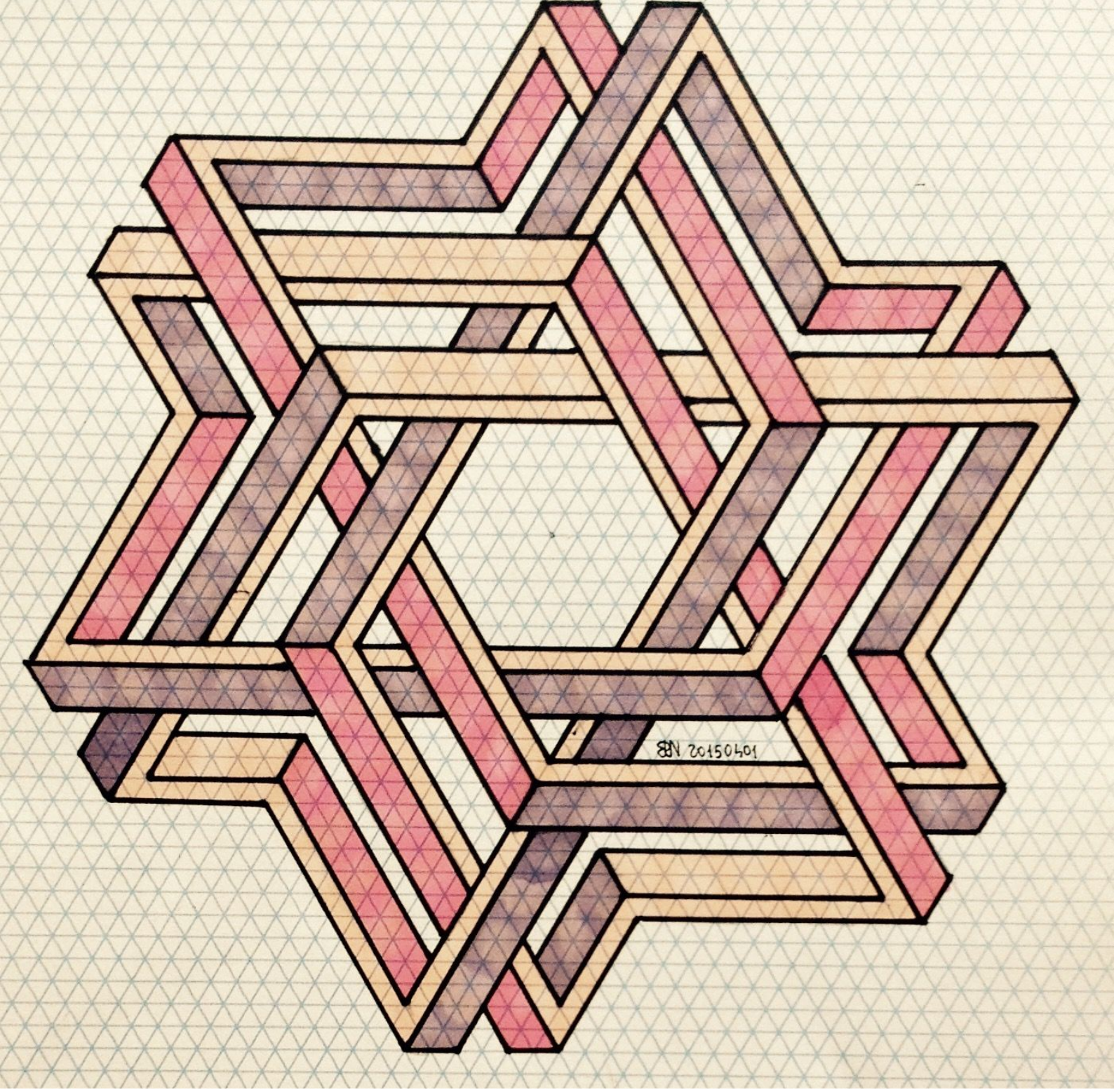


Cahier d'entraînement en physique-chimie

TSI 2

Page web du *Cahier d'entraînement*,
dernières versions

Ce cahier d'entraînement a été écrit collectivement par des professeurs en classes préparatoires scientifiques.

Coordination

Colas Bardavid et Catherine Lavainne

Équipe des participants

Steve Arnefaux
Stéphane Bargot
Chloé Barraud
Fabien Baudribos
Laurent Beau
Julien Bellier
Lionel Beluze
Marc Beutier
Ariane Beyrath
Allan Bildé
Guillaume Blot-Teyssedre
Olivier Boinot-Turpault
Cécile Bonnand
Alexis Brès
Frédéric Bruneau
Geoffroy Burgunder
Erwan Capitaine
Hervé Catry
Vincent Combette
Guillaume Davieau
Jean-Marie Delorme
Frédéric Desforges
Alexis Drouard
Hervé George
Florence Goutverg
Mathieu Hebding
Lucas Henry
Didier Hérisson
Fanny Jospitre
Joris Laleque
Catherine Lavainne
Alain Lombard
Emmanuel Loyer
Louis Péault
Gwenaël Raillet
Alain Robichon
Renaud Ruamps
Pierre-Simon Saulue
Théo Tassin
Étienne Thibierge
Marc Venturi
Delphine Viandier
Anthony Yip

Le pictogramme de l'horloge a été créé par Ralf Schmitzer (The Noun Project).
Le pictogramme du bulldozer a été créé par Ayub Irawan (The Noun Project).
Le pictogramme de la calculatrice a été créé par Sita Raisita (The Noun Project).

L'illustration de la couverture a été réalisée par Regolo Bizzi.

Version 1.3.1 — 9 février 2025

Sommaire

Mode d'emploi du cahier d'entraînement v

Généralités

☐ fiche 1. Opérateurs vectoriels 3

Mécanique

☐ fiche 2. Loi du frottement solide 13

Électromagnétisme en régime permanent

☐ fiche 3. Électrostatique 21

☐ fiche 4. Magnétostatique 34

Électromagnétisme en régime variable

☐ fiche 5. Équations de Maxwell 45

☐ fiche 6. Induction 57

☐ fiche 7. Ondes électromagnétiques I 72

☐ fiche 8. Ondes électromagnétiques II 83

Optique

☐ fiche 9. Modèle scalaire de la lumière 91

☐ fiche 10. Interférences à deux ondes 99

☐ fiche 11. Interférences à N ondes 111

Thermodynamique

☐ fiche 12. Outils mathématiques pour la diffusion 123

☐ fiche 13. Diffusion thermique 127

☐ fiche 14. Transferts thermiques 141

☐ fiche 15. Tables et diagrammes thermodynamiques 149

☐ fiche 16. Thermodynamique industrielle 162

Électronique

- ☐ fiche 17. Signaux 172
- ☐ fiche 18. ALI 184
- ☐ fiche 19. ALI saturé 193
- ☐ fiche 20. Oscillateurs électroniques 203

Mécanique des fluides

- ☐ fiche 21. Cinématique des fluides 210
- ☐ fiche 22. Dynamique des fluides I 217
- ☐ fiche 23. Dynamique des fluides II 228
- ☐ fiche 24. Bilans en mécanique des fluides 243

Thermochimie

- ☐ fiche 25. Transformations chimiques 250

Électrochimie

- ☐ fiche 26. Phénomène de corrosion 261
- ☐ fiche 27. Piles et accumulateurs 270

Mode d'emploi

Qu'est-ce que le cahier d'entraînement ?

Le *cahier d'entraînement en physique-chimie* est un outil destiné à renforcer l'acquisition de **réflexes utiles en physique et en chimie**.

Il ne se substitue en aucun cas aux TD donnés par votre professeur ; travailler avec ce cahier d'entraînement vous permettra en revanche d'aborder avec plus d'aisance les exercices de physique-chimie.

Pour donner une analogie, on pourrait dire que ce cahier d'entraînement est comparable aux **exercices de musculation** d'un athlète : ils sont nécessaires pour mieux réussir le jour J lors de la compétition, mais ils ne sont pas suffisants. Un coureur de sprint fait de la musculation, mais il fait également tout un tas d'autres exercices.

Pour vous aider à mieux vous entraîner, nous avons ajouté quelques exercices sur des thèmes qui ne figurent pas au programme, en prenant soin de rappeler, dans ce cas, les équations en jeu. Il faut voir ces exercices comme des occasions supplémentaires pour s'entraîner à manipuler des mathématiques au service de la physique et de la chimie.

Ce cahier a été conçu par une large équipe de professeurs en classes préparatoires, tous soucieux de vous apporter l'aide et les outils pour réussir.

Comment est-il organisé ?

Le cahier est organisé en *fiches d'entraînement*, chacune correspondant à un thème issu de votre programme de deuxième année.

Chaque fiche est composée d'une suite de petits exercices, appelés *entraînements*, dont le temps de résolution estimé est indiqué par une ( ), deux (), trois () ou quatre () horloges.

Les pictogrammes

Certains entraînements sont accompagnés d'un pictogramme.

Ces entraînements sont **basiques et transversaux**.

Les compétences qu'ils mettent en jeu ne sont pas forcément spécifiques au thème de la fiche et peuvent être transversales.

Ce pictogramme a été choisi parce que le bulldozer permet de construire les fondations et que c'est sur des fondations solides que l'on bâtit les plus beaux édifices. Ces entraînements sont donc le gage pour vous d'acquérir un socle solide de savoir-faire.

Ces entraînements vous entraînent au **calcul à la main**.

Dans ces entraînements, les calculs doivent être faits **sans calculatrice**.

Comment utiliser ce cahier ?

Le cahier d'entraînement ne doit pas remplacer vos TD. Il s'agit d'un outil à utiliser en complément de votre travail « normal » en physique-chimie (apprentissage du cours, recherche de TD, recherche des DM).

Un travail personnalisé.

Le cahier d'entraînement est prévu pour être **utilisé en autonomie**.

Choisissez vos entraînements en fonction des difficultés que vous rencontrez, des chapitres que vous étudiez, ou bien en fonction des conseils de votre professeur.

Ne cherchez pas à faire linéairement ce cahier : les fiches ne sont pas à faire dans l'ordre mais en fonction des points que vous souhaitez travailler.

Un travail régulier.

Pratiquez l'entraînement à un rythme régulier : **une dizaine de minutes par jour** par exemple. Privilégiez un travail régulier sur le long terme plutôt qu'un objectif du type « faire dix fiches par jour pendant les vacances ».

Un travail efficace.

Utilisez les réponses et les corrigés de façon appropriée : il est important de chercher suffisamment par vous-même avant d'aller les regarder. Il faut vraiment **persévérer** dans votre raisonnement et vos calculs avant d'aller voir le corrigé si vous voulez que ces entraînements soient efficaces.

Une erreur ? Une remarque ?

Si jamais vous voyez une erreur d'énoncé ou de corrigé, ou bien si vous avez une remarque à faire, n'hésitez pas à écrire à l'adresse `cahier.entrainement@gmail.com`.

Si vous pensez avoir décelé une erreur, merci de donner aussi l'identifiant de la fiche, écrit en gris en haut à gauche de chaque fiche.

Énoncés

Opérateurs vectoriels

Prérequis
Notation avec et sans le symbole nabla $\vec{\nabla}$ des opérateurs :
- gradient : $\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \vec{\nabla} f$
- divergence : $\text{div}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$
- rotationnel : $\overrightarrow{\text{rot}}(f) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$

Expressions de ces opérateurs vectoriels en coordonnées cartésiennes.

Dans toute cette fiche, les grandeurs a, b et c sont des constantes ayant la dimension d'une longueur.

Sur l'opérateur gradient

Entraînement 1.1 — Quelle écriture pour le gradient ?

Le gradient est un opérateur vectoriel qui s'applique à des fonctions scalaires. Pour un système de coordonnées cartésiennes (x, y, z) décrivant l'espace, la définition du gradient d'une fonction $f(x, y, z)$ est :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \vec{\nabla}(f) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e_z}.$$

On considère la fonction $V(x, y, z) = xyz$. Quelle est la bonne expression du gradient de V ?

(a) $\nabla(V) = zy\,\vec{e_x} + zx\,\vec{e_y} + yx\,\vec{e_z}$

(b) $\text{grad}\left(\vec{V}\right) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ yz \end{pmatrix}$

(c) $\overrightarrow{\text{grad}}(V) = zy\,\vec{e_y} + zx\,\vec{e_x} + yx\,\vec{e_z}$

(d) $\vec{\nabla}(V) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$

.....

Entraînement 1.2 — Calcul de gradients en coordonnées cartésiennes.

On munit l'espace d'un repère cartésien dont le système de coordonnées est noté (x, y, z).

On rappelle l'expression de l'opérateur gradient dans ce système de coordonnées :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f(x, y, z)) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e_z}.$$

Développer les expressions suivantes :

a) $\overrightarrow{\text{grad}}\left(xy + yz + zx + \dfrac{xyz}{a}\right)$ .....

b) $\overrightarrow{\text{grad}}\left(3x^2 + 2a(y - z) + b^2\right)$ .....

c) $\overrightarrow{\text{grad}}\left(x^2y + y^2z + z^2x + a^3\right)$ .....

d) $\overrightarrow{\text{grad}}\left(2xy + 8a^2\mathrm{e}^{z/(2b)} - 6c^2\right)$ .....

e) $\overrightarrow{\text{grad}}\left(8x^2y + \dfrac{6a^4}{y} - 5b^2z\right)$ .....

Entraînement 1.3 — Calcul de gradients en coordonnées cylindriques.

On munit l'espace d'un repère cylindrique dont le système de coordonnées est noté (r, θ, z).

On donne l'expression de l'opérateur gradient dans ce système de coordonnées :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f(r,\theta,z)) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e_z}.$$

Développer les expressions suivantes :

a) $\overrightarrow{\text{grad}}\left(3z - \dfrac{r^2}{a} - 2r\theta\right)$ .....

b) $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\dfrac{a^2}{r^2}\mathrm{e}^{5\theta}\right)$ .....

c) $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\sqrt{r^2 - a^2}\right)$ .....

d) $\overrightarrow{\text{grad}}\left(7\theta\left(\dfrac{r}{a}\right)^4 + \ln(z/b)\right)$ .....

e) $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\dfrac{z}{r}\sin(\theta)\right)$ .....

Entraînement 1.4 — La bonne formule.

On introduit deux systèmes de coordonnées pour décrire un plan : des coordonnées cartésiennes (x_1, x_2) et des coordonnées polaires (ρ, α).

Parmi les formules suivantes de gradient à deux dimensions d'une fonction scalaire g du plan, identifier la seule écriture valable :

(a) $\overrightarrow{\text{grad}}(g(x_1,x_2)) = \dfrac{\partial g}{\partial x_1}\overrightarrow{e_{x_1}} + \dfrac{\partial g}{\partial x_2}\overrightarrow{e_{x_2}}$

(b) $\vec{\nabla} g(x_1,x_2) = \dfrac{\partial g}{\partial x_2}\overrightarrow{e_{x_1}} + \dfrac{\partial g}{\partial x_1}\overrightarrow{e_{x_1}}$

(c) $\overrightarrow{\text{grad}}(g(r,\alpha)) = \dfrac{\partial g}{\partial \rho}\vec{e_\rho} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \rho}\overrightarrow{e_\alpha}$

(d) $\vec{\nabla} \cdot g(r,\rho) = \dfrac{\partial g}{\partial \rho}\vec{e_\rho} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial g}{\partial \alpha}\overrightarrow{e_\alpha}$

.....

Entraînement 1.5 — Valeurs et projections d'un gradient.

On munit l'espace d'un repère cartésien dont le système de coordonnées est noté (x, y, z).

On donne l'expression de l'opérateur gradient dans ce système de coordonnées :

$$\vec{\nabla}(f(x,y,z)) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e_z}.$$

On considère la fonction $g(x,y,z) = (x-2)^2 + (y+1)^2 + z^2 - 1$, on note $\mathrm{M}(x,y,z)$ un point quelconque de l'espace et A le point de coordonnées $(-1,1,2)$.

a) Calculer $g(\mathrm{A})$ .....

b) La quantité $2z$ correspond à :

(a) $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(g)\cdot\vec{e_x}$ (c) $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(g)\cdot\vec{e_z}$

(b) $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(g)\cdot\vec{e_y}$

.....

c) La quantité $2y+2$ correspond à :

(a) $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(g)\cdot\vec{e_x}$ (c) $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(g)\cdot\vec{e_z}$

(b) $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(g)\cdot\vec{e_y}$

.....

d) La quantité $2x-4$ correspond à :

(a) $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(g)\cdot\vec{e_x}$ (c) $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(g)\cdot\vec{e_z}$

(b) $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(g)\cdot\vec{e_y}$

.....

e) La quantité $\vec{\nabla}g(M)$ correspond au vecteur :

(a) $\begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2(y-1) \\ 2z \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2(y-1) \\ 2(x+2) \\ 2z \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2(y+1) \\ 2z \end{pmatrix}$

.....

f) Calculer $\left\|\vec{\nabla}g(\mathrm{A})\right\|$ .....

Entraînement 1.6 — Enquête sur une fonction.

On considère une fonction $f(x,y,z)$ inconnue telle que $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) = 2xy\vec{e_x} + x^2\vec{e_y} + a^2\vec{e_z}$.

a) Quelle est l'unique relation valable ?

(a) $\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = 2xy$ (b) $\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = x^2$ (c) $\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = y$

.....

b) Quelle primitive est solution de la réponse précédente ?

(a) $f(x,y,z) = xy^2 + g(x,y)$ (c) $f(x,y,z) = x^2y + yx^2$

(b) $f(x,y,z) = x^2y + g(y,z)$

.....

c) Que vérifie la dérivée partielle par rapport à y de la réponse précédente ?

(a) $\dfrac{\partial g}{\partial y} = 0$ (b) $\dfrac{\partial g}{\partial y} = x^2$ (c) $\dfrac{\partial g}{\partial y} = 1$

.....

d) En s'appuyant sur les réponses précédentes, quelle est la bonne expression de g ?

(a) $g = a^2 y + \text{cste}$ (b) $g = a^2 z + \text{cste}$ (c) $g = a^2 + \text{cste}$

.....

e) Quelle est l'expression de la fonction $f(x, y, z)$ telle que $f(0, 0, 0) = 0$?

(a) $f = x^2 y + a^2 z$ (b) $f = y^2 z + a^2 x$ (c) $f = x^2 z + a^2 y$

.....

Sur l'opérateur divergence

Entraînement 1.7 — Calcul de divergences en coordonnées cartésiennes.

On munit l'espace d'un repère cartésien dont le système de coordonnées est noté (x, y, z).

On donne l'expression de l'opérateur divergence dans ce système de coordonnées :

$$\text{div}(\vec{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Développer les expressions suivantes :

a) $\text{div}\left(3x^2\vec{e_x} + 2ay\vec{e_y} - 2bz\vec{e_z}\right)$ .....

b) $\text{div}\left(2xy\vec{e_y} + 8a^2 \text{e}^{\frac{z}{2b}}\vec{e_z} - 6b^2\vec{e_x}\right)$ .....

c) $\text{div}\left(8x^2 y\vec{e_x} + \frac{6x^4}{y}\vec{e_y}\right)$ .....

d) $\text{div}(x\vec{e_z} + z\vec{e_x})$ .....

e) $\text{div}\left(x^2 y\vec{e_x} - yx^2(\vec{e_y} - \vec{e_z})\right)$ .....

Entraînement 1.8 — Calcul de divergences en coordonnées cylindriques.

On munit l'espace d'un repère cylindrique dont le système de coordonnées est noté (r, θ, z).

On donne l'expression de l'opérateur divergence dans ce système de coordonnées :

$$\text{div}(\vec{A}) = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Développer les expressions suivantes :

a) $\text{div}\left(-\frac{r^2}{a}\vec{e_r} - 2r\theta\vec{e}_\theta + 3z\vec{e}_z\right)$ .....

b) $\text{div}(r\vec{e}_\theta)$ .....

Entraînement 1.9 — Bataille de divergences.

Quel est le champ dont la divergence au point $A(-1,-1,1)$ est maximale ?

(a) $x^2\vec{e_x}+y^2\vec{e_y}+z^2\vec{e_z}$ (c) $z^2\vec{e_x}+x^2\vec{e_y}+y^2\vec{e_z}$

(b) $y^2\vec{e_x}+x^2\vec{e_y}+z^2\vec{e_z}$ (d) $y^2\vec{e_x}+x^2\vec{e_z}+z^2\vec{e_y}$

Entraînement 1.10 — Choix du système de coordonnées.

On munit l'espace d'un système de coordonnées cartésiennes (x,y,z) et d'un système de coordonnées sphériques (r,θ,φ). On s'intéresse au champ vectoriel $\overrightarrow{OM}=x\vec{e_x}+y\vec{e_y}+z\vec{e_z}=r\vec{e_r}$ et on donne l'expression de l'opérateur divergence en coordonnées sphériques :

$$\operatorname{div}(\vec{A})=\frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 A_r}{\partial r}+\frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial(\sin(\theta)A_\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}.$$

Développer les expressions suivantes :

a) $\operatorname{div}(x\vec{e_x}+y\vec{e_y}+z\vec{e_z})$ .....

b) $\operatorname{div}(r\vec{e_r})$ .....

On munit l'espace de dimension 2 d'un système de coordonnées cylindro-polaires (r,θ).

On s'intéresse au champ vectoriel $\overrightarrow{OM}=x\vec{e_x}+y\vec{e_y}=r\vec{e_r}$.

c) La divergence de ce champ (définie dans l'entraînement **1.8**), en tout point, vaut :

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

Sur l'opérateur rotationnel

Entraînement 1.11 — Calcul de rotationnels en coordonnées cartésiennes.

On munit l'espace d'un repère cartésien dont le système de coordonnées est noté (x,y,z).

On donne l'expression de l'opérateur rotationnel dans ce système de coordonnées :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{A})=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e_x}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{e_y}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{e_z}.$$

Développer les expressions suivantes :

a) $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(3x^2\vec{e_x}+2by\vec{e_y}-2cz\vec{e_z}\right)$ .....

b) $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(2xy\vec{e_x}+8c^2\mathrm{e}^{\frac{z}{2c}}\vec{e_y}-6c^2\vec{e_z}\right)$ .....

c) $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(8x^2y\vec{e_x}+\frac{6x^4}{y}\vec{e_y}\right)$ .....

d) $\overrightarrow{\operatorname{rot}}(-x\vec{e_z}+z\vec{e_x})$ .....

e) $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(x^2y\vec{e_x}-yx^2(\vec{e_y}-\vec{e_z})\right)$ .....

Entraînement 1.12 — Calcul de rotationnels en coordonnées cylindriques.

On munit l'espace d'un repère cylindrique dont le système de coordonnées est noté (r, θ, z).

On donne l'expression de l'opérateur divergence dans ce système de coordonnées :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{e_r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e_\theta} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial r A_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e_z}.$$

Développer les expressions suivantes :

a) $\overrightarrow{\text{rot}}\left(-\frac{r^2}{a}\vec{e_r} - 2r\theta\vec{e_\theta} + 3z\vec{e_z}\right)$ .....

b) $\overrightarrow{\text{rot}}(r\vec{e_\theta})$ .....

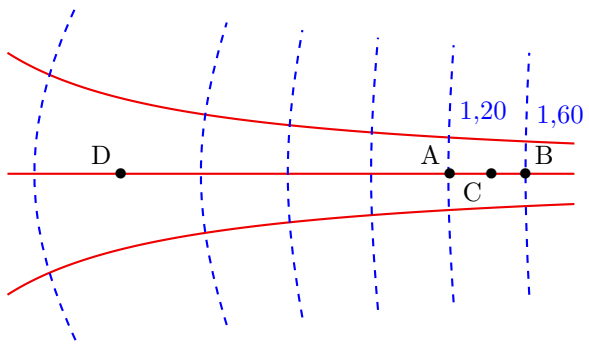
Sur la représentation graphique

Entraînement 1.13 — Exploiter une carte de champ.

On considère un champ $\vec{v}(\text{M})$ dérivant d'un gradient de potentiel Φ, c'est-à-dire tel qu'en tout point M :

$$\vec{v}(\text{M}) = \overrightarrow{\text{grad}}\ \Phi(\text{M})$$

La figure ci-dessous représente les lignes de champ (en trait plein) et les équipotentielles (en tirets). Le système est invariant par translation orthogonalement au plan de la figure. Les valeurs du potentiel $\Phi(\text{M})$ sont données pour chaque équipotentielle en UA (unité arbitraire).



On admet que le champ est tel que $\text{div}\,\vec{v} = \vec{0}$, c'est-à-dire à flux conservatif. Autrement dit, le long d'un tube de champ de section S, la quantité vS est conservée.

a) Par rapport aux équipotentielles, les lignes de champ sont orientées :

(a) parallèlement (b) orthogonalement (c) aléatoirement

.....

b) Estimer graphiquement $v(\text{C})$ en UA/m sachant que AB $\approx 50\,\text{cm}$ .....

c) Le vecteur $\vec{v}(\mathrm{C})$ est orienté dans le sens du vecteur :

(a) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ (b) $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$

.....

d) Estimer graphiquement $\dfrac{v(\mathrm{C})}{v(\mathrm{D})}$ en calculant un rapport de longueurs .....

Sur les opérateurs laplaciens

Entraînement 1.14 — Opérateur laplacien scalaire en coordonnées cartésiennes.

On munit l'espace d'un repère cartésien dont le système de coordonnées est noté (x, y, z).

On donne l'expression de l'opérateur laplacien (scalaire) dans ce système de coordonnées :

$$\Delta(f(x,y,z)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Développer les expressions suivantes :

a) $\Delta\left(\dfrac{x^2 y}{a} + bz + c^2\right)$ .....

b) $\Delta(y^2 - 5az)$ .....

c) $\Delta\left(b^2 \ln(\dfrac{z}{a}) + 3x^2\right)$ .....

Entraînement 1.15 — Opérateur laplacien vectoriel en coordonnées cartésiennes.

On munit l'espace d'un repère cartésien dont le système de coordonnées est noté (x, y, z).

On donne l'expression de l'opérateur laplacien (vectoriel) dans ce système de coordonnées :

$$\Delta(\vec{A}(x,y,z)) = \Delta A_x \vec{e_x} + \Delta A_y \vec{e_y} + \Delta A_z \vec{e_z}.$$

On dispose d'un vecteur $\vec{A}$ dont les coordonnées cartésiennes sont les suivantes : $\begin{pmatrix} \dfrac{x^2 y}{a} + bz + c^2 \\ y^2 - 5az \\ b^2 \ln\left(\dfrac{z}{a}\right) + 3x^2 \end{pmatrix}$.

Développer $\Delta\vec{A}$ .....

Bilan sur les opérateurs

Entraînement 1.16 — Scalaire ou vecteur ?

Les différents opérateurs rencontrés peuvent être des opérateurs :

(a) scalaires s'appliquant à des scalaires
(b) scalaires s'appliquant à des vecteurs
(c) vectoriels s'appliquant à des scalaires
(d) vectoriels s'appliquant à des vecteurs

a) Quel cas correspond à l'opérateur « gradient » ? .....

b) Quel cas correspond à l'opérateur « divergence » ? .....

c) Quel cas correspond à l'opérateur « rotationnel » ? .....

d) Quel cas correspond à l'opérateur « laplacien » appliqué à un champ scalaire ? .....

e) Quel cas correspond à l'opérateur « laplacien » appliqué à un champ vectoriel ? .....

Autres entraînements

Entraînement 1.17 — Calcul de gradients en coordonnées sphériques.

On munit l'espace d'un repère cylindrique dont le système de coordonnées est noté (r, θ, φ).

On donne l'expression de l'opérateur gradient dans ce système de coordonnées :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f(r,\theta,\varphi)) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e_\varphi}.$$

Développer les expressions suivantes :

a) $\overrightarrow{\text{grad}}\left(r + 2a\theta + \dfrac{6b}{\varphi}\right)$ .....

b) $\overrightarrow{\text{grad}}\left((r\sin(\theta-\varphi))^3\right)$ .....

c) $\overrightarrow{\text{grad}}\left(r^2\sqrt{\varphi}\sin\theta\right)$ .....

d) $\overrightarrow{\text{grad}}(\tan(\theta))$ .....

Entraînement 1.18 — Calcul de divergences en coordonnées sphériques.

On munit l'espace d'un repère sphérique dont le système de coordonnées est noté (r, θ, φ).

On donne l'expression de l'opérateur divergence dans ce système de coordonnées :

$$\operatorname{div}(\vec{A}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial(\sin(\theta)A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}.$$

Développer les expressions suivantes :

a) $\operatorname{div}\left(r\vec{e_r} + 2a\sin\theta\vec{e_\theta} + \dfrac{6a}{\varphi}\vec{e_\varphi}\right)$ .....

b) $\operatorname{div}\left(r^2\sin(\theta)\sqrt{\varphi}(\vec{e_r} + \vec{e_\theta} + \vec{e_\varphi})\right)$ .....

c) $\operatorname{div}(r\vec{e_\theta})$ .....

Entraînement 1.19 — Calcul de rotationnels en coordonnées sphériques.

On munit l'espace d'un repère sphérique dont le système de coordonnées est noté (r, θ, φ).

On donne l'expression de l'opérateur rotationnel dans ce système de coordonnées :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{A}) = \frac{1}{r\sin(\theta)}\left(\frac{\partial(\sin(\theta)A_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\vec{e_r} + \left(\frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{e_\varphi}.$$

Développer les expressions suivantes :

a) $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(r\vec{e_r} + 2a\theta\vec{e_\theta} + \dfrac{6b}{\varphi}\vec{e_\varphi}\right)$ .....

b) $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(r^2\sin(\theta)\sqrt{\varphi}\vec{e_r}\right)$ .....

c) $\overrightarrow{\operatorname{rot}}(r\vec{e_\theta})$ .....

Réponses mélangées

$-4c\mathrm{e}^{\frac{z}{2c}}\vec{e_x} - 2x\vec{e_z}$ (a) $\left(-\frac{2r}{a} - 2\theta\right)\vec{e_r} - 2\vec{e}_\theta + 3\vec{e_z}$ (b) (a)

$-\frac{2a^2}{r^3}\mathrm{e}^{5\theta}\vec{e_r} + \frac{5a^2}{r^3}\mathrm{e}^{5\theta}\vec{e}_\theta$ $\frac{2y}{a}$ $4r\sin\theta\sqrt{\varphi} + 2r\cos\theta\sqrt{\varphi} + \frac{r}{2\sqrt{\varphi}}$ $2x + 4\frac{a^2}{b}\mathrm{e}^{\frac{z}{2b}}$

$\vec{e_r} + \frac{2a}{r}\vec{e_\theta} + \frac{-6b}{r\sin\theta\varphi^2}\vec{e_\varphi}$ 0,80 UA/m $\frac{6b}{r\varphi\tan\theta}\vec{e_r} - \frac{6b}{r\varphi}\vec{e_\theta} + \frac{2a\theta}{r}\vec{e_\varphi}$

$28\frac{\theta r^3}{a^4}\vec{e_r} + 7\frac{r^3}{a^4}\vec{e}_\theta + \frac{1}{z}\vec{e_z}$ (a) $\left(z + y + \frac{yz}{a}\right)\vec{e_x} + \left(x + z + \frac{xz}{a}\right)\vec{e_y}$ $+\left(x + y + \frac{yx}{a}\right)\vec{e_z}$ $\vec{0}$ $2\vec{e_\varphi}$

$-4\theta\vec{e_z}$ $3r^2\begin{pmatrix}\sin^3(\theta-\varphi)\\ \cos(\theta-\varphi)\sin^2(\theta-\varphi)\\ -\frac{1}{\sin\theta}\cos(\theta-\varphi)\sin^2(\theta-\varphi)\end{pmatrix}$ 2 (b) (c) $-3\frac{r}{a} + 1$

(b) (c) $6x\vec{e_x} + 2a\vec{e_y} - 2a\vec{e_z}$ 0 $r\sqrt{\varphi}\begin{pmatrix}2\sin\theta\\ \cos\theta\\ \frac{1}{2\varphi}\end{pmatrix}$ (b) $\frac{8x^2}{y}(3x - y)\vec{e_z}$

$\begin{pmatrix}\frac{2y}{a}\\ 2\\ 6 - \frac{b^2}{z^2}\end{pmatrix}$ (b) (a) $-\frac{z\sin(\theta)}{r^2}\vec{e_r} + \frac{z\cos\theta}{r^2}\vec{e}_\theta + \frac{\sin(\theta)}{r}\vec{e_z}$ (a) 0

$2\vec{e_y}$ (b) $6 - \frac{b^2}{z^2}$ (a) $1/\tan(\theta)$ $\frac{r}{\sqrt{r^2 - a^2}}\vec{e_r}$ $6x + 2a - 2b$ 3

$2\vec{e_z}$ $x^2\vec{e_x} - 2xy(\vec{e_y} + \vec{e_z}) - x^2\vec{e_z}.$ 2 $16xy\vec{e_x} + \left(8x^2 - \frac{6a^4}{y^2}\right)\vec{e_y} - 5b^2\vec{e_z}$

$(2xy + z^2)\vec{e_x} + (2yz + x^2)\vec{e_y}$ $+(2xz + y^2)\vec{e_z}$ (d) 3 $2\sqrt{17}$ (d) $x(2y - x)$

(d) (b) (c) $\frac{r}{2\sqrt{\varphi}}\vec{e_\theta} - r\sqrt{\varphi}\cos(\theta)\vec{e_\varphi}$ $3 + \frac{4a\cos\theta}{r} - \frac{6}{\varphi^2\sin\theta}\frac{a}{r}$

$\frac{1}{r\cos^2\theta}\vec{e_\theta}$ (a) $2y\vec{e_x} + 2x\vec{e_y} + 4\frac{a^2}{b}\mathrm{e}^{z/(2b)}\vec{e_z}$ 16 $16xy - \frac{6x^4}{y^2}$

▶ Réponses et corrigés page 280

Loi du frottement solide

Avant toute chose

Entraînement 2.1 — Les mots justes.

Pour chacune des situations exposées, indiquer si, entre les deux solides en jeu, il y a :

(a) adhérence (b) roulement (c) glissement

a) Une brosse est frottée contre un tableau à feutre pour l'effacer .....

b) Une roue d'un vélo se déplace en ligne droite sur une route .....

c) Une roue d'une voiture dérape dans un virage sur lequel elle s'engage trop vite .....

d) Un livre est posé sur le tapis roulant d'une caisse de supermarché .....

Vitesse de glissement

Entraînement 2.2 — Bagages sur un tapis roulant.

Étudions l'évolution de différents bagages placés sur un tapis roulant dans le référentiel $\mathcal{R}_0$ lié au sol. La vitesse du tapis roulant s'écrit :

$$\vec{v}(\text{tapis})_{\mathcal{R}_0} = v_0\,\vec{u}_x \quad \text{avec} \quad v_0 = 3{,}6\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}.$$

La vitesse et la quantité de mouvement des différents bagages en translation sur ce tapis s'écrivent :

$$\vec{v}(\text{bagage})_{\mathcal{R}_0} = v_1\vec{u_x}\,;$$

$$\vec{p}(\text{bagage})_{\mathcal{R}_0} = p_1\vec{u_x}.$$

Rappelons la définition de la vitesse de glissement à l'instant t d'un bagage sur le tapis :

$$\vec{v}_{\text{glissement}}(\text{bagage/tapis}) = (v_1 - v_0)\vec{u_x}.$$

Les affirmations suivantes sont-elles « vraies » ou « fausses » ?

a) La valise de Sam ($m = 20\,\text{kg}$ et $v_1 = 1\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$) glisse sur le tapis roulant .....

b) La valise de Paul ($m = 15\,\text{kg}$ et $p_1 = 8{,}0\,\text{N}\cdot\text{s}$) glisse sur le tapis roulant .....

c) Le sac d'Assia ($m = 8\,\text{kg}$ et $v_1 = -1{,}0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$) ne glisse pas sur le tapis roulant .....

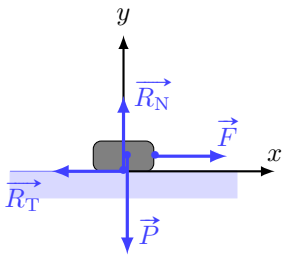
Phase d'adhérence et limite de glissement

Entraînement 2.3 — La bonne relation.

Un solide immobile sur le sol parfaitement horizontal subit une force de frottement tangentielle (colinéaire à l'axe (Ox)) lui permettant d'être à la limite de glissement. Ainsi, nous pouvons écrire la relation suivante :

$$\left\|\overrightarrow{R_\mathrm{T}}\right\| = \mu_\mathrm{s}\left\|\overrightarrow{R_\mathrm{N}}\right\|.$$

Le bilan des forces sur ce solide conduit à considérer le poids du solide $\vec{P}$, la réaction normale du sol sur le solide $\vec{R}_\mathrm{N}$, la réaction tangentielle du sol sur le solide $\vec{R}_\mathrm{T}$ et la force de frottement tangentielle $\vec{F}$. La situation est représentée sur le schéma ci-dessous.



Sachant que le solide est de masse $m = 1\,\mathrm{kg}$, que l'intensité de pesanteur vaut $g = 10\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, que le coefficient de frottement statique vaut $\mu_\mathrm{s} = 0{,}5$, identifier la seule relation correcte.

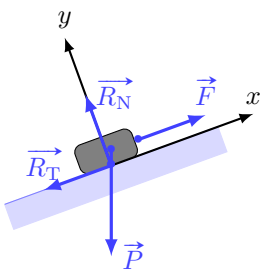
(a) $\overrightarrow{R_\mathrm{T}} \cdot \overrightarrow{e_x} = -5\,\mathrm{N}$
(b) $\overrightarrow{R_\mathrm{N}} \cdot \overrightarrow{e_y} = 5\,\mathrm{N}$
(c) $\vec{F} \cdot \overrightarrow{e_y} = 10\,\mathrm{N}$
(d) $\overrightarrow{R_\mathrm{T}} \cdot \overrightarrow{e_x} = -10\,\mathrm{N}$

.....

Entraînement 2.4 — Quelle force appliquer ?

Un solide de masse $m = 350\,\mathrm{g}$ est placé sur un plan incliné faisant un angle $\alpha = 20\,°$ par rapport au plan horizontal.
La force $\vec{F} = F \cdot \overrightarrow{e_x}$ permet de maintenir le solide à la limite de glissement vers le haut. Ainsi, nous pouvons écrire la relation suivante :

$$\left\|\overrightarrow{R_\mathrm{T}}\right\| = \mu_\mathrm{s}\left\|\overrightarrow{R_\mathrm{N}}\right\|,$$



avec le coefficient de frottement statique $\mu_\mathrm{s} = 0{,}5$ et $\vec{R} = -R_\mathrm{T}\overrightarrow{e_x} + R_\mathrm{N}\overrightarrow{e_y}$ ($R_\mathrm{T} > 0$ et $R_\mathrm{N} > 0$).
On prend $g = 10\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

a) Quelle est l'expression de F ?

(a) $mg\cos(\alpha)(1 - \mu_\mathrm{s}\tan(\alpha))$
(b) $mg\cos(\alpha)(\tan(\alpha) - \mu_\mathrm{s})$
(c) $mg\cos(\alpha)(1 + \mu_\mathrm{s}\tan(\alpha))$
(d) $mg\cos(\alpha)(\mu_\mathrm{s} + \tan(\alpha))$

.....

b) Calculer F .....

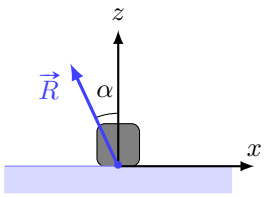
Entraînement 2.5 — Fixe ou mobile ?

Un cube de masse $m = 200\,\text{g}$ est posé sur une table fixe dans le référentiel d'étude. Un opérateur exerce une action mécanique sur le cube afin de le mettre en mouvement.

Y parviendra-t-il ?

Afin de répondre à cette question, nous allons seulement exprimer la force de réaction modélisant l'action de la table sur le cube :

$$\vec{R} = \vec{T} + \vec{N} = T\,\vec{e_x} + N\,\vec{e_z}.$$



D'après la loi de Coulomb, le cube ne glissera pas sur son support si :

$$\left\|\vec{T}\right\| < \mu_\text{s}\left\|\vec{N}\right\|,$$

avec $\mu_\text{s} = 0{,}6$ le coefficient statique de frottement.
Des mesures donnent $\left\|\vec{R}\right\| = 3{,}5\,\text{N}$ avec $\alpha = 25°$.

a) Calculer la composante tangentielle T de $\vec{R}$ .....

b) Calculer la composante normale N de $\vec{R}$ .....

c) Vrai ou faux ? Le cube glisse sur la table .....

Entraînement 2.6 — Cône de frottement.

L'ouverture du cône de frottement d'un contact solide/solide, noté α, dépend du coefficient de frottement statique μ_s et des normes maximales R_N et R_T des réactions normale et tangentielle où aucun glissement ne se produit. La relation exacte est la suivante :

$$\mu_\text{s} = \tan(\alpha) = \frac{R_\text{T}}{R_\text{N}}.$$

On considère différents couples de solides et, pour chaque couple, on mesure une grandeur différente. Quelle est la situation de plus grande ouverture de cône de frottement ?

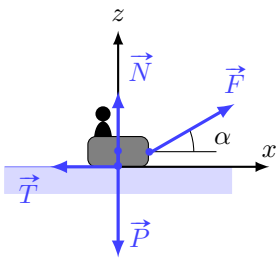
(a) $R_\text{N} = 2R_\text{T}$
(b) $\alpha = 30°$
(c) $\mu_\text{s} = 0{,}8$
(d) $2\alpha = \dfrac{\pi}{4}$

.....

Phase de glissement

Entraînement 2.7 — Une luge tractée (I).

Un enfant assis dans une luge est tracté par un adulte. L'ensemble {enfant + luge} de masse m évolue suivant la direction (Ox) et est soumis à l'ensemble des forces représentées sur le schéma ci-contre.



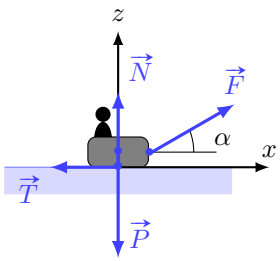
Comment écrire la réaction $\vec{R}$ totale du sol sur la luge ?

(a) $\vec{R} = \vec{N}$
(b) $\vec{R} = \vec{T}$
(c) $\vec{R} = \vec{N} - \vec{T}$
(d) $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$

.....

Entraînement 2.8 — Une luge tractée (II).

Un enfant assis dans une luge est tracté par un adulte. L'ensemble {enfant + luge} de masse m évolue suivant la direction (Ox) et est soumis à l'ensemble des forces représentées sur le schéma ci-contre.
Comme la luge glisse sur la neige, la loi de Coulomb impose :



$$\left\|\vec{T}\right\| = f_\mathrm{d}\left\|\vec{N}\right\|,$$

avec f_d le coefficient de frottement dynamique neige/luge.
Le bilan mécanique permet d'écrire les deux relations suivantes :

$$\begin{cases} N = mg - F\sin(\alpha) & (1) \\ m\ddot{x} = T + F\cos(\alpha) & (2), \end{cases}$$

avec $T = \vec{R}\cdot\vec{e_x}$ et $N = \vec{R}\cdot\vec{e_z}$.

a) Exprimer T en fonction de f_d, m, g, F et α .....

b) Quelle est alors l'équation différentielle régissant le mouvement ?

(a) $\ddot{x} = -f_\mathrm{d}g + \dfrac{F}{m}(\cos(\alpha) + f_\mathrm{d}\sin(\alpha))$
(b) $\ddot{x} = f_\mathrm{d}g + \dfrac{F}{m}(\cos(\alpha) + f_\mathrm{d}\sin(\alpha))$
(c) $\ddot{x} = f_\mathrm{d}g + \dfrac{F}{m}(\cos(\alpha) - f_\mathrm{d}\sin(\alpha))$
(d) $\ddot{x} = -f_\mathrm{d}g + \dfrac{F}{m}(\cos(\alpha) - f_\mathrm{d}\sin(\alpha))$

.....

c) Que devient l'équation du mouvement pour $\alpha = 0$? .....

Entraînement 2.9 — Fin de la phase de glissement.

Un solide de masse m, lié à un ressort, glisse sur un support horizontal et fixe dans le référentiel d'étude. L'équation différentielle régissant l'évolution de ce solide, lorsque ce dernier se déplace suivant les x croissants, s'écrit :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = -fg,$$

avec $m = 300\,\text{g}$, $k = 20\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$, $f = 0{,}2$ et $g = 10\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

À l'instant initial, le solide a une vitesse nulle et sa position est repérée par $x(t=0) = x_0 = -9{,}0\,\text{cm}$. Nous pourrons poser $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

a) Quelle expression de $x(t)$ est correcte ?

(a) $\left(x_0 + \dfrac{fmg}{k}\right)\cos(\omega_0 t) - \dfrac{fmg}{k}$

(b) $\left(x_0 - \dfrac{fmg}{k}\right)\cos(\omega_0 t) + \dfrac{fmg}{k}$

(c) $x_0\cos(\omega_0 t)$

(d) $-\dfrac{fmg}{k} + x_0\cos(\omega_0 t)$

.....

b) Quelle est la vitesse du solide ?

(a) $-\left(x_0 + \dfrac{fmg}{k}\right)\omega_0\sin(\omega_0 t)\overrightarrow{u_x}$

(b) $-\left(x_0 - \dfrac{fmg}{k}\right)\omega_0\sin(\omega_0 t)\overrightarrow{u_x}$

(c) $-x_0\omega_0\sin(\omega_0 t)\overrightarrow{u_x}$

(d) $x_0\omega_0\sin(\omega_0 t)\overrightarrow{u_x}$

.....

c) Déterminer l'expression littérale de la vitesse de glissement du solide sur son support.

.....

d) À quel instant t_1 (en ms) la phase de glissement s'arrête-t-elle ? .....

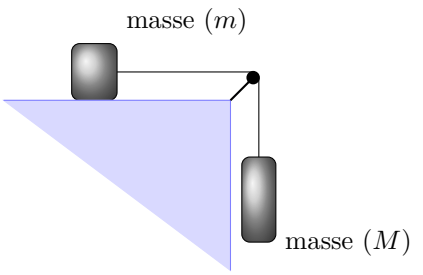
e) Déterminer la position x_1 (en cm) du solide à l'instant t_1 .....

Entraînement 2.10 — Calcul du coefficient de frottement.

La masse m glisse sur une table, entraînée par la masse $M = \dfrac{4}{3}m$. Lorsque les deux masses se sont déplacées d'une distance $h = 15\,\text{cm}$, leur vitesse est $v = 82\,\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$.
Une étude énergétique conduit à la relation suivante :

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mv^2 = Mgh - f_\text{d}mgh,$$

avec $g = 10\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.



a) Déterminer l'expression de f_d en fonction de g, h et v .....

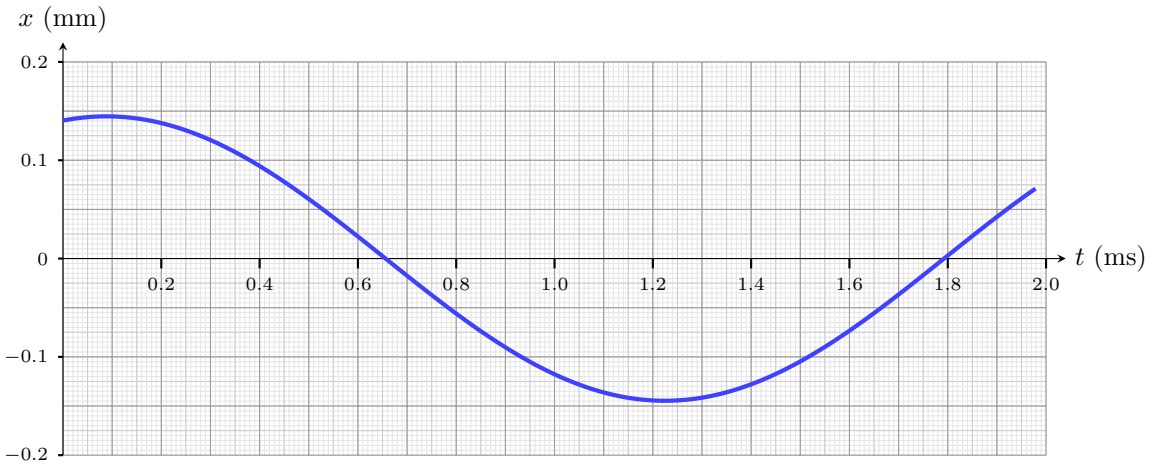
b) Déterminer la valeur numérique de f_d .....

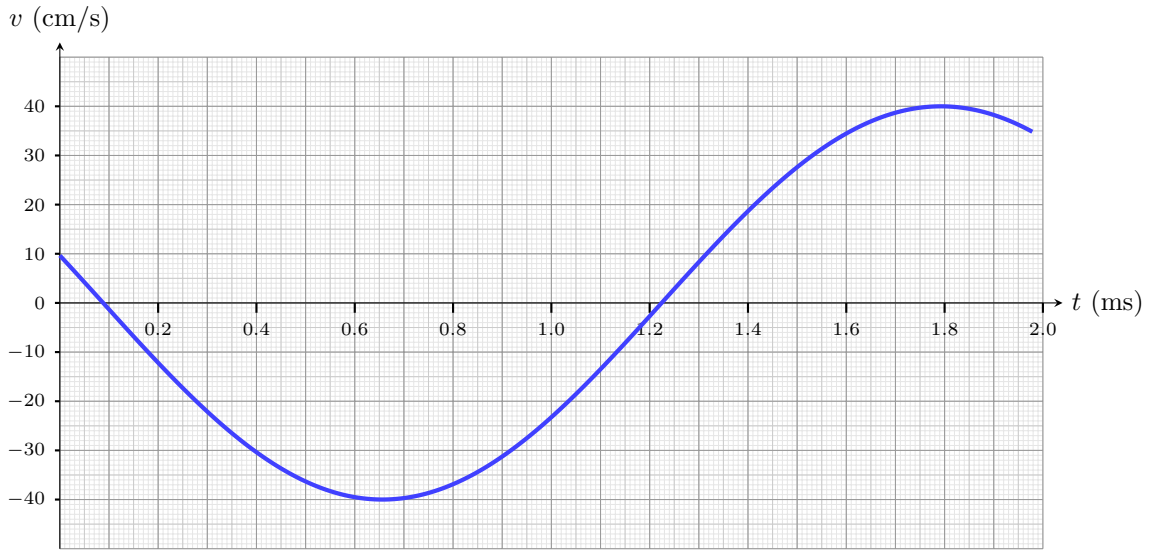
Entraînement 2.11 — Palet glissant sur un tapis roulant.

Un palet de centre d'inertie G et de masse m glisse sur un tapis roulant. La position et la vitesse de ce palet par rapport au sol fixe sont données respectivement par $\overrightarrow{OG} = x(t)\vec{e_x}$ et $\vec{v}(G,t) = v(t)\vec{e_x}$.

La vitesse du tapis par rapport au sol est $\vec{v}_{\text{tapis}} = v_0\vec{e_x}$ tel que $v_0 = 1\,260\,\text{m}\cdot\text{h}^{-1}$.

Les courbes suivantes donnent l'évolution de la position et de la vitesse du palet au cours du temps.





a) Quelle est l'expression de la vitesse de glissement du palet sur le tapis ?

(a) $(v(t) - v_0)\vec{e_x}$

(b) $(v(t) + v_0)\vec{e_x}$

(c) $(v_0 - v(t))\vec{e_x}$

.....

b) Déterminer la date t_1 pour laquelle le glissement s'arrête .....

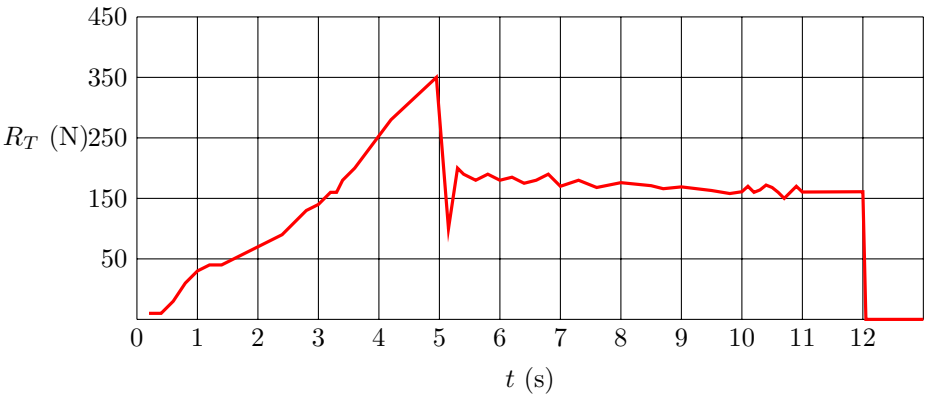
c) Déterminer la position du palet x_1 en µm à la date t_1 .....

De l'adhérence au glissement

Entraînement 2.12 — Déplacement d'une armoire.

Une armoire, trop lourde pour être portée, est déplacée dans une pièce par glissement sur le sol qui est parfaitement horizontal.
Au cours de la manœuvre, on enregistre l'évolution au cours du temps de la norme de $\vec{R}_{\mathrm{T}}$.

Le vecteur $\vec{R}_{\mathrm{T}}$ est la composante tangentielle de la force exercée par le sol sur l'armoire. Nous noterons R_{T} sa norme.



Déterminer par exploitation graphique :

a) L'instant où démarre la phase de glissement .....

b) La durée pendant laquelle l'armoire glisse .....

c) La force tangentielle maximale en phase statique .....

d) La force tangentielle en phase dynamique .....

On cherche à exploiter ces données pour évaluer les coefficients de frottement statique et dynamique sol/armoire, que l'on note respectivement μ_{s} et μ_{d}. On estime que l'armoire pèse entre 70 kg et 90 kg et on rappelle les lois de Coulomb : $R_{\mathrm{T}} \leqslant \mu_{\mathrm{s}} R_{\mathrm{N}}$ en phase d'adhérence ; $R_{\mathrm{T}} = \mu_{\mathrm{d}} R_{\mathrm{N}}$ en phase de glissement.

e) Quel est l'ordre de grandeur de μ_{s} le plus probable ?

(a) 0,2 (b) 0,5 (c) 0,9

.....

f) Quel est l'ordre de grandeur de μ_{d} le plus probable ?

(a) 0,2 (b) 0,5 (c) 0,9

.....

Réponses mélangées

(a) $f_{\mathrm{d}}(F\sin(\alpha)-mg)$ (d) $\frac{1}{6}\left(8-7\frac{v^2}{gh}\right)$ $-75\,\mu\mathrm{m}$ $1{,}6\,\mathrm{ms}$ $175\,\mathrm{N}$ Faux

$3{,}2\,\mathrm{N}$ (c) $5\,\mathrm{s}$ $\ddot{x}=-f_{\mathrm{d}}g+\frac{F}{m}$ $7\,\mathrm{s}$ (b) $-\left(x_0+\frac{fmg}{k}\right)\omega_0\sin(\omega_0 t)\vec{u_x}$

Faux (a) 0,8 (c) $384\,\mathrm{ms}$ (a) (c) Faux (b) $350\,\mathrm{N}$

(a) $-1{,}5\,\mathrm{N}$ $2{,}8\,\mathrm{N}$ Vrai $3{,}0\,\mathrm{cm}$ (a) (a) (d) (a)

▶ Réponses et corrigés page 289

Électrostatique

Prérequis
Repérages cartésien, cylindrique et sphérique.
Intégrales curvilignes, de surface et de volume.
Champs scalaires et vectoriels. Gradient. Théorème de Gauss.

Constantes utiles

→ Charge élémentaire : $e = 1{,}60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$

→ Permittivité diélectrique du vide : $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F \cdot m^{-1}}$

Distributions de charge : symétries, invariances, charge totale

Entraînement 3.1 — Calculs intégraux de longueurs, surfaces et volumes.

On rappelle les déplacements élémentaires dans chacun des trois systèmes de coordonnées :

- en coordonnées cartésiennes : $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mathrm{d}x\,\vec{e}_x + \mathrm{d}y\,\vec{e}_y + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z$
- en coordonnées cylindriques (ou cylindro-polaires) : $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z$
- en coordonnées sphériques : $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + r\sin(\theta)\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{e}_\varphi$

a) Exprimer l'élément de circonférence $\mathrm{d}\mathcal{C}$ d'un disque de rayon R .....

b) Grâce à un calcul intégral, retrouver la circonférence d'un cercle de rayon R.

.....

c) En coordonnées cylindriques, exprimer l'aire $\mathrm{d}\mathcal{S}$ de l'élément de surface orthogonal à $\vec{e}_z$.

.....

d) Grâce à un calcul d'intégrale, retrouver la surface d'un disque de rayon R ....

e) Grâce à un calcul d'intégrale, retrouver le volume d'une boule de rayon R ....

Entraînement 3.2 — Charge totale d'une distribution linéique.

Dans chacun des cas suivants, déterminer la charge totale des distributions linéiques suivantes à l'aide de la relation : $Q = \int \lambda(\mathrm{M})\,\mathrm{d}\ell_\mathrm{M}$.

a) Pour une tige de longueur ℓ chargée avec une densité linéique de charge uniforme λ_0.

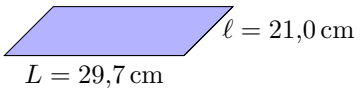
.....

b) Pour un anneau de rayon a dont la densité linéique de charge, non uniforme, est $\lambda(\mathrm{M}) = q_0\theta/a$ avec q_0 une constante et θ l'angle qui repère le point M sur l'anneau.

.....

Entraînement 3.3 — Feuille d'aluminium chargée.

Soit une feuille d'aluminium de format A4 à laquelle 1 000 électrons ont été arrachés. La feuille porte alors la charge électrique Q.



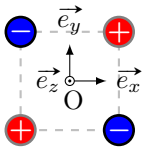
a) Exprimer la charge Q en fonction de la charge électrique élémentaire e .....

b) Exprimer la surface S de la feuille en fonction des longueurs L et ℓ .....

c) En déduire la valeur de la charge surfacique moyenne $\sigma = Q/S$ portée par la feuille ....

Entraînement 3.4 — Quadrupôle électrostatique.

On considère la distribution de charges ci-dessous.



a) Quels sont les trois plans de symétrie de la distribution ?

.....

b) Quels sont les deux plans d'antisymétrie de la distribution ?

.....

Entraînement 3.5 — Autour d'une sphère chargée.

Tous les résultats devront être donnés en écriture scientifique.

a) Quel est le volume en m^3 d'une sphère de rayon $R = 25\,\text{cm}$? .....

b) Que vaut la charge totale de la sphère, en coulombs, si celle-ci est chargée avec une densité volumique uniforme de $\rho_0 = 50{,}0\,\text{nC} \cdot \text{m}^{-3}$?

.....

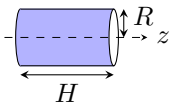
c) Quelle est l'aire de la surface de la sphère en m^2 ? .....

d) Que vaut la charge totale de la sphère, en coulombs, si celle-ci est chargée avec une densité surfacique uniforme $\sigma = 8\,\mu\text{C} \cdot \text{m}^{-2}$?

.....

Entraînement 3.6 — Tube chargé localement.

Un tube conducteur d'axe (Oz) possède une densité surfacique de charge $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos(\theta)$, avec σ_0 une constante et θ l'angle des coordonnées cylindriques (r, θ, z).



a) Comment s'exprime l'aire d'un élément de surface $\mathrm{d}S$ du tube ?

(a) $\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z$ (b) $R\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$ (c) $R\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$ (d) $R\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$

.....

b) Comment s'exprime la charge totale Q portée par le tube ?

(a) $Q = \displaystyle\int_{r=0}^{R}\int_{z=0}^{H} \sigma(\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z$

(b) $Q = \displaystyle\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{H} \sigma(\theta) R \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$

(c) $Q = \displaystyle\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{H} \sigma(\theta) R\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$

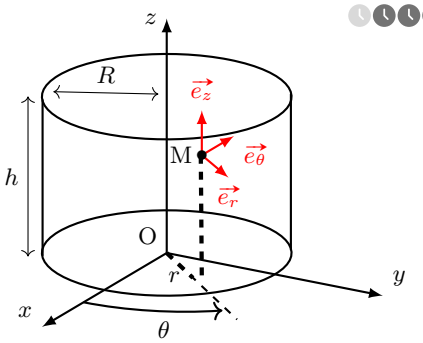
(d) $Q = \displaystyle\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi} \sigma(\theta) R\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$

.....

c) À l'aide du calcul d'une intégrale, déterminer la charge totale Q .....

Entraînement 3.7 — Autour d'un cylindre chargé.

Soit un câble cylindrique d'axe (Oz), de hauteur h et de rayon R, doté d'une densité volumique de charge ρ.



a) Laquelle de ces formules permet de calculer l'aire de la surface latérale du cylindre ?

(a) $\pi R^2 h$ (b) $2\pi R h$ (c) $4\pi R^2 h$ (d) $4\pi R h$

.....

b) Sans négliger les effets de bords, déterminer les invariances de cette distribution de charge si,

$$\text{pour } 0 \leqslant z \leqslant h,\ \rho = \rho_0 \left(\frac{r}{R}\right)^3,$$

avec ρ_0 une constante homogène à une charge volumique.

(a) invariance par translation parallèlement à $\vec{e_x}$ (c) invariance par translation parallèlement à $\vec{e_z}$

(b) invariance par rotation autour de l'axe (Oz) (d) aucune invariance

.....

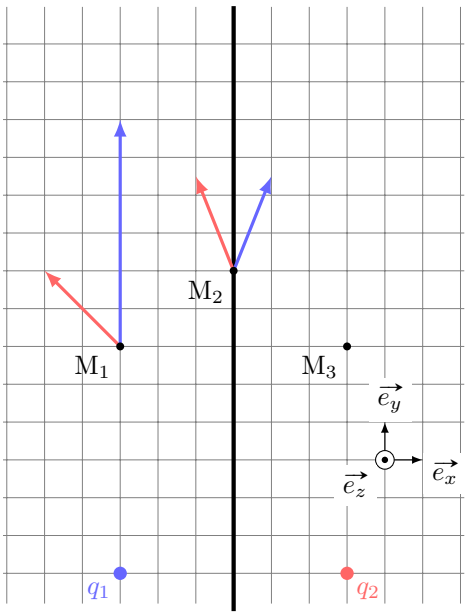
c) Même question si, pour $0 \leqslant z \leqslant h$, $\rho = \rho_0 \left(\frac{r}{R}\right)^3 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ .....

d) Même question si le cylindre est de hauteur infinie avec $\rho = \rho_0 \left(\frac{r}{R}\right)^3$ .....

De la distribution de charge au champ électrostatique

Entraînement 3.8 — Superpositions et symétries.

Sur le schéma ci-contre figurent, en M_1 et M_2, les champs électrostatiques $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ respectivement générés par les deux charges $q_1 = +e$ et $q_2 = +e$.



a) Exprimer le champ électrostatique total $\vec{E}$ au point M_1 en fonction des vecteurs de la base.

.....

b) Exprimer le champ électrostatique total $\vec{E}$ au point M_2 en fonction des vecteurs de la base.

.....

Le plan $(M_2, \vec{e_y}, \vec{e_z})$, nommé $\mathcal{P}$, est un plan de symétrie de la distribution de charge.

c) Quelles propositions sont correctes ?

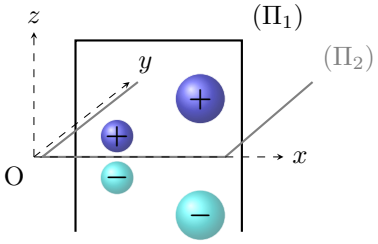
(a) $\vec{E}(M_3) = -2\vec{e_x} + 8\vec{e_y}$ (c) $\vec{E}(M_2) \in \mathcal{P}$

(b) $\vec{E}(M_3) = 2\vec{e_x} + 8\vec{e_y}$ (d) $\vec{E}(M_2) \perp \mathcal{P}$

.....

Entraînement 3.9 — Symétrie d'une distribution volumique de charge.

Le champ électrostatique créé par la distribution volumique ci-dessous est noté $\vec{E}$. Le plan (Π_1) est un plan de symétrie de la distribution. Le plan (Π_2) est un plan d'antisymétrie de la distribution.



On rappelle qu'en tout point d'un plan de symétrie (resp. antisymétrie) de la distribution, le champ électrostatique appartient (resp. est perpendiculaire) à ce plan.

a) Quel vecteur unitaire est normal au plan (Π_1) ? .....

b) Quel vecteur unitaire est normal au plan (Π_2) ? .....

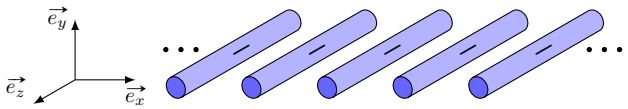
c) En un point $M(x, 0, 0)$ de l'axe (Ox), identifier l'expression correcte parmi celles proposées.

(a) $\vec{E}(M) = \vec{0}$ (b) $\vec{E}(M) = E(M)\vec{e_x}$ (c) $\vec{E}(M) = E(M)\vec{e_y}$ (d) $\vec{E}(M) = E(M)\vec{e_z}$

.....

Entraînement 3.10 — Invariances d'une distribution volumique de charge.

La grille infinie représentée ci-dessous est constituée de tiges infinies selon $\vec{e_z}$ et est chargée uniformément négativement.



Soit M un point de l'espace repéré par (x, y, z).

Sachant que les composantes du champ électrique $\vec{E}$ possèdent les mêmes invariances que celles de la distribution de charges, lesquelles de ces expressions sont valides si l'étude des symétries a déjà été menée ?

(a) $\vec{E}(x,y,z) = E_x(y)\vec{e_x} + E_y(y)\vec{e_y}$

(b) $\vec{E}(x,y,z) = E_x(x,y)\vec{e_x} + E_y(x,y)\vec{e_y}$

(c) $\vec{E}(x,y,z) = E_x(x,y) + E_y(x,y)$

(d) $\|\vec{E}\|(x,y,z) = \|\vec{E}\|(x,y,0)$

.....

Entraînement 3.11 — Homogénéités.

Dans les expressions suivantes, ρ, σ et λ sont des densités de charge volumique, surfacique et linéique. Le potentiel électrostatique est noté V, et a, ℓ, h et r sont des longueurs.

a) Parmi les expressions suivantes, identifier celles qui sont homogènes à une charge électrique.

(a) $4\pi a^2 \rho$ (b) $\lambda \pi a^2$ (c) $\rho \pi a^2 h$ (d) $\dfrac{\sigma \ell^3}{a}$

.....

b) Parmi les expressions suivantes, identifier celles qui sont homogènes à un champ électrostatique.

(a) $\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ (b) $(V_2 - V_1)e$ (c) $\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ (d) $\dfrac{\rho r}{\varepsilon_0}$

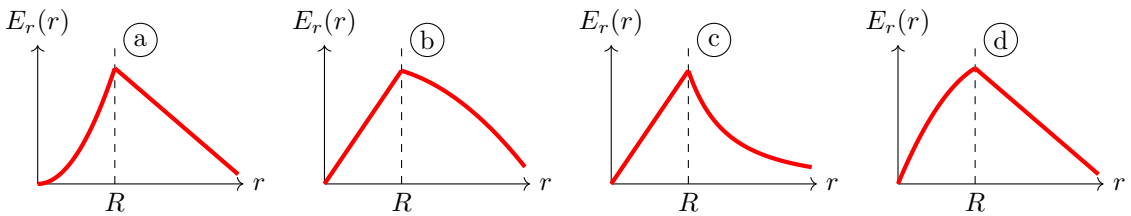
.....

Entraînement 3.12 — Tracé d'une composante du champ.

La composante radiale du champ électrostatique créé au point M par une sphère de centre O, de rayon R, dotée d'une densité volumique de charge ρ_0, est donnée en fonction de la distance $r = \text{OM}$ par

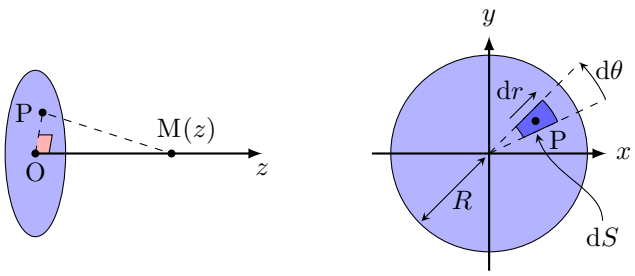
$$E_r(r < R) = \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0} \qquad \text{et} \qquad E_r(r > R) = \frac{3\rho_0 R^3}{\varepsilon_0 r^2}.$$

Laquelle de ces courbes décrit l'évolution de E_r en fonction de r ? .....



Entraînement 3.13 — Calcul d'un champ électrostatique par intégration.

Un disque, d'axe (Oz) et de rayon R, possède une charge surfacique uniforme σ. On note P un point du disque tandis que M est un point de l'espace qui appartient à l'axe (Oz).



a) Comment s'exprime l'aire élémentaire dS centrée sur P(r,θ) ?

(a) d$S = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z$
(b) d$S = r\sin(\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$
(c) d$S = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$
(d) d$S = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$

b) Quelle est l'expression du produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{PM}} \cdot \vec{e}_z$?

(a) $\overrightarrow{\mathrm{PM}} \cdot \vec{e}_z = \mathrm{PM}$
(b) $\overrightarrow{\mathrm{PM}} \cdot \vec{e}_z = \mathrm{d}z$
(c) $\overrightarrow{\mathrm{PM}} \cdot \vec{e}_z = z$
(d) $\overrightarrow{\mathrm{PM}} \cdot \vec{e}_z = r$

c) Quelle est l'expression de la distance $\mathrm{PM} = \left\|\overrightarrow{\mathrm{PM}}\right\|$?

(a) $\mathrm{PM} = z^2 + r^2$
(b) $\mathrm{PM} = \sqrt{z^2 + r^2}$
(c) $\mathrm{PM} = \sqrt{\mathrm{d}z^2 + \mathrm{d}r^2}$
(d) $\mathrm{PM} = \mathrm{d}r + \mathrm{d}z$

Le principe de superposition énonce que le champ électrostatique en M est la somme des champs électrostatiques créés par chaque élément de surface d'aire dS et de charge d$Q = \sigma\,\mathrm{d}S$. L'expression du champ créé par une source ponctuelle permet alors d'exprimer la composante axiale $E_z = \vec{E} \cdot \vec{e}_z$ du champ créé par le disque sur l'axe (Oz) par :

$$E_z = \iint_P \frac{\sigma\,\mathrm{d}S}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\overrightarrow{\mathrm{PM}} \cdot \vec{e}_z}{\mathrm{PM}^3} = \int_{r=0}^{r=R} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{\sigma\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0} \frac{z}{(r^2+z^2)^{3/2}}.$$

d) Calculer l'intégrale précédente à l'aide du changement de variable $u = r^2$.

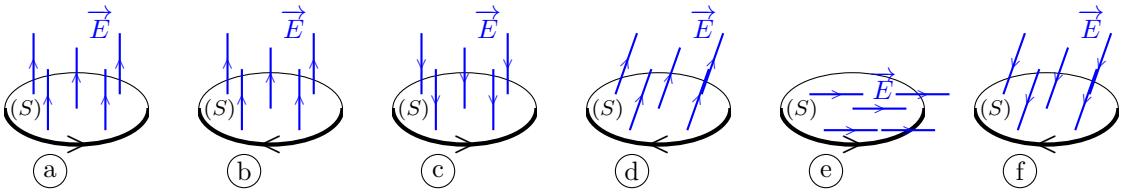
e) Simplifier l'expression obtenue en d) si $z \ll R$ afin de retrouver l'expression du champ créé par un plan infini uniformément chargé.

f) Sachant que $(1+\varepsilon)^\alpha = 1 + \alpha\varepsilon$ à l'ordre 1 en ε quand $\varepsilon \to 0$, simplifier l'expression obtenue en d) si $z \gg R$ afin de retrouver l'expression du champ créé par une charge ponctuelle $Q_0 = \pi R^2 \sigma$.

Flux électrostatique

Entraînement 3.14 — Signe d'un flux électrostatique à travers une surface.

Le flux $\phi = \iint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ du champ électrostatique $\vec{E}$ à travers une surface orientée (S) dépend de l'orientation de cette surface (voir ci-dessous la flèche sur chaque contour).



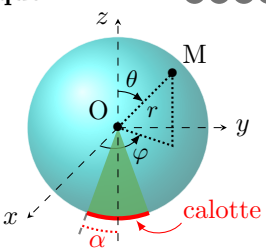
a) Quels sont les cas pour lesquels $\phi > 0$? .....

b) Que vaut ϕ dans le cas (e) ? .....

Entraînement 3.15 — Flux électrostatique à travers une calotte sphérique.

Une charge ponctuelle q, placée au centre O d'un repère sphérique, crée le champ électrostatique $\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}\vec{e}_r$ avec (r, θ, φ) les coordonnées sphériques du point M.

La calotte sphérique représentée ci-contre (en deux dimensions) est la portion de sphère de rayon R qui intersecte le demi-cône d'axe de révolution (Oz) et de demi-angle $\alpha > 0$.



a) Comment s'exprime un élément de surface $\mathrm{d}S$ de la calotte sphérique ?

(a) $\mathrm{d}S = R^2 \cos(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$
(b) $\mathrm{d}S = R \sin(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$
(c) $\mathrm{d}S = R \cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$
(d) $\mathrm{d}S = R^2 \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$

.....

b) Comment s'exprime le flux ϕ du champ électrostatique $\vec{E}$ à travers la calotte sphérique ?

(a) $\phi = \displaystyle\int_{\varphi=\pi-\alpha}^{\pi+\alpha}\int_{\theta=0}^{2\pi} \vec{E} \cdot R^2 \cos(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_r$
(b) $\phi = \displaystyle\int_{\varphi=-\alpha}^{\alpha}\int_{\theta=0}^{\pi} \vec{E} \cdot R^2 \cos(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_r$
(c) $\phi = \displaystyle\int_{\theta=\pi-\alpha}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \vec{E} \cdot R^2 \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{e}_r$
(d) $\phi = \displaystyle\int_{\theta=-\alpha}^{\alpha}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \vec{E} \cdot R^2 \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{e}_r$

.....

c) Calculer la double intégrale. Écrire le résultat obtenu sous la forme $\phi = K(1 - \cos\alpha)$, avec K une constante à exprimer en fonction de q et ε_0. .....

d) Réaliser l'application numérique de ϕ dans le cas où $\alpha = \pi$ et $q = e$. .....

Entraînement 3.16 — Avec le théorème de Gauss.

Une distribution volumique, de charge volumique inconnue, crée un champ électrostatique dont l'expression en repérage sphérique est $\vec{E}(\mathrm{M}) = E_r\,\vec{e}_r = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2}\left(1+\dfrac{r}{a}\right)\mathrm{e}^{-r/a}\,\vec{e}_r$, où q et a sont des constantes positives.

a) Exprimer le flux électrostatique $\phi(\vec{E})$ à travers une sphère de rayon r en fonction de $E(r)$ et r.

.....

b) Exprimer la charge $Q = \varepsilon_0\phi(\vec{E})$ (théorème de Gauss) située à l'intérieur de la sphère de rayon r.

(a) $\dfrac{q}{\varepsilon_0}\left(1+\dfrac{r}{a}\right)\mathrm{e}^{-r/a}$ (c) $q\left(1+\dfrac{r}{a}\right)\mathrm{e}^{-r/a}$

(b) $q\left(a+\dfrac{r}{a}\right)\mathrm{e}^{-r/a}$ (d) $-q\,\mathrm{e}^{-r/a}$

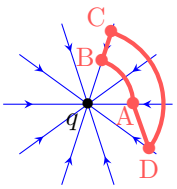
.....

c) Quelles sont les valeurs limites de Q pour $r \to 0$ et $r \to +\infty$? .....

Circulation du champ électrostatique – Potentiel électrostatique

Entraînement 3.17 — Signe d'une circulation électrostatique le long d'un chemin.

Les lignes du champ électrostatique $\vec{E}$ produit par une charge ponctuelle q négative convergent vers cette charge. La circulation $\mathcal{C} = \displaystyle\int \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}$ le long d'un chemin orienté dépend de l'orientation de ce chemin.



Pour chaque chemin orienté, indiquer si la circulation $\mathcal{C}$ est positive, négative ou nulle.

a) A→B ... b) B→C ... c) C→D ... d) D→A ..

Entraînement 3.18 — Orientation du champ au sein d'un condensateur plan.

Le schéma ci-dessous représente un condensateur plan dont les armatures sont portées aux potentiels $V_1 = -6\,\mathrm{V}$ et $V_2 = 3\,\mathrm{V}$. Deux surfaces équipotentielles sont représentées par des lignes en tirets.

a) Donner l'orientation du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$.

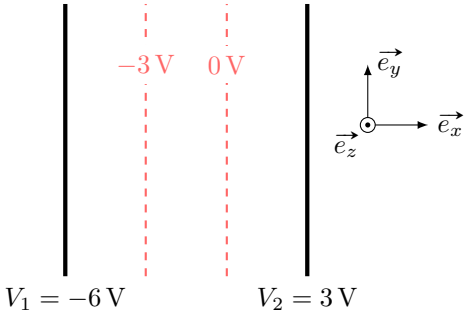
(a) $\vec{e}_x$ (b) $-\vec{e}_y$ (c) $-\vec{e}_x$ (d) $\vec{e}_z$

.....

b) Donner l'orientation du vecteur champ électrostatique $\vec{E}$.

(a) $\vec{e}_x$ (b) $-\vec{e}_y$ (c) $-\vec{e}_x$ (d) $\vec{e}_z$

.....



Entraînement 3.19 — Circulation et différence de potentiel.

Soit un segment orienté allant d'un point A à un point B de coordonnées cartésiennes respectives $(a, 0)$ et $(2a, 2a)$. Le vecteur déplacement élémentaire en repérage cartésien s'exprime comme $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mathrm{d}x\overrightarrow{e_x} + \mathrm{d}y\overrightarrow{e_y}$.

a) Laquelle des relations suivantes est valable le long du segment AB ?

(a) $\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$ (b) $\mathrm{d}y = 2\,\mathrm{d}x$ (c) $\mathrm{d}x = 0$ (d) $\mathrm{d}y = 0$

Soit un champ $\vec{E} = E_0\left(1 - \mathrm{e}^{-x/a}\right)\overrightarrow{e_x}$, avec $a > 0$.

b) Sachant que le champ électrostatique est orienté dans le sens des potentiels électriques V décroissants, déterminer sans calcul lequel de $V(x = a)$ ou $V(x = 2a)$ est le potentiel le plus élevé .....

c) La circulation électrostatique sur le segment AB est reliée à la différence de potentiel électrique par

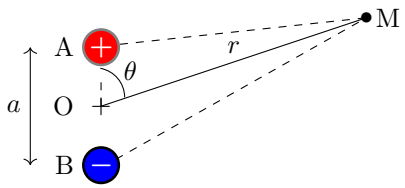
$$V(\mathrm{A}) - V(\mathrm{B}) = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}.$$

Exprimer $V(\mathrm{A}) - V(\mathrm{B})$ en fonction de E_0 et a .....

Entraînement 3.20 — Approximation dipolaire.

Soit un dipôle électrostatique constitué de deux charges ponctuelles opposées $+q$ et $-q$, séparées par une distance $\mathrm{AB} = a$. D'après le principe de superposition, le potentiel créé par ce doublet en un point M s'écrit

$$V(\mathrm{M}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\mathrm{AM}} - \frac{1}{\mathrm{BM}}\right).$$



a) Laquelle de ces propositions donne l'expression de $\mathrm{AM} = \|\overrightarrow{\mathrm{AM}}\|$ au carré en fonction de a et θ ?

(a) $\mathrm{AM}^2 = r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - ar\sin(\theta)$ (c) $\mathrm{AM}^2 = r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - ar\cos(\theta)$

(b) $\mathrm{AM}^2 = r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + ar\cos(\theta)$

On se place dans l'approximation dipolaire, c'est-à-dire loin du doublet de charges : $r \gg a$.

b) Réaliser un développement limité de $1/\mathrm{AM}$ à l'ordre 1 en a/r .....

c) Même question pour $1/\mathrm{BM}$ .....

d) En déduire l'expression du potentiel $V(\mathrm{M})$ dans l'approximation dipolaire.

.....

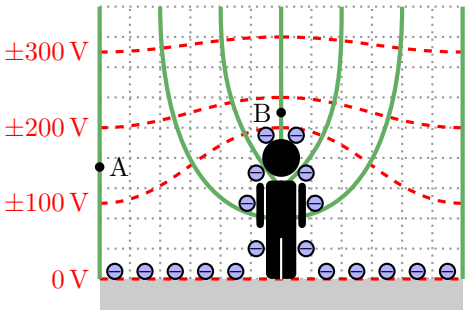
Entraînement 3.21 — Effet de pointe.

Un individu porte une charge négative, ce qui modifie localement les propriétés du champ électrostatique. La figure ci-dessous représente qualitativement les lignes de champ en trait plein tandis que les (surfaces) équipotentielles sont illustrées en pointillés. L'échelle du schéma est 1 division ↔ 40 cm.

a) Comment sont orientées les lignes de champ électrostatique ?

(a) vers l'individu
(b) sortant de l'individu

.....



b) Quel est le signe des valeurs de potentiel électrostatique des équipotentielles représentées ? .....

c) Évaluer l'ordre de grandeur du champ en A ...

d) Indiquer par une analyse de la carte de champ, et sans aucun calcul, laquelle de ces propositions est vraisemblable :

(a) $\vec{E}(\mathrm{B}) > \vec{E}(\mathrm{A})$
(b) $\|\vec{E}(\mathrm{B})\| > \|\vec{E}(\mathrm{A})\|$
(c) $\vec{E}(\mathrm{B}) = \vec{E}(\mathrm{A})$
(d) $\|\vec{E}(\mathrm{B})\| < \|\vec{E}(\mathrm{A})\|$

.....

Toujours plus d'électrostatique

Entraînement 3.22 — Charge totale et charge moyenne.

La charge totale d'une distribution occupant un volume V s'exprime comme $Q = \iiint_{(V)} \rho \, \mathrm{d}V$ avec ρ la charge volumique et $\mathrm{d}V$ le volume élémentaire dont les expressions en repérages cartésien, cylindrique et sphérique sont respectivement $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, $\mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$ et $\mathrm{d}V = r^2 \sin(\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$.

Déterminer la charge totale et la charge volumique moyenne $\rho_\mathrm{m} = Q/V$ des distributions ci-dessous.

On notera que ρ_0 est une constante homogène à une charge volumique.

a) Un pavé, d'épaisseur $2H$ selon la direction $\vec{e_z}$ ($-H \leqslant z \leqslant +H$) et de base d'aire $\mathcal{A}$ a une charge volumique $\rho(x,y,z) = \rho_0\left(1 - \dfrac{z^2}{H^2}\right)$.

.....

b) Un cylindre, de rayon R et de hauteur H, a une charge volumique $\rho(r,\theta,z) = \rho_0\left(1 - \dfrac{r^2}{R^2}\right)$.

.....

c) L'espace (infini) a une charge volumique $\rho(r,\theta,\varphi) = \rho_0 \dfrac{R^2}{r^2} \exp\left(-\dfrac{r}{R}\right)$ où R est une constante homogène à une distance.

.....

Entraînement 3.23 — Analyse dimensionnelle.

Laquelle de ces expressions n'est pas homogène à un potentiel électrostatique V (ou une tension U) si C est une capacité de condensateur, q une charge électrique, T une température, R la constante des gaz parfaits, $\mathcal{N}_\text{A}$ la constante d'Avogadro, E_z un champ électrostatique et d une distance ?

(a) $U = Cq$ (b) $V = RT/q\mathcal{N}_\text{A}$ (c) $U = E_z d$

Entraînement 3.24 — Calcul de divergence de champ électrostatique.

Le champ électrostatique et sa divergence en repérage cylindrique sont respectivement

$$\vec{E} = E_r\vec{e_r} + E_\theta\vec{e_\theta} + E_z\vec{e_z} \quad \text{et} \quad \operatorname{div}\vec{E} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rE_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\,.$$

Exprimer la divergence du champ $\vec{E_1} = \dfrac{\alpha}{r}\vec{e_r}$ avec α une constante .....

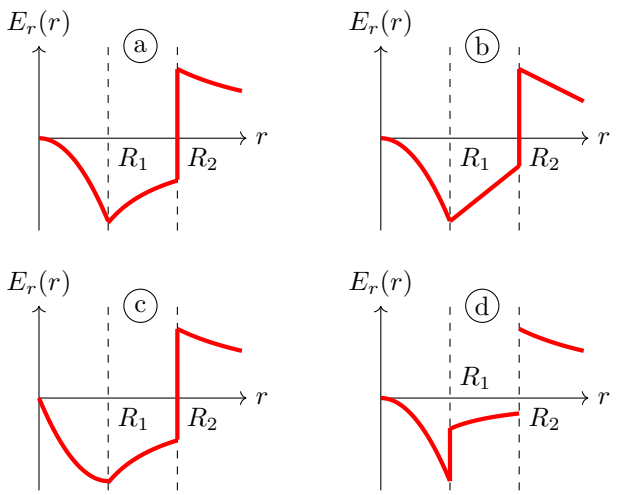
Entraînement 3.25 — Tracé d'une composante du champ – *Bis repetita*.

Une distribution de charge à symétrie cylindrique, d'axe $(\text{O}z)$, de rayons caractéristiques R_1 et R_2, produit en un point de coordonnée radiale r un champ électrostatique de composante radiale donnée par

$$\begin{cases} E_r(r < R_1) = -\dfrac{\alpha r^2}{3\varepsilon_0} \\ E_r(R_1 < r < R_2) = -\dfrac{\alpha R_1^3}{3\varepsilon_0 r} \\ E_r(r > R_2) = \dfrac{1}{\varepsilon_0 r}\left(-\dfrac{\alpha R_1^3}{3} + \sigma R_2\right), \end{cases}$$

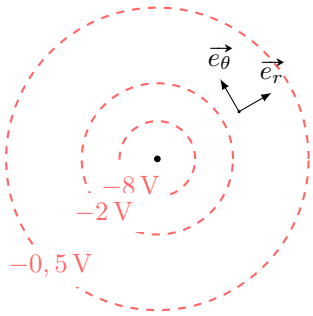
avec α et σ deux constantes positives.

Laquelle de ces courbes décrit l'évolution de E_r en fonction de r ? .....



Entraînement 3.26 — Orientation du champ créé par une charge ponctuelle.

Sur le schéma ci-contre, on trouve 3 surfaces équipotentielles générées par une charge ponctuelle placée au centre.



a) Donner l'orientation du vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\,V$.

(a) $\vec{e_\theta}$ (b) $-\vec{e_r}$ (c) $-\vec{e_\theta}$ (d) $\vec{e_r}$

.....

b) Donner l'orientation du vecteur champ électrostatique $\vec{E}$.

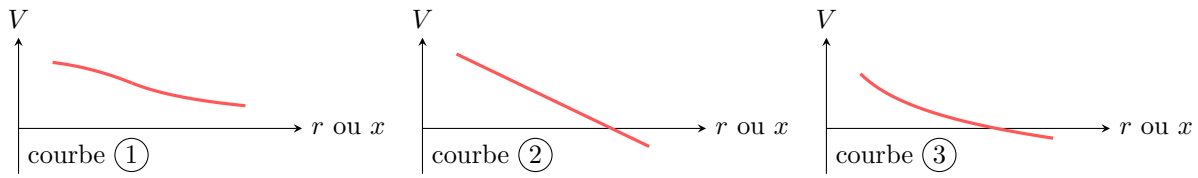
(a) $\vec{e_\theta}$ (b) $-\vec{e_r}$ (c) $-\vec{e_\theta}$ (d) $\vec{e_r}$

.....

Entraînement 3.27 — Un potentiel, une courbe.

Les expressions des potentiels électrostatiques V_a, V_b et V_c données ci-après rendent compte de situations physiques volontairement non détaillées ici. Les fonctions V_a, V_b et V_c sont définies pour des valeurs de r strictement positives. Enfin, λ, σ et ρ sont des constantes positives.

$$V_\mathrm{a}(r) = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \quad , \quad V_\mathrm{b}(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho}{6\varepsilon_0}(3R^2 - r^2) & \text{si } r \leqslant R \\ \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\dfrac{R^3}{r} & \text{si } r \geqslant R \end{cases} \quad \text{et} \quad V_\mathrm{c}(x) = V_0 - \frac{\sigma}{\varepsilon_0}x.$$



Attribuer à chaque potentiel électrostatique une courbe.

a) V_a ..... b) V_b ..... c) V_c .....

Entraînement 3.28 — Énergie électrostatique au sein d'un condensateur.

Soit un condensateur sphérique dont l'armature interne est une sphère de rayon R et l'armature externe une sphère de rayon $R + h$. Le champ électrostatique entre les deux armatures est $\vec{E} = -\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e_r}$, avec $-Q$ la charge portée par l'armature interne.

L'énergie électrostatique stockée entre les armatures du condensateur est

$$\mathcal{E} = \int_{r=R}^{R+h}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{\varepsilon_0\vec{E}^2}{2}r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi.$$

Exprimer $\mathcal{E}$ en fonction de R, h, Q et ε_0 .....

Réponses mélangées

(b) et (c) (b) $2\pi R$ $R\,\mathrm{d}\theta$ $\dfrac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\dfrac{h}{R(R+h)}$ $E_0 a(1+\mathrm{e}^{-2}-\mathrm{e}^{-1})$

négative 0 $6\times10^{-6}\,\mathrm{C}$ (d) $\underbrace{\dfrac{q}{2\varepsilon_0}}_{K}(1-\cos\alpha)$ (b) (b) et (c) (c)

(a) $Q=\rho_0\pi R^2 H/2,\ \rho_\mathrm{m}=\rho_0/2$ nulle (a) et (f) $\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\sqrt{\dfrac{z^2}{z^2+R^2}}\right)$

$Q=\rho_0 4\pi R^3,\ \rho_\mathrm{m}=0$ 0 $\lambda_0\ell$ $+1\,000\times e$ $3{,}3\times10^{-9}\,\mathrm{C}$ $\overrightarrow{e_y}$ (c)

$6{,}5\times10^{-2}\,\mathrm{m}^3$ nulle (c) et (d) Courbe (1) (b) $-2\overrightarrow{e_x}+8\overrightarrow{e_y}$ Courbe (3)

(d) (c) positif $1\times10^{2}\,\mathrm{V\cdot m^{-1}}$ $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ $\dfrac{qa\cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ (b) $2\pi^2 q_0$

$4\pi r^2 E(r)$ (c) (b) (c) $\dfrac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 z^2}$ $5\overrightarrow{e_y}$ positive (d) $\dfrac{1}{r}\left(1+\dfrac{a\cos(\theta)}{2r}\right)$

Courbe (2) $1{,}8\times10^{-8}\,\mathrm{V\cdot m}$ (a) (a) $Q=4\rho_0\mathcal{A}H/3,\ \rho_\mathrm{m}=2\rho_0/3$

$7{,}9\times10^{-1}\,\mathrm{m}^2$ πR^2 0 $\dfrac{4}{3}\pi R^3$ $\dfrac{1}{r}\left(1-\dfrac{a\cos(\theta)}{2r}\right)$ (d) (a) (b)

(c) q et 0 $\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ (b) et (d) $L\times\ell$ $V(a)$ (d) $(\mathrm{O},\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_z})$ et $(\mathrm{O},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z})$

$(\mathrm{O},\overrightarrow{e_x}+\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z})$, $(\mathrm{O},\overrightarrow{e_x}-\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z})$ et $(\mathrm{O},\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y})$ $\overrightarrow{e_z}$ (b) (c) (a) et (d) $2{,}57\times10^{-15}\,\mathrm{C\cdot m^{-2}}$

▶ Réponses et corrigés page 294

Magnétostatique

Prérequis
Repérages cartésien, cylindrique et sphérique. Intégrales curvilignes, de surface et de volume. Champs scalaire et vectoriel. Théorème d'Ampère.

Constantes utiles

→ Charge électrique élémentaire : $e = 1{,}602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$

→ Masse de l'électron : $m_\mathrm{e} = 9{,}11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$

→ Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{H\cdot m^{-1}}$

Distributions de courant et densités de courant

Entraînement 4.1 — Dimension de densités de courant.

La dimension d'une intensité électrique est notée I, celle d'un temps T, et celle d'une longueur L.

a) On note $\vec{j}$ une densité volumique de courant, $\vec{j_\mathrm{s}}$ une densité surfacique de courant et I l'intensité d'un courant. Quelles sont les relations correctes ?

(a) $I = \iint \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ (b) $\vec{j} = \iint I\mathrm{d}\vec{S}$ (c) $I = \iiint \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{V}$ (d) $I = \int \vec{j_\mathrm{s}} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$

b) Comment s'écrit la dimension de la norme d'une densité volumique de courant $\vec{j}$?

(a) $\mathrm{I\cdot L^{-3}}$ (b) $\mathrm{I\cdot T\cdot L^{-2}}$ (c) $\mathrm{I\cdot T\cdot L^{-3}}$ (d) $\mathrm{I\cdot L^{-2}}$

c) Comment s'écrit la dimension de la norme d'une densité surfacique de courant $\vec{j_\mathrm{s}}$?

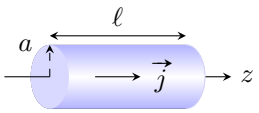
(a) $\mathrm{I\cdot L^{-1}}$ (b) $\mathrm{I\cdot T\cdot L^{-1}}$ (c) $\mathrm{I\cdot L^{2}}$ (d) $\mathrm{I\cdot L^{-2}}$

Entraînement 4.2 — Densité volumique de courant en coordonnées cylindriques.

Soit un conducteur cylindrique (rayon a et longueur ℓ) d'axe (Oz) parcouru par un courant d'intensité

$$I = \iint \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S},$$

où $\vec{j} = j_0 \dfrac{b}{r}\vec{e_z}$ est le vecteur densité volumique de courant, avec j_0 et b constants, et $\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S\vec{e_z}$ un élément de section orientée.

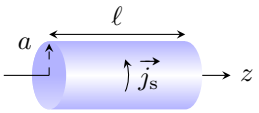


Exprimer I en fonction de la section S du conducteur, du rayon a et des constantes j_0 et b.

Entraînement 4.3 — Densité surfacique de courant en coordonnées cylindriques.

Soit un conducteur cylindrique (rayon a et longueur ℓ) d'axe (Oz) parcouru par un courant d'intensité

$$I = \int \vec{j}_\mathrm{s} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell},$$



où $\vec{j}_\mathrm{s} = j_{\mathrm{s},0}\vec{e_\theta}$ est un vecteur densité surfacique de courant constant et où $\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}z\vec{e_\theta}$ un élément de longueur orientée.

Exprimer I en fonction de la longueur ℓ du conducteur et de la constante $j_{\mathrm{s},0}$.

.....

Symétries et invariances

Entraînement 4.4 — Vent solaire.

Le vent solaire est un flux de particules chargées, majoritairement constitué de protons et de noyaux d'hélium. Le Soleil est considéré comme ponctuel et placé à l'origine O d'un repère sphérique. En première approximation, le vent solaire est assimilé à un courant de particules radial et stationnaire.

a) Si l'émission est isotrope, quelle est l'expression simplifiée du vecteur densité de courant en M(r, θ, φ) ?

(a) $\vec{j}(\mathrm{M}) = j_r(r,\theta)\vec{e_\theta}$
(b) $\vec{j}(\mathrm{M}) = j_\theta(r)\vec{e_\theta}$
(c) $\vec{j}(\mathrm{M}) = j_r(r,\theta)\vec{e_r}$
(d) $\vec{j}(\mathrm{M}) = j_r(r)\vec{e_r}$

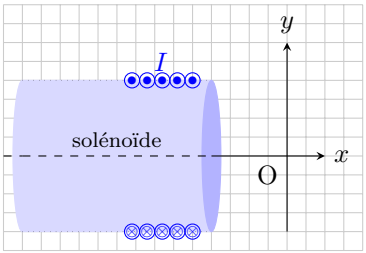
.....

b) Exprimer alors l'intensité I_R du courant électrique traversant une sphère de rayon R.

.....

Entraînement 4.5 — Propriétés de symétrie d'une distribution de courant (I).

Soit un solénoïde d'axe (Ox), parcouru par un courant stationnaire d'intensité I.



On rappelle qu'un plan de symétrie (resp. antisymétrie) d'une distribution de courant est un plan pour lequel, de part et d'autre de celui-ci, les courants de la distribution sont répartis de manière strictement identique (resp. opposée).

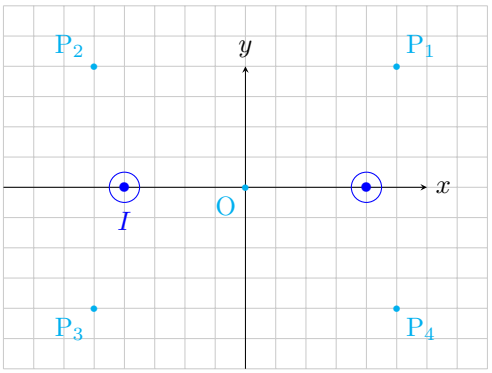
Parmi les propositions ci-dessous, quelles sont celles qui sont correctes ?

(a) Le plan (xOy) est un plan de symétrie de la distribution.
(b) Le plan (xOy) est un plan d'antisymétrie de la distribution même si le solénoïde n'est pas infiniment long.
(c) Le plan (xOz) est un plan d'antisymétrie de la distribution.
(d) Le plan (xOz) est un plan de symétrie de la distribution seulement si le solénoïde est infiniment long.

.....

Entraînement 4.6 — Propriétés de symétrie d'une distribution de courant (II).

On considère la situation suivante, où deux fils infinis sont parcourus par des courants de même intensité I et de même sens (de l'arrière vers l'avant).



On rappelle qu'en tout point d'un plan de symétrie (respectivement d'antisymétrie) de la distribution, le champ magnétostatique est perpendiculaire (respectivement appartient) à ce plan.

a) Le plan $(x\mathrm{O}y)$ est un plan d'antisymétrie pour la distribution.

Quelles sont les propositions correctes ?

(a) Le vecteur $\vec{e_z}$ est normal à ce plan.

(b) Au point O, le champ $\vec{B}$ est selon $\pm\vec{e_z}$.

(c) Au point P_1, le champ $\vec{B}$ appartient à ce plan.

(d) Au point P_3, le champ $\vec{B}$ appartient à ce plan.

.....

b) Le plan $(y\mathrm{O}z)$ est un plan de symétrie pour la distribution.

Quelles sont les propositions incorrectes ?

(a) Le vecteur $\vec{e_x}$ est normal à ce plan.

(b) $\vec{B}(\mathrm{P}_4) = B_y(\mathrm{P}_4)\vec{e_y} + B_z(\mathrm{P}_4)\vec{e_z}$

(c) Au point P_2, le champ $\vec{B}$ est selon $\pm\vec{e_y}$.

(d) $\vec{B}(\mathrm{O}) = B(\mathrm{O})\vec{e_z}$

.....

c) Quelles sont les propositions incomplètes ou incorrectes ?

(a) Le plan $(x\mathrm{O}z)$ est un plan d'antisymétrie pour la distribution.

(b) $\vec{B}(\mathrm{O}) = \vec{0}$

(c) Le champ $\vec{B}$ est toujours perpendiculaire au plan $(x\mathrm{O}z)$.

(d) $\vec{B}(\mathrm{P}_2) = -\vec{B}(\mathrm{P}_1)$

.....

Entraînement 4.7 — Couche épaisse infinie parcourue par un courant.

Soit une couche infinie suivant les axes (Ox) et (Oy), située entre les plans d'équations $z = d$ et $z = -d$, parcourue par un courant de densité volumique uniforme $\vec{j} = j_0\vec{e_x}$.

a) Exprimer l'intensité I du courant qui traverse la surface Σ orientée suivant $\vec{e_x}$ ...

b) Quelles sont les invariances de cette distribution de courant ?

(a) invariance par translation parallèlement à l'axe (Ox)

(b) invariance par rotation autour de l'axe (Oz)

(c) invariance par translation parallèlement à l'axe (Oy)

(d) aucune invariance

.....

c) Le champ magnétostatique au point M est suivant le vecteur $\vec{e_y}$.

Sachant que les composantes du champ magnétostatique possèdent les mêmes invariances que la distribution, déterminer l'expression correcte.

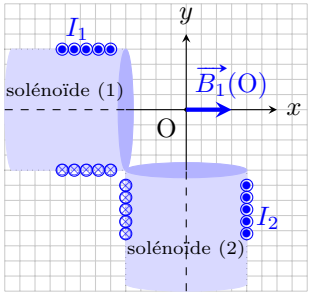
(a) $\vec{B}(M) = B_y(y)\vec{e_y}$ (b) $\vec{B}(M) = B_y(z)\vec{e_y}$ (c) $\vec{B}(M) = B_y(y,z)\vec{e_y}$

.....

Champs magnétostatiques

Entraînement 4.8 — Théorème de superposition.

Deux solénoïdes longs, parcourus par des courants stationnaires d'intensités I_1 et I_2, sont positionnés perpendiculairement entre eux et à égale distance d'un point O. En ce point, le champ magnétostatique produit par le solénoïde (1) est supposé s'écrire $\vec{B_1}(O) = \mu_0 n_1 I_1 \vec{e_x}$, avec n_1 le nombre de spires par unité de longueur du solénoïde (1).



a) Par analogie avec l'expression fournie pour le solénoïde (1), écrire le champ magnétostatique produit par le solénoïde (2) au point O.

.....

b) D'après le théorème de superposition, comment s'écrit alors le champ total produit au point O ?

(a) $\vec{B}(O) = \mu_0(n_1 I_1 + n_2 I_2)\vec{e_z}$

(b) $\vec{B}(O) = \mu_0(n_1 I_1 - n_2 I_2)\vec{e_z}$

(c) $\vec{B}(O) = \mu_0(n_1 I_1 - n_2 I_2)(\vec{e_x} + \vec{e_y})$

(d) $\vec{B}(O) = \mu_0(n_1 I_1 \vec{e_x} - n_2 I_2 \vec{e_y})$

.....

Entraînement 4.9 — Analyse dimensionnelle et champ magnétique.

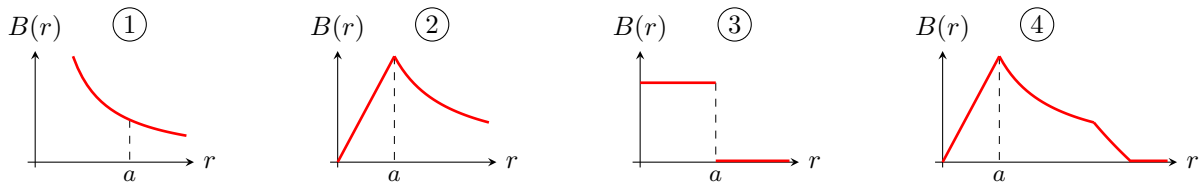
Sachant que la force magnétique s'exprime comme $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$, avec $\vec{v}$ une vitesse, q une charge électrique et $\vec{B}$ un champ magnétique, déterminer laquelle des expressions ci-dessous est homogène à la norme B d'un champ magnétique si m est une masse et R un rayon.

(a) $\dfrac{qv}{mR}$ (b) $\dfrac{mR}{qv}$ (c) $\dfrac{qR}{mv}$ (d) $\dfrac{mv}{qR}$

.....

Entraînement 4.10 — Graphes et expressions d'un champ magnétique.

On donne les graphes associés aux champs magnétiques créés par divers dispositifs, chacun étant parcouru par un courant d'intensité I.



Le champ magnétique d'un conducteur cylindrique de rayon a parcouru par un courant volumique uniforme est donné par

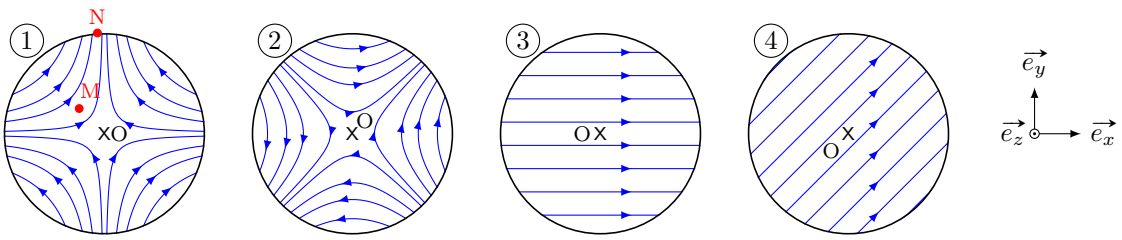
$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \text{ pour } 0 < r < a \qquad \text{et} \qquad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \text{ pour } r > a.$$

Quel graphe correspond au champ magnétique créé par ce conducteur cylindrique ? .....

Entraînement 4.11 — Champ magnétostatique quadrupolaire.

En repérage cartésien et dans le plan d'équation $z = 0$, les composantes du champ magnétostatique créé par un quadrupôle sont $B_x = ky$, $B_y = kx$ et $B_z = 0$, avec k une constante non nulle.

a) Quelle carte de champ correspond à l'expression du champ donnée ci-dessus ? .....



b) En ce qui concerne la carte de champ (1), quelle est la proposition valide ?

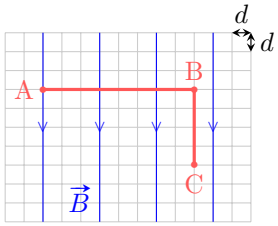
(a) $\vec{B}(\mathrm{M}) = \vec{B}(\mathrm{N})$ (b) $B(\mathrm{M}) < B(\mathrm{N})$ (c) $B(\mathrm{M}) > B(\mathrm{N})$

.....

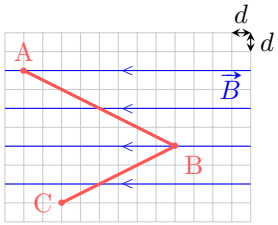
Circulation et flux magnétostatiques

Entraînement 4.12 — Circulation d'un champ magnétostatique sur un chemin.

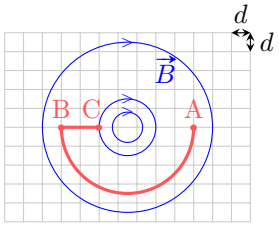
La circulation $\mathcal{C} = \int_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$ du champ magnétostatique $\vec{B}$ le long d'un chemin orienté (Γ) dépend de l'orientation de ce chemin. Pour chaque cas, exprimer $\mathcal{C}$ le long du chemin $\overset{\frown}{\mathrm{ABC}}$ en fonction du pas d du quadrillage. Sur chaque ligne de champ, la norme B du champ est supposée uniforme.



a) .....



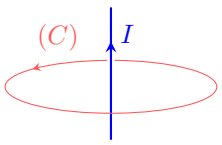
b) .....



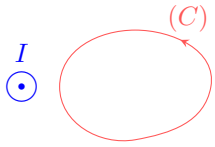
c) .....

Entraînement 4.13 — Courants enlacés.

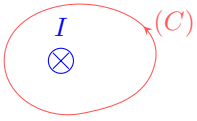
Pour chaque cas, exprimer l'intensité I_{enl} des courants enlacés par le contour (C) en fonction de l'intensité du courant I. Attention aux signes !



