul est inutile, il s'agit du produit scalaire entre une matrice symétrique et une matrice antisymétrique. Ces deux matrices sont orthogonales donc le produit scalaire est nul.

....

30.3 a) Pour calculer la distance demandée, on va faire le calcul du projeté orthogonal $p_{\mathrm{Vect}(1,X)}(X^2)$ de X^2 sur $\mathrm{Vect}(1, X)$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$a + bX = p_{\mathrm{Vect}(1,X)}(X^2) \iff \begin{cases} \langle X^2 - (a + bX),\ 1\rangle = 0 \\ \langle X^2 - (a + bX),\ X\rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -1/6 \\ b = 1 \end{cases}.$$

Alors la distance cherchée est $\left\| X^2 - \left(X - \dfrac{1}{6}\right)\right\| = \dfrac{1}{6\sqrt{5}}$.

....

30.3 b) Pour calculer la distance demandée, on va faire le calcul du projeté orthogonal $p_{\mathrm{Vect}(1,X^3)}(X)$ de X sur $\mathrm{Vect}(1, X^3)$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$a + bX^3 = p_{\mathrm{Vect}(1,X^3)}(X) \iff \begin{cases} \langle X - (a + bX^3),\ 1\rangle = 0 \\ \langle X - (a + bX^3),\ X^3\rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 4/15 \\ b = 14/15 \end{cases}.$$

Alors la distance cherchée est $\left\| X - \left(\dfrac{4}{15} + \dfrac{14}{15}X^3\right)\right\| = \dfrac{1}{5\sqrt{3}}$.

....

30.3 c) Pour calculer la distance demandée, on va faire le calcul du projeté orthogonal $p_{\mathrm{Vect}(X,X^2)}(1+X^2)$ de $1+X^2$ sur $\mathrm{Vect}(X, X^2)$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$aX + bX^2 = p_{\mathrm{Vect}(X,X^2)}(1 + X^2) \iff \begin{cases} \langle 1 + X^2 - (aX + bX^2),\ X\rangle = 0 \\ \langle 1 + X^2 - (aX + bX^2),\ X^2\rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 4 \\ b = -7/3 \end{cases}.$$

Alors la distance cherchée est $\left\| 1 + X^2 - \left(4X - \dfrac{7}{3}X^2\right)\right\| = \dfrac{1}{3}$.

....

30.4 a) Appliquer le processus de Gram-Schmidt.

....

30.4 b) Appliquer le processus de Gram-Schmidt.

....

30.5 a) Une base orthonormale de $P^\perp$ est $u = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k)$. Donc la matrice dans la b.o.n $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale sur $P^\perp$ est AA^T où A est la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ (car u est une b.o.n de l'espace sur lequel on projette et $\mathcal{B}$ est une b.o.n de l'espace). Donc la matrice dans la b.o.n $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale sur $P^\perp$ est $M = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice cherchée est $I_3 - M$.

....

30.5 b) Une base orthonormale de D est $v = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(i + 2k)$ donc la matrice de la projection orthogonale sur D dans la base $\mathcal{B}$ est AA^T où A est la matrice de v dans la base $\mathcal{B}$ *i.e.* $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

....

30.5 c) La symétrie σ de l'énoncé vérifie $\sigma = id - 2\pi$ où π est la projection orthogonale sur la droite dirigée par le vecteur $i + 3j - k$. Or la matrice P de π dans la base $\mathcal{B}$ est $\dfrac{1}{11}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 9 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Donc la matrice cherchée est $\mathrm{I}_3 - 2P$.

....

Fiche n° 31. Groupes symétriques

Réponses

31.1 a) .. $\boxed{\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&1&3&2&6&5\end{pmatrix}}$

31.1 b) .. $\boxed{\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&6&5&1&3&4\end{pmatrix}}$

31.1 c) .. $\boxed{\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&4&3&2&5&1\end{pmatrix}}$

31.1 d) .. $\boxed{\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&6&5&3&4\end{pmatrix}}$

31.1 e) .. $\boxed{\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&6&5&4&2&3\end{pmatrix}}$

31.1 f) .. $\boxed{\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&3&2&1&5&4\end{pmatrix}}$