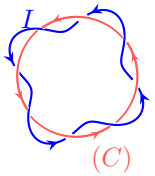
a) .....



b) .....



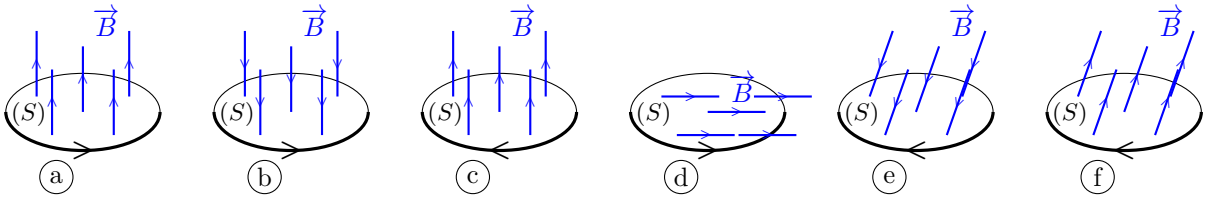
c) .....



d) .....

Entraînement 4.14 — Signe d'un flux magnétostatique à travers une surface.

On sait que le flux $\phi = \iint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ du champ magnétostatique $\vec{B}$ à travers une surface orientée (S) dépend de l'orientation de cette surface (voir ci-dessous la flèche sur chaque contour).

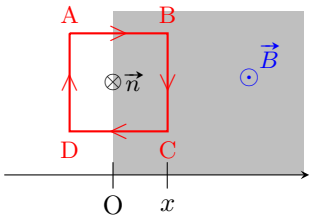


a) Quels sont les cas pour lesquels $\phi > 0$? .....

b) Que vaut ϕ dans le cas (d) ? .....

Entraînement 4.15 — Flux à travers une spire carrée.

Soit une spire carrée de côté a, orientée dans le sens ABCD. On note x l'abscisse du côté BC. Dans le demi-espace tel que $x \geqslant 0$, règne un champ magnétostatique $\vec{B}$ uniforme perpendiculaire au plan de la spire.



Exprimer le flux magnétostatique à travers la spire orientée, de normale $\vec{n}$, défini par $\phi(\vec{B}) = \iint \vec{B} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}S$.

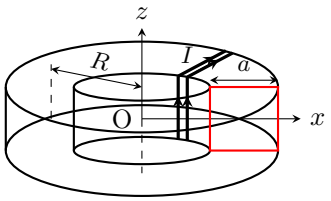
a) Pour $x < 0$ ...

b) Pour $x \in [0, a]$

c) Pour $x > a$ ...

Entraînement 4.16 — Théorème d'Ampère et flux d'un champ non uniforme.

Un fil conducteur est bobiné en N spires jointives sur un tore circulaire de rayon moyen R à section carrée de côté a. La normale de chaque spire est orientée suivant le vecteur $\vec{e_\theta}$ de la base cylindrique. L'intensité du courant parcourant la bobine est notée I.



Le champ magnétostatique créé par cette bobine à l'intérieur du tore s'écrit : $\vec{B} = B(r)\vec{e_\theta}$.

a) Soit un cercle de centre O, de rayon $R - \dfrac{a}{2} < r < R + \dfrac{a}{2}$ et orienté suivant le vecteur $\vec{e_\theta}$. Quelle est l'intensité du courant enlacé par ce cercle ?

(a) I (b) NI (c) $\dfrac{a}{R}I$ (d) $\dfrac{a}{R}NI$

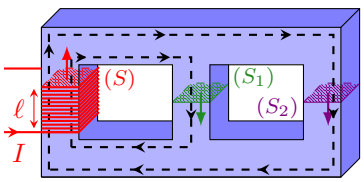
.....

b) Le théorème d'Ampère s'écrit : $\oint \vec{B} \cdot \vec{\mathrm{d}l} = \mu_0 I_{\text{enl}}$, avec I_{enl} l'intensité du courant enlacé par le contour fermé choisi. En déduire l'expression de la composante $B(r)$ du champ .....

c) Exprimer le flux $\phi(\vec{B}) = \iint \vec{B} \cdot \mathrm{d}S\vec{e_\theta}$ à travers la surface d'une spire .....

Entraînement 4.17 — Flux magnétostatique au sein d'un circuit magnétique.

Dans le circuit magnétique représenté ci-contre, de perméabilité relative $\mu_\mathrm{r} = 4\,000$, chaque colonne possède une section carrée de côté $a = 20\,\mathrm{cm}$. Celle de gauche est bobinée, formant un solénoïde de $N = 1\,000$ spires jointives et de longueur $\ell = 10\,\mathrm{cm}$.



Le circuit est alimenté par un courant d'intensité $I = 200\,\mathrm{mA}$. Le champ magnétostatique produit est guidé dans le circuit selon les lignes fléchées en tirets et a pour intensité $B = \mu_0\mu_\mathrm{r}NI/\ell$.

a) Calculer avec un chiffre significatif la valeur du champ magnétostatique au sein du solénoïde.

.....

b) Le flux magnétostatique à travers (S) s'exprime comme $\phi = NBS$. Calculer ϕ .....

c) Sachant que le flux ϕ_2 traversant (S_2) vérifie $4\phi_2 = \phi$, calculer le flux ϕ_1 traversant (S_1) .

Dipôle magnétostatique

Entraînement 4.18 — Spire circulaire et développement dipolaire.

Le champ magnétostatique créé en un point $\mathrm{M}(0,0,z)$ par un courant d'intensité I parcourant une spire de rayon R et d'axe $(\mathrm{O}z)$ est $\vec{B}(\mathrm{M}) = \dfrac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+z^2)^{3/2}}\vec{e_z}$.

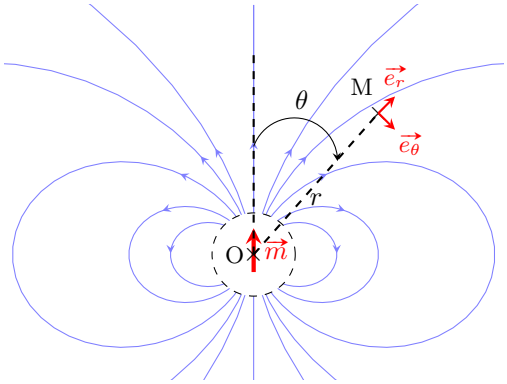
a) Quel est le moment magnétique associé à cette source de champ magnétostatique ?

(a) $\vec{\mathcal{M}} = \pi R^2 I$ (b) $\vec{\mathcal{M}} = \mu_0 \pi R^2 I \vec{e_z}$ (c) $\vec{\mathcal{M}} = \pi R^2 I \vec{e_z}$

b) Simplifier l'expression du champ magnétostatique dans l'approximation dipolaire $z \gg R$.

Entraînement 4.19 — Champ créé par un dipôle.

La carte de champ d'un dipôle magnétique de centre O et de moment magnétique $\vec{m}$ est représentée ci-contre. Le champ magnétostatique est noté $\vec{B}$.



En s'aidant de la carte fournie et en étudiant la situation pour certains angles particuliers, identifier l'expression correcte de $\vec{B}$ en un point M quelconque loin du dipôle.

(a) $\vec{B}(M) = \dfrac{\mu_0 m}{4\pi r^3}(2\sin(\theta)\vec{e_r} - \cos(\theta)\vec{e_\theta})$

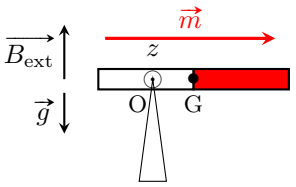
(b) $\vec{B}(M) = \dfrac{\mu_0 m}{4\pi r^3}(2\sin(\theta)\vec{e_r} + \cos(\theta)\vec{e_\theta})$

(c) $\vec{B}(\mathrm{M}) = \dfrac{\mu_0 m}{4\pi r^3}(2\cos(\theta)\vec{e_r} - \sin(\theta)\vec{e_\theta})$

(d) $\vec{B}(\mathrm{M}) = \dfrac{\mu_0 m}{4\pi r^3}(2\cos(\theta)\vec{e_r} + \sin(\theta)\vec{e_\theta})$

Entraînement 4.20 — Équilibre d'un aimant.

Un aimant très fin, de moment magnétique $\vec{m}$, est posé sur une pointe en un point O différent de son centre de gravité G. L'ensemble est plongé dans un champ magnétostatique $\overrightarrow{B_{\text{ext}}}$ vertical uniforme. L'aimant subit le couple magnétique de moment $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \overrightarrow{B_{\text{ext}}}$. À l'équilibre, il est à l'horizontale.



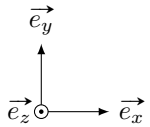
a) Exprimer la projection du moment $\vec{\Gamma}$ suivant l'axe $(\mathrm{O}z)$

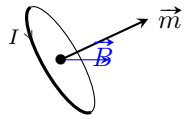
b) Le moment du poids par rapport à l'axe $(\mathrm{O}z)$ s'écrit $-dMg$, avec M la masse de l'aimant et $d = \mathrm{OG}$. En supposant qu'il n'y a pas d'autre moment, exprimer la distance d à l'équilibre.

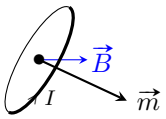
Entraînement 4.21 — Moment de force magnétique.

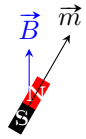
On rappelle qu'un dipôle de moment magnétique $\vec{m}$, baignant dans un champ magnétostatique extérieur uniforme $\vec{B}$, subit des forces magnétiques de moment $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$.

Pour chaque situation suivante (boucle de courant ou aimant droit), les vecteurs $\vec{m}$ et $\vec{B}$ sont dans le plan (Oxy). Indiquer la direction et le sens du moment $\vec{\Gamma}$.









a) ..... b) ..... c) ..... d) .....

Entraînement 4.22 — Force exercée sur un dipôle.

Un dipôle de moment magnétique $\vec{m}$ dans un champ magnétostatique $\overrightarrow{B_{\text{ext}}}$ non uniforme subit la force $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_{\text{p}})$, avec $E_{\text{p}} = -\vec{m} \cdot \overrightarrow{B_{\text{ext}}}$. En coordonnées cylindriques, on a $\overrightarrow{\text{grad}}(f(r)) = \dfrac{\text{d}f}{\text{d}r}\vec{e_r}$.

a) Déterminer l'expression de $\vec{F}$ pour un dipôle qui serait de même direction et de même sens qu'un champ d'expression $\overrightarrow{B_{\text{ext}}} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e_\theta}$ (fil rectiligne infini d'axe (Oz)).

.....

b) Vers quelles zones le dipôle est-il alors attiré ?

(a) celles de champ plus faible (b) celles de champ plus intense

.....

Toujours plus de magnétostatique

Entraînement 4.23 — Encore une analyse dimensionnelle (I).

Quelle expression est homogène à la norme B d'un champ magnétique si I est une intensité électrique, μ_0 la perméabilité magnétique du vide et R un rayon ?

(a) $\dfrac{I}{2\pi R}$ (b) $\dfrac{2\pi R\mu_0}{I}$ (c) $\dfrac{\mu_0 I}{2\pi R}$ (d) $\dfrac{2\pi\mu_0}{IR}$

.....

Entraînement 4.24 — Encore une analyse dimensionnelle (II).

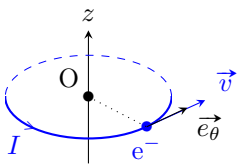
Quelle expression est homogène à une norme B de champ magnétique si I est une intensité électrique, N un nombre de spires, S une surface et L une inductance ?

(a) $B = \dfrac{LI}{NS}$ (b) $B = \dfrac{LS}{NI}$ (c) $B = \dfrac{NS}{LI}$ (d) $B = \dfrac{NL}{IS}$

.....

Entraînement 4.25 — Moment magnétique élémentaire : magnéton de Bohr.

Dans le cadre du modèle classique de Bohr, l'électron (charge $-e$, masse m_e) de l'atome d'hydrogène décrit un cercle (rayon r, période de révolution T) centré sur le noyau atomique (origine O du repère). L'orbite est supposée dans le plan $z = 0$. Le vecteur vitesse $\vec{v}$ indique le sens de rotation de l'électron. La constante de Planck est $h = 6{,}63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$.



a) En considérant que l'électron définit une boucle de courant circulaire (une spire), comment s'exprime l'intensité I correspondante (voir schéma pour l'orientation) ?

(a) $I = eT$ (b) $I = e/T$ (c) $I = -eT$ (d) $I = -e/T$

b) De loin, le système est équivalent à un dipôle magnétique de moment magnétique $\vec{m} = I\vec{S}$, avec $\vec{S}$ le vecteur surface de la spire. Donner l'expression de $\vec{m}$ en fonction de e, T, r et $\vec{e_z}$.

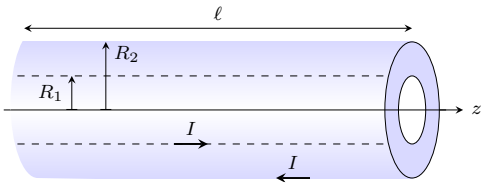
c) Le moment cinétique de l'électron par rapport au noyau (point O) est $\vec{\sigma} = \dfrac{2m_\mathrm{e}}{T}\vec{S}$. Montrer alors que $\vec{m} = \gamma\vec{\sigma}$, avec γ le rapport gyromagnétique de l'électron à exprimer en fonction de e et m_e.

d) La quantification du moment cinétique $\|\vec{\sigma}\| = n\hbar$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$, conduit à définir un moment magnétique élémentaire μ_B (magnéton de Bohr). Indiquer alors la ou les propositions correctes.

(a) $\mu_\mathrm{B} = \hbar\gamma$ (b) $\mu_\mathrm{B} = \dfrac{e\hbar}{2m_\mathrm{e}}$ (c) $\mu_\mathrm{B} = 9{,}28 \times 10^{-24}\,\mathrm{N \cdot m}$

Entraînement 4.26 — Énergie magnétique d'un câble coaxial.

Un cylindre long et creux de rayon R_1 est parcouru en surface par un courant d'intensité I. Ce courant « revient » par un cylindre de rayon $R_2 > R_1$, coaxial au premier et d'épaisseur négligeable. Cet ensemble forme un câble coaxial de longueur ℓ et d'axe $(\mathrm{O}z)$.



Le champ magnétostatique produit est, en coordonnées cylindriques :

$$\vec{B} = \begin{cases} \vec{0} & \text{pour } r < R_1 \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e_\theta} & \text{pour } R_1 \leqslant r \leqslant R_2 \\ \vec{0} & \text{pour } r > R_2 \end{cases}$$

a) Exprimer le flux propre Φ_p, c'est-à-dire le flux du champ magnétostatique à travers une tranche du câble de surface $S = \ell R_2$, en fonction de I, ℓ, R_1 et R_2.

.....

b) En déduire l'expression de l'inductance propre par unité de longueur $\Lambda = \dfrac{L}{\ell} = \dfrac{\Phi_\mathrm{p}}{\ell I}$ du câble en fonction de R_1 et R_2.

.....

On rappelle que la densité volumique d'énergie magnétique a pour expression $w_\mathrm{m} = \dfrac{B^2}{2\mu_0}$ et que l'énergie magnétique s'exprime alors comme $W_\mathrm{m} = \iiint w_\mathrm{m}\,\mathrm{d}\tau$.

c) Déterminer l'expression de l'énergie magnétique W_m correspondant à une portion de longueur ℓ du câble ainsi formé en fonction de I, ℓ, R_1 et R_2.

.....

d) En déduire l'expression de l'inductance propre par unité de longueur $\Lambda = \dfrac{L}{\ell} = \dfrac{2W_\mathrm{m}}{\ell I^2}$ du câble en fonction de R_1 et R_2.

.....

Réponses mélangées

(d) (a), (c) et (d) $2j_0 S\dfrac{b}{a}$ 0 $-I$ $-Bax$ $\dfrac{\mu_0}{2\pi}\ln\dfrac{R_2}{R_1}$ 4×10^2 Wb

(b) $\dfrac{mB_\mathrm{ext}}{Mg}$ (a) et (d) $4I$ $+\vec{e_z}$ $-\dfrac{e}{2m_\mathrm{e}}$ $\dfrac{\mu_0 I\ell}{2\pi}\ln\dfrac{R_2}{R_1}$ 0 3×10^2 Wb

$-Ba^2$ (c) (d) $\dfrac{\mu_0 NIa}{2\pi}\ln\left(\dfrac{R+a/2}{R-a/2}\right)$ (a) et (e) $-2Bd$ $\dfrac{\mu_0 I^2\ell}{4\pi}\ln\dfrac{R_2}{R_1}$

$-\mu_0 n_2 I_2\vec{e_y}$ $\dfrac{\mu_0 NI}{2\pi r}$ (d) (d) (b), (c) et (d) $j_{\mathrm{s},0}\ell$ (b) $+\vec{e_z}$

(b) et (c) $4\pi R^2 j_r(R)$ (b) (a), (c) et (d) (b) (c) $\dfrac{7\pi}{2}Bd$ 0

(a) $4d\ell j_0$ (d) 1×10^1 T (2) $4Bd$ (2) $-\vec{e_z}$ $-\dfrac{e}{T}\underbrace{\pi r^2\vec{e_z}}_{\vec{S}}$ (d)

$-\dfrac{\mu_0 Im}{2\pi r^2}\vec{e_r}$ $\dfrac{\mu_0}{2\pi}\ln\dfrac{R_2}{R_1}$ (a) et (c) $+\vec{e_z}$ I (b) (a) mB_ext $\dfrac{\mu_0\vec{\mathcal{M}}}{2\pi z^3}$

► Réponses et corrigés page 301

Équations de Maxwell

Prérequis
Équations de Maxwell. Opérateurs différentiels.

Constantes utiles

→ Permittivité du vide : $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\ \mathrm{F \cdot m^{-1}}$

→ Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 1{,}26 \times 10^{-6}\ \mathrm{T \cdot m \cdot A^{-1}}$

→ Dans le vide : $\varepsilon_0 \mu_0 = \dfrac{1}{c^2}$, où c est la célérité de la lumière dans le vide

Pour commencer

Entraînement 5.1 — Équations de Maxwell et dimensions.

On munit l'espace d'un repère cartésien (x, y, z) et on note t la dépendance temporelle.

On s'intéresse aux équations de Maxwell auxquelles obéissent les champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$ dans un milieu caractérisé par une densité volumique de charge ρ et une densité volumique de courant $\vec{j}$.

a) Parmi les quatre équations suivantes, laquelle n'est pas une équation de Maxwell ?

(a) $\mathrm{div}(\vec{E}) = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

(b) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

(c) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

(d) $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\vec{j}) = 0$

.....

On s'intéresse aux relations entre les dimensions qui découlent des équations de Maxwell.

On considère les dimensions suivantes : L pour une longueur, T pour un temps, M pour une masse et I pour une intensité du courant électrique.

On rappelle l'expression de la force de Lorentz : $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$.

b) Donner la dimension d'une charge électrique q .....

c) Donner la dimension d'un champ magnétique à l'aide de l'expression de la force de Lorentz.

.....

d) Donner la dimension d'un champ électrique à l'aide de l'expression de la force de Lorentz.

.....

e) Retrouver la dimension d'un champ électrique, à l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday.

.....

Entraînement 5.2 — Courants et ordres de grandeur.

L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit aussi, en introduisant le courant de conduction $\vec{j}_{\text{cond}}$ et le courant de déplacement $\vec{j}_{\text{dépl}}$:

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0\big(\vec{j}_{\text{cond}} + \vec{j}_{\text{dépl}}\big), \quad \text{qui est équivalente à} \quad \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0\,\vec{j}_{\text{cond}} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.$$

On admet la loi d'Ohm $\vec{j}_{\text{cond}} = \sigma\vec{E}$ et on considère un champ électrique $\vec{E} = E_0\cos(\omega t + \varphi)\vec{e_x}$.

a) Comment s'exprime l'ordre de grandeur de la quantité $\alpha = \dfrac{\|\vec{j}_{\text{cond}}\|}{\|\vec{j}_{\text{dépl}}\|}$?

(a) $\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ (c) $\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0\omega}$

(b) $\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0\omega}$

.....

b) Laquelle des conditions suivantes permet d'obtenir $\alpha \gg 1$ dans un conducteur (où σ a pour ordre de grandeur $10^7\,\text{S}\cdot\text{m}^{-1}$) ?

(a) $f \ll 10^3$ Hz (c) $f \ll 10^{17}$ Hz

(b) $f \ll 10^9$ Hz

.....

On considère une onde électromagnétique de pulsation $\omega = 1{,}0\,\text{rad}\cdot\text{MHz}$.

c) Calculer α si cette onde se propage dans un métal de conductivité $\sigma = 1{,}0\times10^7\,\text{S}\cdot\text{m}^{-1}$ ..

d) Calculer α si cette onde se propage dans de l'eau de mer avec $\sigma = 1{,}0\times10^{-4}\,\text{S}\cdot\text{m}^{-1}$ .....

e) Calculer α si cette onde se propage dans du verre avec $\sigma = 1{,}0\times10^{-13}\,\text{S}\cdot\text{m}^{-1}$ .....

Entraînement 5.3 — Transposition réels $\longleftrightarrow$ complexes.

On considère les deux champs électriques suivants :

$$\underline{\vec{E}}_1 = E_0\exp[\text{i}(\omega t - kx)]\vec{e_y} - \text{i}E_0\exp[\text{i}(\omega t - kx)]\vec{e_z}$$
$$\text{et} \quad \vec{E}_2 = -E_0\cos[\omega t + kz]\vec{e_x} - E_0\sin[\omega t + kz]\vec{e_y}.$$

a) Exprimer le champ $\vec{E}_1$ associé à $\underline{\vec{E}}_1$.

.....

b) Exprimer le champ $\underline{\vec{E}}_2$ associé à $\vec{E}_2$.

.....

Entraînement 5.4 — Voir la divergence.

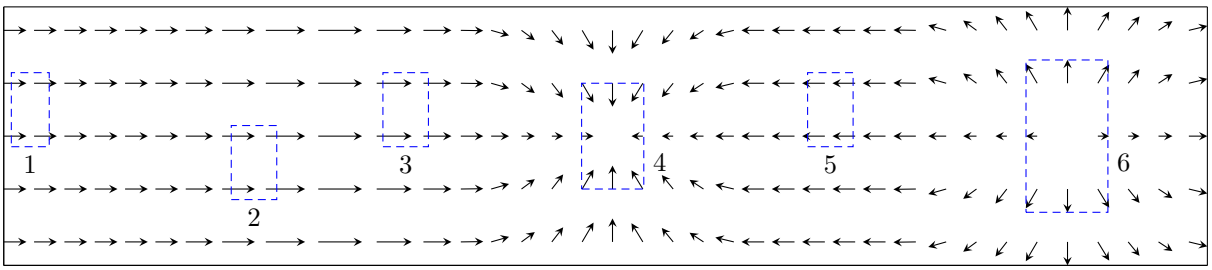
Le théorème de Green-Ostrogradski affirme que, pour un champ de vecteurs $\vec{A}$, on a

$$\iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div}(\vec{A})\,\mathrm{d}\tau = \oiint_{\mathcal{S}} \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S},$$

où $\mathcal{V}$ est le volume délimité par la surface $\mathcal{S}$ fermée.

Ce théorème indique que si le flux élémentaire $\mathrm{d}\phi$ du champ de vecteurs $\vec{A}$ à travers une surface infinitésimale fermée $\mathrm{d}\mathcal{S}$ autour d'un point M est non nul, alors la divergence de ce même champ de vecteurs au point M est non nulle. En particulier, si $\mathrm{d}\phi > 0$ (flux sortant) alors $\operatorname{div}\vec{A}(\mathrm{M}) > 0$.

On considère le champ de vecteurs suivant :



Pour chacune des zones suivantes, en estimant le flux du champ de vecteurs sur la zone, indiquer si la divergence du champ de vecteurs y est nulle, positive ou négative.

a) Zone 1 .....

b) Zone 2 .....

c) Zone 3 .....

d) Zone 4 .....

e) Zone 5 .....

f) Zone 6 .....

Entraînement 5.5 — Voir le rotationnel.

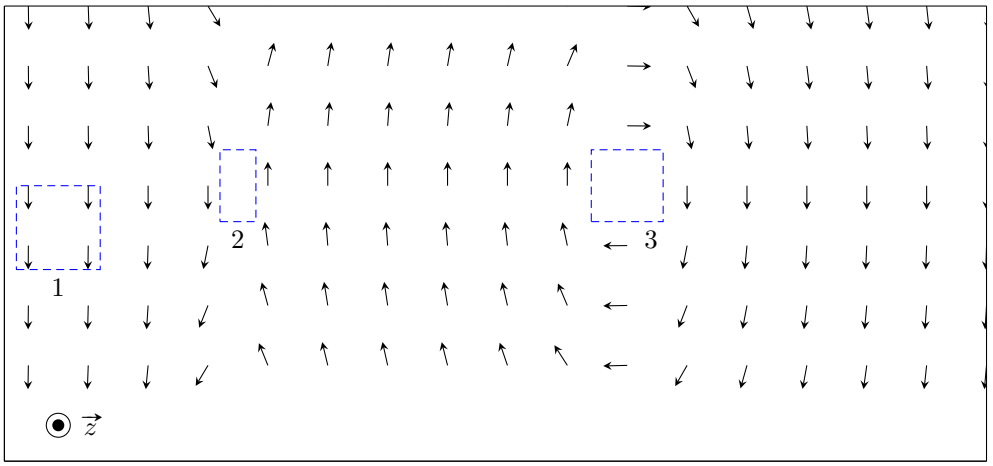
Le théorème de Stokes affirme que, pour un champ de vecteurs $\vec{A}$, on a

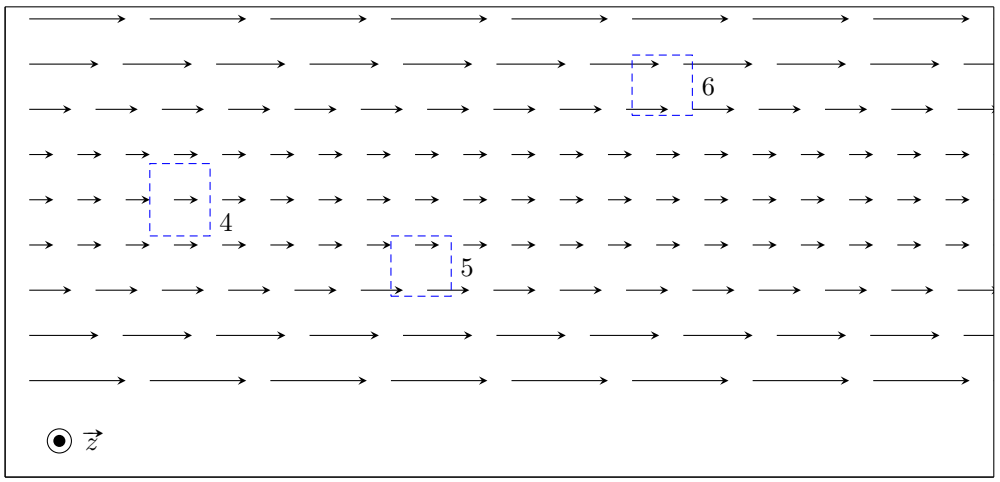
$$\iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell},$$

où $\mathcal{S}$ est la surface délimitée par le contour Γ fermé.

Ce théorème indique que si la circulation élémentaire $\mathrm{d}\mathcal{C}$ du champ de vecteurs $\vec{A}$ à travers un contour fermé Γ délimitant une surface infinitésimale $\mathrm{d}S$ est non nulle, alors le rotationnel de ce même champ de vecteurs au point M est non nul. En particulier, si $\mathrm{d}\mathcal{C} > 0$ alors $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}(\mathrm{M}) > 0$.

On considère les champs de vecteurs suivants :





Pour chacune des zones suivantes, en estimant la circulation du champ de vecteurs sur la zone, indiquer si la composante du rotationnel selon $\vec{e_z}$ du champ de vecteurs y est nulle, positive ou négative.

a) Zone 1 ..... ☐ c) Zone 3 ..... ☐ e) Zone 5 ..... ☐

b) Zone 2 ..... ☐ d) Zone 4 ..... ☐ f) Zone 6 ..... ☐

Conservation de la charge et potentiel électrique

Entraînement 5.6 — Conservation de la charge.

On note ρ la densité volumique de charge et $\vec{j}$ le vecteur densité volumique de courant.

On rappelle les équations de Maxwell-Ampère : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$, et de Maxwell-Gauss : $\text{div}\,\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$.

On rappelle aussi le théorème de Schwarz : pour tout champ $\vec{A}$, on a $\text{div}\left(\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = \dfrac{\partial(\text{div}\,\vec{A})}{\partial t}$.

a) Développer $\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B})$ à l'aide de l'équation de Maxwell-Ampère.

.....

b) Exprimer $\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B})$ en injectant l'équation de Maxwell-Gauss.

.....

c) On rappelle que, pour tout vecteur $\vec{A}$, $\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}) = 0$. Quelle équation obtient-on ?

(a) $\text{div}\,\vec{j} - \dfrac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ (b) $\text{div}\,\vec{j} + \dfrac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ (c) $\mu_0\,\text{div}\,\vec{j} + \dfrac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ (d) $\mu_0\,\text{div}\,\vec{j} - \dfrac{\partial\rho}{\partial t} = 0$

.....

Entraînement 5.7 — Piège électrostatique.

On considère une région de l'espace, vide de charge, dans laquelle règne un potentiel :

$$V(x,y,z) = \frac{V_0}{a^2}\left(x^2 + 2y^2 - 3z^2\right),$$

où V_0 (en V) et a sont des constantes positives.

a) Donner l'unité de a .....

L'opérateur laplacien en coordonnées cartésiennes est donné par $\Delta V = \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2}$.

b) Déterminer l'expression de ΔV .....

c) L'équation de Poisson $\Delta V = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ est-elle vérifiée ? .....

d) L'allure de $V(x,0,0)$ en fonction de l'abscisse x est une portion :

(a) de cercle (b) d'hyperbole (c) d'exponentielle (d) de parabole

.....

L'opérateur gradient en coordonnées cartésiennes est donné par $\overrightarrow{\text{grad}}\,V = \dfrac{\partial V}{\partial x}\vec{e_x} + \dfrac{\partial V}{\partial y}\vec{e_y} + \dfrac{\partial V}{\partial z}\vec{e_z}$.

e) Calculer le champ électrique $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$ en O, origine du repère .....

Théorèmes de Stokes-Ampère et Green-Ostrogradski

Entraînement 5.8 — Théorème de Stokes-Ampère.

Dans le repère $(\mathrm{O}, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$, considérons le vecteur fixe

$$\vec{\omega} = \omega\, \vec{e_z}.$$

Rappelons que, pour tout point M de l'espace, on a :

- $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\vec{e_r} + z\vec{e_z}$ dans la base cylindrique $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$;
- $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}$ dans la base cartésienne.

On considère par ailleurs un cylindre infini d'axe $(\mathrm{O}z)$ et de rayon a.

On considère le champ de vecteurs défini par :

$$\begin{cases} \vec{v} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OM}} & \text{pour } r < a\,; \\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{v} = \vec{0} & \text{pour } r > a\ . \end{cases}$$

a) Déterminer l'expression de $\vec{v} = \omega\vec{e_z} \wedge (r\vec{e_r} + z\vec{e_z})$ .....

b) Déterminer l'expression de $\vec{v} = \omega\vec{e_z} \wedge (x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z})$ .....

En coordonnées cartésiennes, l'opérateur rotationnel est défini par :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\vec{e_x} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\vec{e_y} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\vec{e_z}.$$

c) Calculer $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{v}$ pour $r < a$ en coordonnées cartésiennes .....

Le théorème de Stokes s'énonce de la façon suivante.

Soit Γ un contour fermé et orienté, et soit Σ une surface quelconque s'appuyant sur Γ et orientée avec la règle du tire-bouchon de Maxwell ou la règle de la main droite. Pour un champ de vecteurs $\vec{A}$ défini en tout point, on a :

$$\oint_\Gamma \vec{A}_{(\mathrm{M})} \cdot \vec{\mathrm{d}\ell}_{(\mathrm{M})} = \iint_\Sigma \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{A})_{(\mathrm{M})} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}S_{(\mathrm{M})}.$$

En appliquant ce théorème sur un contour fermé circulaire Γ de rayon r, calculer $v(r)$ dans les deux cas suivants :

d) Pour $r < a$ .....

e) Pour $r > a$ .....

Entraînement 5.9 — Application du théorème de Green-Ostrogradski.

On considère le champ suivant :

$$\vec{A}(r,\theta,\varphi) = (ar - br^3)\vec{e_r},$$

en coordonnées sphériques, où a et b sont des constantes.

En coordonnées sphériques, l'opérateur divergence est défini par :

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}.$$

a) Calculer $\operatorname{div}(\vec{A})$ .....

b) Quelle est l'expression de l'élément de volume d'une boule en coordonnées sphériques ?

(a) $\mathrm{d}\tau = r\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$

(b) $\mathrm{d}\tau = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$

(c) $\mathrm{d}\tau = r\sin\theta\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$

(d) $\mathrm{d}\tau = r^2\sin\theta\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$

.....

On rappelle le théorème de Green-Ostrogradski.

Soit $\mathcal{S}$ une surface fermée de volume intérieur $\mathcal{V}$, orientée vers l'extérieur par convention. Pour un champ de vecteurs $\vec{A}$ défini en tout point, on a :

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div}(\vec{A})\,\mathrm{d}\tau.$$

c) À l'aide de ce théorème, exprimer le flux $\oiint_{\text{sphère}} \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ du champ à travers une sphère de centre O de rayon R.

.....

d) Quelle est l'expression de l'élément de surface d'une sphère en coordonnées sphériques ?

(a) $\mathrm{d}S = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$

(b) $\mathrm{d}S = r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$

(c) $\mathrm{d}S = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$

.....

e) Calculer directement le flux du champ à travers la sphère de centre O et de rayon R à partir de l'expression du champ $\vec{A}$.

.....

Jouons avec les équations de Maxwell

On donne pour les quatre prochains exercices les expressions du rotationnel en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e_x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{e_y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{e_z}$$

et en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{e_r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial r A_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e_z}.$$

Entraînement 5.10 — Existence ou non d'un champ électromagnétique.

Vérifier à l'aide des équations de Maxwell si les champs électromagnétiques suivants existent ou non.

Répondre par « oui » par « non ».

On se place dans le vide ; on rappelle donc que $\varepsilon_0\mu_0 = \dfrac{1}{c^2} = \dfrac{\omega^2}{k^2}$.

a) $\vec{E} = E_0\cos(\omega t - kx + \varphi_0)\vec{e_y}$ et $\vec{B} = \dfrac{E_0 k}{\omega}\cos(\omega t - kx + \varphi_0)\vec{e_z}$ .....

b) $\vec{E} = E_0\cos(\omega t + ky)\vec{e_y}$ et $\vec{B} = \dfrac{E_0 k}{\omega}\cos(\omega t + ky)\vec{e_y}$ .....

c)

$$\begin{cases} \vec{E} = E_1\cos(\omega t + kz + \varphi_1)\vec{e_x} + E_2\cos(\omega t + kz + \varphi_2)\vec{e_y} \\ \vec{B} = \dfrac{E_2 k}{\omega}\cos(\omega t + kz + \varphi_2)\vec{e_x} - \dfrac{E_1 k}{\omega}\cos(\omega t + kz + \varphi_1)\vec{e_y} \end{cases}$$

.....

Entraînement 5.11 — Utilisation de l'équation de Maxwell-Faraday.

On rappelle l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

On se place dans un milieu vide de charge et de courant (sans champ statique).

Déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B}$ associé à chacun des champs électriques $\vec{E}$ suivants.

a) En coordonnées cartésiennes : $\vec{E} = E_0\cos(\omega t - kz + \varphi)\vec{e_x}$

.....

b) En coordonnées cartésiennes : $\vec{E} = E_0\cosh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha z)\exp(-\alpha t)\vec{e_x}$

.....

c) En coordonnées cylindriques : $\vec{E} = \dfrac{E_0}{(kr)^2}\cos(\omega t)\vec{e_z}$

.....

Entraînement 5.12 — Utilisation de l'équation de Maxwell-Ampère.

On rappelle l'équation de Maxwell-Ampère : $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

On se place dans un milieu vide de charge et de courant (pas de champs statiques).

Déterminer l'expression du champ électrique $\vec{E}$ associé à chacun des champs magnétiques $\vec{B}$ suivants.

a) En coordonnées cartésiennes : $\vec{B} = B_0 \sin(\omega t - kz + \varphi)\vec{e_y}$

.....

b) En coordonnées cartésiennes : $\vec{B} = B_0 \sinh(\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}\alpha z) \exp(-\alpha t)\vec{e_y}$

.....

c) En coordonnées cylindriques : $\vec{B} = \dfrac{cB_0}{(kr)^2} \sin(\omega t)\vec{e_\theta}$

.....

Entraînement 5.13 — Détermination de $\vec{E}$ à partir de $\vec{B}$.

Le champ magnétique créé dans un solénoïde infini de rayon R, d'axe (Oz), comportant n spires par unité de longueur et parcouru par un courant d'intensité électrique $i(t)$ dépendant du temps est

$$\vec{B} = \mu_0 n i(t) \vec{e_z}.$$

On rappelle que le champ magnétique à l'extérieur d'un solénoïde est nul.

On rappelle les expressions de l'équation de Maxwell-Faraday sous formes locale et intégrale :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{et} \qquad \oint_\Gamma \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -\iint_\Sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}.$$

a) Par analyse des invariances, déterminer la ou les variable(s) dont dépend le champ électrique. On adoptera les coordonnées cylindriques.

(a) r (b) θ (c) z (d) r et θ

.....

Le champ électrique $\vec{E}$ est dirigé selon $\vec{e_\theta}$.

En utilisant l'équation locale de Maxwell-Faraday, déterminer l'expression du champ électrique créé par le solénoïde dans les deux cas suivants.

b) Pour $r < R$ .....

c) Pour $r > R$, sachant que le champ est continu .....

On souhaite retrouver ces résultats en passant par la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday. Cette méthode nécessite de choisir une surface sur laquelle nous allons calculer le flux et la circulation.

d) En tenant compte de la direction du champ $\vec{B}$ et des dépendances spatiales du champ $\vec{E}$, quelle surface pouvons-nous choisir ?

(a) Un cylindre de hauteur h et de rayon r
(b) Un plan rectangulaire de dimension $r \times z$
(c) Un disque d'axe (Oz) et de rayon r
(d) Une sphère de rayon r

.....

En utilisant la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday sur cette surface, déterminer l'expression du champ électrique créé par le solénoïde dans les deux cas suivants.

e) Pour $r < a$ .....

f) Pour $r > a$ .....

Vecteur de Poynting

Entraînement 5.14 — Vecteur de Poynting.

La forme générale du vecteur de Poynting vérifie : $\vec{\Pi} = \dfrac{1}{\mu_0}\vec{E} \wedge \vec{B}$.

Développer les vecteurs de Poynting pour les champs électromagnétiques suivants :

a) $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz + \varphi)\vec{e_x}$ et $\vec{B} = B_0 \sin(\omega t - kz + \varphi)\vec{e_y}$

.....

b) $\vec{E} = E_0 \cosh(\beta z) \exp(-\alpha t)\vec{e_z}$ et $\vec{B} = B_0 \sinh(\beta z) \exp(-\alpha t)\vec{e_y}$

.....

Entraînement 5.15 — Vecteur de Poynting complexe.

Une onde électromagnétique plane monochromatique se propage suivant l'axe (Oz). Les expressions des composantes du champ électrique sont :

$$\vec{E} \left| \begin{array}{l} E_x = E_{0x} \cos(k\,z - \omega\,t + \psi_1) \\ E_y = E_{0y} \cos(k\,z - \omega\,t + \psi_2) \\ E_z = 0. \end{array} \right.$$

Le vecteur d'onde est noté $\vec{k} = k\,\vec{e_z}$ avec $\omega = k\,c$.

On travaille tout d'abord en notation réelle :

a) Déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B} = \dfrac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$ .....

b) Déterminer l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ ....

On travaille maintenant en notation complexe :

c) Déterminer l'expression du champ électrique $\underline{\vec{E}}$ .....

d) Déterminer l'expression du champ magnétique $\underline{\vec{B}}$ .....

e) Déterminer l'expression du conjugué du champ magnétique $\underline{\vec{B}}^*$ ..

f) Calculer les composantes du vecteur complexe $\dfrac{\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*}{2\,\mu_0}$ .....

Conclusion :

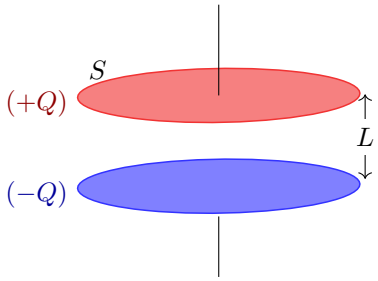
g) On en déduit que $\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle = \left\langle \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right\rangle$ vaut : (a) $\left\langle \dfrac{\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*}{2\,\mu_0} \right\rangle$ (b) $\left\langle \dfrac{2\,\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*}{2\,\mu_0} \right\rangle$ (c) $\left\langle \dfrac{\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*}{\mu_0} \right\rangle$?

.....

Entraînement 5.16 — Un bilan d'énergie.

On considère un condensateur composé de deux disques métalliques de surface S, de rayon R, distants de $L \ll R$ et séparés par du vide. Lors de la charge, on suppose que, dans le système de coordonnées cylindriques, les champs électrique et magnétique régnant entre les deux armatures sont :

$$\vec{E}(t) = \frac{Q(t)}{\varepsilon_0 S}\vec{e_z} \qquad \text{et} \qquad \vec{B}(r,t) = \frac{\mu_0}{2S}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} r \vec{e_\theta}.$$



On ne considère aucun courant de conduction dans cet exercice.

On considère que l'énergie stockée dans le condensateur est essentiellement sous forme électrique. La densité volumique d'énergie électromagnétique s'écrit alors $e = \dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2}$.

a) Calculer l'énergie stockée $\mathcal{E} = \iiint_{\mathcal{V}} e\,\mathrm{d}\tau$ dans le condensateur sachant que l'élément de volume $\mathrm{d}\tau$, en coordonnées cylindriques, vaut $\mathrm{d}\tau = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$.
.....

b) Calculer le vecteur de Poynting $\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ en $r = R$ .....

c) Calculer le flux sortant $\phi = \iint_{\text{cylindre}} \vec{\Pi} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ à travers la surface cylindrique délimitant le volume entre les deux armatures.
.....

d) Les résultats précédents permettent de déduire que :

(a) $\mathcal{E} + \phi = 0$ (b) $\mathcal{E} + \dfrac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ (c) $\dfrac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \phi = 0$ (d) $\dfrac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \dfrac{\partial \phi}{\partial t} = 0$

.....

e) On rappelle le théorème de Green-Ostrogradski.

Soit Σ une surface fermée de volume intérieur $\mathcal{V}$, orientée vers l'extérieur par convention. Pour un champ de vecteurs $\vec{A}$ défini en tout point, on a :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{div}(\vec{A})\, \mathrm{d}\tau.$$

En utilisant ce théorème, quelle relation (appelée théorème de Poynting) obtient-on ?

(a) $\dfrac{\partial e}{\partial t} + \dfrac{\partial\left(\mathrm{div}\,\vec{\Pi}\right)}{\partial t} = 0$

(b) $\dfrac{\partial e}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{\Pi} = 0$

(c) $e + \dfrac{\partial\left(\mathrm{div}\,\vec{\Pi}\right)}{\partial t} = 0$

(d) $e + \mathrm{div}\,\vec{\Pi} = 0$

.....

Réponses mélangées

Oui (b) non Négative Nulle (b) $1{,}1 \times 10^{1}$

$\dfrac{E_0 B_0}{\mu_0} \cos(\omega t - kz + \varphi) \sin(\omega t - kz + \varphi)\vec{e_z}$ (d) $E_0 \dfrac{k}{\omega} \cos(\omega t - kz + \varphi)\vec{e_y}$ (c)

Négative $\dfrac{M \cdot L}{I \cdot T^3}$ $\dfrac{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}{2\,\mu_0\, c}\,\vec{e_z}$ $-\omega y\vec{e_x} + \omega x\vec{e_y}$ (b) $\vec{0}$

Positive $\dfrac{B_0}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \cosh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha z) \exp(-\alpha t)\vec{e_x}$ $-\dfrac{E_{0y}}{c} \cos(k\,z - \omega\,t + \psi_2)\,\vec{e_x}$ $+\dfrac{E_{0x}}{c} \cos(k\,z - \omega\,t + \psi_1)\,\vec{e_y}$

$\dfrac{1}{c}\left(E_{0x}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k\,z-\omega\,t+\psi_1)}\,\vec{e_y} - E_{0y}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k\,z-\omega\,t+\psi_2)}\,\vec{e_x}\right)$ Negative $-\dfrac{L}{\varepsilon_0 S} Q \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ oui

$-\dfrac{E_0 B_0}{\mu_0} \cosh(\beta z) \sinh(\beta z) \exp(-2\alpha t)\vec{e_x}$ $4\pi R^3(a - bR^2)$ Négative $\dfrac{LQ^2}{2\varepsilon_0 S}$

$\dfrac{1}{c}\left(E_{0x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\,z-\omega\,t+\psi_1)}\,\vec{e_y} - E_{0y}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\,z-\omega\,t+\psi_2)}\,\vec{e_x}\right)$ $\dfrac{M \cdot L}{I \cdot T^3}$ $\dfrac{M}{I \cdot T^2}$ $r\omega$ Nulle (c) $I \cdot T$

$E_0\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \sinh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha z) \exp(-\alpha t)\vec{e_y}$ 0 $-E_0 \exp[\mathrm{i}(\omega t + kz)]\vec{e_x}$ $+\mathrm{i}E_0 \exp[\mathrm{i}(\omega t + kz)]\vec{e_y}$ $1{,}1 \times 10^{-8}$

(b) Positive (c) (d) (c) $E_{0x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\,z-\omega\,t+\psi_1)}\,\vec{e_x}$ $+E_{0y}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\,z-\omega\,t+\psi_2)}\,\vec{e_y}$ oui

$\dfrac{E_x^2 + E_y^2}{\mu_0\, c}\,\vec{e_z}$ $-\mu_0 n \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \dfrac{r}{2}\vec{e_\theta}$ Nulle $r\omega\vec{e_\theta}$ $1{,}1 \times 10^{12}$ $3a - 5br^2$

$2\omega\vec{e_z}$ $-\mu_0 n \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \dfrac{R^2}{2r}\vec{e_\theta}$ $-\dfrac{R}{2\varepsilon_0 S^2} Q \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\vec{e_r}$ $\mu_0\ \mathrm{div}\ \vec{j} + \varepsilon_0\,\mu_0 \dfrac{\partial\,\mathrm{div}\,\vec{E}}{\partial t}$ $\dfrac{a^2}{r}\omega$

$\dfrac{c^3 B_0}{k^2\omega r^3} \cos(\omega t)\vec{e_z}$ $E_0 \cos[\omega t - kx]\vec{e_y} + E_0 \sin[\omega t - kx]\vec{e_z}$ Positive $-\mu_0 n \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \dfrac{r}{2}\vec{e_\theta}$

$\mu_0\ \mathrm{div}\ \vec{j} + \mu_0 \dfrac{\partial \rho}{\partial t}$ (a) $-\dfrac{2E_0}{k^2 r^3} \int \cos(\omega t)\vec{e_\theta}\,\mathrm{d}t$ $-\mu_0 n \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \dfrac{R^2}{2r}\vec{e_\theta}$ m

(a) Positive $B_0 \dfrac{k}{\varepsilon_0\mu_0\omega} \sin(\omega t - kz + \varphi)\vec{e_x}$ Nulle $4\pi R^3(a - bR^2)$

► Réponses et corrigés page 308

Induction

Fiche du « Cahier d'entraînement 1re année » pour se préparer
⟶ *Champ magnétique, Induction*

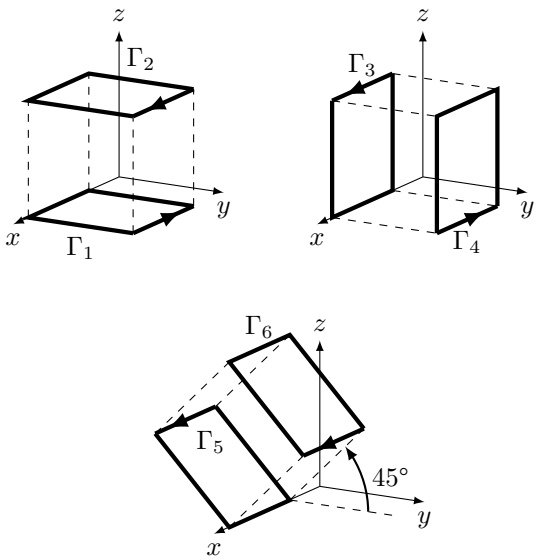
Prérequis
Champ magnétique. Loi de Faraday. Orientation d'une surface à l'aide de la règle de la main droite (règle du tire-bouchon).
Flux du champ magnétique $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$.
Force élémentaire de Laplace $\mathrm{d}\vec{F_L} = i\mathrm{d}\vec{\ell} \wedge \vec{B}$. Loi des mailles.

Pour commencer

Entraînement 6.1 — Orientation d'une surface.

On associe à un contour orienté son vecteur normal en utilisant la règle dite de la main droite ou du tire-bouchon.

Pour chaque contour Γ_i orienté suivant, exprimer le vecteur normal unitaire $\vec{n_i}$ de la surface qu'il délimite en fonction des vecteurs $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$.



a) $\vec{n_1}$ ..... d) $\vec{n_4}$ .....

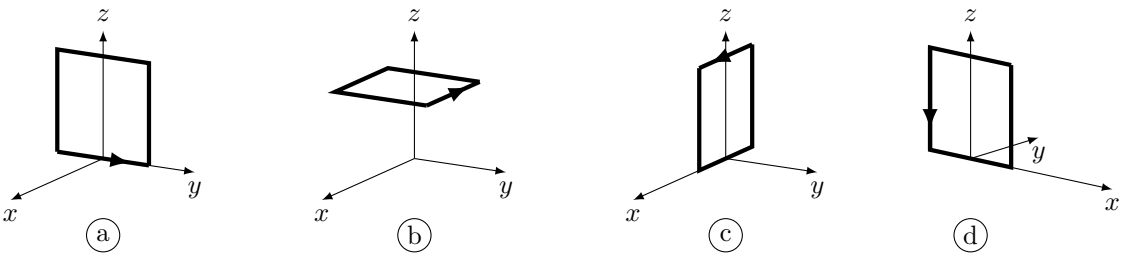
b) $\vec{n_2}$ ..... e) $\vec{n_5}$ .....

c) $\vec{n_3}$ ..... f) $\vec{n_6}$ .....

Entraînement 6.2 — Orientation d'un contour.

On associe à un contour orienté son vecteur normal en utilisant la règle dite de la main droite ou du tire-bouchon. Quelle représentation du contour pourrait correspondre aux vecteurs suivants ?

La réponse peut être « aucune » !



a) $-\vec{e_y}$ ..... ☐

b) $-\vec{e_x}$ ..... ☐

c) $\vec{e_z}$ ..... ☐

d) $\vec{e_x}$ ..... ☐

Entraînement 6.3 — Varie ou ne varie pas ? Telle est la question.

Soit un cadre de vecteur normal $\vec{n}$ et un champ magnétique $\vec{B}$.

Dans les situations suivantes, le flux de $\vec{B}$ à travers le cadre varie-t-il au cours du temps ?

Répondre par « oui » ou « non ».

On rappelle que le flux est défini par $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$.

a) $\vec{B}$ est uniforme et initialement $\vec{B} \wedge \vec{n} = \vec{0}$. Le cadre tourne autour d'un de ses côtés ... ☐

b) Le cadre pénètre dans une zone où règne $\vec{B}$ uniforme. $\vec{B}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires ..... ☐

c) Le champ $\vec{B}(t)$ dépend du temps et est perpendiculaire à $\vec{n}$. Le cadre est fixe et indéformable.

..... ☐

d) Le cadre est animé d'un mouvement de translation rectiligne dans $\vec{B}$ uniforme et constant.

..... ☐

e) La surface du cadre diminue. Le champ $\vec{B}$ est uniforme, colinéaire de sens opposé à $\vec{n}$.

..... ☐

f) Le cadre est fixe. Le champ $\vec{B}$ est colinéaire à $\vec{n}$, non uniforme et indépendant du temps.

..... ☐

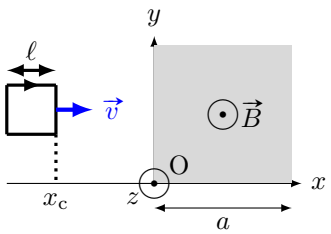
Flux du champ magnétique

Entraînement 6.4 — Flux à travers un circuit mobile (I).

On considère un circuit carré de côté ℓ se déplaçant à la vitesse $\vec{v} = v\vec{e_x}$ et dont le côté droit est repéré par l'abscisse x_c.

Un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{e_z}$ règne dans la zone comprise entre $x = 0$ et $x = a > \ell$.

On oriente le circuit tel que $\vec{n} = -\vec{e_z}$.



Exprimer le flux du champ magnétique $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$ en fonction de B, x_c, ℓ et a si :

a) $x_c < 0$ ..... c) $\ell < x_c < a$ .....

b) $0 < x_c < \ell$ ..... d) $a < x_c < a + \ell$ .....

En déduire la dérivée du flux par rapport au temps en fonction de B, v et ℓ si :

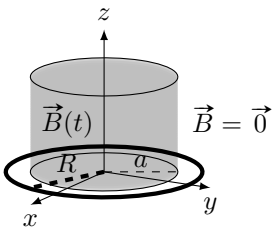
e) $x_c < 0$ ..... g) $\ell < x_c < a$ .....

f) $0 < x_c < \ell$ ..... h) $a < x_c < a + \ell$ .....

Entraînement 6.5 — Flux à travers un disque.

On considère le système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) de base $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$. Soit un champ magnétique uniforme

$$\vec{B} = B_m \cos(\omega t)\vec{e_z} \text{ si } r < a \quad \text{et} \quad \vec{B} = \vec{0} \text{ si } r > a.$$



Déterminer le flux Φ du champ magnétique à travers un disque de rayon R d'axe z et de vecteur normal $\vec{e_z}$ si :

a) $R < a$ ..... b) $R > a$ .....

On considère maintenant un champ magnétique $\vec{B'}$ défini par

$$\vec{B'}(\mathrm{M}) = B_0\left(1 - \frac{r}{a}\right)\vec{e_z} \text{ si } r < a \qquad \text{et} \qquad \vec{B'} = \vec{0} \text{ si } r > a.$$

On désire exprimer son flux Φ' aussi à travers le disque de rayon R d'axe z et de vecteur normal $\vec{e_z}$.

c) Quelle sera l'expression de l'élément de surface $\mathrm{d}S$ du disque à considérer pour calculer le flux de $\vec{B'}$?

.....

Déterminer Φ' si :

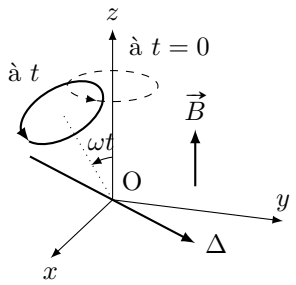
d) $R < a$ ..... e) $R > a$ .....

Entraînement 6.6 — Flux à travers un circuit mobile (II).

Dans une zone de champ magnétique uniforme

$$\vec{B} = B\vec{e_z},$$

on considère une spire orientée de rayon R en rotation autour d'un axe Δ perpendiculaire à l'axe (Oz) avec une vitesse angulaire constante ω.



a) Quelle est l'expression du flux de $\vec{B}$ à travers la spire à t quelconque ? .....

Exprimer le flux en fonction de B et R pour les différentes valeurs de ωt suivantes :

b) $\frac{\pi}{2}$ .... c) $\frac{2\pi}{3}$ ... d) $\frac{11\pi}{6}$ .. e) 2π ...

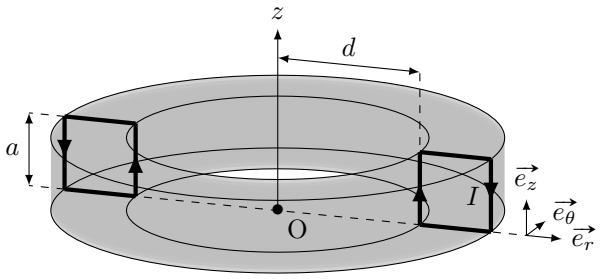
Entraînement 6.7 — Flux propre d'un tore.

Soit un tore d'axe (Oz), constitué de N spires carrées de côté a. Le champ magnétique créé par ce dispositif est tel que

$$\vec{B}(\mathrm{M}) = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}\vec{e_\theta}$$

pour $0 < z < a$ ou $d < r < d + a$, et nul sinon.

On désire, dans un premier temps, calculer le flux de ce champ à travers une seule des spires. Le vecteur normal à la spire est le vecteur $\vec{e_\theta}$.



a) Quelle sera la surface élémentaire $\mathrm{d}S$ à utiliser pour le calcul du flux $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}S\vec{e_\theta}$?

(a) $\mathrm{d}S = \mathrm{d}r\,\mathrm{d}z$ (b) $\mathrm{d}S = r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r$ (c) $\mathrm{d}S = r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$ (d) $\mathrm{d}S = \mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$

.....

b) Quelle sera l'expression du flux à travers une spire ?

(a) $\Phi = \int_{r=d}^{a+d}\int_{z=0}^{a} \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}\,\mathrm{d}r \times \mathrm{d}z$

(b) $\Phi = \int_{r=0}^{a}\int_{z=0}^{a} \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}\,\mathrm{d}r \times \mathrm{d}z$

(c) $\Phi = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{a} \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} r\,\mathrm{d}\theta \times \mathrm{d}z$

(d) $\Phi = \int_{r=d}^{a+d}\int_{z=0}^{a} \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} r\,\mathrm{d}\theta \times \mathrm{d}z$

.....

c) En réalisant le calcul intégral, calculer Φ .....

d) En déduire l'expression du coefficient d'auto-induction L défini par $\Phi_{\text{tore}} = LI$, où Φ_{tore} désigne le flux du champ créé par le tore à travers ses N spires (aussi appelé flux propre).

.....

Lien avec l'équation de Maxwell-Faraday

Entraînement 6.8

Soit $\vec{E}$ un champ électrique d'expression $E(r)\vec{e_\theta}$ et soit $\vec{B}$ un champ magnétique d'expression $B_0\cos(\omega t)\vec{e_z}$.

Ils sont reliés par l'équation de Maxwell-Faraday $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

On rappelle l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{e_r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e_z}.$$

a) Quelle est l'équation vérifiée par $E(r)$?

(a) $\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}(rE(r))}{\mathrm{d}r} = -B_0\sin(\omega t)$

(b) $-\dfrac{\mathrm{d}(E(r))}{\mathrm{d}r} = B_0\omega\sin(\omega t)$

(c) $\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}(rE(r))}{\mathrm{d}r} = B_0\omega\sin(\omega t)$

(d) $\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}E(r)}{\mathrm{d}\theta} = B_0\omega\cos(\omega t)$

.....

b) En déduire $E(r)$.

On prendra $E(r=0) = 0$.

.....

Systèmes d'équations couplées

Entraînement 6.9

Après écriture de la loi des mailles et de la relation fondamentale de la dynamique, un étudiant obtient ce système d'équations à résoudre :

$$\begin{cases} Ri + aBv = 0 \\ m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - iBa = mg. \end{cases}$$

a) Quelle est l'équation différentielle vérifiée par v ?

(a) $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - \dfrac{a^2B^2v}{Rm} = g$

(b) $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{a^2B^2v}{R} = g$

(c) $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{a^2B^2v}{Rm} = g$

.....

b) Quelle est la dimension du coefficient $\dfrac{a^2B^2}{Rm}$?

On note T *la dimension d'un temps et* M *la dimension d'une masse.*

(a) T^{-1}

(b) 1

(c) T

(d) $\mathrm{T}\cdot\mathrm{M}^{-1}$

.....

Entraînement 6.10 — Passage en complexe.

On considère un dispositif dont les équations mécaniques et électriques permettent d'établir le système suivant, où u est une tension :

$$\begin{cases} Ri + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - \alpha B v = u \\ m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -iB\alpha - kz - hv \\ v = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}. \end{cases}$$

Les grandeurs i, u et v sont sinusoïdales donc du type $x(t) = X_\mathrm{m}\cos(\omega t + \varphi)$.

Leur grandeur complexe associée est du type $\underline{x}(t) = X_\mathrm{m}\exp(\mathrm{j}\omega t + \varphi)$ et leur amplitude complexe associée $\underline{X} = X_\mathrm{m}\exp(\mathrm{j}\varphi)$ (où $\mathrm{j}^2 = -1$).

a) Comment s'écrit le système après passage en complexe ?

(a) $\begin{cases} R\underline{I} + \dfrac{L}{\mathrm{j}\omega}\underline{I} - \alpha B\underline{V} = \underline{U} \\ \mathrm{j}m\omega\underline{V} = -B\alpha\underline{I} - \mathrm{j}k\omega\underline{V} - h\underline{V} \\ \underline{V} = \mathrm{j}\omega\underline{Z} \end{cases}$

(b) $\begin{cases} R\underline{I} + \mathrm{j}L\omega\underline{I} - \alpha B\underline{V} = U_\mathrm{m}\cos(\omega t) \\ \dfrac{m}{\mathrm{j}\omega}\underline{V} = -B\alpha\underline{I} - k\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega}\underline{V} - h\underline{V} \\ \underline{V} = \mathrm{j}\omega\underline{Z} \end{cases}$

(c) $\begin{cases} R\underline{I} + \mathrm{j}L\omega\underline{I} - \alpha B\underline{V} = \underline{U} \\ \mathrm{j}m\omega\underline{V} = -B\alpha\underline{I} - k\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega}\underline{V} - h\underline{V} \\ \underline{V} = \mathrm{j}\omega\underline{Z} \end{cases}$

.....

b) Exprimer l'amplitude complexe $\underline{V}$ en fonction de $\underline{I}$.

.....

c) En éliminant $\underline{V}$ dans les deux premières équations du système, déterminer la bonne expression de l'impédance complexe $\underline{Z_\mathrm{eq}} = \dfrac{\underline{U}}{\underline{I}}$ parmi les expressions suivantes.

(a) $\underline{Z_\mathrm{eq}} = R + \dfrac{L}{\mathrm{j}\omega} + \dfrac{\alpha^2 B^2}{h + \mathrm{j}(k\omega - \frac{m}{\omega})}$

(b) $\underline{Z_\mathrm{eq}} = R + \mathrm{j}L\omega + \alpha^2 B^2\left(h + \mathrm{j}\left(m\omega - \dfrac{k}{\omega}\right)\right)$

(c) $\underline{Z_\mathrm{eq}} = R + \mathrm{j}L\omega + \dfrac{\alpha^2 B^2}{h + \mathrm{j}(m\omega - \frac{k}{\omega})}$

(d) $\underline{Z_\mathrm{eq}} = \dfrac{R + \mathrm{j}L\omega + \alpha^2 B^2}{\left(h + \mathrm{j}\left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)\right)}$

.....

Entraînement 6.11 — Bilan de puissance.

On considère le système d'équations électrique (EE) et mécanique (EM) suivant avec la force électromotrice induite $e = -Bav$, avec la force de Laplace de valeur $f_\text{L} = Bai$ et où f est une force exercée par un opérateur extérieur :

$$\begin{cases} e = Ri & \text{(EE)} \\ m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = f + f_\text{L} & \text{(EM).} \end{cases}$$

On rappelle que l'énergie cinétique de la barre est $E_c = \dfrac{1}{2}mv^2$ *et que la puissance dissipée par effet Joule est* $\mathcal{P}_J = Ri^2$.

a) Exprimer, en fonction de R et i, le terme $Bavi$ à partir de e dans (EE) ...

b) Exprimer, en fonction de m, v et f, le terme $Bavi$ à partir de f_L dans (EM).

.....

c) Égaliser les expressions obtenues en a) et b) pour exprimer la puissance fournie par l'opérateur fv en fonction de E_c et $\mathcal{P}_\text{J}$.

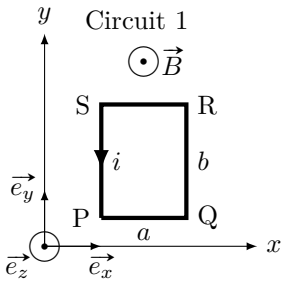
On rappelle que $\left(f^2(x)\right)' = 2f'(x)f(x)$.

.....

Force de Laplace

Entraînement 6.12 — Force de Laplace sur une spire rectangulaire.

On considère un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme ainsi qu'un circuit rectangulaire (appelé « circuit 1 »), parcouru par un courant i.



Quelle est l'expression de la force de Laplace s'exerçant sur chaque portion du circuit 1 en fonction de B, a, i et des vecteurs unitaires du repère ?

a) PQ .....

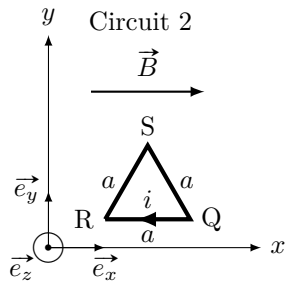
b) QR .....

c) RS .....

d) SP .....

e) Quelle est la résultante des forces de Laplace exercées sur le circuit 1 ? ....

Entraînement 6.13 — Force de Laplace sur une spire triangulaire.

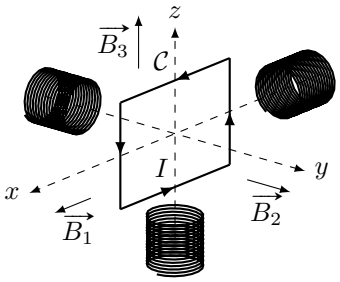


On considère un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme et un circuit triangulaire (appelé « circuit 2 »), parcouru par un courant i.

Quelle est l'expression de la force de Laplace s'exerçant sur chaque portion du circuit 2 en fonction de B, a, i et des vecteurs unitaires du repère ?

a) QR. ... b) RS .... c) SQ ....

Entraînement 6.14 — Couple des forces de Laplace sur une spire.



Un circuit mobile $\mathcal{C}$ de surface S dans lequel circule un courant d'intensité I est soumis à différents champs magnétiques uniformes et constants produits par trois bobines tels que :

$\vec{B_1} = B\vec{e_x}$; $\vec{B_2} = B\vec{e_y}$; $\vec{B_3} = B\vec{e_z}$.

On rappelle que le moment magnétique d'une spire $\vec{\mathcal{M}}$ est défini par $\vec{\mathcal{M}} = I\vec{S}$ avec $\vec{S}$ son vecteur surface.

a) Exprimer le vecteur surface $\vec{S}$ en fonction de S et de la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ .....

Exprimer le couple des forces de Laplace $\vec{\Gamma}_{\text{L}} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$ que subit la spire $\mathcal{C}$ en fonction de S, I et B pour :

b) $\vec{B_1}$ ... c) $\vec{B_2}$ ... d) $\vec{B_3}$ ...

Les couples des forces de Laplace mettent la spire en rotation. Parmi les champs produits par les bobines, déterminer à l'aide de la règle de la main droite celui qui provoque les rotations du circuit $\mathcal{C}$ données ci-dessous.

e) La rotation de la spire autour de l'axe (Ox) dans le sens direct.

(a) $\vec{B_1}$ (b) $\vec{B_2}$ (c) $\vec{B_3}$ (d) aucun

.....

f) La rotation de la spire autour de l'axe (Oy) dans le sens direct ?

(a) $\vec{B_1}$ (b) $\vec{B_2}$ (c) $\vec{B_3}$ (d) aucun

.....

g) La rotation de la spire autour de l'axe (Oz) dans le sens direct ?

(a) $\vec{B_1}$ (b) $\vec{B_2}$ (c) $\vec{B_3}$ (d) aucun

.....

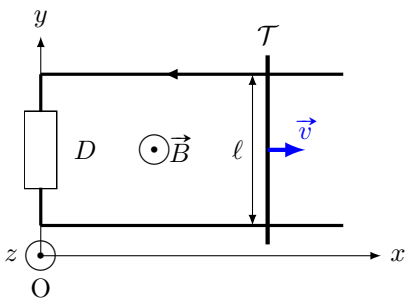
Autour du rail de Laplace

Le rail de Laplace est un circuit constitué de deux rails conducteurs parallèles horizontaux espacés d'une distance $\ell = 10$ cm sur lesquels repose une tige conductrice $\mathcal{T}$ de masse $m = 10$ g.

Celle-ci glisse sans frottement sur les rails tout en leur restant perpendiculaire.

On repère la position x de la tige sur l'axe (Ox). On suppose que les rails conducteurs et la tige ont une résistance nulle.

L'ensemble est soumis à un champ magnétique uniforme permanent $\vec{B} = B\vec{e_z}$, avec $B = 1$ T. À l'instant initial, la tige est lancée à une vitesse $\vec{v}(t=0) = v_0\vec{e_x}$.



Le composant D est un dipôle dont la nature sera indiquée dans les exercices suivants.

Entraînement 6.15 — Rail de Laplace (I).

Dans cet entraînement, le dipôle D est une résistance R. On peut établir l'équation électrique (EE) et l'équation mécanique (EM) suivantes :

$$\begin{cases} B\ell v = Ri & \text{(EE)} \\ m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -B\ell i & \text{(EM).} \end{cases}$$

a) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$ .....

b) Quelle est l'expression de la vitesse $v(t)$?

(a) $v_0 \exp\left(-\dfrac{mR}{B^2\ell^2}t\right)$ (c) $v_0 \exp\left(-\dfrac{B^2\ell^2}{mR}t\right)$

(b) $v_0 \exp\left(-\dfrac{B\ell}{mR}t\right)$ (d) $v_0 \exp\left(-\dfrac{B^2\ell^2}{R}t\right)$

.....

Entraînement 6.16 — Rail de Laplace (II).

Dans cet entraînement, le dipôle D est un générateur de tension non idéal (constitué d'un générateur de tension idéal de force électromotrice E en série avec sa résistance interne r). On peut établir l'équation électrique (EE) et l'équation mécanique (EM) suivantes :

$$\begin{cases} B\ell v(t) + E = ri & \text{(EE)} \\ m\dfrac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = -B\ell i & \text{(EM).} \end{cases}$$

a) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$ .....

b) Quelle est l'expression de la vitesse limite v_{lim} atteinte par la tige ? .....

Entraînement 6.17 — Rail de Laplace (III).

Dans cet entraînement, le dipôle D est une bobine d'inductance $L = 0{,}5\,\text{H}$ et de résistance $r = 1\,\Omega$.

On peut établir l'équation électrique (EE) et l'équation mécanique (EM) suivantes :

$$\begin{cases} B\ell v = L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + ri(t) & \text{(EE)} \\ m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -B\ell i(t) & \text{(EM).} \end{cases}$$

a) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$ .....

b) Quelle est l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$?

(a) $x^2 + \dfrac{r}{L}x + \dfrac{B^2\ell^2}{mL} = 0$

(b) $x^2 + \dfrac{L}{r}x + \dfrac{B^2\ell^2}{mL} = 0$

(c) $x^2 + \dfrac{L}{r}x + \dfrac{B^2\ell^2}{mL}x = 0$

.....

c) Comment peut-on qualifier le discriminant associé à l'équation caractéristique ?

(a) Il est strictement positif.

(b) Il est nul.

(c) Il est strictement négatif.

.....

d) Quelle est l'expression de $i(t)$?

Les nombres α et β sont réels.

(a) $\alpha \mathrm{e}^{\left(-\frac{r}{2L}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r^2}{L^2}-4\frac{B^2\ell^2}{mL}}\right)t} + \beta \mathrm{e}^{\left(-\frac{r}{2L}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r^2}{L^2}-4\frac{B^2\ell^2}{mL}}\right)t}$

(b) $\mathrm{e}^{-\frac{r}{2L}t}\left(\alpha\cos\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{r^2}{L^2}-4\dfrac{B^2\ell^2}{mL}}t\right) + \beta\sin\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{r^2}{L^2}-4\dfrac{B^2\ell^2}{mL}}t\right)\right)$

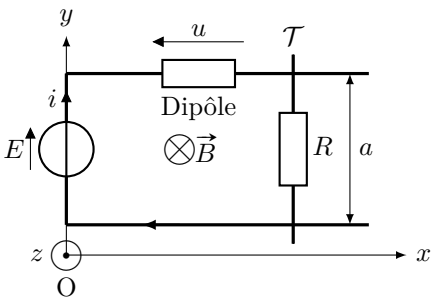
(c) $(\alpha+\beta t)\mathrm{e}^{-\frac{r}{2L}t}$

(d) $\mathrm{e}^{-\frac{r}{2L}t}\left(\alpha\cos\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{4\dfrac{B^2\ell^2}{mL}-\dfrac{r^2}{L^2}}t\right) + \beta\sin\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{4\dfrac{B^2\ell^2}{mL}-\dfrac{r^2}{L^2}}t\right)\right)$

.....

Entraînement 6.18 — Équations différentielles.

On considère un circuit constitué d'un générateur de force électromotrice constante E, d'un dipôle et d'une tige mobile $\mathcal{T}$ de résistance R repérée par la coordonnée x sur l'axe (Ox), plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$. On oriente le circuit dans le sens horaire.

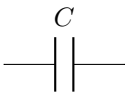


On admet que le principe fondamental de la dynamique appliqué à la tige $\mathcal{T}$ selon l'axe (Ox) permet d'écrire la relation $m\ddot{x} = iaB$. De plus, la force électromotrice induite est $e = -Ba\dot{x}$.

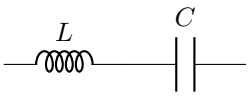
On étudie les cas où le dipôle correspond à ces trois montages suivants.

Dipôle 1 : Fil

Dipôle 2 :

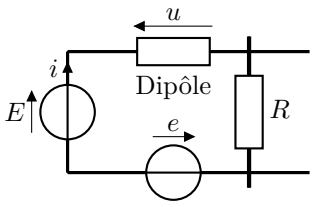


Dipôle 3 :

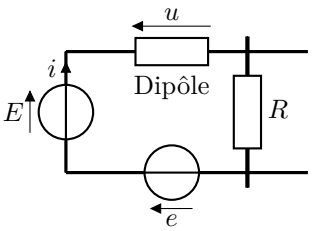


a) Quel sera le montage complet en tenant compte de la force électromotrice induite e ?

(a)



(b)



.....

b) Exprimer la tension u à partir de la loi des mailles en fonction de E, i, R, B, a et $\dot{x}$.

.....

c) Exprimer $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ en fonction de B, a, m, R, i et de $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ .....

d) Donner l'équation différentielle vérifiée par i pour le dipôle 1.

.....

e) Donner l'équation différentielle vérifiée par i pour le dipôle 2.

.....

f) Donner l'équation différentielle vérifiée par i pour le dipôle 3.

.....

Autres entraînements

Entraînement 6.19 — Vitesse limite.

L'expression de la vitesse $v(t)$ d'une tige sur des rails de Laplace a pour expression

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{e}{Ba}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$

a) Comment s'écrit la dimension du coefficient τ ?

On note T *la dimension d'un temps et* M *la dimension d'une masse.*

(a) 1
(b) T
(c) T^{-1}
(d) $\mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-1}$

.....

b) En supposant que, à $t = 0$, $x(t = 0) = x_0$, déterminer $x(t)$.

.....

Entraînement 6.20 — Un système couplé.

Après écriture de la loi des mailles et de la relation fondamentale de la dynamique, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} Ri + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + aBv = 0 \\ m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - iBa = mg. \end{cases}$$

a) Quelle est l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$?

(a) $\dfrac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{aBv}{Lm} = \dfrac{Rg}{L}$

(b) $\dfrac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{a^2B^2v}{Lm} = \dfrac{Rg}{L}$

(c) $\dfrac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - \dfrac{a^2B^2v}{Lm} = \dfrac{Rg}{L}$

.....

b) Quelle est la dimension du coefficient $\dfrac{Rg}{L}$?

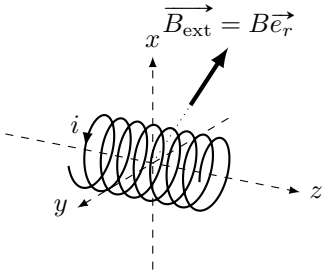
On note T *la dimension d'un temps et* M *la dimension d'une masse.*

(a) 1
(b) $\mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-3}$
(c) $\mathrm{L}^{-1} \cdot \mathrm{T}^{3}$
(d) $\mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-2}$

.....

Entraînement 6.21 — Force de Laplace.

Soit une bobine de N spires de rayon R d'axe (Oz) et soumise à un champ magnétique extérieur radial $\overrightarrow{B_{\text{ext}}} = B\overrightarrow{e_r}$ dans le système de coordonnées cylindriques.



a) Donner l'expression d'un élément de longueur $\mathrm{d}\ell$ de la bobine.

(a) $\mathrm{d}r$ (b) $\mathrm{d}z$ (c) $\mathrm{d}x$ (d) $R\,\mathrm{d}\theta$

.....

b) Déterminer l'expression de la force de Laplace s'exerçant sur la bobine.

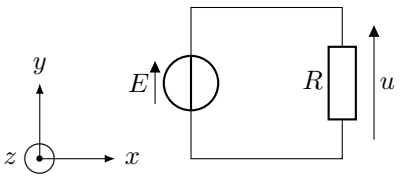
.....

Entraînement 6.22 — Choix du sens du courant induit.

Soit un circuit électrique de surface $S = 500\,\mathrm{cm}^2$, composé d'un générateur idéal délivrant une tension $E = 200\,\mathrm{mV}$ et un résistor de résistance $R = 5\,\mathrm{k\Omega}$.

Il est plongé dans un champ magnétique tel que $\vec{B} = B\dfrac{t}{\tau}\overrightarrow{e_z}$ avec $B = 2\,\mathrm{T}$.

On prendra $\tau = 1\,\mathrm{s}$.



On choisit d'orienter le courant induit i_{ind} dans le sens horaire.

a) Dans quel sens est orientée la flèche de tension de la fém e induite par rapport à E ?

(a) dans le même sens (b) dans le sens opposé

.....

b) À partir de la règle de la main droite, exprimer le vecteur surface du circuit $\vec{S}$ en fonction de S et des vecteur de la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$.

.....

c) Exprimer le flux magnétique ϕ traversant le circuit en fonction de B, t, τ et S.

.....

d) Exprimer la fém e apparaissant dans le circuit en fonction de B, τ et S .....

e) Quelle est la valeur de la tension u aux bornes du résistor ? .....

On choisit d'orienter le courant induit i_{ind} dans le sens anti-horaire.

f) Dans quel sens est orientée la flèche de tension de la fém e induite par rapport à E ?

(a) dans le même sens (b) dans le sens opposé

.....

g) À partir de la règle de la main droite, exprimer le vecteur surface du circuit $\vec{S}$ en fonction de S et des vecteur de la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$.

.....

h) Exprimer le flux magnétique ϕ traversant le circuit en fonction de B, t, τ et S.

.....

i) Exprimer la fém e apparaissant dans le circuit en fonction de B, τ et S .....

j) Calculer la valeur de la tension u aux bornes du résistor .....

Entraînement 6.23 — Un bilan de puissance.

On considère le système d'équations électrique (EE) et mécanique (EM) suivant, avec la force électromotrice induite $e = -Bav$, la force de Laplace de valeur $f_{\text{L}} = Bai$, la force de rappel d'un ressort de valeur $-kx$ et une force de frottement fluide de valeur $-\alpha v$:

$$\begin{cases} E + e = Ri & \text{(EE)} \\ m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = f_{\text{L}} - kx - \alpha v & \text{(EM).} \end{cases}$$

On rappelle que l'énergie cinétique de la barre est $E_c = \dfrac{1}{2}mv^2$ *; que la puissance dissipée par effet Joule est* $\mathcal{P}_J = Ri^2$ *; que l'énergie potentielle de la barre est* $E_p = \dfrac{1}{2}kx^2$ *; enfin, que la puissance dissipée par frottements est* $\mathcal{P}_f = \alpha v^2$.

a) Exprimer, en fonction de E, R et i, le terme $Bavi$ à partir de e dans (EE).

.....

b) Exprimer, en fonction de m, v, k, x et α le terme $Bavi$ à partir de f_{L} dans (EM).

.....

c) Égaliser les expressions obtenues en a) et b) pour exprimer la puissance fournie Ei en fonction des grandeurs E_{c}, $\mathcal{P}_{\text{J}}$, E_{p} et $\mathcal{P}_{\text{f}}$.

On rappelle que $v = \dot{x}$.

.....

Réponses mélangées

$\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e_y}+\vec{e_z})$ (b) $mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}-fv$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e_y}+\vec{e_z})$ $-i\frac{\sqrt{3}}{2}aB\vec{e_z}$ $-IBS\vec{e_z}$ $\vec{e_y}$

(c) $-\frac{B\pi R^2}{2}$ (c) (a) $\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}t}+\mathcal{P}_\mathrm{f}+\mathcal{P}_\mathrm{J}$ non $B_0\omega\sin(\omega t)\frac{r}{2}$

(c) $R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{(Ba)^2}{m}i=0$ $\vec{e_y}$ $-ibB\vec{e_x}$ $2\pi B_0\frac{a^2}{6}$ $-\frac{BS}{\tau}$ (b)

(a) $\frac{\mathrm{d}^2i(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{r}{L}\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{B^2\ell^2}{mL}i(t)=0$ $\pi R^2B_\mathrm{m}\cos(\omega t)$ non $\mathrm{d}S=r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r$

oui $\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t}+\mathcal{P}_\mathrm{J}$ $S\vec{e_z}$ $Ei-Ri^2$ (a) $Bv\ell$ 300 mV $-S\vec{e_z}$

$-B(a-(x_\mathrm{c}-\ell))\ell$ (b) $-Ri^2$ $\frac{\sqrt{3}}{2}B\pi R^2$ 0 (a) $E-Ba\dot{x}-Ri$

(d) $-Bx_\mathrm{c}\ell$ $B\pi R^2$ $mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+kxv+\alpha v^2$ $x_0+\frac{e}{Ba}\left(t+\tau\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}-\tau\right)$ (d)

(d) $ibB\vec{e_x}$ $-B\frac{t}{\tau}S$ $\frac{\mu_0NIa}{2\pi}\ln\left(\frac{d+a}{d}\right)$ (c) 0 $-iB2\pi RN\vec{e_z}$ $\vec{0}$

aucune $2\pi B_0\left(\frac{R^2}{2}-\frac{R^3}{3a}\right)$ $R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\left(\frac{(Ba)^2}{m}+\frac{1}{C}\right)i=0$ $\frac{\mu_0N^2a}{2\pi}\ln\left(\frac{d+a}{d}\right)$

(a) $\frac{BS}{\tau}$ $B\pi R^2\cos(\omega t)$ $\frac{BSt}{\tau}$ $IBS\vec{e_x}$ (c) (d) 0 $S\vec{e_y}$

$\vec{0}$ $-\vec{e_z}$ $L\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2}+R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\left(\frac{(Ba)^2}{m}+\frac{1}{C}\right)i=0$ $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{B^2\ell^2}{mR}v=0$ oui

oui $-Bv\ell$ (d) (c) $\pi a^2B_\mathrm{m}\cos(\omega t)$ $-\frac{(Ba)^2}{m}i-R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ non 0

(a) $-B\ell^2$ $\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{B^2\ell^2}{mr}v(t)=-\frac{B\ell E}{mr}$ (b) $\vec{0}$ $-\frac{E}{B\ell}$ (b) $\vec{e_z}$

(c) 300 mV $\frac{-\alpha B\underline{I}}{h+\mathrm{j}(m\omega-\frac{k}{\omega})}$ $i\frac{\sqrt{3}}{2}aB\vec{e_x}$ $-iaB\vec{e_y}$ $iaB\vec{e_y}$ (b)

▶ Réponses et corrigés page 318

Ondes électromagnétiques I

Prérequis

Pour une onde plane progressive monochromatique : $\lambda = c/f$ et $f = 1/T$.
Équations de Maxwell dans un espace vide de charges et de courants :

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \qquad \text{(Maxwell-Gauss)}$$
$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \qquad \text{(Maxwell-Thomson)}$$
$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{(Maxwell-Faraday)}$$
$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \text{(Maxwell-Ampère)}$$

Formules d'analyse vectorielle, en coordonnées cartésiennes :

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$
$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e_x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{e_y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{e_z}$$
$$\vec{\Delta}\vec{A} = \Delta A_x \vec{e_x} + \Delta A_y \vec{e_y} + \Delta A_z \vec{e_z}$$
$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

Constantes utiles

→ Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3{,}00 \times 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$
→ Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{H \cdot m^{-1}}$
→ Permittivité du vide : $\varepsilon_0 = 9 \times 10^{-12}\,\mathrm{F \cdot m^{-1}}$

Calculs numériques

Entraînement 7.1 — Fréquence, longueur d'onde, vitesse de propagation.

Calculer, avec un chiffre significatif, les grandeurs suivantes :

a) la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide $c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$ ..

b) La fréquence f d'une onde de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 600\,\mathrm{nm}$ .....

c) La longueur d'onde dans le vide d'une onde de fréquence $f = 3\,\mathrm{GHz}$ .....

d) La période d'une onde de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 3\,\mathrm{pm}$ .....

Entraînement 7.2 — Combat de grandeurs (I).

On considère un pointeur laser émettant une onde représentée par son champ électromagnétique

$$\vec{E}(M,t) = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{e_z} \quad \text{et} \quad \vec{B}(M,t) = -\frac{E_0}{c}\cos(\omega t - kx)\vec{e_y},$$

avec $E_0 = 100\,\mathrm{V}\cdot\mathrm{m}^{-1}$ et une ampoule classique à filament de puissance lumineuse égale à 100 W.

Le faisceau laser est un cylindre de section $S = 1{,}0\,\mathrm{mm}^2$.

a) Expliciter la puissance moyenne surfacique $\langle P\rangle = \left\langle \iint \vec{\Pi}\cdot\mathrm{d}\vec{S}\right\rangle$, avec $\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$.

On rappelle que $\langle\cos^2(\alpha)\rangle = 1/2$ *si* α *dépend du temps* .....

b) Calculer numériquement la puissance moyenne du laser .....

c) Qui de l'ampoule classique ou du laser est le plus puissant en moyenne ? .....

Entraînement 7.3 — Combat de grandeurs (II).

On souhaite comparer le champ magnétique terrestre égal à 5×10^{-5} T à une onde radiofréquence représentée par son champ magnétique $\vec{B}(M,t) = B_0\cos(\omega t - kx)\vec{e_z}$, de puissance moyenne 1 W.

Le faisceau a une section $S = 1\,\mathrm{m}^2$. On rappelle que dans ce cas $B_0 = \dfrac{E_0}{c}$ où E_0 est la norme du champ électrique de l'onde plane.

a) Exprimer B_0 en fonction de la puissance moyenne rayonnée $\langle P\rangle = \dfrac{E_0^2 S}{2\mu_0 c}$ .....

b) Que dire du champ magnétique de l'onde radiofréquence ?

(a) Il est plus intense que le champ terrestre.
(b) Il est moins intense que le champ terrestre.
(c) Il est du même ordre de grandeur que le champ terrestre.

.....

Dérivées partielles et opérateurs

Entraînement 7.4 — Calcul de dérivées partielles (I).

On considère le champ électrique suivant : $\vec{E}(M,t) = E_0\cos(\omega t - kx)\vec{e_z}$. Calculer :

a) $\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ .....

b) $\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial x}$ .....

c) $\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial z}$ .....

d) $\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial x^2}$ .....

e) $\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$ .....

Entraînement 7.5 — Calcul de dérivées partielles (II).

On considère le champ magnétique suivant : $\vec{B}(M,t) = B_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kx)\vec{e_z}$. Calculer :

a) $\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ .....

b) $\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial x}$ .....

c) $\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial y}$ .....

d) $\dfrac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$ .....

e) $\dfrac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2}$ .....

f) $\dfrac{\partial^2 \vec{B}}{\partial y^2}$ .....

Entraînement 7.6 — Calcul d'opérateurs vectoriels (I).

On considère le champ électrique suivant : $\vec{E}(M,t) = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{e_z}$. Calculer :

a) $\operatorname{div} \vec{E}$ .....

b) $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{E}$ .....

c) $\vec{\Delta}\vec{E}$ .....

Entraînement 7.7 — Calcul d'opérateurs vectoriels (II).

On considère le champ $\vec{A}(M,t)$ dont les composantes sont données par :

$$\begin{cases} A_x &= 0 \\ A_y &= A_0 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kz) \\ A_z &= \alpha A_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kz). \end{cases}$$

Calculer :

a) $\operatorname{div} \vec{A}$ .....

b) $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{A}$ .....

c) $\vec{\Delta}\vec{A}$ .....

Entraînement 7.8 — Équation de propagation.

On cherche dans cet entraînement à démontrer l'équation de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide. On rappelle pour cela la formule du double rotationnel d'un vecteur $\vec{A}$:

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\,\vec{A}) - \vec{\Delta}\vec{A}.$$

a) En utilisant l'équation de Maxwell-Faraday puis celle de Maxwell-Ampère, on montre que :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}) = \alpha\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}.$$

Quelle est l'expression de α ?

(a) $\alpha = \mu_0\varepsilon_0$ (b) $\alpha = \dfrac{1}{\mu_0\varepsilon_0}$ (c) $\alpha = -\mu_0\varepsilon_0$

.....

b) En utilisant l'équation de Maxwell-Gauss et la formule du double rotationnel, établir une seconde expression de $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E})$ .....

c) En égalisant les expressions de $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E})$ obtenues aux questions précédentes, on obtient l'équation de d'Alembert $\vec{\Delta}\vec{E} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$.

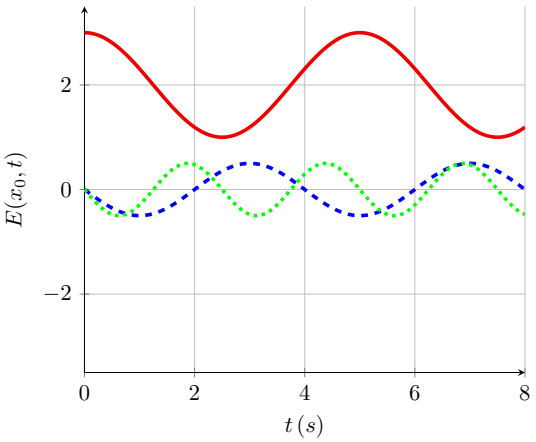
Exprimer c en fonction de ε_0 et μ_0 .....

Solutions de l'équation de propagation

Entraînement 7.9 — Représentation d'un signal.

On considère trois signaux :

- signal n° 1 :
$$E(x_0,t) = 2 + \cos\left(2\pi\frac{t}{T_1}\right) \text{ avec } T_1 = 5\,\text{s}$$
- signal n° 2 :
$$E(x_0,t) = 0{,}5\cos\left(2\pi\frac{t}{T_2} + \frac{\pi}{2}\right) \text{ avec } T_2 = 4\,\text{s}$$
- signal n° 3 :
$$E(x_0,t) = 0{,}5\cos\left(2\pi\frac{t}{T_3} + \frac{\pi}{2}\right) \text{ avec } T_3 = 2{,}5\,\text{s}$$



On donne ci-contre leurs représentations graphiques (à x_0 fixé, en fonction du temps).

a) À quel signal la courbe en trait plein est-elle associée ? .....

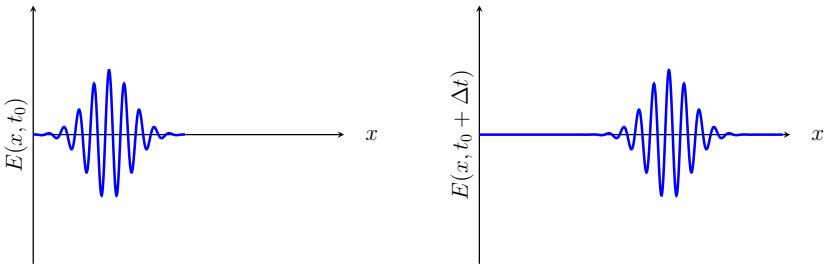
b) À quel signal la courbe en tirets est-elle associée ? .....

c) À quel signal la courbe en pointillés est-elle associée ? .....

Entraînement 7.10 — Caractérisation d'une onde.

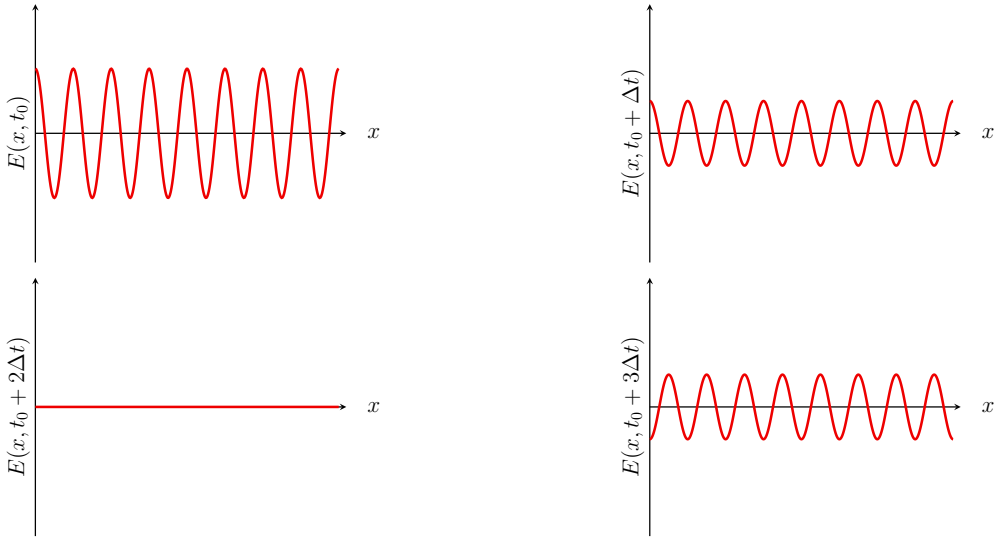
Dans chaque cas, dire si l'onde représentée est progressive (c'est-à-dire de la forme $f(x-ct)$ ou $g(x+ct)$) et/ou harmonique (dont la dépendance temporelle est sinusoïdale).

a)



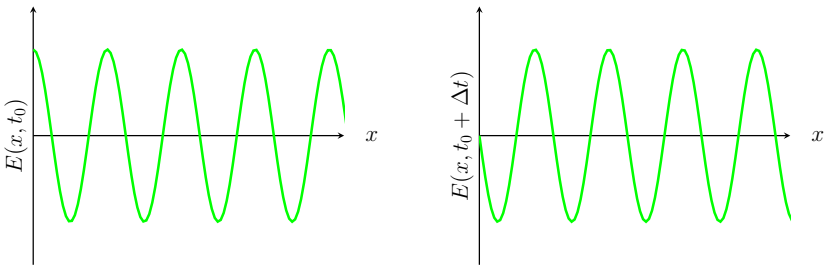
.....

b)



.....

c)



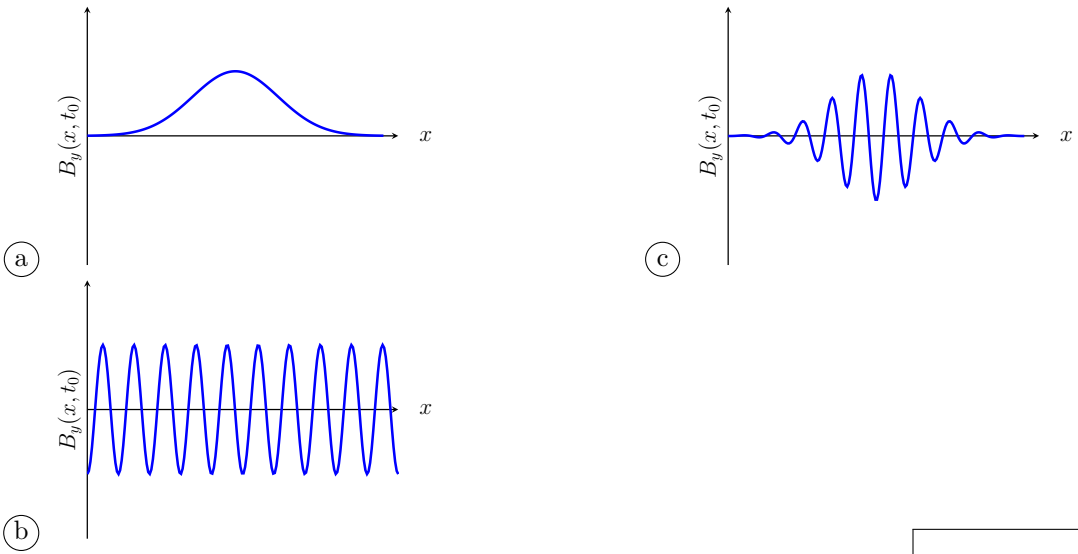
.....

Entraînement 7.11 — Onde représentée par son champ magnétique.

On étudie une onde électromagnétique dont le champ magnétique s'écrit :

$$\vec{B}(M,t) = B_0 \exp\left(-(t/\tau - x/\delta)^2\right)\vec{u_y}.$$

Choisir la représentation qui convient :



.....

Entraînement 7.12 — Onde électromagnétique dans un guide d'ondes.

Soit une onde électromagnétique, dont le champ électrique est donné par :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\alpha z)\sin(\omega t - kx)\vec{e_y},$$

où E_0 et α sont des constantes. On rappelle l'équation de propagation d'une onde électromagnétique dans le vide, aussi appelée équation de d'Alembert :

$$\vec{\Delta}\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

a) Calculer $\vec{\Delta}\vec{E}$ .....

b) Calculer $\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$, sans utiliser l'équation de d'Alembert .....

c) En utilisant l'équation de d'Alembert, exprimer k en fonction de ω, α et c .....

On rappelle qu'il y a dispersion si la vitesse de phase $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k}$ de l'onde dépend de ω.

d) Y a-t-il dispersion ici ? .....

Entraînement 7.13 — Onde sphérique progressive.

On considère le champ électrique sphérique suivant : $\vec{E}(r,t) = \dfrac{a}{r}\cos(\omega t - kr)\,\vec{e_\theta}$.

On rappelle l'expression du rotationnel en coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A} = \frac{1}{r\sin(\theta)}\left(\frac{\partial(\sin\theta A_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\vec{e_r} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{e_\varphi}.$$

a) Calculer le rotationnel du champ $\vec{E}$.

.....

b) En déduire le champ $\vec{B}$ associé à l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday.

.....

c) Indiquer les caractéristiques de la structure de ce champ électromagnétique :

(a) L'onde est transverse.
(b) L'onde est longitudinale.
(c) Les vecteurs $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ forment un trièdre direct.
(d) Les vecteurs $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ forment un trièdre indirect.
(e) Les vecteurs $(\vec{B}, \vec{k}, \vec{E})$ forment un trièdre direct.

.....

On attend plusieurs réponses.

Entraînement 7.14 — Onde dans un guide d'ondes.

On considère le champ électrique suivant :

$$\vec{E}(x,z,t) = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - kz)\vec{e_y}.$$

a) Exprimer les valeurs de z pour lesquelles le champ $\vec{E}$ s'annule.

.....

b) Exprimer les valeurs de x pour lesquelles le champ $\vec{E}$ s'annule.

.....

Entraînement 7.15 — Onde plane en notation complexe.

On considère le champ électrique complexe polarisé rectilignement suivant :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{E}_0 \exp\Big(\mathrm{j}(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)\Big)\vec{e_x} \qquad \text{et} \qquad \vec{k} = k_x\vec{e_x} + k_y\vec{e_y} + k_z\vec{e_z}.$$

Calculer :

a) la dérivée temporelle de $\underline{\vec{E}}$ .....

b) la divergence de $\underline{\vec{E}}$ .....

c) le rotationnel de $\underline{\vec{E}}$ .....

d) le laplacien vectoriel de $\underline{\vec{E}}$ .....

Attribuer alors à chaque opération de dérivation ci-dessous l'expression qui lui est associée.

(a) $-\mathrm{j}\vec{k}\cdot\underline{\vec{E}}$ (b) $-k^2\underline{\vec{E}}$ (c) $-\mathrm{j}\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}$ (d) $\mathrm{j}\omega\underline{\vec{E}}$

e) $\dfrac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t}$ .....

f) $\mathrm{div}\,\underline{\vec{E}}$ .....

g) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\underline{\vec{E}}$ .....

h) $\vec{\Delta}\,\underline{\vec{E}}$ .....

Entraînement 7.16 — Vitesse de phase et vitesse de groupe.

On considère une onde plane progressive harmonique pour laquelle la pulsation ω et le vecteur d'onde k vérifient la relation de dispersion $k^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_0^2}{c^2}$, où ω_0 est une constante positive telle que $\omega_0 < \omega$.

a) Exprimer la vitesse de phase $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k}$ de cette onde.

.....

b) En différentiant l'expression de k^2, exprimer la vitesse de groupe $v_\mathrm{g} = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$ de cette onde.

.....

Puissance et énergie des ondes électromagnétiques

Le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ et l'énergie volumique du champ w_{em} sont respectivement définis par :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \qquad \text{et} \qquad w_{\text{em}} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

Entraînement 7.17 — Puissance d'une onde plane progressive.

On considère le champ électromagnétique plan progressif monochromatique suivant :

$$\vec{E}(y,t) = E_0 \cos(\omega t - ky)\vec{e_z} \qquad \text{et} \qquad \vec{B}(y,t) = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - ky)\vec{e_x}.$$

a) Calculer le vecteur de Poynting .....

b) Calculer l'énergie volumique électromagnétique .....

Entraînement 7.18 — Puissance d'une onde sphérique progressive.

On considère le champ électromagnétique sphérique suivant :

$$\vec{E}(r,t) = \frac{a}{r} \cos(\omega t - kr)\vec{e_\theta} \quad \text{et} \quad \vec{B}(r,t) = \frac{a}{cr} \cos(\omega t - kr)\vec{e_\varphi}.$$

a) Calculer le vecteur de Poynting .....

b) Calculer l'énergie volumique électromagnétique .....

c) Calculer la puissance rayonnée $P = \iint \vec{\Pi} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$ à travers une sphère de centre O et de rayon r.

.....

Entraînement 7.19 — Puissance d'une onde dans un guide d'ondes.

Pour un certain champ électromagnétique dans le vide, on a : $\vec{E}(x,z,t) = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos(\omega t - kz)\vec{e_y}$.

a) Calculer le champ $\vec{B}$ associé à l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday.

.....

b) Calculer le vecteur de Poynting .....

c) Donner la moyenne temporelle du vecteur de Poynting.

On rappelle que $\langle \cos^2(\alpha) \rangle = \frac{1}{2}$ *si* α *dépend du temps* .....

Autour de la polarisation

Entraînement 7.20 — Polarisation rectiligne et circulaire.

On considère les champs électriques, de période T, en représentation réelle ou complexe, suivants :

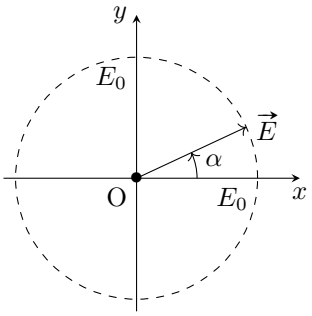
$$\overrightarrow{E_1} = \begin{cases} E_0 \cos\alpha \cos(\omega t - kz)\overrightarrow{e_x} \\ E_0 \sin\alpha \cos(\omega t - kz)\overrightarrow{e_y} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{E_2} = \begin{cases} E_0 \cos(\omega t + kz + \alpha)\overrightarrow{e_x} \\ E_0 \sin(\omega t + kz + \alpha)\overrightarrow{e_y} \end{cases}$$

$$\underline{\overrightarrow{E_3}} = E_0 \exp[\mathrm{j}(\omega t - kz + \alpha)]\,(\overrightarrow{e_x} - \mathrm{j}\overrightarrow{e_y})$$

$$\overrightarrow{E_4} = \begin{cases} E_0 \cos(\omega t + kz - \alpha)\overrightarrow{e_x} \\ -E_0 \sin(\omega t + kz - \alpha)\overrightarrow{e_y} \end{cases}$$

où E_0 est un réel positif.



Ces champs sont tous représentés à $t = 0$ et $z = 0$ par la figure ci-dessus.

Indiquer, pour chaque champ, le type de polarisation et la direction de propagation parmi les cas suivants :

(a) Rectiligne se propageant selon $+z$
(b) Rectiligne se propageant selon $-z$
(c) Circulaire gauche se propageant selon $+z$
(d) Circulaire gauche se propageant selon $-z$
(e) Circulaire droite se propageant selon $+z$
(f) Circulaire droite se propageant selon $-z$

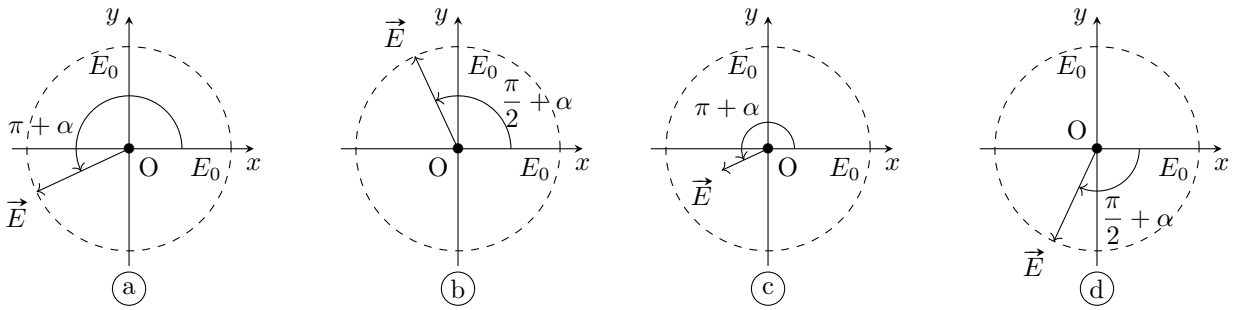
a) Pour $\overrightarrow{E_1}$ .....

b) Pour $\overrightarrow{E_2}$ .....

c) Pour $\underline{\overrightarrow{E_3}}$ .....

d) Pour $\overrightarrow{E_4}$ .....

Parmi les représentations suivantes, en $z = 0$, laquelle représente :



e) le champ $\overrightarrow{E_1}\left(t = \dfrac{T}{3}, z = 0\right)$? ...

f) le champ $\overrightarrow{E_2}\left(t = \dfrac{T}{2}, z = 0\right)$? ...

g) le champ $\underline{\overrightarrow{E_3}}\left(t = \dfrac{T}{4}, z = 0\right)$? ...

h) le champ $\overrightarrow{E_4}\left(t = \dfrac{T}{4}, z = 0\right)$? ...