31.2 a) .... $\boxed{(a\ b)}$

31.2 b) .... $\boxed{(c\ b\ a)}$

31.2 c) .... $\boxed{(7\ 2\ 5\ 3\ 1)}$

31.2 d) .... $\boxed{(a\ c\ b)}$

31.2 e) .... $\boxed{(2\ 1\ 5\ 4)}$

31.2 f) .... $\boxed{(1\ 2\ 7\ 5\ 3)}$

31.3 a) $\boxed{(1\ 7\ 4)(2\ 6\ 8\ 10)(3\ 9\ 5)}$

31.3 b) .. $\boxed{(1\ 3\ 10\ 6\ 4)(5\ 7)(8\ 9)}$

31.3 c) .... $\boxed{(1\ 7)(2\ 4\ 3\ 5\ 8)}$

31.3 d) .... $\boxed{(1\ 2)(3\ 4)}$

31.3 e) .... $\boxed{(1\ 4\ 6\ 2\ 3\ 5)}$

31.4 a) .... $\boxed{(1\ 4\ 2)(5\ 6)}$

31.4 b) .... $\boxed{\mathrm{id}}$

31.4 c) .... $\boxed{(1\ 2\ 6\ 5\ 3)}$

31.4 d) .... $\boxed{(1\ 6\ 7\ 4)(2\ 5\ 3)}$

31.5 a) .... $\boxed{-1}$

31.5 b) .... $\boxed{1}$

31.5 c) .... $\boxed{1}$

31.5 d) .... $\boxed{-1}$

31.5 e) .... $\boxed{-1}$

31.5 f) .... $\boxed{1}$

31.6 a) .... $\boxed{-1}$

31.6 b) .... $\boxed{1}$

31.6 c) .... $\boxed{1}$

31.6 d) .... $\boxed{1}$

Corrigés

31.1 a) Pour déterminer la permutation ρ^{-1}, il suffit de lire de bas en haut la matrice représentant la permutation ρ. Ainsi, la quatrième colonne donne $\rho^{-1}(1) = 4$, la première $\rho^{-1}(2) = 1$, *etc.* Au total $\rho^{-1} = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&1&3&2&6&5\end{pmatrix}$.

....

31.1 b) On procède comme pour ρ^{-1} pour obtenir $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&6&5&1&3&4\end{pmatrix}$.

....

31.1 c) Par définition, $\sigma(1) = 4$ et $\sigma(4) = 6$, ainsi $\sigma^2(1) = \sigma(\sigma(1)) = \sigma(4) = 6$. On procède de même pour les autres images et au total $\sigma^2 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&4&3&2&5&1\end{pmatrix}$.

....

31.1 d) Par définition, $\sigma(1) = 4$ et $\rho(4) = 1$, ainsi $\rho\sigma(1) = \rho(\sigma(1)) = \rho(4) = 1$. On procède de même pour les autres images et au total $\rho\sigma = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&6&5&3&4\end{pmatrix}$.

....

31.1 e) On procède comme pour $\rho\sigma$ pour obtenir $\sigma\rho = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&6&5&4&2&3\end{pmatrix}$. Notons que $\rho\sigma \neq \sigma\rho$, ce qui n'est en rien surprenant.

....

31.1 f) D'après b), $\sigma^{-1}(1) = 2$ et, d'après e), $\sigma\rho(2) = 6$, ainsi $\sigma\rho\sigma^{-1}(1) = 6$. On procède de même pour les autres images et au total $\sigma\rho\sigma^{-1} = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&3&2&1&5&4\end{pmatrix}$.

....

31.2 a) Les transpositions sont des involutions et ainsi leur propre inverse.

....

31.2 b) Pour inverser un cycle, il suffit de le parcourir dans l'autre sens. Ainsi $(a\ b\ c)^{-1} = (c\ b\ a)$.

....

31.2 c) On procède comme à la question précédente.

31.2 d) Notons $\sigma = (a\ b\ c)$. On a $\sigma(a) = b$ et $\sigma(b) = c$, d'où $\sigma^2(a) = c$. On obtient de même $\sigma^2(c) = b$ et $\sigma^2(b) = a$. Au total, $(a\ b\ c)^2 = (a\ c\ b)$.
Remarquons que $(a\ b\ c)^2 = (a\ b\ c)^{-1}$, ce qui était prévisible dans la mesure où le 3-cycle $(a\ b\ c)$ vérifie $(a\ b\ c)^3 = \mathrm{id}$.

31.2 e) Notons $\sigma = (2\ 4\ 5\ 1)$. On a $\sigma(2) = 4$, $\sigma(4) = 5$ et $\sigma(5) = 1$, ains $\sigma^3(2) = 1$. On obtient de la même façon $\sigma^3(1) = 5$, $\sigma^3(5) = 4$ et $\sigma^3(4) = 2$. Au total, $(2\ 4\ 5\ 1)^3 = (2\ 1\ 5\ 4)$.
On pourrait aussi remarquer que σ est un 4-cycle, ainsi $\sigma^3 = \sigma^{-1}$ et on a donc

$$(2\ 4\ 5\ 1)^3 = (2\ 4\ 5\ 1)^{-1} = (1\ 5\ 4\ 2) = (2\ 1\ 5\ 4).$$

31.2 f) Puisque $(1\ 5\ 2\ 3\ 7)$ est un 5-cycle, on a $(1\ 5\ 2\ 3\ 7)^{42} = (1\ 5\ 2\ 3\ 7)^r$, avec r le reste de la division euclidienne de 42 par 5, à savoir 2. Ainsi $(1\ 5\ 2\ 3\ 7)^{42} = (1\ 5\ 2\ 3\ 7)^2 = (1\ 2\ 7\ 5\ 3)$.

31.3 a) Notons σ la permutation considérée et partons de l'élément 1. On a $\sigma(1) = 7$, $\sigma(7) = 4$ et $\sigma(4) = 1$, d'où un premier cycle $(1\ 7\ 4)$. On procède de même à partir d'un élément de $\{1, \dots, 10\} \setminus \{1, 4, 7\}$, par exemple 2, pour lequel on a $\sigma(2) = 6$, $\sigma(6) = 8$, $\sigma(8) = 10$ et $\sigma(10) = 2$, d'où un second cycle $(2\ 6\ 8\ 10)$. On continue à partir d'un élément de $\{1, \dots, 10\} \setminus \{1, 2, 4, 6, 7, 8, 10\}$, par exemple 3, pour lequel on a $\sigma(3) = 9$, $\sigma(9) = 5$ et $\sigma(5) = 3$, d'où un troisième cycle $(3\ 9\ 5)$. La réunion des supports de ces trois cycles étant $\{1, \dots, 10\}$, la décomposition est terminée :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 6 & 9 & 1 & 3 & 8 & 4 & 10 & 5 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 7\ 4)(2\ 6\ 8\ 10)(3\ 9\ 5).$$

Rappelons que

$$(1\ 7\ 4)(2\ 6\ 8\ 10)(3\ 9\ 5) = (1\ 7\ 4)(3\ 9\ 5)(2\ 6\ 8\ 10) = (2\ 6\ 8\ 10)(3\ 9\ 5)(1\ 7\ 4) = \textit{etc.}$$

Bref, les cycles à supports disjoints commutent entre eux.

31.3 b) Notons σ la permutation considérée et procédons comme à la question précédente. On a $\sigma(1) = 3$, $\sigma(3) = 10$, $\sigma(10) = 6$, $\sigma(6) = 4$ et $\sigma(4) = 1$, d'où un premier cycle $(1\ 3\ 10\ 6\ 4)$. Ensuite $\sigma(2) = 2$ et le cycle (2) est donc omis. On a enfin $\sigma(5) = 7$ et $\sigma(7) = 5$, d'où la transposition $(5\ 7)$, et $\sigma(8) = 9$ et $\sigma(9) = 8$, d'où la transposition $(8\ 9)$. En résumé

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 2 & 10 & 1 & 7 & 4 & 5 & 9 & 8 & 6 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 10\ 6\ 4)(5\ 7)(8\ 9).$$

31.3 c) Notons $\rho = (1\,3\,5\,2)$, $\sigma = (2\,4\,1\,7)$ et $\tau = (5\,8)$. On a $\rho\sigma\tau(1) = \rho\sigma(1) = \rho(7) = 7$ et $\rho\sigma\tau(7) = \rho\sigma(7) = \rho(2) = 1$, d'où une première transposition $(1\ 7)$. Par ailleurs, $\rho\sigma\tau(2) = \rho\sigma(2) = \rho(4) = 4$ et on obtient de même $\rho\sigma\tau(4) = 3$, $\rho\sigma\tau(3) = 5$, $\rho\sigma\tau(5) = 8$ et $\rho\sigma\tau(8) = 2$, d'où le cycle $(2\ 4\ 3\ 5\ 8)$. Enfin $\rho\sigma\tau(6) = 6$ et le cycle (6) est donc omis. En résumé

$$(1\ 3\ 5\ 2)(2\ 4\ 1\ 7)(5\ 8) = (1\ 7)(2\ 4\ 3\ 5\ 8).$$

31.3 d) On procède comme à la question c.