Réponses mélangées

oui (a) $\dfrac{\varepsilon_0 c a^2}{r^2}\cos^2(\omega t - kr)\vec{e_r}$ (b) $1\times10^{-20}\,\mathrm{s}$ Progressive

(a) $v_g = c\sqrt{1-\left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}$ $\dfrac{\pi}{a}B_0\cos\left(\dfrac{\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kx)\vec{e_z}$ $3\times10^8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

$\varepsilon_0 E_0^2\cos^2(\omega t - ky)$ $c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$ $\dfrac{E_0}{\omega}\Big[-k\sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - kz)\vec{e_x} - \dfrac{\pi}{a}\cos\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\sin(\omega t - kz)\vec{e_z}\Big]$

$\dfrac{ak}{\omega r}\cos(\omega t - kr)\vec{e_\varphi}$ $-\omega^2\vec{E}$ $\mathrm{j}\omega\underline{\vec{E}}$ $-k^2E_0\cos(\omega t - kx)\vec{e_z}$ $-\mathrm{j}k_z\underline{E}_x\vec{e_y} + \mathrm{j}k_y\underline{E}_x\vec{e_z}$

$\dfrac{ak}{r}\sin(\omega t - kr)\vec{e_\varphi}$ (c) $-\omega B_0\sin\left(\dfrac{\pi y}{a}\right)\sin(\omega t - kx)\vec{e_z}$ (a) (f) (a)

$1\times10^{-5}\,\mathrm{W}$ $4\pi\varepsilon_0 c a^2\cos^2(\omega t - kr)$ $\dfrac{\varepsilon_0 a^2}{r^2}\cos^2(\omega t - kr)$ (d) $1\times10^{-1}\,\mathrm{m}$

$-\vec{\Delta}\vec{E}$ signal n° 2 0 $-(\alpha^2+k^2)\vec{E}$ $kE_0\sin(\omega t - kx)\vec{e_z}$ (d)

$z = ct - (2p+1)\dfrac{\lambda}{4}$ $5\times10^{14}\,\mathrm{Hz}$ signal n° 3 $B_0 = \sqrt{\dfrac{2\mu_0\langle P\rangle}{cS}}$ (c)

$A_0\cos\left(\dfrac{\pi y}{a}\right)\Big(\dfrac{\pi}{a}\alpha\cos(\omega t - kz) - k\sin(\omega t - kz)\Big)\vec{e_x}$ $\vec{0}$ $k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2$ $-k^2B_0\sin\left(\dfrac{\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kx)\vec{e_z}$

(b) $\dfrac{\varepsilon_0 c E_0^2}{2}\sin^2\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\vec{e_z}$ $-A_0\cos(\omega t - kz)\Big(\left(\dfrac{\pi}{a}\right)^2 + k^2\Big)\times\Big(\cos\left(\dfrac{\pi y}{a}\right) + \alpha\sin\left(\dfrac{\pi y}{a}\right)\Big)\vec{e_x}$ $-\omega^2E_0\cos(\omega t - kx)\vec{e_z}$

$\varepsilon_0 c E_0^2\cos^2(\omega t - ky)\vec{e_y}$ $-k^2\underline{\vec{E}}$ Stationnaire, donc non progressive et harmonique (a), (c) et (e)

$-kE_0\sin(\omega t - kx)\vec{e_y}$ signal n° 1 $x = qa$ $\dfrac{E_0^2 S}{2\mu_0 c}$ $A_0\sin\left(\dfrac{\pi y}{a}\right)\Big(-\dfrac{\pi}{a}\cos(\omega t - kz) + k\alpha\sin(\omega t - kz)\Big)$

$-\omega E_0\sin(\omega t - kx)\vec{e_z}$ $-\mathrm{j}k_x\underline{E}_x$ $-\omega^2B_0\sin\left(\dfrac{\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kx)\vec{e_z}$

$v_\varphi = \dfrac{c}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$ $-\left(\dfrac{\pi}{a}\right)^2B_0\sin\left(\dfrac{\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kx)\vec{e_z}$ Ampoule classique

(c) $k^2E_0\cos(\omega t - kx)\vec{e_z}$ (b) (c) Progressive et harmonique

(d) $kB_0\sin\left(\dfrac{\pi y}{a}\right)\sin(\omega t - kx)\vec{e_z}$ $\dfrac{E_0^2}{\mu_0}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\Big[\dfrac{1}{c}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos^2(\omega t - kz)\vec{e_z} - \dfrac{\pi}{a\omega}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - kz)\sin(\omega t - kz)\vec{e_x}\Big]$

▶ Réponses et corrigés page 326

Ondes électromagnétiques II

Prérequis

Maxwell-Gauss (M-G)
$\operatorname{div} \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

Maxwell-Thomson (M-T)
$\operatorname{div} \vec{B} = 0$

Maxwell-Faraday (M-F)
$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Maxwell-Ampère (M-A)
$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{B} = \mu_0\, \vec{j} + \varepsilon_0\, \mu_0\, \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Relation entre c, μ_0 et ε_0
$\varepsilon_0\, \mu_0 c^2 = 1$

Loi d'Ohm locale
$\vec{j} = \gamma \vec{E}$

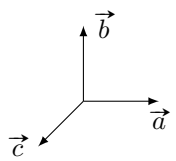
Pour bien commencer

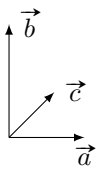
Entraînement 8.1 — Vecteurs orthogonaux ou colinéaires.

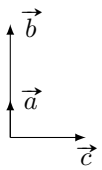
Dans chaque cas, déterminer si les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont cohérents avec les équations fournies.

Répondre simplement par « oui » ou « non ».

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ et $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ b) $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{c}$ c) $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0}$ et $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$







.....

.....

.....

Entraînement 8.2 — Dériver des exponentielles complexes.

Établir une relation de dispersion liant $\underline{k}$ à ω pour chaque équation différentielle.

On s'appuiera sur un champ électrique de la forme :

$$\vec{\underline{E}}(z,t) = E_0 \exp[\mathrm{i}(\omega t - \underline{k} z)] \vec{e_x}.$$

a) $\dfrac{\partial \vec{\underline{E}}}{\partial t} + \alpha \dfrac{\partial^2 \vec{\underline{E}}}{\partial z^2} = \vec{0}$ .....

b) $\dfrac{\partial^3 \vec{\underline{E}}}{\partial t^3} + \alpha \dfrac{\partial^3 \vec{\underline{E}}}{\partial z^3} + \beta \dfrac{\partial \vec{\underline{E}}}{\partial t} = \vec{0}$ .....

c) $\dfrac{\partial^2 \vec{\underline{E}}}{\partial t^2} + \alpha \dfrac{\partial \vec{\underline{E}}}{\partial z} + \beta \vec{\underline{E}} = \vec{0}$ .....

Entraînement 8.3 — Conservation de la charge.

On considère dans un plasma « dilué » une onde électromagnétique de fréquence suffisamment élevée, ce qui simplifie l'écriture de la densité volumique de courant en notation complexe $\underline{\vec{j}} = \underline{\alpha}(\omega)\,\underline{\vec{E}}$.

En régime sinusoïdal forcé, l'équation de conservation de la charge s'écrit $\mathrm{i}\omega\underline{\rho} + \operatorname{div}\underline{\vec{j}} = 0$.

a) Établir une relation entre $\underline{\rho}$, $\underline{\alpha}$ et ω .....

b) En tenant compte de l'expression de la conductivité complexe $\underline{\alpha} = \dfrac{N\,e^2}{\mathrm{i}\,m\,\omega}$ et en introduisant la pulsation plasma $\omega_p = \sqrt{\dfrac{N\,e^2}{m\,\varepsilon_0}}$, établir une relation liant ω, ω_p et $\underline{\rho}$ .....

Entraînement 8.4 — Expression du vecteur d'onde.

On considère une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement et caractérisée par le champ électrique complexe $\underline{\vec{E}} = E_0\,\exp[\mathrm{i}\,(\omega\,t - \underline{k}\,z)]\,\overrightarrow{e_x}$. On pose $\alpha_0 = \omega_p^2\tau\varepsilon_0 = \dfrac{\omega_p^2\,\tau}{\mu_0\,c^2}$.

Cette onde se propage dans un métal réel de conductivité α. On admet que la relation de dispersion est :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 + \mathrm{i}\frac{\omega_p^2\,\tau^2}{\omega\,\tau\,(1 - \mathrm{i}\,\omega\,\tau)}\right].$$

Dans les différents cas, déterminer l'expression de $\underline{k}$.

a) $\omega \ll \dfrac{1}{\tau} \ll \omega_p$ .....

b) $\dfrac{1}{\tau} \ll \omega < \omega_p$ .....

c) $\dfrac{1}{\tau} \ll \omega_p < \omega$ .....

d) $\dfrac{1}{\tau} \ll \omega_p \ll \omega$ .....

Entraînement 8.5 — Vitesse de phase.

Dans un milieu de propagation, les vitesses de phase v_φ et de groupe v_g d'une onde sont définies par

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k'} \quad \text{et} \quad v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k'},$$

où k' est la partie réelle positive du vecteur d'onde $\underline{\vec{k}}$. Dans un plasma, la relation de dispersion s'écrit :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2},$$

où ω_p est une constante.

a) Exprimer la vitesse de phase v_φ lorsque $\omega > \omega_p$ .....

b) Exprimer la vitesse de groupe v_g lorsque $\omega > \omega_p$ .....

Énergie et puissance

Entraînement 8.6 — Vecteur de Poynting et énergie du champ.

On considère un champ électromagnétique dans un milieu d'indice réel n défini par

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz)\vec{e_x}$$
$$\text{et} \quad \vec{B} = \frac{n}{c} E_0 \cos(\omega t - kz)\vec{e_y}.$$

Le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ et l'énergie volumique du champ w_{em} sont définis par

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \quad \text{et} \quad w_{em} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

a) Exprimer le vecteur de Poynting .....

b) Exprimer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting .....

c) Déterminer l'énergie volumique associée à l'onde .....

d) Exprimer la moyenne temporelle de l'énergie .....

Entraînement 8.7 — Puissance dans un conducteur.

On considère une onde dans un conducteur d'épaisseur de peau δ, de conductivité réelle γ, vérifiant

$$\vec{E} = E_0 \mathrm{e}^{-\frac{x}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\vec{e_y}$$
$$\text{et} \quad \vec{B} = \frac{E_0}{\omega\delta} \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\left[\sin\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) + \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\right]\vec{e_z}.$$

Le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ et la puissance volumique perdue par effet Joule p_J sont définis par

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \quad \text{et} \quad p_J = \vec{j} \cdot \vec{E}.$$

a) Exprimer la moyenne du vecteur de Poynting.

.....

b) Exprimer la puissance moyenne perdue par effet Joule.

.....

Entraînement 8.8 — Vecteur de Poynting en notation complexe.

En notation complexe, la moyenne temporelle du vecteur de Poynting pour des ondes planes progressives monochromatiques est donnée par

$$\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle = \frac{\mathrm{Re}(\underline{\vec{E}}^* \wedge \underline{\vec{B}})}{2\mu_0},$$

où le symbole * désigne la conjugaison complexe. On considère un champ électromagnétique dans un milieu d'indice complexe $\underline{n}$ défini par

$$\underline{\vec{E}} = \underline{E}_0 \exp[\mathrm{i}(\omega t - kz)]\vec{e_x} \qquad \text{et} \qquad \underline{\vec{B}} = \frac{\underline{n}\,\underline{E}_0}{c} \exp[\mathrm{i}(\omega t - kz)]\vec{e_y}.$$

Déterminer la moyenne du vecteur de Poynting .....

Manipuler les équations de Maxwell

Entraînement 8.9 — Relation de dispersion.

On considère l'équation de propagation complexe dans un plasma :

$$\Delta\underline{\vec{E}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \underline{\vec{j}}}{\partial t}.$$

Le champ électrique qui se propage dans le plasma vaut : $\underline{\vec{E}} = E_0 \exp[\mathrm{i}\,(\omega\, t - \underline{k}\, z)]\,\vec{e_x}$ avec $\underline{\vec{k}} = \underline{k}\,\vec{e_z}$.

En tenant compte de l'expression du vecteur densité de courant $\underline{\vec{j}} = \underline{\alpha}\,\underline{\vec{E}} = \dfrac{n\,e^2}{\mathrm{i}\,\omega\,m}\,\underline{\vec{E}}$, établir l'équation de dispersion, liant k, ω, c et $\omega_p^2 = \dfrac{n\,e^2}{m\varepsilon_0}$.

.....

Entraînement 8.10 — Établir une équation d'onde.

On considère un milieu ohmique localement neutre tel que : $\rho = 0$ et $\vec{j} = \gamma\vec{E}$. On pourra utiliser la relation

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\,\vec{E}) - \Delta\vec{E}.$$

a) Exprimer l'équation de Maxwell-Gauss modifiée.

.....

b) Exprimer l'équation de Maxwell-Ampère modifiée.

.....

c) Déterminer l'équation différentielle à laquelle $\vec{E}$ obéit.

.....

Entraînement 8.11 — Vérification des équations de Maxwell (I).

Nous nous plaçons dans le vide ($\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$) et nous supposons que $\vec{E}$ et $\vec{B}$ s'écrivent

$$\vec{E}(z,t) = E_0 \cos(\omega t - kz)\vec{e_z}$$
$$\text{et} \quad \vec{B}(z,t) = \frac{kE_0}{\omega} \cos(\omega t - kz)\vec{e_x} \quad \text{avec} \quad k = \omega/c.$$

a) Le champ électrique vérifie-t-il l'équation de Maxwell-Gauss ? .....

b) Les champs électrique et magnétique vérifient-ils l'équation de Maxwell-Faraday ? .....

c) Les champs électrique et magnétique vérifient-ils l'équation de Maxwell-Ampère ? .....

d) Le champ magnétique vérifie-t-il l'équation de Maxwell-Thomson ? .....

Entraînement 8.12 — Vérification des équations de Maxwell (II).

On se place dans un plasma où l'on a

$$\underline{\vec{j}}(z,t) = -\mathrm{i}\frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{\omega} \underline{\vec{E}}(z,t), \qquad \underline{\rho}(z,t) = \underline{0} \qquad \text{et} \qquad \vec{k} = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}\,\vec{e_z} \quad \text{avec} \quad \omega > \omega_p.$$

On suppose que

$$\underline{\vec{E}}(z,t) = E_0 \exp[\mathrm{i}(\omega t - kz)]\vec{e_x}$$
$$\text{et} \quad \underline{\vec{B}}(z,t) = \frac{kE_0}{\omega} \exp[\mathrm{i}(\omega t - kz)]\vec{e_y} \quad \text{avec} \quad k = \omega/c.$$

a) Le champ électrique vérifie-t-il l'équation de Maxwell-Gauss ? .....

b) Les champs électrique et magnétique vérifient-ils l'équation de Maxwell-Faraday ? .....

c) Les champs électrique et magnétique vérifient-ils l'équation de Maxwell-Ampère ? .....

d) Le champ magnétique vérifie-t-il l'équation de Maxwell-Thomson ? .....

Différentes familles d'ondes

Entraînement 8.13 — Onde progressive ou onde évanescente.

Nous nous intéressons à un champ électrique de la forme

$$\underline{\vec{E}}(x,t) = E_0 \exp[\mathrm{i}(\omega t - \underline{k}x)]\vec{e_z},$$

avec $\underline{k} = k' + \mathrm{i}k"$ et où $k" \leqslant 0$.

Pour chaque relation de dispersion, déterminer si le champ électrique se présente sous la forme d'une onde

(a) progressive $\underline{\vec{E}}(x,t) = E_0 \exp[\mathrm{i}(\omega t - k'x)]\vec{e_z}$

(b) évanescente $\underline{\vec{E}}(x,t) = E_0 \exp(k"x) \exp(\mathrm{i}\omega t)\vec{e_z}$

(c) progressive atténuée $\underline{\vec{E}}(x,t) = E_0 \exp(k"x) \exp[\mathrm{i}(\omega t - k'x)]\vec{e_z}$

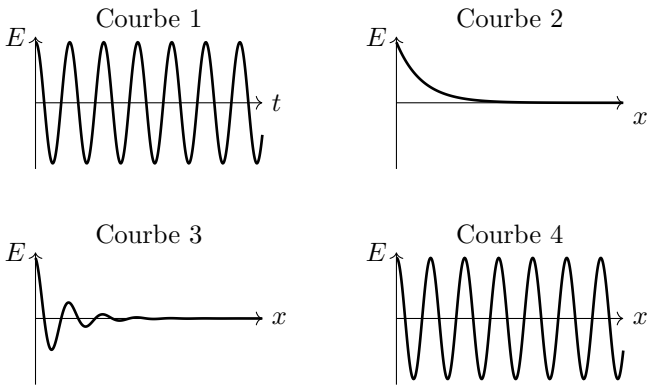
a) $\underline{k}^2 = -i\dfrac{\omega}{c}$ .....

b) $\underline{k}^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$ avec $\omega > \omega_p$ .....

c) $\underline{k}^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$ avec $\omega < \omega_p$ .....

Entraînement 8.14 — Courbes et expressions.

Dans chaque cas, indiquer la ou les courbes qui correspondent à chaque expression de $\vec{E}$ fournie.



a) $\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{e_z}$ .....

b) $\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(\omega t) \exp(-kx)\vec{e_z}$ avec $k > 0$ .....

c) $\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(\omega t - k'x) \exp(-k"x)\vec{e_z}$ avec $k" > 0$ .....

Réflexion et transmission

Entraînement 8.15 — Coefficients de réflexion et transmission en amplitude.

On considère les champs $\{\vec{E}_i, \vec{B}_i\}$ dans le milieu d'indice n_1 en incidence normale sur un dioptre en $x = 0$ produisant les champs réfléchis $\{\vec{E}_r, \vec{B}_r\}$ dans le milieu d'indice n_1 et transmis $\{\vec{E}_t, \vec{B}_t\}$ dans le milieu d'indice n_2 tels que :

$$\begin{cases} \vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - k_1 x)\vec{e_y} \\ \vec{B}_i = \dfrac{n_1 E_0}{c} \cos(\omega t - k_1 x)\vec{e_z} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{E}_r = rE_0 \cos(\omega t + k_1 x)\vec{e_y} \\ \vec{B}_r = -\dfrac{n_1 r E_0}{c} \cos(\omega t + k_1 x)\vec{e_z} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{E}_t = tE_0 \cos(\omega t - k_2 x)\vec{e_y} \\ \vec{B}_t = \dfrac{n_2 t E_0}{c} \cos(\omega t - k_2 x)\vec{e_z}. \end{cases}$$

a) Les relations de continuité des champs entre les milieux 1 et 2 en $x = 0$ imposent :

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_2 \quad \text{et} \quad \vec{B}_1 = \vec{B_2}.$$

En déduire deux relations entre r, t, n_1 et n_2 .....

b) En déduire l'expression des coefficients r et t .....

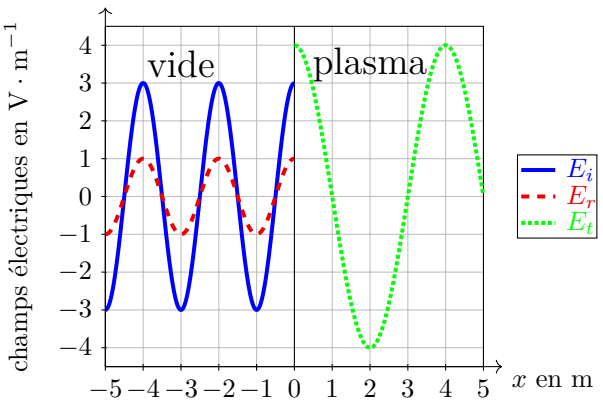
Entraînement 8.16 — Coefficients de réflexion et transmission.

Un dioptre en $x = 0$ sépare du vide d'indice $n_1 = 1$ pour $x < 0$ d'un plasma d'indice réel n_2 pour $x > 0$. On rappelle les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude (r, t) :

$$\begin{cases} r = \dfrac{E_r(x=0)}{E_i(x=0)} = \dfrac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \\ t = \dfrac{E_t(x=0)}{E_i(x=0)} = \dfrac{2n_1}{n_1 + n_2}, \end{cases}$$

et en puissance (R, T) :

$$R = |r|^2 \quad \text{et} \quad T = |t|^2 \frac{n_2}{n_1}.$$



a) Donner la longueur d'onde dans chaque domaine .....

b) À l'aide du graphique, évaluer r et t .....

c) En déduire l'indice n_2 du plasma .....

d) Calculer les coefficients R et T .....

Entraînement 8.17 — Coefficients de réflexion et transmission en puissance.

En notation complexe, pour des ondes planes progressives monochromatiques de vecteur d'onde $\vec{\underline{k}}_1$ perpendiculaire au champ électrique $\vec{\underline{E}}$, le champ magnétique $\vec{\underline{B}}$ associé est

$$\vec{\underline{B}} = \frac{\vec{\underline{k}}_1 \wedge \vec{\underline{E}}}{\omega},$$

et la moyenne temporelle du vecteur de Poynting est donnée par $\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle = \dfrac{\mathrm{Re}(\vec{\underline{E}}^* \wedge \vec{\underline{B}})}{2\mu_0}$.

On rappelle la relation d'analyse vectorielle $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$.

a) Calculer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting .....

Ce champ, en incidence normale sur un dioptre, donne lieu à un champ réfléchi de coefficient d'amplitude $\underline{r}$ de vecteur d'onde $-\vec{\underline{k}}_1$ ainsi qu'à un champ transmis de coefficient d'amplitude $\underline{t}$ de vecteur d'onde $\vec{\underline{k}}_2$.

b) Exprimer les puissances réfléchie et transmise.

.....

c) En déduire l'expression de $R = -\dfrac{\langle \Pi_r \rangle}{\langle \Pi \rangle}$ et $T = \dfrac{\langle \Pi_t \rangle}{\langle \Pi \rangle}$ .....

Réponses mélangées

$\dfrac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}(1+n^2)\cos^2(\omega t - kz)$ $\quad$ $\dfrac{|\underline{E}|^2}{2\mu_0\omega}\mathrm{Re}\left(\vec{\underline{k}}_1\right)$ $\quad$ $k^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$ $\quad$ oui $\quad$ $\mathrm{i}\,\omega\,\underline{\rho}\left(1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) = 0$

$\dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{4}{3}$ $\quad$ 1 et 4 $\quad$ non $\quad$ $\dfrac{1}{2}$ $\quad$ $\dfrac{|\underline{E}_0|^2}{2\mu_0 c}\mathrm{Re}(\underline{n})\vec{e_z}$ $\quad$ oui $\quad$ $\underline{k}^2 = \dfrac{\mathrm{i}\omega}{\alpha}$ $\quad$ $\underline{k}^3 = \dfrac{\omega^3}{\alpha} - \dfrac{\beta}{\alpha}\omega$

$\dfrac{E_0^2}{2\mu_0\omega\delta}\mathrm{e}^{-\frac{2x}{\delta}}\vec{e_x}$ $\quad$ $\underline{k} = \dfrac{\beta - \omega^2}{\mathrm{i}\alpha}$ $\quad$ (b) $\quad$ $-\dfrac{|\underline{E}|^2|\underline{r}|^2}{2\mu_0\omega}\mathrm{Re}\left(\vec{\underline{k}}_1\right)$ $\dfrac{|\underline{E}|^2|\underline{t}|^2}{2\mu_0\omega}\mathrm{Re}\left(\vec{\underline{k}}_2\right)$ $\quad$ 1 et 3 $\quad$ $\dfrac{1}{9}$ et $\dfrac{8}{9}$

$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\gamma\vec{E} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ $\quad$ $\dfrac{\gamma E_0^2}{2}\mathrm{e}^{-\frac{2x}{\delta}}$ $\quad$ (a) $\quad$ $\dfrac{nE_0^2}{2\mu_0 c}\vec{e_z}$ $\quad$ non $\quad$ $\dfrac{nE_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t - kz)\vec{e_z}$

non $\quad$ oui $\quad$ $v_g = c\sqrt{1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega_p}}$ $\quad$ $\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$ $\quad$ $\dfrac{\varepsilon_0 E_0^2}{4}(1+n^2)$ $\quad$ $\pm\dfrac{1+\mathrm{i}}{\delta}$ avec $\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\mu_0\,\alpha\,\omega}}$

$\begin{cases} r+1 = t \\ n_1 - rn_1 = tn_2 \end{cases}$ $\quad$ $\Delta\vec{E} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0\gamma\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ $\quad$ oui $\quad$ non $\quad$ 2 m et 4 m

oui $\quad$ oui $\quad$ $v_\varphi = \dfrac{c}{\sqrt{1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$ $\quad$ $|\underline{r}|^2$ et $|\underline{t}|^2\,\mathrm{Re}\left(\dfrac{\underline{k}_2}{\underline{k}_1}\right)$ $\quad$ $\pm\mathrm{i}\dfrac{\omega}{c}\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}$ $\quad$ (c)

$\underline{\rho}\left(\dfrac{\underline{\alpha}}{\varepsilon_0} + \mathrm{i}\,\omega\right)$ $\quad$ $\pm\dfrac{\omega}{c}$ $\quad$ oui $\quad$ $\begin{cases} r = \dfrac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \\ t = \dfrac{2n_1}{n_1 + n_2} \end{cases}$ $\quad$ $\pm\dfrac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$ $\quad$ 1 et 2

► Réponses et corrigés page 333

Modèle scalaire de la lumière

Prérequis
Optique géométrique (rayons, indice optique, lentilles, lois de Snell-Descartes). Trigonométrie. Longueurs d'onde dans le vide et dans un milieu, période, fréquence et pulsation.

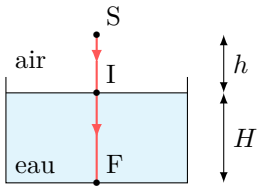
Constantes utiles
→ Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3{,}00 \times 10^8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

Exprimer un chemin optique

Dans un milieu homogène, le chemin optique entre deux points A et B est défini comme le produit de l'indice optique n du milieu par la distance géométrique AB parcourue par un rayon lumineux : $(\mathrm{AB}) = n \times \mathrm{AB}$.

Entraînement 9.1 — De l'eau dans un verre.

Un rayon issu d'une source ponctuelle arrive sous incidence normale à la surface de l'eau contenue dans un verre. Les indices optiques de l'air et de l'eau sont respectivement notés n_{air} et n_{eau}.



a) Exprimer le chemin optique (SI) en fonction de n_{air} et h .....

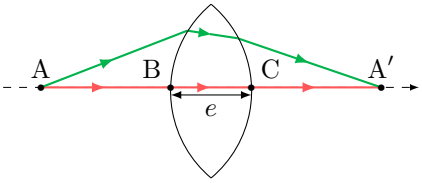
b) Exprimer le chemin optique (IF) en fonction de n_{eau} et H .....

c) En déduire l'expression du chemin optique (SF) .....

d) Comment se réexprime cette expression si l'air est assimilé au vide ? .....

Entraînement 9.2 — Points conjugués par une lentille.

Deux points A et A′ sont conjugués par une lentille convergente : tous les rayons issus de A et arrivant en A′ ont des chemins optiques identiques. Pour simplifier, ces points sont choisis sur l'axe optique de la lentille. L'air est assimilé au vide.



On note e l'épaisseur maximale de la lentille et n l'indice optique du verre.

En travaillant avec le rayon confondu avec l'axe optique, exprimer :

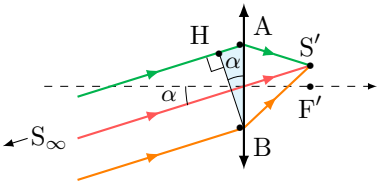
a) le chemin optique dans le verre (BC), en fonction de e et n .....

b) le chemin optique dans l'air $(\mathrm{AB}) + (\mathrm{CA'})$ en fonction de la distance $\mathrm{AA'}$ et e ...

c) l'expression générale du chemin optique $(\mathrm{AA'})$ qu'on peut en déduire .....

Entraînement 9.3 — Lentille éclairée avec un angle d'incidence non nul.

Des rayons, provenant d'une source S à l'infini, éclairent une lentille sous un angle d'incidence α. Ils convergent en un point S′ du plan focal image de la lentille. Les points A et B sont situés à gauche, juste avant la lentille. L'indice optique du verre est n. L'air est assimilé au vide.



a) En sachant que le plan passant par H et B est une surface d'onde pour la source S, exprimer la différence de chemin optique (SA) − (SB) en fonction de la distance AB et de l'angle α.

.....

b) Les points S et S′ sont conjugués donc les chemins optiques (SAS′) et (SBS′) sont égaux.

En déduire la différence de chemin optique (AS′) − (BS′) en fonction de la distance AB et de l'angle α.

.....

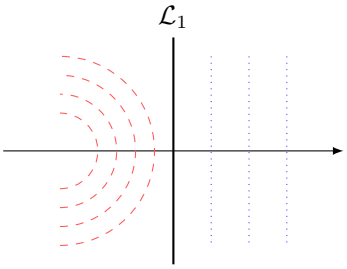
Surfaces d'onde et théorème de Malus

D'après le théorème de Malus, les rayons lumineux issus d'un point source S sont perpendiculaires aux surfaces d'onde relatives à cette source, la surface d'onde étant le lieu des points d'égal chemin optique par rapport à la source.

Entraînement 9.4 — Action d'une lentille inconnue sur des surfaces d'onde.

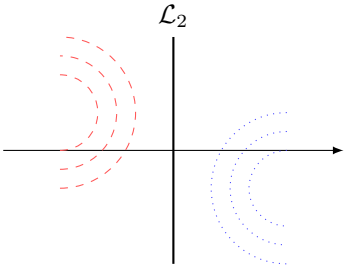
On considère ici des surfaces d'onde issues d'un point objet (en tirets) et celles de son image (en pointillés) par une lentille inconnue. Pour chaque situation, déterminer si la lentille est « convergente » ou « divergente ».

a)



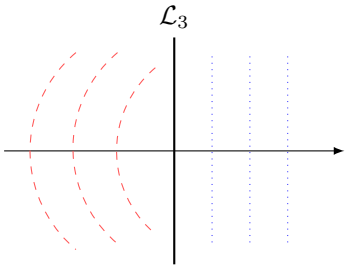
.....

b)



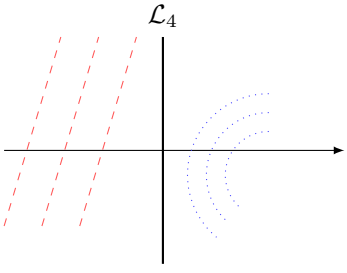
.....

c)



.....

d)

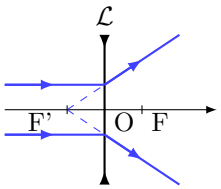


.....

Entraînement 9.5 — Action d'une lentille divergente sur des surfaces d'onde.

On construit l'image, par une lentille divergente $\mathcal{L}$, d'une source lumineuse placée à l'infini sur l'axe optique.

Une ou plusieurs réponses sont possibles.



a) En amont de la lentille, les surfaces d'onde sont :

(a) perpendiculaires à l'axe optique
(b) des cercles concentriques centrés sur F
(c) des plans parallèles entre eux

b) En aval de la lentille, les surfaces d'onde sont :

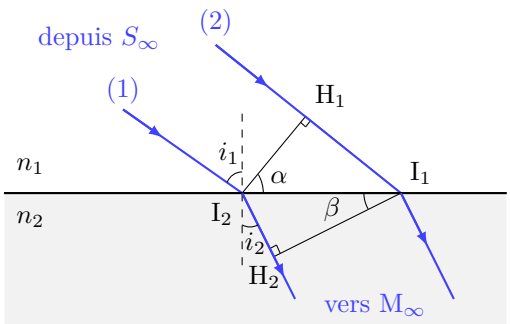
(a) des cercles concentriques centrés sur F
(b) des plans perpendiculaires à l'axe optique
(c) des cercles concentriques centrés sur F'

Entraînement 9.6 — Une loi bien connue...

Une onde plane arrive sur un dioptre plan séparant deux milieux d'indices n_1 et n_2.

On note H_1 le projeté orthogonal de I_2 sur le rayon (2) et H_2 le projeté orthogonal de I_1 sur le rayon (1).

On note $I_1I_2 = a$.



a) Quels couples de points appartiennent à la même surface d'onde ?

(a) I_2 et I_1 (b) I_2 et H_1 (c) I_1 et H_2

b) Que vaut l'angle α ?

(a) $\frac{\pi}{2} - i_1$ (b) i_1 (c) $\frac{\pi}{2} + i_1$

c) Exprimer le chemin optique (H_1I_1) en fonction de n_1, a et α.

d) Que vaut l'angle β ?

(a) i_2 (b) $\frac{\pi}{2} - i_2$ (c) $\frac{\pi}{2} + i_1$

e) Exprimer le chemin optique (I_2H_2) en fonction de n_2, a et β .....

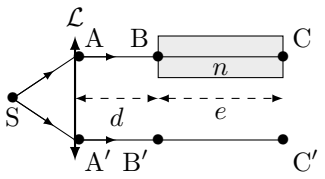
f) À partir des questions c) et e), déduire une relation entre n_1, $\sin(i_1)$, n_2 et $\sin(i_2)$.

Retard de phase

Le *retard de phase* (ou, plus simplement, la *phase*), d'un rayonnement en un point M par rapport à sa source au point S est défini par $\phi(\mathrm{M}) = \dfrac{2\pi}{\lambda_0}(\mathrm{SM})$, où (SM) est le chemin optique entre les deux points.

Entraînement 9.7 — Surface d'onde et déphasage.

Un point source S émettant un rayonnement monochromatique de longueur d'onde λ_0 est placé au foyer objet d'une lentille mince convergente. Une lame d'indice n et d'épaisseur e est placée à une distance d de la lentille et recouvre une partie du faisceau. On considère que les points A et A′, à équidistance de S, se situent juste après la lentille. On prendra l'indice de l'air égal à 1.



a) Quels couples de points appartiennent à la même surface d'onde ?

(a) A et A′ (b) B et B′ (c) C et C′

b) Exprimer la phase $\phi(\mathrm{C}')$ en fonction de λ_0, (SA'), d et e.

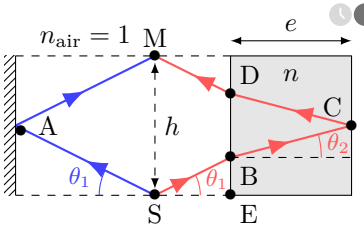
c) Exprimer la phase $\phi(\mathrm{C})$ en fonction de λ_0, (SA), d, n et e.

d) En déduire le déphasage $\Delta\phi = \phi(\mathrm{C}) - \phi(\mathrm{C}')$ en fonction de λ_0, n et e.

Entraînement 9.8 — Phases et déphasage.

Un signal lumineux de longueur d'onde dans le vide λ_0 est émis depuis une source en S. On considère que le point d'incidence A se situe juste avant le miroir, et on rappelle qu'une réflexion sur un miroir métallique produit un retard de phase de π.

Exprimer la phase ϕ_1 du rayon 1 réfléchi par le miroir de gauche en fonction de h et θ_1 aux points de l'espace suivants :



a) $\phi_1(\mathrm{A})$ ..... b) $\phi_1(\mathrm{M})$ .....

c) Exprimer la distance BD en fonction de e et θ_2 .....

d) Exprimer la distance EB en fonction de e, h et θ_2 .....

e) Quelle est l' expression correcte de $\phi_2(\mathrm{B})$, la phase du rayon de droite au point B ?

(a) $\dfrac{2\pi}{\lambda_0}\left(\dfrac{h}{2n\sin(\theta_1)} - \dfrac{e}{\cos(\theta_2)}\right)$ (b) $\dfrac{2\pi}{\lambda_0}\left(\dfrac{h}{2\sin(\theta_1)} - \dfrac{e}{n\cos(\theta_2)}\right)$ (c) $\dfrac{2\pi}{\lambda_0}\left(\dfrac{e}{\cos(\theta_2)} - \dfrac{h}{2n\sin(\theta_1)}\right)$

.....

f) Exprimer la phase de ce rayon en M, $\phi_2(\mathrm{M})$, en fonction de h, e, n, θ_1 et $\cos(\theta_2)$.

.....

g) Exprimer le déphasage $\Delta\phi = \phi_2(\mathrm{M}) - \phi_1(\mathrm{M})$ en fonction de e, n et $\cos(\theta_2)$.

.....

h) Quelle est l'expression correcte de $\Delta\phi$? *On rappelle que* $\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1$.

(a) $\dfrac{4\pi}{\lambda_0}\dfrac{e\left(n^2-1\right)}{\sqrt{n^2-\sin^2(\theta_1)}} - \pi$ (b) $\dfrac{4\pi}{\lambda_0}\dfrac{e\left(n^2-1\right)}{\sqrt{n^2-\sin^2(\theta_1)}} + \pi$ (c) $\dfrac{2\pi}{\lambda_0}\dfrac{e\left(n^2-1\right)}{\sqrt{n^2-\sin^2(\theta_1)}} + \pi$

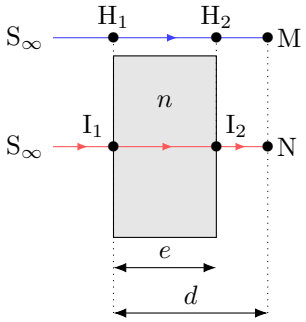
.....

Entraînement 9.9 — Déphasage dû à une lame.

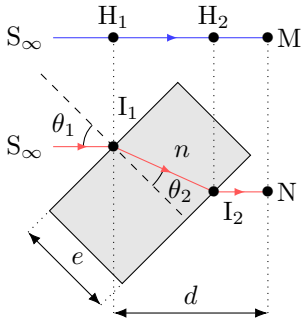
On souhaite exprimer les différences de phase $\Delta\phi = \phi(\mathrm{N}) - \phi(\mathrm{M})$ entre le rayon passant par N et le rayon passant par M issus de la même source à l'infini S de longueur d'onde dans le vide λ_0.

L'indice de l'air est pris égal à 1.

Cas 1



Cas 2



a) Pour le cas 1, exprimer le déphasage $\Delta\phi = \phi(\mathrm{N}) - \phi(\mathrm{M})$ selon e, λ_0 et n.

.....

On considère maintenant le cas 2.

b) Exprimer la distance $\mathrm{I_1I_2}$ en fonction de e et θ_2 .....

c) Exprimer la distance $\mathrm{H_1H_2}$ en fonction de $\mathrm{I_1I_2}$ et $\theta_1 - \theta_2$ .....

d) Exprimer le déphasage $\Delta\phi = \phi(\mathrm{N}) - \phi(\mathrm{M})$ en fonction de e, λ_0, n, θ_2 et $\theta_1 - \theta_2$.

.....

e) Quelle est l'expression correcte de $\cos(\theta_1 - \theta_2)$?

On rappelle que $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$ *et que* $\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1$.

(a) $\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - n + n\sin^2(\theta_2)$ (c) $\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) + n - n\cos^2(\theta_2)$

(b) $\sin(\theta_1)\sin(\theta_2) + n - n\sin^2(\theta_2)$

.....

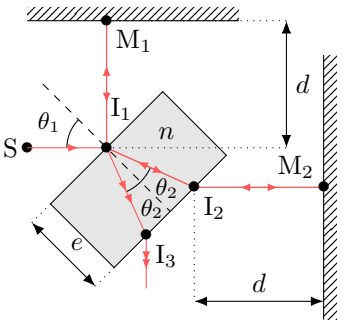
f) En déduire une expression de $\Delta\phi$ fonction de e, λ_0, n, $\cos(\theta_2)$ et $\cos(\theta_1)$.

.....

Entraînement 9.10 — Lame séparatrice.

Cas 3

Un signal lumineux de longueur d'onde dans le vide λ_0 est émis depuis une source en S. Il est séparé en deux rayons par une lame semi-réfléchissante inclinée d'un angle $\theta_1 = 45°$. On cherche à déterminer le déphasage $\Delta\phi$ entre les deux rayons en sortie de la lame après réflexion sur les deux miroirs en M_1 et M_2. On rappelle qu'un rayon subit un déphasage de π après réflexion sur un miroir métallique, ou sur un dioptre si le rayon incident se propage dans le milieu le moins réfringent (celui d'indice de réfraction le plus faible).



a) Déterminer le déphasage du rayon réfléchi par M_1 dû aux différentes réflexions ..

b) Déterminer le déphasage du rayon réfléchi par M_2 dû aux différentes réflexions ..

c) Exprimer la distance I_1I_2 en fonction de e et θ_2 .....

d) Exprimer la différence de phase $\Delta\phi$ entre le rayon réfléchi par M_2 et le rayon réfléchi par M_1 au point I_3 en fonction e, λ_0, n et θ_2 .....

Largeur spectrale et cohérence temporelle

Entraînement 9.11 — Différentes sources.

Une onde lumineuse est émise par des trains d'onde successifs de durée individuelle moyenne τ_c (temps de cohérence) et de longueur individuelle moyenne $\ell_c = c \times \tau_c$ (longueur de cohérence) dans le vide. D'après l'analyse de Fourier, à cette onde de durée finie correspond un spectre de largeur $\Delta f \simeq \dfrac{1}{\tau_c}$ (en fréquence).

On considère trois sources :

- une lampe spectrale basse pression à vapeur de mercure telle que $\tau_c \simeq 10\,\text{ps}$ (source (1)),
- un laser de TP tel que $\tau_c \simeq 0{,}1\,\mu\text{s}$ (source (2))
- et une source de lumière blanche, munie d'un filtre ayant une bande passante $\Delta\lambda = 50\,\text{nm}$ autour de la longueur d'onde $\lambda = 820\,\text{nm}$ (source (3)).

On rappelle que la cohérence temporelle d'une source est d'autant meilleure que son temps de cohérence est important.

a) Estimer Δf en hertz pour la source (1) .....

b) Estimer Δf en hertz pour la source (2) .....

c) En utilisant la relation $\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda} = \dfrac{\Delta f}{f}$, estimer τ_c en picosecondes pour la source (3) .....

d) Classer les sources, de celle possédant la meilleure cohérence temporelle à la moins bonne.

.....

Photométrie

Entraînement 9.12 — Intensité lumineuse.

Un signal $s(t) = S_0 \cos(\omega t)$ de période T est détecté par deux capteurs de temps de réponse $\tau = 1\,\text{ns}$.

Les capteurs A et B délivrent des signaux de tension u_1 et u_2 respectivement proportionnels à la moyenne de s et au carré de la moyenne de s^2 : on a

$$u_1 = K_1\langle s(t)\rangle \qquad \text{et} \qquad u_2 = K_2\langle s^2(t)\rangle,$$

où K_1 et K_2 sont des constantes.

On considère que les signaux u_1 et u_2 émergent du bruit de mesure lorsque leur valeur absolue est respectivement supérieure à $\dfrac{K_1 S_0}{2\pi \times 100}$ et $\dfrac{K_2 S_0^2}{2}$.

On indique que la moyenne temporelle d'un signal $f(t)$ mesuré pendant une durée τ est

$$\langle f(t)\rangle = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau f(t)\,\mathrm{d}t.$$

a) Exprimer u_1 en fonction de K_1, S_0, τ et T.

.....

b) Quelle est la valeur maximale de u_1 fonction de $\dfrac{\tau}{T}$?

(a) $2\pi K_1 S_0 \dfrac{T}{\tau}$

(b) $2\pi K_1 S_0 \dfrac{\tau}{T}$

(c) $K_1 S_0 \dfrac{\tau}{2\pi T}$

(d) $K_1 S_0 \dfrac{T}{2\pi\tau}$

.....

c) En déduire la fréquence maximale du signal exploitable par le capteur A.

.....

d) Exprimer u_2 en fonction de K_2, S_0, τ et T.

On rappelle que $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$.

.....

e) Quelle est la valeur maximale de u_2 fonction de $\dfrac{\tau}{T}$?

(a) $\dfrac{K_2 S_0^2}{2\tau}\left(T + \dfrac{\tau}{4\pi}\right)$

(b) $\dfrac{K_2 S_0^2}{2\tau}\left(\tau + \dfrac{T}{4\pi}\right)$

(c) $\dfrac{K_2 S_0^2}{\tau}\left(\tau + \dfrac{T}{4\pi}\right)$

.....

f) Existe-t-il une fréquence maximale du signal exploitable par le capteur B ?

.....

Entraînement 9.13 — Choix d'une photodiode.

La sensibilité d'une photodiode s est, au cours d'une mesure de durée τ, le rapport de proportionnalité entre l'intensité du courant électrique produit I_{mes} et la puissance lumineuse mesurée $\mathcal{P}_{\text{mes}}$: on a

$$s = I_{\text{mes}}/\mathcal{P}_{\text{mes}}.$$

De plus, l'intensité du courant d'obscurité I_{obs} d'une photodiode correspond à l'intensité électrique minimale que doit dépasser le courant produit au cours d'une mesure.

On dispose de trois photodiodes détectant respectivement trois radiations de longueurs d'onde dans le vide différentes. Les caractéristiques des photodiodes et des radiations sont données ci-dessous.

photodiode 1	$\lambda_1 = 470\,\text{nm}$	$s_1 = 0{,}300\,\text{A}\cdot\text{W}^{-1}$	$I_{\text{obs }1} = 3{,}00\times10^{-5}\,\mu\text{A}$	$\tau_1 = 2{,}00\times10^{-4}\,\text{ms}$
photodiode 2	$\lambda_2 = 550\times10^{3}\,\text{pm}$	$s_2 = 200\,\text{mA}\cdot\text{W}^{-1}$	$I_{\text{obs }2} = 150\,\text{pA}$	$\tau_2 = 0{,}450\,\mu\text{s}$
photodiode 3	$\lambda_3 = 0{,}660\,\mu\text{m}$	$s_3 = 300\,\text{A}\cdot\text{kW}^{-1}$	$I_{\text{obs }3} = 2{,}00\,\text{nA}$	$\tau_3 = 50{,}0\,\text{ns}$

Calculer en watts les puissances lumineuses minimales détectables par les photodiodes.

a) $\mathcal{P}_{\text{min }1}$ .... b) $\mathcal{P}_{\text{min }2}$ .... c) $\mathcal{P}_{\text{min }3}$ ....

Calculer en joules les énergies minimales détectables au cours d'une durée τ par les photodiodes.

d) $E_{\text{min }1}$ .... e) $E_{\text{min }2}$ .... f) $E_{\text{min }3}$ ....

g) Sachant que l'énergie d'un photon est donnée par $E = h\nu$, où $h = 6{,}63\times10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}$ est la constante de Planck, quelle photodiode permet de mesurer le plus petit nombre de photons ?

(a) Photodiode 1 (b) Photodiode 2 (c) Photodiode 3

.....

Réponses mélangées

(b) $3{,}38\times10^{-16}\,\text{J}$ $\frac{2\pi}{\lambda_0}(n-1)e$ $\text{AB}\sin(\alpha)$ $\frac{4\pi}{\lambda_0}\left(\frac{h}{2\sin\theta_1}+\left(n-\frac{1}{n}\right)\frac{e}{\cos(\theta_2)}\right)$

$\frac{K_2S_0^2}{2\tau}\left(\tau+\frac{T}{4\pi}\sin\left(4\pi\frac{\tau}{T}\right)\right)$ Convergente $7{,}50\times10^{-10}\,\text{W}$ (b) $2\times10^{-17}\,\text{J}$

$1\times(\text{AA}'-e)$ (c) $\text{I}_1\text{I}_2\cos(\theta_1-\theta_2)$ $1{,}00\times10^{-10}\,\text{W}$ $\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{e}{\cos(\theta_2)}(n-\cos(\theta_1-\theta_2))$

$\frac{\pi}{\lambda_0}\frac{h}{\sin(\theta_1)}$ $n_{\text{air}}\times h$ (a) $n_1 a\sin(\alpha)$ (c) (a) $n_1\sin(i_1)=n_2\sin(i_2)$

$-\text{AB}\sin(\alpha)$ $\frac{4\pi}{\lambda_0}\frac{e}{\cos(\theta_2)}\left(n-\frac{1}{n}\right)-\pi$ (b) et (c) $n_{\text{eau}}\times H$ Convergente

$\frac{e}{\cos(\theta_2)}$ (d) $\frac{2\pi}{\lambda_0}e(n\cos(\theta_2)-\cos(\theta_1))$ non $n\times e$ (a) $\text{AA}'+(n-1)e$

(2), (1) puis (3) (a) et (c) $\Delta f = 1{,}0\times10^{11}\,\text{Hz}$ $\Delta f = 1{,}0\times10^{7}\,\text{Hz}$ $n_2 a\sin(\beta)$

(b) $1\times h + n_{\text{eau}}\times H$ $\frac{2\pi}{\lambda_0}((\text{SA}')+d+e)$ (a) et (b) $\frac{2\pi}{\lambda_0}((\text{SA})+d+ne)$

$\frac{4\pi}{\lambda_0}\frac{ne}{\cos(\theta_2)}-\pi$ π $K_1S_0\frac{T}{2\pi\tau}\sin\left(2\pi\frac{\tau}{T}\right)$ 2π $\frac{2\pi}{\lambda_0}e(n-1)$ $\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{h}{\sin(\theta_1)}+\pi$

$\frac{h}{2}-e\tan(\theta_2)$ $\frac{e}{\cos(\theta_2)}$ Convergente 100 GHz Divergente $2e\tan(\theta_2)$

$n_{\text{air}}\times h + n_{\text{eau}}\times H$ $3{,}33\times10^{-16}\,\text{J}$ $6{,}67\times10^{-9}\,\text{W}$ $\tau_c = 45\times10^{3}\,\text{ps}$

► Réponses et corrigés page 339

Interférences à deux ondes

Prérequis
Fonctions trigonométriques. Signaux (fréquence, période, pulsations temporelle et spatiale, nombre d'onde, longueur d'onde, phase).

Constantes utiles
→ Célérité de la lumière $c = 3{,}00 \times 10^8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

Pour commencer

Entraînement 10.1 — Des relations trigonométriques.

On donne les relations trigonométriques suivantes :

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \quad (1) \qquad \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \quad (2)$$
$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b) \quad (3) \qquad \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \quad (4)$$

a) Sommer les relations (1) et (2) et isoler $\cos(a)\cos(b)$ ....

b) Réécrire la relation précédente pour $a = b$ .....

c) Soustraire les relations (1) et (2), isoler $\sin(a)\sin(b)$ puis réécrire la relation obtenue pour $a = b$.

.....

d) Sommer les relations (3) et (4), isoler $\sin(a)\cos(b)$ puis réécrire la relation obtenue pour $a = b$.

.....

Entraînement 10.2 — Somme de signaux périodiques.

On définit deux signaux lumineux : $s_1(x,t) = S_0\cos(\omega t - kx)$ et $s_2(x,t) = S_0\cos(\omega t - kx + \varphi)$ avec ω leur pulsation temporelle, k leur pulsation spatiale et φ une phase à l'origine. La superposition $s(x,t)$ de ces deux vibrations peut se mettre sous la forme :

$$s(x,t) = s_1(x,t) + s_2(x,t) = S_0\Big(f(x,t)\ (1+\cos(\varphi)) + g(x,t)\ \sin(\varphi)\Big).$$

On utilisera la relation trigonométrique : $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.

Exprimer les fonctions suivantes :

a) $f(x,t)$ ..... b) $g(x,t)$ .....

c) Pour quelle valeur de phase φ le signal $s(x,t)$ s'annule-t-il ?

(a) $\varphi = 0$ (b) $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ (c) $\varphi = \pi$

.....

Entraînement 10.3 — Valeurs moyennes (I).

Un détecteur mesure la moyenne temporelle d'un signal périodique $s(t)$ de période T.

Cette moyenne, notée $\langle s(t)\rangle$, est définie par :

$$\langle s(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)\,\mathrm{d}t.$$

On donne les relations trigonométriques suivantes :

- $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2}$
- $\sin(a)\sin(b) = \dfrac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$
- $\sin(a)\cos(b) = \dfrac{\sin(a-b)-\sin(a+b)}{2}$.

On étudie les signaux suivants :

$$s_1(t) = S_1\cos(\omega_1 t - k_1 x) \quad \text{et} \quad s_2(t) = S_2\sin(\omega_2 t - k_2 x + \varphi_2).$$

a) Exprimer la période T_1 de $s_1(t)$ en fonction de ω_1.

.....

b) À partir de la définition fournie, calculer $\langle s_1(t)\rangle$ sur T_1.

.....

c) Exprimer la période T_2 de $s_2(t)$ en fonction de ω_2.

.....

d) À partir de la définition fournie, calculer $\langle s_2(t)\rangle$ sur T_2.

.....

e) Exprimer la période T_3 de $f_1(t) = s_1^2(t)$ en fonction de ω_1.

.....

f) À partir de la définition fournie, calculer $\langle f_1(t)\rangle$ sur T_3.

.....

g) Exprimer la période T_4 de $f_2(t) = s_2^2(t)$ en fonction de ω_2.

.....

h) À partir de la définition fournie, calculer $\langle f_2(t)\rangle$ sur T_4.

.....

Entraînement 10.4 — Valeurs moyennes (II).

Les moyennes temporelles des fonctions cosinus et sinus pour un nombre entier de périodes vérifient :

$$\langle A\cos(a\omega t+b)\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle A\sin(a\omega t+b)\rangle = 0,$$

avec A, a, ω et b des constantes.

On donne les relations trigonométriques suivantes :

- $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2}$
- $\sin(a)\sin(b) = \dfrac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$
- $\sin(a)\cos(b) = \dfrac{\sin(a-b)+\sin(a+b)}{2}$.

Calculer la moyenne temporelle, sur un nombre entier de périodes, des fonctions ci-dessous.

a) $\left\langle [\cos(\omega_0 t+\varphi_1)+\cos(\omega_0 t+\varphi_2)]^2 \right\rangle$

.....

b) $\left\langle [A\cos(3\omega_0 t+\varphi_1)+A\cos(\omega_0 t+\varphi_2)]^2 \right\rangle$

.....

c) $\left\langle [A\cos(42\omega_0 t+\varphi_1)+B\sin(43\omega_0 t+\varphi_2)]^2 \right\rangle$

.....

d) $\left\langle \left[\dfrac{A}{4}\sin\Big(\dfrac{\omega_0}{2}t+\varphi_0\Big)+\dfrac{A}{2}\sin\Big(\dfrac{\omega_0}{2}t+2\varphi_0\Big)\right]^2 \right\rangle$

.....

Entraînement 10.5 — Bataille de contrastes.

On mesure les maxima et les minima d'éclairement de différentes figures d'interférence.

Étant donné les mesures d'intensité $I_{\max}$ et $I_{\min}$ suivantes, quelle figure présente le contraste $C = \dfrac{I_{\max}-I_{\min}}{I_{\max}+I_{\min}}$ le plus élevé ?

On rappelle que $1\,\text{pW} = 1\times10^{-12}\,\text{W}$.

(a) $I_{\max} = 10{,}0\times10^{6}\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$ et $I_{\min} = 1{,}00\,\text{MW}\cdot\text{m}^{-2}$

(b) $I_{\max} = 660\,\text{mW}\cdot\text{mm}^{-2}$ et $I_{\min} = 0{,}220\,\text{kW}\cdot\text{dm}^{-2}$

(c) $I_{\max} = 5{,}00\,\text{mW}\cdot\text{mm}^{-2}$ et $I_{\min} = 2{,}00\,\text{mW}\cdot\text{cm}^{-2}$

(d) $I_{\max} = 72{,}0\,\text{pW}\cdot\mu\text{m}^{-2}$ et $I_{\min} = 3{,}00\,\text{MW}\cdot\text{km}^{-2}$

.....

Entraînement 10.6 — Signaux isophases.

Une source émet deux vibrations lumineuses $s(x,t) = S_0\cos(\omega t - kx)$ et $s'(x',t') = S_0\cos(\omega t' - kx')$ de période temporelle T (associée à la pulsation $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ et à la fréquence $f = \dfrac{1}{T}$) et de longueur d'onde λ (associée à la pulsation spatiale $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$). On note $n \in \mathbb{Z}$.

a) Exprimer $\Delta\varphi$ le retard de phase entre s et s' pour $t = t' = t_0$ .....

b) Pour $t = t' = t_0$, comment s'expriment les écarts de position Δx_n lorsque s et s' ont la même excitation lumineuse ?

(a) $\Delta x_n = n\lambda$ (b) $\Delta x_n = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\lambda$ (c) $\Delta x_n = n\dfrac{\lambda}{2}$

.....

c) Exprimer $\Delta\varphi$ le retard de phase entre s et s' pour $x = x' = x_0$ .....

d) Pour $x = x' = x_0$, comment s'expriment les écarts d'instant Δt_n lorsque s et s' ont la même excitation lumineuse ?

(a) $\Delta t_n = nT$ (b) $\Delta t_n = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)T$ (c) $\Delta t_n = n\dfrac{T}{2}$

.....

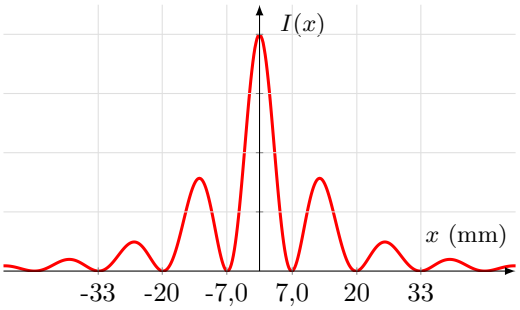
Études d'éclairements

Entraînement 10.7 — Fentes de Young.

L'éclairement $I(x)$ obtenu en un point M d'un écran à une distance D des fentes de Young est représenté sur la figure ci-contre. Il vérifie :

$$I(x) = f(x)\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi nax}{\lambda D}\right)\right],$$

où $f(x)$ est une fonction dont nous ne tiendrons pas compte, où a est la distance entre les deux fentes, où n est l'indice du milieu et où λ est la longueur d'onde du signal.



a) Identifier, grâce à la formule fournie, l'interfrange i (c'est-à-dire la distance entre deux maxima d'éclairement consécutifs).

(a) $i = \dfrac{na}{\lambda D}$ (b) $i = \dfrac{2\pi na}{\lambda D}$ (c) $i = \dfrac{\lambda D}{na}$ (d) $i = \dfrac{\lambda D}{2\pi na}$

.....

b) Mesurer, à partir de la figure, l'interfrange i .....

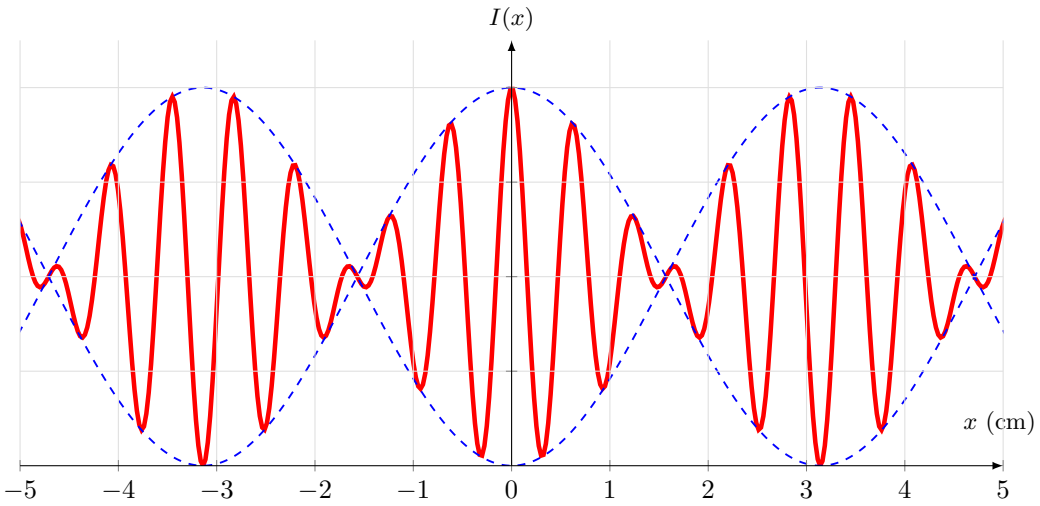
c) En déduire a, sachant que $n = 1{,}0$, que $D = 1{,}0\,\text{m}$ et que $\lambda = 630\,\text{nm}$ .....

Entraînement 10.8 — Doublet spectral.

On éclaire des fentes de Young verticales espacées d'une distance a, avec un doublet spectral de longueurs d'onde λ_1 et λ_2 (on pose $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ et $\lambda_{\text{moy}} = \dfrac{\lambda_2 + \lambda_1}{2}$). L'éclairement $I(x)$, obtenu en un point M d'un écran à une distance D des fentes, est représenté sur la figure ci-dessous. Il vérifie :

$$I(x) = I_{\text{moy}}\left[1 + C(x)\cos\left(\frac{2\pi n a x}{\lambda_{\text{moy}} D}\right)\right],$$

où $C(x)$, appelé *terme de contraste*, est défini par $C(x) = \cos\left(\dfrac{\pi n a x \Delta\lambda}{\lambda_{\text{moy}}^2 D}\right)$.



a) Identifier, grâce à la formule fournie, la période X du terme de contraste.

(a) $X = \dfrac{\lambda_{\text{moy}}^2 D}{na\Delta\lambda}$ (c) $X = \dfrac{\lambda_{\text{moy}}^2 D}{2na\Delta\lambda}$

(b) $X = \dfrac{2\lambda_{\text{moy}}^2 D}{na\Delta\lambda}$ (d) $X = \dfrac{\lambda_{\text{moy}}^2 D}{2\pi na\Delta\lambda}$

.....

b) On rappelle que $i = \dfrac{\lambda_{\text{moy}} D}{na}$. Déterminer graphiquement l'interfrange i.

.....

c) En déduire λ_{moy}, sachant que $n = 1{,}0$, que $D = 1{,}5\,\text{m}$ et $a = 0{,}20\,\text{mm}$.

.....

d) Déterminer graphiquement la période X du terme de contraste.

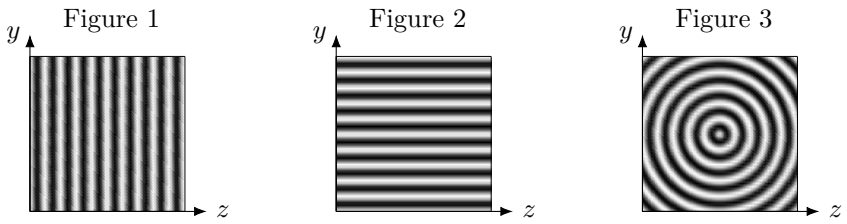
.....

e) En déduire l'écart spectral $\Delta\lambda$ du doublet.

.....

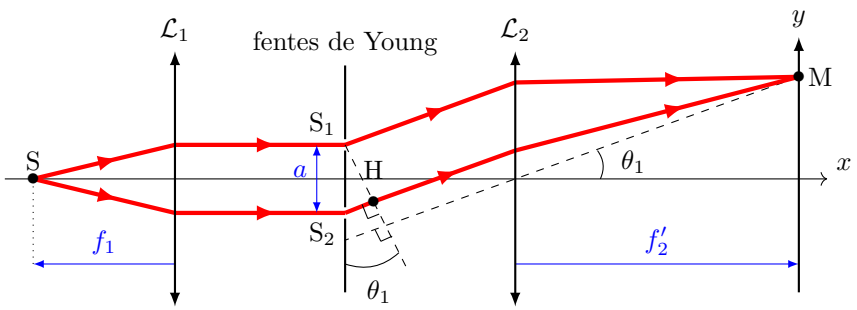
Interférométrie

Dans cette section, nous exploiterons les trois figures d'interférence suivantes.



Entraînement 10.9 — Fentes « deux » Young.

On éclaire des fentes de Young en faisceau parallèle conformément au schéma ci-dessous. La différence de marche entre les deux rayons 1 et 2 est : $\delta_{SM} = \mathcal{L}_{SM,2} - \mathcal{L}_{SM,1} = \mathcal{L}_{S_2H}$.



On donne le développement limité suivant : $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^4)$ quand $x \to 0$.

a) En étudiant le triangle S_1S_2H, exprimer la longueur S_2H en fonction de θ_1 et a.

.....

b) En étudiant un autre triangle, exprimer l'angle θ_1 en fonction de y et f_2'.

.....

c) Exprimer δ_{SM} en fonction de a, y et f_2' lorsque $\theta_1 \ll 1\,\text{rad}$ .....

d) Exprimer l'interfrange i de la figure d'interférence au niveau de l'écran, sachant que l'éclairement y est tel que $I = 2I_0\left[1 + \cos\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}\delta_{SM}\right)\right] = 2I_0\left[1 + \cos\left(2\pi\dfrac{y}{i}\right)\right]$.

.....

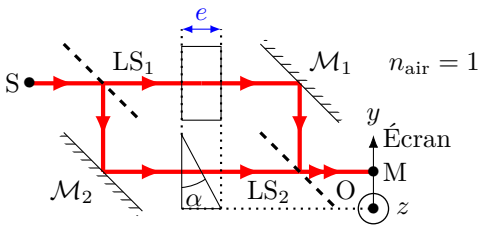
e) Quelle est la figure d'interférence observée sur l'écran ?

(a) Figure 1 (b) Figure 2 (c) Figure 3

.....

Entraînement 10.10 — Interféromètre de Mach-Zehnder.

On a positionné une lame d'épaisseur e et une lame prismatique d'épaisseur $e' = e - \alpha y$, toutes deux d'indice n, au niveau des bras d'un interféromètre de Mach-Zehnder (on ne tiendra pas compte de la réfraction en sortie de la lame prismatique).



Les lames séparatrices LS atténuent l'éclairement I_0 des rayons d'un facteur 2. On rappelle que l'amplitude S_0 d'un rayon est liée à son éclairement de telle manière que I_0 est proportionnel à S_0^2. La différence de marche entre les deux rayons 1 et 2 est :

$$\delta_{SM} = \mathcal{L}_{SM,1} - \mathcal{L}_{SM,2} = \mathcal{L}_{LS_1\mathcal{M}_1} - \mathcal{L}_{\mathcal{M}_2LS_2}.$$

a) De combien est atténuée l'amplitude d'un seul rayon après la deuxième séparatrice ?

(a) 1/2 (b) 1/4 (c) 1/8 .....

b) Exprimer la différence de marche δ_{SM} entre les deux bras en fonction de n, α et y ..

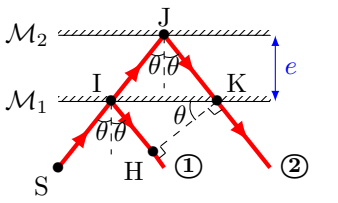
c) Exprimer l'interfrange i de la figure d'interférence au niveau de l'écran, sachant que l'éclairement y est tel que $I = I'[1 + \cos(\Delta\varphi)] = I'\left[1 + \cos\left(2\pi\dfrac{y}{i}\right)\right]$ .....

d) Quelle est la figure d'interférence observée sur l'écran ?

(a) Figure 1 (b) Figure 2 (c) Figure 3 .....

Entraînement 10.11 — Interféromètre de Michelson en lame d'air.

Un interféromètre de Michelson en configuration lame d'air repose sur l'association de deux miroirs $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ dont le schéma optique équivalent est présenté ci-contre. Les rayons se propagent dans l'air, assimilé à un milieu d'indice optique n.



Dans ce cas, la différence de marche entre les deux rayons 1 et 2 est : $\delta_{SM} = \mathcal{L}_{SM,2} - \mathcal{L}_{SM,1} = \mathcal{L}_{IJ} + \mathcal{L}_{JK} - \mathcal{L}_{IH}$.

a) Exprimer les longueurs IJ et JK en fonction de θ et e .....

b) Exprimer la longueur IK en fonction de θ et e .....

c) Exprimer la longueur IH en fonction de θ et IK .....

On rappelle l'identité trigonométrique : $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

d) Exprimer alors la longueur IH en fonction de $\cos(\theta)$ et e .....

e) En déduire l'expression de la différence de marche δ_{SM} en fonction de $\cos(\theta)$, n et e.

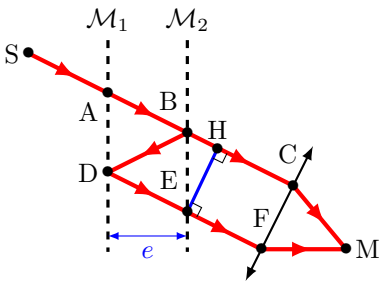
.....

f) Quelle est la figure d'interférence observée sur l'écran ?

(a) Figure 1 (b) Figure 2 (c) Figure 3 .....

Entraînement 10.12 — Interféromètre de Fabry-Perot.

Un interféromètre de Fabry-Perot est constitué de deux miroirs séparés d'une distance e par un milieu d'indice n. On s'intéresse aux deux rayons ci-contre. En sortie de l'interféromètre, une lentille permet de les focaliser afin qu'ils interfèrent en un point M d'un écran. Au niveau de chaque miroir, l'amplitude d'un rayon est multipliée par un coefficient r, qu'on approxime à $1/\sqrt{2}$, ou par un coefficient $t = 1 + r$ selon qu'il est réfléchi ou transmis. On considérera que l'air et le milieu entre les miroirs sont d'indice $n = 1$, et on notera i l'angle de réflexion tel que $\widehat{\text{ABD}} = 2i$ et $\widehat{\text{BEH}} = i$.



On rappelle que l'éclairement est proportionnel au carré de l'amplitude.

a) Quel est le rapport des éclairements entre le rayon du bas et celui du haut ?

(a) 1/2 (b) 1/4 (c) 1/8 .....

b) Exprimer la longueur BH en fonction de e et i .....

c) Exprimer la longueur BD en fonction de e et i .....

d) Exprimer la différence de marche $\delta_{\text{SM}} = \mathcal{L}_{\text{SABDFM}} - \mathcal{L}_{\text{SABHCM}}$ .....

e) Quelles formes auront les franges d'interférence sachant que $I(\text{M}) = 2I_0\left[1 + \cos\left(\dfrac{\delta_{\text{SM}}}{2\pi}\right)\right]$?

(a) bandes rectilignes (b) carrés évidés (c) anneaux .....

Autres entraînements

Entraînement 10.13 — Grandeurs caractéristiques d'un signal.

La valeur d'un signal lumineux sinusoïdal en un point x (en m) à un instant t (en s) est donnée par :

$$s(x,t) = S_0 \cos\left(2\pi\left(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi\right) = S_0 \cos(2\pi(\nu t \pm \sigma x) + \varphi) = S_0 \cos(\omega t \pm kx + \varphi),$$

avec S_0 son amplitude, T sa période, λ sa longueur d'onde, ν sa fréquence, σ son nombre d'onde, ω sa pulsation temporelle, k sa pulsation spatiale et c sa célérité.

Calculer la valeur des différentes grandeurs caractéristiques des signaux suivants :

$$s_1 = S_0 \cos(60t - 28x) \quad ; \quad s_2 = S_0 \cos\left(\frac{t}{21} - \frac{t}{32} - \frac{x}{7} + \frac{x}{12}\right) \quad ; \quad s_3 = S_0 \cos\left(\frac{3\pi}{5}t + \frac{t}{23} - \frac{2\pi\nu_3}{5c}x + \frac{\pi}{2}\right).$$

a) T_1 (s) ..... c) ν_2 (s^{-1}) ..... e) ω_3 ($\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$) .

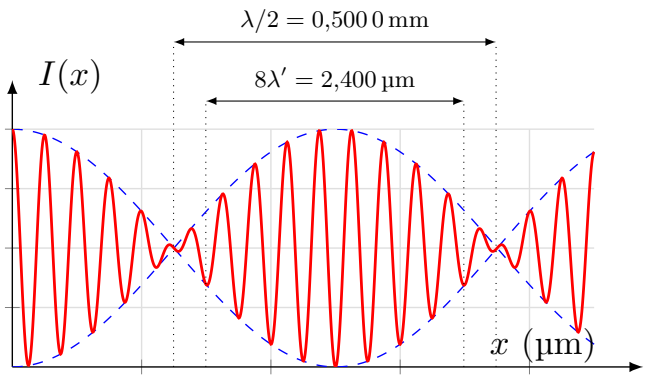
b) λ_1 (m) ..... d) σ_2 (m^{-1}) ..... f) k_3 ($\text{rad}\cdot\text{m}^{-1}$)

Entraînement 10.14 — Brouillage.

On éclaire un interféromètre de Michelson réglé en lame d'air avec une source ponctuelle émettant deux signaux lumineux de fréquences ν_1 et ν_2, et de longueurs d'onde λ_1 et λ_2. En sortie de l'interféromètre, l'éclairement au niveau de l'axe optique est tel que

$$I(x) = I_0\left[1 + \cos\left(2\pi\frac{\nu_1 - \nu_2}{c}x\right)\cos\left(2\pi\frac{\nu_1 + \nu_2}{c}x\right)\right],$$

avec x l'écart d'un des deux miroirs de l'interféromètre par rapport à l'autre, comme illustré par l'interférogramme ci-dessous (pour lequel l'échelle est non respectée).



a) Exprimer la période spatiale λ de $\cos\left(2\pi\frac{\nu_1 - \nu_2}{c}x\right)$.

.....

b) À l'aide de l'interférogramme, donner la valeur de $\Delta\nu = \nu_1 - \nu_2$.

.....

c) Exprimer la période spatiale λ' de $\cos\left(2\pi\frac{\nu_1 + \nu_2}{c}x\right)$.

.....

d) À l'aide de l'interférogramme, donner la valeur de $\nu_0 = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}$.

.....

e) Déterminer la valeur de λ_1 en sommant $2\nu_0$ et $\Delta\nu$.

.....

f) Déterminer la valeur de λ_2 en soustrayant $\Delta\nu$ à $2\nu_0$.

.....

Entraînement 10.15 — La bonne formule.

On considère les figures d'interférence suivantes, pour lesquelles le repère cartésien associé est donné.

Figure n° 1

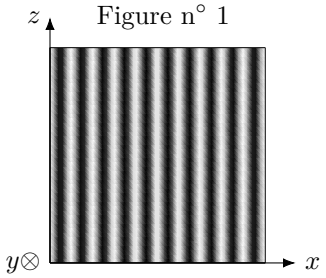


Figure n° 2

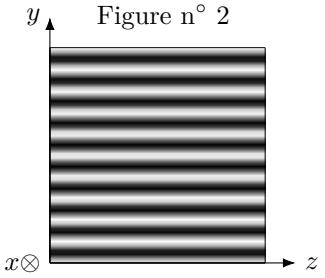
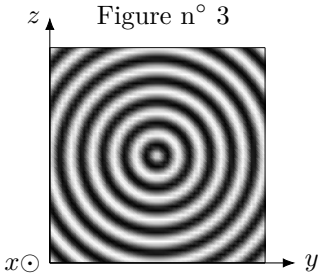


Figure n° 3



a) À quelle quantité est proportionnelle l'intensité lumineuse de la figure d'interférence n° 1 ?

(a) $1+\cos\left(\dfrac{2\pi ax}{\lambda D}\right)$

(b) $1+\cos\left(\dfrac{2\pi ay}{\lambda D}\right)$

(c) $1+\cos\left(\dfrac{2\pi az}{\lambda D}\right)$

.....

b) À quelle quantité est proportionnelle l'intensité lumineuse de la figure d'interférence n° 2 ?

(a) $1+\cos\left(\dfrac{2\pi ax}{\lambda D}\right)$

(b) $1+\cos\left(\dfrac{2\pi ay}{\lambda D}\right)$

(c) $1+\cos\left(\dfrac{2\pi az}{\lambda D}\right)$

.....

c) À quelle quantité est proportionnelle l'intensité lumineuse de la figure d'interférence n° 3 ?

(a) $1+\cos\left(\dfrac{4\pi ne}{\lambda}\dfrac{y_\mathrm{O}}{\sqrt{x^2+y^2+z_\mathrm{O}^2}}\right)$

(b) $1+\cos\left(\dfrac{4\pi ne}{\lambda}\dfrac{z_\mathrm{O}}{\sqrt{x^2+y^2+z_\mathrm{O}^2}}\right)$

(c) $1+\cos\left(\dfrac{4\pi ne}{\lambda}\dfrac{x_\mathrm{O}}{\sqrt{x_\mathrm{O}^2+y^2+z^2}}\right)$

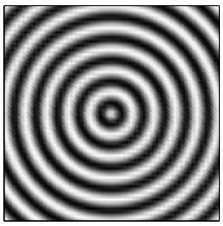
(d) $1+\cos\left(\dfrac{4\pi ne}{\lambda}\dfrac{y+z}{\sqrt{x_\mathrm{O}^2+y_\mathrm{O}^2+z_\mathrm{O}^2}}\right)$

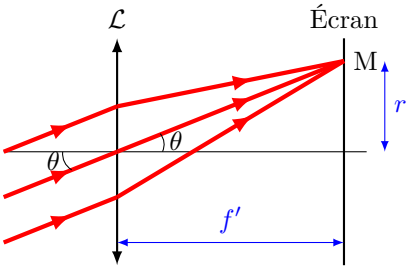
.....

Entraînement 10.16 — Anneaux du Michelson en lame d'air.

Les franges d'interférence d'un interféromètre de Michelson en configuration lame d'air sont des anneaux sombres et brillants (voir figure ci-dessous).

On peut schématiser les rayons lumineux en sortie de l'interféromètre avec le schéma optique ci-dessous où r est le rayon d'un anneau brillant, où θ est l'angle d'incidence des rayons lumineux et où f' est la distance focale de la lentille.





a) Exprimer le rayon d'un anneau r en fonction de θ et de f' .....

b) On rappelle que l'ordre d'interférence pour le Michelson en configuration lame d'air est : $p = \dfrac{2ne\cos(\theta)}{\lambda}$ avec $n = 1{,}00$ l'indice optique de l'air ; $e = 500\,\mu\text{m}$ et $\lambda = 643\,\text{nm}$.

Calculer l'ordre d'interférence p_0 dans le cas où l'angle d'incidence est nul .....

c) Si on fait varier θ entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$, $\cos(\theta)$:

(a) augmente (b) diminue (c) reste constant

.....

d) On rappelle que l'ordre d'interférence d'une frange brillante est un nombre entier.

Quel est l'ordre d'interférence p_1 du premier anneau brillant visible sur l'écran (sachant que $\theta = 0$ correspond au centre de l'écran) ?

(a) 1 555 (b) 1 555,5 (c) 1 556

.....

e) En déduire le rayon r_1 du premier anneau brillant en mm sachant que $f' = 50{,}0\,\text{cm}$.

.....

f) Quel est l'ordre d'interférence p_2 du deuxième anneau brillant visible sur l'écran ?

(a) 1 554 (b) 1 555 (c) 1 556 (d) 1 557

.....

g) En déduire le rayon r_2 du deuxième anneau brillant en mm .....

h) Calculer le rayon r_{10} du dixième anneau brillant en cm .....

Réponses mélangées

$48\,\mu\text{m}$ $\quad \dfrac{c}{\nu_1+\nu_2}$ $\quad$ (a) $\quad A^2$ $\quad \cos^2 a = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$ $\quad \dfrac{\lambda_0}{(n-1)\alpha}$

$1\,555{,}2$ $\quad \dfrac{S_1^2}{2}$ $\quad 2ne\cos(\theta)$ $\quad$ (a) $\quad$ (b) $\quad 1+\cos(\pm\varphi_1 \mp \varphi_2)$ $\quad \dfrac{f_2'\lambda}{na}$

$\cos(a)\cos(b) = \dfrac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2}$ $\quad \sin(a)\cos(a) = \dfrac{\sin(2a)}{2}$ $\quad \dfrac{S_2^2}{2}$ $\quad \dfrac{2\pi}{\omega_2}$

$\sin^2 a = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$ $\quad 2e\dfrac{1-\cos^2(\theta)}{\cos(\theta)}$ $\quad 6{,}00\times10^{11}\,\text{Hz}$ $\quad$ (c) $\quad$ (c) $\quad$ (b) $\quad$ (c)

(c) $\quad 600{,}2\,\text{nm}$ $\quad \dfrac{A^2}{8}\left(\dfrac{5}{4}+\cos(\varphi_0)\right)$ $\quad 0{,}57\,\text{cm}$ $\quad \omega(t-t')$ $\quad$ (c) $\quad$ (a)

$8{,}22\,\text{mm}$ $\quad \arctan\left(\dfrac{y}{f_2'}\right)$ $\quad 1{,}3\times10^{-9}\,\text{rad}\cdot\text{m}^{-1}$ $\quad$ (a) $\quad k(x'-x)$ $\quad$ (b) $\quad \dfrac{2e\sin^2 i}{\cos(i)}$

$1{,}9\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ $\quad 19{,}7\,\text{mm}$ $\quad 2{,}6\times10^{-3}\,\text{s}^{-1}$ $\quad 599{,}8\,\text{nm}$ $\quad$ (b) $\quad \dfrac{e}{\cos(i)}$ $\quad$ (b)

$\dfrac{e}{\cos(\theta)}$ $\quad 6{,}4\,\text{cm}$ $\quad \dfrac{\pi}{\omega_2}$ $\quad 2ne\cos(i)$ $\quad \dfrac{\pi}{\omega_1}$ $\quad 0{,}76\,\mu\text{m}$ $\quad \cos(\omega t - kx)$ $\quad$ (a)

IK$\sin(\theta)$ $\quad 2e\tan(\theta)$ $\quad a\sin(\theta_1)$ $\quad -\sin(\omega t - kx)$ $\quad 9{,}5\times10^{-3}\,\text{m}^{-1}$ $\quad$ (a)

$\dfrac{A^2+B^2}{2}$ $\quad 2{,}2\times10^{-1}\,\text{m}$ $\quad 0{,}14\,\mu\text{m}$ $\quad 5{,}47\,\text{cm}$ $\quad 0$ $\quad (n-1)\alpha y$ $\quad$ (b) $\quad 1{,}3\,\text{cm}$

$\dfrac{2\pi}{\omega_1}$ $\quad 6{,}00\times10^{12}\,\text{Hz}$ $\quad$ (c) $\quad \dfrac{nay}{f_2'}$ $\quad f'\tan(\theta)$ $\quad \dfrac{c}{\nu_1-\nu_2}$ $\quad 1{,}0\times10^{-1}\,\text{s}$ $\quad 0$

► Réponses et corrigés page 346

Interférences à N ondes

Prérequis
Nombres complexes et formules trigonométriques.

Avant toute chose

Entraînement 11.1 — Complexes et conjugués.

On considère le nombre complexe suivant :

$$\underline{Z}_1 = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}.$$

a) Quelle est l'expression de $\underline{Z}_1^*$, le conjugué de $\underline{Z}_1$?

(a) $\underline{Z}_1^* = -1 + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$ (b) $\underline{Z}_1^* = 1 - \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$ (c) $\underline{Z}_1^* = 1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}$ (d) $\underline{Z}_1^* = 1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}$

.....

b) En déduire $\underline{Z}_1\underline{Z}_1^*$ et le mettre sous la forme d'une fonction de $\cos(\theta)$ .....

Reprenons l'étude avec le nombre complexe suivant :

$$\underline{Z}_2 = 1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}.$$

c) Quelle est l'expression de $\underline{Z}_2^*$, le conjugué de $\underline{Z}_2$?

(a) $\underline{Z}_2^* = 1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}$ (b) $\underline{Z}_2^* = 1 - \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$ (c) $\underline{Z}_2^* = -1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}$ (d) $\underline{Z}_2^* = 1 + \mathrm{e}^{+\mathrm{j}\theta}$

.....

d) En déduire $\underline{Z}_2\underline{Z}_2^*$ et le mettre sous la forme d'une fonction de $\cos(\theta)$ .....

Entraînement 11.2 — Des expressions complexes aux fonctions sinusoïdales (I).

On considère le nombre complexe suivant :

$$\underline{Z}_1 = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}.$$

a) Écrire $\underline{Z}_1$ sous la forme suivante :

$$\underline{Z}_1 = \underline{f}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Donner l'expression de $\underline{f}\left(\frac{\theta}{2}\right)$ .....

b) En déduire $\underline{Z}_1\underline{Z}_1^*$ et le mettre sous la forme d'une fonction de $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ ....

Entraînement 11.3 — Des expressions complexes aux fonctions sinusoïdales (II).

Reprenons l'étude avec le nombre complexe suivant :

$$\underline{Z}_2 = 1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}.$$

a) Écrire $\underline{Z}_2$ sous la forme suivante :

$$\underline{Z}_2 = \underline{g}\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Donner l'expression de $\underline{g}\left(\frac{\theta}{2}\right)$ .....

b) En déduire $\underline{Z}_2\underline{Z}_2^*$ et le mettre sous la forme d'une fonction de $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ ....

Entraînement 11.4 — Deux calculs entre nombres complexes et trigonométrie.

Soit $R \in \mathbb{R}$. On considère le nombre complexe suivant :

$$\underline{s} = \frac{1}{1 - R\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}}.$$

On admet que $\underline{ss}^*$ peut se mettre sous la forme suivante :

$$\underline{ss}^* = \frac{a}{1 + m\sin^2(\varphi/2)}.$$

a) Donner l'expression de a en fonction de R .....

b) Donner l'expression de m en fonction de R .....

Entraînement 11.5 — Résolution d'une équation trigonométrique (I).

Soit $\theta \in [-90°, 0°[$.
Nous cherchons l'ensemble des angles θ' avec $\theta' \in [-90°, 90°]$ vérifiant l'équation suivante :

$$\cos(\theta') = \cos(\theta).$$

L'ensemble des solutions s'écrit : $\theta' = \{a, b, c, d, ...\}$.

a) De combien d'éléments est composé l'ensemble des solutions ? .....

b) Donner le plus petit élément de l'ensemble des solutions .....

c) Donner le plus grand élément de l'ensemble des solutions .....

Entraînement 11.6 — Résolution d'une équation trigonométrique (II).

Soit $\theta \in [-90°, 0°]$.
Nous cherchons l'ensemble des angles θ' avec $\theta' \in [-90°, 90°]$ vérifiant l'équation suivante :

$$\sin(\theta') = \sin(\theta).$$

L'ensemble des solutions s'écrit : $\theta' = \{a, b, c, d, ...\}$.

De combien d'éléments est composé l'ensemble des solutions ? .....

Pour continuer...

Entraînement 11.7 — Suite géométrique.

On rappelle que la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique u_k de raison $q \neq 1$ vérifie :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \cdots + u_n = u_0(1 + q + \cdots + q^n) = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Soit $\varphi \in \mathbb{R}$; on suppose que φ n'est pas un multiple de 2π.
Nous souhaitons écrire les sommes $\underline{s}(\varphi)$ sous la forme suivante :

$$\underline{s}(\varphi) = \underline{f}(\varphi) \frac{\sin\left(a\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}.$$

Déterminer a et $\underline{f}(\varphi)$ pour $\underline{s}(\varphi) = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} + \mathrm{e}^{2\mathrm{j}\varphi}$.

a) a .....

b) $\underline{f}(\varphi)$ .....

Déterminer a et $\underline{f}(\varphi)$ pour $\underline{s}(\varphi) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} + \mathrm{e}^{2\mathrm{j}\varphi} + \mathrm{e}^{3\mathrm{j}\varphi} + \mathrm{e}^{4\mathrm{j}\varphi} + \mathrm{e}^{5\mathrm{j}\varphi}$.

c) a .....

d) $\underline{f}(\varphi)$ .....

Autour du réseau à N fentes

Entraînement 11.8 — Pas du réseau.

Nous disposons d'un réseau présentant 600 traits par millimètre (600 traits/mm).
Le pas du réseau a est la distance entre deux fentes successives (distance centre à centre).

Déterminer a en µm .....

Entraînement 11.9 — Calcul de linéature en lpi.

La linéature d'un réseau est affichée, dans le système anglo-saxon, en lpi (line per inch). On rappelle qu'un pied (foot) correspond à un tiers de verge anglaise (yard), et qu'il est divisé en douze pouces (inches). Un yard vaut 91,44 cm.

a) Donner la valeur du pouce (1 inch) en mm.

(a) 7,62 mm (b) 25,4 mm (c) 39,3 mm (d) 43,7 mm

.....

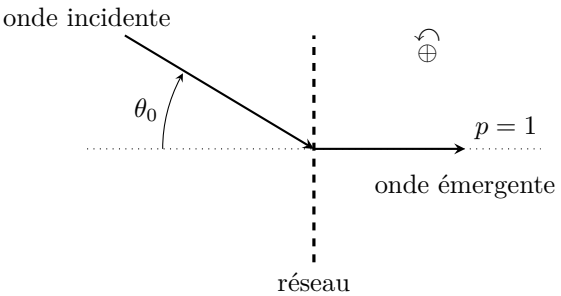
b) Calculer en traits par millimètre (résultat arrondi à la centaine la plus proche) la linéature d'un réseau comportant $n = 30\,000$ lpi .....

Entraînement 11.10 — À propos de la relation fondamentale des réseaux.

Un réseau de fentes de linéature $n = 600$ traits/mm est éclairé par une onde plane issue d'une source monochromatique de longueur d'onde dans l'air $\lambda = 546{,}1$ nm et on observe l'ordre 1 de diffraction par ce réseau en émergence normale.

On rappelle la relation fondamentale des réseaux par transmission entre l'angle d'incidence θ_0 et l'angle de diffraction θ par le réseau dans l'ordre p :

$$\sin(\theta) - \sin(\theta_0) = pn\lambda.$$



Que vaut l'angle d'incidence θ_0 (en degrés) de l'onde éclairant ce réseau ?

.....

Entraînement 11.11 — Brouillage des ordres.

Un réseau de fentes de linéature $n = 600$ traits par mm est éclairé sous incidence normale par une lampe à vapeur de mercure émettant les raies de longueur d'onde suivantes dans l'air :

λ (en nm)	404,7	407,8	435,8	491,6	546,1	577,0	579,1	623,4	690,7

On rappelle la condition d'interférences constructives entre les ondes planes diffractées dans l'ordre p par un réseau suivant la direction θ (angle mesuré par rapport à la normale au plan du réseau), éclairé par une onde plane incidente de longueur d'onde λ sous incidence normale : $\sin(\theta) = pn\lambda$.

a) En exploitant le tableau, donner en degrés l'intervalle $[\theta^{\min}, \theta^{\max}]$ des angles du spectre d'ordre 1 de la lampe à vapeur de mercure diffracté par ce réseau .....

b) Même question pour le spectre d'ordre 2 .....

c) Même question pour le spectre d'ordre 3 .....

d) On parle de chevauchement d'ordre quand au moins une raie d'un ordre donné s'intercale dans le spectre d'un ordre inférieur. Choisir la bonne réponse parmi les trois propositions ci-dessous :

(a) Tout le spectre d'ordre $p = 3$ est mélangé à celui d'ordre $p = 2$.

(b) Seules les trois dernières raies du mercure dans l'ordre $p = 3$ ne chevauchent pas les raies du spectre d'ordre $p = 2$.

(c) Seules les trois premières raies du mercure dans l'ordre $p = 3$ chevauchent les raies du spectre d'ordre $p = 2$.

.....

Entraînement 11.12 — Cas où $N = 2$.

On rappelle que l'expression de l'intensité diffractée par un réseau composé de N fentes vaut :

$$I = I_0 \frac{\sin^2\left(N\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)},$$

où φ est le déphasage entre deux rayons traversant deux fentes consécutives.

Dans cette application, nous allons prendre $N = 2$.

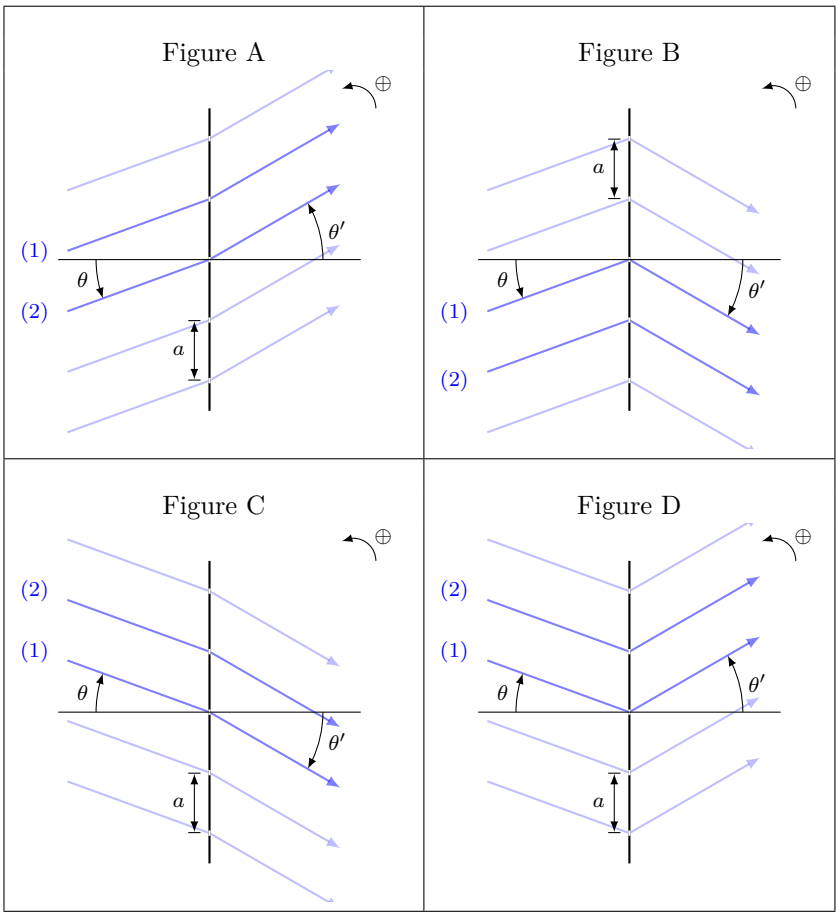
a) Écrire le numérateur en fonction de $\cos(\varphi)$ .....

b) Écrire le dénominateur en fonction de $\cos(\varphi)$ .....

c) Exprimer I en fonction de I_0 et $\cos(\varphi)$ .....

Entraînement 11.13 — Différences de marche.

On dispose d'un réseau plan constitué de n traits transparents par millimètre. Il est positionné sur un goniomètre préalablement réglé à l'infini. Ainsi, il est éclairé par une onde plane et on observe les interférences ayant lieu à l'infini. Le dispositif est plongé dans le vide (indice 1).
Nous souhaitons déterminer la différence de marche δ du rayon (2) par rapport au rayon (1) dans les différents cas représentés :



Quatre différences de marche sont proposées :

(a) $\delta = a\Big(\sin(\theta) + \sin(\theta')\Big)$

(b) $\delta = a\Big(\sin(\theta) - \sin(\theta')\Big)$

(c) $\delta = a\Big(\sin(\theta') + \sin(\theta)\Big)$

(d) $\delta = a\Big(\sin(\theta') - \sin(\theta)\Big)$

a) Dans le cas A, quelle est l'expression correcte de δ_A ? .....

b) Dans le cas B, quelle est l'expression correcte de δ_B ? .....

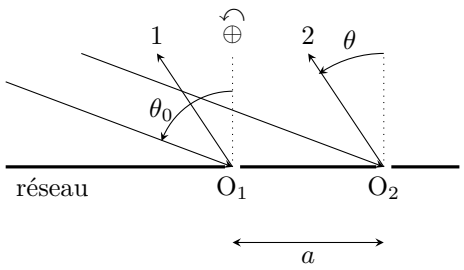
c) Dans le cas C, quelle est l'expression correcte de δ_C ? .....

d) Dans le cas D, quelle est l'expression correcte de δ_D ? .....

Entraînement 11.14 — Différence de marche pour un réseau par réflexion.

On considère un réseau par réflexion sur les points O_1 et O_2, de pas $a = O_1O_2$, éclairé par une onde plane sous l'angle d'incidence θ_0, et on s'intéresse à l'onde plane diffractée sous l'angle d'émergence θ.

On prendra l'indice de réfraction de l'air égal à l'unité.



La différence de marche $\delta_{2/1}$ du rayon 2 par rapport au rayon 1 vaut :

(a) $\delta_{2/1} = a\Big(\sin(\theta) - \sin(\theta_0)\Big)$

(b) $\delta_{2/1} = a\Big(\sin(\theta_0) - \sin(\theta)\Big)$

(c) $\delta_{2/1} = a\Big(\sin(\theta_0) + \sin(\theta)\Big)$

(d) $\delta_{2/1} = a\Big(\tan(\theta_0) + \tan(\theta)\Big)$

.....

Entraînement 11.15 — Périodicité de la fonction réseau.

On appelle fonction réseau, notée $\mathcal{R}_N$, la fonction de la variable ϕ définie par :

$$\mathcal{R}_N(\phi) = \left(\frac{\sin\left(\dfrac{N\phi}{2}\right)}{N\sin\left(\dfrac{\phi}{2}\right)}\right)^2 .$$

a) Donner la période pour la variable x de la fonction $\sin^2(x)$ .....

b) En déduire la période, pour la variable ϕ, de la fonction $\sin^2\left(\dfrac{\phi}{2}\right)$ .....

c) Quelle est la période, pour la variable ϕ, de la fonction $\sin^2\left(\dfrac{N\phi}{2}\right)$? .....

d) En déduire la période de la fonction réseau pour la variable ϕ.

(a) 2π

(b) 4π

(c) $\dfrac{2\pi}{N}$

(d) $2\pi N$

.....

Entraînement 11.16 — Propriétés de la fonction réseau.

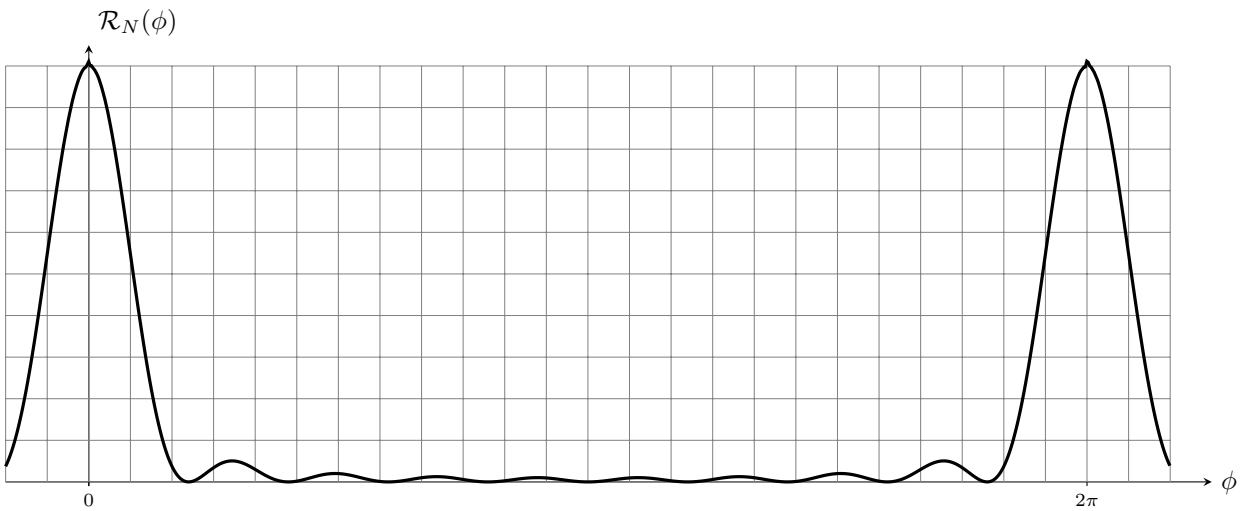
On considère la fonction réseau, notée $\mathcal{R}_N$, de la variable ϕ définie par $\mathcal{R}_N(\phi) = \left(\dfrac{\sin\left(\dfrac{N\phi}{2}\right)}{N \sin\left(\dfrac{\phi}{2}\right)} \right)^2$.

a) Évaluer $\mathcal{R}_N(0)$. On rappelle que $\sin(x) \sim x$ quand $x \to 0$ .....

b) Exprimer en fonction de N le nombre de zéros de la fonction réseau pour $\phi \in [0, 2\pi]$.

.....

c) On considère le graphe de la fonction réseau sur la figure ci-dessous :



Déduire du graphe la valeur de N utilisée pour le tracé .....

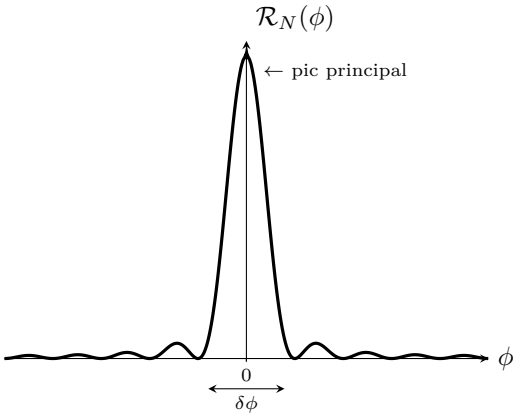
Entraînement 11.17 — Largeur d'un pic principal.

On rappelle l'expression de la fonction réseau. C'est la fonction $\mathcal{R}_N$ de la variable ϕ définie par :

$$\mathcal{R}_N(\phi) = \left(\frac{\sin\left(\frac{N\phi}{2}\right)}{N \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)} \right)^2 .$$

Cette fonction admet des pics appelés pics principaux pour toute valeur de ϕ multiple entier de 2π.

La figure ci-contre montre l'évolution de $\mathcal{R}_N$ autour de $\phi = 0$.



a) Le premier zéro de la fonction réseau, juste après le pic principal situé en $\phi = 0$, est obtenu pour l'angle :

(a) $\phi = \frac{\pi}{2N}$ (b) $\phi = \frac{\pi}{N}$ (c) $\phi = \frac{2\pi}{N}$ (d) $\phi = \frac{4\pi}{N}$

.....

b) En déduire, en fonction de N, la largeur $\delta\phi$ d'un pic principal défini comme la variation de ϕ entre les deux annulations de $\mathcal{R}_N(\phi)$ de part et d'autre du pic principal .....

Entraînement 11.18 — Mesure de longueur d'onde au goniomètre.

Un réseau de pas $a_0 = 1{,}67\,\mu\text{m}$, placé sur un goniomètre, est éclairé par une onde plane en incidence normale issue d'une lampe à vapeur de thallium. Le spectre ne comporte qu'une seule raie, de couleur verte, dont on souhaite mesurer la longueur d'onde λ.
On relève θ' dans les différents ordres d'interférence observés vérifiant la formule du réseau :

$$p\lambda = a_0 \sin(\theta').$$

Ordre p	-3	-2	-1	0	1	2	3
θ' en (rad)	$-1{,}30$	$-0{,}70$	$-0{,}33$	0	0,32	0,70	1,27

Afin de déterminer la longueur d'onde λ, nous allons tracer $a_0 \sin(\theta')$ en fonction de p et réaliser une régression linéaire. L'équation proposée pour la régression linéaire, que vous ferez à l'aide de votre calculatrice, se met sous la forme :

$$y = ax + b.$$

a) Identifier les grandeurs x et y .....

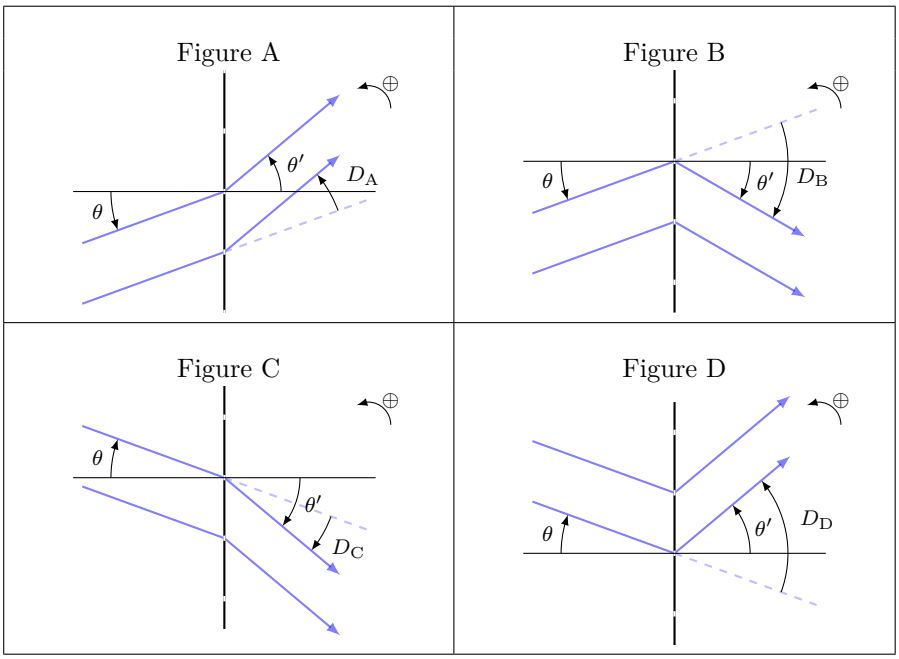
b) Après avoir effectué une régression linéaire à l'aide d'un tableur (à la calculatrice ou à l'ordinateur), déterminer la valeur de a en µm .....

c) En déduire la longueur d'onde λ en nm .....

Déviation angulaire induite par un réseau

Entraînement 11.19 — Définition de la déviation.

Un réseau plan est éclairé par une onde plane, et des interférences sont observées à l'infini. L'angle de déviation D que le réseau fait subir au faisceau incident est défini sur chacun des schémas ci-dessous.



Trois expressions de D sont proposées :

(a) $D = \theta + \theta'$ (b) $D = \theta - \theta'$ (c) $D = \theta' - \theta$

a) À quelle expression de D correspond la déviation D_A pour la figure A ? .....

b) À quelle expression de D correspond la déviation D_B pour la figure B ? .....

c) À quelle expression de D correspond la déviation D_C pour la figure C ? .....

d) À quelle expression de D correspond la déviation D_D pour la figure D ? .....

Autres entraînements

Entraînement 11.20 — Suite géométrique.

On rappelle que la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique u_k de raison $q \neq 1$ vérifie :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \cdots + u_n = u_0(1 + q + \cdots + q^n) = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Considérons la somme $\underline{s}(\theta)$ suivante :

$$\underline{s}(\theta) = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda}a\sin(\theta)} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{4\pi}{\lambda}a\sin(\theta)} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{6\pi}{\lambda}a\sin(\theta)} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{8\pi}{\lambda}a\sin(\theta)} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{10\pi}{\lambda}a\sin(\theta)}.$$

Nous souhaitons écrire $\underline{s}(\theta)$ sous la forme suivante :

$$\underline{s}(\theta) = \underline{g}(\theta)\frac{\sin(\alpha\sin\theta)}{\sin(\beta\sin\theta)}.$$

a) Déterminer α en fonction de a et λ .....

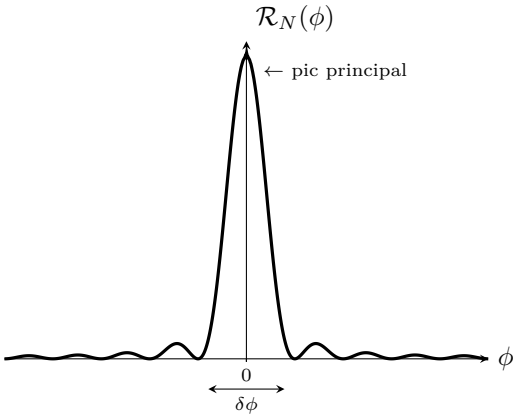
b) Déterminer β en fonction de a et λ .....

c) Déterminer $\underline{g}(\theta)$ .....

Entraînement 11.21 — Largeur à mi-hauteur d'un pic principal.

On rappelle l'expression de la fonction réseau $\mathcal{R}_N$ de la variable ϕ : $\mathcal{R}_N(\phi) = \left(\dfrac{\sin\left(\dfrac{N\phi}{2}\right)}{N\sin\left(\dfrac{\phi}{2}\right)}\right)^2$.

Cette fonction admet des pics appelés pics principaux pour toute valeur de ϕ multiple entier de 2π. Sur le graphique suivant, nous avons fait le choix de montrer l'évolution de $\mathcal{R}_N$ autour de $\phi = 0$.



On écrit la largeur à mi-hauteur $\Delta\phi_{1/2}$ d'un pic principal sous la forme $\Delta\phi_{1/2} = \alpha\dfrac{\pi}{N}$. En considérant que $N \gg 1$, calculer la valeur de α avec deux chiffres significatifs.

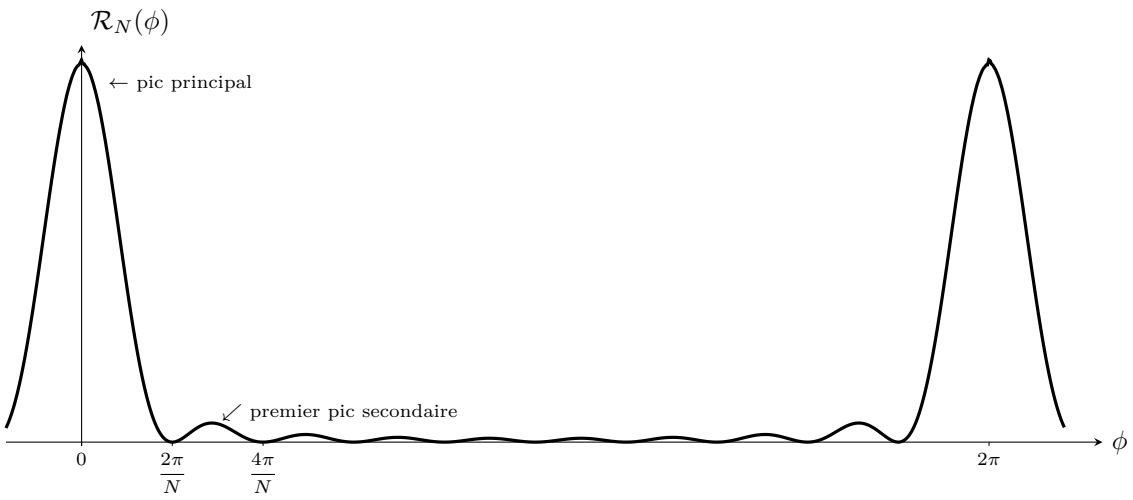
On rappelle le développement limité à l'ordre 3 de $\sin(x)$ au voisinage de 0 : $\sin(x) \sim x - \dfrac{x^3}{6}$

.....

Entraînement 11.22 — Hauteur du premier pic secondaire.

On considère la fonction réseau $\mathcal{R}_N$ de la variable ϕ : $\mathcal{R}_N(\phi) = \left(\dfrac{\sin\left(\dfrac{N\phi}{2}\right)}{N \sin\left(\dfrac{\phi}{2}\right)} \right)^2$.

On donne le tracé de cette fonction sur la figure ci-dessous :



a) Estimer, à partir du graphe, la valeur de ϕ correspondant au premier maximum secondaire de la fonction réseau .....

b) Estimer la valeur de la fonction réseau au premier maximum secondaire ...

Réponses mélangées

$e^{j\frac{5\pi}{\lambda}a\sin\theta}$ $4\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ (d) $4\sin^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ 1,69 (b) 1 1,67 µm

$2e^{j\frac{\theta}{2}}$ (c) $\dfrac{6\pi}{\lambda}a$ $1-\cos^2(\varphi)$ $\underline{f}(\varphi) = e^{j\varphi}$ −19,1° 0,534 µm

$\dfrac{1}{2}(1-\cos(\varphi))$ (b) (b) (c) θ 534 nm 2π $\dfrac{4R}{(1-R)^2}$ (b)

(c) 2 $\dfrac{\pi}{\lambda}a$ $x = p$ et $y = a_0\sin(\theta')$ $2(1+\cos\theta)$ $2I_0(1+\cos(\varphi))$ $\dfrac{2\pi}{N}$ (c)

(c) $a = 3$ $a = 5$ [29,1°, 56,0°] $N-1$ (c) $\dfrac{3\pi}{N}$ [14,1°; 24,5°]

$2j\ e^{-j\frac{\theta}{2}}$ $2(1-\cos\theta)$ (c) $\dfrac{4\pi}{N}$ π (a) 1 200 traits/mm (c)

10 (d) $-\theta$ 0,05 $\underline{f}(\varphi) = e^{j3\varphi}$ 1 $\dfrac{1}{(1-R)^2}$ [46,8°; 79,4°]

► Réponses et corrigés page 355

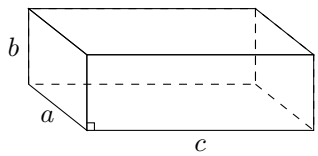
Outils mathématiques pour la diffusion

Prérequis
Expression des surfaces usuelles (disque, sphère, ...).
Expression des volumes usuels (parallélépipède, cylindre, sphère, ...).

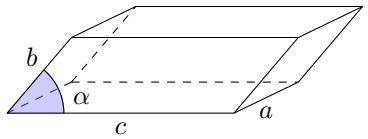
Pour bien commencer

Entraînement 12.1 — Calcul de volumes.

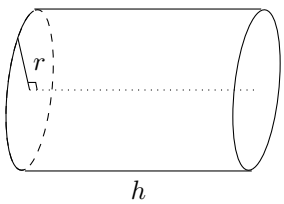
Dans chacun des cas suivants, exprimer le volume du solide en fonction des données.



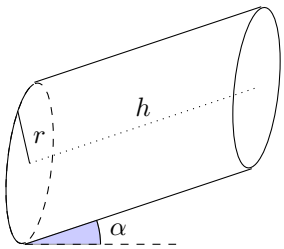
Volume a)



Volume b)



Volume c)

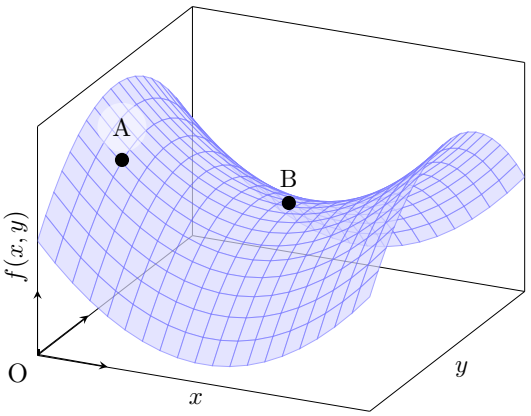


Volume d)

a) b) c) d)

Entraînement 12.2 — Signe des dérivées partielles.

On considère la fonction de deux variables $f(x,y)$ représentée ci-contre. On étudie le signe des dérivées partielles au niveau des points A et B.



a) Quel est le signe de la dérivée partielle d'ordre 1 de f par rapport à x au point A, notée $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{A})$? .....

b) Quel est le signe de la dérivée partielle d'ordre 1 de f par rapport à y au point A, notée $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\mathrm{A})$? .....

On s'intéresse maintenant au comportement de f au voisinage du point B. Pour chacune des questions suivantes, choisir la bonne réponse.

c)

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{B}) > 0$ (c) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{B}) < 0$

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{B}) = 0$

.....

d)

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\mathrm{B}) > 0$ (c) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\mathrm{B}) < 0$

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\mathrm{B}) = 0$

.....

e)

(a) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathrm{B}) > 0$ (c) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathrm{B}) < 0$

(b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathrm{B}) = 0$

.....

f)

(a) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathrm{B}) > 0$ (c) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathrm{B}) < 0$

(b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathrm{B}) = 0$

.....

Entraînement 12.3 — Volume d'un cône.

Le volume d'un cône de hauteur h et dont le rayon de la base est r vaut $V(r,h) = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$.

a) Quelle est l'expression de $\dfrac{\partial V}{\partial r}(r,h)$? .....

b) Quelle est l'expression de $\dfrac{\partial V}{\partial h}(r,h)$? .....

On souhaite comparer l'influence d'une même variation $\mathrm{d}\ell$ de h ou de r sur la valeur du volume V.

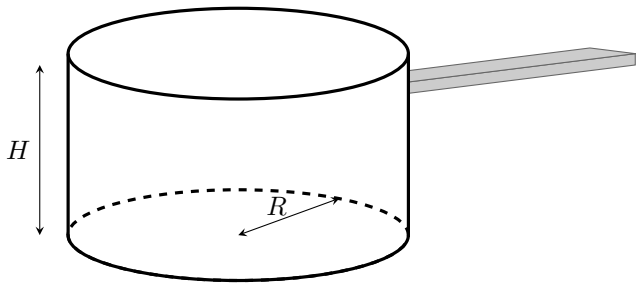
c) À quelle condition sur h et r a-t-on $\dfrac{\partial V}{\partial h}(r,h) > \dfrac{\partial V}{\partial r}(r,h)$?

(a) $h/3 < r$ (b) $h < r$ (c) $2h < r$ (d) $3h < r$

.....

Entraînement 12.4 — Fabrication d'une casserole.

Les questions de cet entraînement ne concernent pas le manche de la casserole et ne concernent donc que la partie principale de la casserole. L'épaisseur de la tôle utilisée pourra être négligée.



Un industriel souhaite fabriquer une casserole à partir de plaques de métal d'épaisseur constante.

a) Pour cela, quelle surface de tôle $S(R,H)$ doit-il utiliser ?

(a) $S(R,H) = 2\pi R^2 + \pi RH$
(b) $S(R,H) = \pi H^2 + 2\pi RH$
(c) $S(R,H) = \pi R^2 + 2\pi RH$
(d) $S(R,H) = 2\pi H^2 + \pi RH$

.....

b) Que vaut le volume utile $V(R,H)$?

(a) $V(R,H) = 2\pi R^2 H$
(b) $V(R,H) = \pi R^2 H$

.....

c) Exprimer $S(R,V)$ la surface de tôle que l'on doit utiliser pour fabriquer la casserole en fonction du rayon R et du volume V.

.....

Le fabricant souhaite fabriquer une casserole de volume $V = V_0$ donné, tout en minimisant la quantité de tôle utilisée.

d) Il cherche donc une géométrie qui vérifie :

(a) $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}R}(R,V_0) = 0$
(b) $\dfrac{\partial S}{\partial R}(R,V_0) = 0$

.....

e) Déterminer l'expression de V_0 en fonction de R, puis celle de H en fonction de R permettant de minimiser la surface de tôle utilisée.

(a) $V_0 = \pi R^3$ (b) $V_0 = 2\pi R^3$ (c) $H = R$ (d) $H = 2R$

.....

Entraînement 12.5 — Quelques équations différentielles (I).

Résoudre les équations différentielles suivantes en tenant compte des conditions aux limites.

Les quantités n_0, n_1, j_0 et p sont des constantes.

a) $\dfrac{\partial^2 n}{\partial x^2}(x,t) = 0$ avec $\begin{cases} n(0,t) &= n_0 \\ \dfrac{\partial n}{\partial x}(0,t) &= j_0 \end{cases}$ .....

b) $\dfrac{\partial^2 n}{\partial x^2}(x,t) = 0$ avec $\begin{cases} n(0,t) &= n_0 \\ n(L,t) &= n_1 \end{cases}$ .....

c) $\dfrac{\partial^2 n}{\partial x^2}(x,t) = p$ avec $\begin{cases} n(0,t) &= n_0 \\ n(L,t) &= n_0 \end{cases}$ .....

Entraînement 12.6 — Quelques équations différentielles (II).

Résoudre les équations différentielles suivantes en tenant compte des conditions initiales (τ, n_0, n_c, p et L sont des constantes) :

a) $\dfrac{\partial n}{\partial t}(x,t) = \dfrac{n}{\tau}$ avec $n(x,0) = n_0$ .....

b) $\dfrac{\partial n}{\partial t}(x,t) = -\dfrac{n^2}{n_c \tau}$ avec $n(x,0) = n_0$ .....

c) $\dfrac{\partial n}{\partial t}(x,t) = -\dfrac{n}{\tau} + p$ avec $n(x,0) = n_0\left(1 - \dfrac{x}{L}\right)$ .....

Réponses mélangées

ⓑ $n(t) = \dfrac{n_0}{1 + \dfrac{n_0 t}{n_c \tau}}$ $n_0\left(1 - \dfrac{x}{L}\right)\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right) + p\tau\left(1 - \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\right)$ négatif

$\dfrac{p}{2}x(x-L) + n_0$ $\dfrac{2\pi r h}{3}$ ⓐ et ⓒ positif ⓐ $abc\sin(\alpha)$ ⓒ

$\dfrac{\pi r^2}{3}$ $n(x,t) = n_0 \exp\left(\dfrac{t}{\tau}\right)$ $n(x,t) = \dfrac{n_1 - n_0}{L}x + n_0$ ⓒ $\pi R^2 + 2\dfrac{V}{R}$

$\pi r^2 h$ ⓑ abc $n(x,t) = j_0 x + n_0$ $\pi r^2 h\cos(\alpha)$ ⓒ ⓑ ⓑ

► Réponses et corrigés page 363

Diffusion thermique

Prérequis
Premier principe et deuxième principe de la thermodynamique.
Loi de Fourier : $\vec{j} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}\, T$.

Dans toute la fiche, les caractéristiques du matériau homogène et isotrope étudié seront notées :

- D, le coefficient de diffusivité thermique ($\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$),
- μ, la masse volumique ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$),
- c, la capacité thermique massique du matériau ($\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$),
- λ, la conductivité thermique du matériau ($\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$).

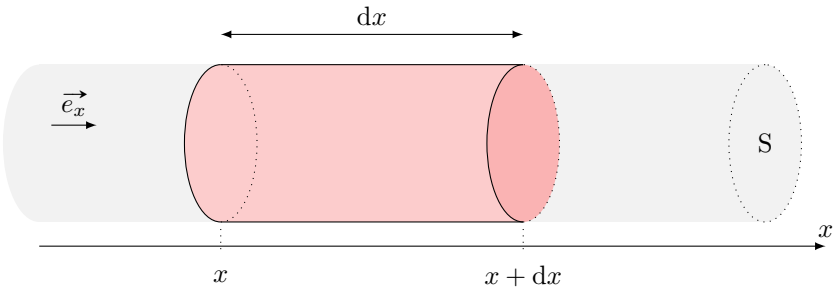
Pour évaluer les ordres de grandeur caractéristiques du phénomène, on notera :

- τ, la durée caractéristique (s),
- L, la longueur caractéristique (m).

Étude de flux thermique

Entraînement 13.1 — Bilan thermique en géométrie cartésienne.

On se place dans le cas d'une diffusion unidimensionnelle telle que les isothermes sont des plans $x = \text{cste}$.



On note S la section du conducteur et ℓ le périmètre de la section.

a) Le vecteur densité de flux thermique $\vec{j_Q} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T)$ a pour unité possible :

(a) $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ (b) $\text{J} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}$ (c) $\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$ (d) $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$

.....

b) Dans le cadre de cet entraînement, le vecteur densité de flux thermique $\vec{j_Q} = j_Q \vec{e_x}$ peut s'écrire :

(a) $\vec{j_Q} = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial t} \vec{e_x}$ (b) $\vec{j_Q} = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial x} \vec{e_x}$

.....

On étudie un élément de volume du conducteur thermique de section S, et compris entre x et $x + \mathrm{d}x$.

c) L'énergie interne $U(t)$ de la tranche considérée à l'instant t est :

(a) $cS\,\mathrm{d}xT(x,t) + \mathrm{C}$ (c) $\mu cS\,\mathrm{d}xT(x,t) + \mathrm{C}$

(b) $cS\,\mathrm{d}tT(x,t) + \mathrm{C}$ (d) $\mu cS\,\mathrm{d}tT(x,t) + \mathrm{C}$

où C est une constante .....

d) En déduire la variation d'énergie interne $\mathrm{d}U$ entre t et $t + \mathrm{d}t$.

.....

On souhaite maintenant évaluer les transferts thermiques entre la tranche et l'extérieur.

e) En x, le transfert thermique algébriquement reçu par la tranche entre t et $t + \mathrm{d}t$ s'écrit :

(a) $-j_Q(x,t)S\,\mathrm{d}t$ (b) $j_Q(x,t)S\,\mathrm{d}t$ (c) 0

.....

f) En $x + \mathrm{d}x$, le transfert thermique algébriquement reçu par la tranche entre t et $t + \mathrm{d}t$ s'écrit :

(a) $-j_Q(x + \mathrm{d}x, t)S\,\mathrm{d}t$ (b) $j_Q(x + \mathrm{d}x, t)S\,\mathrm{d}t$ (c) 0

.....

g) Au niveau de la paroi latérale, le transfert thermique algébriquement reçu par la tranche entre t et $t + \mathrm{d}t$ s'écrit, en notant ℓ le périmètre de la section :

(a) $j_Q(x,t)\ell\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ (c) 0 (e) $-j_Q(x + \mathrm{d}x, t)\ell\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$

(b) $-j_Q(x,t)\ell\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ (d) $j_Q(x + \mathrm{d}x, t)\ell\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$

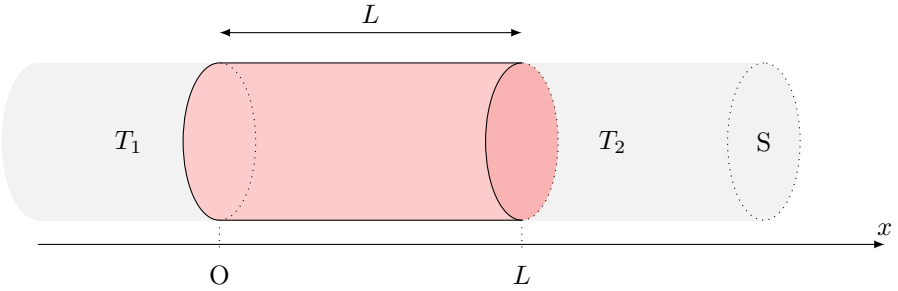
.....

h) En déduire le transfert thermique total δQ algébriquement reçu par la tranche.

.....

Entraînement 13.2 — Équation de la chaleur.

On étudie une barre homogène de section S, de longueur L, dont la surface latérale est calorifugée et dont les extrémités gauche et droite sont mises en contact thermique parfait avec des thermostats de températures respectives T_1 et T_2. On se place en coordonnées cartésiennes.



Initialement, l'ensemble de la barre est à la température T_0.

a) Le champ de température est de la forme :

(a) $T = T(x,t)$ (c) $T = T(x)$ (e) $T = T(y,t)$

(b) $T = T(x,y,t)$ (d) $T = T(x,y)$ (f) $T = T(x,y,z,t)$

.....

b) Le vecteur de densité volumique de courant thermique $\overrightarrow{j_Q}$ est de la forme :

(a) $\overrightarrow{j_Q} = j_Q(x,t)\overrightarrow{e_x}$ (d) $\overrightarrow{j_Q} = j_Q(x)\overrightarrow{e_x}$

(b) $\overrightarrow{j_Q} = j_Q(x,y,t)\overrightarrow{e_x}$ (e) $\overrightarrow{j_Q} = j_Q(y,t)\overrightarrow{e_y}$

(c) $\overrightarrow{j_Q} = j_{Qx}(x,y)\overrightarrow{e_x} + j_{Qy}(x,y)\overrightarrow{e_y}$ (f) $\overrightarrow{j_Q} = j_Q(x,y,z,t)\overrightarrow{e_x}$

.....

c) L'équation de la chaleur $\dfrac{\partial T}{\partial t} = D\Delta T$ s'écrit ici :

(a) $\dfrac{\partial T}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ (c) $\dfrac{\partial T}{\partial t} = D\left[\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right]$

(b) $\dfrac{\partial T}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ (d) $0 = D\dfrac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}x^2}$

.....

La diffusion : un processus lent

Entraînement 13.3 — Étude qualitative.

L'équation de diffusion caractérise l'évolution temporelle du profil de température dans un matériau.

En raisonnant en ordre de grandeur, cette équation fait le lien entre un temps caractéristique τ et une longueur caractéristique de diffusion L : $L = \sqrt{D\tau}$ où $D = \dfrac{\lambda}{\mu c}$ est le coefficient de diffusion thermique.

Par combien est multipliée la longueur caractéristique de diffusion lorsque l'on double :

a) la conductivité du matériau ? .....

b) la capacité thermique du matériau ? .....

Par combien est multiplié le temps caractéristique de diffusion si on double :

c) la longueur du matériau L ? .....

d) la masse volumique μ ? .....

Entraînement 13.4 — Nombre de Fourier : transformation adiabatique ?

Le nombre de Fourier $\text{Fo} = \dfrac{D\Delta t}{L^2}$ est un nombre sans dimension utilisé couramment en transfert thermique, avec $D = \dfrac{\lambda}{\mu c}$ ($\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$) le coefficient de diffusion thermique, Δt (s) la durée étudiée et L (m) la longueur caractéristique d'étude.

Il se définit également comme le rapport entre la durée Δt d'un processus et un temps caractéristique de diffusion (qui est le temps nécessaire au transfert thermique pour diffuser sur une distance L).

a) Dans quel cas un processus peut-il être considéré comme adiabatique ?

(a) $\text{Fo} \ll 1$ (b) $\text{Fo} \gg 1$

On considère la compression du mélange {air + carburant} dans un cylindre d'un moteur 4 temps en acier. Avec un régime moteur d'environ $2\,000\,\text{tr} \cdot \text{min}^{-1}$, la durée de la compression est de $1{,}5 \times 10^{-2}\,\text{s}$. On considère que l'épaisseur du cylindre est de 5 mm.

On donne $\lambda_{\text{acier}} = 13\,\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, $\mu_{\text{acier}} = 7\,800\,\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et $c_{\text{acier}} = 480\,\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$.

b) En exploitant les données ci-dessus, calculer la valeur du nombre de Fourier .....

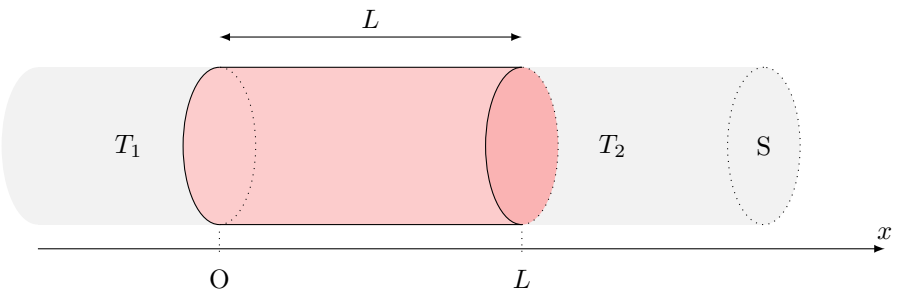
c) L'hypothèse d'une compression adiabatique habituellement utilisée est-elle valide ? ..

En régime permanent : utilisation des résistances thermiques

Entraînement 13.5 — Champ de température en géométrie cartésienne.

On étudie une barre homogène de section S, de longueur L, dont la surface latérale est calorifugée et dont les extrémités gauche et droite sont mises en contact thermique parfait avec des thermostats de températures respectives T_1 et T_2.

On se place en coordonnées cartésiennes et on étudie le régime permanent.



a) Le champ de température vérifie $\dfrac{\text{d}^2T}{\text{d}x^2} = 0$. Exprimer $T(x)$.

b) Quelle(s) hypothèse(s) de l'énoncé assure(nt) que le flux thermique $\Phi(x) = \iint_S \overrightarrow{j_Q} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$ soit uniforme, c'est-à-dire ne dépendant pas de x ?

(a) barre homogène
(b) régime permanent
(c) parois latérales calorifugées

.....

c) En déduire le flux thermique $\Phi(x)$ traversant une section S de barre située à l'abscisse x.

(a) $\dfrac{\lambda S}{L}(T_1 - T_2)$
(b) $\dfrac{\lambda S}{L}(T_2 - T_1)$
(c) $\dfrac{\lambda L}{S}(T_1 - T_2)$
(d) $\dfrac{\lambda L}{S}(T_2 - T_1)$

.....

Entraînement 13.6 — Analogie thermique/électrique.

Une inhomogénéité spatiale de température $T_1 - T_2$ se traduit par un transport d'énergie caractérisé par le flux Φ. Ceci est analogue au transport de charges caractérisé par une intensité I causé par une inhomogénéité de potentiel électrique $V_1 - V_2$. Ainsi un conducteur électrique élémentaire de section S, de longueur ℓ et de conductivité électrique γ est caractérisé par une résistance $R = \dfrac{\ell}{\gamma S}$ permettant grâce à la loi d'Ohm $V_1 - V_2 = RI$ de déterminer I à partir de $V_1 - V_2$.

Le flux thermique Φ est proportionnel à $T_1 - T_2$ en régime permanent. En utilisant l'analogie électrique, on peut définir une « résistance thermique ».

a) La contrainte imposée au conducteur thermique $T_1 - T_2$ est l'analogue de celle imposée à un conducteur électrique :

(a) γ (b) $V_1 - V_2$ (c) I (d) R

.....

b) Quelle grandeur, dans la liste suivante, est l'analogue électrique du flux thermique Φ ?

(a) γ (b) $V_1 - V_2$ (c) I (d) R

.....

c) Pour caractériser le conducteur thermique, on introduit une « résistance thermique », analogue de :

(a) γ (b) $V_1 - V_2$ (c) I (d) R

.....

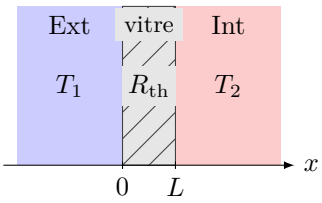
d) Quelle grandeur, dans la liste suivante, est l'analogue électrique de λ ?

(a) γ (b) $V_1 - V_2$ (c) I (d) R

.....

Entraînement 13.7 — Conducto-convectif en une dimension (I).

Soit une vitre (surface $S = 1\,\mathrm{m}^2$, épaisseur $L = 5\,\mathrm{mm}$) fabriquée en verre, de conductivité thermique $\lambda = 1\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{K}^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-1}$. Celle-ci sépare l'extérieur (à la température $T_1 = 9\,°\mathrm{C}$) de l'intérieur (à la température $T_2 = 19\,°\mathrm{C}$) d'une maison.



La situation est étudiée en régime permanent. La conduction thermique envisagée est telle que la résistance thermique de la vitre est $R_{\text{th,v}} = \dfrac{L}{\lambda S}$.

a) La résistance thermique de la vitre vaut :

(a) $5\times10^{-3}\,\mathrm{K}\cdot\mathrm{W}^{-1}$ (b) $5\times10^{-3}\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{K}^{-1}$ (c) $2\times10^{3}\,\mathrm{K}\cdot\mathrm{W}^{-1}$ (d) $2\times10^{3}\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{K}^{-1}$

On rappelle que le flux thermique est relié à l'inhomogénéité de température par la relation $\Delta T = R_{\text{th}}\Phi$.

b) Le flux thermique Φ à travers la vitre vaut :

(a) $5\times10^{-3}\,\mathrm{W}$ (b) $5\times10^{-2}\,\mathrm{W}$ (c) $2\times10^{3}\,\mathrm{W}$ (d) $2\times10^{2}\,\mathrm{W}$

c) En réalité la température n'est pas totalement uniforme dans l'air à proximité des surfaces de contact avec la vitre. Les transferts thermiques à l'interface avec les thermostats sont régis alors par la relation de Newton : $\Phi = h_1 S(T_1 - T(0))$ et $\Phi = h_2 S(T(L) - T_2)$, où h_1 et h_2 sont les coefficients de transfert conducto-convectifs dans les deux couches limites.

Les résistances thermiques $R_{\text{th},i}$ correspondantes sont de la forme :

(a) $R_{\text{th},i} = \dfrac{h_i}{S}$ (b) $R_{\text{th},i} = \dfrac{S}{h_i}$ (c) $R_{\text{th},i} = \dfrac{1}{h_i S}$ (d) $R_{\text{th},i} = h_i S$

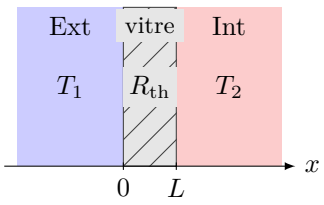
d) Les résistances $R_{\text{th,v}}$, $R_{\text{th},1}$ et $R_{\text{th},2}$ sont-elles en série ou en parallèle ? ....

e) Évaluer le flux thermique Φ' à travers la vitre en tenant compte des pertes conducto-convectives si $h_1 = h_2 = 5\times10^{2}\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{K}^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-2}$ .....

Entraînement 13.8 — Conducto-convectif en une dimension (II).

On considère une vitre de section S et de résistance thermique R_{th} séparant l'extérieur de température T_1 et l'intérieur d'une maison (température T_2).

Les échanges thermiques aux interfaces en $x = 0$ et $x = L$ sont régis par la relation de Newton. Avec une convection plus importante à l'extérieur due au vent, on peut considérer que $T(0) = T_1$.

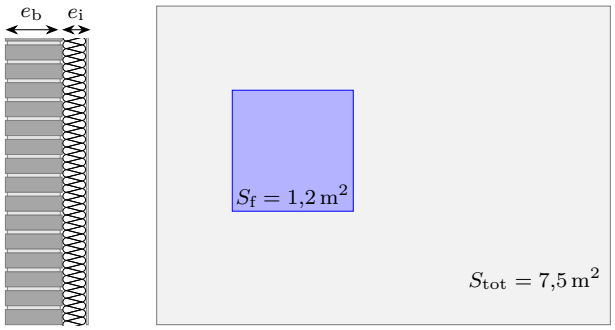


Les températures et le flux thermique vérifient alors le système :

$$\begin{cases} \phi = h_2 S(T(L) - T_2) \\ T_1 - T(L) = R_{\text{th}}\phi. \end{cases}$$

Quelle est l'expression de $T(L)$? .....

Entraînement 13.9 — Isolation thermique d'un mur.



Vue en coupe Vue de face

Un pan de mur de surface totale $S_{tot} = 7{,}5\,m^2$ est composé d'un mur de brique d'épaisseur $e_b = 20\,cm$, de conductivité thermique $\lambda_b = 0{,}70\,W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$, et d'un isolant en fibre de bois d'épaisseur $e_i = 12\,cm$, de conductivité thermique $\lambda_i = 0{,}036\,W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$.

Une fenêtre de surface $S_f = 1{,}2\,m^2$, de résistance thermique $R_f = 0{,}70\,K \cdot W^{-1}$, est percée dans le mur.

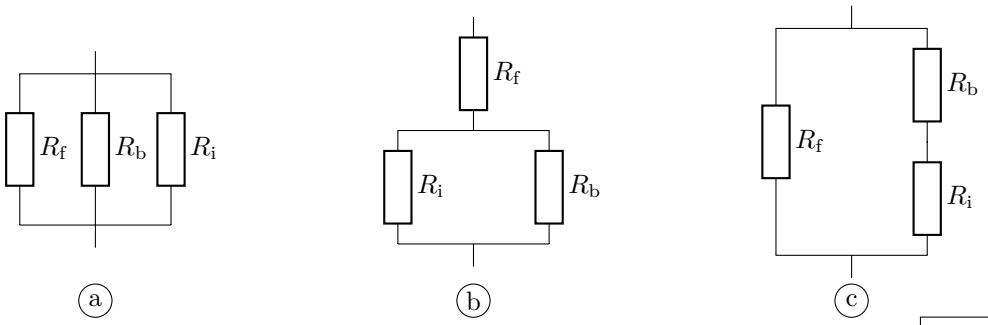
La température intérieure est $T_{int} = 20\,°C$, la température extérieure vaut $T_{ext} = 5\,°C$.

La résistance thermique d'une surface S plane d'épaisseur e est $R_{th,\,plan} = \dfrac{e}{\lambda S}$.

Quelle est la valeur de la résistance thermique :

a) R_b de la brique ? ..... b) R_i de l'isolant ? .....

c) Parmi les montages suivants, lequel correspond à la situation étudiée ?



.....

d) Quelle est la résistance thermique globale $R_{th,tot}$ du mur ? .....

e) En considérant que les échanges thermiques ne peuvent se faire qu'à travers cette paroi, quelle puissance thermique ϕ doit développer le système de chauffage pour maintenir cet écart de température ?

(a) 47,5 W (b) 475 W (c) 4,75 kW

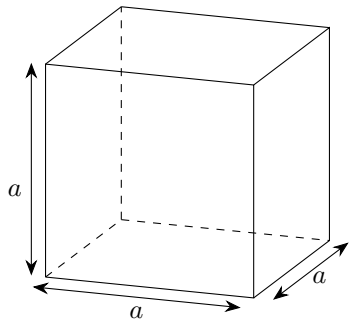
.....

Entraînement 13.10 — Igloo de survie.

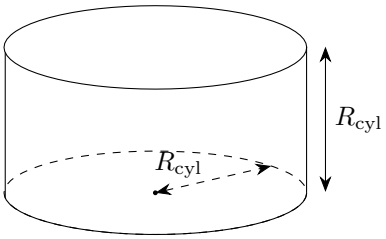
Un alpiniste, surpris par le mauvais temps, décide de construire un igloo de survie.

Le volume de son igloo doit valoir $1\,\mathrm{m}^3$; il le construit avec des blocs de neige d'épaisseur $e = 10\,\mathrm{cm}$ et de conductivité thermique $\lambda_{\text{neige}} = 0{,}2\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1}$.

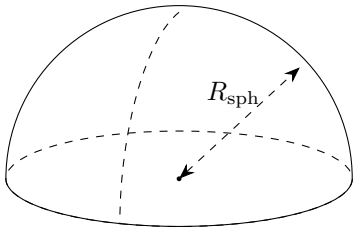
Il hésite entre trois formes d'igloo : un igloo cubique, un igloo cylindrique dont la hauteur est égale à son rayon et un igloo hémisphérique.



Igloo cubique



Igloo cylindrique



Igloo hémisphérique

Pour les calculs numériques, on prendra : $\dfrac{1}{\sqrt[3]{\pi}} \approx 0{,}7$ et $\sqrt[3]{\dfrac{3}{2\pi}} \approx 0{,}8$.

Pour que le volume intérieur des igloos soit de $1\,\mathrm{m}^3$,

a) quel doit être le rayon de l'igloo cylindrique ?

.....

b) quel doit être le rayon de l'igloo hémisphérique ?

.....

c) On souhaite déterminer la résistance thermique de chaque igloo. Associer à chaque igloo l'expression de sa résistance thermique.

$$I_{\text{(a)}} = \int_{0,7}^{0,8} \frac{\mathrm{d}r}{3\pi\lambda r^2} \qquad I_{\text{(b)}} = \int_{0,8}^{0,9} \frac{\mathrm{d}r}{2\pi\lambda r^2} \qquad I_{\text{(c)}} = \int_{1}^{1,1} \frac{\mathrm{d}r}{5\lambda r^2}$$

.....

d) Après avoir calculé chacune des intégrales précédentes, quel igloo présente une résistance thermique approximative de $\dfrac{1}{8{,}9}\mathrm{K}\cdot\mathrm{W}^{-1}$?

.....

e) L'alpiniste dégage une puissance thermique de $\phi = 100\,\mathrm{W}$.

En déduire la différence de température entre l'intérieur de l'igloo hémisphérique et l'extérieur en régime permanent.

.....

Entraînement 13.11 — Analogie électrique d'une habitation (I).

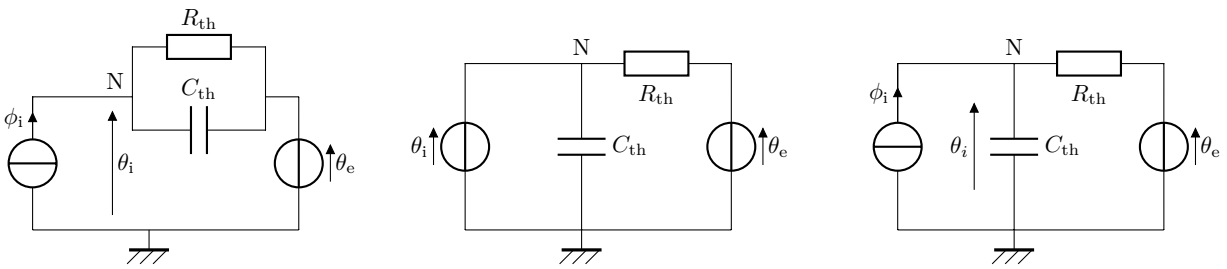
L'objectif de cet entraînement est d'approfondir l'analogie entre les phénomènes de conduction thermique et les phénomènes électriques en étudiant une habitation dans sa globalité.

On constate que :

- le flux thermique ϕ est l'analogue de l'intensité du courant électrique (flux de charge électrique) ;
- la température θ est l'équivalent du potentiel électrique ;
- un matériau ayant une capacité thermique C_{th} peut être modélisé par un condensateur électrique ;
- tout comme la résistance électrique traduit une relation de proportionnalité entre la différence de potentiel et le courant électrique, la résistance thermique traduit la relation de proportionnalité entre la différence de température et le flux thermique : $\Delta\theta = R_{\text{th}}\phi$.

Une habitation est isolée de l'extérieur où règne une température $\theta_{\text{e}}(t)$ par une enveloppe isolante de résistance thermique R_{th}. À l'intérieur de l'habitation, un système de chauffage apporte un flux thermique ϕ_{i} permettant d'atteindre une température intérieure $\theta_{\text{i}}(t)$. L'intérieur de la maison possède une capacité thermique C_{th}.

Parmi les circuits ci-dessous, lequel correspond à la situation étudiée ? .....



Circuit (a) Circuit (b) Circuit (c)

Entraînement 13.12 — Analogie électrique d'une habitation (II).

a) Établir l'équation différentielle sur θ_i dans le cas du circuit (c) de l'entraînement précédent.

.....

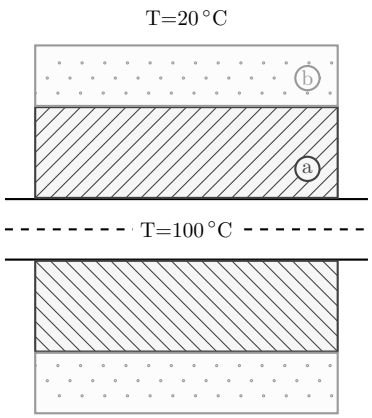
Du fait de l'alternance jour/nuit, la température extérieure θ_{e} peut s'écrire :

$$\theta_{\text{e}}(t) = \theta_{\text{e0}} + \theta_{\text{e1}}\cos(\omega t).$$

b) Quelle doit être l'expression du flux ϕ_{i} fourni par le système de chauffage pour maintenir une température intérieure constante égale à θ_{i0} ?

.....

Entraînement 13.13 — Une résistance thermique en géométrie cylindrique.



Vue en coupe

Un mince tuyau métallique d'une longueur L et de rayon 1 cm transporte de la vapeur à 100 °C. Celui-ci est couvert par deux couches d'isolants :

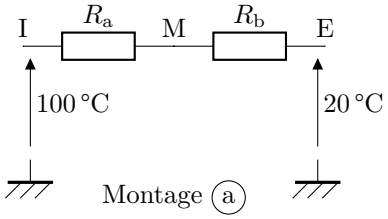
- une couche (a) intérieure d'une épaisseur de 4 cm et de conductivité thermique $0{,}1\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$,
- une couche (b) extérieure d'une épaisseur de 2 cm et de conductivité thermique $0{,}3\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$.

La température extérieure est de 20 °C.

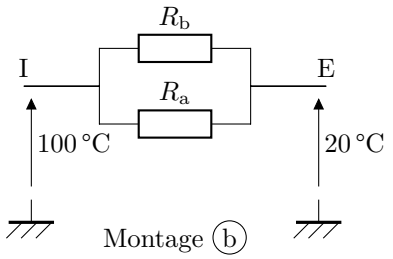
La résistance thermique dans le cas d'un flux radial est de la forme $R_{\text{th}} = \dfrac{1}{2\pi\lambda L}\ln(r_2/r_1)$.

a) Parmi les deux montages électriques ci-dessous, lequel correspond au système étudié ?

.....



Montage (a)



Montage (b)

b) Quelle est la température à l'interface entre les deux isolants ?

(a) 25,2 °C (b) 30,2 °C (c) 30,2 °C (d) 35,2 °C (e) 40,2 °C

On prendra $\dfrac{\ln(7)}{\ln(5)} \approx 1{,}21$ .....

Plus de diffusion thermique

Entraînement 13.14 — Choix d'un isolant.

La résistance thermique surfacique r d'un matériau traduit sa capacité à résister à un flux thermique. Elle dépend de l'épaisseur du matériau e et de sa conductivité thermique λ, selon la relation

$$r = e/\lambda.$$

Le déphasage thermique $\Delta\tau$ définit le temps que met un front de chaleur pour traverser une épaisseur donnée de matériau. Cette grandeur dépend de la masse volumique et de la capacité thermique massique du matériau, selon la relation

$$\Delta\tau = e\sqrt{\frac{\mu c}{2\omega\lambda}},$$

où ω est la pulsation excitatrice associée au front de chaleur.

La prise en compte du déphasage thermique est notamment utile pour le confort l'été, en décalant au cœur de la nuit plus fraîche l'arrivée de la chaleur reçue par les parois extérieures durant la journée. Dans le cas de l'alternance jour/nuit, on a $\omega = 7{,}3 \times 10^{-5}\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$.

La consommation totale d'énergie primaire non renouvelable, communément appelée *énergie grise*, permet de quantifier assez bien l'impact environnemental global d'un produit. L'énergie grise surfacique $\mathcal{E}_\mathrm{S}$ d'un isolant peut se calculer par la relation $\mathcal{E}_\mathrm{S} = \mu e \mathcal{E}$ où $\mathcal{E}$ est l'énergie grise massique.

Isolants	Conductivité thermique λ ($\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$)	Masse volumique μ ($\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$)	Capacité thermique c ($\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$)	Énergie grise massique $\mathcal{E}$ ($\mathrm{kWh \cdot kg^{-1}}$)
Fibre de bois	0,037	150	2 000	2
Bottes de paille	0,052	100	1 550	0,1
Laine minérale	0,030	30	900	8
Vermiculite	0,050	300	950	0,8
Polystyrène expansé	0,032	20	1 300	32
Polyuréthane	0,022	35	1 000	30

Un maître d'œuvre doit choisir un isolant pour fabriquer un mur avec comme contrainte d'avoir

$$r \geqslant 7{,}0\,\mathrm{m^2 \cdot K \cdot W^{-1}}$$

et un déphasage

$$\Delta\tau \geqslant 8\,\mathrm{h}.$$

Après avoir calculé l'épaisseur nécessaire pour vérifier la contrainte sur r et le déphasage correspondant, le maître d'œuvre choisira l'isolant ayant l'énergie grise surfacique la plus faible parmi ceux qui vérifient les contraintes ci-dessus.

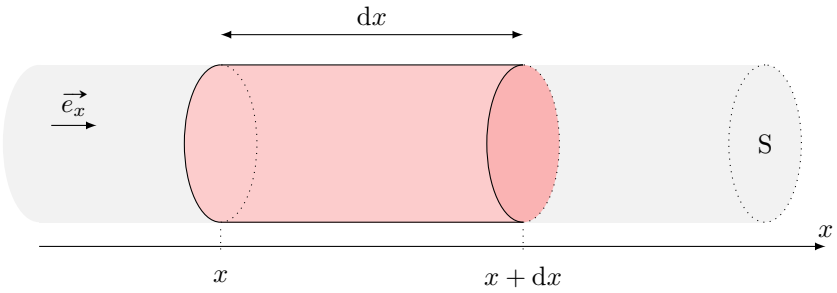
Quel isolant choisira-t-il ? .....

Entraînement 13.15 — En présence de source.

On se place dans le cas d'une diffusion unidimensionnelle telle que les isothermes sont des plans $x = \text{cste}$. On a alors :

$$\overrightarrow{j_Q} = -\lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} \overrightarrow{e_x}.$$

On étudie un élément de volume du conducteur thermique de section S, et compris entre x et $x + \mathrm{d}x$:



Le conducteur thermique est le siège d'une production algébrique volumique d'énergie de puissance p_{prod} (effet Joule, réaction chimique, etc.).

a) Donner l'expression de la variation d'énergie interne $\mathrm{d}U$ de la tranche $\mathrm{d}x$ du conducteur entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$.

.....

b) Exprimer le transfert thermique algébriquement reçu par la tranche dû aux transferts conductifs.

.....

c) Donner l'expression de l'énergie produite dans la tranche entre t et $t + \mathrm{d}t$.

.....

d) En déduire l'équation aux dérivées partielles vérifiée par T.

.....

Entraînement 13.16 — Transfert conducto-convectif latéral.

On se place dans le cas d'une diffusion unidimensionnelle telle que les isothermes sont des plans $x = \text{cste}$. On a alors $\overrightarrow{j_Q} = -\lambda \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} \overrightarrow{e_x}$. On étudie un élément de volume du conducteur thermique de section S, et compris entre x et $x + \mathrm{d}x$.

La paroi latérale du volume de section S est en contact avec un thermostat à la température T_{ext}. Le flux thermique surfacique au niveau de la surface latérale vérifie la loi de Newton, *i.e.* est proportionnel à $T(x,t) - T_{\text{ext}}$ (facteur de proportionnalité noté h). On note p le périmètre de la tranche de section S.

a) Donner l'expression de $\mathrm{d}U$ en fonction de la variation de température .....

b) Exprimer le transfert thermique algébriquement reçu par la tranche dû aux transferts conductifs.

.....

c) Quelle est l'expression de l'énergie algébriquement reçue au niveau de la paroi latérale dans la tranche entre t et $t + \mathrm{d}t$?

(a) $h(T(x,t) - T_{\text{ext}})p\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ (c) $-h(T(x,t) - T_{\text{ext}})p\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ (e) 0

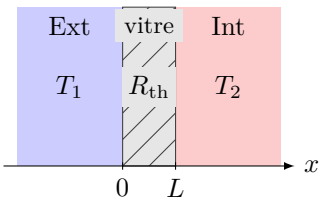
(b) $h(T(x,t) - T_{\text{ext}})S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ (d) $h(T(x,t) - T_{\text{ext}})S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ (f) $-h(T(x,t) - T_{\text{ext}})p$

.....

d) En déduire l'équation aux dérivées partielles vérifiée par T .....

Entraînement 13.17 — Conducto-convectif en une dimension (III).

On considère une vitre de section S et de résistance thermique R_{th} séparant l'extérieur de température T_1 et l'intérieur d'une maison (température T_2).

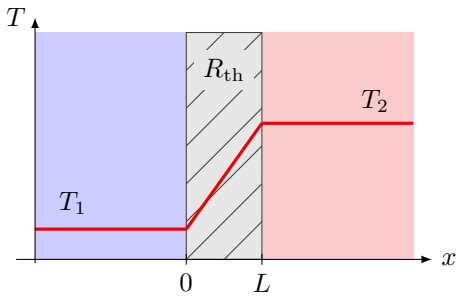


Les échanges thermiques aux interfaces en $x = 0$ et $x = L$ sont régis par la relation de Newton. Si l'on prend en compte les effets conducto-convectifs aux deux interfaces, on obtient le système :

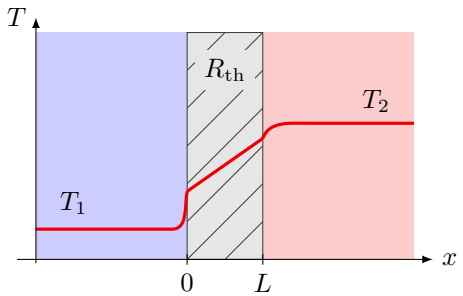
$$\begin{cases} \phi = h_1 S(T_1 - T(0)) \\ T(0) - T(L) = R_{\text{th}}\phi \\ \phi = h_2 S(T(L) - T_2). \end{cases}$$

a) Le profil de température est de la forme :

(a)



(b)



.....

Quelle est l'expression de :

b) $T(0)$? .....

c) $T(L)$? .....

Réponses mélangées

(c) $0{,}7\,\mathrm{m}$ $0{,}53\,\mathrm{K}\cdot\mathrm{W}^{-1}$ 2×10^{-3} (a) (b)

$\dfrac{1}{1+\dfrac{h_2}{h_1}+R_{\mathrm{th}}h_2S}T_1+\dfrac{\dfrac{h_2}{h_1}+R_{\mathrm{th}}h_2S}{1+\dfrac{h_2}{h_1}+R_{\mathrm{th}}h_2S}T_2$ $\mathrm{d}U=\mu c\dfrac{\partial T}{\partial t}S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ (a)

(a) $\dfrac{\mathrm{d}\theta_{\mathrm{i}}}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\theta_i}{R_{\mathrm{th}}C_{\mathrm{th}}}=\dfrac{1}{R_{\mathrm{th}}C_{\mathrm{th}}}(R_{\mathrm{th}}\phi_{\mathrm{i}}+\theta_{\mathrm{e}})$ (c) (b) et (c) 2

$\mu c\dfrac{\partial T}{\partial t}=\lambda\dfrac{\partial^2T}{\partial x^2}-h\dfrac{p}{S}(T(x,t)-T_{\mathrm{ext}})$ $1{,}1\times10^3\,\mathrm{W}$ (b) $0{,}8\,\mathrm{m}$

$\dfrac{R_{\mathrm{th}}h_1S+\dfrac{h_1}{h_2}}{1+\dfrac{h_1}{h_2}+R_{\mathrm{th}}h_1S}T_1+\dfrac{1}{1+\dfrac{h_1}{h_2}+R_{\mathrm{th}}h_1S}T_2$ (cub., (c)) (cyl., (a)) (sph., (b))

en série (a) $\mu c\dfrac{\partial T}{\partial t}=\lambda\dfrac{\partial^2T}{\partial x^2}+p_{\mathrm{prod}}$ (a) $\sqrt{2}$ (a) (c) (d)

(c) oui Sphérique $\dfrac{1}{R_{\mathrm{th}}}(\theta_{\mathrm{i}0}-\theta_{\mathrm{e}0}-\theta_{\mathrm{e}1}\cos(\omega t))$ (b) (b) (c)

$\mathrm{d}U=\mu c\dfrac{\partial T}{\partial t}S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ (b) (c) $p_{\mathrm{prod}}S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ (a) $\lambda\dfrac{\partial^2T}{\partial x^2}S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$

$\dfrac{T_1+R_{\mathrm{th}}h_2ST_2}{1+R_{\mathrm{th}}h_2S}$ (a) $-\dfrac{\partial j_Q}{\partial x}S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ $\mathrm{d}U=\mu c\dfrac{\partial T}{\partial t}S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ $\lambda\dfrac{\partial^2T}{\partial x^2}S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$

$T(x)=\dfrac{T_2-T_1}{L}x+T_1$ $4{,}5\times10^{-2}\,\mathrm{K}\cdot\mathrm{W}^{-1}$ (a) Les bottes de paille

4 $3{,}2\times10^{-1}\,\mathrm{K}\cdot\mathrm{W}^{-1}$ (c) (d) (c) $11\,^\circ\mathrm{C}$ $1/\sqrt{2}$ (a)

▶ Réponses et corrigés page 365

Transferts thermiques

Prérequis
Loi de Fourier : $\vec{\jmath}_{\text{th}} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}\, T$.

Vecteur densité de courant thermique

Entraînement 14.1 — Dans un calorimètre.

Un système S_1 est constitué d'un vase parfaitement calorifugé contenant initialement une masse m_1 d'eau à la température $T_1 = 20\,°\text{C}$. On y ajoute ensuite une masse m_2 d'eau à la température $T_2 = 80\,°\text{C}$ (système S_2). On attend que l'équilibre thermique soit réalisé.

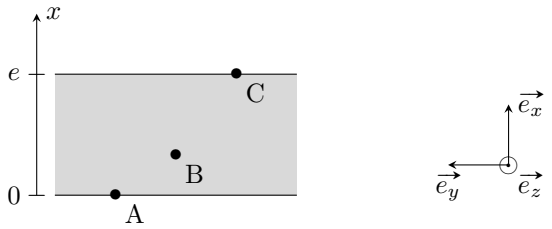
a) Quel est le signe du transfert thermique reçu par le système S_1 ? .....

b) Quel est le signe du transfert thermique reçu par le système S_2 ? .....

c) Quel est le signe du transfert thermique reçu par le système $S_1 \cup S_2$? .....

Entraînement 14.2 — Une dalle en béton.

On considère une dalle en béton d'épaisseur $e = 20\,\text{cm}$ et de conductivité thermique $\lambda = 1{,}2\,\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ séparant deux pièces d'une habitation.



La température de la face inférieure contenant A est $T_{\text{A}} = 8\,°\text{C}$ et celle de la face supérieure contenant C est $T_{\text{C}} = 18\,°\text{C}$. La température en un point $\text{M}(x, y, z)$ du béton ne dépend que de x en régime stationnaire.

Le vecteur densité de courant en M est $\vec{\jmath}_{\text{th}}(\text{M}) = -\lambda \dfrac{\text{d}T}{\text{d}x} \vec{e_x}$.

a) Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies ?

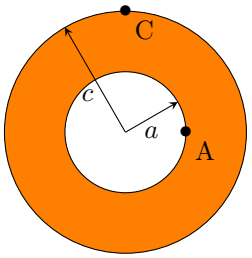
(a) $\vec{\jmath}_{\text{th}}(\text{A}) \cdot \vec{e_x} > 0$
(b) $\vec{\jmath}_{\text{th}}(\text{B}) \cdot \vec{e_x} < 0$
(c) $\vec{\jmath}_{\text{th}}(\text{C}) \cdot \vec{e_x} = 0$
(d) $\vec{\jmath}_{\text{th}}(\text{A}) \cdot \vec{e_y} > 0$
(e) $\vec{\jmath}_{\text{th}}(\text{B}) \cdot \vec{e_y} = 0$
(f) $\vec{\jmath}_{\text{th}}(\text{C}) \cdot \vec{e_y} < 0$

.....

b) Calculer $\|\vec{\jmath}_{\text{th}}(\text{B})\|$ .....

Entraînement 14.3 — Tuyau en cuivre.

On considère un tuyau cylindrique en cuivre d'axe (Oz) et de conductivité thermique $\lambda = 400\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$ séparant deux fluides de températures différentes.



En régime stationnaire, la température de la face interne contenant A est $T_\mathrm{A} = 20\,°\mathrm{C}$ et celle de la face externe contenant C est $T_\mathrm{C} = 10\,°\mathrm{C}$. Le profil de température est alors, en coordonnées cylindriques,

$$T(r) = T_\mathrm{A} + \frac{T_\mathrm{C} - T_\mathrm{A}}{\ln\left(\frac{c}{a}\right)} \ln\left(\frac{r}{a}\right).$$

Les distances à l'axe sont $a = 2$ cm et $c = 4$ cm.
Le vecteur densité de courant thermique en un point M est noté $\vec{\jmath}_\mathrm{th}(\mathrm{M})$.
On donne $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(r,\theta,z) = \dfrac{\partial f}{\partial r}\vec{e_r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e_\theta} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\vec{e_z}$ en coordonnées cylindriques.

a) La direction de $\vec{\jmath}_\mathrm{th}(\mathrm{A})$ est :

(a) $\vec{e_z}$ (b) $\vec{e_r}$ (c) $\vec{e_\theta}$

.....

b) La direction de $\vec{\jmath}_\mathrm{th}(\mathrm{C})$ est :

(a) $\vec{e_z}$ (b) $\vec{e_r}$ (c) $\vec{e_\theta}$

.....

c) Donner le sens de $\vec{\jmath}_\mathrm{th}(\mathrm{A})$.

.....

d) Donner le sens de $\vec{\jmath}_\mathrm{th}(\mathrm{C})$.

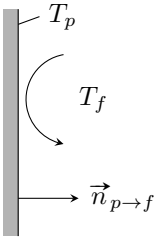
.....

e) Calculer $\|\vec{\jmath}_\mathrm{th}(\mathrm{A})\|$ .....

f) Calculer $\|\vec{\jmath}_\mathrm{th}(\mathrm{C})\|$ .....

Transferts thermiques conducto-convectifs

On considère une paroi solide fixe de température T_p en contact avec un fluide en mouvement de température différente T_f.



Les transferts thermiques de la paroi vers le fluide peuvent être modélisés par la loi de Newton donnant le vecteur densité de courant thermique conducto-convectif :

$$\vec{\jmath}_\mathrm{cc} = h(T_p - T_f)\vec{n}_{p\to f},$$

où h est nommé coefficient de transfert conducto-convectif.

La puissance transférée par la paroi Σ au fluide est $P_{p\to f} = \displaystyle\iint_\Sigma \vec{\jmath}_\mathrm{cc} \cdot \mathrm{d}S\,\vec{n}_{p\to f}$.

On rappelle que la résistance thermique R_th est le rapport entre la différence de température $T_1 - T_2$ entre deux isothermes et la puissance thermique $P_{1\to 2}$ transférée. Elle vérifie :

$$R_\mathrm{th} = \frac{T_1 - T_2}{P_{1\to 2}}.$$

Entraînement 14.4 — Unité ?

En quelle unité s'exprime h ? .....

Entraînement 14.5 — Puissance échangée par conducto-convection.

a) La résistance thermique conducto-convective associée à une interface de surface S est :

(a) hS
(b) $\dfrac{1}{hS}$
(c) $\sqrt{hS}$
(d) $\sqrt{\dfrac{1}{hS}}$

.....

b) Un toit plat d'immeuble a une surface de $50\,\mathrm{m}^2$. La température de l'air extérieur est de $25\,°\mathrm{C}$ et le coefficient de transfert conducto-convectif est $h = 20$ USI.

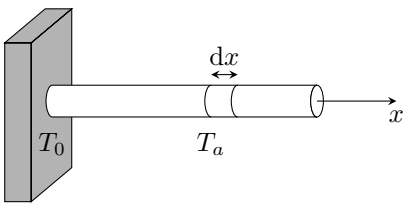
La puissance cédée par conducto-convection par le toit à l'air extérieur vaut $40\,\mathrm{kW}$.

Calculer la température de la face du toit en contact avec l'air extérieur.

.....

Entraînement 14.6 — Ailette de refroidissement.

Une tige conductrice cylindrique de rayon a, de section $S = \pi a^2$, de longueur $L \gg a$, de conductivité thermique λ, est en contact en $x = 0$ avec un corps solide de température T_0 stationnaire. Cette tige est en contact avec l'air de température T_a stationnaire.



a) L'élément de volume $S\,\mathrm{d}x$ de la tige situé entre x et $x + \mathrm{d}x$ reçoit une puissance de la part de l'air égale à :

(a) $h(T_a - T(x))S$
(b) $h(T(x) - T_a)S$
(c) $h(T_a - T(x))2\pi a\,\mathrm{d}x$
(d) $h(T(x) - T_a)2\pi a\,\mathrm{d}x$

.....

b) En posant $b = \sqrt{\dfrac{\lambda a}{2h}}$, on montre que $T(x) = T_a + (T_0 - T_a)\mathrm{e}^{-x/b}$.

Exprimer la puissance thermique P_0 reçue par la tige en $x = 0^+$ en fonction de λ, a, b, T_0 et T_a.

.....

Rayonnement thermique

Un corps noir de température T émet un rayonnement de puissance surfacique φ donnée par la loi de Stefan $\varphi = \sigma T^4$, où $\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}\,\mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}}$ est la constante de Stefan.

Entraînement 14.7 — Le Soleil rayonne.

On utilisera la loi de Stefan donnée en haut de la page.

Le Soleil, de rayon $R_\odot = 696 \times 10^3\,\mathrm{km}$, rayonne comme un corps noir de température $T_S = 5\,772\,\mathrm{K}$.

a) Calculer la puissance surfacique $\varphi_\odot$ à la surface du Soleil .....

b) Calculer la puissance $P_\odot$ émise par le Soleil .....

c) La puissance radiative traversant une sphère de centre S (centre du Soleil) et de rayon $r > R_\odot$ ne dépendant pas de r, la puissance surfacique radiative $\varphi(r)$ est :

(a) $\varphi_\odot$ (b) $\varphi_\odot \dfrac{R_\odot}{r}$ (c) $\varphi_\odot \left(\dfrac{R_\odot}{r}\right)^2$ (d) $\varphi_\odot \left(\dfrac{r}{R_\odot}\right)^2$

.....

d) La distance Soleil-Terre est $D_{\mathrm{ST}} = 150 \times 10^6\,\mathrm{km}$. La puissance surfacique du rayonnement solaire reçu par la Terre est (en $\mathrm{W \cdot m^{-2}}$) :

(a) $1{,}4 \times 10^1$ (b) $1{,}4 \times 10^2$ (c) $1{,}4 \times 10^3$ (d) $1{,}4 \times 10^4$

.....

Entraînement 14.8 — Radiateur convecto-radiatif.

On utilisera la loi de Stefan donnée en haut de la page.

On étudie un radiateur de chauffage central, dont la température de surface est $T_s = 60\,^\circ\mathrm{C}$, en contact avec l'air ambiant de température $T_a = 20\,^\circ\mathrm{C}$. On note S l'aire de l'interface radiateur-air.

Le radiateur et l'air rayonnent comme des corps noirs de températures respectives T_s et T_a. Seuls les échanges thermiques entre le radiateur et l'air sont pris en compte.

a) La puissance cédée par le radiateur à l'air par rayonnement est :

(a) $\sigma\left(T_a^4 - T_s^4\right)S$ (c) $\sigma\left(T_a^4 + T_s^4\right)S$

(b) $\sigma\left(T_s^4 - T_a^4\right)S$ (d) nulle

.....

b) En notant $h = 10\,\mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}$ le coefficient de transfert conducto-convectif entre le radiateur et l'air, la puissance cédée par le radiateur à l'air par conducto-convection est :

(a) $h(T_a - T_s)S$ (c) $h(T_a + T_s)S$

(b) $h(T_s - T_a)S$ (d) nulle

.....

c) Calculer la surface S d'un radiateur fournissant une puissance totale de 1,0 kW à l'air.

.....

Équation de la diffusion thermique

Entraînement 14.9 — Dimension du coefficient de diffusivité thermique.

Dans un matériau solide de diffusivité D, le champ de température $T(\mathrm{M},t)$ en un point M à un instant t vérifie l'équation de la diffusion thermique $\dfrac{\partial T}{\partial t} = D\,\Delta T$.

Quelle est la dimension physique de D ? .....

Entraînement 14.10 — Échelles de longueur et de temps associées.

a) Les variations du champ de température $T(\mathrm{M},t)$ au sein d'un matériau homogène de diffusivité D sont caractérisées par une longueur caractéristique L et une durée caractéristique τ.

Quelle proposition est correcte ?

(a) $\tau = \dfrac{L}{D}$ (b) $\tau = \dfrac{L}{D^2}$ (c) $\tau = \dfrac{L^2}{D}$ (d) $\tau = \dfrac{D}{L^2}$

.....

b) Un œuf de poule a une longueur comprise entre 5 et 6 cm et une masse entre 60 et 70 g alors qu'un œuf d'autruche a une longueur entre 15 et 20 cm et pèse environ 1,6 kg.

Sachant que la cuisson à la coque d'un œuf de poule dure 4 minutes, cuire un œuf d'autruche à la coque nécessite environ :

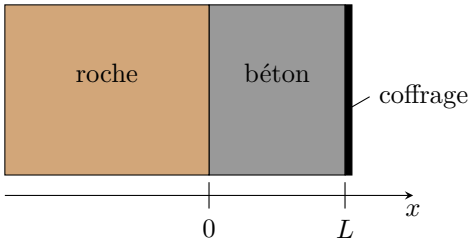
(a) 12 min (b) 36 min (c) 72 min (d) 400 min

.....

Entraînement 14.11 — Prise en masse d'un mur de béton.

Un mur de béton est coulé entre une paroi rocheuse de température stationnaire $T_0 = 20\,^\circ\mathrm{C}$ et un coffrage métallique maintenu à la température $T_1 = 10\,^\circ\mathrm{C}$.

Le mur de béton est d'épaisseur $L = 1{,}0\,\mathrm{m}$ et de conductivité thermique $\lambda = 1{,}2\,\mathrm{W\cdot K^{-1}\cdot m^{-1}}$. La prise en masse du béton est le siège d'une réaction chimique exothermique dégageant une puissance volumique p_v.



En régime stationnaire, la température $T(x)$ à l'abscisse x vérifie l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} = -\dfrac{p_v}{\lambda}$.

a) Exprimer le profil de température $T(x)$ dans le béton .....

b) La température est maximale à l'abscisse $x_1 = 3L/10$. L'expression de p_v est :

(a) $3\lambda L(T_0 - T_1)$ (c) $5\lambda L(T_0 - T_1)$

(b) $\dfrac{3\lambda}{L^2}(T_0 - T_1)$ (d) $\dfrac{5\lambda}{L^2}(T_0 - T_1)$

.....

c) Calculer p_v .....

Entraînement 14.12 — Fusible en régime stationnaire.

Un câble métallique cylindrique d'axe (Ox), de rayon a, de section $S = \pi a^2$, de longueur L, de conductivité thermique λ et de conductivité électrique γ, est parcouru par un courant électrique d'intensité I stationnaire. Les deux extrémités en $x = \pm\dfrac{L}{2}$ sont maintenues à la même température T_0.

Lorsque ce câble est latéralement calorifugé, la température $T(x)$ à l'abscisse x vérifie, en régime stationnaire, l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{I^2}{\lambda\gamma S^2}.$$

a) Exprimer le profil de température $T(x)$ dans le câble.

.....

b) Quelle est l'abscisse du lieu où la température est extrémale ?

.....

c) Donner l'expression de cette température extrémale.

.....

On note $\vec{\jmath}_{\text{th}}(x)$ le vecteur densité de courant thermique de conduction à l'abscisse x.

d) Quelles propositions sont vraies ?

(a) $\vec{\jmath}_{\text{th}}\left(-\dfrac{L}{2}\right)\cdot\vec{e_x} > 0$ (c) $\vec{\jmath}_{\text{th}}\left(\dfrac{L}{2}\right)\cdot\vec{e_x} > 0$

(b) $\vec{\jmath}_{\text{th}}\left(-\dfrac{L}{2}\right)\cdot\vec{e_x} < 0$ (d) $\vec{\jmath}_{\text{th}}\left(\dfrac{L}{2}\right)\cdot\vec{e_x} < 0$

.....

Associations de résistances thermiques

Deux conducteurs thermiques (1) et (2) sont en *association série* lorsque la puissance thermique traverse le conducteur (1) puis le conducteur (2) avec une surface de jonction isotherme. La résistance thermique équivalente R_{th} est alors la somme des résistances thermiques de chaque conducteur. On a

$$R_{\text{th}} = R_{\text{th},1} + R_{\text{th},2}.$$

Deux conducteurs thermiques (1) et (2) en *association parallèle* ont des faces communes à la même température : ils sont donc soumis à la même différence de température. La conductance thermique G_{th} équivalente est alors la somme des conductances thermiques de chaque conducteur. On a

$$G_{\text{th}} = \frac{1}{R_{\text{th}}} = G_{\text{th},1} + G_{\text{th},2}.$$

Entraînement 14.13 — Mur de béton.

On considère un mur en béton d'épaisseur $e = 30$ cm, de hauteur $h = 2{,}5\,\text{m}$ et de longueur $L = 10$ m.

Les deux faces verticales isothermes de ce mur sont en contact avec l'air et sont à des températures différentes T_1 et T_2.

Lorsque $|T_1 - T_2| = 10$ K, la puissance thermique traversant le béton est $P = 1{,}0\,\text{kW}$.

On rappelle que la résistance thermique d'un matériau de même géométrie que ce mur est

$$R_{\text{th}} = \frac{e}{\lambda S},$$

où e est l'épaisseur, S l'aire des sections isothermes et λ la conductivité thermique du matériau.

La résistance thermique R_{th} est le rapport entre la différence de température $T_1 - T_2$ entre deux isothermes et la puissance thermique $P_{1\to2}$ transférée : on a

$$R_{\text{th}} = \frac{T_1 - T_2}{P_{1\to2}}.$$

a) Calculer la résistance thermique de conduction du mur .....

b) Calculer la conductivité thermique λ_1 du béton .....

On isole ce mur avec une plaque de polystyrène de conductivité $\lambda_2 = 4{,}0 \times 10^{-2}\,\text{W}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$ afin que la puissance thermique traversant le mur isolé soit divisée par 5 pour le même écart de température $|T_1 - T_2|$.

c) Calculer l'épaisseur d'isolant nécessaire .....

Entraînement 14.14 — Ouverture dans un mur.

On considère un mur de surface S_m et de conductance thermique G_m. On souhaite percer ce mur afin d'installer une fenêtre de surface S_f et de conductance thermique G_f. On rappelle que la conductance thermique est l'inverse de la résistance thermique : $G = \lambda S/e$ pour un matériau de conductivité thermique λ, d'épaisseur e et de section S.

a) La conductance thermique G'_m du mur percé (mur seul après installation de la fenêtre) est :

(a) $\dfrac{S_m - S_f}{S_m} G_m$ (b) $\dfrac{S_f}{S_m} G_m$ (c) $G_m - G_f$ (d) G_m

.....

b) La conductance thermique G du dispositif (mur et fenêtre) après installation de la fenêtre est :

(a) $G_m + G_f$

(b) $\dfrac{G_m G_f}{G_m + G_f}$

(c) $G_m\left(1 - \dfrac{S_f}{S_m}\right) + G_f$

(d) $\dfrac{G_m S_m + G_f S_f}{S_m + S_f}$

.....

Réponses mélangées

$\frac{p_v}{2\lambda}x(L-x)+(T_1-T_0)\frac{x}{L}+T_0$ négatif (b) et (c) nul positif

$2{,}9\times10^{5}\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$ $60\,\mathrm{W\cdot m^{-3}}$ (a) (b) $1{,}5\,\mathrm{m^2}$ (c) $60\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$

(b) $3{,}8\times10^{26}\,\mathrm{W}$ $\mathrm{W\cdot K^{-1}\cdot m^{-2}}$ (d) (b) $\lambda\frac{\pi a^2}{b}(T_0-T_a)$

$T_0+\frac{I^2}{2\gamma\lambda S^2}\left(\left(\frac{L}{2}\right)^2-x^2\right)$ $1{,}0\times10^{-2}\,\mathrm{K\cdot W^{-1}}$ (c) (b) et (e) 65 °C 0

(c) (b) 4,0 cm (c) Même sens que $\vec{e_r}$ $T_0+\frac{I^2}{\lambda\gamma S^2}\frac{L^2}{8}$ Même sens que $\vec{e_r}$

(b) $\mathrm{L^2\cdot T^{-1}}$ (b) (c) $1{,}2\,\mathrm{W\cdot K^{-1}\cdot m^{-1}}$ $1{,}4\times10^{5}\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$ $62{,}9\,\mathrm{MW\cdot m^{-2}}$

▶ Réponses et corrigés page 371

Tables et diagrammes thermodynamiques

Prérequis
Notions d'additivité et d'extensivité de fonctions d'état. Transition de phase.

Tables thermodynamiques

Entraînement 15.1 — Table de vapeur sèche (à double entrée).

La table ci-dessous liste les propriétés de la vapeur d'eau sèche.

Le volume massique v est exprimé en $\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{kg}^{-1}$, l'enthalpie massique h en $\mathrm{kJ} \cdot \mathrm{kg}^{-1}$ et l'entropie massique s en $\mathrm{kJ} \cdot \mathrm{K}^{-1} \cdot \mathrm{kg}^{-1}$.

p **en kPa** (T_{sat} en °C)		T en °C				
		100	150	200	250	300
100 (99,606)	v	1,696 0	1,936 7	2,172 5	2,406 2	2,638 9
	h	2 675,77	2 776,59	2 875,48	2 974,54	3 074,54
	s	7,361 0	7,614 7	7,835 6	8,034 6	8,217 1
200 (120,21)	v		0,969 89	1,080 5	1,198 9	1,316 2
	h		2 769,09	2 870,78	2 971,26	3 072,08
	s		7,280 9	7,508 1	7,710 0	7,894 0
500 (151,84)	v			0,425 03	0,474 43	0,522 60
	h			2 855,90	2 961,13	3 064,60
	s			7,061 1	7,272 6	7,461 4

a) En arrondissant le volume massique v à deux chiffres significatifs, calculer la masse volumique ρ en $\mathrm{g} \cdot \mathrm{mL}^{-1}$ de la vapeur d'eau soumise à une pression de 200 kPa et à une température de 200 °C.

.....

b) Que vaut la température de saturation T_{sat} pour une pression de 200 kPa ?

(a) 200 °C
(b) 120,21 °C
(c) 99,606 °C
(d) 151,84 °C

.....

c) Quel est l'état d'équilibre du système à une température de 100 °C et soumis à une pression de 200 kPa ?

(a) état liquide
(b) état vapeur
(c) état diphasé

.....

Entraînement 15.2 — Table de vapeur saturante (à entrée unique).

Les propriétés de l'eau sous forme diphasée sont données dans la table de vapeur saturante ci-dessous :

T (°C)	p_{sat} (MPa)	Liquide saturant ①	②	③	Vapeur saturante ①	②	③
20	0,002 339	83,9	0,296 5	0,001 002	2 537,4	8,666 0	57,757
40	0,007 385	167,5	0,572 4	0,001 008	2 573,5	8,255 5	19,515
60	0,019 946	251,2	0,831 3	0,001 017	2 608,8	7,908 1	7,667 2
80	0,047 414	335,0	1,075 6	0,001 029	2 643,0	7,611 1	3,405 2
100	0,101 420	419,2	1,307 2	0,001 043	2 675,6	7,354 1	1,671 8

Les colonnes ①, ②, ③ sont respectivement exprimées en $\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$, $\mathrm{kJ \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$ et $\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1}}$.

À l'aide d'une analyse des unités, attribuer chaque colonne à une de ces trois grandeurs : volume massique v, enthalpie massique h et entropie massique s.

a) h ..... b) v ..... c) s .....

d) Exprimer la valeur de la pression de saturation p_{sat} à 100 °C en millimètres de mercure (mmHg) en sachant que 1 mmHg = 133,3 Pa .....

e) Le volume massique de l'eau contenue dans un ballon d'eau chaude à 60 °C est de $v = 1{,}03\,\mathrm{cm^3 \cdot g^{-1}}$. Quel est l'état du système : liquide, diphasé ou vapeur ? .....

Déterminer, par une lecture de la table à 60 °C, la valeur du volume massique de liquide saturant v_l et celle du volume massique de vapeur saturante v_g.

f) v_l ..... g) v_g .....

h) Le théorème des moments donne la fraction massique de vapeur d'un mélange diphasé : $x_g = \dfrac{v - v_l}{v_g - v_l}$.

En raisonnant en termes d'ordres de grandeur, laquelle des propositions ci-dessous correspond à une approximation raisonnable de l'expression de x_g si $v = 1\,030\,\mathrm{cm^3 \cdot g^{-1}}$ à 60 °C ?

(a) v/v_l (b) v_l/v_g (c) v/v_g

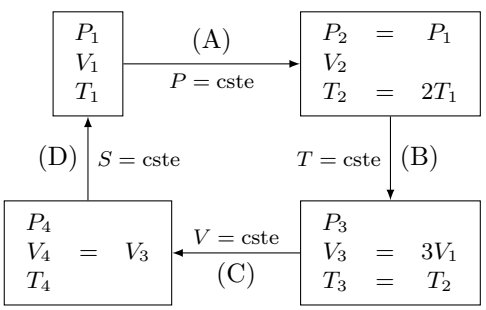
.....

Diagramme de Clapeyron (P, v) et diagramme de Watt (P, V)

Entraînement 15.3 — Schéma synoptique d'un cycle thermodynamique.

Soit n moles de gaz parfait qui décrivent le cycle ci-contre.

Attribuer aux transformations trois des quatre adjectifs suivants : isobare, adiabatique, isochore, isotherme.



a) Transformation (A) .....

b) Transformation (B) .....

c) Transformation (C) .....

d) À l'aide de la relation $PV = nRT$, exprimer V_2 en fonction de V_1 .....

Entraînement 15.4 — Un cycle dans le diagramme (P, V).

Les données nécessaires aux questions suivantes sont disponibles dans l'entraînement **15.3**.

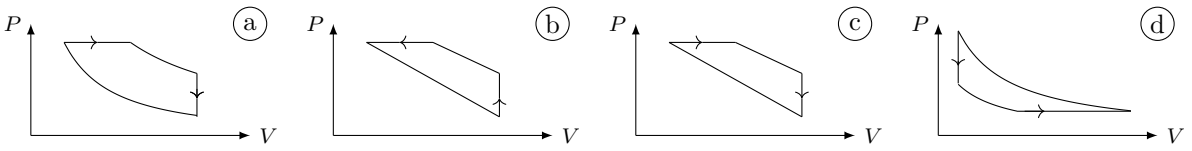
Pour rappel, un gaz parfait subissant une transformation isentropique vérifie la loi de Laplace : $PV^\gamma = \text{cste}$.

a) Laquelle de ces relations est valable pour la transformation (B) ?

(a) $\dfrac{P}{V} = \text{cste}$ (b) $PV = \text{cste}$ (c) $P^\gamma V^\gamma = \text{cste}$ (d) $T^{1-\gamma}V^\gamma = \text{cste}$

.....

b) Les échelles étant linéaires, déterminer lequel de ces tracés représente le cycle.



.....

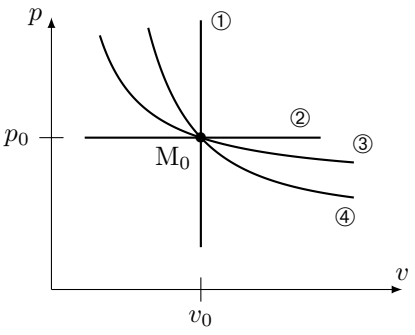
c) Sachant que le travail des actions de pression reçu au cours du cycle est $W = \oint_{\text{cycle}} -P\,\mathrm{d}V$, déterminer laquelle de ces affirmations est correcte.

(a) $W > 0$ donc le cycle est récepteur.
(b) $W < 0$ donc le cycle est récepteur.
(c) $W = 0$ car la transformation est un cycle.
(d) $W < 0$ donc le cycle est moteur.

.....

Entraînement 15.5 — Courbes iso d'un GP dans le diagramme (p, v).

Une courbe isochore, une courbe isotherme, une courbe adiabatique réversible (donc isentrope) et une courbe isobare ont été représentées ci-contre dans le diagramme (p, v) d'un gaz parfait.



Toutes ces courbes passent par le même état décrit par le point M_0 ayant pour coordonnées la pression p_0 et le volume massique v_0.

Pour un gaz parfait :

- l'équation d'état massique est $pv = rT$, avec $r = R/M$ la constante massique des gaz parfaits ;
- la loi de Laplace dans le cas d'une transformation adiabatique réversible peut s'écrire $pv^\gamma = \text{cste}$, avec $\gamma > 1$ le coefficient adiabatique.

Exprimer la pente $\dfrac{\partial p}{\partial v}$ au point M_0 pour chaque courbe iso en fonction de p_0, v_0 et γ :

a) iso-p ..... c) iso-v .....

b) iso-T ..... d) iso-s .....

À l'aide d'une comparaison des pentes des courbes au point M_0, déterminer l'adjectif adapté à chaque courbe parmi la liste suivante : isobare, isotherme, isochore, isentrope.

e) ① ..... g) ③ .....

f) ② ..... h) ④ .....

Diagramme entropique (T, s)

Entraînement 15.6 — Courbes isobares d'un diagramme (T, s).

La 2e identité thermodynamique est : $\mathrm{d}h = T\,\mathrm{d}s + v\,\mathrm{d}p$. La seconde loi de Joule énonce que $\mathrm{d}h = c_P\,\mathrm{d}T$.

a) Établir l'équation différentielle vérifiée par $T(s)$ le long d'une courbe isobare.

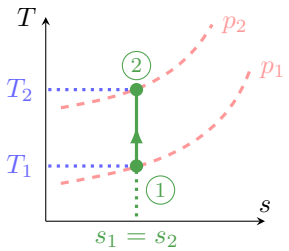
.....

b) En déduire l'expression de $T(s)$ vérifiée le long d'une courbe isobare parmi les relations suivantes :

(a) $T_0 \cos(\omega s + \varphi)$ (b) $T_0 \exp\left(\dfrac{s - s_0}{c_p}\right)$ (c) $T_0 \exp\left(\dfrac{s_0 - s}{c_p}\right)$ (d) $T_0 \cos(s/c_p)$

.....

La suite vise à déterminer la position relative de deux courbes isobares. Pour cela, la compression isentropique d'un gaz parfait, passant d'un état (1) à un état (2), est représentée par un trait plein dans le diagramme (T, s) ci-contre. Les courbes en tirets représentent deux courbes isobares p_1 et p_2.



c) La transformation vérifie une des lois de Laplace : $p^{1-\gamma}T^{\gamma} = \text{cste}$. En déduire laquelle des relations suivantes est une expression de p_2 valide.

(a) $p_1^{1-\gamma}\left(\dfrac{T_1}{T_2}\right)^{\gamma}$ (b) $p_1\left(\dfrac{T_1}{T_2}\right)^{\gamma/(1-\gamma)}$ (c) $p_1\left(\dfrac{T_1}{T_2}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}$

.....

d) Sachant que $\gamma > 1$, que dire de la position relative d'une courbe isobare haute pression (HP) relativement à une courbe isobare basse pression (BP) ?

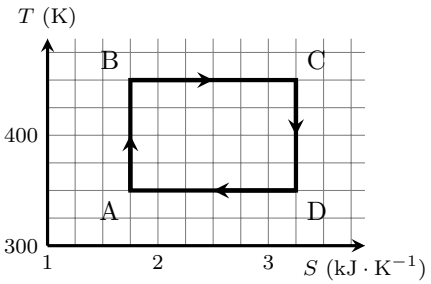
(a) Les HP sont au-dessus des BP. (b) Les HP sont en dessous des BP.

.....

Entraînement 15.7 — Estimation d'un transfert thermique.

Les transformations étudiées ici sont réversibles si bien qu'un transfert thermique reçu entre un état I et un état F est $Q_{\mathrm{IF}} = \displaystyle\int_{\mathrm{I}}^{\mathrm{F}} T\,\mathrm{d}S$.

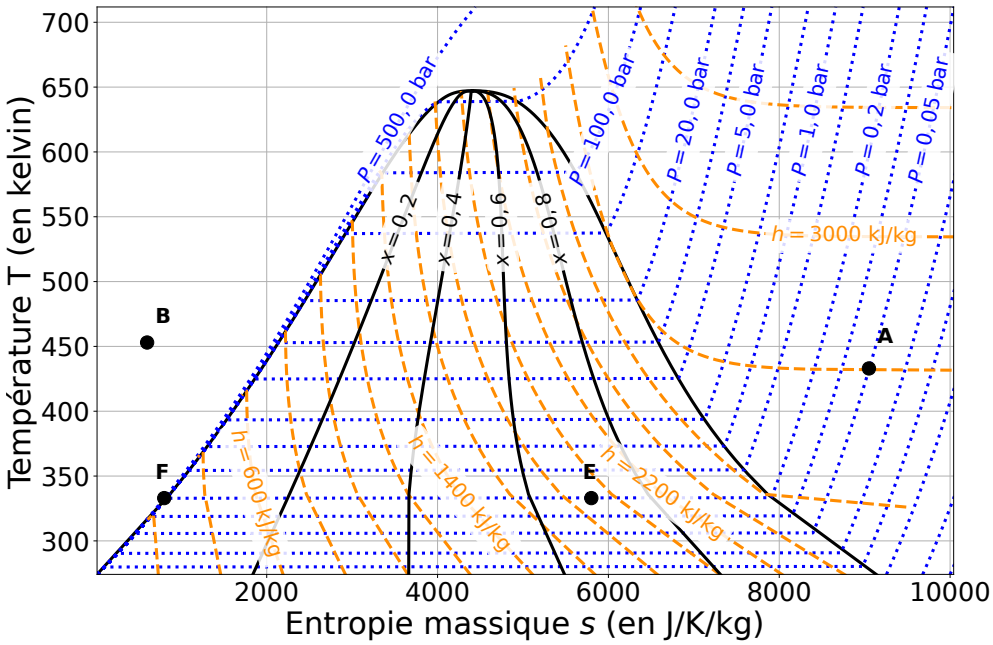
Estimer le transfert thermique reçu lors du cycle donné ci-contre.



(a) $Q_{\mathrm{ABCDA}} = 1{,}5 \times 10^5$ J
(b) $Q_{\mathrm{ABCDA}} = -1{,}5 \times 10^5$ J
(c) $Q_{\mathrm{ABCDA}} = -1{,}5 \times 10^2$ J
(d) $Q_{\mathrm{ABCDA}} = 2{,}25 \times 10^2$ J
(e) $Q_{\mathrm{ABCDA}} = 2{,}25 \times 10^5$ J
(f) $Q_{\mathrm{ABCDA}} = -2{,}25 \times 10^2$ J

.....

Entraînement 15.8 — Diagramme entropique de l'eau.



Pour rappel, un gaz parfait vérifie la seconde loi de Joule : $\mathrm{d}h = c_p\,\mathrm{d}T$. Pour un liquide, cette loi s'écrit sous la forme $\mathrm{d}h = c\,\mathrm{d}T$.

a) Quelles sont les propositions vraies au point A ?

(a) La pression est de 0,05 bar.
(b) L'enthalpie massique est de 2 800 J.
(c) Le corps pur est sous forme gazeuse et le modèle du gaz parfait est valable.
(d) Le corps pur est sous forme liquide.

.....

b) Quelles sont les propositions vraies au point B ?

(a) Le corps pur est sous forme liquide.
(b) Le corps pur est un mélange de liquide et de vapeur.
(c) La température est de 450 °C.
(d) L'entropie massique vaut $600\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$.

.....

c) Quelles sont les propositions vraies au point E ?

(a) Le titre massique en liquide est de 0,7.
(b) Le titre massique en vapeur est de 0,7.
(c) Le titre massique en liquide est de 0,3.
(d) L'enthalpie massique est de $1{,}9\times10^{3}\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}}$.

.....

d) Quels termes est-il possible d'associer à la transformation d'un système passant de l'état E à l'état F ?

(a) vaporisation (b) fusion (c) liquéfaction (d) isobare

.....

e) Quelle est la valeur de l'entropie massique au point F ? .....

f) Déterminer, à l'aide d'une lecture graphique, la valeur de la variation d'entropie massique d'un système passant de l'état E à l'état F.

.....

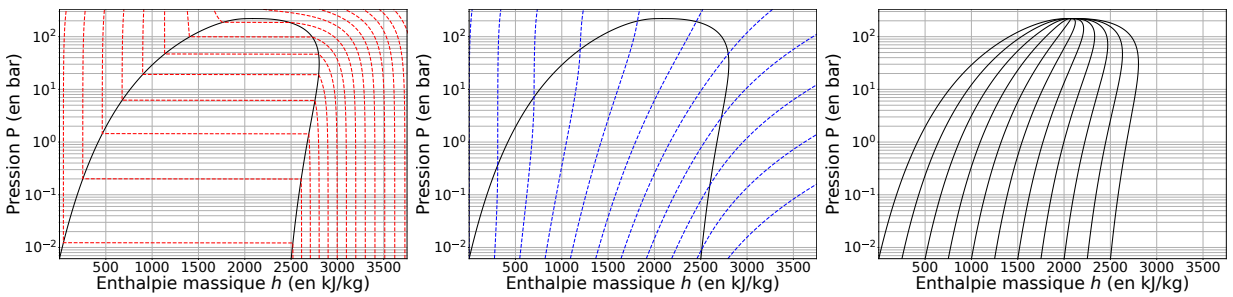
g) Déterminer, à l'aide d'une lecture graphique, la valeur de la variation d'enthalpie massique d'un système passant de l'état E à l'état F ?

.....

Diagramme des frigoristes (P, h)

Entraînement 15.9 — Réseaux de courbes.

Différents réseaux de courbes sont tracés dans les diagrammes (P, h) ci-dessous.



La 1re et la 2e identités thermodynamiques sont respectivement $\mathrm{d}u = T\,\mathrm{d}s - p\,\mathrm{d}v$ et $\mathrm{d}h = T\,\mathrm{d}s + v\,\mathrm{d}p$. Les phases condensées incompressibles et indilatables, dont l'équation d'état est $v = \text{cste}$, et les gaz parfaits vérifient les lois de Joule qui, écrites en relations différentielles, donnent $\mathrm{d}u = c_V\,\mathrm{d}T$ et $\mathrm{d}h = c_p\,\mathrm{d}T$.

Pour chacun des trois diagrammes, choisir quel adjectif parmi la liste suivante correspond au réseau de courbes tracé :

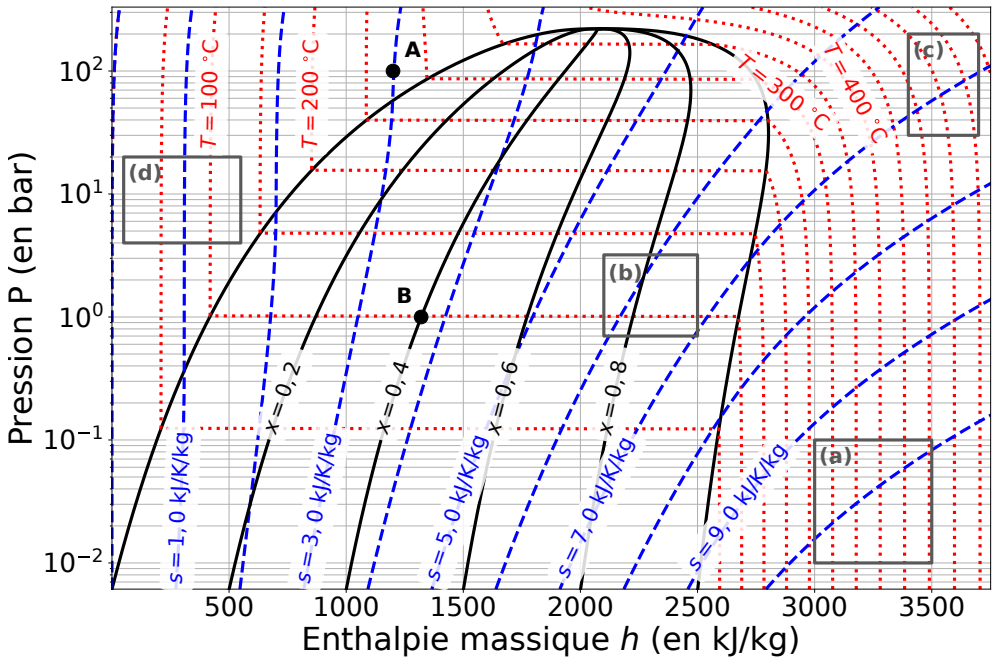
(a) isobare (b) isotherme (c) isotitre (d) isentrope (e) isenthalpe

a) Diagramme ① .....

b) Diagramme ② .....

c) Diagramme ③ .....

Entraînement 15.10 — Diagramme des frigoristes de l'eau.



a) Au point A, quelles sont les propositions vraies ?

(a) La pression est de $1{,}00 \times 10^7$ Pa.
(b) La température est de 275 K.
(c) Le corps pur est sous forme gazeuse.
(d) Le corps pur est sous forme liquide.

.....

b) Au point B, quelles sont les propositions vraies ?

(a) La pression est de 1 Pa.
(b) La température est de 100 °C.
(c) Le corps pur est sous forme de mélange diphasé contenant du liquide et de la vapeur.
(d) Le titre massique en liquide est de 0,6.

.....

c) Pour rappel, un gaz parfait vérifie la seconde loi de Joule : $\mathrm{d}h = c_p\,\mathrm{d}T$. En déduire quelles sont les propositions valides en phase vapeur si le fluide est assimilé à un gaz parfait :

(a) Les courbes isothermes sont des segments horizontaux.
(b) Les courbes isothermes sont des demi-droites verticales.
(c) Les courbes isothermes sont confondues avec les courbes isenthalpes.
(d) Les courbes isothermes sont confondues avec les courbes isobares.

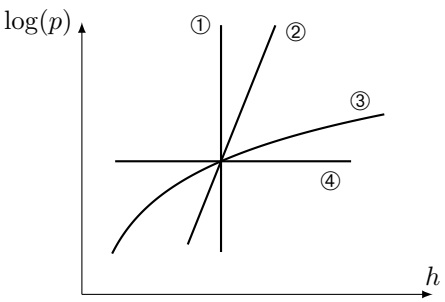
.....

d) En déduire dans quelle(s) zone(s) (a), (b), (c) ou (d) représentée(s) sur l'abaque le gaz peut être considéré comme un gaz parfait.

.....

Entraînement 15.11 — Courbes iso d'un GP dans le diagramme $(\log(p), h)$.

Quatre courbes iso ont été tracées dans le diagramme $(\log(p), h)$ ci-contre. Le fluide étudié est assimilé à un gaz parfait qui vérifie l'équation d'état $pvM = RT$ et la 2nde loi de Joule $\mathrm{d}h = c_p\,\mathrm{d}T$.



a) Le long d'une courbe isochore, la pente est $\dfrac{\mathrm{d}\log(p)}{\mathrm{d}h} = \dfrac{A}{p}$ avec A une constante. Exprimer A en fonction de R, M, c_p et v.

.....

Par une étude qualitative des pentes des courbes, déterminer l'adjectif adapté à chaque courbe parmi la liste suivante : isobare, isotherme, isochore, isentrope.

b) ① ..... c) ② ..... d) ③ ..... e) ④ .....

Entraînement 15.12 — Vaporisation de l'eau.

Le diagramme des frigoristes de l'eau est donné ci-dessus, dans l'entraînement **15.10**.

a) À l'aide d'une analyse visuelle, c'est-à-dire sans lecture de valeurs ni calculs, utiliser la position du point B sous la courbe de saturation pour déterminer laquelle de ces propositions est valide.

On rappelle que l'échelle des abscisses est linéaire.

(a) Il y a davantage de liquide que de vapeur.
(b) Il y a davantage de vapeur que de liquide.
(c) Il y a autant de vapeur que de liquide.
(d) Il n'y a que du liquide.

.....

À l'aide de lectures graphiques, attribuer, parmi les valeurs de 2 650, 1 320, 420 et $1\,000\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$ celles correspondant aux enthalpies massiques caractérisant l'état du fluide au point B.

b) Enthalpie massique (moyenne) h_B du fluide diphasé : .....

c) Enthalpie massique $h_{\mathrm{v,B}}$ de la vapeur saturante : .....

d) Enthalpie massique $h_{\mathrm{l,B}}$ du liquide saturant : .....

e) Quelle est l'écriture correcte du théorème des moments donnant x_B, le titre en vapeur au point B ?

(a) $x_\mathrm{B} = \dfrac{h_{\mathrm{v,B}} - h_\mathrm{B}}{h_{\mathrm{v,B}} - h_{\mathrm{l,B}}}$ (b) $x_\mathrm{B} = \dfrac{h_\mathrm{B} - h_{\mathrm{l,B}}}{h_{\mathrm{v,B}} - h_{\mathrm{l,B}}}$ (c) $x_\mathrm{B} = \dfrac{h_{\mathrm{v,B}} - h_\mathrm{B}}{h_{\mathrm{l,B}} - h_{\mathrm{v,B}}}$ (d) $x_\mathrm{B} = \dfrac{h_{\mathrm{l,B}} - h_\mathrm{B}}{h_\mathrm{B} - h_{\mathrm{v,B}}}$

.....

f) En déduire la valeur du titre vapeur au point B en prenant $2230 \approx 2250$ .....

g) Par analyse de la forme de la courbe de saturation, comment évolue l'enthalpie de vaporisation $\Delta_{\mathrm{vap}}h = h_\mathrm{v} - h_\mathrm{l}$ lorsque la pression augmente ?

(a) elle reste constante (b) elle diminue (c) elle augmente

.....

Encore plus de tables thermodynamiques

Entraînement 15.13 — Volume massique d'une vapeur sèche.

Les données nécessaires aux questions suivantes sont disponibles dans la table de vapeur sèche de l'entraînement **15.1**.

a) Si R est la constante des gaz parfaits exprimée en $\mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$ et M la masse molaire, quelle est l'unité usuelle de $r = R/M$?

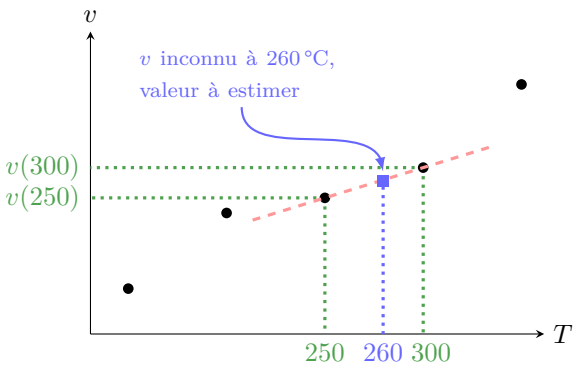
(a) $\mathrm{J/mol \cdot g^{-1}}$ (b) $\mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$ (c) $\mathrm{kg \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$

b) Laquelle des expressions suivantes est l'équation d'état massique des gaz parfaits, si v est le volume massique, p la pression, T la température et r la constante massique des gaz parfaits ?

(a) $pvr = T$ (b) $pv = T/r$ (c) $pv = r/T$ (d) $pv = rT$

c) À l'aide de l'équation d'état massique des gaz parfaits où $r = R/M = 0{,}46\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$ pour l'eau, estimer la valeur du volume massique de la vapeur sèche à 260 °C sous 100 kPa.

L'objectif de ce qui suit est d'évaluer le volume massique d'une vapeur sèche à 260 °C à partir des valeurs connues du volume massique à 250 °C et 300 °C. Pour cela, il est supposé que la représentation graphique du volume massique en fonction de la température est une droite passant par les points 250 °C et 300 °C.



d) Quelle expression permet d'estimer la valeur du volume massique de la vapeur sèche à 260 °C sous 100 kPa ?

(a) $v(260) = v(250) + \dfrac{v(300) - v(250)}{300 - 250} \times (300 - 250)$

(b) $v(260) = \dfrac{v(300) - v(260)}{300 - 250} \times (260 - 250)$

(c) $v(260) = v(250) + \dfrac{v(300) - v(260)}{300 - 260} \times (250 - 260)$

(d) $v(260) = v(250) + \dfrac{v(300) - v(250)}{300 - 250} \times (260 - 250)$

e) En déduire une estimation numérique de la valeur de $v(T = 260\,°\mathrm{C}, p = 100\,\mathrm{kPa})$.

Entraînement 15.14 — Transfert thermique avec changement d'état.

Les données nécessaires aux questions suivantes sont disponibles dans la table de vapeur saturante de l'entraînement **15.2**.

a) Quelle est l'enthalpie h_g de la vapeur saturante soumise à une pression de 1,0142 bar ?

.....

b) Quelle est l'enthalpie h_ℓ du liquide saturant à une température de 100 °C ? .....

De l'eau, contenant initialement 90 % de vapeur, subit une liquéfaction totale sous une pression de 1,0142 bar au sein d'un condenseur sans parties mobiles.

c) Quelle relation permet de calculer l'enthalpie initiale h_i du mélange diphasé ?

(a) $h_i = 10\,h_\ell + 90\,h_g$ (c) $h_i = 0{,}10\,h_\ell + 0{,}90\,h_g$

(b) $h_i = 0{,}10\,h_\ell - 0{,}90\,h_g$ (d) $h_i = 0{,}90\,h_\ell + 0{,}10\,h_g$

.....

d) Calculer le transfert thermique massique q reçu par le fluide en utilisant le 1er principe industriel, qui établit que $q = h_f - h_i$ avec h_f l'enthalpie massique du fluide après liquéfaction totale.

.....

Et encore plus de diagrammes thermodynamiques

Entraînement 15.15 — Un cycle dans le diagramme (V, T).

Les données nécessaires aux questions suivantes sont disponibles dans l'entraînement **15.3**.

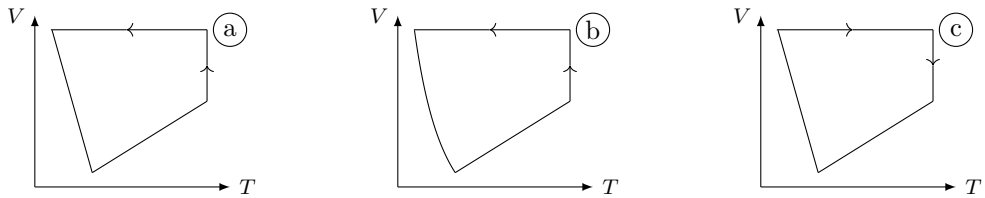
Pour rappel, un gaz parfait subissant une transformation isentropique vérifie la loi de Laplace : $PV^\gamma = \text{cste}$.

a) Laquelle des relations suivantes est valable pour la transformation (D) ?

(a) $\dfrac{T}{V} = \text{cste}$ (b) $TV = \text{cste}$ (c) $TV^{\gamma-1} = \text{cste}$ (d) $T^{1-\gamma}V^\gamma = \text{cste}$

.....

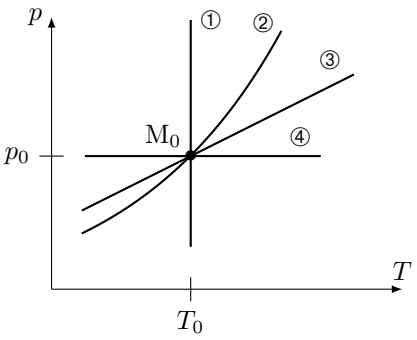
b) Les échelles étant linéaires, déterminer lequel de ces tracés représente le cycle.



.....

Entraînement 15.16 — Courbes iso d'un GP dans le diagramme (p, T).

Une courbe isochore, une courbe isotherme, une courbe adiabatique réversible (donc isentrope) et une courbe isobare ont été représentées ci-contre dans le diagramme (p, T) d'un gaz parfait.



Toutes ces courbes passent par le même état décrit par le point M_0.

Pour un gaz parfait :

- l'équation d'état est $pv = rT$;
- la loi de Laplace dans le cas d'une transformation isentropique peut s'écrire $T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{cste}$, avec $\gamma > 1$ le coefficient adiabatique.

a) Que dire de la pente $\dfrac{\partial p}{\partial T}$ de la courbe isochore $v = v_0$ passant par le point M_0 ?

(a) Elle décroît avec T. (b) Elle est constante avec T. (c) Elle croît avec T.

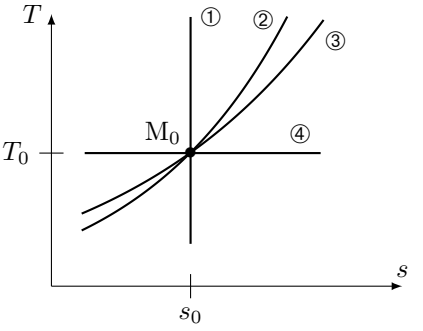
.....

À l'aide d'une comparaison des pentes des courbes, déterminer l'adjectif adapté à chaque courbe parmi la liste suivante : isobare, isotherme, isochore, isentrope.

b) ① c) ② d) ③ e) ④

Entraînement 15.17 — Courbes iso d'un GP dans le diagramme (T, s).

Une courbe isochore, une courbe isotherme, une courbe adiabatique réversible (donc isentrope) et une courbe isobare ont été représentées ci-dessous dans le diagramme (T, s) d'un gaz parfait.



Toutes ces courbes passent par le même état décrit par le point M_0 ayant pour coordonnées la température T_0 et l'entropie massique s_0.

Pour rappel, le coefficient adiabatique est défini comme le quotient de la capacité thermique (massique) par la capacité thermique à volume constant : $\gamma = \dfrac{c_p}{c_v}$ avec $\gamma > 1$.

De plus, pour un gaz parfait, les points de la courbe isobare vérifient la relation $T(s) = T_\text{a} \text{e}^{s/c_p}$ quand ceux de la courbe isochore vérifient la relation $T(s) = T_\text{b} \text{e}^{s/c_v}$ avec T_a et T_b des constantes.

Exprimer la pente $\dfrac{\partial T}{\partial s}$ au point M_0 pour chaque courbe iso en fonction de T_0, c_v et c_p :

a) iso-p ..... c) iso-v .....

b) iso-T ..... d) iso-s .....

À l'aide d'une comparaison des pentes des courbes au point M_0, déterminer l'adjectif adapté à chaque courbe parmi la liste suivante : isobare, isotherme, isochore, isentrope.

e) ① f) ② g) ③ h) ④

Entraînement 15.18 — Un cycle dans le diagramme (P,T).

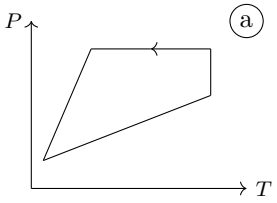
Les données nécessaires aux questions suivantes sont disponibles dans l'entraînement **15.3**.

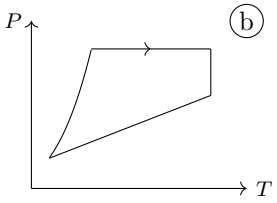
Pour rappel, un gaz parfait subissant une transformation isentropique vérifie la loi de Laplace : $PV^\gamma = \text{cste}$.

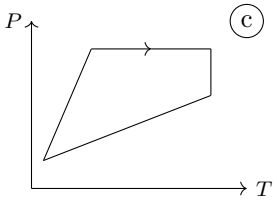
a) Laquelle des relations suivantes est valable pour la transformation (D) ?

(a) $PT = \text{cste}$ (b) $P^\gamma T^{\gamma-1} = \text{cste}$ (c) $P^{1-\gamma}T^\gamma = \text{cste}$ (d) $\dfrac{P}{T} = \text{cste}$

b) Les échelles étant linéaires, déterminer lequel de ces tracés représente le cycle.

(a)


(b)


(c)


Entraînement 15.19 — Compression : irréversibilités et élévation de température.

Du fluide R718 se trouve à l'entrée d'un compresseur sous une pression de 250 mbar à 100 °C (état I).

a) En plaçant le point I dans le diagramme des frigoristes de l'entraînement **15.10**, déterminer la valeur de l'enthalpie massique initiale h_I .....

b) Dans quel état se trouve le fluide à l'état I ?

(a) liquide saturant (b) vapeur saturante (c) vapeur sèche (d) mélange diphasé

c) Quelle est la valeur de l'entropie s_I du fluide à l'état I ? .....

d) Le fluide est comprimé de manière adiabatique et réversible ($s_\text{I} = s_\text{F}$) jusqu'à la pression $p_\text{F} = 1\,\text{bar}$ par le compresseur, qui fournit le travail $w = h_\text{F} - h_\text{I}$. Calculer w en $\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ .....

e) Quelle est la température finale T_F du fluide après compression réversible ? .....

f) Le fluide est désormais comprimé à $p_\text{F} = 1\,\text{bar}$ de manière irréversible si bien que son entropie a augmenté de 6 %. En plaçant le point F′ entre deux courbes isentropes, déterminer la valeur de la température finale $T_{\text{F}'}$ .....

g) L'augmentation de la température du fluide est due à sa compression, mais aussi aux irréversibilités qui ont lieu lors de celle-ci. Laquelle de ces relations permet d'évaluer la proportion de l'élévation de température strictement due aux irréversibilités par rapport à l'élévation totale de température $T_{\text{F}'} - T_\text{I}$?