31.3 e) On procède comme à la question c.

31.4 a) Commençons par décomposer la permutation en un produit de cycle à supports disjoints :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 4)(5\ 6).$$

Ainsi $\sigma^{47} = (1\ 2\ 4)^{47}(5\ 6)^{47} = (1\ 2\ 4)^2(5\ 6)^1 = (1\ 4\ 2)(5\ 6)$, dans la mesure où les permutations $(1\ 2\ 4)$ et $(5\ 6)$ commutent et sont respectivement un 3-cycle et un 2-cycle ($47 \equiv 2\,[3]$ et $47 \equiv 1\,[2]$).

31.4 b) On procède comme à la question précédente :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}^{168} = (1\ 6\ 5)^{168}(2\ 7)^{168}(3\ 4)^{168} = \mathrm{id} \circ \mathrm{id} \circ \mathrm{id} = \mathrm{id}.$$

31.4 c) On procède toujours de la même façon :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 2 & 4 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}^{168} = (1\ 6\ 3\ 2\ 5)^{168} = (1\ 6\ 3\ 2\ 5)^{3} = (1\ 2\ 6\ 5\ 3).$$

31.4 d) On procède toujours de la même façon :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 5 & 7 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}^{227} = (1\ 4\ 7\ 6)^{227}(2\ 3\ 5)^{227} = (1\ 4\ 7\ 6)^{3}(2\ 3\ 5)^{2} = (1\ 6\ 7\ 4)(2\ 5\ 3)$$

31.5 a) Puisque la signature est un morphisme de groupe, $\varepsilon((1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)) = \varepsilon((1\ 2))\varepsilon((3\ 4))\varepsilon((5\ 6)) = (-1)^3 = -1$.

31.5 b) Rappelons que la signature d'un p-cycle est $(-1)^{p-1}$. Ainsi la signature du 5-cycle $(1\ 5\ 3\ 2\ 4)$ est $(-1)^4 = 1$.

31.5 c) Puisque la signature est un morphisme de groupe à valeurs dans $\{\pm 1\}$, une permutation et son inverse ont même signature, ainsi $\varepsilon\big((1\ 5\ 3\ 2\ 4)^{-1}\big) = \varepsilon((1\ 5\ 3\ 2\ 4)) = 1$, d'après la question précédente.

31.5 d) On a $\varepsilon((1\ 3\ 2\ 4)) = (-1)^{4-1} = -1$, ainsi $\varepsilon\big((1\ 3\ 2\ 4)^{37}\big) = \varepsilon((1\ 3\ 2\ 4))^{37} = (-1)^{37} = -1$.

31.5 e) On a $\varepsilon\big((1\ 3)(2\ 6\ 7)^{-1}(4\ 7\ 3\ 1\ 2)\big) = \varepsilon((1\ 3))\varepsilon((2\ 6\ 7))\varepsilon((4\ 7\ 3\ 1\ 2)) = -1 \times (-1)^{3-1} \times (-1)^{5-1} = -1$.

31.5 f) On a $\varepsilon\big(((1\ 3)(2\ 6\ 7)(4\ 7\ 3\ 1\ 2))^{64}\big) = (\varepsilon((1\ 3)(2\ 6\ 7)(4\ 7\ 3\ 1\ 2)))^{64} = 1$, puisque l'exposant 64 est pair.