On rappelle que, pour une quantité $X_{tot} = X_1 + X_2$, la proportion ***relative*** *de X_1 au sein de X_{tot} s'exprime comme X_1/X_{tot}.*

(a) $\dfrac{T_{\text{F}'} - T_\text{F}}{T_{\text{F}'} - T_\text{I}}$ (b) $\dfrac{T_{\text{F}'} - T_\text{F}}{T_\text{I}}$ (c) $\dfrac{T_{\text{F}'} - T_\text{I}}{T_{\text{F}'}}$ (d) $\dfrac{T_{\text{F}'} - T_\text{I}}{T_\text{F} - T_\text{I}}$

Réponses mélangées

$300\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$ isotherme $2{,}45\,\mathrm{m^3\cdot kg^{-1}}$ ∞ (b) et (c) $x_\mathrm{B} = 40\,\%$

isochore isobare $1{,}017\times10^{-3}\,\mathrm{m^3\cdot kg^{-1}}$ isentrope $760{,}8\,\mathrm{mmHg}$ isentrope

(b) (b) ① (b) (c) (c) $400\,^\circ\mathrm{C}$ (b) $2\,675{,}6\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$ 0

$\dfrac{T_0}{c_v}$ ③ ② isochore (c) $1\,320\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$ (c) et (d) (d) ∞

(a) $9{,}1\times10^{-4}\,\mathrm{g\cdot mL^{-1}}$ $800\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$ (b) (a) $\dfrac{T_0}{c_p}$ isochore

$-1\,650\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$ $250\,^\circ\mathrm{C}$ (b) $\dfrac{R}{\ln(10)Mvc_p}$ isotherme (a) et (d) diphasé

$-2\,031\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$ isochore (d) (c) isobare (c) (b) (a) isotherme

isobare (b) $-\dfrac{p_0}{v_0}$ $2\,650\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$ (b) (a) (c) $8\,\mathrm{kJ\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$

(a) et (d) $420\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$ isobare (d) (a) et (c) isochore (b), (c) et (d)

$7{,}6672\,\mathrm{m^3\cdot kg^{-1}}$ (a) isotherme (b) $2\,680\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$ (a) (b), (c) et (d)

isentrope $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} - \dfrac{T}{c_p} = 0$ $419{,}2\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$ $-5\,000\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$ $-\gamma\dfrac{p_0}{v_0}$ (d)

$2{,}45\,\mathrm{m^3\cdot kg^{-1}}$ isobare isentrope isotherme 0 (b) $2V_1$ (a)

▶ Réponses et corrigés page 375

Thermodynamique industrielle

Fiche du « Cahier d'entraînement 1re année » pour se préparer
⟶ *Thermodynamique*

Prérequis
Lois de Laplace. Principes sous forme industrielle. Diagramme (P, h).

Dans l'ensemble de la fiche, on se place en régime permanent.

Principes industriels

Entraînement 16.1 — Composants des machines thermiques.

En négligeant les variations d'énergie mécanique, les premier et second principes industriels par unité de masse s'écrivent :

$$\Delta h = q + w_\mathrm{i} \qquad \text{et} \qquad \Delta s = s_\mathrm{e} + s_\mathrm{c}\,, \tag{1}$$

où q est le transfert thermique massique, w_i est le travail indiqué massique, s_e est l'entropie massique échangée et s_c est l'entropie massique créée. Rappelons que l'entropie massique échangée avec un thermostat de température T_0 constante est égale à $s_\mathrm{e} = q/T_0$.

Pour chacun des composants suivants, on souhaite savoir comment ces deux principes se réécrivent.

Choisissez la bonne réponse à chaque fois.

a) Un compresseur fonctionnant de manière adiabatique réversible avec des pièces mobiles.

(a) $\Delta h = w_\mathrm{i}$; $\Delta s = 0$
(b) $\Delta h = w_\mathrm{i}$; $\Delta s = s_\mathrm{e}$
(c) $\Delta h = 0$; $\Delta s = s_\mathrm{c}$
(d) $\Delta h = q$; $\Delta s = s_\mathrm{e} + s_\mathrm{c}$

b) Un échangeur thermique dans lequel le fluide se liquéfie (condenseur).

(a) $\Delta h = w_\mathrm{i}$; $\Delta s = 0$
(b) $\Delta h = w_\mathrm{i}$; $\Delta s = s_\mathrm{e}$
(c) $\Delta h = 0$; $\Delta s = s_\mathrm{c}$
(d) $\Delta h = q$; $\Delta s = s_\mathrm{e} + s_\mathrm{c}$

c) Un détendeur idéal calorifugé et sans pièce mobile.

(a) $\Delta h = w_\mathrm{i}$; $\Delta s = 0$
(b) $\Delta h = w_\mathrm{i}$; $\Delta s = s_\mathrm{e}$
(c) $\Delta h = 0$; $\Delta s = s_\mathrm{c}$
(d) $\Delta h = q$; $\Delta s = s_\mathrm{e} + s_\mathrm{c}$

d) Une turbine idéale réalisant une détente adiabatique réversible au travers de parties mobiles.

(a) $\Delta h = w_\mathrm{i}$; $\Delta s = 0$
(b) $\Delta h = w_\mathrm{i}$; $\Delta s = s_\mathrm{e}$
(c) $\Delta h = 0$; $\Delta s = s_\mathrm{c}$
(d) $\Delta h = q$; $\Delta s = s_\mathrm{e} + s_\mathrm{c}$

Entraînement 16.2 — Comparaison des différentes formes d'énergie d'un système.

Un gaz de capacité thermique massique à pression constante $c_p = 1\,\text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$, allant à la vitesse $v = 10\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, traverse une turbine. La température du gaz diminue de 10 °C entre l'entrée et la sortie, où la différence d'altitude est de l'ordre du mètre. Toutes les énergies considérées sont massiques, c'est-à-dire exprimées par kg d'air.

a) Estimer la variation d'enthalpie du système constitué des gaz à l'intérieur de la turbine.

(a) $10\,\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}$ (b) $50\,\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}$ (c) $10\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ (d) $50\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$

.....

b) Même question pour son énergie cinétique dans le cas extrême où la vitesse de sortie est nulle.

(a) $10\,\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}$ (b) $10\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ (c) $50\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ (d) $50\,\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}$

.....

c) Même question pour son énergie potentielle en prenant le champ de pesanteur terrestre $g = 10\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

(a) $10\,\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}$ (b) $50\,\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}$ (c) $10\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ (d) $50\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$

.....

d) Comparer les termes et indiquer celui qui prédomine.

(a) la variation d'enthalpie Δh
(b) la variation d'énergie cinétique Δe_c
(c) la variation d'énergie potentielle Δe_p
(d) les trois sont comparables

.....

Entraînement 16.3 — Étude d'une tuyère.

L'air d'un réservoir $\mathcal{R}$ se détend dans une tuyère horizontale, isolée thermiquement du milieu extérieur, et ne contenant aucune pièce mobile. L'air est assimilable à un gaz parfait de masse molaire $M = 29\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$, d'indice adiabatique $\gamma = 1{,}4$ et de capacité thermique massique $c_p = \dfrac{1}{M}\dfrac{\gamma R}{\gamma - 1}$.

L'air entre dans la tuyère avec une vitesse c_1 supposée négligeable, sous la pression p_1 à la température $T_1 = 273\,\text{K}$. Il en sort animé d'une vitesse c_2 sous la pression p_2 à la température $T_2 = 200\,\text{K}$.

a) Quelle est la forme du premier principe par unité de masse pour le système étudié ?

(a) $\Delta h + \Delta e_c = w_i$ (c) $\Delta h + \Delta e_c = 0$ (e) $\Delta h = q$
(b) $\Delta h + \Delta e_c = q$ (d) $\Delta h = w_i$ (f) $\Delta h = w_i + q$

.....

b) En utilisant la seconde loi de Joule, déterminer l'expression de la variation d'enthalpie massique Δh de l'air à la sortie de la tuyère en fonction des températures T_1, T_2, de la masse molaire M de l'air, de γ et de la constante R des gaz parfaits.

.....

c) En déduire l'expression de la vitesse c_2 d'éjection de l'air à la sortie de la tuyère en fonction des températures T_1, T_2, de la masse molaire M de l'air, de γ et de la constante R des gaz parfaits.

.....

d) Calculer numériquement la vitesse c_2 d'éjection de l'air à la sortie de la tuyère en utilisant les données.

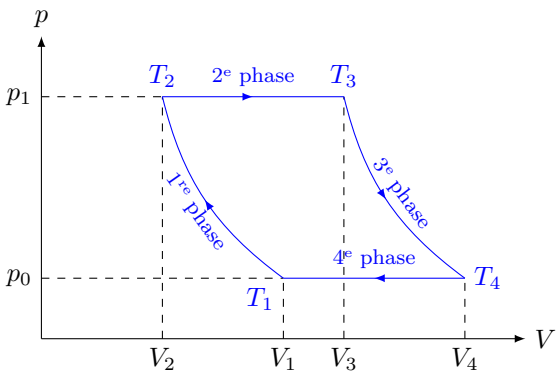
.....

Modèle du gaz parfait : exemple d'un turbopropulseur

On considère un gaz parfait décrivant le cycle de Joule ci-dessous dans lequel la première et la troisième phases sont isentropiques.

La deuxième phase (combustion) et la quatrième phase (refroidissement) se font sans travail indiqué.

On néglige les variations d'énergies cinétique Δe_c et potentielle Δe_p.



Entraînement 16.4 — **Températures.**

a) En utilisant la loi de Laplace sous la forme $T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{cste}$, exprimer le température T_2.

(a) $T_2 = T_1 \left(\dfrac{p_1}{p_2}\right)^{1-2\gamma}$

(b) $T_2 = T_1 \left(\dfrac{p_1}{p_2}\right)^{(1-\gamma)/\gamma}$

(c) $T_2 = T_1^\gamma \left(\dfrac{p_1}{p_2}\right)^{(1-\gamma)\gamma}$

(d) $T_2 = \left(\dfrac{T_1 p_1}{p_2}\right)^{(1-\gamma)/\gamma}$

.....

b) En utilisant maintenant la forme $TV^{\gamma-1} = \text{cste}$, exprimer T_4.

(a) $T_4 = T_3 \left(\dfrac{V_3}{V_4}\right)^{\gamma-1}$

(b) $T_4 = T_3^{1-\gamma} \dfrac{V_3}{V_4}$

(c) $T_4 = T_3 \left(\dfrac{V_3}{V_4}\right)^{1-\gamma}$

(d) $T_4 = T_3 \left(\dfrac{V_3}{V_4}\right)^{1/(\gamma-1)}$

.....

Entraînement 16.5 — Rendement.

Le cycle précédent est utilisé dans une machine, fonctionnant sans travail indiqué pendant la deuxième et la quatrième phase. La première phase est une compression, la troisième phase une détente. On les suppose isentropiques, donc adiabatiques réversibles. Les travaux sont algébriques, de signe positif lorsqu'ils sont réellement reçus par le fluide.

a) Indiquer si le cycle est moteur ou récepteur.

(a) moteur (b) récepteur

b) Quelle est l'expression du travail indiqué total reçu lors de ce cycle ?

(a) $w_1 + w_3$ (d) $-w_1 - w_3$ (g) $w_2 - w_4$
(b) $-w_1 + w_3$ (e) $w_2 + w_4$ (h) $-w_2 - w_4$
(c) $w_1 - w_3$ (f) $-w_2 + w_4$

c) Quelle est l'expression du transfert thermique reçu de la part de la source chaude ?

(a) $c_\mathrm{p}(T_2 - T_1)$ (c) $c_\mathrm{p}(T_4 - T_3)$
(b) $c_\mathrm{p}(T_3 - T_2)$ (d) $c_\mathrm{p}(T_1 - T_4)$

d) Quelle est l'expression du transfert thermique reçu de la part de la source froide ?

(a) $c_\mathrm{p}(T_2 - T_1)$ (c) $c_\mathrm{p}(T_4 - T_3)$
(b) $c_\mathrm{p}(T_3 - T_2)$ (d) $c_\mathrm{p}(T_1 - T_4)$

e) Quelle est l'expression du travail indiqué w_1 reçu dans la première phase ?

(a) $c_\mathrm{p}(T_2 - T_1)$ (c) $c_\mathrm{p}(T_4 - T_3)$
(b) $c_\mathrm{p}(T_3 - T_2)$ (d) $c_\mathrm{p}(T_1 - T_4)$

f) Quelle est l'expression du travail indiqué w_3 reçu dans la troisième phase ?

(a) $c_\mathrm{p}(T_2 - T_1)$ (c) $c_\mathrm{p}(T_4 - T_3)$
(b) $c_\mathrm{p}(T_3 - T_2)$ (d) $c_\mathrm{p}(T_1 - T_4)$

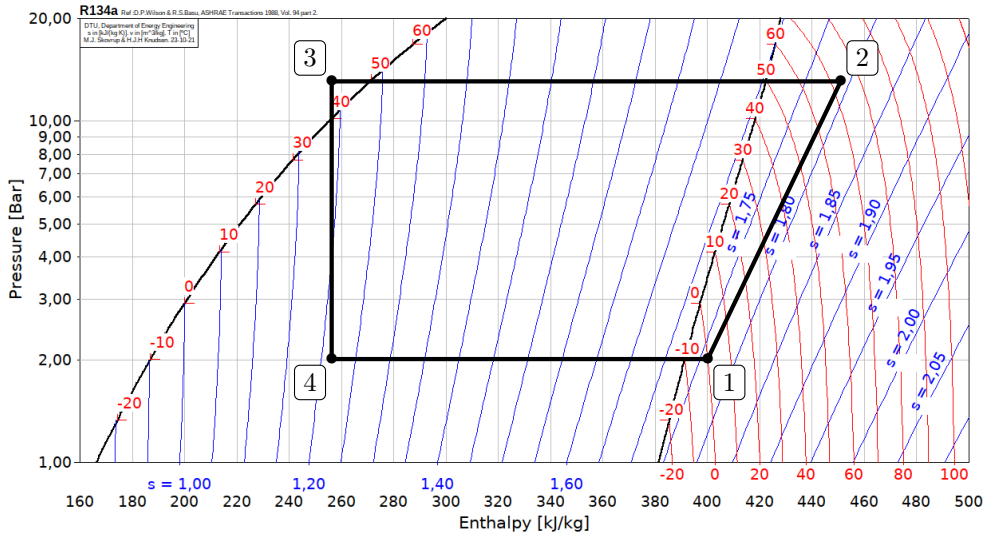
g) Exprimer le rendement de ce cycle moteur en fonction de w_1, w_3 et q_2.

h) Exprimer le rendement en fonction des températures T_1, T_2, T_3 et T_4.

Exploitation de diagrammes enthalpiques

Entraînement 16.6 — Efficacité d'une pompe à chaleur.

Considérons une pompe à chaleur dont le cycle est représenté ci-dessous.



a) Le fluide reçoit du travail dans le compresseur, ce qui a pour effet d'augmenter la pression ainsi que la température à une température supérieure à celle de la source chaude.

Quelle transformation du cycle correspond au compresseur ? .....

b) Calculer numériquement le travail massique algébrique w_{compr} reçu par le fluide dans le compresseur.

.....

c) L'échange avec la source chaude a lieu dans le condenseur, où le fluide se liquéfie totalement.

Quelle transformation du cycle correspond au condenseur ? .....

d) Calculer numériquement le transfert thermique algébrique q_{cond} reçu par le fluide dans le condenseur.

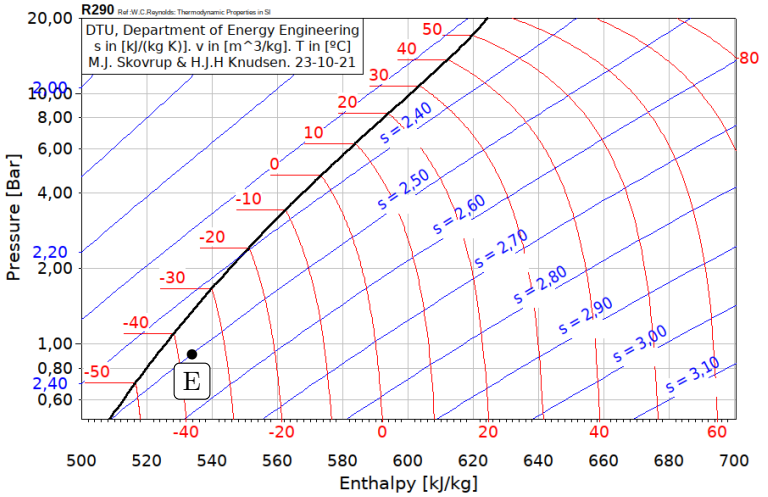
.....

e) Calculer l'efficacité de la machine $e = -\dfrac{q_{\text{cond}}}{w_{\text{compr}}}$ .....

Entraînement 16.7 — Rendement isentropique d'un compresseur.

Dans cet entraînement, on considère un compresseur adiabatique destiné à augmenter la pression d'une vapeur de propane de 1 à 10 bar.

Le fluide est dans l'état initial E indiqué sur le diagramme des frigoristes ci-contre en entrée du compresseur, on note S son état de sortie. Les valeurs lues sur le diagramme seront données avec deux chiffres significatifs ; les entropies y sont données en $\mathrm{kJ \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$.



a) On suppose la compression réversible. Donner la valeur de $s_{\mathrm{S,rév}}$ en sortie ....

b) Déterminer graphiquement la température du fluide $T_{\mathrm{S,rév}}$ en sortie .....

c) Calculer le travail massique $w_{\mathrm{rév}}$ fourni à la vapeur .....

d) En réalité, la compression est irréversible, et la valeur de la température réelle en sortie du compresseur est $T_{\mathrm{S}} = 65\,°\mathrm{C}$. Déterminer le travail massique w réellement fourni lors du processus.

.....

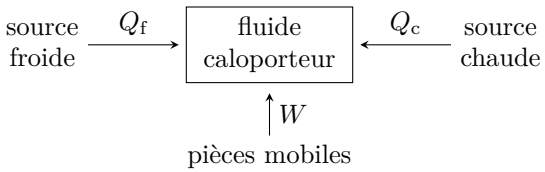
e) Calculer le rendement isentropique du compresseur $\eta = \dfrac{w_{\mathrm{rév}}}{w}$ .....

f) Calculer l'entropie massique créée lors de la compression .....

Autres entraînements

Entraînement 16.8 — Machines thermiques.

On donne ci-dessous le schéma conventionnel d'une machine ditherme, les énergies reçues par le fluide étant algébriques.



a) S'il s'agit d'un moteur, indiquer le signe de chaque transfert énergétique W, Q_f et Q_c.

(a) $W > 0$; $Q_f > 0$; $Q_c < 0$
(b) $W > 0$; $Q_f < 0$; $Q_c > 0$
(c) $W > 0$; $Q_f < 0$; $Q_c < 0$
(d) $W < 0$; $Q_f > 0$; $Q_c > 0$
(e) $W < 0$; $Q_f > 0$; $Q_c < 0$
(f) $W < 0$; $Q_f < 0$; $Q_c > 0$

.....

b) Comment le rendement est-il alors défini ?

(a) $-W/Q_c$ (c) $-Q_c/W$ (e) $-Q_f/W$
(b) $+Q_f/W$ (d) $+W/Q_f$ (f) $+W/Q_c$

.....

c) Même question pour un réfrigérateur.

(a) $W > 0$; $Q_f > 0$; $Q_c < 0$
(b) $W > 0$; $Q_f < 0$; $Q_c > 0$
(c) $W > 0$; $Q_f < 0$; $Q_c < 0$
(d) $W < 0$; $Q_f > 0$; $Q_c > 0$
(e) $W < 0$; $Q_f > 0$; $Q_c < 0$
(f) $W < 0$; $Q_f < 0$; $Q_c > 0$

.....

d) Comment l'efficacité est-elle alors définie ?

(a) $-W/Q_c$ (d) $+W/Q_f$
(b) $+Q_f/W$ (e) $-Q_f/W$
(c) $-Q_c/W$ (f) $+W/Q_c$

.....

e) Même question pour une pompe à chaleur.

(a) $W > 0$; $Q_f > 0$; $Q_c < 0$
(b) $W > 0$; $Q_f < 0$; $Q_c > 0$
(c) $W > 0$; $Q_f < 0$; $Q_c < 0$
(d) $W < 0$; $Q_f > 0$; $Q_c > 0$
(e) $W < 0$; $Q_f > 0$; $Q_c < 0$
(f) $W < 0$; $Q_f < 0$; $Q_c > 0$

.....

f) Comment l'efficacité est-elle alors définie ?

(a) $-W/Q_c$ (c) $-Q_c/W$ (e) $-Q_f/W$
(b) $+Q_f/W$ (d) $+W/Q_f$ (f) $+W/Q_c$

.....

g) Même question pour un climatiseur.

(a) $W > 0$; $Q_f > 0$; $Q_c < 0$ (d) $W < 0$; $Q_f > 0$; $Q_c > 0$
(b) $W > 0$; $Q_f < 0$; $Q_c > 0$ (e) $W < 0$; $Q_f > 0$; $Q_c < 0$
(c) $W > 0$; $Q_f < 0$; $Q_c < 0$ (f) $W < 0$; $Q_f < 0$; $Q_c > 0$

.....

h) Comment l'efficacité est-elle alors définie ?

(a) $-W/Q_c$ (c) $-Q_c/W$ (e) $-Q_f/W$
(b) $+Q_f/W$ (d) $+W/Q_f$ (f) $+W/Q_c$

.....

Entraînement 16.9 — Échangeurs thermiques.

Les machines dithermes possèdent deux échangeurs thermiques : un condenseur, dans lequel le fluide se liquéfie, et un évaporateur, où il se vaporise.

a) Le fluide caloporteur d'une centrale thermique doit céder de l'énergie à l'environnement extérieur avant de retourner vers la chaudière. L'échangeur est-il un évaporateur ou un condenseur ?

.....

b) Le fluide caloporteur d'un réfrigérateur doit recevoir de l'énergie de la part du compartiment réfrigéré. S'agit-il d'un évaporateur ou d'un condenseur ?

.....

c) Le fluide caloporteur d'une pompe à chaleur doit céder de l'énergie dans une maison.

S'agit-il d'un évaporateur ou d'un condenseur ?

.....

Entraînement 16.10 — Mélangeur.

Un mélangeur calorifugé à deux entrées et une sortie fonctionne avec deux liquides identiques, de l'eau par exemple, de capacité thermique massique à pression constante c_p constante. Le premier fluide a un débit massique $D_{\mathrm{m}1}$ et une température T_1 tandis que le second a un débit massique $D_{\mathrm{m}2}$ et une température $T_2 < T_1$. En sortie, le débit massique du mélange est D_m et sa température T.

a) Exprimer la conservation du débit massique avec les données de l'exercice.

.....

b) En ne considérant que le sous-système « fluide 1 » qui reçoit de la part du fluide 2 le transfert thermique $q_{2\to1}$, déduire du premier principe industriel la relation entre $q_{2\to1}$, c_p, T_1 et T.

.....

c) Même question pour le sous-système « fluide 2 », en fonction de $q_{1\to2}$, c_p, T_2 et T.

.....

d) L'échange thermique est supposé parfait entre les deux liquides : $D_{\mathrm{m}1}\,q_{2\to1} + D_{\mathrm{m}2}\,q_{1\to2} = 0$. En déduire l'équation reliant les différents débits et températures.

.....

e) Exprimer la température T en sortie .....

f) Faire l'application numérique avec $T_1 = 80\,°\mathrm{C}$, $T_2 = 20\,°\mathrm{C}$, $D_{\mathrm{m}1} = 3{,}0\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}}$ et $D_{\mathrm{m}2} = 7{,}0\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}}$ et exprimer la température en degrés Celsius.

.....

Entraînement 16.11 — Étude d'une turbine.

À l'entrée d'une turbine horizontale, isolée thermiquement, de l'air possède une pression p_1, une température T_1 et une vitesse c_1. À la sortie, il a mêmes pression et température, sa vitesse est négligeable.

a) Simplifier le premier principe par unité de masse pour les écoulements en régime permanent.

(a) $\Delta e_\mathrm{c} = w_\mathrm{i}$ (c) $\Delta h + \Delta e_\mathrm{c} = 0$ (e) $\Delta h = q_\mathrm{e}$

(b) $\Delta h + \Delta e_\mathrm{c} = w_\mathrm{i}$ (d) $\Delta h = w_\mathrm{i}$ (f) $\Delta h = w_\mathrm{i} + q_\mathrm{e}$

.....

b) Exprimer le travail W_f récupéré sur l'arbre de la turbine pour le passage d'une masse m d'air.

(a) $W_\mathrm{f} = \dfrac{1}{2}c_1^2$ (b) $W_\mathrm{f} = -\dfrac{1}{2}c_1^2$ (c) $W_\mathrm{f} = -\dfrac{1}{2}mc_1^2$ (d) $W_\mathrm{f} = \dfrac{1}{2}mc_1^2$

.....

c) Déterminer la valeur numérique du travail échangé pendant 1 heure avec un débit de $0{,}5\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}}$ en prenant $c_1 = 100\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

.....

Entraînement 16.12 — Étude d'une pompe.

De l'eau liquide est refoulée à l'aide d'une pompe d'un point A vers un point B. Les vitesses à l'entrée et à la sortie sont négligeables, de même que la variation d'altitude. En amont, l'eau est à pression $p_1 = 0{,}10\,\text{bar}$ et en aval à $p_2 = 20\,\text{bar}$. On suppose la compression adiabatique réversible.

a) Indiquer les hypothèses à prendre en compte dans l'expression du bilan enthalpique.

(a) $q_\text{e} = 0$, $e_\text{c} = \text{cste}$, $e_\text{p} = \text{cste}$
(b) $w_\text{i} = 0$, $e_\text{c} = \text{cste}$, $e_\text{p} = \text{cste}$
(c) $\Delta h = 0$, $e_\text{c} = \text{cste}$, $e_\text{p} = \text{cste}$
(d) $q_\text{e} = 0$, $w_\text{i} = 0$, $e_\text{c} = \text{cste}$, $e_\text{p} = \text{cste}$

.....

b) Pour des écoulements en régime permanent appliqués à la pompe étudiée, comment s'exprime le premier principe pour une unité de masse de fluide ?

(a) $\Delta h + \Delta e_\text{c} = w_\text{i}$
(b) $\Delta h + \Delta e_\text{c} = q$
(c) $\Delta h + \Delta e_\text{c} = 0$
(d) $\Delta h = w_\text{i}$
(e) $\Delta h = q$
(f) $\Delta h = w_\text{i} + q$

.....

c) En utilisant la deuxième identité thermodynamique $\mathrm{d}h = T\,\mathrm{d}s + v\,\mathrm{d}p$, exprimer la variation d'enthalpie Δh de l'eau en fonction des pressions p_1, p_2 et du volume massique v de l'eau.

.....

d) En déduire l'expression du travail indiqué massique w_i, en fonction du volume massique v et des pressions p_1 et p_2.

.....

e) Déterminer numériquement ce travail, en $\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ .....

Réponses mélangées

(a) (a) $c_2 = \sqrt{\frac{2}{M}\frac{\gamma R}{\gamma - 1}(T_1 - T_2)}$ (a) $9 \times 10^6\,\text{J}$ (d) $2 \to 3$ $383\,\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
$1 \to 2$ condenseur (c) (a) $100\,\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ $\frac{1}{M}\frac{\gamma R}{\gamma - 1}(T_2 - T_1)$ (b)
(a) 0,78 (a) (a) $\Delta h = v(p_2 - p_1)$ (a) (b) $-200\,\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$
(d) (c) 50 °C $D_{\text{m}1}(T - T_1) + D_{\text{m}2}(T - T_2) = 0$ évaporateur (b) (c)
$2{,}50\,\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ $c_\text{p}(T - T_1) = q_{2\to1}$ $50\,\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ (b) $D_{\text{m}1} + D_{\text{m}2} = D_\text{m}$
(d) (c) 38 °C (c) (a) (a) $c_\text{p}(T - T_2) = q_{1\to2}$ 4 (d)
(a) (d) (a) $110\,\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ (f) $v(p_2 - p_1)$ $140\,\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ (a)
$1{,}99\,\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ (a) $-\frac{w_1 + w_3}{q_2}$ $T = \frac{D_{\text{m}1}T_1 + D_{\text{m}2}T_2}{D_m}$ $1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$ condenseur

▶ Réponses et corrigés page 382

Signaux

Prérequis
Continuités imposées par les bobines et condensateurs.
Comportement des bobines et condensateur à HF et BF.

Pour bien commencer

Entraînement 17.1 — Un peu de calcul intégral.

Calculer les intégrales suivantes si $T = 2\pi/\omega$ est une constante homogène à un temps.

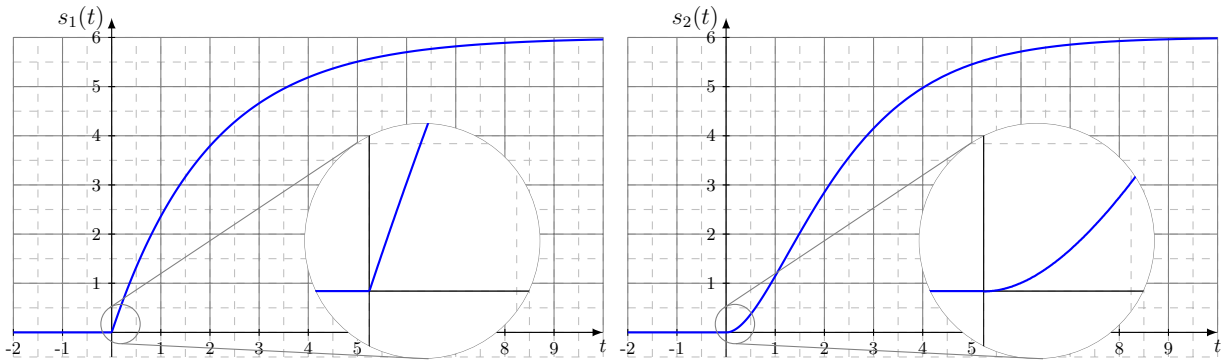
a) $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \cos(\omega t)\,\mathrm{d}t$ ..... c) $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T t\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t$ .....

b) $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \cos^2(\omega t)\,\mathrm{d}t$ .....

Régimes transitoires

Entraînement 17.2 — Premier/second ordre.

Soit les deux courbes $s_1(t)$ et $s_2(t)$ respectivement à gauche et à droite sur la figure ci-dessous.



Parmi les propositions suivantes,

(a) $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} - \dfrac{s}{\tau} = \dfrac{E}{\tau}$

(b) $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \dfrac{s}{\tau} = 0$

(c) $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \dfrac{s}{\tau} = \dfrac{E}{\tau}$

(d) $\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 E$

(e) $\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 E$

(f) $\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} - \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 E$

où $(\tau, \omega_0, Q, E) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^4$, laquelle correspond à :

a) $s_1(t)$? ..... b) $s_2(t)$? .....

Entraînement 17.3 — Stabilité d'un système linéaire continu invariant.

Qualifier de « stable » ou d'« instable » les systèmes décrits par les équations différentielles suivantes. Les signaux s, r et v sont les signaux de sortie des systèmes étudiés tandis que le signal e est un signal d'entrée. Toute autre notation renvoie à des constantes strictement positives.

a) $\dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = \omega_0^2 s$ ..... b) $\tau\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + s = -e$ .....

c) $\dfrac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - \omega_0^2 r = -g\cos\theta$ si $\theta > \pi/2$ .....

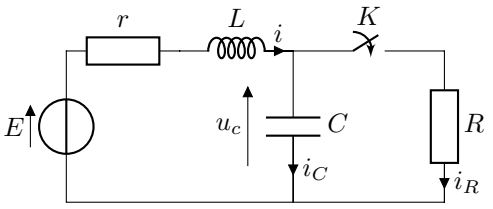
d) $\dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}(1 - H_0 A)\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 e$ si $H_0 A \leqslant 1$ .....

e) $\dfrac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{1}{LC}\left(RC - \dfrac{L}{r}\right)\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{LC}\left(1 - \dfrac{R}{r}\right)v = 0$ si $R > r$ et $R < \dfrac{L}{rC}$ .....

Entraînement 17.4 — Continuité (I).

On considère le circuit ci-contre. L'interrupteur K est ouvert depuis très longtemps. On le ferme à l'instant $t = 0$.

Trois étudiants comparent leurs analyses de ce circuit à l'instant $t = 0^-$, l'instant $t = 0^+$ et lorsque $t \to +\infty$.



a) À $t = 0^-$, parmi les trois propositions ci-dessous, laquelle est correcte ? .....

Étudiant ⓐ :	Étudiant ⓑ :	Étudiant ⓒ :
$i(0^-) = 0$	$i(0^-) = E/R$	$i(0^-) = 0$
$i_R(0^-) = 0$	$i_R(0^-) = 0$	$i_R(0^-) = 0$
$i_C(0^-) = 0$	$i_C(0^-) = E/R$	$i_C(0^-) = 0$
$u_C(0^-) = 0$	$u_C(0^-) = 0$	$u_C(0^-) = E$

b) À $t = 0^+$, parmi les trois propositions ci-dessous, laquelle est correcte ? .....

Étudiant ⓐ :	Étudiant ⓑ :	Étudiant ⓒ :
$i(0^+) = 0$	$i(0^+) = E/R$	$i(0^+) = 0$
$i_R(0^+) = E/R$	$i_R(0^+) = 0$	$i_R(0^+) = E/R$
$i_C(0^+) = -E/R$	$i_C(0^+) = E/R$	$i_C(0^+) = 0$
$u_C(0^+) = E$	$u_C(0^+) = 0$	$u_C(0^+) = E$

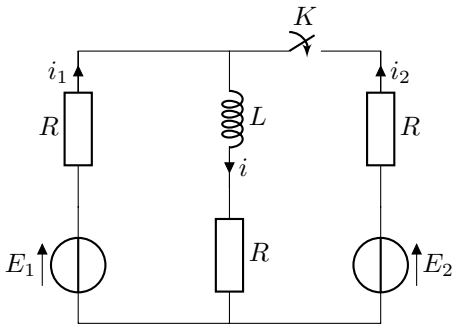
c) À $t = +\infty$, parmi les trois propositions ci-dessous, laquelle est correcte ? .....

Étudiant ⓐ :	Étudiant ⓑ :	Étudiant ⓒ :
$i(\infty) = E/(R+r)$	$i(\infty) = E/R$	$i(\infty) = E/r$
$i_R(\infty) = E/(R+r)$	$i_R(\infty) = E/R$	$i_R(\infty) = E/R$
$i_C(\infty) = 0$	$i_C(\infty) = 0$	$i_C(\infty) = E/r - E/R$
$u_C(\infty) = \dfrac{R}{R+r}E$	$u_C(\infty) = 0$	$u_C(\infty) = E$

Entraînement 17.5 — Continuité (II).

On considère le circuit ci-dessous.

L'interrupteur K est ouvert depuis très longtemps. On le ferme à l'instant $t = 0$.



Trois étudiants comparent leurs analyses de ce circuit :

- à l'instant $t = 0^-$,
- à l'instant $t = 0^+$,
- lorsque $t \to +\infty$.

a) À $t = 0^-$, parmi les trois propositions ci-dessous, laquelle est correcte ? .....

Étudiant ⓐ :	Étudiant ⓑ :	Étudiant ⓒ :
$i(0^-) = E_1/2R$ $i_1(0^-) = E_1/2R$ $i_2(0^-) = 0$	$i(0^-) = E_1/R$ $i_1(0^-) = E_1/R$ $i_2(0^-) = E/R$	$i(0^-) = E_1/2R$ $i_1(0^-) = 0$ $i_2(0^-) = 0$

b) À $t = 0^+$, parmi les trois propositions ci-dessous, laquelle est correcte ? .....

Étudiant ⓐ :	Étudiant ⓑ :	Étudiant ⓒ :
$i(0^+) = E_1/R$ $i_1(0^+) = \dfrac{4E_1 - 2E_2}{3R}$ $i_2(0^+) = \dfrac{2E_2 - E_1}{3R}$	$i(0^+) = E_1/2R$ $i_1(0^+) = E_1/4R$ $i_2(0^+) = E_1/4R$	$i(0^+) = E_1/2R$ $i_1(0^+) = \dfrac{3E_1 - 2E_2}{4R}$ $i_2(0^+) = \dfrac{2E_2 - E_1}{4R}$

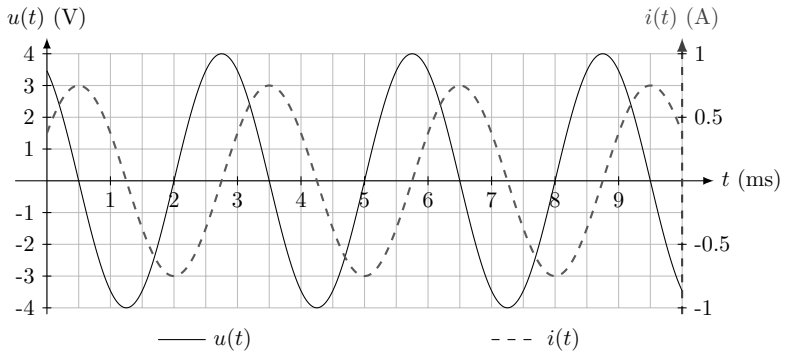
c) À $t = +\infty$, parmi les trois propositions ci-dessous, laquelle est correcte ? .....

Étudiant ⓐ :	Étudiant ⓑ :	Étudiant ⓒ :
$i(\infty) = \dfrac{E_1 + E_2}{3R}$ $i_1(\infty) = E_1/3R$ $i_2(\infty) = E_2/3R$	$i(\infty) = \dfrac{E_1 + E_2}{2R}$ $i_1(\infty) = E_1/2R$ $i_2(\infty) = E_2/2R$	$i(\infty) = \dfrac{E_1 + E_2}{3R}$ $i_1(\infty) = \dfrac{2E_1 - E_2}{3R}$ $i_2(\infty) = \dfrac{2E_2 - E_1}{3R}$

Régimes oscillants forcés

Entraînement 17.6 — Qui est-ce (I) ?

Un étudiant a mesuré la tension et l'intensité électrique traversant un dipôle dont les mesures sont représentées ci-dessous.



Un peu étourdi, il a oublié si ces courbes correspondent à celles mesurées aux bornes d'un condensateur ou d'une bobine.

Aidez-le à le retrouver !

a) Quelle est l'amplitude de l'intensité ? .....

b) Quelle est l'amplitude de la tension ? .....

c) Quelle est la fréquence des signaux ? .....

d) Comment est la tension par rapport à l'intensité électrique ?

(a) en avance (b) en retard

.....

e) Le déphasage de la tension par rapport à l'intensité vaut :

(a) $-\frac{\pi}{2}$ (b) $+\frac{\pi}{2}$ (c) $-\pi$ (d) $+\pi$

.....

f) Le dipôle étudié est alors :

(a) une bobine d'impédance $\mathrm{j}L\omega$

(b) un condensateur d'admittance $\mathrm{j}C\omega$

.....

g) Le cas échéant, déterminer la valeur de la capacité ou de l'inductance de ce dipôle.

On prendra $\frac{1}{\pi} \approx 0{,}32$.

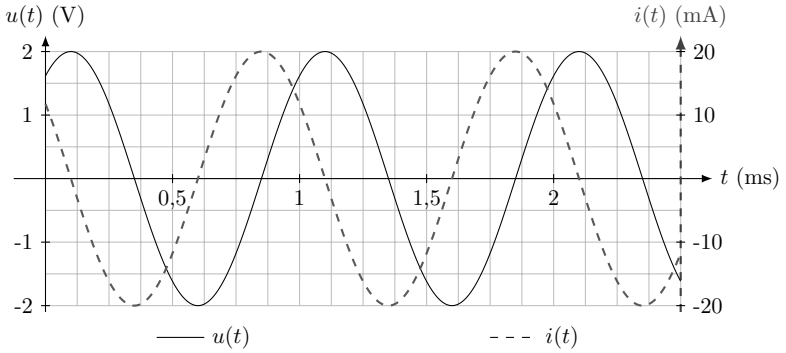
.....

Entraînement 17.7 — Qui est-ce (II) ?

Un étudiant a mesuré la tension et l'intensité électrique traversant un dipôle dont les mesures sont représentées ci-contre.

Un peu étourdi, il a oublié si ces courbes correspondent à celles mesurées aux bornes d'un condensateur ou d'une bobine.

Aidez-le à le retrouver !



a) Comment est la tension par rapport à l'intensité électrique ?

(a) en avance (b) en retard

.....

b) Le déphasage de la tension par rapport à l'intensité électrique vaut :

(a) $-\frac{\pi}{2}$ (b) $+\frac{\pi}{2}$ (c) $-\pi$ (d) $+\pi$

.....

c) Le dipôle étudié est donc :

(a) une bobine d'impédance $\mathrm{j}L\omega$ (b) un condensateur d'admittance $\mathrm{j}C\omega$

.....

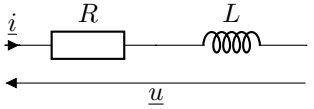
d) Le cas échéant, déterminer la valeur de la capacité ou de l'inductance de ce dipôle.

On prendra $\frac{1}{2\pi} \approx 0{,}16$.

.....

Entraînement 17.8 — Caractéristiques d'un montage RL (I).

On considère l'association de dipôles ci-contre.



a) L'impédance de cette association est de la forme :

(a) $\underline{Z} = \dfrac{R + \mathrm{j}L\omega}{\mathrm{j}LR\omega}$ (b) $\underline{Z} = R + \mathrm{j}L\omega$ (c) $\underline{Z} = R + \dfrac{1}{\mathrm{j}L\omega}$

.....

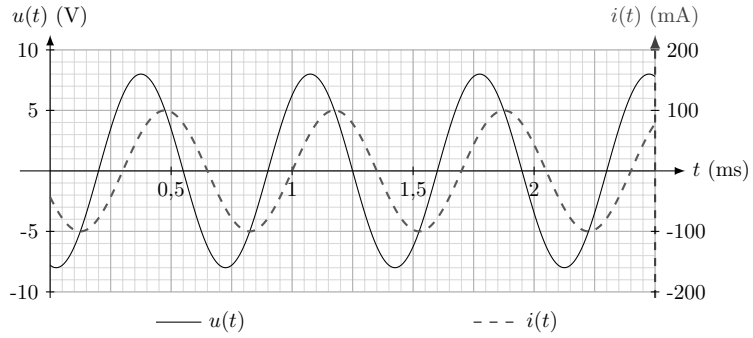
On note U_0 et I_0 les amplitudes respectives de la tension $u(t)$ et de l'intensité électrique $i(t)$. On note φ le déphasage de la tension par rapport à l'intensité électrique (c'est l'argument de $\underline{Z}$).

b) Les grandeurs L et R vérifient le système :

(a) $\begin{cases} \dfrac{R^2 + (L\omega)^2}{(LR\omega)^2} = \left(\dfrac{U_0}{I_0}\right)^2 \\ \dfrac{L\omega}{R} = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} + \varphi\right) \end{cases}$ (b) $\begin{cases} R^2 + \dfrac{1}{(L\omega)^2} = \left(\dfrac{U_0}{I_0}\right)^2 \\ \dfrac{1}{RL\omega} = \tan(\varphi) \end{cases}$ (c) $\begin{cases} R^2 + (L\omega)^2 = \left(\dfrac{U_0}{I_0}\right)^2 \\ \dfrac{L\omega}{R} = \tan(\varphi) \end{cases}$

.....

Entraînement 17.9 — Caractéristiques d'un montage RL (II).



La tension $u(t)$ et l'intensité électrique $i(t)$ de l'association série d'une bobine et d'un conducteur ohmique sont mesurées expérimentalement (courbes ci-contre). L'impédance de ce montage est

$$\underline{Z} = R + \mathrm{j}L\omega.$$

On peut montrer que R, L et ω vérifient le système :

$$\begin{cases} R^2 + (L\omega)^2 = \left(\dfrac{U_0}{I_0}\right)^2 \\ \dfrac{L\omega}{R} = \tan(\varphi), \end{cases}$$

où U_0 et I_0 sont respectivement les amplitudes de la tension $u(t)$ et de l'intensité électrique $i(t)$ tandis que φ est le déphasage de la tension par rapport à l'intensité électrique.

a) La pulsation des signaux est :

(a) $8{,}98 \times 10^2\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$ (b) $8{,}98 \times 10^3\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$ (c) $8{,}98 \times 10^4\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$ .....

b) Quelle est la valeur du décalage temporel δt entre l'extinction de la tension et celle de l'intensité électrique ?

(a) $-0{,}1\,\mathrm{ms}$ (b) $-0{,}2\,\mathrm{ms}$ (c) $0{,}1\,\mathrm{ms}$ (d) $0{,}2\,\mathrm{ms}$ .....

c) Le déphasage φ de la tension par rapport à l'intensité électrique vaut :

(a) $\dfrac{\pi}{3}$ rad (b) $-\dfrac{\pi}{3}$ rad (c) $\dfrac{2}{7}\pi$ rad (d) $-\dfrac{2}{7}\pi$ rad .....

En résolvant le système, déterminer :

d) la valeur de la résistance R ..... e) la valeur de l'inductance L .....

Entraînement 17.10 — Équivalents.

On considère les trois fonctions de transfert suivantes :

$$\underline{H_1}(\mathrm{j}x) = \frac{4}{1 - x^2 + 3\mathrm{j}x}, \quad \underline{H_2}(\mathrm{j}x) = \frac{1 + 2\mathrm{j}x}{1 - 3\mathrm{j}x} \quad \text{et} \quad \underline{H_3}(\mathrm{j}x) = \frac{2 + 3\mathrm{j}x}{1 + 5\mathrm{j}\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}.$$

Pour chacune des fonctions de transfert, trouver un équivalent de la forme Ax^n au module des fonctions de transfert, où $A \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$ sont deux constantes à déterminer.

a) $\left|\underline{H_1}(\mathrm{j}x)\right|$ pour $x \to 0$ .....

b) $\left|\underline{H_1}(\mathrm{j}x)\right|$ pour $x \to \infty$ ....

c) $\left|\underline{H_2}(\mathrm{j}x)\right|$ pour $x \to 0$ .....

d) $\left|\underline{H_2}(\mathrm{j}x)\right|$ pour $x \to \infty$ ....

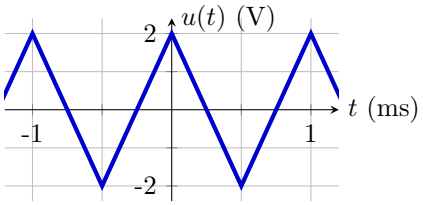
e) $\left|\underline{H_3}(\mathrm{j}x)\right|$ pour $x \to 0$ .....

f) $\left|\underline{H_3}(\mathrm{j}x)\right|$ pour $x \to \infty$ ....

Analyse spectrale

Entraînement 17.11 — DSF d'un signal triangulaire.

L'oscillogramme d'un signal triangulaire $u(t)$, d'amplitude U et de période T, est représenté ci-dessous.



Par lecture graphique, déterminer les propriétés du signal :

a) T ..... b) U .....

c) Quelle est la valeur de la fréquence fondamentale f du signal ? .....

d) Laquelle des propositions ci-dessous décrit le signal triangulaire sur l'intervalle $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$?

(a) $u(t) = \begin{cases} U(1+4t/T) & \text{si } t \in [0, T/2] \\ U(1-4t/T) & \text{si } t \in [-T/2, 0] \end{cases}$

(b) $u(t) = \begin{cases} U(1-4t/T) & \text{si } t \in [0, T/2] \\ U(1+4t/T) & \text{si } t \in [-T/2, 0] \end{cases}$

(c) $u(t) = \begin{cases} U(1-2t/T) & \text{si } t \in [0, T/2] \\ U(1+2t/T) & \text{si } t \in [-T/2, 0] \end{cases}$

(d) $u(t) = \begin{cases} U(1+2t) & \text{si } t \in [0, T/2] \\ U(1-2t) & \text{si } t \in [-T/2, 0] \end{cases}$

.....

Le signal triangulaire peut se décomposer en série de Fourier :

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n f\, t) + b_n \sin(2\pi n f\, t),$$

avec a_0 la moyenne de $u(t)$, a_n et b_n les coefficients des harmoniques définis par :

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\cos(n\,2\pi f\, t)\ \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\sin(n\,2\pi f\, t)\ \mathrm{d}t.$$

e) Que vaut a_0 ? .....

Ici, il est admis que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 0$ et

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} u(t)\cos(2\pi f n\, t)\ \mathrm{d}t.$$

f) À l'aide d'une intégration par parties, déterminer lesquelles des propositions suivantes sont correctes :

(a) $a_n = 0$ si n pair

(b) $a_n = \frac{8U}{\pi^2}\frac{1}{n^2}$ si n pair

(c) $a_n = 0$ si n impair

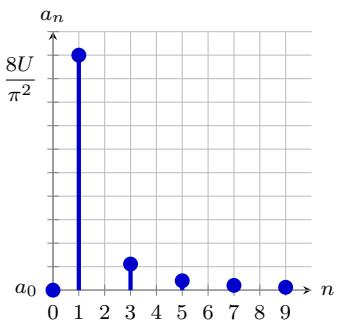
(d) $a_n = \frac{8U}{\pi^2}\frac{1}{n^2}$ si n impair

.....

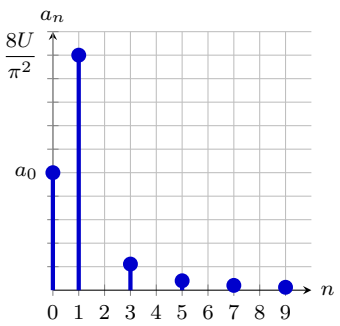
g) Lequel des spectres ci-dessous correspond au spectre en amplitude du signal triangulaire ?

.....

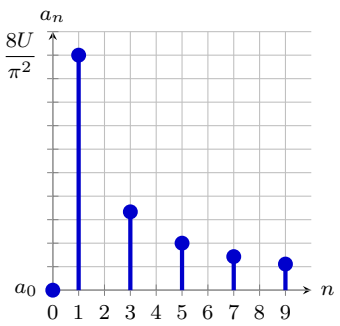
(a)



(b)

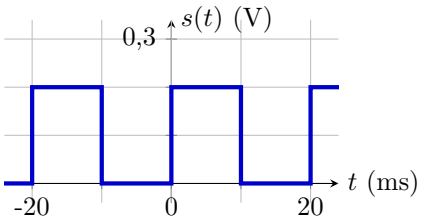


(c)



Entraînement 17.12 — Spectre d'un signal carré.

L'oscillogramme d'un signal carré $s(t)$, de moyenne s_0, d'amplitude S_m et de période T, est représenté ci-contre.



Par lecture graphique, déterminer les propriétés du signal :

a) T .....

b) s_0 .....

c) S_m .....

d) Quelle est la valeur de la fréquence fondamentale ν du signal ? .....

Le signal carré peut se décomposer en série de Fourier :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{c_n}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\,2\pi\nu\,t},$$

avec $\underline{c_n}$ les coefficients complexes des harmoniques définis par :

$$\underline{c_n} = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\,2\pi\nu\,t}\,\mathrm{d}t \quad \text{pour } n \in \mathbb{Z}.$$

e) À l'aide de la définition de la valeur moyenne, déterminer la valeur de $\underline{c_0}$ .....

f) En remarquant que $s(t \in [T/2, T]) = 0$, déterminer lesquelles des propositions suivantes sont correctes pour $n \neq 0$:

(a) $\underline{c_n} = 0$ si n impair

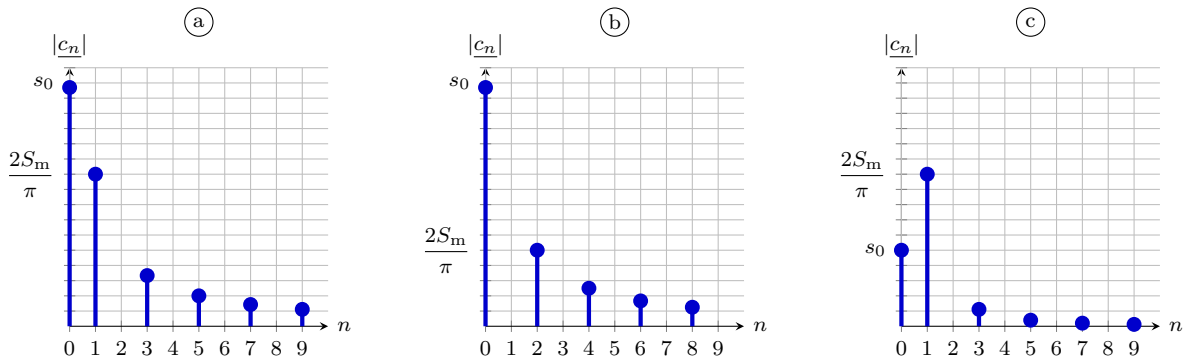
(b) $\underline{c_n} = \dfrac{2S_\text{m}}{\mathrm{i}\pi}\dfrac{1}{n}$ si n impair

(c) $\underline{c_n} = 0$ si n pair

(d) $\underline{c_n} = \dfrac{2S_\text{m}}{\mathrm{i}\pi}\dfrac{1}{n}$ si n pair

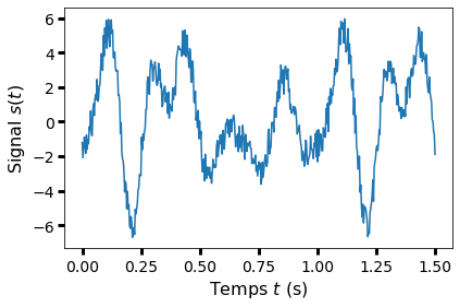
.....

g) Lequel des spectres ci-dessous correspond au spectre en amplitude du signal carré ? ....



Entraînement 17.13 — Fréquence d'échantillonnage.

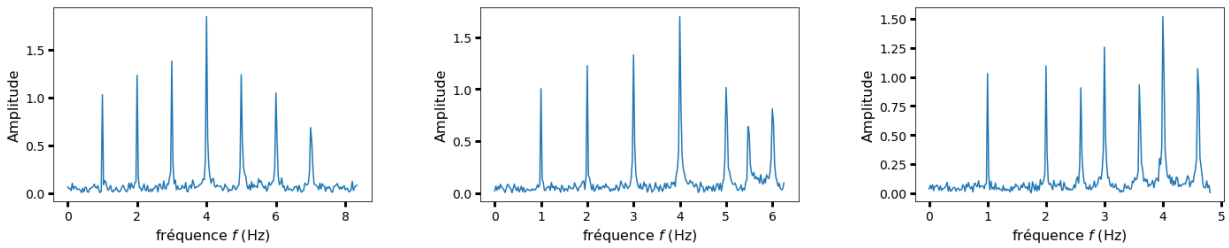
L'acquisition du signal $s(t)$ ci-dessous est effectuée en l'échantillonnant en N points équidistants répartis sur un intervalle $[0, t_{\max}]$.



a) Quelle est la fréquence f du signal ? .....

On effectue cette acquisition sur trois durées $t_{\max}$ différentes.

Les spectres ainsi obtenus, similaires mais pas parfaitement identiques, sont représentés ci-dessous.



(a) $N = 500$; $T_{\max} = 30{,}0\,\text{s}$ (b) $N = 500$; $T_{\max} = 40{,}0\,\text{s}$ (c) $N = 500$; $T_{\max} = 52{,}0\,\text{s}$

Quelle est la fréquence d'échantillonnage $f_e = \dfrac{N}{T_{\max}}$ dans les conditions expérimentales du spectre :

b) (a) ? ..... c) (b) ? ..... d) (c) ? .....

D'après l'analyse de Fourier, un signal périodique se décompose en une somme de signaux sinusoïdaux dont les fréquences sont des multiples de la fréquence du fondamental, fréquence du signal.

e) Lequel des spectres (ⓐ, ⓑ ou ⓒ) vérifie cette propriété ? .....

f) Comment s'appelle l'effet responsable des différences entre ces spectres ? .....

g) Quelle condition doit être remplie pour ne pas observer ce phénomène ?

ⓐ $f_e \geqslant f$
ⓑ $f_e \geqslant 2f$
ⓒ $f_e \geqslant nf$, où n est l'harmonique qu'on souhaite observer
ⓓ $f_e \geqslant 2nf$ où n est l'harmonique qu'on souhaite observer

.....

Entraînement 17.14 — Filtrage numérique.

Un filtre, d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$, possède une fonction de transfert $\underline{H} = \dfrac{H_0}{1 + \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0}}$, avec $H_0 > 0$ un terme identifié au gain statique et ω_0 la pulsation caractéristique du filtre.

a) À l'aide d'une analyse qualitative de la fonction de transfert, déterminer la nature et l'ordre du filtre :

ⓐ passe-bas d'ordre 1
ⓑ passe-bas d'ordre 2
ⓒ passe-haut d'ordre 1
ⓓ passe-haut d'ordre 2
ⓔ passe-bande d'ordre 2
ⓕ coupe-bande d'ordre 2

.....

b) Utiliser la fonction de transfert pour déterminer l'équation différentielle liant e et s.

.....

Une chaîne d'acquisition permet de numériser respectivement les signaux analogiques e et s en des signaux numériques e_n et s_n définis par :

$$e_n = e(t = t_n) \quad \text{et} \quad s_n = s(t = t_n),$$

où $t_n = nT_\mathrm{e}$ et où T_e est la période d'échantillonnage et n le numéro d'un échantillon.

c) En approximant la dérivée par un taux de variation entre t_{n+1} et t_n (schéma d'Euler explicite), laquelle des relations de récurrence proposées ci-dessous permet de calculer la suite s_n pour tout n si s_0 est connue ?

ⓐ $s_n = (1 - T_\mathrm{e}\omega_0)s_{n+1} + T_\mathrm{e}\omega_0 H_0 e_{n+1}$
ⓑ $s_{n+1} = (1 - T_\mathrm{e}\omega_0)s_n + T_\mathrm{e}\omega_0 H_0 e_n$
ⓒ $s_{n+1} = s_n + T_\mathrm{e}\omega_0 H_0 e_{n+1}$
ⓓ $s_{n+1} = s_n + T_\mathrm{e}\omega_0 H_0 e_n$

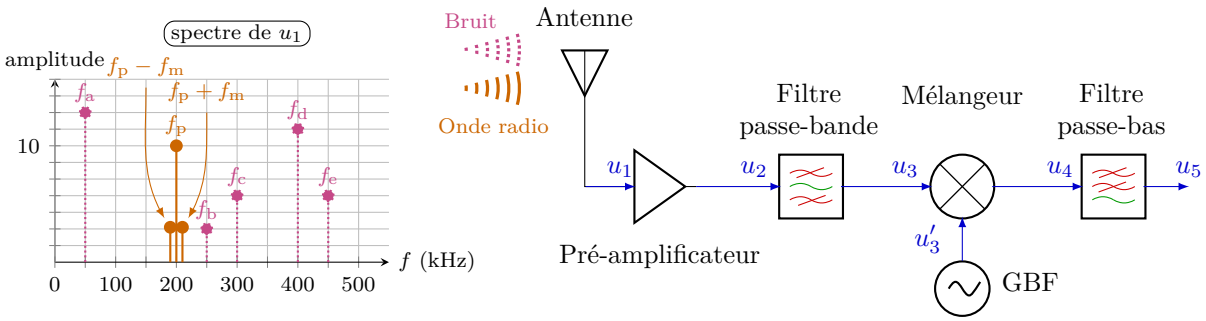
.....

Entraînement 17.15 — Démodulation d'amplitude.

Le signal $u(t)$ modulé en amplitude est émis sous forme d'onde radio contenant les fréquences f_p, $f_\text{p}+f_\text{m}$ ainsi que $f_\text{p}-f_\text{m}$.

Une antenne capte ce signal, mais également du bruit contenant les fréquences f_a, f_b, f_c, f_d et f_e.

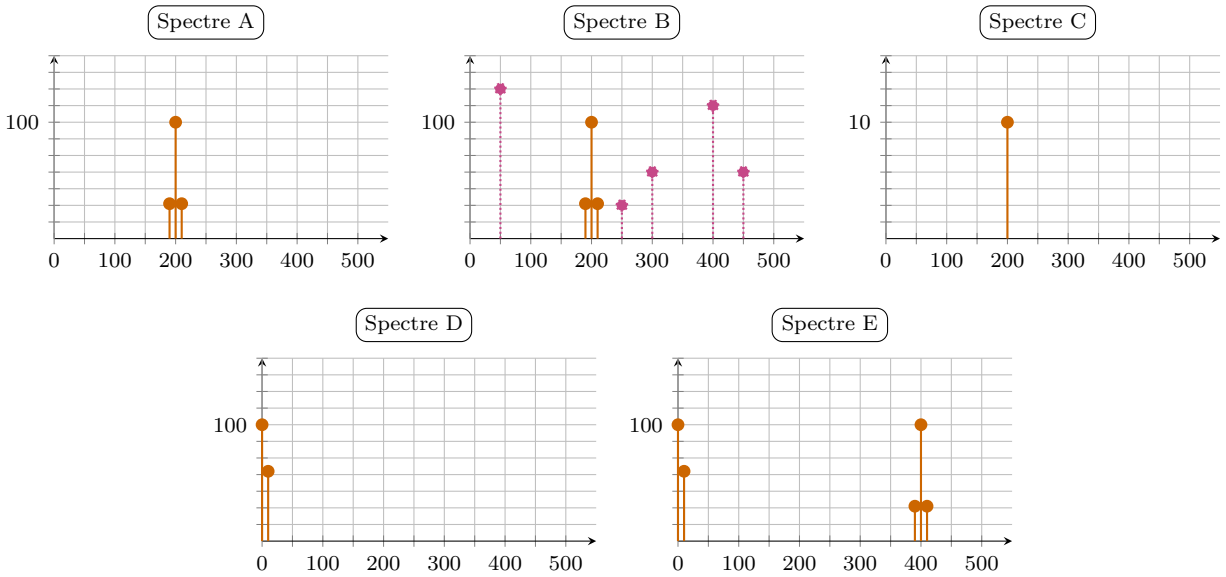
Le spectre du signal $u_1(t)$ généré par l'antenne est tracé ci-dessous.



Le signal $u_1(t)$ capté est envoyé successivement au travers :

- d'un pré-amplificateur de gain $A = 10$,
- d'un filtre passe-bande idéal de bande passante $[175\,\text{kHz}, 225\,\text{kHz}]$,
- d'un mélangeur produisant un signal $u_4(t) = k u_3(t) \times u'_3(t)$ avec $k = 0{,}1\,\text{V}^{-1}$ et $u'_3(t) = U_\text{p}\cos(2\pi f_\text{p} t)$,
- d'un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure $f_\text{c} = 60\,\text{kHz}$.

Les spectres des signaux $u_2(t)$, $u_3(t)$, $u'_3(t)$, $u_4(t)$ et $u_5(t)$ sont représentés ci-dessous. Les titres des axes ont été retirés pour plus de clarté.



Attribuer un des spectres proposés ci-dessus à chaque signal :

a) $u_2(t)$ ..... c) $u'_3(t)$ ..... e) $u_5(t)$ .....

b) $u_3(t)$ ..... d) $u_4(t)$ .....

Entraînement 17.16 — Figure de battements, modulation d'amplitude.

Une station de radio émet un signal modulé en amplitude :

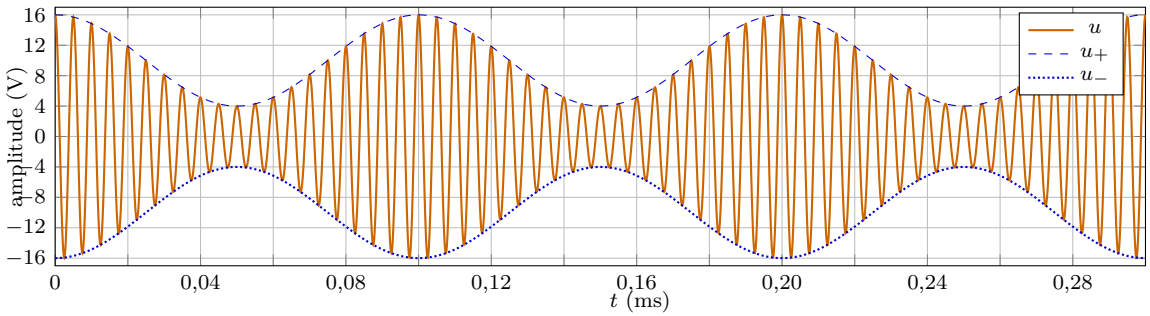
$$u(t) = U_\mathrm{p}\cos(2\pi f_\mathrm{p} t) \times \big(1 + m\cos(2\pi f_\mathrm{m} t)\big)$$

avec f_m la fréquence du message sonore transporté par la porteuse, de fréquence f_p et d'amplitude U_p, avec un taux de modulation $0 < m < 1$.

Numériquement, f_p est très grande devant f_m ; ainsi, $u(t)$ peut être vu comme un signal oscillant « rapidement » à la période T_p entre les enveloppes

$$u_+(t) = +U_\mathrm{p}[1 + m\cos(2\pi f_\mathrm{m} t)] \qquad \text{et} \qquad u_-(t) = -U_\mathrm{p}[1 + m\cos(2\pi f_\mathrm{m} t)],$$

des fonctions oscillant « lentement » à la période T_m.



À l'aide d'une lecture graphique de l'oscillogramme, déterminer la valeur des grandeurs suivantes :

a) T_m .. b) T_p .. c) U_p .. d) m ...

En déduire les fréquences caractéristiques du signal $u(t)$ modulé en amplitude :

e) f_p ..... f) f_m .....

Réponses mélangées

E $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0 s = H_0\omega_0 e$ 10 V (a) instable 0 (a) 0,6 0

$\dfrac{2}{5}x^1$ 12,5 Hz 50 Hz 0,75 A (b) (c) $4x^{-2}$ 0,1 ms (a)

$\dfrac{2}{3}x^0$ stable 1 kHz (b) et (c) (a) 50 Ω 1,6 µF $4x^0$ 9,61 Hz

C (a) 0,1 V 0,005 ms instable stable 7 mH (b) A

16,7 Hz 2 V (c) 1 ms $1x^0$ 2,56 mH (c) (c) (c) D

$\dfrac{3}{5}x^0$ (a) 0 B (c) (a) et (d) (b) 0,1 V (a) 4 V $\dfrac{1}{2}$

(b) 0,1 V (a) 20 ms 1 Hz (a) 10 kHz 333 Hz (b) (b)

instable Repliement de spectre (d) (d) (b) (a) (a) 200 kHz

▶ Réponses et corrigés page 387

ALI

Prérequis
Modèle de l'ALI idéal de gain infini. Impédances complexes.
Impédance d'entrée d'un quadripôle : $\underline{Z}_e = \dfrac{\underline{v}_e}{\underline{i}_e}$.

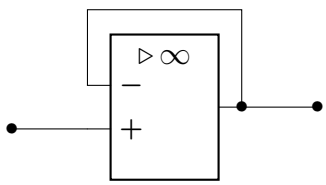
Régime de fonctionnement

Entraînement 18.1 — Circuit en régime linéaire.

Pour chacun des circuits ci-dessous, choisir la phrase qui convient.

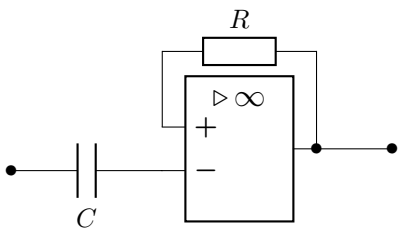
(a) L'ALI fonctionne vraisemblablement en régime linéaire.
(b) L'ALI fonctionne vraisemblablement en régime saturé.
(c) On ne peut pas répondre.

a)



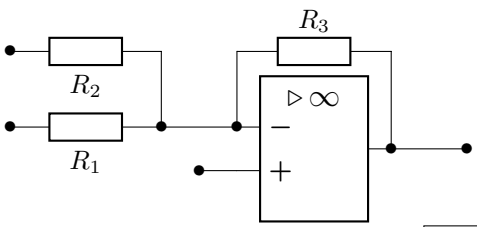
.....

b)



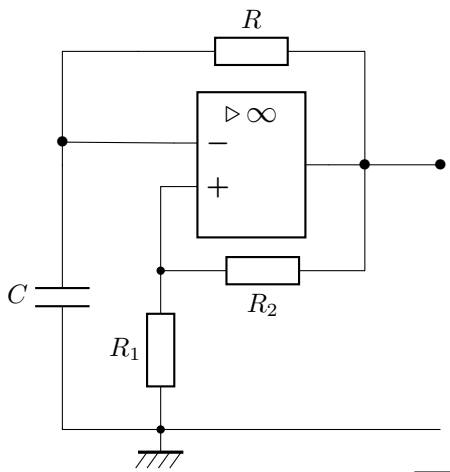
.....

c)



.....

d)

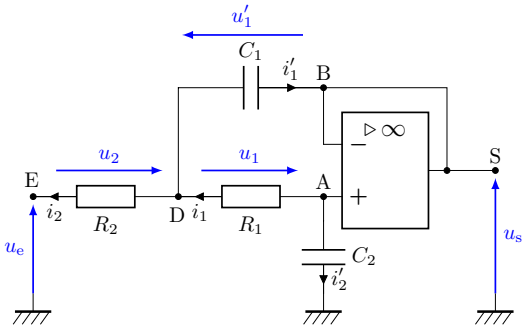


.....

Loi des nœuds et pont diviseur de tension

Entraînement 18.2 — Intensités sens dessus dessous.

L'amplificateur linéaire intégré suivant est idéal et fonctionne en régime linéaire.



a) Exprimer la loi des nœuds au point D en fonction des intensités i_1, i_2 et i_1'.

.....

b) Exprimer la loi des nœuds au point D en fonction des tensions u_1, u_2, u_1', des résistances R_1, R_2 et de la capacité C_1 du condensateur supérieur.

.....

c) Indiquer la relation entre les intensités i_1 et i_2'.

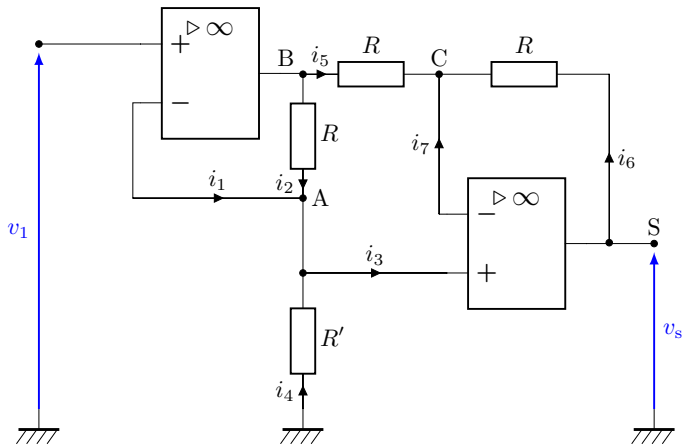
.....

d) En déduire l'expression de l'intensité i_2' en fonction de V_A, V_D et R_1 ainsi que de C_2 et V_A.

.....

Entraînement 18.3 — Montage à plusieurs ALI.

On considère le montage amplificateur d'instrumentation suivant, dans lequel tous les ALI sont considérés comme idéaux :



a) Pourquoi n'est-il pas intéressant d'écrire la loi des nœuds en B ?

(a) L'intensité de sortie de l'ALI est nulle.

(b) L'intensité de sortie de l'ALI est inconnue.

(c) La sortie de l'ALI est reliée à la masse.

.....

b) Exprimer la loi des nœuds en termes d'intensité au point A en fonction des courants donnés sur le schéma.

.....

c) En appliquant la loi d'Ohm, quelle égalité obtient-on ?

(a) $\dfrac{V_B - V_A}{R} + \dfrac{V_A}{R'} = 0$

(b) $\dfrac{V_A - V_B}{R} + \dfrac{V_A}{R'} = 0$

(c) $\dfrac{v_1 - v_s}{R} + \dfrac{V_C - V_A}{R'} = 0$

(d) $\dfrac{V_A - V_B}{R'} + \dfrac{V_A}{R} = 0$

.....

d) Exprimer la loi des nœuds en termes d'intensité au point C en fonction des courants donnés sur le schéma.

.....

e) En utilisant la loi d'Ohm, quelle égalité obtient-on ?

(a) $\dfrac{V_C - V_S}{R} + \dfrac{V_B - V_C}{R} = 0$

(b) $\dfrac{V_C - V_A}{2R} + \dfrac{V_C - V_S}{R} = 0$

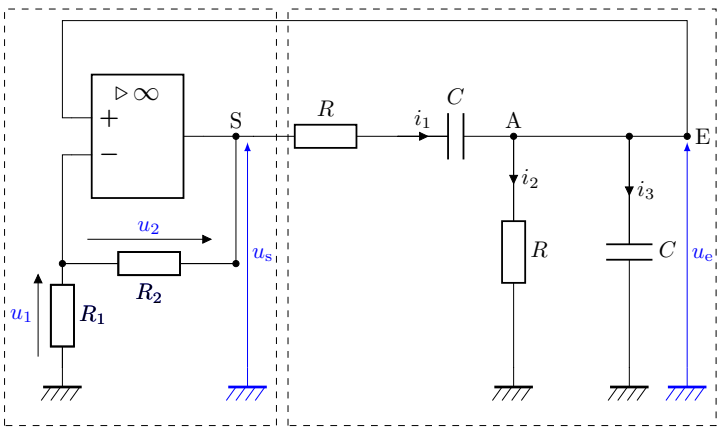
(c) $2V_C = V_B + V_S$

(d) $\dfrac{V_C - V_S}{R} + \dfrac{V_C - V_B}{R} + \dfrac{V_C - V_A}{R} = 0$

.....

Entraînement 18.4 — Oscillateur de Wien.

L'amplificateur linéaire intégré suivant est idéal et fonctionne en régime linéaire.



a) Le pont diviseur de tension du cadre de gauche permet d'écrire une relation entre u_1 et u_s. Écrire cette relation.

.....

b) Écrire la loi des nœuds en A.

.....

c) Exprimer i_2 en fonction de u_e et R.

.....

d) Exprimer l'intensité i_3 en fonction de u_e et C .....

e) Écrire la loi des mailles vérifiée par la partie de droite du montage délimitée par des tirets.

.....

f) Dériver cette relation et donner la relation liant $\dfrac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}t}$, $\dfrac{\mathrm{d}u_s}{\mathrm{d}t}$, i_1, $\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$, R et C.

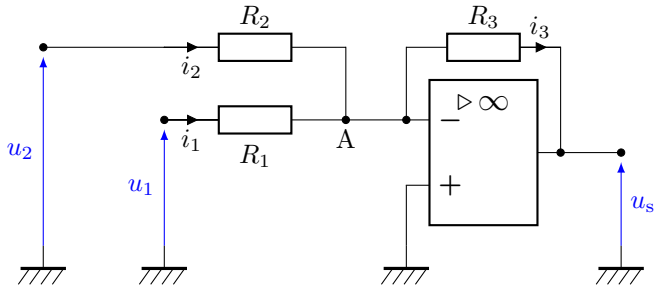
.....

g) En déduire une équation différentielle liant R, C, $\dfrac{\mathrm{d}u_s}{\mathrm{d}t}$, $\dfrac{\mathrm{d}^2u_e}{\mathrm{d}t^2}$, $\dfrac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}t}$ et u_e.

.....

Entraînement 18.5 — Montage sommateur inverseur.

L'amplificateur linéaire intégré suivant est idéal et fonctionne en régime linéaire.



a) Exprimer la loi des nœuds au point A en fonction des intensités i_1, i_2 et i_3.

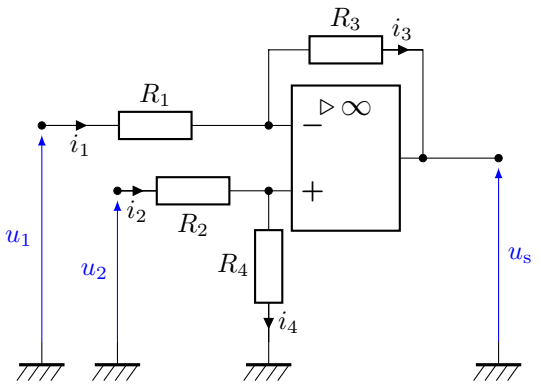
.....

b) À l'aide de l'expression précédente, déterminer une relation liant les tensions u_1, u_2 et u_s ainsi que les résistances R_1, R_2 et R_3.

.....

Entraînement 18.6 — Montage soustracteur.

L'amplificateur linéaire intégré suivant est idéal et fonctionne en régime linéaire.



a) Donner la relation entre les intensités i_1 et i_3 .....

b) Donner la relation entre les intensités i_2 et i_4 .....

c) Exprimer le potentiel V_+ en fonction de R_2, R_4 et u_2, à l'aide d'un pont diviseur de tension.

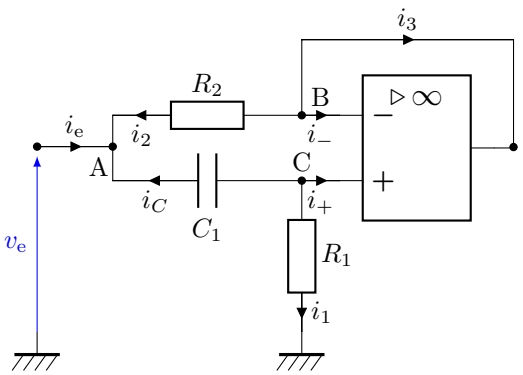
.....

d) Exprimer le potentiel V_- en fonction de R_1, R_3, u_1 et u_s, à l'aide d'un autre pont diviseur de tension.

.....

Entraînement 18.7 — Impédance d'un dipôle.

On considère le montage suivant dans lequel l'ALI est idéal et fonctionne en régime linéaire.



On se place en régime sinusoïdal forcé de pulsation ω.

a) Exprimer la loi des nœuds au point A en fonction des courants donnés sur le schéma.

.....

b) Exprimer la loi des nœuds au point C en fonction des courants donnés sur le schéma.

.....

c) En écrivant la loi d'Ohm en notation complexe sur R_2 et C_1, en déduire une relation entre v_e, V_B, V_C, i_e, C_1, R_2 et ω.

.....

On cherche désormais à établir l'expression de l'impédance d'entrée du montage. Pour cela, il faut simplifier l'équation obtenue.

d) Quelle(s) relation(s) supplémentaire(s) est-il alors intéressant d'utiliser ?

(a) La loi des nœuds en B
(b) La loi des nœuds en C
(c) $V_B = v_s$
(d) $V_B = V_C$

.....

e) Pourquoi n'est-il pas intéressant d'écrire la loi des nœuds en B ?

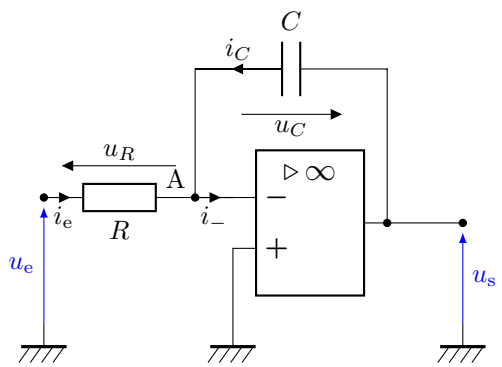
(a) Le point B est relié à la borne $\ominus$.
(b) Le courant i_3 est nul.
(c) Le courant i_3 est inconnu.

.....

Filtrage

Entraînement 18.8 — Étude d'un montage intégrateur.

On considère le montage intégrateur ci-dessous. L'ALI est idéal et fonctionne en régime linéaire.



a) À l'aide d'une des propriétés de l'ALI idéal en régime linéaire, exprimer le potentiel V_-.

.....

b) Exprimer une relation entre $\underline{u_e}$ et $\underline{u_s}$ à l'aide d'une loi des nœuds en notation complexe au point A.

.....

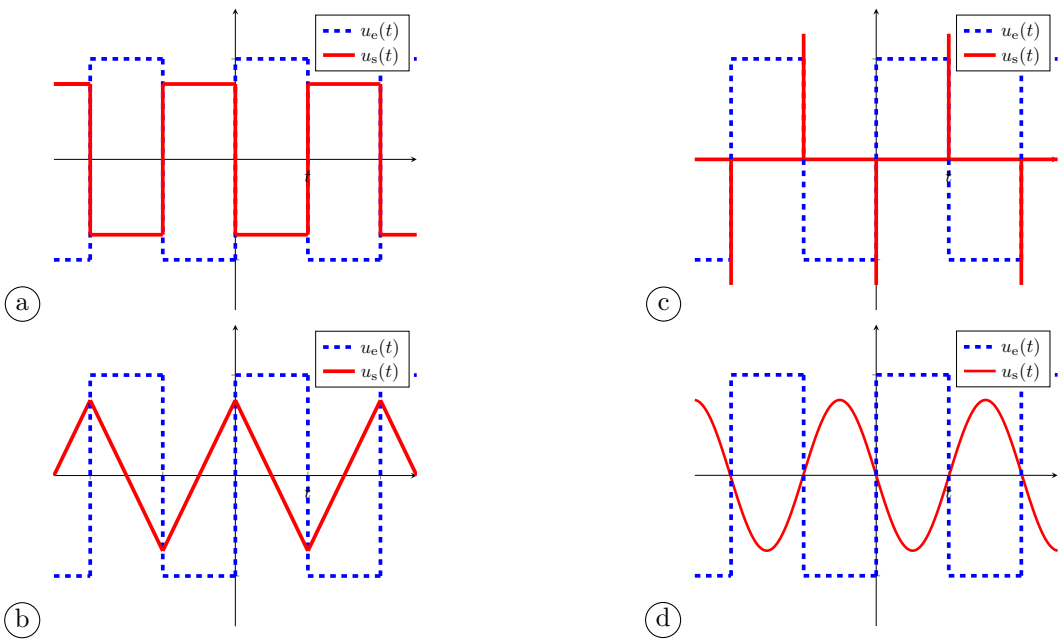
c) En déduire l'expression de la fonction de transfert du montage $\underline{H} = \dfrac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}}$.

.....

d) Donner l'équation différentielle qui relie $u_e(t)$ et $u_s(t)$ .....

e) On envoie un signal créneau (en pointillés) en entrée du montage intégrateur.

Parmi les courbes de sortie (en traits pleins) suivantes, laquelle est compatible avec ce montage ?

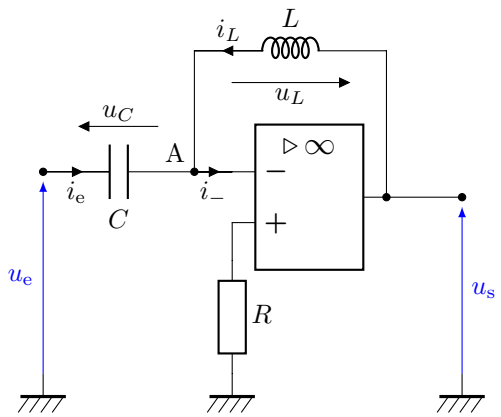


.....

f) Exprimer l'impédance d'entrée $\underline{Z_e} = \dfrac{\underline{u_e}}{\underline{i_e}}$ du montage .....

Entraînement 18.9 — Étude d'un montage dérivateur.

On considère le montage dérivateur ci-dessous. L'ALI est idéal et fonctionne en régime linéaire.



a) À l'aide des propriétés de l'ALI idéal en régime linéaire, exprimer le potentiel V_-.

.....

b) Exprimer une relation entre $\underline{u_e}$ et $\underline{u_s}$ à l'aide d'une loi des nœuds en notation complexe au point A.

.....

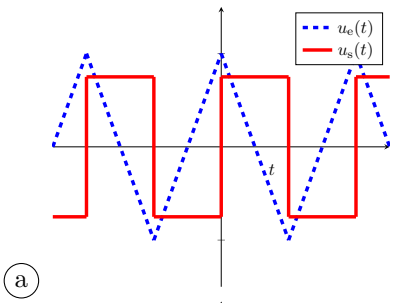
c) En déduire l'expression de la fonction de transfert du montage $\underline{H} = \dfrac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}}$.

.....

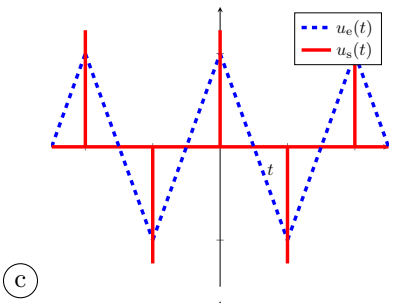
d) Exprimer l'équation différentielle qui relie $u_e(t)$ et $u_s(t)$ .....

e) On envoie un signal triangulaire (en pointillés) en entrée du montage dérivateur.

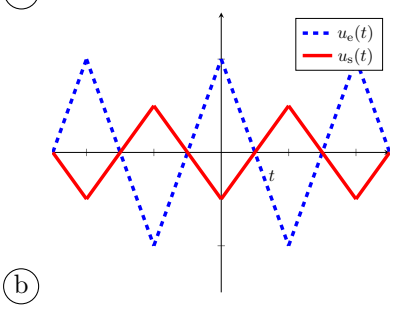
Parmi les courbes de sortie (en traits pleins) suivantes, laquelle est compatible avec ce montage ?



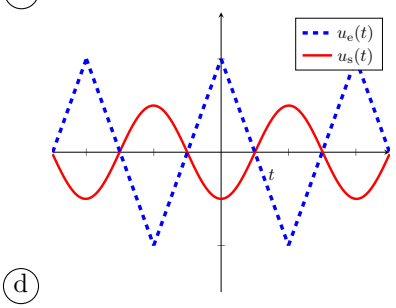
(a)



(c)



(b)



(d)

.....

f) Exprimer l'impédance d'entrée $\underline{Z_e} = \dfrac{\underline{u_e}}{\underline{i_e}}$ du montage .....

Entraînement 18.10 — Étude qualitative à hautes et basses fréquences (I).

On considère le même montage que dans l'entraînement **18.7**, où l'ALI est considéré idéal et fonctionne en régime linéaire.

a) En modélisant le condensateur par un interrupteur ouvert ou fermé, à quel dipôle le montage est-il équivalent à basses fréquences ?

(a) R_1 (c) C_1
(b) R_2

.....

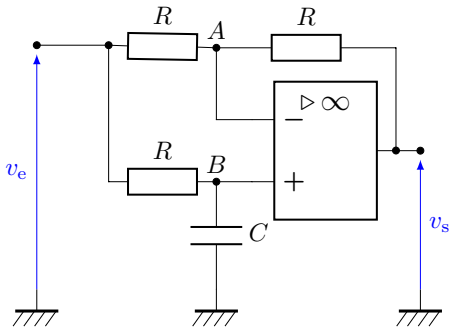
b) En modélisant le condensateur par un interrupteur ouvert ou fermé, à quel dipôle le montage est-il équivalent à hautes fréquences ?

(a) R_1 (c) C_1
(b) R_2

.....

Entraînement 18.11 — Étude qualitative à hautes et basses fréquences (II).

On considère maintenant le montage déphaseur suivant où l'ALI est toujours considéré idéal et fonctionne en régime linéaire.



a) En modélisant le condensateur par un interrupteur ouvert ou fermé, quelle relation lie v_s et v_e à basses fréquences ?

.....

b) En modélisant le condensateur par un interrupteur ouvert ou fermé, quelle relation lie v_s et v_e à hautes fréquences ?

.....

Entraînement 18.12 — Montage déphaseur.

On considère un filtre déphaseur, contenant un ALI, pour lequel on donne l'expression de la fonction de transfert :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{v_s}}{\underline{v_e}} = \frac{1 - \mathrm{j}RC\omega}{1 + \mathrm{j}RC\omega}.$$

a) Quelle est la fonction de transfert équivalente à basses fréquences ? .....

b) Quelle est la fonction de transfert équivalente à hautes fréquences ? .....

c) Exprimer le gain du montage .....

d) Exprimer le déphasage du montage en fonction de R, C et ω .....

On donne $R = 800\,\Omega$ et $C = 100\,\mathrm{nF}$.

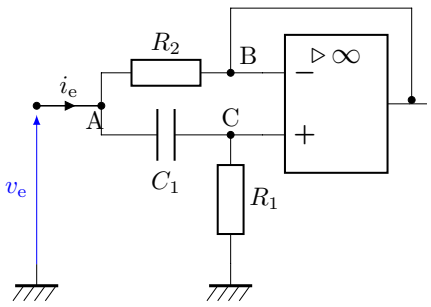
e) On envoie une tension de la forme $v_e(t) = E\cos(\omega t)$ de fréquence $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = 2{,}0\,\mathrm{kHz}$ et $E = 1{,}0\,\mathrm{V}$. Donner l'expression de la tension de sortie v_s.

.....

Autres entraînements

Entraînement 18.13 — Impédance d'un dipôle.

On revient de nouveau sur le montage ci-dessous où l'ALI est idéal et fonctionne en régime linéaire.



On donne l'expression de l'impédance d'entrée du dipôle :

$$\underline{Z}(\omega) = R_2 \frac{1 + \mathrm{j}R_1C_1\omega}{1 + \mathrm{j}R_2C_1\omega}.$$

a) À quel dipôle le montage est-il équivalent à basses fréquences ?

.....

b) À quel dipôle le montage est-il équivalent à hautes fréquences ?

.....

c) On peut mettre en évidence deux pulsations caractéristiques ω_1 et ω_2 dans cette impédance. Donner leurs expressions en fonction de R_1, R_2 et C_1.

.....

On considère que R_1 et R_2 sont telles que $\omega_1 \ll \omega_2$.

d) À quel dipôle le montage est-il équivalent à pulsations intermédiaires ($\omega_1 < \omega \ll \omega_2$) ?

(a) une résistance et une bobine en série
(b) une résistance et un condensateur en parallèle
(c) une résistance et un condensateur en série
(d) une résistance

.....

Réponses mélangées

$i_1 = i_2 + i_3$ (a) $u_e(t) + RC\frac{\mathrm{d}u_s}{\mathrm{d}t}(t) = 0$ (b) $\frac{V_D - V_A}{R_1} = i_2' = C_2\frac{\mathrm{d}V_A}{\mathrm{d}t}$

(c) $-\frac{1}{\mathrm{j}RC\omega}$ $\frac{\mathrm{d}u_s}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{i_1}{C} + \frac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}t}$ $\frac{u_1}{R_1} = \frac{u_s}{R_1 + R_2}$ (b) et (d)

$i_1 = i_3$ R_1 $-2\arctan(RC\omega)$ $\frac{u_1}{R_1} = \frac{u_2}{R_2} + C_1\frac{\mathrm{d}u_1'}{\mathrm{d}t}$ $i_3 = C\frac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}t}$ $\frac{1}{\mathrm{j}C\omega}$

$V_+ = \frac{R_4}{R_2 + R_4}u_2$ $i_2 + i_4 = 0$ $LC\omega^2$ $\mathrm{j}C\omega\underline{u_e} + \frac{\underline{u_s}}{\mathrm{j}L\omega} = 0$ $i_2 = \frac{u_e}{R}$

(a) $E\sin(\omega t)$ $i_5 + i_6 = 0$ $v_s = -v_e$ $V_- = \frac{R_3}{R_1 + R_3}u_1 + \frac{R_1}{R_1 + R_3}u_s$

$-i_e + \frac{v_e - V_B}{R_2} + \mathrm{j}\omega C_1(v_e - V_C) = 0$ (b) (c) R_2 1 -1 (c)

R $u_s = u_R + u_C + u_e = Ri_1 + u_C + u_e$ $\frac{u_1}{R_1} + \frac{u_2}{R_2} = -\frac{u_s}{R_3}$ $i_1 = -i_2'$ (b)

$\frac{\underline{u_e}}{R} + \mathrm{j}C\omega\underline{u_s} = 0$ (a) 0 (b) $i_C + i_1 = 0$ 0 (b) $i_1 + i_2 = i_3$

$\frac{\mathrm{d}u_s}{\mathrm{d}t} = RC\frac{\mathrm{d}^2u_e}{\mathrm{d}t^2} + 3\frac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}u_e$ $i_2 = i_4$ $v_s = v_e$ 1 $u_s(t) = -LC\frac{\mathrm{d}^2u_e}{\mathrm{d}t^2}$

$i_1 = i_2 + i_1'$ (c) $\omega_1 = \frac{1}{R_1C_1}$ et $\omega_2 = \frac{1}{R_2C_1}$ (a) $i_e + i_C + i_2 = 0$

► Réponses et corrigés page 392

ALI saturé

Prérequis
Modèle de l'ALI idéal de gain infini : courants de polarisation nuls, tension différentielle nulle en régime linéaire. Stabilité des systèmes linéaires (équation différentielle du deuxième ordre). Conditions suffisantes de saturation de l'ALI : absence de rétroaction ou rétroaction positive.

Constantes utiles

→ Gain de l'ALI : $\mu_0 \approx 10^5$

→ Tension de saturation de l'ALI : $V_{\text{sat}} = 15\,\text{V}$

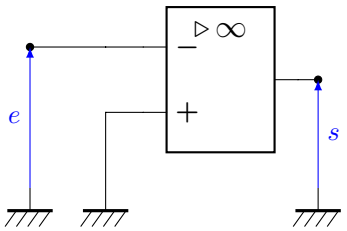
→ Vitesse limite de balayage : $\left.\frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t}\right|_{\text{lim}} \approx 10\,\text{V/µs}$

Avant toute chose

Entraînement 19.1 — ALI en régime saturé.

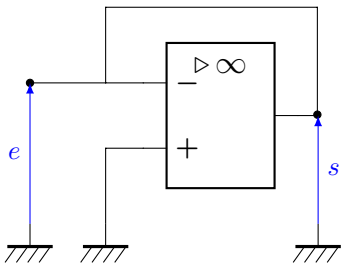
Parmi les montages suivants, indiquer si l'ALI utilisé est en régime saturé de manière certaine.

a)



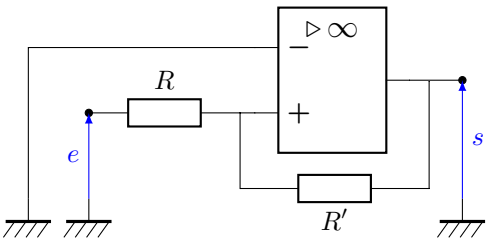
.....

b)



.....

c)



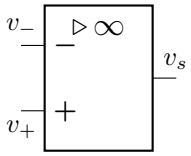
.....

Utilisation du modèle du premier ordre

Entraînement 19.2 — Modèle du premier ordre.

Pour étudier la stabilité d'un montage à ALI, il faut passer par son modèle du premier ordre. On donne l'équation différentielle reliant le potentiel de sortie s à ceux des deux entrées v_+ et v_- :

$$\tau\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}+s=\mu_0(v_+-v_-)$$



a) Écrire la fonction de transfert définie en régime harmonique par $\underline{\mu}=\dfrac{\underline{s}}{\underline{v_+}-\underline{v_-}}$.

.....

b) Identifier le type de filtre associé ; c'est un filtre...

(a) passe-bas
(b) passe-haut
(c) passe-bande
(d) coupe-bande

.....

c) Quelle est l'expression de la pulsation de coupure de ce filtre ω_c ? .....

d) Quelle est l'expression du gain statique de ce filtre H_0 ? .....

e) Quelle est la fonction de transfert équivalente du filtre à basse fréquence ?

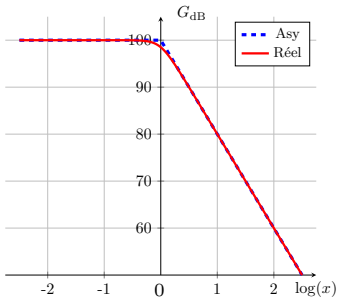
.....

f) Quelle est la fonction de transfert équivalente du filtre à haute fréquence ?

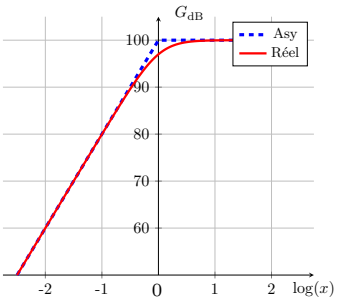
.....

g) Parmi les diagrammes de Bode suivants, lequel correspond à celui de $\underline{\mu}$?

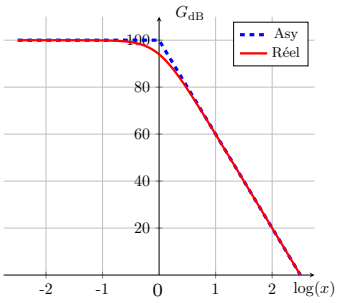
On a noté $x=\dfrac{\omega}{\omega_c}$; l'abréviation « Asy » correspond au diagramme asymptotique.



(1)



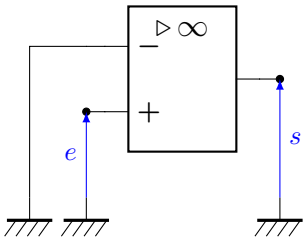
(2)



(3)

.....

Entraînement 19.3 — Stabilité de l'ALI d'un comparateur simple.



On rappelle, pour les besoins de l'exercice, la fonction de transfert entre le potentiel de sortie $\underline{s}$ et l'entrée différentielle $\underline{v_+} - \underline{v_-}$ de l'ALI :

$$\underline{\mu} = \frac{\underline{s}}{\underline{v_+} - \underline{v_-}} = \frac{\mu_0}{1 + \mathrm{j}\omega\tau}.$$

a) Établir l'équation différentielle reliant s à e en régime linéaire.

.....

b) On considère une entrée nulle avant $t = 0$ et constante de valeur E_0 pour $t > 0$.

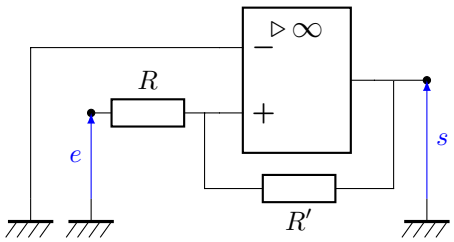
Quelle est l'expression de s en régime permanent ?

(a) $\tau\mu_0 E_0$ (b) 0 (c) $\mu_0 E_0$

.....

c) Cet ALI peut-il fonctionner en régime linéaire ? .....

Entraînement 19.4 — Stabilité de l'ALI d'un comparateur à hystérésis.



On rappelle, pour les besoins de l'exercice, la fonction de transfert entre le potentiel de sortie $\underline{s}$ et l'entrée différentielle $\underline{v_+} - \underline{v_-}$ de l'ALI :

$$\underline{\mu} = \frac{\underline{s}}{\underline{v_+} - \underline{v_-}} = \frac{\mu_0}{1 + \mathrm{j}\omega\tau}.$$

a) À l'aide d'une loi des nœuds appliquée à l'entrée non inverseuse, déterminer laquelle de ces relations est valide.

(a) $\dfrac{v_+ - e}{R} + \dfrac{v_+ - s}{R'} = 0$ (c) $\dfrac{e}{R} + \dfrac{s}{R'} = 0$

(b) $e = s$

.....

b) Exprimer la tension différentielle $\varepsilon = v_+ - v_-$ .....

c) Établir l'équation différentielle reliant s à e en régime linéaire.

.....

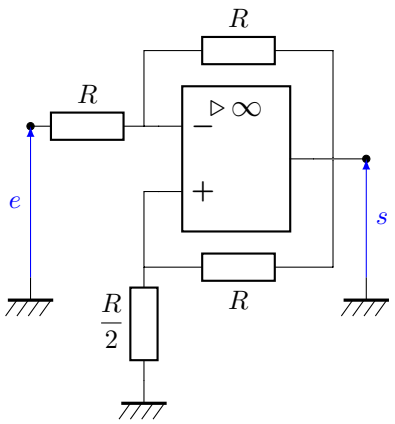
d) Cet ALI peut-il fonctionner en régime linéaire ? .....

Entraînement 19.5 — Stabilité de l'ALI du montage « résistance négative ».

On rappelle, pour les besoins de l'exercice, la fonction de transfert entre le potentiel de sortie $\underline{s}$ et l'entrée différentielle $\underline{v_+} - \underline{v_-}$ de l'ALI :

$$\underline{\mu} = \frac{\underline{s}}{\underline{v_+} - \underline{v_-}} = \frac{\mu_0}{1 + \mathrm{j}\omega\tau}.$$

On considère le montage suivant :



a) À l'aide d'une loi des nœuds appliquée à l'entrée inverseuse, déterminer laquelle parmi les relations suivantes est valide.

(a) $v_- = e + s$

(b) $v_- = \dfrac{e+s}{R}$

(c) $v_- = \dfrac{e+s}{2}$

.....

b) À l'aide d'une loi des nœuds appliquée à l'entrée non inverseuse, déterminer laquelle de ces relations est valide.

(a) $3v_+ = s$

(b) $\dfrac{v_+ - s}{R} + 2\dfrac{v_+ - e}{R} = 0$

(c) $3v_+ = e + s$

.....

c) Exprimer la tension différentielle $\varepsilon = v_+ - v_-$ .....

d) Établir l'équation différentielle reliant s à e en régime linéaire.

.....

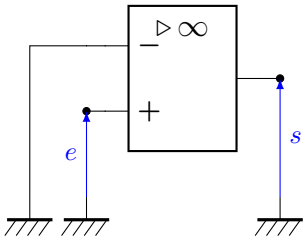
e) Cet ALI peut-il fonctionner en régime linéaire ? .....

Exploitation de caractéristiques

Entraînement 19.6 — Condition de basculement (I).

On considère le montage comparateur simple.

On rappelle que la saturation haute d'un ALI est caractérisée par un potentiel de sortie $s = V_{\text{sat}}$ et une tension différentielle $\varepsilon = v_+ - v_-$ positive. De même, la saturation basse d'un ALI est caractérisée par un potentiel de sortie $s = -V_{\text{sat}}$ et une tension différentielle ε négative.



a) Exprimer v_+ en fonction de e .....

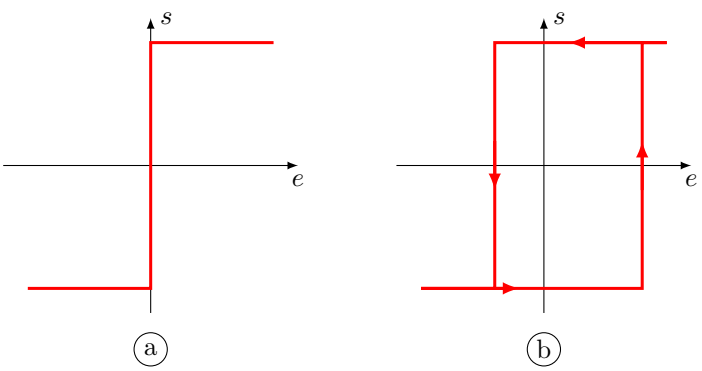
b) En saturation haute, quelle condition sur e assure de rester dans cet état de saturation ?

.....

c) En saturation basse, quelle condition sur e assure de rester dans cet état de saturation ?

.....

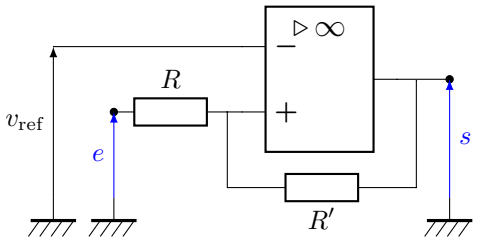
d) Laquelle des deux caractéristiques suivantes correspond à celle du montage comparateur simple ?



.....

Entraînement 19.7 — Condition de basculement (II).

On considère le montage comparateur à hystérésis à double seuil. On rappelle que la saturation haute d'un ALI est caractérisée par un potentiel de sortie $s = V_{\text{sat}}$ et une tension différentielle $\varepsilon = v_+ - v_- > 0$. De même, la saturation basse d'un ALI est caractérisée par un potentiel de sortie $s = -V_{\text{sat}}$ et une tension différentielle $\varepsilon = v_+ - v_- < 0$.



a) Exprimer v_+ en fonction de R, R', s et e .....

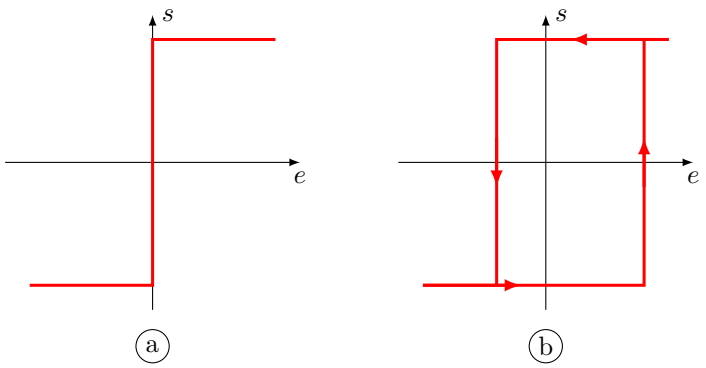
b) En saturation haute, quelle relation lie les paramètres R, R', e, V_{sat} et $v_{\text{réf}}$?

.....

c) En saturation basse, quelle relation lie les paramètres R, R', e, V_{sat} et $v_{\text{réf}}$?

.....

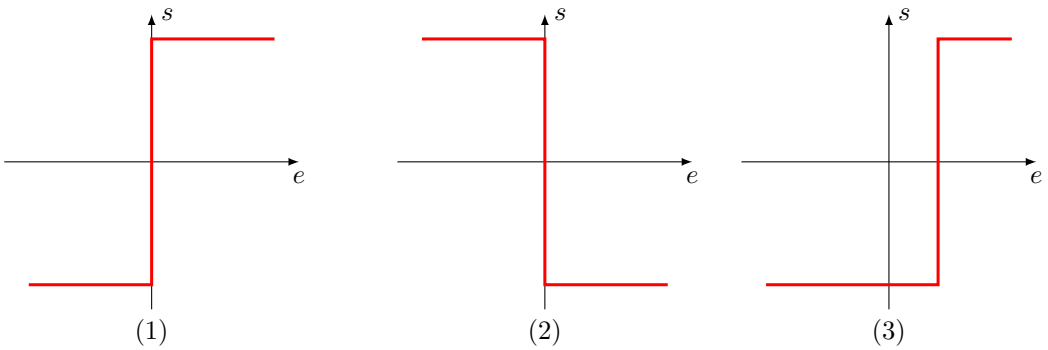
d) Laquelle des deux caractéristiques suivantes correspond à celle du montage comparateur à hystérésis à double seuil ?