31.6 a) On commence par décomposer la permutation en un produit de cycles à supports disjoints.

$$\varepsilon\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 6 & 9 & 1 & 3 & 8 & 4 & 10 & 5 & 2 \end{pmatrix}\right) = \varepsilon((1\ 7\ 4)(2\ 6\ 8\ 10)(3\ 9\ 5)) = (-1)^{3-1}(-1)^{4-1}(-1)^{3-1} = -1.$$

31.6 b) De la même façon,

$$\varepsilon\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 2 & 10 & 1 & 7 & 4 & 5 & 9 & 8 & 6 \end{pmatrix}\right) = \varepsilon((1\ 3\ 10\ 6\ 4)(5\ 7)(8\ 9)) = (-1)^{5-1}(-1)(-1) = 1.$$

31.6 c) $\varepsilon\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 4 & 7 & 1 & 8 & 9 & 10 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}\right) = \varepsilon((1\ 3\ 7\ 10\ 5\ 8\ 2\ 4)(6\ 9)) = (-1)^{8-1}(-1) = 1.$

31.6 d) $\varepsilon\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 1 & 6 & 10 & 5 & 9 & 2 & 3 & 8 & 4 \end{pmatrix}\right) = \varepsilon((1\ 7\ 2)(4\ 10)(3\ 6\ 9\ 8)) = (-1)^{3-1}(-1)(-1)^{4-1} = 1.$

Fiche n° 32. Déterminants

Réponses

32.1 a) .... $\boxed{-2a^2}$

32.1 b) .... $\boxed{6}$

32.1 c) .... $\boxed{-5+6\mathrm{i}}$

32.1 d) .... $\boxed{20}$

32.2 a) .... $\boxed{-2}$

32.2 b) .... $\boxed{9\ln(2)}$

32.2 c) .... $\boxed{227/336}$

32.2 d) .... $\boxed{3\ 919}$

32.2 e) .... $\boxed{7\sqrt{2}+13}$

32.3 a) .... $\boxed{0}$

32.3 b) .... $\boxed{-40}$

32.3 c) .... $\boxed{0}$

32.4 a) .... $\boxed{-4}$

32.4 b) .... $\boxed{6\mathrm{i}-12}$

32.4 c) .... $\boxed{4/375}$

32.5 a).... $\boxed{x^3+y^3+z^3-3xyz}$

32.5 b) .... $\boxed{-6\ln^3(a)}$

32.5 c)... $\boxed{(y-x)(z-y)(z-x)}$

32.5 d) .... $\boxed{0}$

Corrigés

32.1 a) Le déterminant vaut $-a^2-a^2=-2a^2$.

32.1 b) Le déterminant vaut $-(-2)\times 3=6$.

32.1 c) Le déterminant vaut $\mathrm{i}\times 5\mathrm{i}-(-2)\times 3=-5+6\mathrm{i}$.

32.1 d) La matrice est triangulaire inférieure donc son déterminant vaut $-4\times(-5)=20$.

32.2 a) Le déterminant vaut $\dfrac{1}{4}\times(3\times 9-5\times 7)=\dfrac{1}{4}\times(27-35)=-2$.

32.2 b) Le déterminant vaut $\ln(2)\times 3\times\ln(\mathrm{e})-(-2)\times 3\times\ln(2)=9\ln(2)$.

32.2 c) Le déterminant vaut $\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{7}{8}\right)-\dfrac{5}{9}\times\left(-\dfrac{3}{7}\right)=\dfrac{227}{336}$.

32.2 d) Le déterminant vaut 3 919.

32.2 e) Le déterminant vaut $(\sqrt{2}+1)(3-\sqrt{8})-(2+\sqrt{8})(1-\sqrt{32})=7\sqrt{2}+13$.

32.3 a) Le déterminant vaut 0.

32.3 b) Deux permutations de colonnes, $C_2\leftrightarrow C_1$ puis $C_3\leftrightarrow C_2$, ramènent ce déterminant à celui d'une matrice triangulaire supérieure. Son déterminant vaut $-2\times 5\times 4=-40$.

32.3 c) On remarque que la deuxième colonne C_2 vaut $-\mathrm{j}\times C_1$. Ainsi, le déterminant est nul.

32.4 a) Le déterminant vaut -4.

32.4 b) Le déterminant vaut $6\mathrm{i}-12$.

32.4 c) Le déterminant vaut $\dfrac{4}{375}$.

32.5 a) On reconnaît une matrice circulante. Son déterminant vaut $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

....

32.5 b) Le déterminant vaut $-6\ln^3(a)$.

....

32.5 c) Le déterminant de cette matrice de Vandermonde vaut $(y-x)(z-y)(z-x)$.

....

32.5 d) Les opérations sur les colonnes $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$ ramènent au calcul du déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ x+1 & 1 & 2 \\ x+2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, lui-même nul.

....

Fiche n° 33. Fonctions de deux variables

Réponses

33.1 a) .... $\boxed{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x-1 \leqslant y \leqslant x+1\}}$

33.1 b) .... $\boxed{]0,+\infty[\times [0,+\infty[}$

33.1 c) .... $\boxed{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y \geqslant 0\} \backslash \{(0,0)\}}$

33.1 d) .... $\boxed{\varnothing}$

33.2 a) .... $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 5y^4 + x}$

33.2 b) .... $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2y\cos(2xy - y) \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (2x-1)\cos(2xy - y)}$

33.2 c) .... $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (2xy, 2x) \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x^2, -2y)}$

33.2 d) .... $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2}{1+(2x+y)^2} \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{1}{1+(2x+y)^2}}$

33.3 a) .... $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\sin(x-y) \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sin(x-y)}$

33.3 b) .... $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos(\mathrm{e}^{xy}) - xy\sin(\mathrm{e}^{xy})\,\mathrm{e}^{xy} \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x^2\sin(\mathrm{e}^{xy})\,\mathrm{e}^{xy}}$

33.3 c) .... $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\,x^{y-1} \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^y \ln x}$

33.3 d) .... $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$

33.4 a) .... $\boxed{\sin(2t)}$

33.4 b) .... $\boxed{\dfrac{2\mathrm{e}^{4t} + \mathrm{e}^{-2t}}{\sqrt{\mathrm{e}^{4t} - \mathrm{e}^{-2t}}}}$

33.4 c) .... $\boxed{-72\cos(4t) - 46\sin(4t)}$

33.5 a) .... $\boxed{\dfrac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial u}(u,v) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{v-u}{2c}\right) - \dfrac{1}{2c}\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{v-u}{2c}\right)}$

33.5 a) .... $\boxed{\dfrac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial v}(u,v) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{v-u}{2c}\right) + \dfrac{1}{2c}\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{v-u}{2c}\right)}$

33.5 b) .... $\boxed{\dfrac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)}$

33.5 b) .... $\boxed{\dfrac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)}$

Corrigés

33.2 b) Calculons $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$. Soit $y \in \mathbb{R}$. La première application partielle $f_y : t \mapsto \sin(2ty - y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f_y' : t \mapsto 2y\cos(2ty - y)$. On obtient $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_y'(x) = 2y\cos(2xy - y)$ en évaluant en $t = x$.

33.3 d) Calculons $\dfrac{\partial f}{\partial x}$. On fixe $a = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Si $a \neq (0,0)$ alors la première application partielle en a est $t \mapsto \dfrac{ty^2}{t^2 + y^2}$.
Sa dérivée est $t \mapsto \dfrac{y^2 \cdot (t^2 + y^2) - ty^2 \cdot 2t}{(t^2 + y^2)^2}$, d'où $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a) = \dfrac{y^2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}$ en évaluant en $t = x$. Reste à traiter le cas où $a = (0,0)$. On calcule à la main le taux d'accroissement :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \frac{\frac{x \cdot 0^2}{x^2 + 0^2} - 0}{x} = \frac{0}{x^3} = 0.$$

Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} 0 = 0$.

On procède de même pour $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

33.4 a) On pourrait simplement dériver $w : t \mapsto 4(\sin t)^2 + 3(\cos t)^2$, mais ce n'est pas l'idée du chapitre. La règle de la chaîne donne : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(u(t), v(t))\dfrac{\partial u}{\partial t}(t) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(u(t), v(t))\dfrac{\partial v}{\partial t}(t) = 8\sin t\cos t + 6\cos t(-\sin t) = 2\sin t\cos t = \sin(2t)$.

33.5 a) La règle de la chaîne donne $\dfrac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial u}(u,v) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v))\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u,v) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v))\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u,v)$, avec les notations $\varphi_1(u,v) = \dfrac{u+v}{2}$ et $\varphi_2(u,v) = \dfrac{v-u}{2c}$. Remarque : c'est le changement de variables utilisé pour résoudre l'équation des ondes. En physique, on note abusivement $x = \varphi_1$ et $y = \varphi_2$.