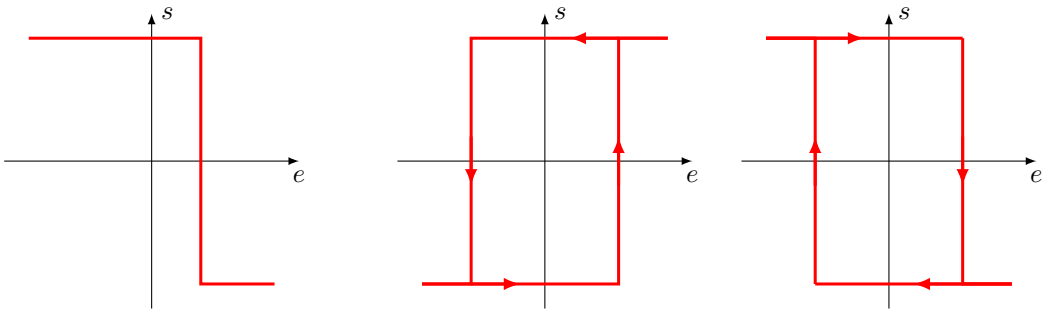
.....

Entraînement 19.8 — Association caractéristiques/chronogrammes.

On considère des montages à ALI fonctionnant en régime saturé. Les relations entre leurs tensions d'entrée e et de sortie s sont représentées sur les caractéristiques suivantes :

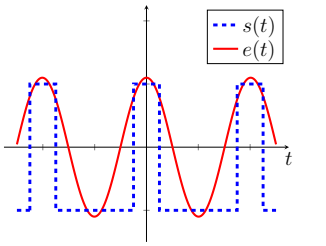


(1) (2) (3)

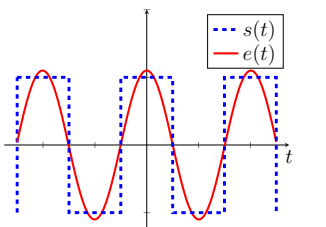


(4) (5) (6)

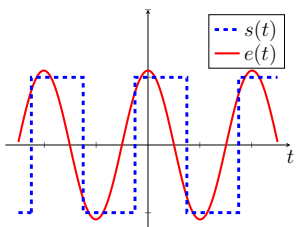
Associer un chronogramme à chacune des caractéristiques données ci-dessus.



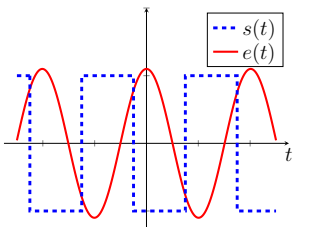
a) .....



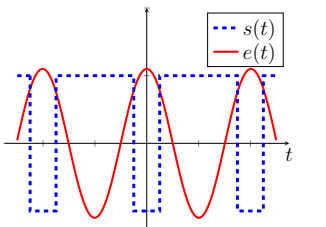
b) .....



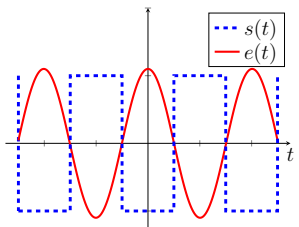
c) .....



d) .....



e) .....

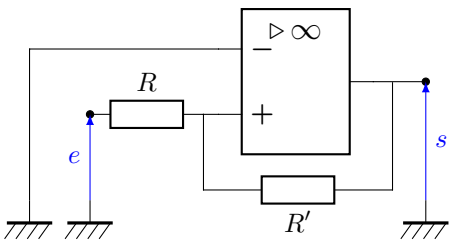


f) .....

Approche expérimentale

Entraînement 19.9 — Étude expérimentale du comparateur à hystérésis.

On considère un montage comparateur à hystérésis dont le circuit est donné ci-contre. On rappelle que l'ALI bascule d'une saturation à l'autre lorsque la tension d'entrée atteint une valeur limite $\pm V_{\text{lim}}$ telle que :

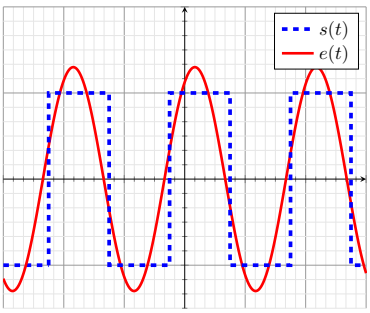


$$V_{\text{lim}} = \frac{R}{R'} V_{\text{sat}},$$

où V_{sat} est la tension de saturation positive de l'ALI.

On connaît $R = 100\,\Omega$ et on cherche à mesurer la valeur de R'.

Une première acquisition donne le chronogramme ci-contre :



- Échelle verticale :
  - ▷ pour $e(t)$ 1 carreau ↔ 5 V ;
  - ▷ pour $s(t)$ 1 carreau ↔ 15 V.
- Échelle horizontale : 1 carreau ↔ 10 µs.

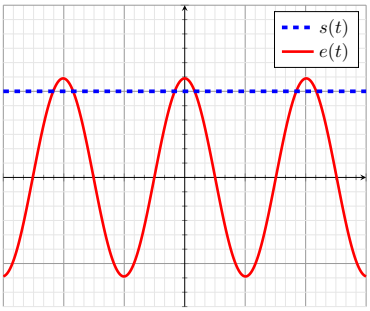
a) Quelle est la valeur de la tension de saturation de l'ALI ?

.....

b) Pour quelle valeur de la tension d'entrée l'état de saturation bascule-t-il ? .....

c) En déduire la valeur de R' .....

Une deuxième acquisition donne le chronogramme ci-contre :



- Échelle verticale :
  - ▷ pour $e(t)$ 1 carreau ↔ 1 V ;
  - ▷ pour $s(t)$ 1 carreau ↔ 15 V.
- Échelle horizontale : 1 carreau ↔ 10 µs.

d) Pourquoi l'ALI reste-t-il bloqué en saturation haute ?

(a) La tension d'entrée n'atteint jamais la valeur $\pm V_{\text{sat}}$.

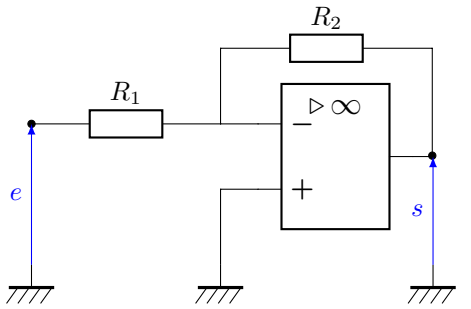
(b) La tension d'entrée n'est pas suffisante pour saturer en courant de sortie.

(c) La tension d'entrée n'atteint jamais la valeur $\pm V_{\text{lim}}$.

.....

Entraînement 19.10 — Chronogrammes.

On considère le montage amplificateur inverseur ci-contre pour lequel les résistances valent $R_1 = 1{,}0\,\text{k}\Omega$ et $R_2 = 10\,\text{k}\Omega$.

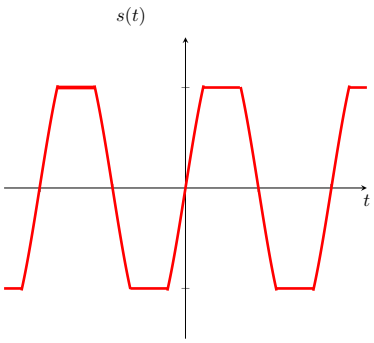


La loi entrée-sortie du montage est donnée par :

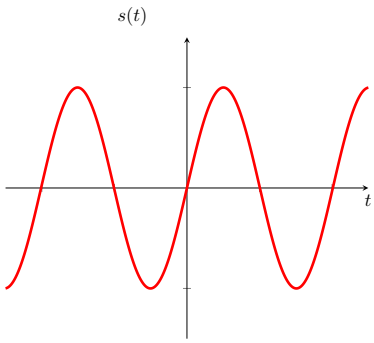
$$\frac{s}{e} = -\frac{R_2}{R_1}.$$

Ce montage est alimenté par une tension e sinusoïdale d'amplitude U et de fréquence f.

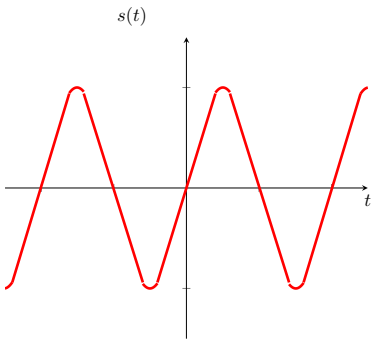
On considère les chronogrammes suivants :



(1)



(2)



(3)

a) Lequel de ces signaux ne présente pas de saturation ?

.....

Associer les chronogrammes précédents aux paramètres d'alimentation donnés ci-après.

b) $U = 1{,}0\,\text{V}$ et $f = 1{,}0\,\text{kHz}$

.....

c) $U = 2{,}0\,\text{V}$ et $f = 1{,}0\,\text{kHz}$

.....

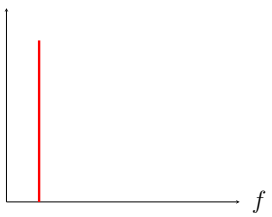
d) $U = 1{,}0\,\text{V}$ et $f = 10\,\text{MHz}$

.....

On rappelle que plus un signal présente de discontinuités de tensions, plus son spectre est riche en hautes fréquences.

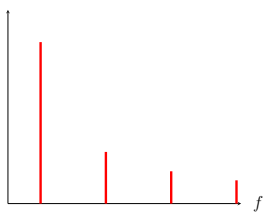
Associer les spectres suivants aux chronogrammes donnés précédemment.

e)



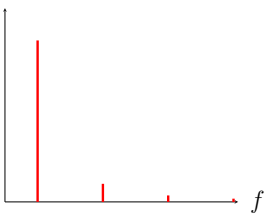
.....

f)



.....

g)



.....

Réponses mélangées

(1) (3) $\varepsilon = -\dfrac{3e+s}{6}$ $e > 0$ $900\,\Omega$ (5) (a) μ_0

$e < v_{\text{réf}}\dfrac{R+R'}{R'} + V_{\text{sat}}\dfrac{R}{R'}$ (3) $2\,\text{V}$ (2) (2) $e > v_{\text{réf}}\dfrac{R+R'}{R'} - V_{\text{sat}}\dfrac{R}{R'}$

$v_+ = e$ μ_0 (c) (6) (3) (1) (a) $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \dfrac{s}{\tau} = \dfrac{\mu_0 e}{\tau}$ (2)

(1) (c) $\dfrac{1}{\tau}$ (1) $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \dfrac{R+R'-\mu_0 R}{R+R'}\dfrac{s}{\tau} = \mu_0\dfrac{R'}{R+R'}\dfrac{e}{\tau}$ oui $15\,\text{V}$

$\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \left(\dfrac{\mu_0}{6}+1\right)\dfrac{s}{\tau} = -\mu_0\dfrac{e}{2\tau}$ (a) (2) $v_+ = \dfrac{R'e+Rs}{R+R'}$ (c) oui $e < 0$

oui non (a) $\dfrac{eR'+sR}{R+R'}$ $-\text{j}\mu_0\dfrac{\omega_c}{\omega}$ $\dfrac{\mu_0}{1+\text{j}\omega\tau}$ (4) non non (b)

► Réponses et corrigés page 397

Oscillateurs électroniques

Prérequis
Propriétés de l'amplificateur linéaire intégré (ALI) idéal en régime linéaire.

Équations différentielles et complexes

La pulsation d'un signal sinusoïdal est notée ω. Les grandeurs ω_0, τ, R, L, C et A sont des constantes.

Entraînement 20.1 — Des équations complexes aux équations différentielles.

Pour chacune des équations complexes suivantes, exprimer l'équation différentielle associée.

a) $\mathrm{j}\omega\underline{u} + \dfrac{\underline{u}}{\tau} = 0$

.....

b) $\dfrac{\mathrm{j}\omega}{\tau}\underline{u} + \omega_0^2\underline{u} + (\mathrm{j}\omega)^2\underline{u} = 0$

.....

c) $\mathrm{j}RC\omega\underline{u} + \omega_0^2\underline{u} + \omega^2\underline{u} = A$

.....

d) $\dfrac{1}{\omega_0\tau}\underline{u} - \mathrm{j}\dfrac{\omega_0}{\omega}\underline{u} + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_0}\underline{u} = A$

.....

Entraînement 20.2 — Des équations différentielles aux équations complexes.

Pour chacune des équations différentielles suivantes, exprimer l'équation complexe associée.

a) $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{i}{RC}$

.....

b) $\dfrac{1}{\tau}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L^2C^2i - \dfrac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} = A$

.....

Conditions d'oscillations

Entraînement 20.3 — Type de filtre.

a) Pour réaliser un oscillateur quasi sinusoïdal, quel filtre faut-il utiliser préférentiellement ?

(a) passe-haut (c) passe-bande (e) peu importe
(b) passe-bas (d) coupe-bande (f) aucun ne convient

.....

b) Avec l'aide de quel autre montage ce filtre doit-il être bouclé ?

(a) comparateur à hystérésis (c) passe-bande (e) amplificateur
(b) passe-bas (d) filtre passe-haut (f) aucun ne convient

.....

Entraînement 20.4 — Stabilité.

On considère des systèmes décrits par les équations différentielles suivantes. Les constantes ω_0, τ et Q sont réelles positives. Indiquer dans chaque cas si l'équation décrit un système stable ou instable.

a) $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u}{\tau} = 0$

(a) stable
(b) instable

.....

b) $-\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u}{\tau} = 0$

(a) stable
(b) instable

.....

c) $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u = 0$

(a) stable
(b) instable

.....

d) $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} - \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u = 0$

(a) stable
(b) instable

.....

Entraînement 20.5 — Critère d'oscillations sinusoïdales (critère de Barkhausen).

On considère un oscillateur constitué d'un filtre passe-bande et d'un amplificateur bouclés l'un sur l'autre.

La fonction de transfert de l'amplificateur est $\underline{H_\mathrm{a}} = A$ et celle du filtre est $\underline{H_\mathrm{f}} = \dfrac{H_0}{1 + \mathrm{j}Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$.

L'équation différentielle associée s'écrit alors : $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}(1 - H_0A)\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u = 0$.

a) Pour que des oscillations apparaissent, indiquer l'état que doit avoir le montage bouclé.

(a) stable (b) instable

.....

b) Indiquer la condition pratique de démarrage des oscillations.

(a) $H_0A > 1$ (b) $H_0A = 1$ (c) $H_0A < 1$

.....

c) Que vaut alors la pulsation des oscillations si celles-ci sont quasi sinusoïdales ?

(a) $\omega_0(1 - H_0A)$ (b) $\dfrac{\omega_0(1 - H_0A)}{Q}$ (c) ω_0

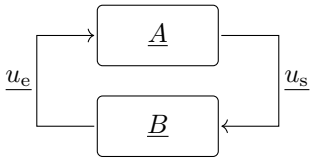
.....

d) Quelles sont les conditions pour que le système soit le siège d'oscillations **parfaitement** sinusoïdales ?

(a) $H_0A > 1$ et $\omega = \omega_0$
(b) $H_0A = 1$ et $\omega = \omega_0$
(c) $H_0A < 1$ et $\omega = \omega_0$
(d) $H_0A > 1$ et $\omega \neq \omega_0$
(e) $H_0A = 1$ et $\omega \neq \omega_0$
(f) $H_0A < 1$ et $\omega \neq \omega_0$

.....

Entraînement 20.6 — Chaîne de rétroaction.



On considère le montage ci-contre.

Pour chaque affirmation, répondre par « vrai » ou « faux ».

a) $\underline{u}_s = \underline{A}\,\underline{u}_e$ et $\underline{u}_e = \underline{B}\,\underline{u}_s$ .....

b) $\underline{u}_e = \underline{A}\,\underline{u}_s$ et $\underline{u}_s = \underline{B}\,\underline{u}_e$ .....

Le critère de Barkhausen correspond à la limite de la convergence et de la divergence des oscillations.

On en déduit un gain de boucle $\underline{AB}$ qui doit alors être égal à l'unité.

c) Parmi les propositions suivantes, indiquer celle qui est correcte.

(a) $|\underline{A}||\underline{B}| = 0$ et $\arg(\underline{A}) + \arg(\underline{B}) \equiv 0\ [2\pi]$

(b) $|\underline{A}||\underline{B}| = 1$ et $\arg(\underline{A}) + \arg(\underline{B}) \equiv 0\ [2\pi]$

(c) $|\underline{A}||\underline{B}| = 1$ et $\arg(\underline{A}) \times \arg(\underline{B}) \equiv 0\ [2\pi]$

(d) $|\underline{A}||\underline{B}| = 0$ et $\arg(\underline{A}) \times \arg(\underline{B}) \equiv 0\ [2\pi]$

.....

Oscillateur à pont de Wien

Entraînement 20.7 — Oscillateur à pont de Wien.

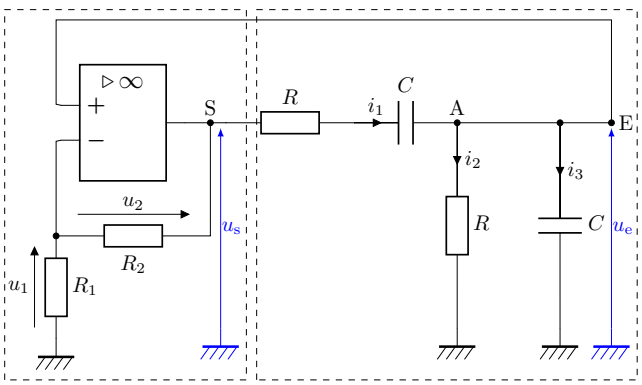
a) Pour observer des oscillations avec ce circuit, comment l'ALI doit-il fonctionner ?

(a) en régime linéaire

(b) en régime saturé

(c) alternativement en régime linéaire et saturé

.....



b) Le pont diviseur de tension du cadre de gauche permet d'écrire une relation entre u_1 et u_s.

Écrire cette relation en posant $A = \dfrac{R_1 + R_2}{R_1}$ .....

c) Quelle est l'impédance équivalente $\underline{Z_1}$ du système $\{R - C\}$ série situé entre S et A ?

(a) $R + \underline{Z_C}$ (b) $\dfrac{R\underline{Z_C}}{R + \underline{Z_C}}$ (c) $\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{\underline{Z_C}}$ (d) $\dfrac{1}{R + \underline{Z_C}}$

.....

d) Quelle est l'impédance équivalente $\underline{Z_2}$ du système $\{R-C\}$ série parallèle situé entre AE et la masse ?

(a) $R+\underline{Z_C}$ (b) $\dfrac{R\underline{Z_C}}{R+\underline{Z_C}}$ (c) $\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{\underline{Z_C}}$ (d) $\dfrac{1}{R+\underline{Z_C}}$

.....

e) En utilisant des impédances équivalentes $\underline{Z_1}$ et $\underline{Z_2}$, déterminer le rapport $\dfrac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}}$ en fonction de $\underline{Z_C}$ et R.

.....

f) Parmi les équations suivantes, déterminer celle qui est vérifiée par u_s.

(a) $\left[(\mathrm{j}\omega)^2-\dfrac{1}{R^2C^2}+\dfrac{\mathrm{j}\omega}{RC}(3-A)\right]\underline{u_s}=0$

(b) $\left[(\mathrm{j}\omega)^2+\dfrac{1}{R^2C^2}-\dfrac{\mathrm{j}\omega}{RC}(3-A)\right]\underline{u_s}=0$

(c) $\left[(\mathrm{j}\omega)^2-\dfrac{1}{R^2C^2}-\dfrac{\mathrm{j}\omega}{RC}(3-A)\right]\underline{u_s}=0$

(d) $\left[(\mathrm{j}\omega)^2+\dfrac{1}{R^2C^2}+\dfrac{\mathrm{j}\omega}{RC}(3-A)\right]\underline{u_s}=0$

.....

g) Transposer l'équation complexe précédente et en déduire une équation différentielle portant sur $u_s(t)$.

.....

Entraînement 20.8 — Conditions d'oscillations.

Pour l'oscillateur à pont de Wien précédent, on donne l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\mathrm{d}^2u_s}{\mathrm{d}t^2}+\frac{3-A}{RC}\frac{\mathrm{d}u_s}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{R^2C^2}u_s=0.$$

a) Indiquer la condition théorique pour obtenir des oscillations sinusoïdales.

(a) $A=3$ (b) $A<3$ (c) $A>3$

.....

b) Dans ce cas, indiquer la fréquence de ces oscillations sinusoïdales.

(a) $\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{(3-A)}{RC}}$ (c) $\dfrac{RC}{2\pi(3-A)}$ (e) $\dfrac{1}{2\pi RC}$

(b) $\dfrac{(3-A)}{2\pi RC}$ (d) $\dfrac{2\pi(3-A)}{RC}$ (f) $\dfrac{1}{2\pi\sqrt{RC}}$

.....

c) Si $A<3$, indiquer le comportement ultérieur.

(a) oscillations amorties
(b) saturation
(c) oscillations sinusoïdales

.....

d) Si $A>3$, indiquer le comportement ultérieur.

(a) oscillations amorties
(b) saturation
(c) oscillations sinusoïdales

.....

Oscillateurs à relaxation

Entraînement 20.9 — Multivibrateur astable.

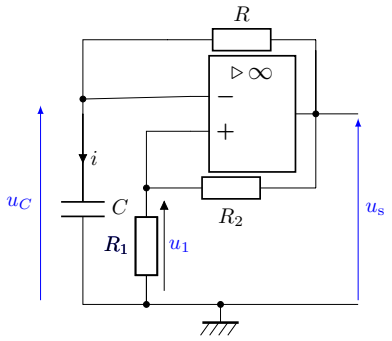
Dans le circuit ci-contre, l'amplificateur linéaire intégré (ALI) est supposé idéal.

a) *A priori*, quel est le régime de fonctionnement de l'ALI ?

(a) régime linéaire (c) impossible de répondre

(b) régime saturé

.....



Supposons que l'ALI fonctionne en régime saturé avec, à l'instant initial $t = 0$, $u_s = V_{sat}$.

b) Exprimer la tension u_1 en fonction des résistances R_1, R_2 et de la tension de saturation V_{sat} .....

c) Écrire la relation entre l'intensité i et la tension u_C .....

d) Écrire la relation entre l'intensité i, les tensions u_C et V_{sat} et la résistance R.

.....

e) Déduire des deux relations précédentes l'équation différentielle liant R, C, u_C et V_{sat}.

(a) $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} - \dfrac{u_C}{RC} = \dfrac{V_{sat}}{RC}$

(b) $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} - \dfrac{u_C}{RC} = -\dfrac{V_{sat}}{RC}$

(c) $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u_C}{RC} = -\dfrac{V_{sat}}{RC}$

(d) $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u_C}{RC} = \dfrac{V_{sat}}{RC}$

.....

f) Quelle est la solution de l'équation homogène (sans second membre), avec A constante ?

(a) $u_C = A\exp(-RCt)$

(b) $u_C = A\exp(RCt)$

(c) $u_C = A\exp\left(-\dfrac{t}{RC}\right)$

(d) $u_C = A\exp\left(\dfrac{t}{RC}\right)$

.....

g) Que dire de la solution particulière de l'équation ?

(a) Elle est nulle.

(b) C'est une constante.

(c) C'est une variable.

(d) On ne peut pas savoir.

.....

h) Supposons qu'à l'instant initial $t = 0$, le condensateur soit déchargé. Indiquer son comportement.

(a) Il se charge. (b) Il se décharge. (c) Rien ne se passe.

.....

i) Comment évolue la tension différentielle d'entrée $\varepsilon = V_+ - V_-$ si le condensateur se charge ?

(a) Elle n'évolue pas. (b) Elle augmente. (c) Elle diminue.

.....

j) Que va-t-il se passer pour l'amplificateur linéaire intégré au bout d'un certain temps ?

(a) Il va claquer. (b) Il va basculer en saturation négative. (c) Il va passer en fonctionnement linéaire.

.....

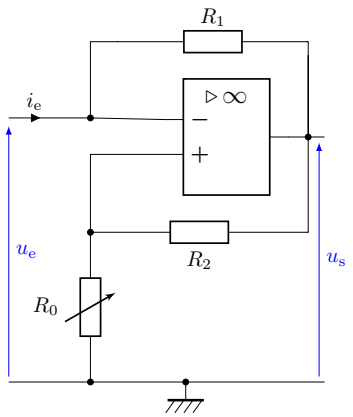
Oscillateur à résistance négative

Entraînement 20.10 — Résistance négative.

On utilise le dipôle ci-contre dans lequel l'amplificateur linéaire intégré est idéal.

a) En supposant le régime linéaire, déterminer le rapport $\dfrac{u_e}{u_s}$ en fonction des résistances R_0 et R_2.

.....



b) Donner la relation entre u_e, u_s et i_e.

.....

c) En supposant le régime linéaire, en déduire l'expression de u_e en fonction de i_e, ainsi que des résistances R_0, R_1 et R_2.

.....

d) À quelle condition le régime reste-t-il linéaire ?

(a) $|u_s| < V_{sat}$

(b) $|u_s| > V_{sat}$

(c) $|u_e| < V_{sat}$

(d) $|u_e| > V_{sat}$

.....

e) Supposons que le régime est linéaire tant que $|u_s| < V_{sat}$. Que peut-on en déduire ?

(a) $|u_e| > \dfrac{R_0}{R_0 + R_2} V_{sat}$

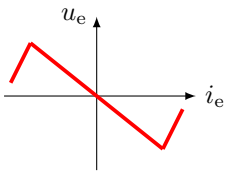
(b) $|u_e| < \dfrac{R_0}{R_0 + R_2} V_{sat}$

.....

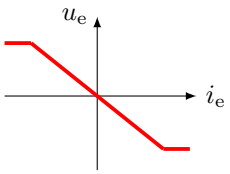
f) En supposant le régime en saturation haute, déterminer u_e en fonction de i_e, R_1 et V_{sat}.

.....

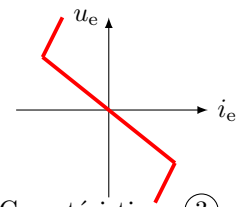
On donne les caractéristiques suivantes :



Caractéristique (1)



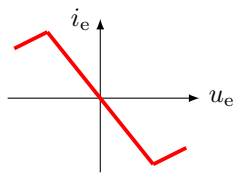
Caractéristique (2)



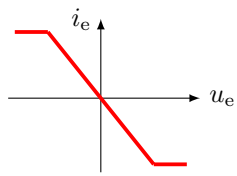
Caractéristique (3)

g) Sachant que, même en régime de saturation, $|u_e| < \dfrac{R_0}{R_0+R_2}V_{sat}$, indiquer celle qui correspond au dipôle précédent .....

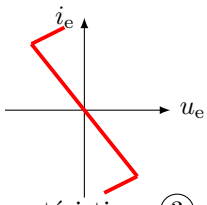
On donne les caractéristiques $i_e = g(u_e)$ suivantes.



Caractéristique (1)



Caractéristique (2)



Caractéristique (3)

h) Indiquer celle qui correspond au dipôle précédent .....

i) Dans quel intervalle de tension ce dipôle se comporte-t-il comme une résistance négative ?

(a) $u_e < -\dfrac{R_0}{R_0+R_2}V_{sat}$ (c) $|u_e| < \dfrac{R_0}{R_0+R_2}V_{sat}$

(b) $u_e > \dfrac{R_0}{R_0+R_2}V_{sat}$ (d) $|u_e| > \dfrac{R_0}{R_0+R_2}V_{sat}$

.....

Réponses mélangées

(b) $\dfrac{u_e}{u_s} = \dfrac{R_0}{R_0+R_2}$ $\dfrac{d^2u_s}{dt^2} + \dfrac{3-A}{RC}\dfrac{du_s}{dt} + \dfrac{1}{R^2C^2}u_s = 0$ (b) $\dfrac{1}{\tau}\dfrac{du}{dt} + \omega_0^2 u + \dfrac{d^2u}{dt^2} = 0$

(b) (b) (b) (a) (a) $\dfrac{R_1}{R_1+R_2}V_{sat}$ (b) (b)

(a) (c) $j\omega\underline{i} = -\dfrac{\underline{i}}{RC}$ (d) Faux $\dfrac{j\omega}{\tau}\underline{i} + L^2C^2\underline{i} - (j\omega)^2\underline{i} = A$

$\dfrac{(R+\underline{Z_C})^2 + R\underline{Z_C}}{R\underline{Z_C}}$ $i = \dfrac{V_{sat}-u_C}{R}$ (c) $i = C\dfrac{du_C}{dt}$ (d) (a)

$u_e - u_s = R_1 i_e$ Caractéristique (3) Vrai $RC\dfrac{du}{dt} + \omega_0^2 u - \dfrac{d^2u}{dt^2} = A$

(b) $u_1 = \dfrac{u_s}{A}$ (a) (c) (b) $u_e = R_1 i_e + V_{sat}$ (c) (e)

(c) (c) (e) Caractéristique (1) $\dfrac{1}{\tau}\dfrac{du}{dt} + \omega_0^2 u + \dfrac{d^2u}{dt^2} = 0$

(b) (a) (a) $u_e = -R_0\dfrac{R_1}{R_2}i_e$ $\dfrac{du}{dt} + \dfrac{u}{\tau} = 0$ (a) (c)

► Réponses et corrigés page 402

Cinématique des fluides

Prérequis
Débit volumique. Débit massique. Conservation du débit.

Constantes utiles
→ Masse volumique de l'eau : $\rho_{\text{eau}} = 1{,}00 \times 10^3\,\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
→ Masse molaire de l'eau : $M_{\text{eau}} = 18{,}0\,\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$

Autour du débit

Entraînement 21.1 — Premiers calculs.

On prélève pendant 3 minutes et 34 secondes de l'eau à un robinet à l'aide d'un récipient. Le volume prélevé est alors de 15,4 L.

a) Calculer le débit volumique associé, en $\text{m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$ .....

b) Calculer le débit massique associé, en $\text{kg} \cdot \text{h}^{-1}$ .....

Entraînement 21.2 — Bataille de débits.

Parmi ces trois écoulements, quel est celui dont le débit volumique est le plus grand ?

(a) 100 kg d'eau durant 50 min
(b) 0,2 mol d'eau durant 3,0 ms
(c) 18 m^3 d'eau durant 2 jours

.....

Entraînement 21.3 — Fluide mystérieux.

Un fluide inconnu s'écoule dans une canalisation de section circulaire de diamètre $d = 6\,\text{mm}$.

On mesure un débit massique $D_m = (75 \pm 5)\,\text{g} \cdot \text{s}^{-1}$ et la vitesse de l'écoulement est estimée à $v = 2\,\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

On rappelle que l'expression du débit massique D_m dépend de la vitesse v du fluide, de la masse volumique ρ du fluide et de la surface S de la section de la canalisation : on a $D_m = \rho S v$.

Les masses volumiques des fluides possibles sont données à température ambiante dans le tableau ci-dessous :

Fluide	miel	eau	glycérine	huile
Masse volumique ($\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$)	1,4	1,0	1,3	0,9

Quel est le fluide en circulation dans la canalisation ?

(a) la glycérine
(b) l'huile ou l'eau
(c) le miel ou la glycérine
(d) aucun des fluides du tableau

.....

Entraînement 21.4 — Débit dans une gaine rectangulaire.

Considérons de l'air circulant de manière incompressible dans une gaine rectangulaire de largeur $l_1 = 30\,\text{cm}$ et de hauteur $h_1 = 50\,\text{cm}$. Le débit volumique d'eau mesuré est de $4\,700\,\text{m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$.

a) Calculer la vitesse moyenne de l'air dans la conduite .....

En sortie, la gaine rectangulaire se réduit : ses dimensions sont alors $l_2 = 20$ cm et $h_2 = 30$ cm.

b) Calculer la nouvelle vitesse moyenne de l'air .....

Entraînement 21.5 — Écoulement dans une conduite cylindrique.

On considère un fluide incompressible, de masse volumique ρ, en écoulement dans une conduite cylindrique de rayon R et d'axe (Oz). L'écoulement peut être décrit par un champ de vitesse de type « Poiseuille cylindrique » :

$$\vec{v}(M) = V_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\vec{e_z},$$

où V_0 est une constante. On note v la norme du vecteur vitesse.

a) Quelle est la formule correcte pour calculer le débit massique à travers une section droite de cet écoulement ?

(a) $D_m = \int_0^{2\pi}\int_0^R \rho v \times r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$

(b) $D_m = \int_0^{2\pi}\int_0^R \rho v \times r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$

(c) $D_m = \int_0^{\pi}\int_0^R \rho v \times r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$

.....

b) Exprimer dans ce cas le débit massique, en fonction de ρ, V_0 et R .....

Champ de vitesse de différents écoulements

On notera, en coordonnées cartésiennes, un champ de vitesse sous la forme :

$$\vec{v}(x,y,z,t) = v_x(x,y,z,t)\vec{e_x} + v_y(x,y,z,t)\vec{e_y} + v_z(x,y,z,t)\vec{e_z}.$$

Entraînement 21.6 — Écoulement stationnaire ou non ?

Un écoulement stationnaire vérifie la relation suivante :

$$\frac{\partial \vec{v}(x,y,z,t)}{\partial t} = \vec{0}.$$

Sachant que ω, τ et v_0 sont des constantes, lequel parmi ces écoulements n'est pas stationnaire ?

(a) $\vec{v}(x,y,z,t) = \omega y\vec{e_x}$

(b) $\vec{v}(x,y,z,t) = v_0\vec{e_y}$

(c) $\vec{v}(x,y,z,t) = v_0\sin(\omega t)\vec{e_y}$

(d) $\vec{v}(x,y,z,t) = \frac{y}{\tau}\vec{e_y}$

.....

Entraînement 21.7 — Caractère divergent d'un écoulement.

Un écoulement incompressible vérifie la relation suivante en tout point :

$$\text{div}(\vec{v}(x,y,z,t)) = \frac{\partial v_x(x,y,z,t)}{\partial x} + \frac{\partial v_y(x,y,z,t)}{\partial y} + \frac{\partial v_z(x,y,z,t)}{\partial z} = 0.$$

On considère l'écoulement uniforme suivant : $\vec{v}(x,y,z,t) = v_0\vec{e_y}$.

a) Calculer la divergence de cet écoulement .....

b) Est-ce que l'écoulement est incompressible ? .....

c) Un écoulement caractérisé par son champ de vitesse $\vec{v} = kx\vec{e_x} + ky\vec{e_y}$ ($k \neq 0$ constante) est-il incompressible ?

.....

d) Un écoulement caractérisé par son champ de vitesse de la forme $\vec{v} = kz\vec{e_x}$ (dit écoulement de Couette plan) est-il incompressible ?

.....

Entraînement 21.8 — Caractère rotationnel d'un écoulement uniforme.

Dans un écoulement irrotationnel, le rotationnel du champ de vitesse est nul en tout point. On a :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}(x,y,z,t)) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_z(x,y,z,t)}{\partial y} - \dfrac{\partial v_y(x,y,z,t)}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v_x(x,y,z,t)}{\partial z} - \dfrac{\partial v_z(x,y,z,t)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v_y(x,y,z,t)}{\partial x} - \dfrac{\partial v_x(x,y,z,t)}{\partial y} \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

On étudie l'écoulement uniforme défini par $\vec{v}(x,y,z,t) = v_0\vec{e_y}$.

a) Calculer le rotationnel de ce champ de vitesse .....

b) Est-ce que l'écoulement est irrotationnel ? .....

Si l'écoulement est irrotationnel, alors on lui associe un potentiel des vitesses $\phi(x,y,z,t)$.

$$\vec{v}(x,y,z,t) = -\overrightarrow{\text{grad}}(\phi(x,y,z,t)) = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial \phi(x,y,z,t)}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial \phi(x,y,z,t)}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial \phi(x,y,z,t)}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

c) Donner l'expression de ϕ correspondant à l'écoulement uniforme précédent, sachant que, à l'origine, on a $\phi(0,0,0,t) = \phi_0$.

.....

Remarque
Les entraînements qui suivent utilisent le rotationnel et le potentiel des vitesses, introduits dans l'entraînement **21.8**.

Entraînement 21.9 — Caractère rotationnel d'autres écoulements.

a) Un écoulement est caractérisé par son champ de vitesse $\vec{v} = kx\vec{e_x} + ky\vec{e_y}$ où k est une constante. Calculer le rotationnel de ce champ de vitesse.

.....

b) Si l'écoulement est irrotationnel, calculer le potentiel des vitesses de cet écoulement sachant que le potentiel des vitesses à l'origine vaut $\phi(0,0,0,t) = \phi_0$.

Sinon, noter qu'il est « impossible » de déterminer un potentiel des vitesses.

.....

c) Un écoulement (dit de Couette plan) caractérisé par son champ de vitesse de la forme $\vec{v} = kz\vec{e_x}$ est-il irrotationnel ?

.....

d) Si l'écoulement est irrotationnel, calculer le potentiel des vitesses de cet écoulement sachant que le potentiel des vitesses à l'origine vaut $\phi(0,0,0,t) = \phi_0$.

Sinon, noter qu'il est « impossible » de déterminer un potentiel des vitesses.

.....

Entraînement 21.10 — Accélération d'une particule de fluide.

L'accélération d'une particule de fluide $\vec{a}_{\mathrm{M}}(t)$ se calcule avec la dérivée particulaire du champ de vitesse :

$$\vec{a}_{\mathrm{M}}(t) = \frac{\mathrm{D}\vec{v}_{\mathrm{M}}(t)}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \vec{v}(x,y,z,t)}{\partial t} + \left(\vec{v}(x,y,z,t) \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v}(x,y,z,t).$$

On étudie un écoulement uniforme de la forme $\vec{v}(x,y,z,t) = v_0\vec{e_y}$.

a) Calculer l'accélération locale de la particule $\dfrac{\partial \vec{v}(x,y,z,t)}{\partial t}$ .....

b) Calculer l'accélération convective de la particule $\left(\vec{v}(x,y,z,t) \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v}(x,y,z,t)$.

.....

c) En déduire l'accélération de la particule .....

Entraînement 21.11 — Écoulement avec cisaillement.

Un écoulement avec cisaillement a un caractère rotationnel : $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}(x)) = \omega\vec{e_y} \neq \vec{0}$.

a) Exprimer le champ de vitesse $\vec{v}(x)$ de l'écoulement sachant que $\vec{v}(0) = \vec{0}$ ...

b) L'écoulement est-il incompressible ? .....

Entraînement 21.12 — Accélération convective d'un écoulement de Poiseuille plan.

On étudie un écoulement de Poiseuille plan caractérisé par un champ de vitesse de la forme :

$$\vec{v}(z) = v_0\left(1 - \left(\frac{z}{L}\right)^2\right)\vec{e_x},$$

où L est une longueur constante.

On donne les quatre propositions suivantes.

(a) $v_0^2\dfrac{2z}{L^2}\left(1 - \left(\dfrac{z}{L}\right)^2\right)\vec{e_x}$

(b) $v_0^2\dfrac{2z}{L^2}\left(1 - \left(\dfrac{z}{L}\right)^2\right)\vec{e_z}$

(c) $-v_0^2\dfrac{2z}{L^2}\left(1 - \left(\dfrac{z}{L}\right)^2\right)\vec{e_x}$

(d) $-v_0^2\dfrac{2z}{L^2}\left(1 - \left(\dfrac{z}{L}\right)^2\right)\vec{e_z}$

a) Laquelle de ces expressions est égale à $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\dfrac{\vec{v}^2(z)}{2}\right)$? .....

b) Laquelle de ces expressions est égale à $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}(z) \wedge \vec{v}(z)$? .....

c) En déduire l'accélération convective de la particule à l'aide de la formule suivante :

$$\left(\vec{v}(z) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}(z) = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\vec{v}^2(z)}{2}\right) + \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}(z) \wedge \vec{v}(z).$$

.....

Entraînement 21.13 — Potentiel des vitesses.

Le potentiel des vitesses d'un écoulement est $\phi(x, y, z, t) = -\dfrac{x^2}{2\tau} + \phi_0$, avec τ et ϕ_0 constants.

a) Retrouver le champ des vitesses $\vec{v}(x, y, z, t)$ .....

b) Calculer le rotationnel du champ de vitesse .....

c) L'écoulement est-il incompressible ? .....

d) Calculer l'accélération de la particule .....

Pour aller un peu plus loin

Entraînement 21.14 — Tornade.

Le champ de vitesse de l'air au sein d'une tornade peut s'écrire, en coordonnées cylindriques :

$$\vec{v}(r) = \begin{cases} \omega r \vec{e_\theta} & \text{si } r \leqslant a \\ \dfrac{K}{r}\vec{e_\theta} & \text{si } r \geqslant a, \end{cases}$$

avec ω et K deux constantes. On rappelle l'expression de la divergence et du rotationnel en coordonnées cylindriques pour un champ $\vec{A}(r) = A_r(r)\vec{e_r} + A_\theta(r)\vec{e_\theta} + A_z(r)\vec{e_z}$ ne dépendant que de r :

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r(r))}{\partial r} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A} = -\frac{\partial A_z(r)}{\partial r}\vec{e_\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\theta(r))}{\partial r}\vec{e_z}.$$

a) En utilisant la continuité de la vitesse en $r = a$, déterminer la constante K .....

b) L'écoulement est-il incompressible ? .....

c) L'écoulement est-il irrotationnel pour $r \geqslant a$? .....

d) Exprimer le vecteur tourbillon $\vec{\Omega} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{v}$ pour $r \leqslant a$ .....

Entraînement 21.15 — Dérivée particulaire.

La dérivée particulaire d'un champ scalaire ou vectoriel Ψ s'exprime :

$$\frac{\mathrm{D}\Psi}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial\Psi}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\Psi.$$

On s'intéresse au champ de vitesse suivant : $\vec{v}(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} 2x - 3z \\ 0 \\ 3x - 2z \end{pmatrix} K\exp(-t/\tau)$.

Calculer le vecteur accélération $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t}$ .....

Entraînement 21.16 — Un écoulement particulier.

Le champ de vitesse d'un fluide s'écrit, en coordonnées cylindriques, $\vec{v}(r,\theta) = -\dfrac{\beta}{r}\vec{e_r} + \dfrac{\alpha}{r}\vec{e_\theta}$, avec α et β deux constantes. On rappelle l'expression de la divergence et du rotationnel en coordonnées cylindriques pour un champ scalaire $\Phi(r,\theta)$ et un champ vectoriel $\vec{A}(r)$ ne dépendant que de r :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\Phi(r,\theta)) = \frac{\partial\Phi(r)}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\vec{e_\theta} \quad ; \quad \text{div}\left(\vec{A}(r)\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r(r))}{\partial r} \quad ; \quad \overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{A}(r)\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\theta(r))}{\partial r}\vec{e_z}.$$

a) L'écoulement du fluide est-il incompressible ? .....

b) L'écoulement du fluide est-il irrotationnel ? .....

c) Si l'écoulement est irrotationnel, calculer le potentiel des vitesses de cet écoulement sachant que le potentiel des vitesses à l'origine est $\Phi(1,0,0,t) = 0$.

Sinon, noter qu'il est « impossible » de déterminer un potentiel des vitesses.

.....

d) Calculer l'accélération particulaire $\vec{a_p}$ à l'aide de l'expression de l'accélération convective :

$$\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\vec{v}^2}{2}\right) + \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v})\wedge\vec{v}.$$

.....

Réponses mélangées

$-v_0y+\phi_0$ $\quad \vec{0}$ $\quad$ oui $\quad$ non $\quad$ non $\quad -\dfrac{\beta^2+\alpha^2}{r^3}\vec{e_r}$ $\quad \dfrac{x}{\tau^2}\vec{e_x}$ $\quad$ impossible

$\vec{0}$ $\quad \beta\ln(r)-\alpha\theta$ $\quad$ (d) $\quad -\dfrac{k}{2}x^2-\dfrac{k}{2}y^2+\phi_0$ $\quad \vec{0}$ $\quad -\omega x\vec{e_z}$ $\quad 8{,}7\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ $\quad \vec{0}$

$2{,}59\times10^{-1}\,\text{m}^3\cdot\text{h}^{-1}$ $\quad$ (b) $\quad \vec{0}$ $\quad$ (c) $\quad \dfrac{x}{\tau}\vec{e_x}$ $\quad$ oui $\quad \dfrac{\pi}{2}\rho V_0R^2$ $\quad \vec{0}$ $\quad$ (b)

oui $\quad 2{,}59\times10^{2}\,\text{kg}\cdot\text{h}^{-1}$ $\quad$ non $\quad$ oui $\quad$ oui $\quad$ (c) $\quad \vec{0}$ $\quad \omega\vec{e_z}$ $\quad$ oui

$22\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ $\quad$ (b) $\quad \omega a^2$ $\quad$ oui $\quad \begin{pmatrix} \dfrac{3z-2x}{\tau} - 5xK\exp(-t/\tau) \\ 0 \\ \dfrac{2z-3x}{\tau} - 5zK\exp(-t/\tau) \end{pmatrix}$ $\quad K\exp(-t/\tau)$ $\quad 0$ $\quad$ oui

► Réponses et corrigés page 407

Dynamique des fluides I

Prérequis

La loi des gaz parfaits : $pV = nRT = \dfrac{N}{\mathcal{N}_A} RT$.

Constantes utiles

→ Nombre d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6{,}02 \times 10^{23}\,\text{mol}^{-1}$

→ Constante des gaz parfaits : $R = 8{,}314\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$

Généralités

Entraînement 22.1 — Libre parcours moyen.

Considérons un gaz parfait à la pression p et à la température T. Les particules composant ce gaz sont de diamètre $d_m = 0{,}3\,\text{nm}$. Le « libre parcours moyen » noté ℓ, distance moyenne parcourue par une particule entre deux chocs, admet comme expression :

$$\ell = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d_m^2 n^*},$$

où n^* est la densité volumique de particules dans le gaz.

a) En comparant les densités de particules, estimer dans laquelle des deux conditions suivantes le libre parcours moyen est le plus grand :

(a) $p = 3\,\text{bar}$ et $T = 280\,\text{K}$

(b) $p = 2 \times 10^5\,\text{Pa}$ et $T = 50\,°\text{C}$

.....

b) Calculer le libre parcours moyen des particules composant le gaz dans le cas (a) en nm.

.....

Entraînement 22.2 — Forces volumiques.

Une force volumique se définit par la relation $\vec{f}_{\text{vol}} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{f}}{\mathrm{d}\tau}$, où $\mathrm{d}\vec{f}$ est la force agissant sur le volume $\mathrm{d}\tau$.

On considère : $\vec{j}$ le vecteur densité volumique de courant (on a $i = \iint_S \vec{j}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$) ; μ la masse volumique ; ρ la densité volumique de charges ; σ la densité surfacique de charge ; P la pression.

Quelle(s) expression(s) ne correspond(ent) pas à une force volumique ?

Vous aurez le souci de vérifier l'homogénéité des relations écrites.

(a) $\mu\vec{g}$

(b) $\rho(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B})$

(c) $\vec{j}\wedge\vec{E}$

(d) $\vec{j}\wedge\vec{B}$

(e) $-\overrightarrow{\text{grad}}(P)$

.....

Entraînement 22.3 — Forces pressantes de l'atmosphère.

a) Donner l'ordre de grandeur de la pression atmosphérique en Pa.

.....

b) L'exprimer en $\mathrm{N \cdot cm^{-2}}$.

.....

c) Quelle est l'intensité de la force à appliquer sur une surface de $10\,\mathrm{cm^2}$ pour exercer la pression de $1\,\mathrm{bar}$?

.....

Entraînement 22.4 — Échelle mésoscopique et ordre de grandeur.

On considère un système constitué d'un litre d'air dans les conditions ambiantes usuelles (on prend $p = 1\,\mathrm{bar}$; $T = 15\,^\circ\mathrm{C}$). L'air est assimilé à un gaz parfait, vérifiant l'équation d'état :

$$pV = nRT = \frac{NRT}{\mathcal{N}_A},$$

où n est la quantité de matière et N le nombre de particules.

a) Déterminer la densité volumique $n^* = \dfrac{N}{V}$ de particules de ce système (en $\mathrm{m^{-3}}$).

(a) $2{,}5 \times 10^{25}\,\mathrm{m^{-3}}$
(b) $2{,}5 \times 10^{20}\,\mathrm{m^{-3}}$
(c) $4{,}8 \times 10^{26}\,\mathrm{m^{-3}}$
(d) $4{,}8 \times 10^{21}\,\mathrm{m^{-3}}$

.....

b) Évaluer le nombre de particules N_0 contenues dans le litre d'air.

(a) $2{,}5 \times 10^{22}$
(b) $2{,}5 \times 10^{25}$
(c) $4{,}8 \times 10^{29}$
(d) $4{,}8 \times 10^{26}$

.....

c) On assimile une « particule de fluide » à un cube d'air de côté $d = 0{,}1\,\mathrm{mm}$.

Évaluer le nombre de particules N_0 contenues dans cette particule de fluide.

.....

Fluide et forces de pression

Entraînement 22.5 — Forces de pression sur un barrage vertical.

On considère un barrage assimilé à un mur vertical de hauteur h et de largeur L muni d'un repère orthonormé direct.

Il est en contact à gauche avec de l'air à la pression uniforme $p_0 = 1\,\text{bar}$, à droite avec de l'eau au repos de masse volumique μ.

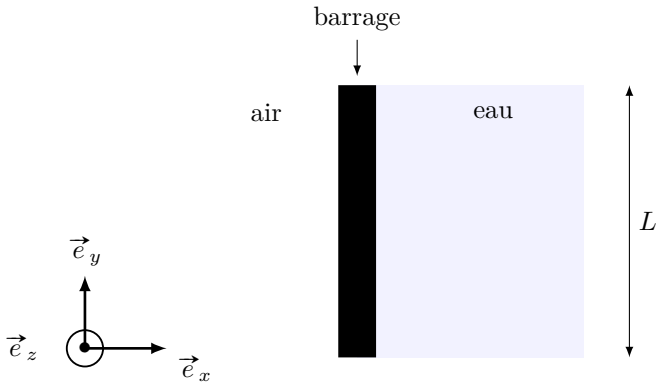
La pression dans l'eau est donnée en fonction de l'altitude z par la relation $p(z) = p_0 - \mu g z$. Dans ce cas, l'origine de l'axe ascendant (Oz) est prise à l'interface eau/air.

Le barrage est défini sur l'intervalle $z \in [-h, 0]$.

La force de pression qu'un fluide exerce sur la surface S du barrage s'écrit :

$$\overrightarrow{F_\text{p}} = F_\text{p}\,\vec{u} = \left(\iint_S p(M)\,\mathrm{d}S\right)\vec{u} = \left(\iint_S p(y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\right)\vec{u},$$

où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire, perpendiculaire à la surface du barrage, orienté du fluide vers le barrage.



Vue de dessus

a) Exprimer la résultante des forces de pression $\overrightarrow{F_1}$ de l'air sur le barrage.

.....

b) Exprimer la résultante des forces de pression $\overrightarrow{F_2}$ de l'eau sur le barrage.

.....

c) En déduire la résultante de force de pression $\vec{F}$ agissant sur le barrage.

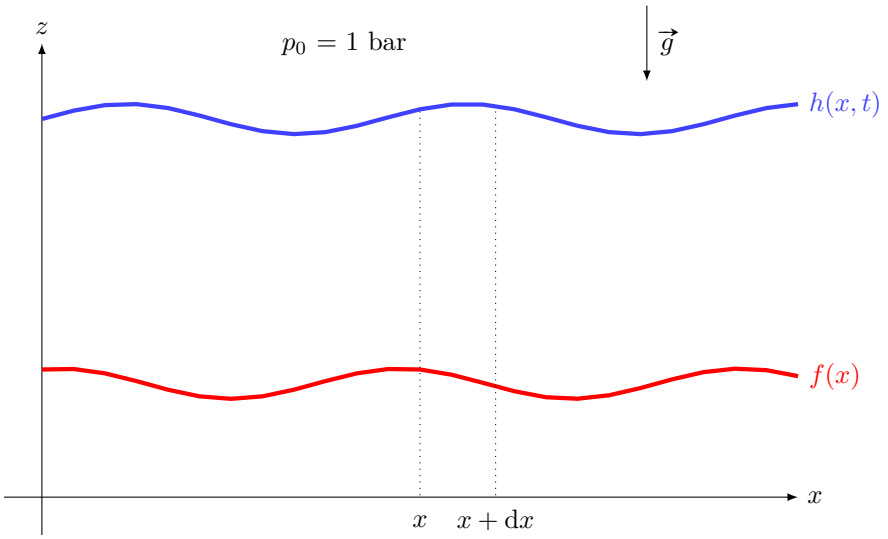
.....

Entraînement 22.6 — Force de pression dans une vague.

On souhaite exprimer la résultante des forces de pression dans une vague.

On considère une vague modélisée par un écoulement unidimensionnel, le long de l'axe (Ox). La vitesse de l'eau, de masse volumique μ, est supposée de la forme $\vec{v} = v(x,t)\vec{e_x}$.

La largeur de l'écoulement est supposée constante et égale à L. Le fond marin est situé à la cote $z_{\text{fond}} = f(x)$ et la surface libre de l'eau est située à la cote $z_{S_{\text{libre}}} = h(x,t)$. L'air ambiant est à la pression standard p_0 et le champ de pesanteur est uniforme, de norme g.



a) On suppose que la pression dans le fluide est de type hydrostatique, c'est-à-dire que la pression $p(M)$ en un point M vaut $p_0 + \mu g \times \Delta H$, où ΔH est la hauteur de la colonne de fluide au-dessus du point M.

Donner l'expression de la pression $p(x,z,t)$ en un point de l'eau, en fonction de μ, g, $h(x,t)$ et z.

.....

b) On considère désormais une tranche de fluide située entre x et $x + \mathrm{d}x$.

Donner l'expression du volume élémentaire $\mathrm{d}V$ de ce système, en fonction de L, $\mathrm{d}x$, $h(x,t)$ et $f(x)$.

.....

c) On rappelle que l'expression de la résultante des forces de pression $\overrightarrow{\mathrm{d}F}$ agissant sur un volume élémentaire est $\overrightarrow{\mathrm{d}F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(p) \times \mathrm{d}V$.

En déduire l'expression de la résultante des forces de pression $\mathrm{d}F_x$ selon (Ox), qui s'exerce sur une tranche d'épaisseur $\mathrm{d}x$.

.....

Pression dans l'atmosphère isotherme

Entraînement 22.7 — Masse volumique d'un gaz parfait.

Considérons n moles d'air assimilé à un gaz parfait, à la pression p et à la température T_0.

On donne la masse molaire de l'air : $M_{\text{air}} = 29\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$.

a) On considère un système élémentaire composé de δn moles d'air. Exprimer sa masse volumique ρ en fonction de δn, M_{air} et de son volume $\text{d}V$.

.....

b) En utilisant la loi des gaz parfaits, exprimer ρ la masse volumique du gaz en fonction des grandeurs M_{air}, p, R et T_0.

.....

c) Évaluer la masse volumique ρ de l'air, au niveau de l'océan à $T_0 = 15\,°\text{C}$.

Le résultat sera exprimé en $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

.....

Entraînement 22.8 — Calcul de pression.

Un fluide de masse volumique ρ possède une pression dépendant de l'altitude z. L'axe $(\text{O}z)$ est un axe ascendant et $p(z=0) = p_0$.

L'équation vérifiée par $p(z)$ est $\dfrac{\text{d}p}{\text{d}z} + \rho g = 0$, avec $g = 10\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

• Le fluide est de l'eau, situé dans la région $z < 0$.

a) Quelle est la masse volumique ρ_0 de l'eau en $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$? .....

b) Déterminer l'expression de la pression $p(z)$ dans l'eau pour $z \in [-H, 0]$.

.....

• Le fluide est un gaz parfait de masse molaire M occupant tout l'espace. La température est uniforme et sera notée T_0.

c) À l'aide de la loi des gaz parfaits, écrire $\rho(z)$ en fonction de T_0, $p(z)$, R et M.

.....

d) Déterminer $p(z)$ en tout point de l'espace .....

• Le fluide est un gaz parfait de masse molaire M occupant tout l'espace. La température est non uniforme et dépend de z : $T(z) = T_0 - \alpha z$.

e) Déterminer $p(z)$ en tout point de l'espace .....

Entraînement 22.9 — Analyse du résultat.

Dans le modèle de l'atmosphère isotherme, la pression varie avec l'altitude z selon la loi :

$$p(z) = p_0 \mathrm{e}^{-z/H},$$

où $H = \dfrac{RT_0}{Mg} \approx 8{,}4\,\mathrm{km}$ et $p_0 = 10^5\,\mathrm{Pa}$.

a) À quelle altitude z_0 exprimée en km la pression est-elle diminuée de moitié par rapport à celle au niveau de la mer ? .....

b) Établir une expression approchée de $p(z)$ valable pour des altitudes vérifiant $z \ll H$.

.....

c) Vous êtes sur la plage, les pieds dans l'eau. Vos pieds sont à la pression p_0.

Estimer $\dfrac{\Delta p}{p_0}$ entre vos pieds et votre tête, en pourcentage .....

Force et écoulement dans une conduite

Entraînement 22.10 — Calcul de débits.

On considère un écoulement laminaire d'un fluide dans une conduite cylindrique de rayon R. La conduite est immobile et d'axe $(\mathrm{O}z)$. La vitesse vaut $\vec{v} = v(r)\vec{e_z}$.

L'expression générale du débit volumique, à travers une section droite de cette conduite, est :

$$Q_v = \iint \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{S}.$$

Nous souhaitons évaluer le débit dans le sens des z croissants.

a) Exprimer $\vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ en fonction de $v(r)$ et $\mathrm{d}S$ .....

Lorsque la situation est invariante par rotation autour de l'axe $(\mathrm{O}z)$, il est souvent très efficace de raisonner sur une surface élémentaire qui respecte cette invariance. On choisit donc une surface $\mathrm{d}S$ qui correspond à la portion de section droite située entre r et $r + \mathrm{d}r$.

b) Exprimer $\mathrm{d}S$ en fonction de r et de $\mathrm{d}r$ .....

c) On suppose que l'écoulement est uniforme : $v(r) = \text{constante} = U$.

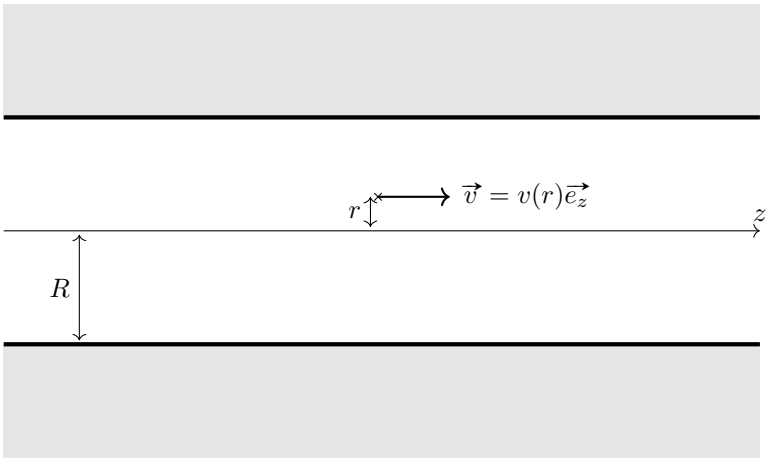
Exprimer alors le débit volumique Q_v .....

d) On suppose maintenant que l'écoulement vérifie : $v(r) = \dfrac{v_0}{R^2}\left(R^2 - r^2\right)$.

Déterminer alors le débit volumique Q_v .....

Entraînement 22.11 — Écoulement laminaire dans une conduite.

On étudie un écoulement visqueux et laminaire d'un fluide de viscosité dynamique η dans une conduite cylindrique de rayon R. La conduite est immobile et d'axe (Oz).



a) Le champ des vitesses est supposé du type $\vec{v}(r) = v(r)\vec{e_z}$.

Laquelle des propositions suivantes, concernant la vitesse au niveau de la paroi $v(r = R)$, est-elle correcte ?

(a) Elle est égale à la vitesse au centre de l'écoulement $v(r = 0)$.

(b) Elle est égale à la vitesse de la paroi, c'est-à-dire nulle : on a $v(r = R) = 0$.

(c) Elle est de signe opposée à la vitesse au centre de l'écoulement : on a $v(r = R) < 0$ lorsque $v(r = 0) > 0$.

(d) Elle n'est jamais nulle : on a $v(r = R) \neq 0$.

.....

b) On considère désormais le système constitué par le fluide à l'intérieur d'un cylindre de rayon $r_0 < R$ et de longueur L. La force $F(r_0)$ exercée par le fluide extérieur (situé dans la région $r > r_0$) sur le système a pour expression :

$$F(r_0) = \eta S \times \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)_{r=r_0},$$

où S est la surface de contact sur laquelle se répartissent les contraintes de viscosité.

Exprimer S .....

c) On admet que l'expression du champ des vitesses est $v(r) = A\big(R^2 - r^2\big)$.

Déterminer l'expression de la force $F(r_0)$ en fonction de A, r_0, L et η .....

d) Donner l'expression de la force F_0 exercée sur la conduite par tout le fluide qui y est contenu.

.....

Forces et aéronefs

Entraînement 22.12 — Description du vol rectiligne.

On étudie un aéronef de masse m se déplaçant en mouvement rectiligne.

On définit les quatre angles suivants :

- L'angle ε est l'angle entre la corde (c'est-à-dire l'axe de l'aile) et l'axe longitudinal de l'avion. Cet angle est constant par construction de l'avion.
- L'angle ϕ est l'angle entre l'axe de l'avion et l'horizontale. Cet angle est appelé l'assiette. C'est un paramètre que le pilote de l'avion contrôle lors du vol.
- L'angle α_0 est l'angle que fait la trajectoire du centre d'inertie de l'avion avec le sol horizontal.
- L'angle i est l'angle entre la corde et le vent relatif (vitesse de l'air par rapport à l'avion). Cet angle est appelé l'incidence.

Les questions suivantes s'appuient sur les deux figures ci-dessous :

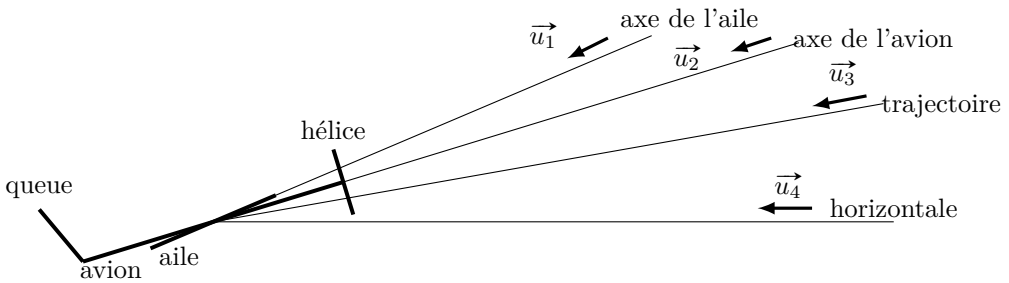


FIGURE 1 – Divers axes pour un vol rectiligne

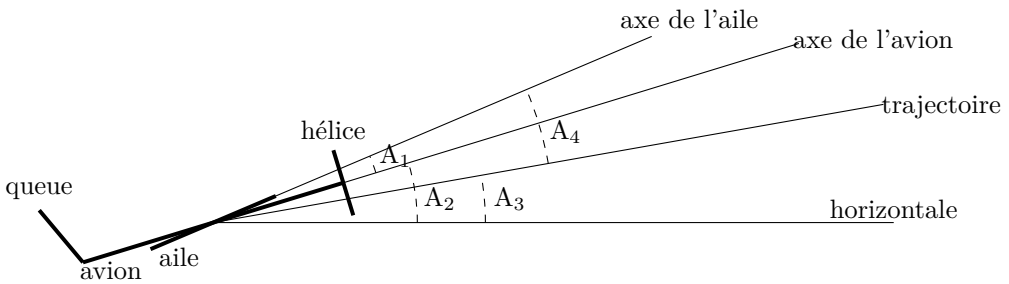


FIGURE 2 – Quatre angles

a) On considère qu'il n'y a pas de vent. Identifier, sur la figure 1, le vecteur donnant la direction du vent relatif (vitesse de l'air par rapport à l'avion) .....

b) Identifier, sur la figure 2, l'angle ϕ .....

c) Identifier, sur la figure 2, l'angle ε .....

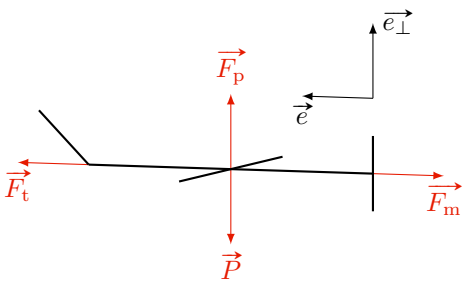
d) Identifier, sur la figure 2, l'angle i .....

e) Identifier, sur la figure 2, l'angle α_0 .....

f) Quelle relation lie les quatre angles ε, ϕ, α_0 et i ? .....

Entraînement 22.13 — Un avion.

On étudie un aéronef équipé d'un moteur à hélice, autrement dit un avion.



L'avion est soumis à quatre forces :

- La force motrice $\overrightarrow{F_\text{m}} = -F_\text{m}\,\vec{e}$, due à l'hélice, qui est colinéaire à l'axe longitudinal de l'avion.
- Le poids $\vec{P} = m\vec{g}$.
- La force de portance $\overrightarrow{F_\text{p}} = \frac{1}{2}\mu S C_\text{p} v^2 \overrightarrow{e_\perp}$, où μ est la masse volumique de l'air au repos, S est la surface alaire, C_p est le coefficient de portance, v est la norme de la vitesse du vent relatif et $\overrightarrow{e_\perp}$ le vecteur unitaire qui correspond à une direction perpendiculaire au vent relatif.
- La force de traînée $\overrightarrow{F_\text{t}} = \frac{1}{2}\mu S C_t v^2 \vec{e}$, où μ est la masse volumique de l'air au repos, S est la surface alaire, C_t est le coefficient de traînée, v est la norme de la vitesse du vent relatif et $\vec{e}$ le vecteur unitaire qui correspond à la direction du vent relatif.

On considère un vol en palier (c'est-à-dire à altitude constante), dans une atmosphère globalement au repos (c'est-à-dire sans vent).

a) Donner l'équation reliant les quatre forces qui s'exercent sur l'avion, lors de ce vol en mouvement rectiligne uniforme.

.....

b) Quelle relation lie C_p et mg ? .....

c) Quelle relation lie C_t et F_m ? .....

Entraînement 22.14 — Un planeur.

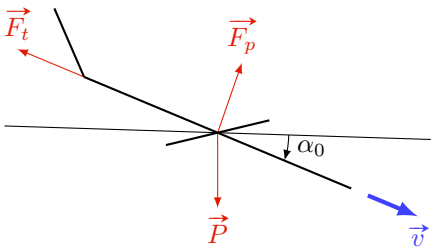
On étudie un planeur, ou un avion en panne moteur. La norme de sa vitesse est notée v.

On suppose qu'il n'y a pas de vent. On note μ la masse volumique de l'air et S la surface alaire du planeur.

On admet que le pilote permet à son planeur d'avoir un mouvement rectiligne uniforme descendant faisant un angle α_0 par rapport à l'horizontale.

Le planeur est soumis à trois forces :

- Le poids $\vec{P}$, selon la verticale descendante, de norme mg.
- La force de portance $\vec{F_\text{p}}$, perpendiculaire à la vitesse du planeur, de norme :
$$F_\text{p} = \frac{1}{2}\mu S C_\text{p} v^2,$$
où C_p est le coefficient de portance.
- La force de traînée $\vec{F_\text{t}}$, opposée à la vitesse du planeur, de norme :
$$F_\text{t} = \frac{1}{2}\mu S C_t v^2,$$
où C_t est le coefficient de traînée.



a) Quelle équation relie les différentes forces, lors du mouvement rectiligne uniforme descendant ?

.....

b) Projeter ces forces selon l'axe du mouvement.

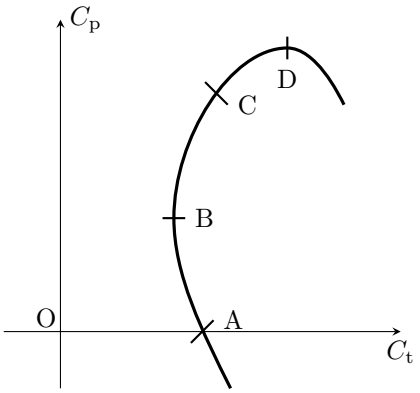
En déduire l'expression de F_t en fonction de m, g et α_0 .....

c) Projeter ces forces selon un axe perpendiculaire au mouvement.

En déduire l'expression de F_p en fonction de m, g et α_0 .....

d) En déduire une relation entre $\tan\alpha_0$ et le rapport $\dfrac{C_t}{C_\text{p}}$ .....

En réalité, C_t et C_p dépendent de l'orientation de l'aile dans l'écoulement d'air, *via* un angle, noté i et appelé *incidence*.
On donne ci-contre l'allure du graphe $C_\text{p} = f(C_t)$, appelé polaire Eiffel. L'incidence varie lorsque l'on se déplace sur ce graphe. Les points A, B, C et D correspondent donc à des incidences différentes.



e) En quel point de cette polaire doit-on se placer afin de planer le plus loin possible, c'est-à-dire d'avoir une angle α_0 le plus petit possible ?

.....

Réponses mélangées

$1{,}2\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ $\quad p_0+\mu g(h(x,t)-z)$ $\quad p_0(1-\dfrac{z}{H})$ $\quad i+\alpha_0=\phi+\varepsilon$ $\quad v(r)\times \mathrm{d}S$

$\tan\alpha_0=\dfrac{C_t}{C_\mathrm{p}}$ $\quad p_0\exp\left(-\dfrac{Mgz}{RT_0}\right)$ $\quad$ (b) $\quad -\mu g\dfrac{\partial h}{\partial x}\times(h(x,t)-f(x))\times L\,\mathrm{d}x$ $\quad 4\pi R^2AL\eta$

$\overrightarrow{u_3}$ $\quad -\dfrac{\mu g h^2}{2}L\overrightarrow{e_x}$ $\quad$ C $\quad 2\times10^{-2}\%$ $\quad \dfrac{M_\mathrm{air}\delta n}{\mathrm{d}V}$ $\quad A_2$ $\quad$ (b) $\quad \pi\dfrac{R^2}{2}v_0$

$\overrightarrow{F_\mathrm{p}}+\overrightarrow{F_\mathrm{t}}+\overrightarrow{P}+\overrightarrow{F_\mathrm{m}}=\overrightarrow{0}$ $\quad F_\mathrm{t}=mg\sin(\alpha_0)$ $\quad$ (a) $\quad 10^5\,\mathrm{Pa}$ $\quad 5{,}8\,\mathrm{km}$ $\quad \pi R^2U$

$2\pi r\,\mathrm{d}r$ $\quad 100\,\mathrm{N}$ $\quad p_0hL\overrightarrow{e_x}$ $\quad \dfrac{p(z)M}{RT_0}$ $\quad 2{,}5\times10^{13}$ $\quad A_4$ $\quad p_0\left(\dfrac{T_0-\alpha z}{T_0}\right)^{\frac{Mg}{\alpha R}}$

$32\,\mathrm{nm}$ $\quad 10\,\mathrm{N\cdot cm^{-2}}$ $\quad$ (c) $\quad -\left(p_0+\dfrac{\mu g h}{2}\right)hL\overrightarrow{e_x}$ $\quad \dfrac{M_\mathrm{air}p}{RT_0}$ $\quad \dfrac{1}{2}\mu SC_\mathrm{p}v^2=mg$

$2\pi r_0L$ $\quad 1\times10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ $\quad (h(x,t)-f(x))L\,\mathrm{d}x$ $\quad -4\pi r_0^2AL\eta$ $\quad A_3$

$p_0-\rho gz$ $\quad A_1$ $\quad \overrightarrow{F_\mathrm{p}}+\overrightarrow{F_\mathrm{t}}+\overrightarrow{P}=\overrightarrow{0}$ $\quad F_\mathrm{p}=mg\cos(\alpha_0)$ $\quad$ (a) $\quad \dfrac{1}{2}\mu SC_tv^2=F_\mathrm{m}$

▶ Réponses et corrigés page 412

Dynamique des fluides II

Prérequis

- Dérivée particulaire : $\dfrac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t} = \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{v}$.
- Équation de conservation de la masse : $\mathrm{div}(\rho\vec{v}) + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.
- Équation de Navier-Stokes :

$$\rho\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{v}\right] = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, P + \eta\Delta(\vec{v}) + \vec{f},$$

  où $\vec{f}$ correspond à l'équivalent volumique d'une force supplémentaire.
- Résultante des forces de pression extérieure sur une surface Σ :

$$\overrightarrow{F_P} = -\iint_\Sigma P(\mathrm{M})\,\overrightarrow{n_{\mathrm{ext}}}\,\mathrm{d}S,$$

  où $\overrightarrow{n_{\mathrm{ext}}}$ est le vecteur unitaire normal à l'élément de surface $\mathrm{d}S$ au point M sur Σ, orienté vers l'extérieur de Σ, et où $P(\mathrm{M})$ est la pression extérieure du fluide au point M.

Pour bien commencer

Entraînement 23.1 — Résoudre une équation différentielle.

Dans chaque cas, résoudre l'équation différentielle vérifiée par v en prenant en compte les conditions aux limites et les possibles divergences de v.

a) $\dfrac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}y^2} = 0$ avec $v(0) = 0$ et $v(a) = v_0$ .....

b) $\dfrac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}y^2} = K$ avec $v(0) = 0$ et $v(a) = v_0$ .....

c) $\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right) = K$ avec $v(R) = 0$ pour $r \in [0, R]$ .....

Entraînement 23.2 — Calculer un débit volumique.

Dans chaque cas, établir l'expression du débit volumique.

a) $D_v = \displaystyle\int_{y=0}^{a}\left(\int_{x=0}^{b} v_0\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$, où v_0 est une constante .....

b) $D_v = \displaystyle\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi} A\left(R^2 - r^2\right) r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r$, où A et R sont des constantes ..

Entraînement 23.3 — Estimer un nombre de Reynolds.

Le nombre de Reynolds Re d'un écoulement est défini par $\mathrm{Re} = VL/\nu$, où V et L sont les distance et vitesse caractéristiques de l'écoulement et ν la viscosité cinématique du fluide. Pour l'eau et l'air, on a $\nu_{\text{eau}} = 1{,}0 \times 10^{-6}\,\mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$ et $\nu_{\text{air}} = 1{,}6 \times 10^{-5}\,\mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$.

Dans chacun des cas suivants, calculer le nombre de Reynolds et choisir la réponse qui est la plus proche de votre estimation.

a) Un dauphin nageant à $20\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$

(a) $2{,}8 \times 10^{-3}$ (c) $2{,}8 \times 10^{10}$
(b) $2{,}8 \times 10^{6}$

b) Une balle de tennis allant à $180\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$

(a) $9{,}4 \times 10^{-4}$ (c) $9{,}4 \times 10^{4}$
(b) $9{,}4 \times 10^{7}$

c) Un moucheron tombant à une vitesse constante de $1\,\mathrm{cm \cdot s^{-1}}$

(a) $3{,}1 \times 10^{-1}$ (c) $3{,}1 \times 10^{2}$
(b) $3{,}1 \times 10^{-5}$

Entraînement 23.4 — Estimer le rapport de deux termes.

En raisonnant en termes d'échelles caractéristiques, établir une expression en ordre de grandeur des rapports suivants. Les vitesse et longueur caractéristiques seront notées V et L. Les grandeurs ρ, η et Ω sont des constantes.

Par exemple, en termes d'échelle caractéristique, l'expression $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ *est équivalente à* $\dfrac{V}{T}$*, où* V *est une vitesse caractéristique et* T *un temps caractéristique du problème étudié.*

a) $\dfrac{\|\rho(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{v}\|}{\|\eta\Delta(\vec{v})\|}$

b) $\dfrac{\|\rho(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{v}\|}{\|\rho\vec{\Omega} \wedge \vec{v}\|}$

c) $\dfrac{\|\eta\Delta(\vec{v})\|}{\|\rho\vec{\Omega} \wedge \vec{v}\|}$

Forces dans les fluides

Entraînement 23.5 — Viscosité dynamique et viscosité cinématique.

On note η la viscosité dynamique d'un fluide visqueux et ν sa viscosité cinématique définie par $\nu = \dfrac{\eta}{\rho}$, où ρ est la masse volumique du fluide.

a) Connaissant l'expression $\overrightarrow{f_{\text{vis}}} = \eta\Delta(\vec{v})$ de la force volumique de viscosité au sein d'un fluide newtonien et incompressible, déterminer la dimension d'une viscosité dynamique.

b) En déduire la dimension d'une viscosité cinématique

c) Sachant que, pour l'eau, η vaut 10^{-3} usi (unités S.I.), sa viscosité cinématique vaut :

(a) $\nu = 10^{3}$ usi (b) $\nu = 1$ usi (c) $\nu = 10^{-3}$ usi (d) $\nu = 10^{-6}$ usi

Entraînement 23.6 — Statique des fluides.

La pression $P(z)$ pour un fluide homogène de masse volumique μ au repos dépend de l'altitude : on a

$$P(z) = P_0 - \mu g z.$$

a) Exprimer l'équivalent volumique $-\overrightarrow{\text{grad}}\,P(z)$ des forces de pression.

.....

b) Exprimer la résultante des forces de pression exercées sur une surface S de largeur L selon $(\text{O}y)$ et de hauteur h comprise entre $z = 0$ et $z = h$.

On rappelle que cette résultante est définie par $\overrightarrow{F_P} = -\iint_\Sigma P(\text{M})\,\overrightarrow{n_{\text{ext}}}\,\text{d}S$.

.....

Entraînement 23.7 — Gradient de pression.

L'écoulement d'un fluide homogène de masse volumique μ se fait dans une conduite grâce à un gradient constant de pression dans la direction $(\text{O}x)$ tel que $P(x_1) = P_1$ et $P(x_2 = x_1 + L) = P_2$.

a) Exprimer le gradient de pression $\overrightarrow{\text{grad}}\,P(x)$ du fluide .....

b) Exprimer la pression $P(x)$ du fluide selon l'abscisse x .....

c) Calculer la force de pression exercée sur une section S de la conduite située en $x = L$.

.....

Entraînement 23.8 — Viscosité.

Un écoulement incompressible d'un fluide newtonien de viscosité η a comme champ des vitesses

$$\vec{v}(z) = v(z)\vec{e_x},$$

avec $v(z) = Az^2$.

a) Exprimer l'équivalent volumique $\eta\Delta(\vec{v}(z))$ des forces de viscosité.

.....

b) Exprimer la force de viscosité $\overrightarrow{F_{\text{v}}}$ exercée sur une plaque de surface $S = L^2$ à l'altitude $z = h$ par le fluide situé juste au-dessus.

On rappelle que le fluide exerce sur une surface infinitésimale $\text{d}S$ *la force* $\delta\overrightarrow{F_{\text{v}}} = \eta\dfrac{\partial v}{\partial z}\,\text{d}S\overrightarrow{e_x}$.

.....

Entraînement 23.9 — Nombre de Reynolds.

Une bille en acier de masse volumique $\mu_a = 7{,}8 \times 10^3\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ et de diamètre $d = 2R = 1{,}0\,\text{mm}$ tombe dans un récipient contenant du glycérol, dont la masse volumique est $\mu_g = 1{,}3 \times 10^3\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ et dont la viscosité est $\eta = 0{,}94\,\text{Pa}\cdot\text{s}$.

a) Calculer le nombre de Reynolds Re, défini par $\text{Re} = \dfrac{\mu_g\,\text{d}v}{\eta}$, sachant que la bille atteint la vitesse limite $v_\ell = 3{,}8\,\text{mm}\cdot\text{s}^{-1}$.

.....

b) L'écoulement étant laminaire, calculer la norme de la force de traînée $\vec{F_t} = -6\pi\eta R\vec{v}$ maximale.

.....

c) Calculer la norme de la poussée d'Archimède exercée par le fluide sur la bille $\vec{\Pi} = -\mu_f V_{s,i}\vec{g}$, avec la masse volumique μ_f du fluide et le volume immergé $V_{s,i}$ de la bille. Le champ de pesanteur a pour valeur $g = 9{,}81\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

.....

d) Même question pour la force de pesanteur $\vec{P} = m\vec{g}$ .....

e) Avant d'atteindre un mouvement rectiligne uniforme, la bille est accélérée. En faisant un bilan des forces, donner l'équation différentielle de la vitesse selon l'axe vertical descendant sous la forme

$$\frac{\text{d}v(t)}{\text{d}t} + \frac{v(t)}{\tau} = \left(1 - \frac{\mu_g}{\mu_a}\right)g,$$

en précisant l'expression de τ en fonction de μ_a, R et η

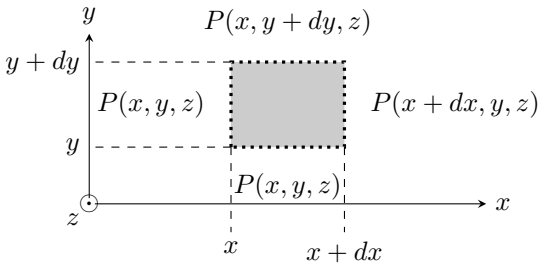
.....

f) Donner l'ordre de grandeur de la durée τ du régime transitoire .....

Entraînement 23.10 — Équivalent volumique des forces de pression.

On cherche la résultante des forces de pression $\text{d}\overrightarrow{F_P}$ que le fluide environnant exerce sur une particule fluide de volume $\text{d}\tau = \text{d}x\,\text{d}y\,\text{d}z$, située entre x et $x + \text{d}x$, y et $y + \text{d}y$, z et $z + \text{d}z$.

La force de pression $\text{d}\vec{F}$ s'exerçant sur un côté de surface $\text{d}S$ de cette particule s'exprime $\text{d}\vec{F} = -P\,\text{d}S\vec{n}$, où $\vec{n}$ est un vecteur unitaire normal à la surface et dirigé de l'intérieur du volume vers l'extérieur.



a) Exprimer la force de pression $\text{d}\overrightarrow{F_g}$ s'exerçant sur la paroi latérale gauche de la particule en fonction de $P(x, y, z)$, $\text{d}y$ et $\text{d}z$.

.....

b) Exprimer la force de pression $\text{d}\overrightarrow{F_d}$ s'exerçant sur la paroi latérale droite de la particule en fonction de $P(x + \text{d}x, y, z)$, $\text{d}y$ et $\text{d}z$.

.....

c) En déduire une expression de la résultante $\mathrm{d}F_{Px}$ des forces de pression suivant $(\mathrm{O}x)$ en fonction de $\mathrm{d}\tau$ et d'une dérivée partielle de P du premier ordre.

.....

d) Reproduire le raisonnement pour exprimer la résultante $\mathrm{d}F_{Py}$ des forces de pression suivant $(\mathrm{O}y)$ en fonction de $\mathrm{d}\tau$ et d'une dérivée partielle de P du premier ordre.

.....

e) Reproduire le raisonnement pour exprimer la résultante $\mathrm{d}F_{Pz}$ des forces de pression suivant $(\mathrm{O}z)$ en fonction de $\mathrm{d}\tau$ et d'une dérivée partielle de P du premier ordre.

.....

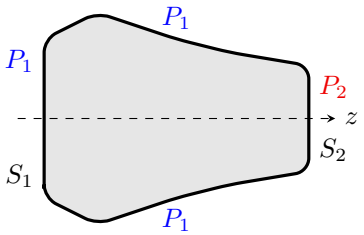
f) En déduire l'expression vectorielle de la force volumique de pression $\overrightarrow{f_P}$ en fonction de P au sein du fluide.

.....

Entraînement 23.11 — Surface fermée soumise à une pression non uniforme.

On cherche la résultante des forces de pression $\overrightarrow{F_P}$ qui s'exerce sur un solide de révolution d'axe $(\mathrm{O}z)$, de surface fermée Σ, constituée de deux sections planes S_1 et S_2 perpendiculaires à $(\mathrm{O}z)$, reliées par une surface latérale S_{lat} de forme quelconque.

La surface latérale S_{lat} comme la section S_1 sont soumises à une pression P_1 tandis que la section S_2 est soumise à la pression P_2.



On rappelle que $\oiint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}\overrightarrow{S}_{\text{ext}} = \iiint_{\mathcal{V}} \overrightarrow{\text{grad}}\,P\,\mathrm{d}\tau$, où $\mathcal{V}$ est le volume limité par la surface fermée Σ.

a) Que vaudrait la résultante des forces de pression s'exerçant sur Σ si on avait $P_1 = P_2$?

.....

b) La distribution des pressions qui s'exercent sur Σ est équivalente à la superposition d'une distribution uniforme P_1 sur l'ensemble de Σ et d'une pression extérieure P' appliquée sur la partie droite de la seule section S_2, avec :

(a) $P' = P_2$ (b) $P' = P_2 - P_1$ (c) $P' = P_1 + P_2$

.....

c) La résultante des forces de pression qui s'exerce sur le solide de surface fermée Σ vaut :

(a) $\overrightarrow{F_P} = (P_2 - P_1)S_1\overrightarrow{e_z}$
(b) $\overrightarrow{F_P} = (P_1 - P_2)S_1\overrightarrow{e_z}$
(c) $\overrightarrow{F_P} = (P_2 - P_1)S_2\overrightarrow{e_z}$
(d) $\overrightarrow{F_P} = (P_1 - P_2)S_2\overrightarrow{e_z}$

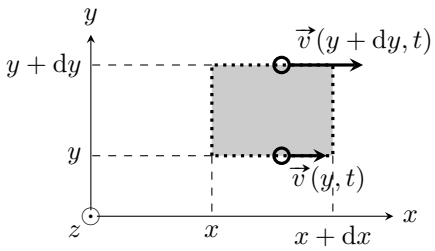
.....

Entraînement 23.12 — Équivalent volumique des forces de viscosité.

Pour un champ des vitesses de la forme

$$\vec{v}(\mathrm{M},t) = v_x(y,t)\vec{e_x},$$

une particule de fluide de volume $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ est soumise à des forces visqueuses $\mathrm{d}\vec{F_1}$ et $\mathrm{d}\vec{F_2}$ s'exerçant sur ses faces inférieure (à la cote y) et supérieure (à la cote $y+\mathrm{d}y$).



La force visqueuse $\mathrm{d}\vec{F}_v$ exercée par une particule de fluide sur celle se trouvant **au-dessus** s'écrit :

$$\mathrm{d}\vec{F_\mathrm{v}} = -\eta\frac{\partial v_x}{\partial y}\,\mathrm{d}S\vec{e_x},$$

où η est la viscosité dynamique du fluide et $\mathrm{d}S$ la surface de contact.

a) Quel cas parmi les quatre choix suivants est-il celui qui convient ?

(a) $\begin{cases}\mathrm{d}\vec{F_1}(y,t) = +\eta\dfrac{\partial v_x}{\partial y}(y,t)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\vec{e_x}\\ \mathrm{d}\vec{F_2}(y+\mathrm{d}y,t) = +\eta\dfrac{\partial v_x}{\partial y}(y+\mathrm{d}y,t)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\vec{e_x}\end{cases}$

(c) $\begin{cases}\mathrm{d}\vec{F_1}(y,t) = +\eta\dfrac{\partial v_x}{\partial y}(y,t)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\vec{e_x}\\ \mathrm{d}\vec{F_2}(y+\mathrm{d}y,t) = -\eta\dfrac{\partial v_x}{\partial y}(y+\mathrm{d}y,t)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\vec{e_x}\end{cases}$

(b) $\begin{cases}\mathrm{d}\vec{F_1}(y,t) = -\eta\dfrac{\partial v_x}{\partial y}(y,t)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\vec{e_x}\\ \mathrm{d}\vec{F_2}(y+\mathrm{d}y,t) = -\eta\dfrac{\partial v_x}{\partial y}(y+\mathrm{d}y,t)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\vec{e_x}\end{cases}$

(d) $\begin{cases}\mathrm{d}\vec{F_1}(y,t) = -\eta\dfrac{\partial v_x}{\partial y}(y,t)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\vec{e_x}\\ \mathrm{d}\vec{F_2}(y+\mathrm{d}y,t) = +\eta\dfrac{\partial v_x}{\partial y}(y+\mathrm{d}y,t)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\vec{e_x}\end{cases}$

.....

b) En déduire l'expression de la résultante $\mathrm{d}\vec{F} = \mathrm{d}\vec{F_1} + \mathrm{d}\vec{F_2}$ des forces de viscosité sur le volume $\mathrm{d}\tau$ en fonction de $\mathrm{d}\tau$, η et d'une dérivée partielle de v_x du second ordre.

.....

c) En généralisant le résultat obtenu à la question précédente, quelle est, pour un champ eulérien de vitesses quelconque $\vec{v}(\mathrm{M},t)$, l'expression de l'équivalent volumique des forces de viscosité au sein d'un fluide visqueux newtonien et incompressible ?

(a) $\overrightarrow{f_\mathrm{vis}} = \eta\Delta(\vec{v})$

(b) $\overrightarrow{f_\mathrm{vis}} = -\eta\Delta(\vec{v})$

(c) $\overrightarrow{f_\mathrm{vis}} = \eta\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}(\vec{v}))$

.....

Autour de l'équation de Navier-Stokes

Entraînement 23.13 — À propos de la dérivée particulaire.

On considère un fluide de masse volumique ρ en écoulement avec un champ eulérien des vitesses $\vec{v}(\mathrm{M},t)$.

On pourra se reporter à l'expression de la dérivée particulaire rappelée en prérequis.

a) Le terme $\rho\dfrac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t}$ a la dimension d'une :

(a) accélération massique
(b) accélération volumique
(c) force massique
(d) force volumique

.....

b) Le terme $\dfrac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t}$ est nul pour tout écoulement :

(a) uniforme et stationnaire
(b) incompressible et stationnaire
(c) incompressible
(d) uniforme

.....

c) On considère l'écoulement incompressible, stationnaire et homogène d'un fluide dont les lignes de courant sont rectilignes et parallèles. Que vaut $\dfrac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t}$?

.....

Entraînement 23.14 — Statique des fluides en référentiel non galiléen.

L'eau, fluide newtonien homogène de viscosité dynamique constante $\eta = 10^{-3}\,\mathrm{Pa}\cdot\mathrm{s}$ et de masse volumique $\mu = 1{,}0\times10^{3}\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$, est soumise au champ de pesanteur uniforme $\vec{g}$ et se trouve au repos dans un récipient. On note $(\mathrm{O}z)$ l'axe vertical ascendant.

a) Simplifier l'équation de Navier-Stokes (rappelée en prérequis).

On notera $\vec{F}_{\mathrm{V,a}}$ la résultante des forces volumiques autres que celles de pression appliquées au fluide.

.....

b) Le récipient contenant l'eau est en translation d'accélération $\vec{a}_{\mathrm{M}}(t) = a\vec{e_x}$ par rapport à un référentiel galiléen. Choisir la bonne réponse.

(a) $\vec{F}_{\mathrm{V,a}} = \mu g\vec{e_z} + \mu a\vec{e_x}$
(b) $\vec{F}_{\mathrm{V,a}} = \mu g\vec{e_z} - \mu a\vec{e_x}$
(c) $\vec{F}_{\mathrm{V,a}} = -\mu g\vec{e_z} + \mu a\vec{e_x}$
(d) $\vec{F}_{\mathrm{V,a}} = -\mu g\vec{e_z} - \mu a\vec{e_x}$

.....

c) Comme précédemment, l'eau est soumise au champ de pesanteur terrestre uniforme $\vec{g}$ mais, cette fois-ci, le récipient et son contenu sont en rotation uniforme autour de l'axe $(\mathrm{O}z)$ ascendant à la vitesse angulaire ω constante par rapport à un référentiel galiléen. Choisir la bonne réponse.

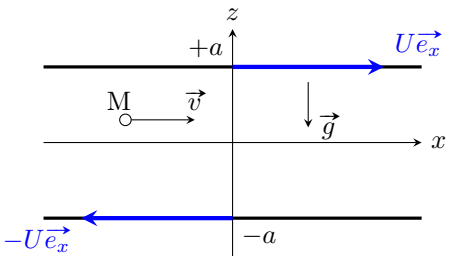
(a) $\vec{F}_{\mathrm{V,a}} = \mu g\vec{e_z} + \mu\omega r^2\vec{e_r}$
(b) $\vec{F}_{\mathrm{V,a}} = \mu g\vec{e_z} - \mu\omega r^2\vec{e_r}$
(c) $\vec{F}_{\mathrm{V,a}} = -\mu g\vec{e_z} + \mu\omega r^2\vec{e_r}$
(d) $\vec{F}_{\mathrm{V,a}} = -\mu g\vec{e_z} - \mu\omega r^2\vec{e_r}$

.....

Entraînement 23.15 — Écoulement de Couette plan.

On considère l'écoulement stationnaire d'un fluide newtonien incompressible de viscosité dynamique η entre deux plaques situées en $z = -a$ et $z = +a$, de dimensions suivant (Ox) et (Oy) supposées infinies.

Les deux plaques sont mobiles suivant $\vec{e_x}$ de vitesses respectives $-U\vec{e_x}$ et $+U\vec{e_x}$. On adopte les conditions aux limites $\vec{v}(a) = U\vec{e_x}$ et $\vec{v}(-a) = -U\vec{e_x}$.



On suppose le champ eulérien des vitesses dans l'écoulement du type $\vec{v}(\mathrm{M}) = v(z)\vec{e_x}$. Le champ de pression sera supposé ne dépendre ici que de z. On note $\vec{g} = -g\vec{e_z}$ le champ de pesanteur local.

On pourra se reporter à l'expression de la dérivée particulaire ainsi qu'à l'équation de Navier-Stokes (rappelées en prérequis) avec ici $\vec{f} = \vec{0}$.

Pour un champ vectoriel $\vec{A} = A_x\vec{e_x} + A_y\vec{e_y} + A_z\vec{e_z}$, on rappelle les expressions de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$ et de $\Delta\vec{A}$:

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta\vec{A} = \begin{pmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{pmatrix},$$

avec par exemple $\Delta A_x = \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}$.

a) Calculer l'accélération particulaire $\dfrac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t}$ de cet écoulement .....

b) Le laplacien vectoriel du champ des vitesses s'écrit pour cet écoulement :

(a) $\Delta(\vec{v}) = \vec{0}$ (b) $\Delta(\vec{v}) = \dfrac{\mathrm{d}^2 v(z)}{\mathrm{d}z^2}\vec{e_x}$ (c) $\Delta(\vec{v}) = \dfrac{\mathrm{d}^2 v(z)}{\mathrm{d}z^2}\vec{e_z}$

.....

c) Exprimer la loi $v(z)$ en fonction de U, a et z .....

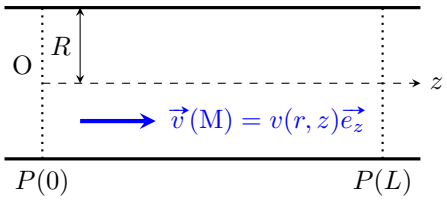
d) Le $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v})$ associé à cet écoulement vaut :

(a) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v}) = \vec{0}$ (b) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v}) = \dfrac{U}{a}\vec{e_x}$ (c) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v}) = \dfrac{U}{a}\vec{e_y}$ (d) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v}) = -\dfrac{U}{a}\vec{e_y}$

.....

Entraînement 23.16 — Écoulement de Poiseuille cylindrique.

Un fluide newtonien incompressible de viscosité dynamique η s'écoule en régime stationnaire dans une canalisation cylindrique d'axe (Oz), de longueur L et de rayon R. On néglige les effets de la pesanteur.



Du fait des symétries du problème, on cherche en coordonnées cylindriques un champ des vitesses et un champ de pression de la forme $\vec{v}(M) = v(r,z)\vec{e_z}$ et $P(M) = P(r,z)$.

On donne pour de tels champs : $\overrightarrow{\text{grad}}\, P = \dfrac{\partial P}{\partial r}\vec{e_r} + \dfrac{\partial P}{\partial z}\vec{e_z}$ et $\text{div}(\vec{v}) = \dfrac{\partial v(r,z)}{\partial z}$.

L'écoulement est régi par l'équation de Navier-Stokes qui s'écrit ici : $\vec{0} = -\overrightarrow{\text{grad}}(P) + \eta\Delta(\vec{v})$.

Du fait de la prise en compte de la viscosité, la vitesse du fluide s'annule sur les parois de la canalisation en $r = R$.

a) Obtenir à partir de l'équation de conservation de la masse (rappelée en prérequis), avec ici $\rho = \text{cste}$, une équation aux dérivées partielles vérifiée par $v(r,z)$. On en déduit que :

(a) $v(r,z) = C$, où C est une constante
(b) $v(r,z)$ ne dépend que de r
(c) $v(r,z)$ ne dépend que de z
(d) $v(r,z)$ dépend de r et z

.....

On donne pour le champ de vitesse de cet écoulement : $\Delta(\vec{v}) = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial v(r,z)}{\partial r}\right)\vec{e_z}$.

b) Le champ de pression est tel que :

(a) $\dfrac{\partial P}{\partial r} = \text{cste}$
(b) $\dfrac{\partial P}{\partial r}$ ne dépend que de z
(c) $\dfrac{\partial P}{\partial r}$ ne dépend que de r
(d) $\dfrac{\partial P}{\partial r}$ dépend de r et z

.....

c) Le champ de pression est tel que :

(a) $\dfrac{\partial P}{\partial z} = \text{cste}$
(b) $\dfrac{\partial P}{\partial z}$ ne dépend que de z
(c) $\dfrac{\partial P}{\partial z}$ ne dépend que de r
(d) $\dfrac{\partial P}{\partial z}$ dépend de r et z

.....

d) Le champ des vitesses s'écrit :

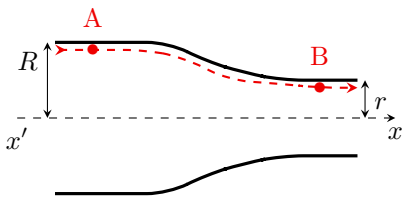
(a) $v(r) = \dfrac{[P(0)-P(L)]}{\eta L}(R^2 - r^2)$
(b) $v(r) = \dfrac{[P(0)-P(L)]}{2\eta L}(R^2 - r^2)$
(c) $v(r) = \dfrac{[P(L)-P(0)]}{4\eta L}(R^2 - r^2)$
(d) $v(r) = \dfrac{[P(0)-P(L)]}{4\eta L}(R^2 - r^2)$

.....

Entraînement 23.17 — Écoulement parfait.

Un liquide non visqueux et de masse volumique μ subit un écoulement dans une conduite de section variable.

On représente la situation par le schéma ci-contre.



a) Simplifier l'équation de Navier-Stokes (voir prérequis, avec $\vec{f} = \vec{0}$) sachant que la force de pesanteur agit. Cette équation s'appelle *l'équation d'Euler*.

.....

b) L'écoulement fluide est considéré comme parfait, stationnaire, incompressible et homogène. L'équation d'Euler conduit à la relation de Bernoulli sur une ligne de courant entre A et B.

$$\mu\frac{v_\mathrm{A}^2}{2} + \mu g R + P_\mathrm{A} = \mu\frac{v_\mathrm{B}^2}{2} + \mu g r + P_\mathrm{B}$$

Simplifier cette expression en exprimant $v_\mathrm{B}^2 - v_\mathrm{A}^2$ sachant que $P_\mathrm{A} - P_\mathrm{B} = \Delta P - \mu g(R - r)$.

.....

c) L'écoulement étant incompressible, le débit volumique D_V se conserve : $D_V = v_\mathrm{A} S = v_\mathrm{B} s$.

Exprimer le débit volumique en fonction de μ, ΔP, s et S .....

Entraînements supplémentaires

Entraînement 23.18 — Écoulement de Poiseuille plan.

Sous l'effet d'un gradient de pression, un fluide incompressible de masse volumique μ et de viscosité η circule entre deux plans immobiles et horizontaux d'altitudes $z = \pm h$. L'écoulement est laminaire en régime permanent et le champ de vitesses est de la forme $\vec{v}(z) = v(z)\vec{e_x}$. Du fait de la symétrie du problème, les grandeurs sont indépendantes de la variable y.

a) Calculer l'accélération d'une particule de fluide (voir l'expression de la dérivée particulaire en prérequis).

.....

b) Simplifier l'équation de Navier-Stokes (voir prérequis) .....

c) Projeter l'expression précédente sur l'axe (Ox) .....

d) Déterminer le champ de vitesses de l'équation avec le gradient de pression horizontal $A > 0$ constant et sachant que $v(x = 0) = v_0$ et $v(x = \pm h) = 0$. On donne $\eta \dfrac{\mathrm{d}^2 v(z)}{\mathrm{d}z^2} = -A$.

Exprimer $v(z)$ en fonction de v_0, A, h, η et z .....

e) En considérant que la pression ne varie pas avec l'altitude, même question que précédemment pour le champ de pression de l'équation sachant que $P(x = 0) = P_0$. On donne $\dfrac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x} = -A$.

Exprimer $P(x)$ en fonction de P_0, v_0, h et x .....

Entraînement 23.19 — Écoulement de Couette plan.

Un fluide incompressible de masse volumique μ et de viscosité η est initialement au repos dans le champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{e_z}$ entre deux plans horizontaux $z = 0$ et $z = h$. Le déplacement du plan supérieur en $z = h$ à la vitesse constante $\vec{v}(h) = v_p\vec{e_x}$ met en mouvement le fluide. Du fait de la symétrie du problème, toutes les grandeurs sont indépendantes de la variable y. Le champ de pression dépend uniquement de la variable z.

a) Le champ de vitesses a la forme $\vec{v}(z,t) = v(z,t)\vec{e_x}$. Simplifier l'équation de Navier-Stokes.

.....

b) Écrire la projection selon l'axe (Ox) de l'équation précédente .....

c) Exprimer, grâce à l'équation précédente, en fonction de μ, η, h, et en ordre de grandeur, la durée τ du régime transitoire.

.....

d) Estimer cette durée (en h/min/s) sur une hauteur $h = 1{,}0\,\mathrm{dm}$ pour l'eau, dont la viscosité cinématique est $\nu = \dfrac{\eta}{\mu} = 1{,}0 \times 10^{-6}\,\mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$.

.....

e) Écrire précisément et le plus simplement possible l'équation $\mu \dfrac{\partial v(z,t)}{\partial t} = \eta \dfrac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2}$ quand le régime est stationnaire.

.....

f) Déterminer précisément le profil de vitesse correspondant à l'équation précédente, sachant, comme le fluide est visqueux, on a $v(z = 0) = 0$ et $v(z = h) = v_p$.

.....

g) En déduire la force de viscosité $\vec{F_\mathrm{v}}$ exercée sur le plan supérieur de surface S, qui est définie par la formule $\vec{F_\mathrm{v}} = -\eta \left(\dfrac{\mathrm{d}v(z)}{\mathrm{d}z} \right)_{z=h} S\vec{e_x}$ .....

Entraînement 23.20 — Forme étendue de la relation de Bernoulli.

On considère l'écoulement stationnaire, incompressible et irrotationnel d'un fluide parfait, uniquement soumis à des forces conservatives (pression et pesanteur), régi par l'équation aux dérivées partielles :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\vec{v}^2}{2}\right) = -\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{P}{\rho}\right) + \vec{g}.$$

a) En choisissant l'axe (Oz) vertical ascendant, la quantité $C = P + \dfrac{\rho\vec{v}^2}{2} + \rho g z$ (appelée *charge*) est :

(a) une constante indépendante du temps, identique en tout point de l'écoulement irrotationnel, stationnaire, incompressible et parfait ;

(b) constante le long de la ligne de courant choisie, mais fonction du temps ;

(c) une constante indépendante du temps ne dépendant que de la ligne de courant choisie.

.....

b) La chute de pression au passage d'un cyclone présentant des vents de $200\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ vaut en ordre de grandeur (on négligera les effets de la pesanteur et on donne $\rho_{\text{air}} = 1{,}2\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$) :

(a) $P_{\max} - P_{\min} = 2\,\text{bar}$

(b) $P_{\max} - P_{\min} = 0{,}2\,\text{bar}$

(c) $P_{\max} - P_{\min} = 20\,\text{mbar}$

(d) $P_{\max} - P_{\min} = 2\,\text{mbar}$

.....

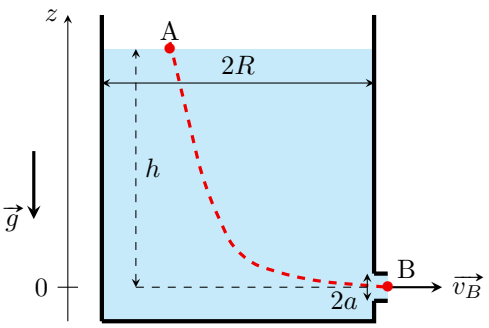
Entraînement 23.21 — Vidange d'un récipient et formule de Torricelli.

On envisage l'écoulement parfait et incompressible d'un liquide de masse volumique ρ contenu dans un récipient cylindrique de rayon R à travers un orifice de rayon a. On note h le dénivelé entre la surface libre du liquide et le trou.

On suppose que $a \ll R$, ce qui permet de considérer que le régime d'écoulement est stationnaire dans le récipient (ou quasi stationnaire).

La surface libre du liquide ainsi que le jet en sortie sont au contact de l'atmosphère de pression uniforme P_0.

On note $\vec{g} = -g\vec{e_z}$ le champ de pesanteur supposé uniforme.



On rappelle la relation simple de Bernoulli applicable sur une ligne de courant pour un écoulement parfait, stationnaire, incompressible, où toutes les forces appliquées sont conservatives : $P + \rho g z + \rho\dfrac{v^2}{2} = \text{cste}$, où (Oz) est la verticale ascendante.

a) En appliquant la relation de Bernoulli à la ligne de courant allant de A à B, établir une relation liant v_A, v_B, g et h.

.....

b) En exploitant la conservation du débit-volume, exprimer v_B en fonction de v_A, R et a.

.....

c) Simplifier l'expression de v_B obtenue en a) compte tenu du fait que $a \ll R$ .....

Entraînement 23.22 — Forme simple de la relation de Bernoulli.

Soit l'écoulement incompressible (de masse volumique ρ) et stationnaire d'un fluide parfait (non visqueux), uniquement soumis à des forces conservatives (pression et champ de pesanteur uniforme), régi par l'équation d'Euler :

$$\frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{P}{\rho}\right) + \vec{g}.$$

On rappelle l'identité vectorielle :

$$\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{\vec{v}^{\,2}}{2}\right) + \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v})\wedge\vec{v}.$$

Enfin, on rappelle que :

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\phi)\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \phi(\mathrm{B}) - \phi(\mathrm{A}).$$

a) En prenant $(\mathrm{O}z)$ suivant la verticale ascendante, on peut écrire :

(a) $\vec{g} = +\overrightarrow{\mathrm{grad}}(gz)$
(b) $\vec{g} = +\overrightarrow{\mathrm{grad}}(gz^2)$
(c) $\vec{g} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(gz)$
(d) $\vec{g} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(gz^2)$

.....

b) On fait circuler l'équation d'Euler à un instant donné le long d'une ligne de courant entre deux points A et B, c'est-à-dire en formant $\displaystyle\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}$.

En utilisant l'expression de la dérivée particulaire rappelée en prérequis, le calcul conduit à :

(a) $\dfrac{v_{\mathrm{B}}^2 - v_{\mathrm{A}}^2}{2} = \dfrac{P_{\mathrm{A}} - P_{\mathrm{B}}}{\rho} - g(z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{B}})$
(b) $\dfrac{v_{\mathrm{B}}^2 - v_{\mathrm{A}}^2}{2} = \dfrac{P_{\mathrm{B}} - P_{\mathrm{A}}}{\rho} + g(z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}})$
(c) $\dfrac{v_{\mathrm{B}}^2 - v_{\mathrm{A}}^2}{2} = \dfrac{P_{\mathrm{A}} - P_{\mathrm{B}}}{\rho} - g(z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}})$

.....

c) Pour un écoulement stationnaire et incompressible d'un fluide parfait, soumis à des forces toutes conservatives, la quantité $P + \dfrac{\rho\vec{v}^{\,2}}{2} + \rho g z$, où $(\mathrm{O}z)$ est suivant la verticale ascendante du lieu, est :

(a) une constante indépendante du temps, identique en tout point de l'écoulement vérifiant les hypothèses précédentes ;
(b) constante le long de la ligne de courant choisie, mais fonction du temps ;
(c) une constante indépendante du temps ne dépendant que de la ligne de courant choisie.

.....

Entraînement 23.23 — Adimensionnement de l'équation de Navier-Stokes.

On considère l'écoulement d'un fluide newtonien visqueux (de viscosité dynamique η) et incompressible, de masse volumique ρ, régi par l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}\right)=-\overrightarrow{\text{grad}}\,P+\rho\vec{g}+\eta\Delta(\vec{v}),$$

où $\vec{g}=-g\vec{e_z}$ désigne le champ de pesanteur supposé uniforme. L'axe $(\text{O}z)$ est suivant la verticale ascendante.

Soit T une durée, L une longueur commune sur les trois axes $(\text{O}x)$, $(\text{O}y)$, $(\text{O}z)$ et U une vitesse, trois grandeurs caractéristiques de l'écoulement.

On définit les variables sans dimension $t^*=\dfrac{t}{T}$, $x^*=\dfrac{x}{L}$ (idem pour y^* et z^*), ainsi que $\vec{v^*}=\dfrac{\vec{v}}{U}$.

On note $\overrightarrow{\text{grad}}^*=L\,\overrightarrow{\text{grad}}$ l'opérateur gradient et $\Delta^*=L^2\,\Delta$ l'opérateur laplacien adimensionnés.

On cherche à réécrire l'équation de Navier-Stokes sous la forme adimensionnée :

$$\mathcal{S}_{\text{tr}}\frac{\partial\vec{v^*}}{\partial t^*}+\left(\vec{v^*}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}^*\right)\vec{v^*}=-\overrightarrow{\text{grad}}^*\left(\frac{P}{P^*}\right)-\frac{1}{\mathcal{F}_{\text{r}}}\vec{e_z}+\frac{1}{\text{Re}}\Delta^*(\vec{v^*}),$$

où $\mathcal{S}_{\text{tr}}$ est appelé nombre de Strouhal, $\mathcal{F}_{\text{r}}$ le nombre de Froude et Re le nombre de Reynolds.

La grandeur P^* a la dimension d'une pression.

a) Réécrire $\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t}$ en fonction de $\dfrac{\partial\vec{v^*}}{\partial t^*}$, U et T .....

b) Réécrire $\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}$ en fonction de $\left(\vec{v^*}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}^*\right)\vec{v^*}$, U et L .....

c) Réécrire $\Delta(\vec{v})$ en fonction de $\Delta^*(\vec{v^*})$, U et L .....

d) Exprimer P^* en fonction de ρ et U .....

e) Exprimer le nombre de Strouhal $\mathcal{S}_{\text{tr}}$ en fonction de L, T et U .....

f) Exprimer le nombre de Froude $\mathcal{F}_{\text{r}}$ en fonction de L, g et U .....

g) Exprimer le nombre de Reynolds Re en fonction de η, ρ, L et U .....

Réponses mélangées

$0{,}5\,\text{ms}$ $\quad v(r) = -\dfrac{KR^2}{4}\left(1 - \dfrac{r^2}{R^2}\right)$ $\quad M.L^{-1}.T^{-1}$ $\quad$ (a) $\quad \dfrac{U^2}{L}\left(\vec{v^*} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}^*\right)(\vec{v^*})$

(d) $\quad$ (c) $\quad 2\text{ h }46\text{ min }40\text{ s}$ $\quad L\left(P_0 h - \mu g \dfrac{h^2}{2}\right)\vec{e_z}$ $\quad 3{,}4 \times 10^{-5}\,\text{N}$ $\quad$ (d)

$-P(x + \mathrm{d}x, y, z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\vec{e_x}$ $\quad$ (d) $\quad -\dfrac{\partial P}{\partial z}\,\mathrm{d}\tau$ $\quad U\dfrac{z}{a}$ $\quad 6{,}7 \times 10^{-6}\,\text{N}$ $\quad \dfrac{U}{T}\dfrac{\partial \vec{v^*}}{\partial t^*}$

$\mu g\vec{e_z}$ $\quad \vec{0} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P(\text{M}, t) + \vec{F}_{\text{V,a}}$ $\quad \dfrac{2\mu_\text{a} R^2}{9\eta}$ $\quad \dfrac{R^2}{a^2}v_\text{A}$ $\quad$ (a) $\quad \eta\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\,\mathrm{d}\tau\,\vec{e_x}$

(c) $\quad -\dfrac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}\tau$ $\quad 2A\eta\vec{e_x}$ $\quad$ (b) $\quad \dfrac{\mathrm{d}^2 v(z)}{\mathrm{d}z^2} = 0$ $\quad \dfrac{\partial P(x,z)}{\partial x} = \eta\dfrac{\partial^2 v(z)}{\partial z^2}$

$L^2.T^{-1}$ $\quad \vec{0}$ $\quad \dfrac{P_2 - P_1}{L}(x - x_1) + P_1$ $\quad D_v = A\pi\dfrac{R^4}{2}$ $\quad v_\text{B}^2 = v_\text{A}^2 + 2gh$ $\quad$ (b)

(b) $\quad$ (c) $\quad \dfrac{L}{UT}$ $\quad \vec{0}$ $\quad -\overrightarrow{\text{grad}}\,P$ $\quad \dfrac{\rho V L}{\eta}$ $\quad$ (c) $\quad \dfrac{\eta}{\rho\Omega L^2}$ $\quad \sqrt{2gh}$

ρU^2 $\quad \dfrac{\rho L U}{\eta}$ $\quad v(z) = \dfrac{v_p}{h}z$ $\quad \dfrac{\mu}{\eta}h^2$ $\quad$ (d) $\quad D_V = v_\text{B}s = Ss\sqrt{\dfrac{2\Delta P}{\mu(S^2 - s^2)}}$

$\dfrac{P_2 - P_1}{L}\vec{e_x}$ $\quad \left[\dfrac{P_1 - P_2}{L}(L - x_1) + P_1\right]S\vec{e_x}$ $\quad$ (c) $\quad$ (c) $\quad$ (a) $\quad \vec{0}$ $\quad -\eta\dfrac{v_p}{h}S\vec{e_x}$

$P(x, y, z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\vec{e_x}$ $\quad \dfrac{U}{L^2}\Delta^*(\vec{v^*})$ $\quad$ (a) $\quad \mu\dfrac{\partial \vec{v}(z,t)}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P(z,t) + \eta\Delta\vec{v}(z,t) + \mu\vec{g}$

$4{,}0 \times 10^{-5}\,\text{N}$ $\quad$ (d) $\quad v(y) = \dfrac{v_0}{a}y$ $\quad$ (d) $\quad D_v = v_0 ab$ $\quad \dfrac{V}{\Omega L}$ $\quad$ (c)

$\mu\left(\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}\right) = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P + \mu\vec{g}$ $\quad$ (b) $\quad \dfrac{U^2}{gL}$ $\quad \vec{0}$ $\quad v(z) = v_0\left(1 - \dfrac{z^2}{h^2}\right)$ $\quad$ (b)

$5{,}2 \times 10^{-3}$ $\quad \vec{0} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P(x,z) + \eta\Delta\vec{v}(z) + \mu\vec{g}$ $\quad$ (a) $\quad \dfrac{2\Delta P}{\mu}$ $\quad -\dfrac{\partial P}{\partial x}\,\mathrm{d}\tau$

$\mu\dfrac{\partial v(z,t)}{\partial t} = \eta\dfrac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2}$ $\quad v(y) = \dfrac{v_0}{a}y - \dfrac{K}{2}ay\left(1 - \dfrac{y}{a}\right)$ $\quad 2A\eta h L^2\vec{e_x}$ $\quad P(x) = P_0 - \dfrac{2\eta v_0}{h^2}x$

► Réponses et corrigés page 416

Bilans en mécanique des fluides

Prérequis
Débits massique et volumique. Forces pressantes. Moment de force. Puissance d'une force.

Constantes utiles

→ Masse volumique de l'eau liquide dans les conditions standard de pression et température : $\mu = 1{,}0 \times 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$

→ Accélération de la pesanteur : $g = 9{,}81\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$

Bilans d'énergie

Entraînement 24.1 — Quelle est la bonne formule ?

Dans ces expressions, w_i représente un travail indiqué massique, $\mathcal{P}_i$ une puissance indiquée, ΔP une perte de charge en pression et Δh une perte de charge en hauteur.

Les équations suivantes sont-elles homogènes ?

a) $\left(\frac{v_\mathrm{s}^2}{2}\right) = \rho w_i$ .....

b) $D_\mathrm{m}\left(\frac{P_\mathrm{s}}{\rho}\right) = \mathcal{P}_i$ .....

c) $D_\mathrm{m}\left(\frac{P_\mathrm{s}}{\rho} + \frac{v_\mathrm{s}^2}{2} + g z_s\right) - D_\mathrm{m}\left(\frac{P_\mathrm{e}}{\rho} + \frac{v_\mathrm{e}^2}{2} + g z_e\right) = -D_\mathrm{m}\Delta P$ .....

d) $\left(\frac{P_\mathrm{s}}{\rho g} + \frac{v_\mathrm{s}^2}{2g} + z_s\right) - \left(\frac{P_\mathrm{e}}{\rho g} + \frac{v_\mathrm{e}^2}{2g} + z_e\right) = -\Delta h$ .....

Entraînement 24.2 — Perte de charge et conversion.

On rappelle la relation de Bernoulli généralisée :

$$\frac{1}{2}\Delta v^2 + \frac{\Delta P}{\mu_0} + g\Delta z = w_u - g h_\mathrm{pc}.$$

a) On donne $h_\mathrm{pc} = 3{,}0\,\mathrm{m}$. Sachant que $\mu_0 = 2{,}0 \times 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, $g = 9{,}8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, calculer la perte de pression ΔP_pc correspondant à cette perte de charge.

.....

b) La perte de charge précédente est due à la montée du fluide dans un tuyau vertical de hauteur $L = 10\,\mathrm{m}$. Au milieu de ce tuyau se situe une pompe qui fournit un travail massique utile w_u au fluide.

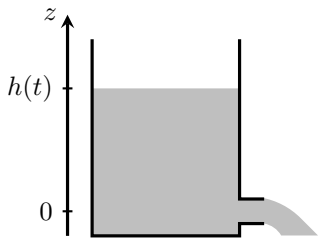
Quelle doit être la valeur de ce travail massique pour qu'il n'y ait ni variation de vitesse ni variation de pression du fluide entre l'entrée et la sortie du tuyau ?

.....

Entraînement 24.3 — Hypothèses sur l'écoulement.

Étudions la vidange d'un réservoir rempli d'eau. Le liquide, s'écoule par un orifice de section s très inférieure à la section S du réservoir. La hauteur de fluide, comptée à partir de l'orifice de sortie, est notée $h(t)$ à l'instant t.

À l'instant initial, elle vaut h_0. On négligera toute perte de charge.



Indiquer si les caractéristiques ci-dessous conviennent à la situation.

a) Écoulement incompressible ..... ☐

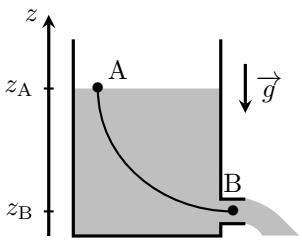
b) Écoulement quasi stationnaire .. ☐

c) Écoulement parfait ..... ☐

d) Fluide homogène ..... ☐

Entraînement 24.4 — Vidange d'un réservoir.

On étudie la vidange d'un réservoir rempli d'eau. Le liquide s'écoule par un orifice de section s très inférieure à la section S du réservoir. On négligera toute perte de charge. On considère une ligne de courant passant par les points A et B représentés sur le schéma. La relation de Bernoulli s'écrit sur cette ligne de courant :



$$\frac{P_A}{\mu} + \frac{v_A^2}{2} + g z_A = \frac{P_B}{\mu} + \frac{v_B^2}{2} + g z_B.$$

a) Que peut-on dire des pressions aux points A et B ?

(a) $P_A < P_B$ (b) $P_A > P_B$ (c) $P_A = P_B$ (d) $P_B = P_A + \mu g(z_A - z_B)$ ☐

b) Le débit volumique au point A s'écrit :

(a) $D_{v,A} = \mu S v_A$ (b) $D_{v,A} = S v_A$ (c) $D_{v,A} = \dfrac{S v_A}{\mu}$ ☐

c) Le débit volumique au point B s'écrit :

(a) $D_{v,B} = \mu s v_B$ (b) $D_{v,B} = s v_B$ (c) $D_{v,B} = \dfrac{s v_B}{\mu}$ ☐

d) Le fluide étant incompressible, il y a conservation du débit volumique. Que peut-on en déduire sur les vitesses en A et en B ?

(a) $v_A = v_B$ (b) $v_A \gg v_B$ (c) $v_A \ll v_B$ ☐

e) On donne $h(t) = z_A - z_B$. En utilisant la relation de Bernoulli et les résultats précédents, quelle expression de v_B est correcte ?

(a) $v_B = \sqrt{2\dfrac{P_A}{\mu} + 2gh(t)}$ (b) $v_B = \sqrt{2gh(t)}$ (c) $v_B = v_A + \sqrt{2gh(t)}$ ☐

Entraînement 24.5 — Simplifier la relation de Bernoulli.

On donne l'expression usuelle de la formule de Bernoulli $\frac{v^2}{2} + gz + \frac{P}{\mu} = \text{cste}$.

a) Comment se simplifie-t-elle si l'écoulement est horizontal ?

.....

b) Comment se simplifie-t-elle si l'écoulement est lent ?

.....

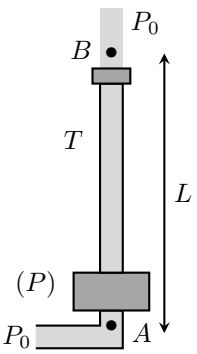
c) On admet qu'elle s'écrit $\frac{v^2}{2} = gh$ à la sortie d'une citerne de hauteur $h = 5\,\text{cm}$.

À quelle vitesse v le fluide est-il éjecté ?

.....

Entraînement 24.6 — Quelle pompe choisir ?

On étudie une fontaine dont le circuit d'eau est présenté ci-contre. Il comprend une pompe (P) fournissant un travail utile massique w_u, reliée à un tube T de longueur $L = 10\,\text{m}$ et de diamètre $D = 10\,\text{mm}$. Lors de son passage dans le tube, le fluide subit une perte de charge régulière correspondant à une perte d'énergie massique $\Delta e_{\text{pcr}} = \frac{1}{2}\xi\frac{L}{D}U^2$ où U est la vitesse débitante du fluide dans le tube et $\xi = 0,022$.



On suppose que, avant la pompe, le fluide est à une pression P_0 et de vitesse négligeable.

On rappelle que le débit volumique s'écrit $D_v = SU$, avec S la section de l'écoulement, ainsi que l'expression de la relation de Bernoulli généralisée :

$$\frac{1}{2}\Delta v^2 + \frac{\Delta P}{\mu} + g\Delta z = w_u - \Delta e_{\text{pcr}}.$$

a) On souhaite une vitesse $U = 7,0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, calculer le débit volumique nécessaire D_v en $\text{L}\cdot\text{s}^{-1}$.

.....

b) Choisir la bonne façon d'appliquer la relation de Bernoulli généralisée au fluide parcourant ce circuit le long d'une ligne de courant AB, A étant avant la pompe et B après le robinet :

(a) $\frac{1}{2}U^2 + gL = w_u - \frac{1}{2}\xi\mu g\frac{L}{D}U^2$ (c) $\frac{1}{2}U^2 + gL = w_u - \frac{1}{2}\xi\frac{L}{D}U^2$

(b) $\frac{1}{2}U^2 + \frac{P_0}{\mu} + gL = w_u - \frac{1}{2}\mu g\xi\frac{L}{D}U^2$ (d) $\frac{1}{2}U^2 + \frac{P_0}{\mu} + gL = w_u - \frac{1}{2}\xi\frac{L}{D}U^2$

.....

c) Pour obtenir un bilan de puissance à partir de la relation précédente, il faut la multiplier par :

(a) D_v (b) μD_v (c) μ

.....

d) Quelle puissance la pompe doit-elle fournir pour atteindre le débit volumique souhaité ?

.....

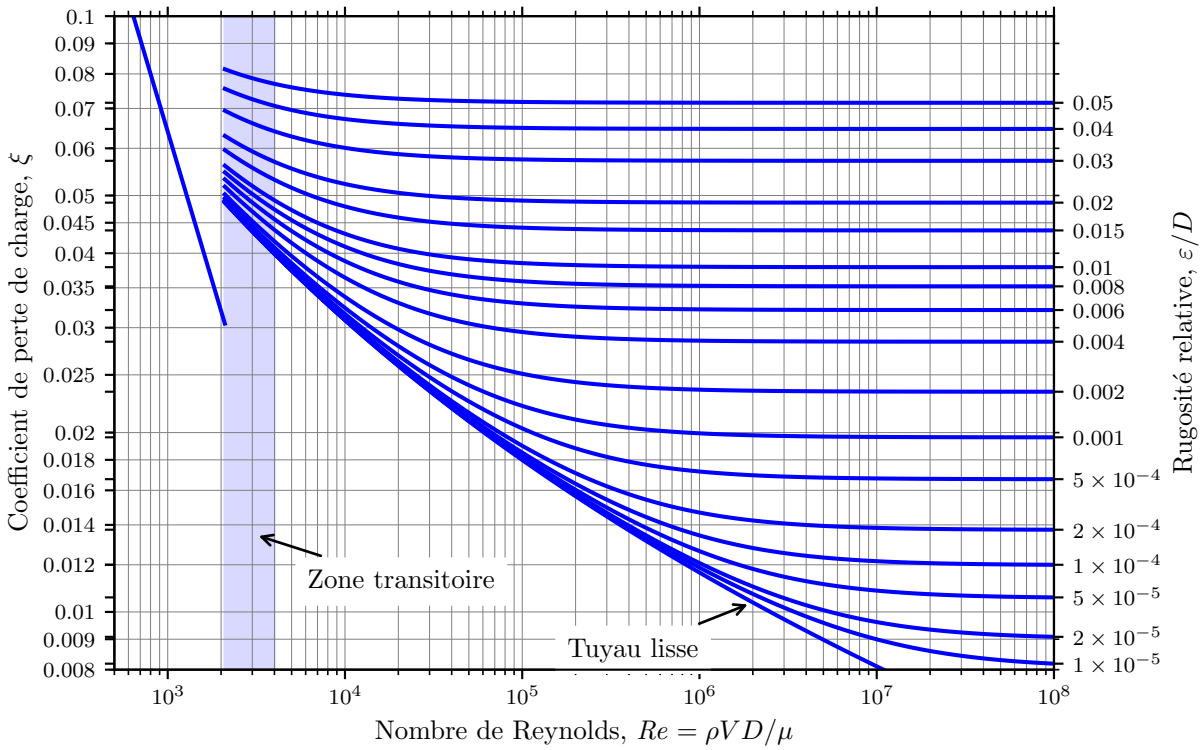
e) Pour atteindre le débit volumique souhaité, on a le choix entre plusieurs pompes de différentes puissances $\mathcal{P}_i$. Laquelle choisir ?

(a) $\mathcal{P}_1 = 100\,\text{W}$ (b) $\mathcal{P}_2 = 300\,\text{W}$ (c) $\mathcal{P}_3 = 500\,\text{W}$ (d) $\mathcal{P}_4 = 700\,\text{W}$

.....

Entraînement 24.7 — Lecture d'un diagramme de Moody.

On donne ci-dessous le diagramme de Moody d'un fluide en écoulement de pleine section dans une conduite cylindrique de longueur ℓ et de diamètre D.



a) On donne $\mathrm{Re} = 2 \times 10^4$ le nombre de Reynolds de l'écoulement, $D = 20\,\mathrm{cm}$ le diamètre de la canalisation et $\varepsilon = 4\,\mathrm{mm}$ la rugosité absolue de la conduite.

En déduire, par lecture graphique, le coefficient de perte de charge ξ dans la canalisation.

.....

b) On donne $\rho = 1 \times 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ la masse volumique du fluide.

Calculer la perte de charge $\Delta P = \dfrac{1}{2}\rho U^2 \xi \dfrac{\ell}{D}$ dans la canalisation pour une vitesse débitante $U = 0{,}5\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ et une longueur $\ell = 10\,\mathrm{m}$.

.....

c) Pour un autre écoulement, de nombre de Reynolds $\mathrm{Re} = 8 \times 10^5$ et de coefficient de perte de charge $\xi = 0{,}015$, déterminer la rugosité relative ε/D par lecture graphique.

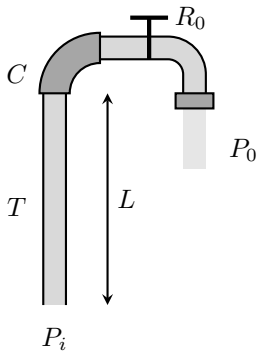
.....

d) En déduire la rugosité absolue ε de la conduite si son diamètre est $D = 30\,\mathrm{cm}$.

.....

Entraînement 24.8 — Pression dans un immeuble.

On étudie le circuit d'eau d'un immeuble. Il comprend un tuyau T de longueur $L = 19\,\text{m}$ permettant d'amener de l'eau jusqu'au dernier étage. Son diamètre est $D = 10\,\text{mm}$. À l'extrémité de ce tube se trouve un coude C permettant l'accès à un robinet R_0.



Au passage dans le coude et dans le robinet, le fluide subit les pertes de charge singulières $\Delta P_C = \dfrac{1}{2}k_1\mu U_1^2$ et $\Delta P_{R_0} = \dfrac{1}{2}k_2\mu U_2^2$ correspondant à des pertes de pression. On note U_1 et U_2 les vitesses débitantes respectivement en amont du coude et du robinet. On donne $k_1 = 1{,}3$ et $k_2 = 1{,}5$.

On rappelle que le débit volumique s'écrit : $D_v = SU$ avec S la section de l'écoulement. On donne la relation de Bernoulli généralisée permettant de prendre en compte les chutes de pression liées à la dissipation d'énergie mécanique au sein d'un écoulement réel (pertes de charges) :

$$\frac{1}{2}\Delta v^2 + \frac{\Delta P}{\mu} + g\Delta z = w_u - \frac{\Delta P_{\text{pc}}}{\mu}.$$

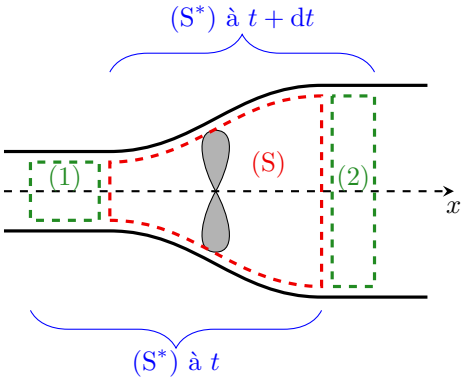
a) Le débit volumique voulu est de $0{,}25\,\text{L}\cdot\text{s}^{-1}$, calculer les vitesses U_1 et U_2 .....

b) Quelle pression P_i faut-il imposer en amont du circuit d'eau, sachant que $P_0 = 1{,}0\,\text{bar}$?

.....

Entraînement 24.9 — Puissance d'une installation.

Une hélice d'hydrolienne est placée dans un écoulement d'eau unidimensionnel à symétrie cylindrique. On note (S*) le système fermé représenté sur le schéma. Dans la suite, P_1, P_2, S_1 et S_2 représentent les pressions et sections des systèmes (1) et (2). On a, de plus, $P_1 = P_2$.



a) La pression autour du tube de courant est supposée uniforme. Que vaut la résultante des forces pressantes qui s'exercent sur (S*) ?

(a) $\vec{F} = (P_1S_1 - P_2S_2)\vec{u}_x$ (c) $\vec{F} = \vec{0}$

(b) $\vec{F} = (P_2S_2 - P_1S_1)\vec{u}_x$

.....

b) Quelle puissance développe cette force ?

(a) $\mathcal{P}(\vec{F}_P) = P_1S_1v_1 - P_2S_2v_2$ (b) $\mathcal{P}(\vec{F}_P) = P_2S_2v_2 - P_1S_1v_1$ (c) $\mathcal{P}(\vec{F}_P) = 0$

.....

c) On note $\mathcal{P}$ la puissance reçue par l'hélice. Quelle puissance est reçue par (S*) ? .....

d) On note D_m le débit massique, l'écoulement étant stationnaire.

Exprimer l'énergie cinétique qui sort de (S*) pendant une durée élémentaire dt.

.....

e) Exprimer l'énergie cinétique qui entre dans (S*) pendant une durée élémentaire dt.

.....

f) Par application du théorème de la puissance cinétique $\dfrac{\mathrm{d}E_c^*}{\mathrm{d}t} = \sum \mathcal{P}_{\text{ext}}$ à (S*), exprimer $\mathcal{P}$ si l'écoulement est horizontal.

On rappelle que les actions intérieures ne travaillent pas lorsqu'on suppose l'écoulement parfait et incompressible.

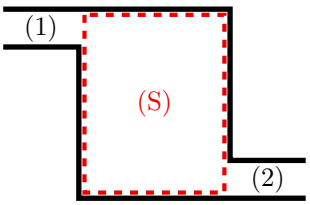
.....

g) On suppose $v_2 \ll v_1$ et on donne $v_1 = 1{,}00\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ et $D_\mathrm{m} = 200\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, calculer $\mathcal{P}$ .....

Bilans de masse

Entraînement 24.10 — Effectuer un bilan de masse sur un système ouvert et fixe.

Soit (S) une surface de contrôle, délimitant un système ouvert et fixe de masse m. Un fluide s'écoule à travers, depuis la canalisation d'entrée (1) jusqu'à la canalisation de sortie (2).



a) Exprimer la masse de fluide dm_1 qui entre dans (S) pendant la durée élémentaire dt, à l'aide du débit massique entrant D_{m1}.

.....

b) Exprimer la masse de fluide dm_2 qui sort de (S) pendant la durée élémentaire dt à l'aide du débit massique sortant D_{m2}.

.....

c) Exprimer la variation de masse dm de (S) en fonction de dm_1 et dm_2 .....

d) En régime stationnaire, on a d$m = 0$. En déduire la relation entre D_{m1} et D_{m2}.

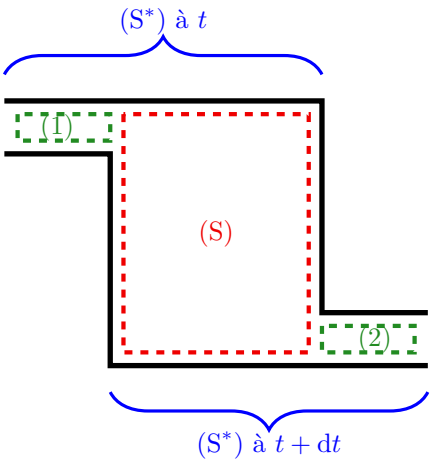
.....

Entraînement 24.11 — Effectuer un bilan de masse sur un système fermé et mobile.

On définit le système (S*) fermé et mobile constitué :

- de (S) et de la masse $\mathrm{d}m_1$ qui y entre, à l'instant t ;
- de (S) et de la masse $\mathrm{d}m_2$ qui en sort, à l'instant $t + \mathrm{d}t$.

On note $m(t)$ la masse de (S) à l'instant t.



a) Exprimer la masse de fluide $m^*(t)$ de (S*) en fonction de $m(t)$ et $\mathrm{d}m_1$.

.....

b) Exprimer la masse de fluide $m^*(t + \mathrm{d}t)$ de (S*) en fonction de $m(t + \mathrm{d}t)$ et $\mathrm{d}m_2$.

.....

c) Exprimer la variation de masse $\mathrm{d}m^*$ de (S*).

.....

d) En régime stationnaire, on a $m(t) = m(t + \mathrm{d}t)$. En déduire la relation entre $\mathrm{d}m_1$ et $\mathrm{d}m_2$.

.....

Réponses mélangées

$\frac{1}{2}D_\mathrm{m}v_2^2\,\mathrm{d}t$ $U_1 = U_2 = 3{,}2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ $3{,}1\times10^2\,\mathrm{Pa}$ $\mathcal{P} = 100\,\mathrm{W}$ homogène (b)

(c) 2×10^{-4} $60\,\mu\mathrm{m}$ non homogène $3{,}0\,\mathrm{bar}$ (b) $\mathrm{d}m_1 = D_{m1}\,\mathrm{d}t$

(c) $\mathrm{d}m_2 = D_{m2}\,\mathrm{d}t$ $\mathrm{d}m^* = 0$ $\frac{1}{2}D_\mathrm{m}v_1^2\,\mathrm{d}t$ $D_v = 0{,}55\,\mathrm{L\cdot s^{-1}}$ $D_{m1} = D_{m2}$

homogène (c) $-\mathcal{P}$ non homogène oui oui $5{,}9\times10^4\,\mathrm{Pa}$

$v = 1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ (c) $\mathrm{d}m_1 = \mathrm{d}m_2$ (b) $gz + \frac{P}{\mu} = \mathrm{cste}$ (b) (c)

$\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\mu} = \mathrm{cste}$ $\mathrm{d}m = \mathrm{d}m_1 - \mathrm{d}m_2$ (c) oui oui $m^*(t + \mathrm{d}t) = m(t + \mathrm{d}t) + \mathrm{d}m_2$

$m^*(t) = m(t) + \mathrm{d}m_1$ $\mathcal{P} = \frac{1}{2}D_\mathrm{m}(v_1^2 - v_2^2)$ $1{,}3\times10^2\,\mathrm{J/kg}$ $\mathcal{P} = 3{,}6\times10^2\,\mathrm{W}$ $\xi = 0{,}05$

▶ Réponses et corrigés page 426

Transformations chimiques

Prérequis
Enthalpie, entropie, enthalpie libre. Premier et second principes de la thermodynamique.
Loi de Hess. Grandeurs de réaction, constante d'équilibre, déplacements d'équilibre.
Énergie de liaison.

Constantes utiles

→ Constante des gaz parfaits : $R = 8{,}314\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$

Dans cette fiche, ν_i désigne les nombres stœchiométriques algébriques, c'est-à-dire pris positivement pour les produits et négativement pour les réactifs.

Utilisation des relations fondamentales

Entraînement 25.1 — Déterminer une enthalpie standard de réaction (I).

La loi de Hess permet d'exprimer une enthalpie standard de réaction $\Delta_r H^\circ$ en fonction des enthalpies standard de formation $\Delta_f H_i^\circ$ des composés impliqués dans la réaction selon la relation :

$$\Delta_r H^\circ = \sum_i \nu_i \Delta_f H_i^\circ.$$

Ci-dessous sont données quelques enthalpies standard de formation à 298 K.

	$CH_3COOH(\ell)$	$CO_2(g)$	$H_2O(\ell)$	$H_2O(g)$	$CH_3OH(\ell)$	$CH_4(g)$	$O_2(g)$	$H_2(g)$
$\Delta_f H^\circ$ ($\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$)	−485	−400	−300	−250	−240	−70	0	0

Exprimer puis calculer l'enthalpie standard de réaction $\Delta_r H^\circ$ (en $\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$) en fonction des enthalpies standard de formation des composés impliqués dans chacune des réactions suivantes, réalisées à une température de 298 K et à la pression standard $P^\circ = 1\,\mathrm{bar}$.

a) Synthèse de l'eau sous forme gazeuse : $H_2(g) + \frac{1}{2}O_2(g) = H_2O(g)$.

.....

b) Synthèse du méthane : $CH_3OH(\ell) + H_2(g) = CH_4(g) + H_2O(\ell)$.

.....

c) Combustion de l'acide éthanoïque : $CH_3COOH(\ell) + 2\,O_2(g) = 2\,CO_2(g) + 2\,H_2O(\ell)$.

.....

Entraînement 25.2 — Déterminer une enthalpie standard de réaction (II).

On considère les équations de réaction (1) et (2) suivantes, dont les enthalpies standard de réaction valent respectivement $\Delta_r H_1^\circ = -562{,}6\,\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$ et $\Delta_r H_2^\circ = -1\,075{,}2\,\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$:

$$(1)\quad \text{H}_2\text{S(g)} + \frac{3}{2}\,\text{O}_2\text{(g)} = \text{H}_2\text{O}(\ell) + \text{SO}_2\text{(g)} \qquad \text{et} \qquad (2)\quad \text{CS}_2(\ell) + 3\,\text{O}_2\text{(g)} = \text{CO}_2\text{(g)} + 2\,\text{SO}_2\text{(g)}.$$

On s'intéresse à l'équation de réaction :

$$(3)\quad \text{CS}_2(\ell) + 2\,\text{H}_2\text{O}(\ell) = \text{CO}_2\text{(g)} + 2\,\text{H}_2\text{S(g)}.$$

On rappelle que si une réaction (3) peut s'écrire comme combinaison linéaire de deux réactions (1) et (2) telle que (3) = $\alpha \times$ (1) + $\beta \times$ (2), alors la loi de Hess s'écrit $\Delta_r H_3^\circ = \alpha\Delta_r H_1^\circ + \beta\Delta_r H_2^\circ$.

a) Déterminer les valeurs de α et β telles que (3) = $\alpha \times$ (1) + $\beta \times$ (2).

.....

b) En déduire la valeur de $\Delta_r H_3^\circ$, en $\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$ .....

Entraînement 25.3 — Déterminer une entropie standard de réaction (III).

De la relation d'Euler découle une relation permettant d'exprimer une entropie standard de réaction $\Delta_r S^\circ$ en fonction des entropies molaires standard $S_{\text{m},i}^\circ$ des composés impliqués dans la réaction selon la relation :

$$\Delta_r S^\circ = \sum_i \nu_i S_{\text{m},i}^\circ.$$

Ci-dessous sont données quelques entropies molaires standard à 298 K.

	$H_2O(\ell)$	CH_4(g)	$CH_3OH(\ell)$	H_2(g)	$CH_3COOH(\ell)$	H_2O(g)	O_2(g)	CO_2(g)
S_m° ($\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$)	65	70	128	131	160	189	205	214

Exprimer puis calculer l'entropie standard de réaction $\Delta_r S^\circ$ (en $\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$) en fonction des entropies molaires standard des composés impliqués dans chacune des réactions suivantes, réalisées à une température de 298 K et à la pression standard $P^\circ = 1$ bar.

a) Synthèse de l'eau sous forme gazeuse : $\text{H}_2\text{(g)} + \frac{1}{2}\,\text{O}_2\text{(g)} = \text{H}_2\text{O(g)}$.

.....

b) Synthèse du méthane : $\text{CH}_3\text{OH}(\ell) + \text{H}_2\text{(g)} = \text{CH}_4\text{(g)} + \text{H}_2\text{O}(\ell)$.

.....

c) Combustion de l'acide éthanoïque : $\text{CH}_3\text{COOH}(\ell) + 2\,\text{O}_2\text{(g)} = 2\,\text{CO}_2\text{(g)} + 2\,\text{H}_2\text{O}(\ell)$.

.....

Entraînement 25.4 — Autour des enthalpies libres standard de réaction.

Pour une réaction se produisant à température T constante sous 1 bar, l'enthalpie libre standard de réaction $\Delta_r G^\circ$ est définie par $\Delta_r G^\circ = \Delta_r H^\circ - T \times \Delta_r S^\circ$ et $\Delta_r G^\circ = -RT \ln K^\circ$, où $\Delta_r H^\circ$, $\Delta_r S^\circ$ et K° sont respectivement l'enthalpie standard de réaction, l'entropie standard de réaction et la constante d'équilibre de la réaction considérée.

On se propose de calculer l'enthalpie libre standard de réaction $\Delta_r G^\circ$ ainsi que la constante d'équilibre K° de plusieurs réactions, présentées dans le tableau ci-dessous. Pour chacune d'elles sont données les valeurs numériques de l'enthalpie standard de réaction et de l'entropie molaire standard de réaction, à 298 K.

	Équation de réaction	$\Delta_r H^\circ$ ($kJ \cdot mol^{-1}$)	$\Delta_r S^\circ$ ($J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$)
(1)	$H_2(g) + \frac{1}{2} O_2(g) = H_2O(g)$	-250	$-44{,}5$
(2)	$CH_3OH(\ell) + H_2(g) = CH_4(g) + H_2O(\ell)$	-130	-124
(3)	$CH_3COOH(\ell) + 2\,O_2(g) = 2\,CO_2(g) + 2\,H_2O(\ell)$	-915	-12

a) Calculer $\Delta_r G_1^\circ$ à 298 K, en $kJ \cdot mol^{-1}$.

.....

b) Calculer K_1° à 298 K.

.....

c) Calculer $\Delta_r G_2^\circ$ à 298 K, en $kJ \cdot mol^{-1}$.

.....

d) Calculer K_2° à 298 K.

.....

e) Calculer $\Delta_r G_3^\circ$ à 298 K, en $kJ \cdot mol^{-1}$.

.....

f) Calculer K_3° à 298 K.

.....

Entraînement 25.5 — Calculer des grandeurs thermodynamiques liées.

La loi de Hess généralisée permet d'exprimer une enthalpie libre standard de réaction $\Delta_r G^\circ$ en fonction des enthalpies libres standard de formation $\Delta_f G_i^\circ$ des composés impliqués dans la réaction selon la relation :

$$\Delta_r G^\circ = \sum_i \nu_i \Delta_f G_i^\circ.$$

En outre, on rappelle la relation suivante : $\Delta_r G^\circ = \Delta_r H^\circ - T \times \Delta_r S^\circ$, où $\Delta_r H^\circ$ et $\Delta_r S^\circ$ sont respectivement l'enthalpie standard de réaction et l'entropie standard de réaction.

L'équilibre de Deacon correspond à l'équation de réaction $O_2(g) + 4\,HC\ell(g) = 2\,H_2O(g) + 2\,C\ell_2(g)$. Son enthalpie standard de réaction à 298 K vaut $\Delta_r H^\circ = -114{,}8\,kJ \cdot mol^{-1}$. Quelques enthalpies libres standard de formation sont données ci-dessous à 298 K.

	$O_2(g)$	$C\ell_2(g)$	$HC\ell(g)$	$H_2O(g)$
$\Delta_f G^\circ$ ($kJ \cdot mol^{-1}$)	0	0	-95	-229

a) Calculer $\Delta_r G^\circ$ à 298 K, en $kJ \cdot mol^{-1}$ .....

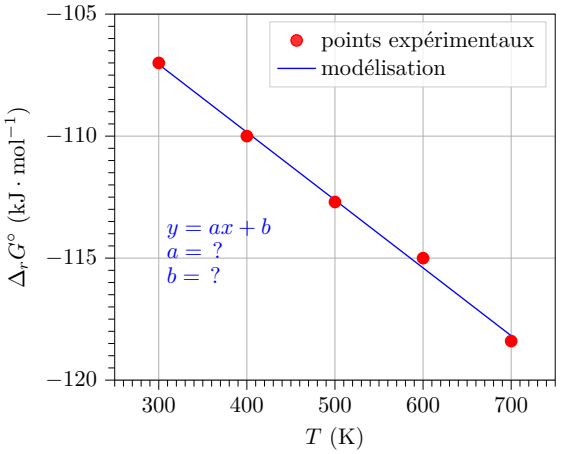
b) Calculer $\Delta_r S^\circ$ à 298 K, en $J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$ .....

Entraînement 25.6 — Exploiter une régression linéaire.

On considère la réaction de décomposition du peroxyde d'hydrogène, d'équation :

$$H_2O_2(\ell) = H_2O(\ell) + \frac{1}{2}\,O_2(g).$$

On donne ci-dessous la courbe représentant l'évolution de l'enthalpie libre standard de réaction $\Delta_r G^\circ$ en fonction de la température T ainsi qu'une régression linéaire de cette courbe.



On suppose que $\Delta_r H^\circ$ et $\Delta_r S^\circ$ sont indépendants de la température (approximation d'Ellingham) et on rappelle la relation $\Delta_r G^\circ = \Delta_r H^\circ - T \times \Delta_r S^\circ$.

a) Déterminer le coefficient directeur de la droite a en précisant son unité ...

b) Déterminer l'ordonnée à l'origine b en précisant son unité .....

c) Identifier les grandeurs thermodynamiques correspondant à a et b.

(a) $a = \Delta_r H^\circ$ (c) $a = \Delta_r S^\circ$ (e) $b = \Delta_r H^\circ$ (g) $b = \Delta_r S^\circ$
(b) $a = -\Delta_r H^\circ$ (d) $a = -\Delta_r S^\circ$ (f) $b = -\Delta_r H^\circ$ (h) $b = -\Delta_r S^\circ$

.....

d) En déduire la valeur de $\Delta_r H^\circ$, en kJ · mol^{-1} .....

e) En déduire la valeur de $\Delta_r S^\circ$, en J · K^{-1} · mol^{-1} .....

Entraînement 25.7 — Exploiter la relation de van 't Hoff.

Parmi les expressions fausses suivantes, indiquer celles qui ont au moins le mérite d'être homogènes.

(a) $\dfrac{dK^\circ}{dT} = \dfrac{\Delta_r H^\circ}{RT^2}$ (b) $\dfrac{dK^\circ}{dT} = -\dfrac{\Delta_r H^\circ}{RT}$ (c) $\dfrac{d\ln K^\circ}{dT} = \dfrac{\Delta_r S^\circ}{RT}$ (d) $\dfrac{dK^\circ}{dT} = \dfrac{\Delta_r G^\circ}{RT^2}$

.....

Entraînement 25.8 — Étudier l'influence de la température sur un équilibre.

Soit la réaction de formation de l'ammoniac gazeux, d'équation $\frac{1}{2}\,N_2(g) + \frac{3}{2}\,H_2(g) = NH_3(g)$. L'enthalpie standard de formation de l'ammoniac gazeux à 298 K vaut $\Delta_f H^\circ(NH_3(g)) = -46{,}1\,kJ\cdot mol^{-1}$ et les autres sont nulles. La constante d'équilibre à $T_1 = 400\,K$ vaut $K_1^\circ = 6{,}8$.

a) Calculer à 298 K l'enthalpie standard de réaction $\Delta_r H^\circ$, en $kJ\cdot mol^{-1}$.

.....

b) Intégrer la relation de van 't Hoff $\frac{d\ln K^\circ}{dT} = \frac{\Delta_r H^\circ}{RT^2}$ entre deux valeurs de température notées T_1 et T_2, en supposant que l'enthalpie standard de réaction est indépendante de la température (approximation d'Ellingham). Les constantes d'équilibre associées sont notées K_1° et K_2°.

.....

c) Calculer K_2° à $T_2 = 500\,K$ .....

Utilisation de cycles thermodynamiques

Entraînement 25.9 — Avec des énergies de liaison.

On s'intéresse à la formation d'éthanol liquide $C_2H_5OH(\ell)$ à partir des corps simples pris dans leur état standard de référence. Quelques énergies de liaison sont données ci-dessous.

Liaison	C–C	C–H	C–O	O–H	H–H	O=O
Énergie de liaison $\mathcal{E}$ ($kJ\cdot mol^{-1}$)	346	411	358	459	435	502

L'énergie de liaison $\mathcal{E}$(A–B) est l'énergie à fournir pour rompre la liaison A–B en phase gazeuse de manière homolytique, c'est-à-dire de telle sorte que les deux électrons de la liaison se partagent entre les deux atomes.

a) Parmi les corps simples suivants, identifier ceux impliqués dans la formation de l'éthanol.

(a) $O_2(g)$ (b) $H_2(g)$ (c) $N_2(g)$ (d) C(s)

.....

b) En supposant une stœchiométrie de 1 pour l'éthanol, établir l'équation de la réaction de formation de l'éthanol à partir des corps simples identifiés à la question précédente.

.....

c) Donner le schéma de Lewis de l'éthanol .....

d) Dénombrer le nombre de liaisons et remplir le tableau suivant.

liaison	C–C	C–H	C–O	O–H
nombre de liaisons				

e) Exprimer et calculer, en $kJ\cdot mol^{-1}$, l'enthalpie standard de formation de l'éthanol liquide.

.....

Entraînement 25.10 — Établir un cycle thermodynamique.

On considère la réaction de formation de l'ammoniac liquide $NH_3(\ell)$ à 208 K, dont l'équation est :

$$N_2(g) + 3\,H_2(g) \longrightarrow 2\,NH_3(\ell).$$

L'enthalpie standard de formation associée est notée $\Delta_f H^\circ(NH_3(\ell))$. L'enthalpie standard de vaporisation de l'ammoniac liquide est $\Delta_{vap} H^\circ(NH_3(\ell)) = 20\,\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$. Quelques énergies de liaison sont données ci-dessous.

Liaison	H−H	N−H	N≡N
Énergie de liaison $\mathcal{E}$ ($\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$)	450	400	960

L'énergie de liaison, notée $\mathcal{E}$(A−B), est définie comme étant l'énergie à fournir pour rompre la liaison A−B en phase gazeuse de manière homolytique, c'est-à-dire de telle sorte que les deux électrons de la liaison covalente se partagent entre A et B.

a) Indiquer les réponses exactes.

(a) L'énergie de liaison $\mathcal{E}$(H−H) est l'énergie à fournir pour rompre une liaison simple H−H.

(b) Pour former une mole de $N_2(g)$ à partir de deux moles de N(g), il faut fournir une énergie égale à $2 \times \mathcal{E}$(N≡N).

(c) Pour former une mole de $NH_3(g)$, il faut disposer d'une mole de N(g) et de trois moles de H(g).

(d) La formation d'une mole de $NH_3(g)$ à partir d'une mole de N(g) et de trois moles de H(g) libère une énergie égale à $3 \times \mathcal{E}$(N−H).

.....

b) Indiquer les expressions des énergies associées aux étapes (1) et (2) du cycle ci-après.

$$\begin{array}{ccc} N_2(g) + 3\,H_2(g) & \xrightarrow[(1)]{\qquad\qquad} & 2\,NH_3(\ell) \\ \mathcal{E}(N{\equiv}N) + 3\times\mathcal{E}(H{-}H)\ \Big\downarrow & & \Big\uparrow\ (2) \\ 2\,N(g) + 6\,H(g) & \xrightarrow[-6\times\mathcal{E}(N{-}H)]{\qquad\qquad} & 2\,NH_3(g) \end{array}$$

(a) (1) $= \Delta_f H^\circ(NH_3(\ell))$ et (2) $= -\Delta_{vap} H^\circ(NH_3(\ell))$

(b) (1) $= 2\Delta_f H^\circ(NH_3(\ell))$ et (2) $= 2\Delta_{vap} H^\circ(NH_3(\ell))$

(c) (1) $= \Delta_f H^\circ(NH_3(\ell))$ et (2) $= \Delta_{vap} H^\circ(NH_3(\ell))$

(d) (1) $= 2\Delta_f H^\circ(NH_3(\ell))$ et (2) $= -2\Delta_{vap} H^\circ(NH_3(\ell))$

.....

c) Calculer $\Delta_f H^\circ(NH_3(\ell))$ à 298 K, en $\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$ .....

Entraînement 25.11 — Cas d'un réacteur monobare et adiabatique.

On considère la combustion de l'éthanol $C_2H_5OH(\ell)$, supposée adiabatique et monobare, dont l'équation de réaction est $C_2H_5OH(\ell) + 3\,O_2(g) \longrightarrow 3\,H_2O(g) + 2\,CO_2(g)$. L'éthanol et le dioxygène sont introduits en proportions stœchiométriques. On note n_0 la quantité de matière initiale en éthanol. L'enthalpie standard de la réaction à 298 K vaut $\Delta_r H^\circ = -1\,236\,\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$. Quelques capacités molaires standard, supposées indépendantes de la température, sont données ci-dessous.

	$C_2H_5OH(\ell)$	$O_2(g)$	$CO_2(g)$	$H_2O(g)$
$C^\circ_{p,m,k}$ $(\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1})$	111	29,9	37,1	33,6

a) Parmi les affirmations, indiquer celles qui sont correctes.

(a) Lors d'une transformation monobare, la pression du système est constante à tout instant.

(b) Lors d'une transformation adiabatique, la température du système est constante à tout instant.

(c) Lors d'une transformation adiabatique, le système n'échange pas de chaleur.

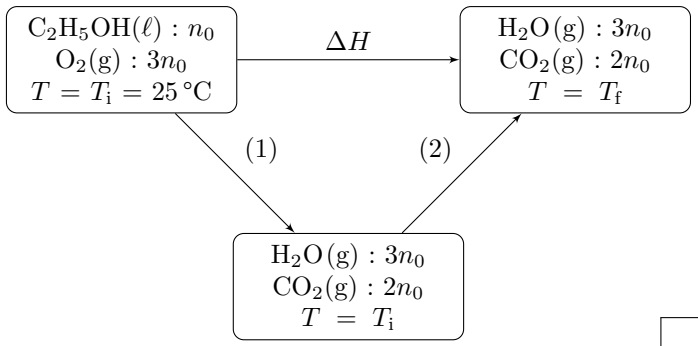
(d) Pour une transformation adiabatique et monobare sans travail autre que celui des forces de pression, la variation d'enthalpie du système est nulle : $\Delta H = 0$.

.....

b) On décompose la transformation précédente en deux étapes :

- une étape chimique isobare et isotherme d'avancement ξ dont la variation d'enthalpie est notée ΔH_{chi} ;
- une étape physique isobare et isoavancement durant laquelle la température varie et dont la variation d'enthalpie est notée ΔH_{phy}.

Attribuer les variations d'enthalpies ΔH_{chi} et ΔH_{phy} aux étapes (1) et (2) du schéma ci-dessous.



.....

c) Exprimer ΔH_{chi} en fonction de l'enthalpie standard de réaction $\Delta_r H^\circ$ et de n_0. On pourra s'aider d'une analyse dimensionnelle .....

d) Exprimer ΔH_{phy} en fonction de T_i, T_f, n_0 et des capacités thermiques molaires $C^\circ_{p,m,k}$.

.....

e) Établir la relation entre ΔH, ΔH_{phy} et ΔH_{chi} .....

f) Exprimer puis calculer T_f en °C .....

Déplacements d'équilibre

Entraînement 25.12 — Étudier l'influence de paramètres sur un équilibre.

On considère une transformation chimique endothermique, dont l'équation de réaction est :

$$CH_4(g) + H_2O(g) = CO(g) + 3\,H_2(g).$$

La loi de van 't Hoff précise qu'une augmentation isobare de température appliquée à un système physico-chimique initialement dans un état d'équilibre provoque une évolution dans le sens endothermique de la réaction modélisant la transformation. Le système a donc tendance à réagir de façon à s'opposer aux changements imposés afin de compenser cette perturbation, jusqu'à l'établissement d'un nouvel état d'équilibre. De même, une augmentation isotherme de la pression déplace l'équilibre dans le sens d'une diminution de la quantité de matière totale de gaz.

a) Déterminer le sens d'évolution du système lors d'une augmentation isobare de la température.

(a) sans évolution (b) sens direct (c) sens inverse

b) Indiquer l'expression correcte du quotient de réaction de l'équilibre précédent.

(a) $Q = \dfrac{x_{H_2}^3 x_{CO}}{x_{CH_4} x_{H_2O}} \left(\dfrac{P_{tot}}{P^\circ}\right)^2$

(b) $Q = \dfrac{x_{H_2}^3 x_{CO}}{x_{CH_4} x_{H_2O}} \left(\dfrac{P^\circ}{P_{tot}}\right)^2$

(c) $Q = \dfrac{x_{CH_4} x_{H_2O}}{x_{H_2}^3 x_{CO}} \left(\dfrac{P_{tot}}{P^\circ}\right)^2$

c) Indiquer le sens d'évolution du système lors d'une augmentation isotherme de la pression.

(a) sans évolution (b) sens direct (c) sens inverse

d) Indiquer l'expression correcte du quotient de réaction de l'équilibre précédent.

(a) $Q = \dfrac{n_{H_2}^3 n_{CO}}{n_{CH_4} n_{H_2O} n_{tot}^2} \left(\dfrac{P_{tot}}{P^\circ}\right)^2$

(b) $Q = \dfrac{n_{H_2}^3 n_{CO}}{n_{CH_4} n_{H_2O} n_{tot}^2} \left(\dfrac{P^\circ}{P_{tot}}\right)^2$

(c) $Q = \dfrac{n_{H_2}^3 n_{CO} n_{tot}^2}{n_{CH_4} n_{H_2O}} \left(\dfrac{P_{tot}}{P^\circ}\right)^2$

e) En déduire le sens d'évolution du système lors de l'ajout isotherme et isobare de dihydrogène H_2.

(a) sans évolution (b) sens direct (c) sens inverse

f) En déduire le sens d'évolution du système lors de l'ajout isotherme et isobare d'eau H_2O.

(a) sans évolution (b) sens direct (c) sens inverse

g) Déterminer le sens d'évolution du système lors de l'ajout isotherme et isobare de diazote N_2.

(a) sans évolution (b) sens direct (c) sens inverse

Autres entraînements

Entraînement 25.13 — Identifier un état standard de référence.

Parmi les corps ci-dessous, quels sont les corps simples dans leur état standard de référence à 298 K ?

(a) $O_2(g)$ (c) $N_2(g)$ (e) $C(s)$ (g) $CO_2(g)$
(b) $H_2(\ell)$ (d) $Fe(\ell)$ (f) $I_2(s)$ (h) $H_2O(g)$

.....

Entraînement 25.14 — Déterminer l'enthalpie par combinaison.

On considère les équations de réaction (1) et (2) suivantes, dont les enthalpies standard de réaction valent respectivement $\Delta_r H_1^\circ = -191\,\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$ et $\Delta_r H_2^\circ = -282\,\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$:

$$(1)\ \ H_2(g) + O_2(aq) = H_2O_2(aq) \qquad \text{et} \qquad (2)\ \ H_2(g) + \frac{1}{2}\,O_2(aq) = H_2O(\ell).$$

On s'intéresse à la réaction de dismutation du peroxyde d'hydrogène, notée (3) :

$$(3)\ \ 2\,H_2O_2(aq) = O_2(aq) + 2\,H_2O(\ell).$$

On rappelle que si une réaction (3) peut s'écrire comme combinaison linéaire de deux réactions (1) et (2) telle que (3) = $\alpha \times$ (1) + $\beta \times$ (2), alors la loi de Hess s'écrit $\Delta_r H_3^\circ = \alpha\Delta_r H_1^\circ + \beta\Delta_r H_2^\circ$.

a) Déterminer les valeurs de α et β telles que (3) = $\alpha \times$ (1) + $\beta \times$ (2) ..

b) En déduire la valeur de $\Delta_r H_3^\circ$, en $\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$ .....

Entraînement 25.15 — Avec la relation de Kirchhoff.

La loi de Kirchhoff donne l'expression de l'enthalpie standard d'une réaction à la température T_2 en fonction de l'enthalpie standard de la même réaction à la température T_1 :

$$\Delta_r H^\circ(T_2) = \Delta_r H^\circ(T_1) + \int_{T_1}^{T_2} \sum_k \nu_k C_{p,m,k}^\circ \mathrm{d}T,$$

où $C_{p,m,k}^\circ$ est la capacité molaire standard de l'espèce k et ν_k le nombre stœchiométrique de l'espèce k.

On considère la synthèse de l'eau liquide $H_2O(\ell)$ à partir du dihydrogène gazeux $H_2(g)$ et du dioxygène gazeux $O_2(g)$, dont l'équation de réaction est $2\,H_2(g) + O_2(g) \longrightarrow 2\,H_2O(\ell)$.

Quelques capacités molaires standard, considérées indépendantes de la température, sont données ci-dessous.

	$H_2(g)$	$O_2(g)$	$H_2O(\ell)$
$C_{p,m,k}^\circ$ $(\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1})$	28,8	29,4	75,3

L'enthalpie standard de formation de l'eau $H_2O(\ell)$ à 298 K vaut $-285\,\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$.

a) Indiquer la valeur correcte de l'enthalpie standard de la réaction de synthèse de l'eau à 298 K.

(a) $-285\,\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$ (c) $-142{,}5\,\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$ (e) $-570\,\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$

(b) $285\,\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$ (d) $142{,}5\,\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$ (f) $570\,\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$

.....

b) Calculer $\Delta_\text{r}H^\circ$ à 323 K pour la synthèse de l'eau, en $\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$, à l'aide de la loi de Kirchhoff.

.....

Entraînement 25.16 — Procédé Haber-Bosch.

Le procédé Haber-Bosch est un procédé chimique en phase gazeuse qui permet la synthèse de l'ammoniac $NH_3(g)$ à partir de diazote $N_2(g)$ et de dihydrogène $H_2(g)$, en présence d'un catalyseur :

$$N_2(g) + 3\,H_2(g) = 2\,NH_3(g).$$

Les grandeurs suivantes sont données à 298 K.

	$N_2(g)$	$H_2(g)$	$NH_3(g)$
$\Delta_\text{f}H^\circ$ $(\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1})$	0	0	-46
S°_m $(\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol})$	190	130	192

a) Calculer à 298 K l'enthalpie standard de la réaction $\Delta_\text{r}H^\circ$, en $\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$.

.....

b) Indiquer la thermicité de cette transformation.

(a) exothermique (b) endothermique (c) athermique

.....

c) Calculer à 298 K l'entropie standard de la réaction $\Delta_\text{r}S^\circ$, en $\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$.

.....

d) Calculer à 298 K l'enthalpie libre standard de la réaction $\Delta_\text{r}G^\circ$, en $\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$.

.....

e) Calculer la constante d'équilibre K° de la réaction.

.....

f) Indiquer la ou les réponse(s) exacte(s).

(a) Une augmentation de pression isotherme déplace l'équilibre dans le sens de formation de $NH_3(g)$.

(b) Une augmentation de température isobare déplace l'équilibre dans le sens de formation de $NH_3(g)$.

.....

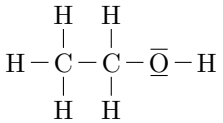
Réponses mélangées

(a), (c) et (d) $-46{,}1\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$ $-34\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$ $-182\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$ (b)

$-911\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$ $\Delta H = \Delta H_{\text{phy}} + \Delta H_{\text{chi}}$ (b) (a) (a) $3{,}15\cdot 10^{41}$

$2\,\mathrm{C(s)} + 3\,\mathrm{H_2(g)} + \frac{1}{2}\,\mathrm{O_2(g)} \rightarrow \mathrm{C_2H_5OH(\ell)}$ (e) $\Delta H_{\text{phy}} = (3C^\circ_{\text{p,m,H}_2\text{O}} + 2C^\circ_{\text{p,m,CO}_2})n_0(T_\text{f} - T_\text{i})$

ΔH_{chi} pour (1)
ΔH_{phy} pour (2) (a) $\alpha = -2$ et $\beta = 2$ $-12\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$ $\Delta H_{\text{chi}} = \Delta_\text{r}H^\circ \times n_0$

$-130\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$ $7\,088\,^\circ\mathrm{C}$  (c) (c) (a)

$-196\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$ (d) $-250\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$ 0,42 $\alpha = -2$ et $\beta = 1$ (d) et (e)

$-99\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$ $7{,}7\times 10^5$ $-93{,}0\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$ $-44{,}5\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$ (a), (b) et (d)

(a), (c), (e) et (f) (c) et (d) $\Delta_\text{f}H^\circ(\mathrm{C_2H_5OH(\ell)}) = -1{,}66\times 10^3\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$ $-568\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$

$-28\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$ $28\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$ (b)

C–C	C–H	C–O	O–H
1	5	1	1

$-236{,}7\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$ $-124\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$ $4{,}89\cdot 10^{159}$ $-65\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$ $2{,}04\cdot 10^{16}$

$-99\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$ $50{,}0\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$ $-123{,}5\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$ $-915\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$

$-92\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$ $\ln\left(\frac{K_2^\circ}{K_1^\circ}\right) = \frac{\Delta_\text{r}H^\circ}{R}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)$ (a), (c) et (d) $-78\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$

▶ Réponses et corrigés page 430

Phénomène de corrosion

Prérequis

Loi de Nernst : pour $\alpha\,\mathrm{Ox} + n\,e^- + \beta\,\mathrm{H}^+ = \gamma\,\mathrm{Red} + \delta\,\mathrm{H_2O}$, on a

$$E_{\mathrm{Nernst}} = E^\circ + \frac{0{,}06}{n}\log\left(\frac{a_{\mathrm{Ox}}^{\alpha}\,[\mathrm{H}^+]^{\beta}}{a_{\mathrm{Red}}^{\gamma}}\right).$$

Diagrammes potentiel-pH. Courbes courant-potentiel.

Constantes utiles

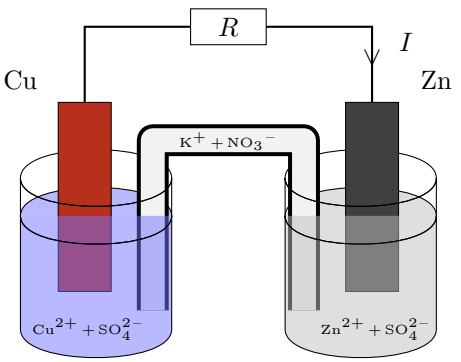
→ Constante d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6{,}02 \times 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$

→ Charge élémentaire : $e = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$

→ Constante de Faraday : $\mathcal{F} = e \times \mathcal{N}_A = 96\,500\,\mathrm{C}\cdot\mathrm{mol}^{-1}$

Outils d'étude des réactions d'oxydoréduction

Entraînement 26.1 — Pile Daniell.



Considérons la pile Daniell ci-contre. L'intensité du courant traversant la résistance R dans le sens indiqué sur le schéma est constante et vaut $I = 100\,\mu\mathrm{A}$.

Donnée : $M_{\mathrm{Zn}} = 65{,}4\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{mol}^{-1}$.

a) Dans quel sens circulent les électrons ?

(a) de l'électrode de cuivre vers celle de zinc

(b) de l'électrode de zinc vers celle de cuivre

b) Quelle électrode joue le rôle de cathode ?

(a) celle de zinc (b) celle de cuivre

c) Quel métal est oxydé ?

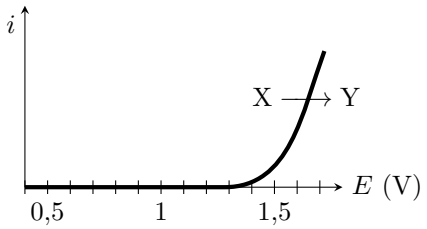
(a) le zinc (b) le cuivre

d) Déterminer la quantité d'électricité (en mC) échangée entre les deux couples en une durée $\tau = 10\,\mathrm{min}$.

e) En déduire la masse (en µg) de zinc oxydée pendant la durée τ .....

Entraînement 26.2 — Détermination d'un surpotentiel.

À l'aide d'un montage à trois électrodes, on mesure la courbe ci-dessous dans une solution de pH = 4 dans laquelle la seule espèce électroactive est l'eau. On rappelle les couples de l'eau : H_2O/H_2 (potentiel standard 0 V) et O_2/H_2O (potentiel standard 1,23 V).



a) Quel couple de l'eau est responsable de la courbe observée ? .....

b) En déduire les espèces X et Y à faire apparaître sur la courbe.

(a) $H_2O \longrightarrow O_2$ (c) $H_2 \longrightarrow H_2O$

(b) $O_2 \longrightarrow H_2O$ (d) $H_2O \longrightarrow H_2$

.....

c) Exprimer le potentiel de Nernst du couple.

(a) $E^\circ + \dfrac{0{,}06}{4} \log \left[\dfrac{p_{H_2}}{p^\circ} \left(\dfrac{[H_2O]}{c^\circ} \right)^2 \right]$

(b) $E^\circ + \dfrac{0{,}06}{4} \log \left[\dfrac{p^\circ}{p_{H_2}} \dfrac{[H^+]}{c^\circ} \right]$

(c) $E^\circ + \dfrac{0{,}06}{2} \log \left[\dfrac{p^\circ}{p_{H_2}} \left(\dfrac{[H^+]}{c^\circ} \right)^2 \right]$

(d) $E^\circ + \dfrac{0{,}06}{4} \log \left[\dfrac{p_{O_2}}{p^\circ} \left(\dfrac{[H^+]}{c^\circ} \right)^4 \left(\dfrac{c^\circ}{[H_2O]} \right)^2 \right]$

(e) $E^\circ + \dfrac{0{,}06}{4} \log \left[\dfrac{p_{O_2}}{p^\circ} \left(\dfrac{[H^+]}{c^\circ} \right)^4 \right]$

(f) $E^\circ + \dfrac{0{,}06}{2} \log \left[\dfrac{p^\circ}{p_{O_2}} \left(\dfrac{[H^+]}{c^\circ} \right)^2 \right]$

.....

d) Le calculer numériquement pour une pression partielle de 1 bar .....

e) En déduire le surpotentiel anodique à vide η_a, défini à partir du point où la courbe décroche de l'axe des abscisses.

.....

Entraînement 26.3 — Charge échangée au cours d'une réaction.

Un morceau de fer de masse $m_1 = 1\,\text{mg}$ s'oxyde sous l'action de l'oxygène en milieu acide selon la réaction

$$\alpha\ \text{Fe} + \text{O}_2 + \beta\ \text{H}^+ = \gamma\ \text{Fe}^{2+} + \delta\ \text{H}_2\text{O}.$$

Données :

- Potentiels standard :
  - ▷ $E^\circ\left(\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}\right) = -0{,}44\,\text{V}$;
  - ▷ $E^\circ\left(\text{O}_2\,/\text{H}_2\text{O}\right) = 1{,}23\,\text{V}$.
- Masse molaire du Fe : $M_{\text{Fe}} = 55{,}8\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$.

a) Déterminer les valeurs correctes du quadruplet $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$.

(a) $(1, 2, 1, 1)$
(b) $(2, 2, 2, 2)$
(c) $(2, 4, 2, 2)$
(d) $(1, 4, 1, 2)$

.....

b) Au bout d'un temps $\tau = 1\,\text{h}$, il ne reste que $45\,\%$ de la masse initiale de fer.

Après avoir dressé un tableau d'avancement, déterminer l'avancement ξ de la réaction.

.....

c) En raisonnant sur la demi-équation électronique du couple Fe^{2+}/Fe, déterminer le nombre de moles d'électrons échangées en fonction de l'avancement ξ.

(a) ξ
(b) 2ξ
(c) 3ξ
(d) 4ξ

.....

d) En déduire Q, la quantité d'électricité (ou charge) échangée entre les deux couples durant le temps τ.

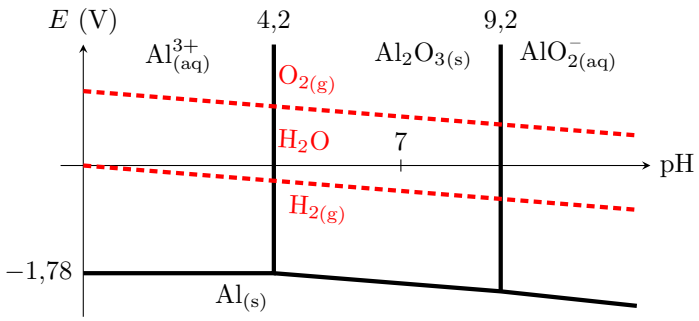
On exprimera Q en coulombs.

.....

Corrosion, passivation, protection

Entraînement 26.4 — Thermodynamique de la corrosion.

On représente ci-dessous le diagramme potentiel-pH de corrosion de l'aluminium, en traits pleins, auquel est superposé celui de l'eau, en traits pointillés.



Certaines questions peuvent admettre plusieurs réponses.

a) L'aluminium est-il stable dans l'eau du point de vue thermodynamique ?

(a) Oui, toujours
(b) Non, jamais
(c) Cela dépend de la teneur en dioxygène.
(d) Cela dépend du pH.

.....

b) On dit qu'un métal se passive lorsque son oxydation forme un solide à sa surface.

L'aluminium peut-il se passiver dans l'eau ?

(a) Oui, sous forme de Al^{3+}
(b) Oui, sous forme de Al_2O_3
(c) Oui, sous forme de AlO_2^-
(d) Non

.....

c) On laisse une plaque d'aluminium dans une solution maintenue à pH = 3.

Si l'on attend suffisamment longtemps, que va-t-il se passer ?

(a) La plaque va rester stable sans modification.
(b) L'épaisseur de la plaque va diminuer, mais elle ne disparaîtra jamais complètement.
(c) La plaque va totalement se dissoudre.
(d) Un dépôt solide va se former à la surface de la plaque.

.....

d) Même question, avec les mêmes propositions, pour l'eau du robinet.

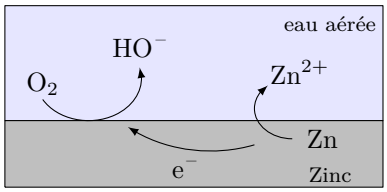
On rappelle que l'eau du robinet vérifie pH ≈ 7,5 *et contient du dioxygène dissous.*

.....

Entraînement 26.5 — Passivation.

On considère un morceau de zinc en présence d'eau aérée.

Le processus électrochimique qui a lieu est schématisé ci-dessous.



Les deux couples rédox intervenant dans la réaction d'oxydoréduction sont O_2/HO^- et Zn^{2+}/Zn.

a) Quel espèce se corrode ? .....

b) Quel espèce se réduit ? .....

c) Écrire la réaction d'oxydoréduction se produisant.

On choisira comme nombres stœchiométriques les plus petits entiers possibles.

.....

d) Au cours de la réaction d'oxydoréduction, comment varie le pH ?

(a) Le pH augmente.

(b) Le pH reste constant.

(c) Le pH diminue.

.....

e) En présence de HO^-, les ions Zn^{2+} précipitent sous forme de $Zn(OH)_2$. Cet oxyde de zinc forme à la surface du zinc une couche imperméable.

Quelle phrase est juste ?

(a) Le zinc se passive progressivement.

(b) Le zinc s'oxyde toujours même s'il est entièrement recouvert d'oxyde de zinc.

(c) La couche d'oxyde va se dissoudre progressivement car le milieu devient acide.

(d) Le zinc cesse de s'oxyder mais le dioxygène se réduit toujours.

.....

Entraînement 26.6 — Corrosion d'une lame de magnésium.

Le but de l'exercice est de déterminer si le magnésium métallique est susceptible d'être corrodé par une solution aqueuse acidifiée de pH = 4.

a) Exprimer le potentiel de Nernst $E_{Mg^{2+}/Mg}$ en fonction du potentiel standard $E^\circ_{Mg^{2+}/Mg}$ et de $[Mg^{2+}]$.

.....

b) On donne $E^\circ_{Mg^{2+}/Mg} = -2{,}37\,V$ et $[Mg^{2+}] = 1 \times 10^{-6}\,mol \cdot L^{-1}$.

Calculer sa valeur numérique.

.....

c) Exprimer le potentiel de Nernst E_{H^+/H_2} en fonction du potentiel standard $E^\circ_{H^+/H_2}$, du pH et de la pression partielle en dihydrogène p_{H_2}.

.....

d) On rappelle $E^\circ_{H^+/H_2} = 0\,V$ et on suppose $p_{H_2} = 1\,bar$.

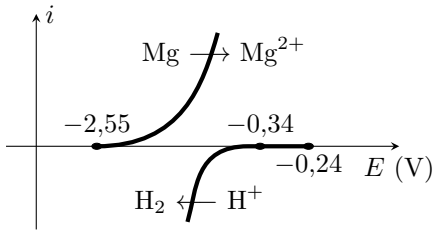
Calculer sa valeur numérique.

.....

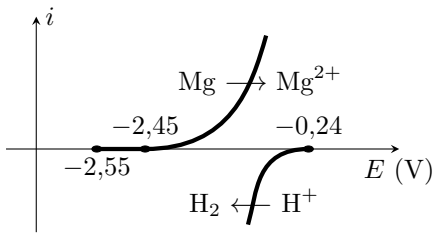
e) Le surpotentiel cathodique du couple H^+/H_2 sur une électrode de magnésium est de l'ordre de $-0{,}1\,V$.

Parmi les diagrammes intensité-potentiel représentés ci-dessous, lequel correspond à la situation étudiée ?

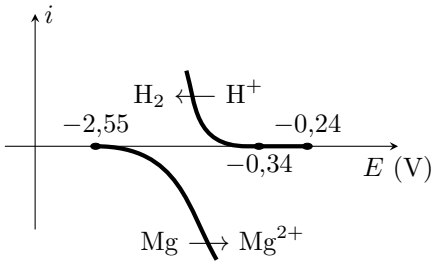
(a)



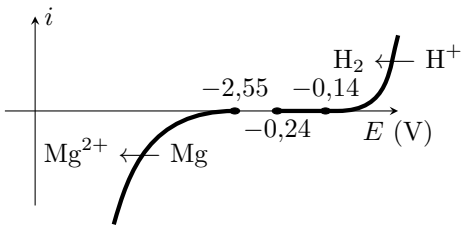
(b)



(c)



(d)



.....

f) En cherchant sur le diagramme courant-potentiel s'il existe un éventuel potentiel de corrosion, déterminer si la lame de magnésium sera corrodée.

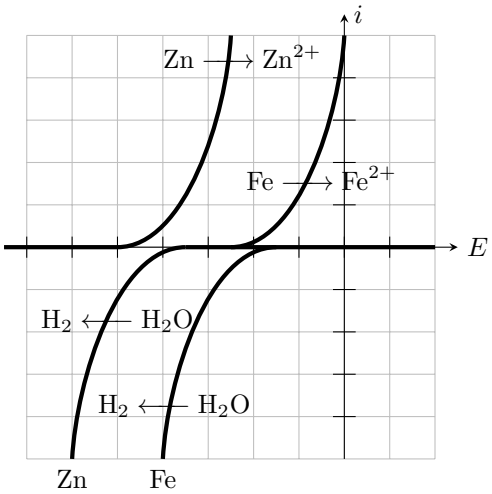
.....

Entraînement 26.7 — Corrosion différentielle.

On met en contact dans une solution une lame de zinc et une lame de fer.

Les couples intervenant sont Zn^{2+}/Zn (potentiel standard $-0{,}76\,V$), Fe^{2+}/Fe (potentiel standard $-0{,}45\,V$) et H_2O/H_2 (potentiel standard $0\,V$).

La figure ci-dessous représente le diagramme courant-potentiel associé, avec comme échelle $0{,}2\,V/div$ en abscisse et $10\,mA/div$ en ordonnée.



Le surpotentiel cathodique du couple H_2O/H_2 n'est pas le même sur les deux métaux : un phénomène de corrosion différentielle peut apparaître, où la réduction de l'eau n'a pas lieu sur le métal qui est oxydé. On rappelle que le potentiel de corrosion (ou potentiel mixte) est celui pour lequel le courant anodique est égal au courant cathodique, sa valeur absolue est alors appelée courant de corrosion.

a) En raisonnant sur les potentiels standard, identifier le métal qui s'oxyde .....

b) En supposant que la réduction de l'eau a lieu sur le zinc, déterminer graphiquement le potentiel de corrosion et le courant de corrosion.

(a) $-0{,}85\,V$ et $2\,mA$
(b) $-0{,}65\,V$ et $18\,mA$
(c) $-0{,}60\,V$ et $10\,mA$
(d) $-0{,}40\,V$ et $2\,mA$

.....

c) Même question et mêmes valeurs proposées en supposant que la réduction de l'eau a lieu sur le fer.

.....

d) Finalement, sur quel métal la réduction de l'eau a-t-elle lieu ? .....

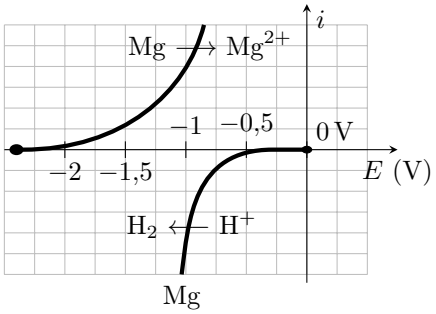
e) Comment se déplacent les électrons lors de la réaction ?

(a) Ils restent dans le zinc.
(b) Ils restent dans le fer.
(c) Du fer vers le zinc.
(d) Du zinc vers le fer.

.....

Vitesse et courant de corrosion

Entraînement 26.8 — Détermination d'un courant de corrosion.



Une lame de magnésium est plongée dans une solution aqueuse acidifiée, maintenue à pH = 4. Le magnésium (couple Mg^{2+}/Mg) est alors corrodé par les ions H^+ (couple H^+/H_2).

On donne la constante des gaz parfaits $R = 8{,}3\,\mathrm{J\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}}$.

a) Écrire l'équation de la réaction de corrosion .....

b) Déterminer graphiquement le potentiel de corrosion, pour lequel il y a égalité des courants anodique et cathodique .....

c) En raisonnant sur la demi-équation électronique appropriée, exprimer la charge électrique échangée lorsqu'il y a production de n moles de dihydrogène .....

d) À 25 °C et sous 1,0 bar, la réaction produit 1,0 mL de dihydrogène (gaz parfait) en dix minutes. Calculer numériquement la charge échangée pendant cette durée.

.....

e) En déduire la valeur numérique du courant de corrosion .....

Entraînement 26.9 — Vitesse de corrosion d'une pièce en fer.

Une pièce en fer de masse m_0 à l'instant initial se corrode en présence de dioxygène pour former de l'hydroxyde de fer $Fe(OH)_2$ suivant la réaction $Fe + \frac{1}{2}O_2 + H_2O = Fe(OH)_2$.

Le courant de corrosion est défini par $i_c = \alpha\mathcal{F}\dfrac{d\xi}{dt} > 0$ où α est la variation du nombre d'oxydation du fer lors de la réaction (égal au nombre d'électrons échangés) et ξ l'avancement de la réaction. On cherche à le relier à la variation de la masse de la pièce de fer $\dfrac{dm}{dt}$.

a) Déterminer la valeur de α .....

b) Exprimer $\dfrac{dm}{dt}$ en fonction de $\dfrac{d\xi}{dt}$ et de la masse molaire du fer .....

c) En déduire la relation entre le courant de corrosion i_c et $\dfrac{dm}{dt}$.

(a) $i_c = -\dfrac{2M_{Fe}}{\mathcal{F}}\dfrac{dm}{dt}$ (b) $i_c = -\dfrac{M_{Fe}}{2\mathcal{F}}\dfrac{dm}{dt}$ (c) $i_c = -\dfrac{\mathcal{F}}{2M_{Fe}}\dfrac{dm}{dt}$ (d) $i_c = -\dfrac{2\mathcal{F}}{M_{Fe}}\dfrac{dm}{dt}$

.....

Entraînement 26.10 — Vitesse de corrosion d'une lamelle de cuivre.

En milieu acide, le cuivre se corrode en ion cuivreux Cu^{2+}. La vitesse de corrosion est proportionnelle au courant de corrosion : $i_{corr} = 2\mathcal{F}\dfrac{d\xi}{dt}$, en notant ξ l'avancement de la réaction.

Données :

- masse volumique $\rho_{Cu} = 8{,}96\,g\cdot cm^{-3}$;
- masse molaire $M_{Cu} = 63{,}5\,g\cdot mol^{-1}$.

a) En supposant le courant de corrosion constant, déterminer le temps τ nécessaire à la corrosion d'une masse m_0 de cuivre en fonction de i_{corr}, M_{Cu}, $\mathcal{F}$ et m_0.

.....

b) Une plaque de cuivre de surface $S = 2\,cm^2$ voit son épaisseur passer de $e_1 = 5{,}00\,mm$ à $e_2 = 4{,}98\,mm$ en un temps τ. Déterminer τ sachant que le courant de corrosion est de $65\,\mu A$.

(a) 19 jours et 4 heures
(b) 19 jours et 10 heures
(c) 193 jours et 23 heures
(d) 1 jour et 22 heures

.....

c) Une seconde électrode perd 0,1 mg en 1 heure et 45 minutes. L'intensité du courant de corrosion est de $55\,\mu A$. Peut-elle être en cuivre ?

.....

Réponses mélangées

(d) $-1\,V$ $Mg + 2\,H^+ = Mg^{2+} + H_2$ (c) $20\,\mu g$ (b) $1{,}9\,C$

(b),(d) $0{,}36\,V$ O_2 (a) (b) $-M_{Fe}\dfrac{d\xi}{dt}$ $5\times10^{-6}\,mol$

$2\,Zn + O_2 + 2\,H_2O = 2\,Zn^{2+} + 4\,HO^-$ Le zinc $E^\circ_{H^+/H_2} - 0{,}06\,pH - 0{,}03\log\dfrac{p_{H_2}}{p^\circ}$

$60\,mC$ (b) $E^\circ_{Mg^{2+}/Mg} + 0{,}03\log\left(\dfrac{[Mg^{2+}]}{C^\circ}\right)$ $0{,}99\,V$ Le fer oui $2n\mathcal{F}$

(d) O_2/H_2O (a) non (b) (c) $13\,mA$ (a) (a) 2 $7{,}8\,C$

(a) (a) (e) Zn (d) (b) (b) $-2{,}55\,V$ $\dfrac{2\mathcal{F}m_0}{i_{corr}M_{Cu}}$ $-0{,}24\,V$

▶ Réponses et corrigés page 437

Piles et accumulateurs

Prérequis
Équation d'état des gaz parfaits. Notion d'équilibre chimique. Couple oxydant/réducteur. Demi-équation électronique. Réaction d'oxydoréduction. Relation de Nernst. Tension à vide. Loi de Hess.

Constantes utiles

→ Constante d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6{,}02 \times 10^{23}\,\text{mol}^{-1}$

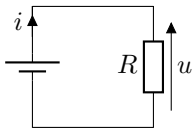
→ Constante de Faraday : $\mathcal{F} = 96\,500\,\text{C}\cdot\text{mol}^{-1}$

→ Constante des gaz parfaits : $R = 8{,}314\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$

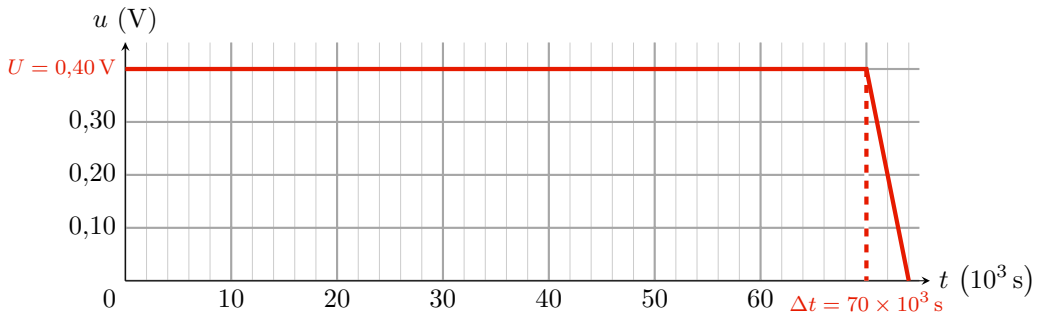
Pour bien commencer

Entraînement 27.1 — Durée de fonctionnement et capacité électrique d'une pile.

Lors de la décharge d'une pile à travers un conducteur ohmique de résistance $R = 15\,\Omega$, la tension u aux bornes de la pile (et de la résistance) est mesurée *via* un voltmètre.



La tension maximale relevée pendant la décharge, l'intensité maximale du courant circulant à travers la résistance et la durée de fonctionnement (autonomie) de cette pile sont respectivement notées U, I et Δt.



a) Quelles sont les propositions correctes ?

(a) $I = RU$ (b) $I = \dfrac{U}{R}$ (c) $I = 6{,}5\,\text{mA}$ (d) $I = 27\,\text{mA}$

.....

b) Par définition, la capacité électrique d'une pile est la charge électrique maximale Q échangée entre les électrodes de la pile lors de sa décharge. D'une certaine façon, c'est une mesure de la quantité d'électricité que la pile peut stocker ou fournir. Comment s'exprime alors la capacité électrique d'une pile ?

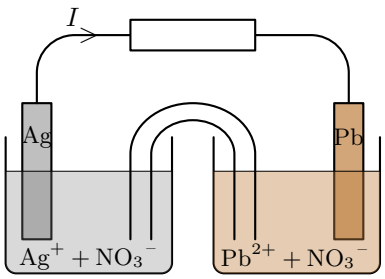
(a) $\dfrac{U\Delta t}{R}$ (b) $\dfrac{U^2\Delta t}{R}$ (c) $\dfrac{UR}{\Delta t}$ (d) $\dfrac{R\Delta t}{U}$

.....

c) Calculer en ampères-heures la capacité électrique de cette pile .....

Entraînement 27.2 — Au bout d'une heure de fonctionnement.

La pile ci-contre (deux demi-piles, reliées par un pont salin) débite un courant d'intensité constante I pendant la durée Δt.



Le compartiment de gauche correspond à une lame d'argent plongeant dans une solution de nitrate d'argent (volume $V_1 = 100{,}0\,\text{mL}$ et concentration $C_1 = 0{,}100\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$), mettant en jeu le couple Ag^+/Ag. Celui de droite correspond à une lame de plomb plongeant dans une solution de nitrate de plomb ($V_2 = V_1$ et $C_2 = C_1$), mettant en jeu le couple Pb^{2+}/Pb.

Les ions argent sont réduits sur l'électrode d'argent : $Ag^+ + e^- = Ag$. Le plomb est oxydé sur l'électrode de plomb : $Pb = Pb^{2+} + 2\,e^-$. Finalement, l'équation de réaction est :

$$2\,Ag^+(aq) + Pb(s) = 2\,Ag(s) + Pb^{2+}(aq).$$

a) Exprimer la quantité d'électricité Q échangée pendant Δt en fonction de I et Δt

b) Quelle(s) relation(s) correspond(ent) à la quantité de matière d'électrons n_e échangée pendant Δt ?

(a) $n_e = Qe/\mathcal{N}_A$ (b) $n_e = Q\mathcal{F}$ (c) $n_e = I\Delta t/\mathcal{N}_A$ (d) $n_e = Q/\mathcal{F}$

.....

c) Exprimer la quantité de matière n_{Ag^+} consommée pendant Δt en fonction de n_e

d) Exprimer la quantité de matière $n_{Pb^{2+}}$ formée pendant Δt en fonction de n_e ....

e) Calculer la concentration finale $\left[Ag^+\right]_f$ pour $\Delta t = 1{,}00\,\text{h}$ et $I = 65{,}0\,\text{mA}$ .....

f) Calculer la concentration finale $\left[Pb^{2+}\right]_f$ pour $\Delta t = 1{,}00\,\text{h}$ et $I = 65{,}0\,\text{mA}$ .....

Entraînement 27.3 — Demi-équations et équation de fonctionnement.

On considère une pile zinc-argent. Le compartiment de gauche correspond à une lame de zinc plongeant dans une solution de sulfate de zinc ($Zn^{2+}(aq) + {SO_4}^{2-}(aq)$). Celui de droite correspond à une lame d'argent plongeant dans une solution de nitrate d'argent ($Ag^+(aq) + {NO_3}^-(aq)$).

a) Écrire la demi-équation électronique associée au couple Zn^{2+}/Zn .....

b) Écrire la demi-équation électronique associée au couple Ag^+/Ag .....

c) Sachant que la réaction électrochimique se fait entre le zinc $Zn(s)$ et les ions argent $Ag^+(aq)$, écrire l'équation de la réaction d'oxydoréduction ayant lieu dans cette pile .....

d) Quelles sont les propositions correctes ?

(a) L'électrode d'argent s'épaissit.
(b) L'électrode de zinc s'épaissit.
(c) L'électrode d'argent s'amincit.
(d) L'électrode de zinc s'amincit.

.....

Autour de la pile Daniell

Entraînement 27.4 — Polarité et tension à vide.

Soit une pile Daniell cuivre-zinc. Le compartiment de gauche correspond à une lame de zinc plongeant dans une solution de sulfate de zinc ($Zn^{2+}(aq) + {SO_4}^{2-}(aq)$) à $0{,}1\,mol\cdot L^{-1}$. Celui de droite correspond à une lame de cuivre plongeant dans une solution de sulfate de cuivre ($Cu^{2+}(aq) + {SO_4}^{2-}(aq)$) à $0{,}25\,mol\cdot L^{-1}$. On donne : $E^\circ(Zn^{2+}/Zn) = -0{,}76\,V$ et $E^\circ(Cu^{2+}/Cu) = 0{,}34\,V$.

La relation de Nernst pour un couple M^{n+}/M (cation métallique/métal) de potentiel standard E° est : $E = E^\circ + \dfrac{RT}{n\mathcal{F}} \ln \dfrac{a(M^{n+})}{a(M)}$, avec n le nombre d'électrons échangés. Si $T = 298\,K$ (25 °C), on peut utiliser l'approximation $\dfrac{RT\ln(10)}{\mathcal{F}} \approx 0{,}059\,V$. La concentration standard, égale à $1\,mol\cdot L^{-1}$, est notée C°.

On rappelle également que la relation entre $\Delta_r G$, l'enthalpie libre de la réaction de fonctionnement d'une pile, et la tension à vide U_{co} (en circuit ouvert) est : $\Delta_r G = -n\mathcal{F}U_{co}$.

a) Calculer le potentiel de Nernst du couple Zn^{2+}/Zn à 25 °C .....

b) Calculer le potentiel de Nernst du couple Cu^{2+}/Cu à 25 °C .....

c) Indiquer la polarité (+ ou −) de chaque demi-pile .....

d) Identifier alors l'anode et la cathode .....

e) Quelles propositions indiquent correctement le sens de déplacement des porteurs de charge ?

(a) Dans les fils, les électrons se déplacent de la cathode vers l'anode.
(b) Dans le pont salin, les anions se déplacent du compartiment de gauche vers celui de droite.
(c) Dans les fils, les électrons se déplacent de l'anode vers la cathode.
(d) Dans le pont salin, les cations se déplacent du compartiment de gauche vers celui de droite.

.....

f) Calculer la tension à vide U_{co} de la pile (différence de potentiel à ses bornes) .

g) Calculer l'enthalpie libre de réaction à 25 °C .....

Entraînement 27.5 — Constante d'équilibre et potentiels standard.

On considère une pile Daniell cuivre-zinc, d'équation de fonctionnement :

$$Cu^{2+}(aq) + Zn(s) \longrightarrow Zn^{2+}(aq) + Cu(s)$$

et de constante d'équilibre K°. On donne : $E^\circ(Zn^{2+}/Zn) = -0{,}76\,V$ et $E^\circ(Cu^{2+}/Cu) = 0{,}34\,V$.

a) Exprimer K° en fonction des activités des composés à l'équilibre .....

b) Exprimer K° en fonction des concentrations des solutés à l'équilibre .....

c) Écrire la relation de Nernst à 25 °C pour le couple Zn^{2+}/Zn .....

d) Écrire la relation de Nernst à 25 °C pour le couple Cu^{2+}/Cu .....

e) L'unicité du potentiel à l'équilibre implique une égalité entre les potentiels de Nernst des deux couples d'oxydoréduction. Appliquer l'unicité du potentiel à l'équilibre pour en déduire les relations correctes.

(a) $E^\circ_{Cu^{2+}/Cu} - E^\circ_{Zn^{2+}/Zn} = \dfrac{0{,}059}{2} \log \dfrac{[Zn^{2+}]_{éq}}{[Cu^{2+}]_{éq}}$

(b) $E^\circ_{Zn^{2+}/Zn} - E^\circ_{Cu^{2+}/Cu} = \dfrac{0{,}059}{2} \log \dfrac{[Zn^{2+}]_{éq}}{[Cu^{2+}]_{éq}}$

(c) $E^\circ_{Cu^{2+}/Cu} - E^\circ_{Zn^{2+}/Zn} = \dfrac{0{,}059}{2} \log \dfrac{[Cu^{2+}]_{éq}}{[Zn^{2+}]_{éq}}$

(d) $E^\circ_{Zn^{2+}/Zn} - E^\circ_{Cu^{2+}/Cu} = \dfrac{0{,}059}{2} \log \dfrac{[Cu^{2+}]_{éq}}{[Zn^{2+}]_{éq}}$

.....

f) En déduire l'expression correcte de K° en fonction des potentiels standard.

(a) $K^\circ = 10^{\frac{2}{0{,}059}(E^\circ(Cu^{2+}/Cu) - E^\circ(Zn^{2+}/Zn))}$

(b) $K^\circ = 10^{\frac{0{,}059}{2}(E^\circ(Cu^{2+}/Cu) - E^\circ(Zn^{2+}/Zn))}$

(c) $K^\circ = 10^{\frac{2}{0{,}059}(E^\circ(Zn^{2+}/Zn) - E^\circ(Cu^{2+}/Cu))}$

(d) $K^\circ = 10^{\frac{2}{0{,}059}(E^\circ(Zn^{2+}/Zn) - E^\circ(Cu^{2+}/Cu))}$

.....

g) Calculer K° à 25 °C .....

Détermination d'un potentiel standard

Entraînement 27.6 — Expression d'un potentiel standard à partir de deux autres.

La relation entre l'enthalpie libre standard de demi-réaction $\Delta_{1/2}G^\circ$ et le potentiel standard E° du couple considéré est : $\Delta_{1/2}G^\circ = -n \times \mathcal{F} \times E^\circ$, avec n le nombre d'électrons échangés et $\mathcal{F}$ la constante de Faraday. On donne les potentiels standard suivants : $E^\circ_1(Cu^{2+} / Cu) = 0{,}34\,V$ et $E^\circ_2(Cu^{2+} / Cu^+) = 0{,}16\,V$.

Celui du couple Cu^+ / Cu est noté E°_3.

a) Écrire la demi-équation électronique, notée (1), associée au couple Cu^{2+} / Cu ....

b) Écrire la demi-équation électronique, notée (2), associée au couple Cu^{2+} / Cu^+ ...

c) Écrire la demi-équation électronique, notée (3), associée au couple Cu^+ / Cu .....

d) Quelle est la combinaison linéaire reliant ces trois demi-équations ?

(a) (1) = (2) + (3)

(b) (1) = (3) − (2)

(c) (1) = 2 × ((2) + (3))

.....

e) Quelle est la relation entre les trois enthalpies libres standard de demi-réaction ?

(a) $\Delta_{1/2}G^\circ_1 = \Delta_{1/2}G^\circ_2 + \Delta_{1/2}G^\circ_3$

(b) $\Delta_{1/2}G^\circ_1 = \Delta_{1/2}G^\circ_2 - \Delta_{1/2}G^\circ_3$

(c) $\Delta_{1/2}G^\circ_1 = \Delta_{1/2}G^\circ_3 - \Delta_{1/2}G^\circ_2$

(d) $\Delta_{1/2}G^\circ_1 = 2 \times (\Delta_{1/2}G^\circ_2 + \Delta_{1/2}G^\circ_3)$

.....

f) En déduire une relation entre les trois potentiels standard et calculer E°_3.

(a) $E^\circ_3 = 2E^\circ_2 - E^\circ_1 = -0{,}02\,V$

(b) $E^\circ_3 = 2E^\circ_1 - E^\circ_2 = 0{,}52\,V$

(c) $E^\circ_3 = E^\circ_1 - E^\circ_2 = 0{,}18\,V$

(d) $E^\circ_3 = E^\circ_2 - E^\circ_1 = -0{,}18\,V$

.....

Autour de l'électrolyse

Entraînement 27.7 — Écriture de la réaction d'une électrolyse.

On s'intéresse à la production de dichlore et de soude par électrolyse de l'eau salée en milieu très basique : à l'électrode (1), les ions chlorure sont transformés en dichlore (couple Cl_2/Cl^-) et, à l'électrode (2), l'eau se transforme en dihydrogène en libérant des ions HO^- (couple H_2O/H_2 en milieu basique).

a) Écrire l'équation de la réaction électrochimique ayant lieu à l'électrode (1) ...

b) Écrire l'équation de la réaction électrochimique ayant lieu à l'électrode (2) ...

c) En déduire l'équation de la réaction d'électrolyse .....

Entraînement 27.8 — Bilan de matière d'une électrolyse.

On s'intéresse à la production de dichlore et de soude par électrolyse de l'eau salée en milieu très basique : à l'électrode (1), les ions chlorure sont transformés en dichlore (couple Cl_2/Cl^-) et, à l'électrode (2), l'eau se transforme en dihydrogène en libérant des ions HO^- (couple H_2O/H_2 en milieu basique). L'équation de la réaction d'électrolyse est

$$2\,H_2O\,(\ell) + 2\,Cl^-\,(aq) \longrightarrow Cl_2\,(g) + H_2\,(g) + 2\,HO^-\,(aq).$$

Ainsi, il y a un échange de deux électrons.

L'électrolyse est réalisée avec une densité de courant par unité de surface d'électrode $j = 6{,}00\,kA \cdot m^{-2}$, l'électrolyseur possédant une surface totale $S = 100\,m^2$ d'électrodes.

a) Déterminer la charge électrique échangée entre les électrodes en une heure ...

b) En supposant que tous les électrons participent à la réaction d'électrolyse, déterminer la quantité de matière de dichlore produite pendant cette durée .....

c) En utilisant l'équation d'état des gaz parfaits, en déduire le volume correspondant à 0 °C et sous 1 bar. L'exprimer en m^3 .....

d) On n'obtient en réalité que $233\,m^3$. Déterminer le rendement faradique de l'électrolyse.

.....

Entraînement 27.9 — Bilan énergétique d'une électrolyse.

On s'intéresse à la production de dichlore et de soude par électrolyse de l'eau salée en milieu très basique : à l'électrode (1), les ions chlorure sont transformés en dichlore (couple Cl_2/Cl^-) et, à l'électrode (2), l'eau se transforme en dihydrogène en libérant des ions HO^- (couple H_2O/H_2 en milieu basique). L'équation de la réaction d'électrolyse est : $2\,H_2O\,(\ell) + 2\,Cl^-\,(aq) \longrightarrow Cl_2\,(g) + H_2\,(g) + 2\,HO^-\,(aq)$.

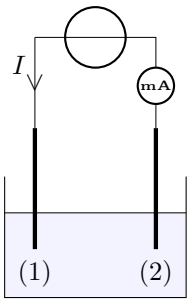
L'électrolyse est réalisée sous une tension $U = 3{,}00\,V$ et avec une densité de courant par unité de surface d'électrode $j = 6{,}00\,kA \cdot m^{-2}$, l'électrolyseur possédant une surface totale $S = 100\,m^2$ d'électrodes. Le volume de dichore obtenu est égal à $233\,m^3$.

a) Déterminer l'énergie électrique consommée par heure d'électrolyse .....

b) Déterminer l'énergie électrique consommée par m^3 de dichlore produit .....

Entraînement 27.10 — Récupération d'or par électrolyse.

Une électrolyse permet d'obtenir de l'or solide Au par réduction des ions aurocyanure $Au(CN)_2^-$ à la cathode, notée (1). Des ions cyanure CN^- sont également produits à cette électrode. À l'anode, notée (2), se produit l'oxydation de l'eau.



Dans ce procédé, le surpotentiel cathodique du couple $Au(CN)_2^- / Au$ est nul alors que le surpotentiel anodique du couple O_2 / H_2O vaut +0,60 V.

On donne les potentiels standard à pH = 0 suivants :

$E^\circ(H_3O^+ / H_2) = 0\,V$, $E^\circ(Au(CN)_2^- / Au) = -0{,}60\,V$ et $E^\circ(O_2 / H_2O) = 1{,}23\,V$.

a) Écrire la réaction électrochimique se produisant sur (1) .....

b) Préciser alors le sens réel de déplacement des porteurs de charge dans les fils (électrons).

(a) (1) vers (2) (b) (2) vers (1)

.....

c) En déduire le signe (+ ou −) de l'intensité I du courant électrique mesurée par le milliampèremètre.

(a) $I < 0$ (b) $I > 0$

.....

d) La solution est basique. Écrire alors la réaction électrochimique se produisant sur (2).

.....

e) La demi-équation associée au couple de l'eau à l'anode est : $2\,H_2O = 4\,H^+ + O_2 + 4\,e^-$.

Calculer le potentiel de Nernst associé pour pH = 14 .....

f) Sachant que le potentiel de Nernst du couple $Au(CN)_2^- / Au$ est ici approximativement égal à son potentiel standard, choisir la tension qu'il faut *a minima* imposer pour démarrer l'électrolyse.

(a) 0,60 V (b) 0,99 V (c) 1,60 V (d) 1,83 V

.....

g) En pratique, que risque-t-il d'arriver si la tension imposée dépasse une certaine valeur limite ?

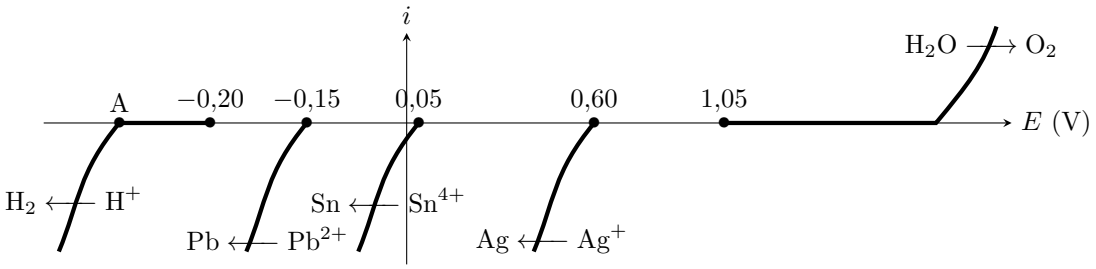
(a) Le générateur va se détériorer.
(b) Le solvant va se réduire.
(c) L'or récupéré sera de mauvaise qualité.
(d) La solution va chauffer puis bouillir.

.....

Courbes courant-potentiel

L'introduction ci-dessous concerne les trois entraînements suivants.

On réalise l'électrolyse d'une solution contenant des ions étain Sn^{4+}, argent Ag^+ et plomb Pb^{2+} entre deux électrodes inertes. La figure ci-dessous donne l'allure schématique des courbes courant-potentiel relatives à l'expérience. L'échelle n'est pas respectée sur l'axe des abscisses. Les valeurs indiquées correspondent aux potentiels d'équilibre calculés à partir de la loi de Nernst. Dans les conditions de l'expérience, les surpotentiels des couples de l'eau valent respectivement 0,70 V en oxydation et −0,30 V en réduction.



Entraînement 27.11 — Analyse du diagramme courant-potentiel.

a) Que vaut le potentiel au point A indiqué à gauche du diagramme courant-potentiel ?

(a) −0,90 V (b) −0,70 V (c) −0,50 V (d) −0,30 V

b) Pourquoi représenter la branche anodique $Ag \longrightarrow Ag^+$ n'est-il pas nécessaire dans ce contexte ?

(a) Il n'y a pas d'argent métallique qui puisse s'oxyder dans le système.

(b) L'argent est un métal noble, inattaquable chimiquement.

(c) L'oxydation de l'argent est thermodynamiquement impossible.

(d) Cette branche est confondue avec la branche cathodique $Ag^+ \longrightarrow Ag$.

Entraînement 27.12 — Identification de la réaction d'électrolyse.

La tension imposée par le générateur augmente progressivement jusqu'à observation d'une réaction.

a) Qu'observe-t-on à l'anode ?

(a) Du dihydrogène gazeux se dégage.
(b) Du dioxygène gazeux se dégage.
(c) Un métal se dépose.
(d) Un métal se dissout.

b) Qu'observe-t-on à la cathode ?

(a) Du dihydrogène gazeux se dégage.
(b) Un dépôt de plomb apparaît.
(c) Un dépôt d'étain apparaît.
(d) Un dépôt d'argent apparaît.

c) En déduire l'équation de la réaction observée .....

d) À partir de quelle valeur de tension commence-t-on à observer cette réaction ?

(a) 0,45 V (b) 1,15 V (c) 1,25 V (d) 2,25 V

Entraînement 27.13 — Application à la métallurgie.

L'électrolyse est réalisée dans le contexte de la production d'étain par hydrométallurgie : le but est d'obtenir un dépôt d'étain à la cathode, l'argent et le plomb étant des impuretés qui ne doivent pas se déposer.

a) Écrire l'équation de la réaction d'électrolyse que l'on souhaite réaliser

b) Quelle(s) impureté(s) doivent impérativement être éliminée(s) avant l'électrolyse ?

(a) Ag^+ et Pb^{2+} (b) Pb^{2+} seulement (c) Ag^+ seulement (d) Aucune

c) Quelle est la tension minimale à imposer pour que la réaction souhaitée ait lieu ?

(a) 0,25 V (b) 0,55 V (c) 1,00 V (d) 1,70 V

d) En pratique, la tension à imposer est supérieure à cette valeur seuil. Pourquoi ?

(a) Le rendement de l'électrolyse n'est pas de 100 %.
(b) Accélérer la réaction demande une tension plus élevée.
(c) La solution électrolytique se comporte comme une résistance, ce qui ajoute une contribution ohmique.
(d) Des réactions parasites sont à prendre en compte.

Pour aller plus loin avec la pile Daniell

Entraînement 27.14 — Charge totale d'une pile.

Soit une pile Daniell cuivre-zinc, d'équation de fonctionnement $Cu^{2+}(aq) + Zn(s) \longrightarrow Zn^{2+}(aq) + Cu(s)$ et constituée d'un volume $V_1 = 100\,mL$ d'une solution de sulfate de zinc ($Zn^{2+}(aq) + {SO_4}^{2-}(aq)$) à la concentration $C_1 = 0{,}1\,mol \cdot L^{-1}$ et d'un volume $V_2 = 100\,mL$ d'une solution de sulfate de cuivre ($Cu^{2+}(aq) + {SO_4}^{2-}(aq)$) à la concentration $C_2 = 0{,}25\,mol \cdot L^{-1}$. Les plaques de zinc et de cuivre ont toutes les deux une masse $m = 30\,g$. On donne $M(Zn) = 65{,}4\,g \cdot mol^{-1}$.

a) Calculer la quantité de matière d'ions Cu^{2+} contenue dans la solution de sulfate de cuivre.

b) Calculer la quantité de matière de zinc Zn contenue dans la plaque métallique

c) Identifier le réactif limitant de la transformation

d) Calculer la quantité maximale d'électrons circulant dans la pile durant son fonctionnement.

e) Calculer en coulombs puis en ampères-heures la charge maximale que la pile peut débiter.

Réponses mélangées

$+$ (cathode) : Cu ; $-$ (anode) : Zn (b) $E = E^\circ(Zn^{2+}/Zn) + \frac{0{,}059}{2}\log\left(\frac{[Zn^{2+}]}{C^\circ}\right)$

$K^\circ = \frac{a(Cu)_{éq} \times a(Zn^{2+})_{éq}}{a(Zn)_{éq} \times a(Cu^{2+})_{éq}}$ $254\,m^3$ (a) (a) et (d) (d)

$2\,H_2O + 2\,e^- \longrightarrow H_2 + 2\,HO^-$ $n(Cu^{2+}) = 2{,}5 \times 10^{-2}\,mol$ (a) et (d) (b)

$n_{Pb^{2+}} = \frac{n_e}{2}$ $E(O_2\,/\,H_2O) = 0{,}39\,V$ (c) $4\,Ag^+ + 2\,H_2O \longrightarrow 4\,Ag + O_2 + 4\,H^+$

$\Delta_r G = -2{,}12 \times 10^2\,kJ \cdot mol^{-1}$ $Sn^{4+} + 2\,H_2O \longrightarrow Sn + O_2 + 4\,H^+$ $Ag^+ + e^- = Ag$

(c) $Q = I\Delta t$ $[Ag^+]_f = 75{,}8\,mmol \cdot L^{-1}$ $91{,}7\,\%$ $Zn + 2\,Ag^+ \longrightarrow Zn^{2+} + 2\,Ag$

$E_{Cu} = 0{,}32\,V$ $2{,}16 \times 10^9\,C$ (b) (a) $Cu^+ + e^- = Cu$ (a) (c) et (d)

(a) $Au(CN)_2^- + e^- = Au + 2\,CN^-$ Cu^{2+} $2{,}78 \times 10^7\,J \cdot m^{-3}$ $U_{co} = 1{,}11\,V$

$6{,}48 \times 10^9\,J$ (b) $n(Zn) = 0{,}46\,mol$ $E_{Zn} = -0{,}79\,V$ $Cu^{2+} + 2\,e^- = Cu$ (d)

(c) (b) et (c) $K^\circ = \frac{[Zn^{2+}]_{éq}}{[Cu^{2+}]_{éq}}$ $Cu^{2+} + e^- = Cu^+$ (a) (d) (b)

$[Pb^{2+}]_f = 112\,mmol \cdot L^{-1}$ (a) $+$: Cu et $-$: Zn $4\,HO^- = 2\,H_2O + O_2 + 4\,e^-$

$Q = 4{,}8 \times 10^3\,C = 1{,}3\,A \cdot h$ $1{,}12 \times 10^4\,mol$ $n(e^-) = 5{,}0 \times 10^{-2}\,mol$ $Q = 0{,}52\,A \cdot h$

$Zn^{2+} + 2\,e^- = Zn$ $n_{Ag^+} = n_e$ $K^\circ = 10^{37} > 1$ $2\,Cl^- \longrightarrow Cl_2 + 2\,e^-$

$E = E^\circ(Cu^{2+}/Cu) + \frac{0{,}059}{2}\log\left(\frac{[Cu^{2+}]}{C^\circ}\right)$ $2\,H_2O + 2\,Cl^- \longrightarrow Cl_2 + H_2 + 2\,HO^-$ (b) et (d)

▶ Réponses et corrigés page 443

Réponses et corrigés

Fiche n° 1. Opérateurs vectoriels

Réponses

1.1 ..... ⓓ

1.2 a) .... $\left(z+y+\dfrac{yz}{a}\right)\vec{e_x}+\left(x+z+\dfrac{xz}{a}\right)\vec{e_y}+\left(x+y+\dfrac{yx}{a}\right)\vec{e_z}$

1.2 b) ..... $6x\vec{e_x}+2a\vec{e_y}-2a\vec{e_z}$

1.2 c) ..... $(2xy+z^2)\vec{e_x}+(2yz+x^2)\vec{e_y}+(2xz+y^2)\vec{e_z}$

1.2 d) ..... $2y\vec{e_x}+2x\vec{e_y}+4\dfrac{a^2}{b}\mathrm{e}^{z/(2b)}\vec{e_z}$

1.2 e) ..... $16xy\vec{e_x}+\left(8x^2-\dfrac{6a^4}{y^2}\right)\vec{e_y}-5b^2\vec{e_z}$

1.3 a) ..... $\left(-\dfrac{2r}{a}-2\theta\right)\vec{e_r}-2\vec{e}_\theta+3\vec{e_z}$

1.3 b) ..... $-\dfrac{2a^2}{r^3}\mathrm{e}^{5\theta}\vec{e_r}+\dfrac{5a^2}{r^3}\mathrm{e}^{5\theta}\vec{e}_\theta$

1.3 c) ..... $\dfrac{r}{\sqrt{r^2-a^2}}\vec{e_r}$

1.3 d) ..... $28\dfrac{\theta r^3}{a^4}\vec{e_r}+7\dfrac{r^3}{a^4}\vec{e}_\theta+\dfrac{1}{z}\vec{e_z}$

1.3 e) ..... $-\dfrac{z\sin(\theta)}{r^2}\vec{e_r}+\dfrac{z\cos\theta}{r^2}\vec{e}_\theta+\dfrac{\sin(\theta)}{r}\vec{e_z}$

1.4 ..... ⓐ

1.5 a) 16

1.5 b) ..... ⓒ

1.5 c) ..... ⓑ

1.5 d) ..... ⓐ

1.5 e) ..... ⓒ

1.5 f) ..... $2\sqrt{17}$

1.6 a) ..... ⓐ

1.6 b) ..... ⓑ

1.6 c) ..... ⓐ

1.6 d) ..... ⓑ

1.6 e) ..... ⓐ

1.7 a) ..... $6x+2a-2b$

1.7 b) ..... $2x+4\dfrac{a^2}{b}\mathrm{e}^{\frac{z}{2b}}$

1.7 c) ..... $16xy-\dfrac{6x^4}{y^2}$

1.7 d) 0

1.7 e) ..... $x(2y-x)$

1.8 a) ..... $-3\dfrac{r}{a}+1$

1.8 b) 0

1.9 ..... ⓑ

1.10 a) 3

1.10 b) 3

1.10 c) ..... ⓑ

1.11 a) ..... $\vec{0}$

1.11 b) ..... $-4c\mathrm{e}^{\frac{z}{2c}}\vec{e_x}-2x\vec{e_z}$

1.11 c) ..... $\dfrac{8x^2}{y}(3x-y)\vec{e_z}$

1.11 d) ..... $2\vec{e_y}$

1.11 e) ..... $x^2\vec{e_x}-2xy(\vec{e_y}+\vec{e_z})-x^2\vec{e_z}.$

1.12 a) ..... $-4\theta\vec{e_z}$

1.12 b) ..... $2\vec{e_z}$

1.13 a) ..... ⓑ

1.13 b) ..... $\boxed{0{,}80\,\text{UA/m}}$

1.13 c) ..... $\boxed{\text{a}}$

1.13 d) ..... $\boxed{2}$

1.14 a) ..... $\boxed{\dfrac{2y}{a}}$

1.14 b) ..... $\boxed{2}$

1.14 c) ..... $\boxed{6-\dfrac{b^2}{z^2}}$

1.15 ..... $\boxed{\begin{pmatrix} \dfrac{2y}{a} \\ 2 \\ 6-\dfrac{b^2}{z^2} \end{pmatrix}}$

1.16 a) ..... $\boxed{\text{c}}$

1.16 b) ..... $\boxed{\text{b}}$

1.16 c) ..... $\boxed{\text{d}}$

1.16 d) ..... $\boxed{\text{a}}$

1.16 e) ..... $\boxed{\text{d}}$

1.17 a) ..... $\boxed{\vec{e_r}+\dfrac{2a}{r}\vec{e_\theta}+\dfrac{-6b}{r\sin\theta\varphi^2}\vec{e_\varphi}}$

1.17 b) .... $\boxed{3r^2\begin{pmatrix} \sin^3(\theta-\varphi) \\ \cos(\theta-\varphi)\sin^2(\theta-\varphi) \\ -\dfrac{1}{\sin\theta}\cos(\theta-\varphi)\sin^2(\theta-\varphi) \end{pmatrix}}$

1.17 c) ..... $\boxed{r\sqrt{\varphi}\begin{pmatrix} 2\sin\theta \\ \cos\theta \\ \dfrac{1}{2\varphi} \end{pmatrix}}$

1.17 d) ..... $\boxed{\dfrac{1}{r\cos^2\theta}\vec{e_\theta}}$

1.18 a) ..... $\boxed{3+\dfrac{4a\cos\theta}{r}-\dfrac{6}{\varphi^2\sin\theta}\dfrac{a}{r}}$

1.18 b) ..... $\boxed{4r\sin\theta\sqrt{\varphi}+2r\cos\theta\sqrt{\varphi}+\dfrac{r}{2\sqrt{\varphi}}}$

1.18 c) ..... $\boxed{1/\tan(\theta)}$

1.19 a) ..... $\boxed{\dfrac{6b}{r\varphi\tan\theta}\vec{e_r}-\dfrac{6b}{r\varphi}\vec{e_\theta}+\dfrac{2a\theta}{r}\vec{e_\varphi}}$

1.19 b) ..... $\boxed{\dfrac{r}{2\sqrt{\varphi}}\vec{e_\theta}-r\sqrt{\varphi}\cos(\theta)\vec{e_\varphi}}$

1.19 c) ..... $\boxed{2\vec{e_\varphi}}$

Corrigés

1.1 Calculons les trois composantes du vecteur gradient dans le système de coordonnées cartésiennes (x, y, z).

On a

$$\frac{\partial V}{\partial x} = yz, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = xz \quad \text{et} \quad \frac{\partial V}{\partial z} = xy.$$

Parmi les solutions proposées, la (c) est donc exclue.

Les solutions (a), (b) et (d) sont possibles (termes de droite corrects) mais les notations des gradients (termes de gauche) ne sont pas tous valables.

La notation $\vec{\nabla}$ comme $\overrightarrow{\text{grad}}$ doit être surmontée d'une flèche pour qualifier la nature vectorielle de l'opérateur gradient, donc les réponses (a) et (b) sont exclues. Précisons que le gradient s'applique à un champ scalaire donc un champ dont la notation ne doit pas être surmontée d'une flèche : deuxième manière d'exclure la réponse (b).

La réponse (d) est l'ultime solution restante, on constate bien qu'elle ne comporte aucune erreur de notation.

.....

1.2 a) Posons $f(x,y,z) = xy + yz + zx + \dfrac{xyz}{a}$. Calculons les dérivées partielles : on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + z + \frac{yz}{a}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x + z + \frac{xz}{a} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = y + x + \frac{xy}{a}.$$

Donc le vecteur gradient de f s'écrit $\left(z + y + \dfrac{yz}{a}\right)\vec{e_x} + \left(x + y + \dfrac{xz}{a}\right)\vec{e_y} + \left(x + y + \dfrac{yx}{a}\right)\vec{e_z}$.

La réponse attendue est bien un vecteur !

.....

1.2 b) Posons $f(x,y,z) = 3x^2 + 2a(y-z) + b^2$. Calculons les dérivées partielles : on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2a \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -2a.$$

Donc le vecteur gradient de f s'écrit $6x\vec{e_x} + 2a\vec{e_y} - 2a\vec{e_z}$.

.....

1.2 c) Posons $f(x,y,z) = x^2y + y^2z + z^2x + a^3$. Calculons les dérivées partielles : on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + z^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2yz \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = y^2 + 2zx.$$

Donc le vecteur gradient de f s'écrit $(2xy + z^2)\vec{e_x} + (2yz + x^2)\vec{e_y} + (2xz + y^2)\vec{e_z}$.

.....

1.2 d) Posons $f(x,y,z) = 2xy + 8a^2\mathrm{e}^{z/(2b)} - 6c^2$. Calculons les dérivées partielles : on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 4\frac{a^2}{b}\mathrm{e}^{z/(2b)}.$$

Donc le vecteur gradient de f s'écrit $2y\vec{e_x} + 2x\vec{e_y} + 4\dfrac{a^2}{b}\mathrm{e}^{z/(2b)}\vec{e_z}$.

.....

1.2 e) Posons $f(x,y,z) = 8x^2y + \dfrac{6a^4}{y} - 5b^2z$. Calculons les dérivées partielles : on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 16xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = (8x^2 - \frac{6a^4}{y^2}) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -5b^2.$$

Donc le vecteur gradient de f s'écrit $16xy\vec{e_x} + \left(8x^2 - \dfrac{6a^4}{y^2}\right)\vec{e_y} - 5b^2\vec{e_z}$.

.....

1.3 a) Posons $f(r,\theta,z) = 3z - \dfrac{r^2}{a} - 2r\theta$. Calculons les dérivées partielles : on a

$$\frac{\partial f}{\partial r} = -\frac{2r}{a} - 2\theta, \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = -2r \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 3.$$

Donc le vecteur gradient de f s'écrit $-\left(\dfrac{2r}{a} + 2\theta\right)\vec{e_r} - 2\vec{e}_\theta + 3\vec{e_z}$.

.....

1.3 b) Posons $f(r,\theta,z) = \dfrac{a^2}{r^2}\mathrm{e}^{5\theta}$. Calculons les dérivées partielles : on a

$$\frac{\partial f}{\partial r} = -\frac{2a^2}{r^3}\mathrm{e}^{5\theta}, \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{5a^2}{r^2}\mathrm{e}^{5\theta} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Donc le vecteur gradient de f s'écrit $-\dfrac{2a^2}{r^3}\mathrm{e}^{5\theta}\vec{e_r} + \dfrac{5a^2}{r^3}\mathrm{e}^{5\theta}\vec{e}_\theta$.

.....

1.3 c) Posons $f(r,\theta,z)=\sqrt{r^2-a^2}$. Calculons les dérivées partielles : on a

$$\frac{\partial f}{\partial r}=\frac{r}{\sqrt{r^2-a^2}},\quad \frac{\partial f}{\partial \theta}=0\quad\text{et}\quad \frac{\partial f}{\partial z}=0.$$

Donc le vecteur gradient de f s'écrit $\dfrac{r}{\sqrt{r^2-a^2}}\vec{e_r}$.

.....

1.3 d) Posons $f(r,\theta,z)=7\left(\dfrac{r}{a}\right)^4\theta+\ln(z/b)$. Calculons les dérivées partielles : on a

$$\frac{\partial f}{\partial r}=28\frac{\theta r^3}{a^4},\quad \frac{\partial f}{\partial \theta}=7\frac{r^2}{a^4}\quad\text{et}\quad \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{z}.$$

Donc le vecteur gradient de f s'écrit $28\dfrac{\theta r^3}{a^4}\vec{e_r}+7\dfrac{r^3}{a^4}\vec{e}_\theta+\dfrac{1}{z}\vec{e_z}$.

.....

1.3 e) Posons $f(r,\theta,z)=\dfrac{z}{r}\sin(\theta)$. Calculons les dérivées partielles : on a

$$\frac{\partial f}{\partial r}=-\frac{z\sin(\theta)}{r^2},\quad \frac{\partial f}{\partial \theta}=\frac{z\cos\theta}{r}\quad\text{et}\quad \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\sin(\theta)}{r}.$$

Donc le vecteur gradient de f s'écrit $-\dfrac{z\sin(\theta)}{r^2}\vec{e_r}+\dfrac{z\cos\theta}{r^2}\vec{e}_\theta+\dfrac{\sin(\theta)}{r}\vec{e_z}$.

.....

1.4 Considérons la notation du gradient (terme de gauche des équations proposées). La réponse (d) est exclue car la notation nabla d'un gradient ne fait pas intervenir le produit scalaire. La réponse (c) est exclue car le couple de variables ne correspond à aucun de ceux proposés par l'énoncé. Considérons donc la formule cartésienne du gradient (terme de droite des équations proposées) pour les deux options restantes. La réponse (b) fait une interversion des coordonnées de dérivation et de celles de direction, elle est donc exclue. La bonne réponse est (a).

.....

1.5 a) On a $g(A)=g(-1,1,2)=(-1-2)^2+(1+1)^2+2^2-1=9+4+4-1=16$.

.....

1.5 b) Exprimons le gradient de la fonction scalaire g. On a

$$\overrightarrow{\text{grad}}(g(x,y,z))=\frac{\partial g}{\partial x}\vec{e_x}+\frac{\partial g}{\partial y}\vec{e_y}+\frac{\partial g}{\partial z}\vec{e_z}=(2(x-2))\vec{e_x}+(2y+2)\vec{e_y}+2z\vec{e_z}.$$

Par projection sur l'axe de direction $\vec{e_z}$, on obtient la quantité $2z$. Réponse (c).

.....

1.5 c) Exprimons le gradient de la fonction scalaire g. On a

$$\overrightarrow{\text{grad}}(g(x,y,z))=\frac{\partial g}{\partial x}\vec{e_x}+\frac{\partial g}{\partial y}\vec{e_y}+\frac{\partial g}{\partial z}\vec{e_z}=(2(x-2))\vec{e_x}+(2y+2)\vec{e_y}+2z\vec{e_z}.$$

Par projection sur l'axe de direction $\vec{e_y}$ on obtient la quantité $2y+2$. Réponse (c).

.....

1.5 d) Exprimons le gradient de la fonction scalaire g. On a

$$\overrightarrow{\text{grad}}(g(x,y,z))=\frac{\partial g}{\partial x}\vec{e_x}+\frac{\partial g}{\partial y}\vec{e_y}+\frac{\partial g}{\partial z}\vec{e_z}=(2(x-2))\vec{e_x}+(2y+2)\vec{e_y}+2z\vec{e_z}.$$

Par projection sur l'axe de direction $\vec{e_x}$ on obtient la quantité $2x-4$. Réponse (a).

.....

1.5 e) Exprimons le gradient de la fonction scalaire g. On a

$$\overrightarrow{\text{grad}}(g(x,y,z)) = \frac{\partial g}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial g}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial g}{\partial z}\vec{e_z} = (2(x-2))\vec{e_x} + (2y+2)\vec{e_y} + 2z\vec{e_z}.$$

Cette notation est équivalente au vecteur colonne de la réponse (c).

.....

1.5 f) Connaissant les composantes du gradient d'après les réponses précédentes, on peut exprimer la norme du vecteur gradient $\left\|\vec{\nabla} g(x,y,z)\right\|$ en un point quelconque. On a

$$\left\|\vec{\nabla} g(x,y,z)\right\| = \sqrt{(2x-4)^2 + (2y+2)^2 + 4z^2}.$$

On réalise l'application numérique au point $\text{A}(-1,1,2)$: on a

$$\left\|\vec{\nabla} g(\text{A})\right\| = \left\|\vec{\nabla} g(-1,1,2)\right\| = \sqrt{(-2-4)^2 + (2+2)^2 + 4\times 2^2} = \sqrt{36+16+16} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}.$$

.....

1.6 a) Rappelons l'expression du gradient en coordonnées cartésiennes : on a

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f(x,y,z)) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e_z}.$$

Or, ici $\overrightarrow{\text{grad}}\, f = 2xy\vec{e_x} + x^2\vec{e_y} + a^2\vec{e_z}$; donc, par identification : $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z} = a^2$. Réponse (a).

.....

1.6 b) On a $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy$ donc, par intégration par rapport à la variable x, il vient $f(x,y,z) = x^2 y + \text{cste}$ avec $\text{cste} = g(y,z)$ une fonction des coordonnées y et z car $\dfrac{\partial g(y,z)}{\partial x} = 0$. Réponse (b)

.....

1.6 c) On a $f(x,y,z) = x^2 y + g(y,z)$ donc $\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = x^2 + \dfrac{\partial g(y,z)}{\partial y}$. Or, d'après l'énoncé, on a

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = x^2.$$

On déduit de ces deux équations que l'on a nécessairement $\dfrac{\partial g}{\partial y} = 0$. Réponse (a).

.....

1.6 d) On a $\dfrac{\partial g(y,z)}{\partial y} = 0$ donc, par intégration par rapport à la variable y, il vient $g(y,z) = \text{cste}$ avec $\text{cste} = h(z)$ une fonction de la seule coordonnée z car $\dfrac{\partial h(z)}{\partial y} = 0$.

On a $f(x,y,z) = x^2 y + g(y,z) = x^2 y + h(z)$ donc $\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = \dfrac{\partial h}{\partial z}$. Or, on sait d'après l'énoncé que $\dfrac{\partial f}{\partial z} = a^2$. On déduit de ces deux équations que l'on a nécessairement $\dfrac{\partial h}{\partial z} = a^2$ donc $h(z) = a^2 z + \text{cste}$, soit finalement $g = a^2 z + \text{cste}$. Réponse (b).

.....

1.6 e) On a $f(x,y,z) = x^2 y + g(y,z) = x^2 y + h(z) = x^2 y + a^2 z + \text{cste}$. On a donc $f(0,0,0) = \text{cste}$, or $f(0,0,0) = 0$ donc $\text{cste} = 0$. Réponse (a).

.....

1.7 a) Pour éviter les étourderies, vous pouvez vérifier que les trois termes de la somme ont bien la même dimension et que cette dimension correspond à la dimension de l'argument de l'opérateur divergence divisée par une longueur.

.....

1.7 b) On a $0 + 2x + 8\dfrac{a^2}{2b}\mathrm{e}^{\frac{z}{2b}} = 2x + 4\dfrac{a^2}{b}\mathrm{e}^{\frac{z}{2b}}$.

1.7 c) On a $8 \times 2xy - \dfrac{6x^4}{y^2} + 0 = 16xy - \dfrac{6x^4}{y^2}$.

1.7 d) On a $0 + 0 = 0$.

1.7 e) On a $2xy - x^2 = x(2y - x)$.

1.8 a) On a $-3\dfrac{r}{a} - 2 + 3 = -3\dfrac{r}{a} + 1$.

1.8 b) La composante A_θ ne dépend pas de θ !

1.9 Il faut calculer chacune des divergences au point A.

- Cas (a) : on a $\mathrm{div}\left(x^2\vec{e_x} + y^2\vec{e_y} + z^2\vec{e_z}\right) = 2x + 2y + 2z$ donc la valeur de divergence en A vaut
$$2 \times (-1) + 2 \times (-1) + 2 \times 1 = -2.$$
- Cas (b) : on a $\mathrm{div}\left(y^2\vec{e_x} + x^2\vec{e_y} + z^2\vec{e_z}\right) = 2z$ donc la valeur de divergence en A vaut $2 \times 1 = +2$.
- Cas (c) : on a $\mathrm{div}\left(z^2\vec{e_x} + x^2\vec{e_y} + y^2\vec{e_z}\right) = 0$ donc la valeur de divergence en A vaut 0.
- Cas (d) : on a $\mathrm{div}\left(y^2\vec{e_x} + x^2\vec{e_z} + z^2\vec{e_y}\right) = 0$ donc la valeur de divergence en A vaut 0.

La valeur de divergence maximale est dans le cas (b).

1.10 a) On a $1 + 1 + 1 = 3$.

1.10 b) On a $\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial(r^2.r)}{\partial r} + 0 + 0 = \dfrac{3r^2}{r^2} = 3$.

1.10 c) On a $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(r.r)}{\partial r} + 0 + 0 = \dfrac{2r}{r} = 2$. Réponse (b).

1.11 a) On a $(0-0)\vec{e_x} + (0-0)\vec{e_y} + (0-0)\vec{e_z} = \vec{0}$.

1.11 b) On a $\left(0 - \dfrac{8c^2}{2c}\mathrm{e}^{\frac{z}{2c}}\right)\vec{e_x} + (0-0)\vec{e_y} + (0-2x)\vec{e_z} = -4c\mathrm{e}^{\frac{z}{2c}}\vec{e_x} - 2x\vec{e_z}$.

1.11 c) On a $(0-0)\vec{e_x} + (0-0)\vec{e_y} + \left(\dfrac{24x^3}{y} - 8x^2\right)\vec{e_z} = \dfrac{8x^2}{y}(3x - y)\vec{e_z}$.

1.11 d) On a $(0-0)\vec{e_x} + (1-(-1))\vec{e_y} + (0-0)\vec{e_z} = 2\vec{e_y}$.

1.11 e) On a $(x^2-0)\vec{e_x} + (0-2xy)\vec{e_y} + (-2xy-x^2)\vec{e_z} = x^2\vec{e_x} - 2xy(\vec{e_y} + \vec{e_z}) - x^2\vec{e_z}$.

1.12 a) On a $\left(\dfrac{1}{r} \times (0) - 0\right)\vec{e_r} + (0-0)\vec{e_\theta} + \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(-2r^2\theta)}{\partial r} - 0\right)\vec{e_z} = -4\theta\vec{e_z}$.

1.12 b) On a $\left(\frac{1}{r}\times(0)-0\right)\vec{e_r}+(0-0)\vec{e_\theta}+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r^2)}{\partial r}-0\right)\vec{e_z}=2\vec{e_z}$.

.....

1.13 a) Par définition du potentiel, on a $\mathrm{d}\Phi = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\Phi \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}$. Cette quantité étant nulle sur une équipotentielle par définition, le vecteur $\vec{v}$ doit être nécessairement orthogonal au vecteur $\mathrm{d}\vec{\ell}$ en tout point de l'équipotentielle. Réponse (b).

.....

1.13 b) Au premier ordre, on peut écrire que $v(\mathrm{C}) \approx \dfrac{\Delta\Phi}{\Delta\ell}$. Graphiquement, au niveau du point C, on a :

$$\Delta\Phi = 1{,}60\,\mathrm{UA} - 1{,}20\,\mathrm{UA} = 0{,}40\,\mathrm{UA} \qquad \text{et} \qquad \Delta\ell = \mathrm{AC} = 0{,}50\,\mathrm{m} \quad \text{donc} \quad v(\mathrm{C}) \approx 0{,}80\,\mathrm{UA/m}.$$

.....

1.13 c) Le champ demandé est orienté dans le sens du gradient de Φ, c'est-à-dire dans le sens des potentiels croissants. Réponse (a).

.....

1.13 d) Les deux points C et D sont sur une même ligne de champ. En considérant un tube de champ centré sur cette ligne de champ commune et qui s'appuie sur les deux autres lignes de champ de la figure, on peut écrire que : $S_\mathrm{C} v_\mathrm{C} = S_\mathrm{D} v_\mathrm{D}$. Les valeurs de S sont proportionnelles à la distance sur le graphe entre les deux lignes de champ délimitant le tube ; donc, en mesurant ces distances au niveau des points C et D, on a : $\dfrac{S_\mathrm{D}}{S_\mathrm{C}} \approx \dfrac{1{,}6\,\mathrm{cm}}{0{,}8\,\mathrm{cm}} = 2{,}0$. L'intensité du champ $\vec{v}$ est environ 2 fois plus importante en C qu'en D. On retrouve le fait que plus les lignes de champ sont resserrées, plus le champ est intense.

.....

1.14 a) Posons $f(x,y,z) = \dfrac{x^2 y}{a} + bz + c^2$. Calculons les dérivées partielles secondes : on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2y}{a}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Donc le laplacien scalaire de f s'écrit $\dfrac{2y}{a}$.

.....

1.14 b) Posons $f(x,y,z) = y^2 - 5az$. Calculons les dérivées partielles secondes : on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Donc le laplacien scalaire de f s'écrit 2.

.....

1.14 c) Posons $f(x,y,z) = b^2 \ln(\frac{z}{a}) + 3x^2$. Calculons les dérivées partielles secondes : on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{b^2}{z^2}.$$

Donc le laplacien scalaire de f s'écrit $6 - \dfrac{b^2}{z^2}$.

.....

1.15 Posons $A_x(x,y,z) = \dfrac{x^2 y}{a} + bz + c^2$ puis $A_y = y^2 - 5az$ et $A_z = b^2 \ln(\frac{z}{a}) + 3x^2$. On calcule les laplaciens scalaires de ces trois fonctions selon la formule : $\Delta(f(x,y,z)) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

On obtient $\Delta A_x = \dfrac{2y}{a}$, $\Delta A_y = 2$ et $\Delta A_z = 6 - \dfrac{b^2}{z^2}$. Le laplacien vectoriel s'écrit donc : $\dfrac{2y}{a}\vec{e_x} + 2\vec{e_y} + 6 - \dfrac{b^2}{z^2}\vec{e_z}$, que l'on peut aussi mettre sous la forme du vecteur colonne proposé en réponse.

.....

1.16 a) Ne pas oublier d'indiquer qu'il s'agit d'un opérateur vectoriel : $\overrightarrow{\text{grad}}\, A$ et non grad(A) !!

.....

1.16 b) L'argument est un vecteur, pensez à choisir la base de projection de façon à faciliter le calcul.

.....

1.16 c) Ne pas oublier d'indiquer qu'il s'agit d'un opérateur vectoriel : $\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{A}$ et non rot$(\vec{A})$!!

.....

1.16 d) Vérifiez l'homogénéité des trois termes : homogénéité de l'argument du laplacien divisé par le carré d'une longueur !

.....

1.16 e) Neuf termes à calculer ! Heureusement souvent beaucoup sont nuls du fait des symétries et invariances...

.....

1.17 a) Posons $f(r,\theta,\varphi) = r + 2a\theta + \dfrac{6b}{\varphi}$. Calculons les dérivées partielles : on a

$$\frac{\partial f}{\partial r} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = 2a \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{-6b}{\varphi^2}.$$

Donc le vecteur gradient de f s'écrit $1\vec{e_r} + \dfrac{2a}{r}\vec{e_\theta} + \dfrac{-6b}{r\sin\theta\varphi^2}\vec{e_\varphi}$.

.....

1.17 b) Posons $f(r,\theta,\varphi) = (r\sin(\theta-\varphi))^3$. Calculons les dérivées partielles : on a

$$\frac{\partial f}{\partial r} = 3r^2\sin^3(\theta-\varphi), \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = 3r^3\cos(\theta-\varphi)\sin^2(\theta-\varphi) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = -\cos(\theta-\varphi)\sin^2(\theta-\varphi)\sin\theta.$$

Donc, le vecteur gradient de f s'écrit bien sous la forme du vecteur colonne proposé en réponse.

.....

1.17 c) Posons $f(r,\theta,\varphi) = r^2\sqrt{\varphi}\sin\theta$. Calculons les dérivées partielles : on a

$$\frac{\partial f}{\partial r} = 2\sin\theta, \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = r\cos\theta \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{r\sin\theta}{2\varphi}.$$

Donc, le vecteur gradient de f s'écrit bien sous la forme du vecteur colonne proposé en réponse.

.....

1.17 d) La seule dérivée partielle non nulle est celle par rapport à la coordonnée θ. On peut soit utiliser la dérivation de la fonction tangente, soit développer grâce à l'identité $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$.

.....

1.18 a) On calcule $3\dfrac{r^2}{r^2} + \dfrac{2a}{r\sin\theta}2\sin\theta\cos\theta + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{-6a}{\varphi^2} = 3 + \dfrac{4a\cos\theta}{r} - \dfrac{6}{\varphi^2\sin\theta}\dfrac{a}{r}$.

.....

1.18 b) On calcule

$$\frac{4r^3}{r^2}\sin\theta\sqrt{\varphi} + \frac{1}{r\sin\theta}2\sin\theta\cos\theta r^2\sqrt{\varphi} + \frac{1}{r\sin\theta}r^2\sin\theta\frac{1}{2\sqrt{\varphi}} = 4r\sin\theta\sqrt{\varphi} + 2r\cos\theta\sqrt{\varphi} + \frac{r}{2\sqrt{\varphi}}.$$

.....

1.18 c) La composante A_θ ne dépend que de r.

.....

1.19 a) On calcule $\dfrac{1}{r\sin\theta}\left(\dfrac{6b}{\varphi}\cos\theta - 0\right)\vec{e_r} + \left(\dfrac{1}{r\sin\theta}\times 0 - \dfrac{1}{r}\dfrac{6b}{\varphi}\right)\vec{e}_\theta + \dfrac{1}{r}(2a\theta - 0)\vec{e_\varphi}$.

.....

1.19 b) On a

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{\mathrm{rot}}\big(r^2\sin(\theta)\sqrt{\varphi}\vec{e_r}\big)\\
&= \frac{1}{r\sin\theta}(0-0)\vec{e_r} + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\times\frac{\partial}{\partial\varphi}(r^2\sin(\theta)\sqrt{\varphi}) - \frac{1}{r}\times 0\right)\vec{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(0 - \frac{\partial}{\partial\theta}(r^2\sin(\theta)\sqrt{\varphi})\right)\vec{e_\varphi}\\
&= \frac{1}{r\sin\theta}\times\frac{\partial}{\partial\varphi}(r^2\sin(\theta)\sqrt{\varphi})\vec{e_\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(r^2\sin(\theta)\sqrt{\varphi})\vec{e_\varphi}\\
&= \frac{r}{2\sqrt{\varphi}}\vec{e_\theta} - r\sqrt{\varphi}\cos(\theta)\vec{e_\varphi}.
\end{aligned}$$

1.19 c) On calcule $\frac{1}{r\sin\theta}(0-0)\vec{e_r} + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\times 0 - \frac{1}{r}\times 0\right)\vec{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r^2) - 0\right)\vec{e_\varphi} = 2\vec{e_\varphi}$.

Fiche n° 2. Loi du frottement solide

Réponses

2.1 a) ..... (c)

2.1 b) ..... (b)

2.1 c) ..... (c)

2.1 d) ..... (a)

2.2 a) ..... Faux

2.2 b) ..... Vrai

2.2 c) ..... Faux

2.3 ..... (a)

2.4 a) ..... (d)

2.4 b) ..... 2,8 N

2.5 a) ..... $-1{,}5\,\text{N}$

2.5 b) ..... 3,2 N

2.5 c) ..... Faux

2.6 ..... (c)

2.7 ..... (d)

2.8 a) ..... $f_\text{d}(F\sin(\alpha) - mg)$

2.8 b) ..... (a)

2.8 c) ..... $\ddot{x} = -f_\text{d}g + \dfrac{F}{m}$

2.9 a) ..... (a)

2.9 b) ..... (a)

2.9 c) ..... $-\left(x_0 + \dfrac{fmg}{k}\right)\omega_0 \sin(\omega_0 t)\overrightarrow{u_x}$

2.9 d) ..... 384 ms

2.9 e) ..... 3,0 cm

2.10 a) ..... $\dfrac{1}{6}\left(8 - 7\dfrac{v^2}{gh}\right)$

2.10 b) 0,8

2.11 a) ..... (a)

2.11 b) ..... 1,6 ms

2.11 c) ..... $-75\,\mu\text{m}$

2.12 a) ..... 5 s

2.12 b) ..... 7 s

2.12 c) ..... 350 N

2.12 d) ..... 175 N

2.12 e) ..... (b)

2.12 f) ..... (a)

Corrigés

2.1 a) La brosse est animée d'un mouvement relatif par rapport au tableau : elle ne peut donc être en situation d'adhérence ; de plus, sa forme de parallélépipède empêche toute possibilité de roulement. Elle glisse sur le tableau, réponse (c).

.....

2.1 b) Pour bien comprendre, imaginons que les pneus du vélo comportent en surface des points de peinture. Si le vélo roule sur une route, alors le mouvement des roues va déposer les points de peinture sur celle-ci : ils apparaissent nettement après le passage du vélo et on pourrait dire métaphoriquement que le motif adhère au sol. On dit qu'il y a roulement sans glissement, car la roue adhère au sol. C'est bien le cas ici, donc réponse (b).

.....

2.1 c) Pour bien comprendre, imaginons que les pneus du véhicule comportent en surface des points de peinture. Si le véhicule freine à tel point que les roues ne tournent plus, alors on ne voit plus sur la route qu'une traînée colorée sans motif net : l'un d'entre eux est étiré sur la route et on pourrait dire métaphoriquement qu'il glisse. Dans le cas où le véhicule dérape, on imagine très bien que les pneus crissent ; autrement dit, les pneus glissent sur le sol. On dit que la voiture glisse car elle n'adhère pas au sol. C'est bien le cas ici, donc réponse (c). Lorsque la roue glisse mais maintient un mouvement de rotation autour de son axe malgré le dérapage, on dit qu'il y a roulement avec glissement.

.....

2.1 d) Le tapis roulant déplace le livre mais celui-ci n'a pas de mouvement relatif par rapport au tapis. La vitesse de glissement est donc nulle, le livre adhère au tapis, réponse (a).

.....

2.2 a) Exprimons la vitesse du tapis en $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$: $v_0 = 3{,}6\,\mathrm{km\cdot h^{-1}} = \dfrac{3\,600\,\mathrm{m}}{3\,600\,\mathrm{s}} = 1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.
Ainsi, $\vec{v}_{\text{glissement}}(\text{valise/tapis}) = (v_1 - v_0)\vec{u_x} = 0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Le valise de Sam ne glisse pas sur le tapis roulant.

.....

2.2 b) Déterminons la vitesse de la valise de Paul : $v_1 = \dfrac{p_1}{m} = \dfrac{8{,}0\,\mathrm{N\cdot s}}{15\,\mathrm{kg}} = 0{,}6\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$
Ainsi, $\vec{v}_{\text{glissement}}(\text{valise/tapis}) = (v_1 - v_0)\vec{u_x} = -0{,}4\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. La valise de Paul glisse sur le tapis.

.....

2.2 c) On a $\vec{v}_{\text{glissement}}(\text{valise/tapis}) = (v_1 - v_0)\vec{u_x} = -2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Le sac d'Assia glisse sur le tapis.

.....

2.3 La réponse (c) est forcément exclue car les vecteurs $\vec{F}$ et $\vec{e_y}$ sont orthogonaux donc de produit scalaire nul. Le solide est à l'équilibre (immobile) donc la résultante des forces qui s'applique sur lui est nulle :

$$\vec{R_\mathrm{T}} + \vec{F} + \vec{R_\mathrm{N}} + \vec{P} = \vec{0}.$$

Par projection, on a d'une part $\vec{R_\mathrm{N}} + \vec{P} = \vec{0}$ sur l'axe verticale et d'autre part $\vec{R_\mathrm{T}} + \vec{F} = \vec{0}$ sur l'axe horizontal. En décomposant les forces à l'aide du repère introduit, ces deux équations deviennent respectivement $\vec{R_\mathrm{N}}\cdot\vec{e_y} + \vec{P}\cdot\vec{e_y} = 0$ et $\vec{R_\mathrm{T}}\cdot\vec{e_x} + \vec{F}\cdot\vec{e_x} = 0$. En développant l'expression de la force poids et en considérant la valeur de la norme de la force de tension fournie par l'énoncé, on obtient $\vec{R_\mathrm{N}}\cdot\vec{e_y} - mg = 0$ et $\vec{R_\mathrm{T}}\cdot\vec{e_x} + \left\|\vec{F}\right\| = 0$, soit $\vec{R_\mathrm{N}}\cdot\vec{e_y} = mg = 10\,\mathrm{N}$ et $\vec{R_\mathrm{T}}\cdot\vec{e_x} = -\left\|\vec{F}\right\| = -5\,\mathrm{N}$. Les réponses (b) et (d) sont fausses, (a) est vraie.

.....

2.4 a) La projection du principe fondamental de la dynamique conduit aux relations suivantes :

$$\begin{cases} F - R_\mathrm{T} - mg\sin(\alpha) = 0 & (\mathrm{O}x) \\ R_\mathrm{N} - mg\cos(\alpha) = 0 & (\mathrm{O}y). \end{cases}$$

Nous obtenons donc $R_\mathrm{N} = mg\cos(\alpha)$. De plus, le solide est à la limite de glissement donc $R_\mathrm{T} = \mu_\mathrm{s} mg\cos(\alpha)$.
Ainsi, $F = R_\mathrm{T} + mg\sin(\alpha) = mg\cos(\alpha)(\mu_\mathrm{s} + \tan(\alpha))$: c'est la réponse (d) qui est juste.

.....

2.4 b) On a $F = mg\cos(\alpha)(\mu_\mathrm{s} + \tan(\alpha)) = 0{,}35\,\mathrm{kg} \times 10\,\mathrm{m\cdot s^{-2}} \times \cos(20\,°)(0{,}5 + \tan(20\,°))$ puis $F = 2{,}8\,\mathrm{N}$.

.....

2.5 a) On a $T = -\left\|\vec{R}\right\|\sin(\alpha) = -3{,}5\,\mathrm{N} \times \sin(25°) = -1{,}5\,\mathrm{N}$.

.....

2.5 b) On a $N = \left\|\vec{R}\right\|\cos(\alpha) = -3{,}5\,\mathrm{N} \times \cos(25°) = 3{,}2\,\mathrm{N}$.

.....

2.5 c) D'après la loi de Coulomb, le cube ne glissera pas sur son support si, et seulement si :

$$\left\|\vec{T}\right\| < \mu_s \left\|\vec{N}\right\|.$$

Ici, on a $\left\|\vec{T}\right\| = 1{,}5\,\text{N}$ et $\mu_s\left\|\vec{N}\right\| = 0{,}6 \times 3{,}2\,\text{N} = 1{,}9\,\text{N}$. Le cube ne glisse donc pas sur son support.

.....

2.6 Pour comparer les situations, il faut déterminer la valeur de α pour chacune d'elles, et le tout avec une même unité (choisissons les degrés). La situation (b) est évidente et donne $\alpha = 30°$. La situation (a) équivaut à $\alpha = \arctan 0{,}5 = 27°$. La situation (c) équivaut à $\alpha = \arctan 0{,}8 = 39°$. La situation (d) équivaut à $\alpha = \dfrac{\pi}{8} = 23°$. Le couple de solides ayant le plus grand cône de frottement est donc celui utilisé dans la situation (c).

.....

2.8 a) Notons que, dans cette application, le glissement se fait suivant $+\vec{e_x}$ donc $T = \vec{T}\cdot\vec{e_x} < 0$ et $N = \vec{N}\cdot\vec{e_z} > 0$.

D'après la loi de Coulomb et la relation (1), on a $\left\|\vec{T}\right\| = |T| = f_d(mg - F\sin(\alpha)) > 0$.

Nous en déduisons alors l'expression de T : $T = -|T| = f_d(F\sin(\alpha) - mg)$.

.....

2.8 b) D'après l'expression de T et la relation (2), nous obtenons : $\ddot{x} = -f_d g + \dfrac{F}{m}(\cos(\alpha) + f_d\sin(\alpha))$.

.....

2.8 c) D'après la question précédente :

$$\ddot{x} = -f_d g + \frac{F}{m}.$$

Nous pouvons voir que le poids va contribuer à ralentir la luge alors que la force de traction l'accélère.

.....

2.9 a) La solution de l'équation différentielle est la somme de la solution particulière x_p de l'équation totale et de la solution générale x_g de l'équation homogène :

$$x = x_p + x_g = -\frac{fmg}{k} + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t).$$

Les conditions à $t = 0$ imposent $\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$ Ainsi, $A = x_0 + \dfrac{fmg}{k}$ et $B = 0$.

Ainsi, la position du solide obéit à l'équation : $x(t) = \left(x_0 + \dfrac{fmg}{k}\right)\cos(\omega_0 t) - \dfrac{fmg}{k}$.

.....

2.9 b) La vitesse du solide dans le référentiel d'étude s'écrit : $\vec{v}(\text{solide})_{\mathcal{R}_0} = \dot{x}\vec{u_x} = -\left(x_0 + \dfrac{fmg}{k}\right)\omega_0\sin(\omega_0 t)\vec{u_x}$.

.....

2.9 c) La vitesse du support est nulle, donc la vitesse de glissement est la vitesse du solide. Nous en déduisons que $\vec{v}(\text{solide})_{\mathcal{R}_0} = -\left(x_0 + \dfrac{fmg}{k}\right)\omega_0\sin(\omega_0 t)\vec{u_x}$.

.....

2.9 d) La phase de glissement s'arrête dès que la vitesse de glissement s'annule de nouveau. On a alors

$$\vec{v}_{\text{glissement solide/support}}(t_1) = -\left(x_0 + \frac{fmg}{k}\right)\omega_0\sin(\omega_0 t)\vec{u_x} = 0.$$

Cela impose : $\sin(\omega_0 t_1) = 0$ donc $t_1 = \dfrac{\pi}{\omega_0}$.

Ainsi, $t_1 = \pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} = \pi\sqrt{\dfrac{0{,}3\,\text{kg}}{7\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}}} = 384\,\text{ms}$.

.....

2.9 e) On a $x(t_1) = \left(x_0 + \dfrac{fmg}{k}\right)\cos\left(\omega_0 \dfrac{\pi}{\omega_0}\right) - \dfrac{fmg}{k}$ donc $x(t_1) = -\left(x_0 + \dfrac{fmg}{k}\right) - \dfrac{fmg}{k} = -x_0 - \dfrac{2fmg}{k}$.

Ainsi, $x(t_1) = 0{,}09\,\text{m} - \dfrac{2 \times 0{,}2 \times 0{,}3\,\text{kg} \times 10\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}}{20\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}} = 3{,}0\,\text{cm}.$

.....

2.10 a) On a $f_\text{d} mgh = Mgh - \dfrac{1}{2}(m+M)v^2$ et donc

$$f_\text{d} = \frac{M}{m} - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{M}{m}\right)\frac{v^2}{gh} = \frac{4}{3} - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{4}{3}\right)\frac{v^2}{gh} = \frac{1}{6}\left(8 - \frac{7v^2}{gh}\right).$$

.....

2.10 b) On a : $f_\text{d} = \dfrac{1}{6}\left(8 - \dfrac{7 \times \left(0{,}82\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}\right)^2}{0{,}15\,\text{m} \times 10\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}}\right) = 0{,}8.$

.....

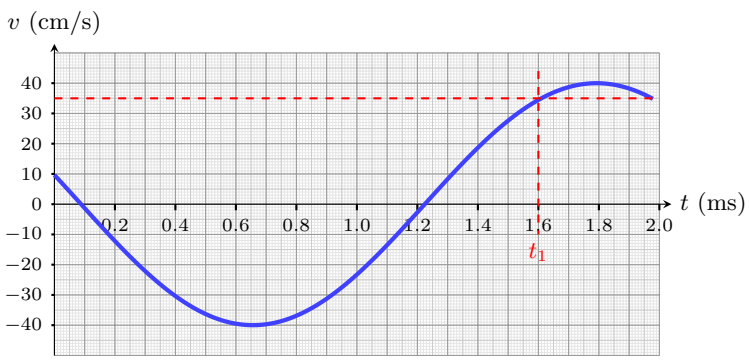
2.11 a) Par définition de la vitesse de glissement, on a

$$\vec{v}_\text{glissement}(\text{palet/tapis}) = \vec{v}(\text{G},t) - \vec{v}_\text{tapis} = (v(t) - v_0)\vec{e_x}.$$

.....

2.11 b)

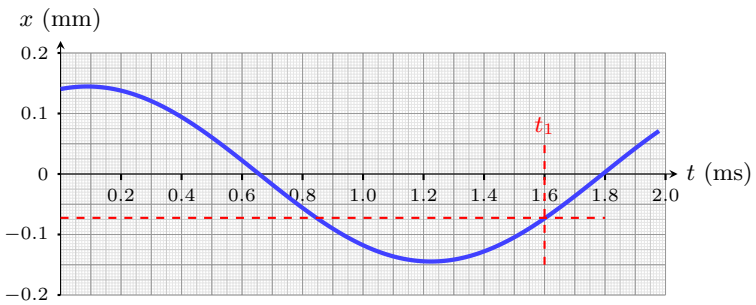
Le glissement s'arrête dès que la vitesse de glissement s'annule, à savoir $v(t) = v_0$.
La vitesse du tapis v_0 peut être écrite dans la même unité que $v(t)$: $v_0 = \dfrac{1260 \times 100\text{cm}}{3\,600\,\text{s}} = 35\,\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$.
Reportons alors la valeur de v_0 sur le diagramme suivant afin de lire la date t_1.



Par lecture graphique : $t_1 = 1{,}6\,\text{ms}$.

.....

2.11 c)



La lecture graphique permet de déterminer que $x_1 = -75\,\mu\text{m}$.

.....

2.12 a) L'opérateur exerce une force de plus en plus importante sur l'armoire jusqu'à atteindre la valeur critique au-delà de laquelle on passe d'une phase d'adhérence à une phase de glissement. L'armoire est immobile pendant la durée où la force croît jusqu'à la force limite, soit pendant environ 5 secondes.

.....

2.12 b) Le sol exerce une force à peu près constante de l'instant $t = 5\,\mathrm{s}$ jusqu'à l'instant $t = 12\,\mathrm{s}$. Au-delà, celle-ci s'annule : l'armoire ne glisse plus et s'immobilise. La phase de glissement dure donc 7 s.

.....

2.12 c) La phase statique s'arrête à l'instant $t = 5\,\mathrm{s}$ et correspond à la valeur maximale de la force exercée par l'opérateur, soit environ 350 N.

.....

2.12 d) La phase dynamique commence à l'instant $t = 5\,\mathrm{s}$. Au-delà, l'opérateur exerce une force constante en moyenne, de l'ordre de 175 N.

.....

2.12 e) La valeur de la force de réaction tangentielle maximale du sol sur l'armoire est la force maximale exercée par l'opérateur sur l'armoire, soit $R_{T,\max} = 350$ N. Or, à la limite d'adhérence, $R_{T,\max} = \mu_\mathrm{s} R_\mathrm{N} = \mu_\mathrm{s} mg$. D'où $\mu_\mathrm{s} = \dfrac{R_{T,\max}}{mg}$. En prenant $g = 10\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, l'application numérique donne $\mu_\mathrm{s} \sim 0,5$. Réponse (b).

.....

2.12 f) La valeur de la force de réaction tangentielle du sol sur l'armoire en glissement est la valeur de la force exercée par l'opérateur sur cette phase, soit $R_{T,\mathrm{gliss}} = 175\,\mathrm{N}$. Or, en supposant l'armoire à l'équilibre mécanique lors du glissement, on a $R_{T,\mathrm{gliss}} = \mu_\mathrm{d} R_\mathrm{N} = \mu_\mathrm{d} mg$. D'où $\mu_\mathrm{d} = \dfrac{R_{T,\mathrm{gliss}}}{mg}$. En prenant $g = 10\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, l'application numérique donne $\mu_\mathrm{s} \sim 0,25$. Autre manière plus rapide de raisonner : la force appliquée en glissement est la moitié de la force maximale en adhérence, donc le coefficient de frottement est diminué de moitié entre les deux phases : $\mu_\mathrm{s} \sim 2\mu_\mathrm{d}$. Réponse (a).

.....

Fiche n° 3. Électrostatique

Réponses

3.1 a) $\boxed{R\,\mathrm{d}\theta}$

3.1 b) $\boxed{2\pi R}$

3.1 c) $\boxed{r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}$

3.1 d) $\boxed{\pi R^2}$

3.1 e) $\boxed{\frac{4}{3}\pi R^3}$

3.2 a) $\boxed{\lambda_0 \ell}$

3.2 b) $\boxed{2\pi^2 q_0}$

3.3 a) $\boxed{+1\,000 \times e}$

3.3 b) $\boxed{L \times \ell}$

3.3 c) $\boxed{2{,}57 \times 10^{-15}\,\mathrm{C \cdot m^{-2}}}$

3.4 a) $\boxed{(\mathrm{O}, \vec{e_x} + \vec{e_y}, \vec{e_z}),\ (\mathrm{O}, \vec{e_x} - \vec{e_y}, \vec{e_z}) \text{ et } (\mathrm{O}, \vec{e_x}, \vec{e_y})}$

3.4 b) $\boxed{(\mathrm{O}, \vec{e_x}, \vec{e_z}) \text{ et } (\mathrm{O}, \vec{e_y}, \vec{e_z})}$

3.5 a) $\boxed{6{,}5 \times 10^{-2}\,\mathrm{m^3}}$

3.5 b) $\boxed{3{,}3 \times 10^{-9}\,\mathrm{C}}$

3.5 c) $\boxed{7{,}9 \times 10^{-1}\,\mathrm{m^2}}$

3.5 d) $\boxed{6 \times 10^{-6}\,\mathrm{C}}$

3.6 a) $\boxed{\text{b}}$

3.6 b) $\boxed{\text{c}}$

3.6 c) $\boxed{0}$

3.7 a) $\boxed{\text{b}}$

3.7 b) $\boxed{\text{b}}$

3.7 c) $\boxed{\text{d}}$

3.7 d) $\boxed{\text{b et c}}$

3.8 a) $\boxed{-2\vec{e_x} + 8\vec{e_y}}$

3.8 b) $\boxed{5\vec{e_y}}$

3.8 c) $\boxed{\text{b et c}}$

3.9 a) $\boxed{\vec{e_y}}$

3.9 b) $\boxed{\vec{e_z}}$

3.9 c) $\boxed{\text{d}}$

3.10 $\boxed{\text{b et d}}$

3.11 a) $\boxed{\text{c et d}}$

3.11 b) $\boxed{\text{a et d}}$

3.12 $\boxed{\text{c}}$

3.13 a) $\boxed{\text{d}}$

3.13 b) $\boxed{\text{c}}$

3.13 c) $\boxed{\text{b}}$

3.13 d) $\boxed{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \sqrt{\frac{z^2}{z^2 + R^2}}\right)}$

3.13 e) $\boxed{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$

3.13 f) $\boxed{\frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 z^2}}$

3.14 a) $\boxed{\text{a et f}}$

3.14 b) $\boxed{0}$

3.15 a) $\boxed{\text{d}}$

3.15 b) $\boxed{\text{c}}$

3.15 c) $\boxed{\underbrace{\frac{q}{2\varepsilon_0}}_{K}(1 - \cos\alpha)}$

3.15 d) $\boxed{1{,}8 \times 10^{-8}\,\mathrm{V \cdot m}}$

3.16 a) ..... $\boxed{4\pi r^2 E(r)}$

3.16 b) ..... $\boxed{\text{c}}$

3.16 c) ..... $\boxed{q \text{ et } 0}$

3.17 a) ..... $\boxed{\text{nulle}}$

3.17 b) ..... $\boxed{\text{négative}}$

3.17 c) ..... $\boxed{\text{nulle}}$

3.17 d) ..... $\boxed{\text{positive}}$

3.18 a) ..... $\boxed{\text{a}}$

3.18 b) ..... $\boxed{\text{c}}$

3.19 a) ..... $\boxed{\text{b}}$

3.19 b) ..... $\boxed{V(a)}$

3.19 c) ..... $\boxed{E_0 a(1+\mathrm{e}^{-2}-\mathrm{e}^{-1})}$

3.20 a) ..... $\boxed{\text{c}}$

3.20 b) ..... $\boxed{\dfrac{1}{r}\left(1+\dfrac{a\cos(\theta)}{2r}\right)}$

3.20 c) ..... $\boxed{\dfrac{1}{r}\left(1-\dfrac{a\cos(\theta)}{2r}\right)}$

3.20 d) ..... $\boxed{\dfrac{qa\cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$

3.21 a) ..... $\boxed{\text{a}}$

3.21 b) ..... $\boxed{\text{positif}}$

3.21 c) ..... $\boxed{1\times 10^2\,\mathrm{V\cdot m^{-1}}}$

3.21 d) ..... $\boxed{\text{b}}$

3.22 a) ..... $\boxed{Q=4\rho_0\mathcal{A}H/3,\ \rho_\mathrm{m}=2\rho_0/3}$

3.22 b) ..... $\boxed{Q=\rho_0\pi R^2 H/2,\ \rho_\mathrm{m}=\rho_0/2}$

3.22 c) ..... $\boxed{Q=\rho_0 4\pi R^3,\ \rho_\mathrm{m}=0}$

3.23 ..... $\boxed{\text{a}}$

3.24 ..... $\boxed{0}$

3.25 ..... $\boxed{\text{a}}$

3.26 a) ..... $\boxed{\text{d}}$

3.26 b) ..... $\boxed{\text{b}}$

3.27 a) ..... $\boxed{\text{Courbe } 3}$

3.27 b) ..... $\boxed{\text{Courbe } 1}$

3.27 c) ..... $\boxed{\text{Courbe } 2}$

3.28 ..... $\boxed{\dfrac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\dfrac{h}{R(R+h)}}$

Corrigés

3.1 a) Comme r et z sont constants, $\mathrm{d}r$ et $\mathrm{d}z$ sont nuls ; ainsi $\mathrm{d}\mathcal{C}=R\,\mathrm{d}\theta$.

3.1 b) On a $\mathcal{C}=\displaystyle\int_0^{2\pi} R\,\mathrm{d}\theta = R\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = R[\theta]_0^{2\pi}=2\pi R$.

3.1 d) On a $\mathcal{S}=\displaystyle\int_{r=0}^{r=R}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^R r\,\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R [\theta]_0^{2\pi} = \frac{R^2}{2}\times 2\pi = \pi R^2$.

3.1 e) On a

$$\mathcal{V}=\int_{r=0}^{r=R}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} r^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^R r^2\,\mathrm{d}r\int_0^\pi \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi$$
$$= \Big[\frac{r^3}{3}\Big]_0^R \times \big[-\cos(\theta)\big]_0^\pi \times \big[\varphi\big]_0^{2\pi} = \frac{R^3}{3}\times\big(-(-1-1)\big)\times 2\pi = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

3.2 a) On a $Q = \displaystyle\int_0^\ell \lambda_0 \,\mathrm{d}x = \lambda_0 \int_0^\ell \mathrm{d}x = \lambda_0 \big[x\big]_0^\ell = \lambda_0 \ell$.

.....

3.2 b) On a $Q = \displaystyle\int_0^{2\pi} \lambda(\theta) a \,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} q_0 \frac{\theta}{a} a \,\mathrm{d}\theta = q_0 \int_0^{2\pi} \theta \,\mathrm{d}\theta = q_0 \left[\frac{\theta^2}{2}\right]_0^{2\pi} = 2\pi^2 q_0$.

.....

3.3 a) Chaque électron porte la charge (négative) $-e$. En arrachant N électrons de la feuille, celle-ci se charge positivement : on a $Q = +N \times e$, avec $N = 1\,000$.

.....

3.3 b) La feuille est modélisée par un rectangle d'aire $S = L \times \ell$.

.....

3.3 c) Il suffit de faire l'application numérique : $\sigma = 2{,}57 \times 10^{-15}\,\mathrm{C \cdot m^{-2}}$.

.....

3.5 a) On a $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = 6{,}5 \times 10^{-2}\,\mathrm{m^3}$, en écriture scientifique, et en gardant deux chiffres significatifs.

.....

3.5 b) La densité volumique de charge est uniforme donc la charge totale est donnée par

$$Q = \rho_0 V = 3{,}3 \times 10^{-9}\,\mathrm{C},$$

en écriture scientifique, et en ne gardant que deux chiffres significatifs.

.....

3.5 c) On a $\mathcal{A} = 4\pi R^2 = 7{,}9 \times 10^{-1}\,\mathrm{m^2}$, en écriture scientifique, et en gardant deux chiffres significatifs.

.....

3.5 d) La densité surfacique de charge étant uniforme, $Q = \sigma\mathcal{A} = 6 \times 10^{-6}\,\mathrm{C}$, en écriture scientifique, et en ne gardant qu'un chiffre significatif (autant que la donnée qui possède le moins de chiffres significatifs).

.....

3.6 a) L'élément de surface $\mathrm{d}S = R\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$ est la multiplication du déplacement élémentaire $R\,\mathrm{d}\theta$ le long de la circonférence d'un cercle de rayon R et d'axe $(\mathrm{O}z)$ du tube par le déplacement élémentaire $\mathrm{d}z$ le long de l'axe $(\mathrm{O}z)$.

.....

3.6 b) On a $Q = \displaystyle\int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{H} \sigma(\theta) R \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}z$.

.....

3.6 c) On a $Q = \sigma_0 RH \displaystyle\int_{\theta=0}^{2\pi} \cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta = 0$. Le tube n'est globalement pas chargé. Ce résultat était attendu puisque la densité surfacique de charge est $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos(\theta)$ (les charges positives et négatives se répartissent de manière égale sur sa surface).

.....

3.7 d) Le cylindre étant désormais infini, la distribution devient invariante par translation suivant $(\mathrm{O}z)$.

.....

3.8 a) Le principe de superposition assure que le champ électrostatique total en M_1 est la somme des champs produits par les deux sources.

.....

3.8 c) Le point M_3 est le symétrique du point M_1 par rapport au plan $\mathcal{P}$. Ainsi, le vecteur-champ en M_3 est le symétrique du vecteur-champ en M_1 par rapport au plan $\mathcal{P}$. Enfin, le point M_2 appartient à ce plan de symétrie donc le vecteur-champ au point M_2 appartient également à ce plan de symétrie.

.....

3.9 a) La projection du vecteur $\vec{e_y}$ est nulle sur le plan (Π_1), donc $\vec{e_y}$ est normal à ce plan.

.....

3.9 b) La projection du vecteur $\vec{e_z}$ est nulle sur le plan (Π_2), donc $\vec{e_z}$ est normal à ce plan.

.....

3.9 c) En un point M d'un plan d'antisymétrie de la distribution de charge, le champ électrostatique est perpendiculaire à ce plan. Par exemple, si le point M est sur l'axe (Ox), appartenant au plan (Π_2), le champ électrostatique est suivant l'axe (Oz) : $\vec{E}(M) = E(M)\vec{e_z}$.

.....

3.10 Le plan $(M, \vec{e_x}, \vec{e_y})$ est un plan de symétrie donc $\vec{E}(M) = E_x(x,y,z)\vec{e_x} + E_y(x,y,z)\vec{e_y}$. Enfin, l'invariance par translation selon $\vec{e_z}$ permet d'affirmer que les composantes E_x et E_y, et donc la norme $\left\|\vec{E}\right\|$, de $\vec{E}(M)$ ne dépendent pas de z.

.....

3.13 a) En repérage cylindrique, le déplacement élémentaire est $\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}r\vec{e_r} + r\,\mathrm{d}\theta\vec{e_\theta} + \mathrm{d}z\vec{e_z}$. Sur le disque, z est fixé (à 0) donc l'aire s'obtient en multipliant les deux composantes non nulles du vecteur déplacement élémentaire $\mathrm{d}S = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$.

.....

3.13 b) Par relation de Chasles, on a $\overrightarrow{PM}\cdot\vec{e_z} = (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM})\cdot\vec{e_z} = r\vec{e_r}\cdot\vec{e_z} + z\vec{e_z}\cdot\vec{e_z} = 0 + z$.

.....

3.13 c) On a $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM} = r\vec{e_r} + z\vec{e_z}$ donc $PM = \sqrt{\overrightarrow{PM}^2} = \sqrt{\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PM}} = \sqrt{z^2+r^2}$.

.....

3.13 d) En séparant les variables et en effectuant le changement de variable $u = r^2$ (d'où $\mathrm{d}u = 2r\,\mathrm{d}r$), il vient :

$$E_z = \frac{\sigma z}{8\pi\varepsilon_0}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\mathrm{d}\theta \times \int_{u=0}^{u=R^2}(u+z^2)^{-3/2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sigma z}{4\varepsilon_0}\left[-2(u+z^2)^{-1/2}\right]_{u=0}^{u=R^2} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+R^2/z^2}}\right).$$

.....

3.13 e) On a $\sqrt{1+R^2/z^2} \xrightarrow[R/z\to+\infty]{} \infty$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{1+R^2/z^2}} \xrightarrow[R/z\to\infty]{} 0$. Ainsi, $E_z \xrightarrow[R/z\to\infty]{} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.

.....

3.13 f) Le développement limité fourni permet d'écrire :

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{R^2}{z^2}}} = \left(1+\frac{R^2}{z^2}\right)^{-1/2} \underset{R/z\to 0}{=} 1 - \frac{R^2}{2z^2} \quad \text{d'où} \quad E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - 1 + \frac{R^2}{2z^2}\right] = \frac{\overbrace{\pi R^2\sigma}^{Q_0}}{4\pi\varepsilon_0 z^2},$$

ce qui correspond bien au champ créé par une charge ponctuelle Q_0, distante de z du point d'observation.

.....

3.15 a) L'aire d'un élément de surface d'une sphère de rayon r est $\mathrm{d}S = r^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$. Ici, le rayon de la calotte est R donc la variable r est fixée à R. En conclusion, $\mathrm{d}S = R^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$.

.....

3.15 b) Pour rappel, la colatitude θ est définie sur $[0,\pi]$ quand la longitude φ est décrite sur $[0,2\pi]$.
Pour décrire/paramétrer la calotte, on peut procéder de la sorte : on considère un point $M(R,\theta,\varphi)$ sur la calotte, et on lui fait faire un tour complet autour de l'axe (Oz) ; φ a alors parcouru l'intervalle $[0,2\pi]$ en décrivant un cercle. Ensuite, la calotte peut être vue comme un « accolage » de cercles de rayon allant de $R\sin\alpha$ à 0 (le cercle de rayon nul étant confondu avec un point de l'axe (Oz)). En d'autres termes, cela implique que $\theta \in [\pi-\alpha,\pi]$.
Ainsi, pour totalement parcourir la calotte, il faut $\varphi \in [0,2\pi]$ et $\theta \in [\pi-\alpha,\pi]$. Il vient

$$\phi = \int_{\theta=\pi-\alpha}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\vec{E}\cdot R^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{e}_r.$$

.....

3.15 c) Le champ $\vec{E}$ est celui sur la calotte sphérique, soit en $r = R$. Ainsi, on a

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \times R^2 \int_{\theta=\pi-\alpha}^{\pi} \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta \int_{\varphi=0}^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \qquad \text{donc} \qquad \phi = \underbrace{\frac{q}{2\varepsilon_0}}_{K}(1-\cos\alpha).$$

3.15 d) Pour $\alpha = \pi$ et $q = e$, on a $\phi = \dfrac{e}{\varepsilon_0}$. Donc, après calcul, $\phi = 1{,}8 \times 10^{-8}\,\mathrm{V}\cdot\mathrm{m}$.

3.16 a) On a $\phi(\vec{E}) = \oiint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 4\pi r^2 E(r)$.

3.16 b) Le théorème de Gauss assure que $\phi(\vec{E}) = Q/\varepsilon_0$ donc $Q = \varepsilon_0\phi(\vec{E}) = \varepsilon_0 4\pi r^2 E(r) = q\left(1+\dfrac{r}{a}\right)\mathrm{e}^{-r/a}$.

3.18 a) Le gradient est dirigé dans le sens des potentiels croissants, orthogonalement aux équipotentielles.

3.18 b) Comme $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$, la direction du champ est opposée à celle du gradient.

3.19 a) Le segment AB a une pente constante $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{2a-0}{2a-a} = 2$. Or, cette dernière correspond à $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Ainsi, $\mathrm{d}y = 2\,\mathrm{d}x$.

3.19 b) Pour $x > 0$, le champ $\vec{E}$ est orienté suivant $+\vec{e_x}$. Il s'agit donc du sens des potentiels décroissants. Comme $2a > a$, $V(2a) < V(a)$. $V(a)$ est donc le potentiel le plus élevé.

3.19 c) Le champ étant porté par $\vec{e_x}$, on a $\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = E_x dx$. On a alors

$$V(\mathrm{A}) - V(\mathrm{B}) = \int_a^{2a} E_0\left(1-\mathrm{e}^{-x/a}\right)dx = E_0\left[x + a\mathrm{e}^{-x/a}\right]_a^{2a} = E_0 a(1+\mathrm{e}^{-2}-\mathrm{e}^{-1}).$$

3.20 a) On a $\mathrm{AM}^2 = \|\overrightarrow{\mathrm{OM}} + \overrightarrow{\mathrm{AO}}\|^2 = \|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\|^2 + \|\overrightarrow{\mathrm{AO}}\|^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}} = r^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 - ar\cos(\theta)$.

3.20 b) On a $\dfrac{1}{\mathrm{AM}} = \dfrac{1}{r}\left(1 + \left(\dfrac{a}{2r}\right)^2 - \dfrac{a\cos(\theta)}{r}\right)^{-1/2}$. On utilise ensuite l'approximation $(1+\varepsilon)^\alpha = 1 + \alpha\varepsilon$ à l'ordre 1 en ε autour de 0. À l'ordre 1 en $\dfrac{a}{r}$, on trouve $\dfrac{1}{\mathrm{AM}} \simeq \dfrac{1}{r}\left(1 + \dfrac{a\cos(\theta)}{2r}\right)$.

3.20 c) De manière similaire, $\mathrm{BM}^2 = r^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + ar\cos(\theta)$ donc $\dfrac{1}{\mathrm{BM}} = \dfrac{1}{r}\left(1 + \left(\dfrac{a}{2r}\right)^2 + \dfrac{a\cos(\theta)}{r}\right)^{-1/2}$ et, à l'ordre 1 en $\dfrac{a}{r}$, on trouve $\dfrac{1}{\mathrm{BM}} \simeq \dfrac{1}{r}\left(1 - \dfrac{a\cos(\theta)}{2r}\right)$.

3.20 d) On a $V(\mathrm{M}) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{\mathrm{AM}} - \dfrac{1}{\mathrm{BM}}\right) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(1 + \dfrac{a\cos(\theta)}{2r} - 1 + \dfrac{a\cos(\theta)}{2r}\right) = \dfrac{qa\cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$.

3.21 a) Les lignes de champ électrostatique sont orientées vers les charges négatives.

3.21 b) Sachant que $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$, le champ électrostatique pointe vers les valeurs de potentiel décroissantes, d'où le signe $+$.

3.21 c) En appelant A_{100} et A_{200} les projetés respectifs de A sur les équipotentielles de 100 V et 200 V, alors la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V = -\dfrac{\partial V}{\partial z}\vec{e_z}$ (car ici $\vec{E}(\text{A})$ est selon $\vec{e_z}$) permet d'approximer la norme du champ en A :

$$E(\text{A}) = \frac{V(\text{A}_{200}) - V(\text{A}_{100})}{z_{\text{A}_{200}} - z_{\text{A}_{100}}} = \frac{200 - 100}{2{,}5\,\text{division} \times 40\,\text{cm}\cdot\text{division}^{-1}} = 1 \times 10^2\,\text{V}\cdot\text{m}^{-1}.$$

.....

3.21 d) Du fait de la verticalité de l'individu par rapport à l'horizontalité du sol, les équipotentielles sont davantage resserrées en B qu'en A ; ainsi, le champ électrostatique est plus intense en B qu'en A : c'est l'effet de pointe.

.....

3.22 a) Sachant que $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, une séparation des variables conduit à :

$$Q = \rho_0 \iint_{\mathcal{A}} \mathrm{d}S \int_{z=-H}^{z=H} \left(1 - \frac{z^2}{H^2}\right) \mathrm{d}z = \rho_0 \mathcal{A} \left[z - \frac{z^3}{3H^2}\right]_{-H}^{H} = 4\rho_0 \mathcal{A} H/3\,.$$

Le volume du pavé est $2H\mathcal{A}$ donc la charge volumique moyenne s'exprime comme : $\rho_\text{m} = 2\rho_0/3$.

.....

3.22 b) Sachant que $\mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$, une séparation des variables conduit à :

$$Q = \rho_0 \int_{r=0}^{r=R} \left(r - \frac{r^3}{R^2}\right) \mathrm{d}r \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \mathrm{d}\theta \int_{z=0}^{z=H} \mathrm{d}z = \rho_0 \left[\frac{r}{2} - \frac{r^4}{4R^2}\right]_0^R \big[\theta\big]_0^{2\pi} \big[z\big]_0^H = \rho_0 \pi R^2 H/2.$$

Le volume du cylindre est $\pi R^2 H$ donc la charge volumique moyenne s'exprime comme : $\rho_\text{m} = \rho_0/2$.

.....

3.22 c) Sachant que $\mathrm{d}V = r^2 \sin(\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$, une séparation des variables conduit à :

$$Q = \rho_0 R^2 \int_{r=0}^{r=+\infty} \mathrm{e}^{-r/R}\,\mathrm{d}r \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \mathrm{d}\varphi = \rho_0 R^2 \big[-R\mathrm{e}^{-r/R}\big]_0^{+\infty} \big[-\cos(\theta)\big]_0^{\pi} \big[\varphi\big]_0^{2\pi} = \rho_0 4\pi R^3.$$

Le volume de l'espace étant infini mais la charge totale finie, la charge volumique moyenne est nulle : $\rho_\text{m} = 0$.

.....

3.24 On a $\text{div}\,\vec{E}_1 = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(r\frac{\alpha}{r})}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial 0}{\partial \theta} + \dfrac{\partial 0}{\partial z} = 0 + 0 + 0.$

.....

3.26 a) Le gradient est dirigé dans le sens des potentiels croissants, orthogonalement aux équipotentielles.

.....

3.26 b) Comme $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$, la direction du champ est opposée à celle du gradient.

.....

3.27 a) Le potentiel s'annule en $r = r_0$, est positif pour $r < r_0$ et négatif pour $r > r_0$.

.....

3.27 b)

- Pour $0 \leqslant r \leqslant R$, l'expression fournie est celle d'un polynôme de degré 2 en r dont la représentation graphique est une parabole. Ici, le coefficient devant r^2 est négatif donc la parabole est orientée vers les valeurs négatives.
- Pour $r \geqslant R$, l'expression fournie est une fonction inverse dont la représentation graphique est une branche d'hyperbole.

Les deux expressions prennent la même valeur en $r = R$: la fonction est continue.

.....

3.27 c) L'équation fournie est celle d'une droite décroissante dont l'ordonnée à l'origine est non nulle : le potentiel décroît de manière affine. Seule la courbe (2) correspond à un tel cas.

.....

3.28 Sachant que $\mathrm{d}\tau = r^2 \sin(\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$, une séparation des variables conduit à :

$$\mathcal{E} = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0}\int_{r=R}^{r=R+h}\frac{\mathrm{d}r}{r^2}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\mathrm{d}\varphi = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0}\Big[-\frac{1}{r}\Big]_R^{R+h}\big[-\cos(\theta)\big]_0^{\pi}\big[\varphi\big]_0^{2\pi} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{h}{R(R+h)}.$$

.....

Fiche n° 4. Magnétostatique

Réponses

4.1 a) ..... ⓐ et ⓓ

4.1 b) ..... ⓓ

4.1 c) ..... ⓐ

4.2 ..... $2j_0 S\dfrac{b}{a}$

4.3 ..... $j_{s,0}\ell$

4.4 a) ..... ⓓ

4.4 b) ..... $4\pi R^2 j_r(R)$

4.5 ..... ⓑ et ⓒ

4.6 a) ..... ⓐ, ⓒ et ⓓ

4.6 b) ..... ⓑ, ⓒ et ⓓ

4.6 c) ..... ⓐ, ⓒ et ⓓ

4.7 a) ..... $4d\ell j_0$

4.7 b) ..... ⓐ et ⓒ

4.7 c) ..... ⓑ

4.8 a) ..... $-\mu_0 n_2 I_2 \vec{e_y}$

4.8 b) ..... ⓓ

4.9 ..... ⓓ

4.10 ..... ②

4.11 a) ..... ②

4.11 b) ..... ⓑ

4.12 a) ..... $4Bd$

4.12 b) ..... $-2Bd$

4.12 c) ..... $\dfrac{7\pi}{2}Bd$

4.13 a) I

4.13 b) 0

4.13 c) ..... $-I$

4.13 d) ..... $4I$

4.14 a) ..... ⓐ et ⓔ

4.14 b) 0

4.15 a) 0

4.15 b) ..... $-Bax$

4.15 c) ..... $-Ba^2$

4.16 a) ..... ⓑ

4.16 b) ..... $\dfrac{\mu_0 NI}{2\pi r}$

4.16 c) ..... $\dfrac{\mu_0 NIa}{2\pi}\ln\left(\dfrac{R+a/2}{R-a/2}\right)$

4.17 a) ..... $1\times10^1\,\mathrm{T}$

4.17 b) ..... $4\times10^2\,\mathrm{Wb}$

4.17 c) ..... $3\times10^2\,\mathrm{Wb}$

4.18 a) ..... ⓒ

4.18 b) ..... $\dfrac{\mu_0\vec{\mathcal{M}}}{2\pi z^3}$

4.19 ..... ⓓ

4.20 a) ..... mB_{ext}

4.20 b) ..... $\dfrac{mB_{\text{ext}}}{Mg}$

4.21 a) ..... $-\vec{e_z}$

4.21 b) ..... $+\vec{e_z}$

4.21 c) ..... $+\vec{e_z}$

4.21 d) ..... $+\vec{e_z}$

4.22 a) ..... $\boxed{-\dfrac{\mu_0 I m}{2\pi r^2}\vec{e_r}}$

4.22 b) ..... $\boxed{\text{b}}$

4.23 ..... $\boxed{\text{c}}$

4.24 ..... $\boxed{\text{a}}$

4.25 a) ..... $\boxed{\text{d}}$

4.25 b) ..... $\boxed{-\dfrac{e}{T}\underbrace{\pi r^2 \vec{e_z}}_{\vec{S}}}$

4.25 c) ..... $\boxed{-\dfrac{e}{2m_\text{e}}}$

4.25 d) ..... $\boxed{\text{b}}$

4.26 a) ..... $\boxed{\dfrac{\mu_0 I \ell}{2\pi}\ln\dfrac{R_2}{R_1}}$

4.26 b) ..... $\boxed{\dfrac{\mu_0}{2\pi}\ln\dfrac{R_2}{R_1}}$

4.26 c) ..... $\boxed{\dfrac{\mu_0 I^2 \ell}{4\pi}\ln\dfrac{R_2}{R_1}}$

4.26 d) ..... $\boxed{\dfrac{\mu_0}{2\pi}\ln\dfrac{R_2}{R_1}}$

Corrigés

4.1 a) L'intensité du courant s'exprime en fonction des densités surfacique et volumique de courant grâce aux relations $I = \iint \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ et $I = \int \vec{j_\text{s}} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$.

.....

4.1 b) On note j la norme du vecteur $\vec{j}$. On a $I = \iint \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ donc $\mathrm{I} = [j] \times \mathrm{L}^2$ et donc $[j] = \mathrm{I} \cdot \mathrm{L}^{-2}$.

.....

4.1 c) On note j_s la norme du vecteur $\vec{j_\text{s}}$. On a $I = \int \vec{j_\text{s}} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$ donc $\mathrm{I} = [j_\text{s}] \times \mathrm{L}$ et donc $[j_\text{s}] = \mathrm{I} \cdot \mathrm{L}^{-1}$.

.....

4.2 On a $I = \iint \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint j_0 \vec{e_z} \cdot \mathrm{d}S\vec{e_z} = \displaystyle\int_0^a j_0 \frac{b}{r} 2\pi r \,\mathrm{d}r = 2\pi j_0 b \times a$, soit $I = 2 j_0 S \dfrac{b}{a}$, avec $S = \pi a^2$.

.....

4.3 On a $I = \int \vec{j_\text{s}} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \displaystyle\int_0^\ell j_{\text{s},0}\vec{e_\theta} \cdot \mathrm{d}z\vec{e_\theta} = \int_0^\ell j_{\text{s},0}\,\mathrm{d}z = j_{\text{s},0}\ell$.

.....

4.4 a) Le courant de particules chargées est radial : le vecteur densité de courant électrique $\vec{j}$ est radial, c'est-à-dire porté par $\vec{e_r}$: $\vec{j} = j_r(r,\theta,\varphi)$. Aussi, l'émission est isotrope donc il y a invariance de la distribution de courant électrique par rotation autour du point O : la composante j_r n'est une fonction que de r. Il vient : $\vec{j} = j_r(r)\vec{e_r}$.

.....

4.4 b) L'intensité du courant électrique traversant une surface élémentaire de vecteur surface élémentaire $\mathrm{d}\vec{S} = r^2 \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\vec{e_r}$ est $\mathrm{d}I_r = \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = j_r(r) r^2 \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$. Cette grandeur est uniforme sur une sphère de rayon R (de surface $4\pi R^2$) donc $I_R = 4\pi R^2 j_r(R)$.

.....

4.5 Les plans $(x\mathrm{O}y)$ et $(x\mathrm{O}z)$ sont des plans d'antisymétrie de la distribution car les courants de la distribution sont répartis de manière strictement opposée de part et d'autre de chacun de ces plans. Par ailleurs, la longueur du solénoïde n'intervient pas dans l'étude des symétries d'une distribution, mais doit être considérée lors d'une étude de ses invariances.

.....

4.6 a) En tout point M du plan (xOy), plan d'antisymétrie pour la distribution, le champ magnétostatique appartient à ce plan. C'est bien le cas pour le point O et les différents points P_i. Il est alors possible d'écrire : $\vec{B}(M) = B_x(M)\vec{e_x} + B_y(M)\vec{e_y}$. Par ailleurs, le vecteur $\vec{e_z}$ est bien normal au plan (xOy).

.....

4.6 b) Le vecteur $\vec{e_x}$ est bien normal au plan (yOz). En tout point M du plan (yOz), plan de symétrie pour la distribution, le champ magnétostatique est perpendiculaire à ce plan, donc est selon $\pm\vec{e_x}$. Il est alors possible d'écrire : $\vec{B}(M) = B_x(M)\vec{e_x}$. Les différents points P_i n'appartiennent pas à ce plan, donc rien ne peut en être déduit sur le champ en ces points.

.....

4.6 c) Il faut bien préciser que c'est en tout point M du plan (xOz), plan de symétrie pour la distribution, que le champ magnétostatique est perpendiculaire à ce plan. C'est bien le cas pour le point O mais pas pour les différents points P_i (qui n'appartiennent pas à ce plan). Il est alors possible d'écrire : $\vec{B}(M) = B(M)\vec{e_y}$.

Le point O appartient aux plans de symétrie (xOz) et (yOz) donc le champ en ce point doit être perpendiculaire à ces deux plans : il est nécessairement nul.

Puisque le plan (xOy) est un plan d'antisymétrie pour la distribution, en tout point de ce plan le champ magnétostatique appartient à ce plan. C'est bien le cas pour les différents points P_i. Il est alors possible d'écrire :

$$\vec{B}(P_i) = B_x(P_i)\vec{e_x} + B_y(P_i)\vec{e_y}.$$

De plus, puisque le plan (yOz) est un plan de symétrie pour la distribution, c'est un plan d'antisymétrie pour le champ magnétostatique. Tout cela permet alors d'écrire : $B_y(P_2) = -B_y(P_1)$ et $B_x(P_2) = B_x(P_1)$, mais pas $\vec{B}(P_2) = -\vec{B}(P_1)$! En bref, il est aussi possible d'écrire : $\vec{B}(P_2) = -\text{sym}\big(\vec{B}(P_1)\big)$, où « sym » représente l'opération de symétrie par rapport au plan (yOz).

.....

4.7 a) On a $I = \iint_\Sigma \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_S j_0\vec{e_x} \cdot \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\vec{e_x} = j_0 \times 2\ell \times 2d = 4j_0\ell d.$

.....

4.7 b) Le vecteur densité volumique de courant est $\vec{j} = j_0\vec{e_x}$ et j_0 est constant donc la distribution est invariante par translation suivant (Ox) et (Oy). La couche étant finie, elle n'est pas invariante par translation suivant (Oz), et encore moins par rotation autour de cet axe, le vecteur $\vec{j}$ étant porté par $\vec{e_x}$.

.....

4.7 c) La distribution est invariante par translation suivant les axes (Ox) et (Oy), donc la composante B_y du champ ne dépend que de z.

.....

4.8 a) En tenant compte du sens du courant, on a $\vec{B_2}(O) = -\mu_0 n_2 I_2\vec{e_y}$, où n_2 est le nombre de spires par unité de longueur du solénoïde (2).

.....

4.8 b) D'après le théorème de superposition, on a $\vec{B}(O) = \vec{B_1}(O) + \vec{B_2}(O)$ donc $\vec{B}(O) = \mu_0(n_1 I_1\vec{e_x} - n_2 I_2\vec{e_y})$.

.....

4.9 Sachant que la force magnétique s'exprime comme $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ alors le produit qvB est homogène à une force. Si l'égalité $B = \dfrac{mv}{qR}$ est vraisemblable alors $qv \times B = qv \times \dfrac{mv}{qR} = \dfrac{mv^2}{R}$ serait homogène à une force. Or, mv^2 est homogène à une énergie puisque l'énergie cinétique s'exprime comme $\dfrac{mv^2}{2}$. De plus, d'après l'expression du travail élémentaire $\delta W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$ d'une force $\vec{F}$, une énergie divisée par une longueur correspond à une force. Finalement, le rapport $\dfrac{mv^2}{R}$ est donc bien homogène à une force et la relation $B = \dfrac{mv}{qR}$ est vraisemblable du point de vue de l'analyse dimensionnelle. Bien sûr, d'autres raisonnements sont possibles en se fondant sur d'autres relations !

.....

4.10 Le champ magnétique est linéaire pour $0 < r < a$ et hyperbolique pour $r > a$.

.....

4.11 a) Sachant que $B_y = kx \neq 0$ pour tout M(x, y, z) alors le vecteur champ magnétostatique ne peut pas être constamment parallèle à $\vec{e_x}$, ce qui élimine la carte de champ (3). En prenant les points de l'espace où $x = 0$, le vecteur champ magnétostatique doit s'écrire comme $\vec{B}(\mathrm{M}) = ky\vec{e_x}$: les vecteurs champs le long de cette ligne doivent être perpendiculaires à cette ligne. Parmi les cartes de champ (1), (2) et (4) restantes, seule la (2) possède cette propriété.

Autre méthode possible : En prenant les points de l'espace où $y = 0$, le vecteur champ magnétostatique doit s'écrire comme $\vec{B}(\mathrm{M}) = kx\vec{e_y}$: les vecteurs champs le long de cette ligne doivent être perpendiculaires à cette ligne. Seule la carte de champ (2) possède cette propriété.

.....

4.11 b) Le flux magnétostatique est conservatif donc le resserrement des lignes de champ constaté de M à N permet d'affirmer que le champ magnétostatique est plus intense au point N qu'au point M.

.....

4.12 a) Le calcul de la circulation du champ magnétostatique de A à C se décompose en deux.

- D'une part sur [AB] : on a $\mathcal{C}_{\mathrm{AB}} = \displaystyle\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 0$ (chemin perpendiculaire aux lignes de champ).
- D'autre part, sur [BC] on a
$$\mathcal{C}_{\mathrm{BC}} = \int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 4Bd \text{ (chemin parallèle aux lignes de champ).}$$

.....

4.12 b) D'une part sur [AB] : $\mathcal{C}_{\mathrm{AB}} = \displaystyle\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -8Bd$. Seule la projection de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ sur la ligne de champ doit être prise en compte. Le signe moins provient du sens de $\vec{B}$ par rapport à celui de la projection de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$. D'autre part sur [BC] : $\mathcal{C}_{\mathrm{BC}} = \displaystyle\int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 6Bd$.

.....

4.12 c) D'une part sur [AB] : $\mathcal{C}_{\mathrm{AB}} = \displaystyle\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \frac{7\pi d}{2}B$. Le chemin [AB] est un demi-cercle de longueur $\dfrac{7\pi d}{2}$. D'autre part sur [BC] : $\mathcal{C}_{\mathrm{BC}} = \displaystyle\int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 0$ (chemin perpendiculaire aux lignes de champ).

.....

4.13 a) Le contour enlace le fil. L'orientation du contour et le sens de I sont tels que $I_{\mathrm{enl}} = +I$.

.....

4.13 b) Le contour n'enlace pas le fil donc $I_{\mathrm{enl}} = 0$, quels que soient l'orientation du contour et le sens de I.

.....

4.13 c) Le contour enlace le fil. L'orientation du contour et le sens de I sont tels que $I_{\mathrm{enl}} = -I$.

.....

4.13 d) Le fil est positionné de façon telle que le courant passe quatre fois « à l'intérieur » du contour. L'orientation du contour et le sens de I sont tels que $I_{\mathrm{enl}} = +4I$.

.....

4.14 a) Le produit scalaire $\vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ est positif lorsque le champ $\vec{B}$ et le vecteur surface élémentaire $\mathrm{d}\vec{S}$ (donné par l'orientation de la surface) pointent globalement dans la même direction (ils forment ainsi un angle aigu, c'est-à-dire compris entre 0 et 90°).

Pour le cas (a), le champ $\vec{B}$ est vertical et vers le haut. De même, le vecteur surface élémentaire $\mathrm{d}\vec{S}$ est vertical et orienté vers le haut (d'après l'orientation du contour). Finalement : $\vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} > 0$, soit $\phi > 0$.

Pour le cas (b), le champ $\vec{B}$ est vertical et vers le bas. Par contre, le vecteur surface élémentaire $\mathrm{d}\vec{S}$ est vertical et orienté vers le haut (d'après l'orientation du contour). Finalement : $\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}<0$, soit $\phi<0$.

Pour le cas (c), le champ $\vec{B}$ est vertical et vers le haut. Par contre, le vecteur surface élémentaire $\mathrm{d}\vec{S}$ est vertical et orienté vers le bas (d'après l'orientation du contour). Finalement : $\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}<0$, soit $\phi<0$.

Pour le cas (e), le champ $\vec{B}$ pointe globalement vers le bas. Par ailleurs, le vecteur surface élémentaire $\mathrm{d}\vec{S}$ est vertical et orienté vers le bas (d'après l'orientation du contour). Finalement : $\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}>0$, soit $\phi>0$.

Pour le cas (f), le champ $\vec{B}$ pointe globalement vers le haut. Par ailleurs, le vecteur surface élémentaire $\mathrm{d}\vec{S}$ est vertical et orienté vers le bas (d'après l'orientation du contour). Finalement : $\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}<0$, soit $\phi<0$.

.....

4.14 b) Pour le cas (d), le champ $\vec{B}$ est horizontal. Par contre, le vecteur surface élémentaire $\mathrm{d}\vec{S}$ est vertical. Finalement : $\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=0$, soit $\phi=0$. Aucune ligne de champ ne passe à travers la surface orientée, donc le flux est nécessairement nul.

.....

4.15 a) À ce sens de parcours de la spire est associé le vecteur normal $\vec{n}$ opposé au champ magnétostatique. D'où $\phi(\vec{B})=\iint_{\Sigma}\vec{B}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S=-\iint_{\Sigma}B\,\mathrm{d}S$ en notant Σ l'intersection entre le plan de la spire et la zone de champ.

Pour $x<0$, on a donc $\phi(\vec{B})=0$.

.....

4.15 b) Le champ $\vec{B}$ est uniforme donc on a $\phi(\vec{B})=-B\Sigma=-Bax$.

.....

4.15 c) Ici, on a $\phi(\vec{B})=-B\Sigma=-Ba^2$.

.....

4.16 a) Les N spires du tore traversent la surface délimitée par le cercle de centre O et de rayon $R-\dfrac{a}{2}<r<R+\dfrac{a}{2}$. Le courant enlacé vaut donc $I_{\text{enl}}=NI$.

.....

4.16 b) Sur le contour fermé choisi, r et $B(r)$ sont constants. Il vient :

$$\oint\vec{B}\cdot\vec{\mathrm{d}l}=\oint B(r)\vec{e_\theta}\cdot r\,\mathrm{d}\theta\vec{e_\theta}=2\pi rB(r).$$

D'après le théorème d'Ampère, on a $2\pi rB(r)=\mu_0 I_{\text{enl}}$ et donc $B(r)=\dfrac{\mu_0 NI}{2\pi r}$.

.....

4.16 c) On a $\phi(\vec{B})=\iint\vec{B}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S=\displaystyle\int_{R-a/2}^{R+a/2}\frac{\mu_0 NI}{2\pi r}\,\mathrm{d}r\int_{-a/2}^{a/2}\mathrm{d}z=\frac{\mu_0 NIa}{2\pi}\ln\left(\frac{R+a/2}{R-a/2}\right)$.

.....

4.17 a) On a $B=\mu_0\mu_{\text{r}}\dfrac{N}{\ell}I$. Donc, $B=4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{H\cdot m^{-1}}\times4\,000\times\dfrac{1\,000}{10\times10^{-2}\,\mathrm{m}}\times200\times10^{-3}\,\mathrm{A}\approx1\times10^{1}\,\mathrm{T}$.

.....

4.17 b) On a $\phi=NBS$. Donc, $\phi=1000\times1\times10^{1}\,\mathrm{T}\times(20\times10^{-2}\,\mathrm{m})^2=4\times10^{2}\,\mathrm{Wb}$.

.....

4.17 c) Le champ magnétostatique est un champ à flux conservatif. Or, le circuit magnétique joue le rôle d'un tube de champ, donc la « loi des nœuds magnétique » appliquée à la jonction qui surmonte (S_1) donne : $\phi=\phi_1+\phi_2$, soit $\phi_1=\phi-\phi_2=\phi-\dfrac{1}{4}\phi=\dfrac{3}{4}\phi$. Donc, $\phi_1=\dfrac{3}{4}\times4\times10^{2}\,\mathrm{Wb}=3\times10^{2}\,\mathrm{Wb}$.

.....

4.18 a) Pour une boucle de courant plane, de surface S et parcourue par un courant d'intensité I (ce qui permet de définir le vecteur surface $\vec{S}$), le moment magnétique est défini par la relation $\vec{\mathcal{M}} = I\vec{S}$. Pour une spire de rayon R et d'axe (Oz), le vecteur surface a alors pour expression $\vec{S} = S\vec{e_z} = \pi R^2 \vec{e_z}$, donc $\vec{\mathcal{M}} = \pi R^2 I \vec{e_z}$.

.....

4.18 b) Dans le cadre de l'approximation dipolaire : $z \gg R$ donc $R^2 + z^2 = z^2$. Le champ magnétostatique s'écrit alors : $\vec{B}(\mathrm{M}) = \dfrac{\mu_0 I R^2}{2z^3}\vec{e_z}$ ou encore $\vec{B}(\mathrm{M}) = \dfrac{\mu_0 \vec{\mathcal{M}}}{2\pi z^3}$.

.....

4.19 Des valeurs particulières de θ, telles $\theta = 0$ ou $\theta = \pi/2$, et l'étude de l'orientation du champ magnétostatique pour ces angles, permettent de conclure que $\vec{B}(\mathrm{M}) = \dfrac{\mu_0 m}{4\pi r^3}(2\cos(\theta)\vec{e_r} + \sin(\theta)\vec{e_\theta})$.

.....

4.20 a) Le moment du couple magnétique s'exprime comme $\Gamma_z = +mB_{\text{ext}}$ à l'équilibre, car $\vec{m}$ et $\overrightarrow{B_{\text{ext}}}$ sont orthogonaux.

.....

4.20 b) À l'équilibre, le théorème du moment cinétique donne : $0 = mB_{\text{ext}} - dMg$, soit $d = \dfrac{mB_{\text{ext}}}{Mg}$.

.....

4.21 a) D'après la relation $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$, le moment $\vec{\Gamma}$ est colinéaire à $-\vec{e_z}$ et de même sens.

.....

4.21 b) D'après la relation $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$, le moment $\vec{\Gamma}$ est colinéaire à $+\vec{e_z}$ et de même sens.

.....

4.21 c) D'après la relation $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$, le moment $\vec{\Gamma}$ est colinéaire à $+\vec{e_z}$ et de même sens.

.....

4.21 d) D'après la relation $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$, le moment $\vec{\Gamma}$ est colinéaire à $+\vec{e_z}$ et de même sens.

.....

4.22 a) Lorsque le dipôle est aligné sur le champ (même direction et même sens) : $\vec{m} \cdot \overrightarrow{B_{\text{ext}}} = m\left\|\overrightarrow{B_{\text{ext}}}\right\|$, soit $\vec{F} = +\overrightarrow{\text{grad}}\left(\dfrac{\mu_0 I m}{2\pi r}\right) = -\dfrac{\mu_0 I m}{2\pi r^2}\vec{e_r}$.

.....

4.22 b) La force $\vec{F}$ est dirigée dans la direction et le sens du gradient de la norme du champ magnétostatique. Le dipôle est donc attiré vers les régions de champ plus intense. On peut aussi remarquer que le dipôle a tendance à se déplacer de manière à minimiser son énergie potentielle.

.....

4.23 La circulation du champ magnétostatique le long d'un cercle de rayon R au sein duquel passe par son centre une ligne infinie parcourue par un courant électrique stationnaire est $2\pi RB$. Le théorème d'Ampère appliqué au cercle permet d'écrire $2\pi RB = \mu_0 I$: la circulation du champ magnétostatique est homogène au produit d'une intensité électrique par une perméabilité magnétique (du vide). Ainsi, seule l'expression $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi R}$ est valide.

.....

4.24 Le flux magnétique traversant un solénoïde comportant N spires de section S est $\phi = NBS$. Or, l'inductance propre L permet d'exprimer le flux en fonction de l'intensité : $\phi = LI$. Il vient : $B = \dfrac{LI}{NS}$.

.....

4.25 a) En un point de l'orbite circulaire, la charge $-e$ de l'électron passe à chaque période de révolution T, d'où le débit de charge $I = -e/T$.

.....

4.25 b) La norme du vecteur surface $\vec{S}$ est l'aire du disque de rayon r et de centre O : $\left\|\vec{S}\right\| = \pi r^2$. De plus, le vecteur surface $\vec{S}$ est orienté par la règle de la main droite, selon le sens du vecteur vitesse de l'électron (c'est aussi le sens choisi algébriquement pour l'intensité I). Il vient : $\vec{m} = -\dfrac{e}{T}\underbrace{\pi r^2 \vec{e}_z}_{\vec{S}}$.

.....

4.25 c) Par comparaison des expressions $\vec{m} = -\dfrac{e}{T}\vec{S}$ et $\vec{\sigma} = \dfrac{2m_\mathrm{e}}{T}\vec{S}$, il vient : $\vec{m} = \gamma\vec{\sigma}$, avec $\gamma = -\dfrac{e}{2m_\mathrm{e}}$.

.....

4.25 d) On a $\|\vec{m}\| = \underbrace{|\gamma|}_{+\frac{e}{2m_\mathrm{e}}}\underbrace{\|\vec{\sigma}\|}_{n\hbar}$, soit $\|\vec{m}\| = n\underbrace{\dfrac{e\hbar}{2m_\mathrm{e}}}_{\mu_\mathrm{B}}$. Donc,

$$\mu_\mathrm{B} = \frac{1{,}602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C} \times \frac{6{,}63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}}{2\pi}}{2 \times 9{,}11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}} = 9{,}28 \times 10^{-24}\,\mathrm{A\cdot m^2}.$$

Attention : la réponse (a) n'est pas correcte car $\gamma = -\dfrac{e}{2m_\mathrm{e}}$, donc $\mu_\mathrm{B} = -\hbar\gamma$, et non pas $\mu_\mathrm{B} = +\hbar\gamma$. Par ailleurs, la réponse (c) n'est pas correcte car l'unité indiquée correspond à une énergie, et non pas à un moment magnétique !

.....

4.26 a) Le flux propre est $\Phi_\mathrm{p} = \iint \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \displaystyle\int_{R_1}^{R_2} B\vec{e}_\theta \cdot \ell\,\mathrm{d}r\vec{e}_\theta = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\ell\,\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ell\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mu_0 I\ell}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$.

.....

4.26 b) L'inductance propre par unité de longueur : $\Lambda = \dfrac{L}{\ell} = \dfrac{\Phi_\mathrm{p}}{\ell I} = \dfrac{\mu_0}{2\pi}\ln\dfrac{R_2}{R_1}$.

.....

4.26 c) La composante du champ ne dépendant que de r, on peut découper le volume en portions d'espace comprises entre 2 cylindres, le premier de rayon r, le deuxième de rayon $r + \mathrm{d}r$, tous les deux de hauteur ℓ. Le volume élémentaire vaut alors : $\mathrm{d}\tau = 2\pi\ell r\,\mathrm{d}r$. L'énergie magnétique correspondant à une portion de longueur ℓ du câble est alors :

$$W_\mathrm{m} = \frac{1}{2\mu_0}\iiint B^2\,\mathrm{d}\tau = \frac{\ell}{2\mu_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu_0^2 I^2}{4\pi^2 r^2}2\pi r\,\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I^2\ell}{4\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}.$$

.....

4.26 d) L'inductance propre par unité de longueur est $\Lambda = \dfrac{L}{\ell} = \dfrac{2W_\mathrm{m}}{\ell I^2} = \dfrac{\mu_0}{2\pi}\ln\dfrac{R_2}{R_1}$.

.....

Fiche n° 5. Équations de Maxwell

Réponses

5.1 a) ..... ⓓ

5.1 b) ..... $I \cdot T$

5.1 c) ..... $\dfrac{M}{I \cdot T^2}$

5.1 d) ..... $\dfrac{M \cdot L}{I \cdot T^3}$

5.1 e) ..... $\dfrac{M \cdot L}{I \cdot T^3}$

5.2 a) ..... ⓑ

5.2 b) ..... ⓒ

5.2 c) ..... $1{,}1 \times 10^{12}$

5.2 d) ..... $1{,}1 \times 10^{1}$

5.2 e) ..... $1{,}1 \times 10^{-8}$

5.3 a) .... $E_0 \cos[\omega t - kx]\vec{e_y} + E_0 \sin[\omega t - kx]\vec{e_z}$

5.3 b) ..... $-E_0 \exp[\mathrm{i}(\omega t + kz)]\vec{e_x}$ $+\mathrm{i}E_0 \exp[\mathrm{i}(\omega t + kz)]\vec{e_y}$

5.4 a) ..... Nulle

5.4 b) ..... Positive

5.4 c) ..... Négative

5.4 d) ..... Negative

5.4 e) ..... Nulle

5.4 f) ..... Positive

5.5 a) ..... Nulle

5.5 b) ..... Positive

5.5 c) ..... Négative

5.5 d) ..... Nulle

5.5 e) ..... Positive

5.5 f) ..... Négative

5.6 a) ..... $\mu_0 \ \mathrm{div}\ \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \,\mathrm{div}\, \vec{E}}{\partial t}$

5.6 b) ..... $\mu_0 \ \mathrm{div}\ \vec{j} + \mu_0 \dfrac{\partial \rho}{\partial t}$

5.6 c) ..... ⓑ

5.7 a) ..... m

5.7 b) 0

5.7 c) ..... Oui

5.7 d) ..... ⓓ

5.7 e) ..... $\vec{0}$

5.8 a) ..... $r\omega\vec{e_\theta}$

5.8 b) ..... $-\omega y\vec{e_x} + \omega x\vec{e_y}$

5.8 c) ..... $2\omega\vec{e_z}$

5.8 d) ..... $r\omega$

5.8 e) ..... $\dfrac{a^2}{r}\omega$

5.9 a) ..... $3a - 5br^2$

5.9 b) ..... ⓑ

5.9 c) ..... $4\pi R^3(a - bR^2)$

5.9 d) ..... ⓒ

5.9 e) ..... $4\pi R^3(a - bR^2)$

5.10 a) ..... oui

5.10 b) ..... non

5.10 c) ..... oui

5.11 a) ..... $E_0 \dfrac{k}{\omega} \cos(\omega t - kz + \varphi)\vec{e_y}$

5.11 b) .... $E_0 \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \sinh(\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}\alpha z) \exp(-\alpha t)\vec{e_y}$

5.11 c) ..... $-\dfrac{2E_0}{k^2 r^3} \displaystyle\int \cos(\omega t)\vec{e_\theta}\, \mathrm{d}t$

5.12 a) ..... $\boxed{B_0 \dfrac{k}{\varepsilon_0 \mu_0 \omega} \sin(\omega t - kz + \varphi) \vec{e_x}}$

5.12 b) ..... $\boxed{\dfrac{B_0}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \cosh(\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}\alpha z) \exp(-\alpha t) \vec{e_x}}$

5.12 c) ..... $\boxed{\dfrac{c^3 B_0}{k^2 \omega r^3} \cos(\omega t) \vec{e_z}}$

5.13 a) ..... $\boxed{\text{a}}$

5.13 b) ..... $\boxed{-\mu_0 n \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \dfrac{r}{2} \vec{e_\theta}}$

5.13 c) ..... $\boxed{-\mu_0 n \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \dfrac{R^2}{2r} \vec{e_\theta}}$

5.13 d) ..... $\boxed{\text{c}}$

5.13 e) ..... $\boxed{-\mu_0 n \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \dfrac{r}{2} \vec{e_\theta}}$

5.13 f) ..... $\boxed{-\mu_0 n \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \dfrac{R^2}{2r} \vec{e_\theta}}$

5.14 a) .... $\boxed{\dfrac{E_0 B_0}{\mu_0} \cos(\omega t - kz + \varphi) \sin(\omega t - kz + \varphi) \vec{e_z}}$

5.14 b) .... $\boxed{-\dfrac{E_0 B_0}{\mu_0} \cosh(\beta z) \sinh(\beta z) \exp(-2\alpha t) \vec{e_x}}$

5.15 a) ..... $\boxed{\begin{array}{l} -\dfrac{E_{0y}}{c} \cos(k\,z - \omega\,t + \psi_2)\,\vec{e_x} \\ +\dfrac{E_{0x}}{c} \cos(k\,z - \omega\,t + \psi_1)\,\vec{e_y} \end{array}}$

5.15 b) ..... $\boxed{\dfrac{E_x^2 + E_y^2}{\mu_0\, c}\, \vec{e_z}}$

5.15 c) ..... $\boxed{\begin{array}{l} E_{0x}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\,z - \omega\,t + \psi_1)}\, \vec{e_x} \\ +E_{0y}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\,z - \omega\,t + \psi_2)}\, \vec{e_y} \end{array}}$

5.15 d) ..... $\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{1}{c}\Big(E_{0x}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\,z - \omega\,t + \psi_1)}\, \vec{e_y} \\ -E_{0y}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\,z - \omega\,t + \psi_2)}\, \vec{e_x}\Big) \end{array}}$

5.15 e) ..... $\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{1}{c}\Big(E_{0x}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k\,z - \omega\,t + \psi_1)}\, \vec{e_y} \\ -E_{0y}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k\,z - \omega\,t + \psi_2)}\, \vec{e_x}\Big) \end{array}}$

5.15 f) ..... $\boxed{\dfrac{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}{2\,\mu_0\, c}\, \vec{e_z}}$

5.15 g) ..... $\boxed{\text{a}}$

5.16 a) ..... $\boxed{\dfrac{LQ^2}{2\varepsilon_0 S}}$

5.16 b) ..... $\boxed{-\dfrac{R}{2\varepsilon_0 S^2} Q \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \vec{e_r}}$

5.16 c) ..... $\boxed{-\dfrac{L}{\varepsilon_0 S} Q \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}}$

5.16 d) ..... $\boxed{\text{c}}$

5.16 e) ..... $\boxed{\text{b}}$

Corrigés

5.1 a) Les trois premières équations correspondent aux équations de Maxwell-Gauss, Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère. La dernière est une formulation de l'équation de conservation de la charge, qui n'est pas une des équations de Maxwell mais une conséquence de deux d'entre elles.

.....

5.1 b) La définition de l'intensité du courant électrique est : $i(t) = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$, donc $\dim(q) = I \cdot T$.

.....

5.1 c) Par analyse dimensionnelle de la force de Lorentz, on a :

$$\dim(\vec{B}) = \frac{\dim(\vec{F})}{\dim(q)\dim(\vec{v})} = \frac{M \cdot L \cdot T^{-2}}{I \cdot T \cdot L \cdot T^{-1}} = \frac{M}{I \cdot T^2}.$$

.....

5.1 d) Par analyse dimensionnelle de la force de Lorentz, on a : $\dim(\vec{E}) = \dfrac{\dim(\vec{F})}{\dim(q)} = \dfrac{M \cdot L \cdot T^{-2}}{I \cdot T} = \dfrac{M \cdot L}{I \cdot T^3}$.

.....

5.1 e) Par analyse dimensionnelle de l'équation de Maxwell-Faraday, on a

$$\dim(\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E})) = \frac{\dim(\vec{E})}{L} = \frac{\dim(\vec{B})}{T} \qquad \text{donc} \qquad \dim(\vec{E}) = \frac{\dim(\vec{B})\cdot L}{T} = \frac{M\cdot I^{-1}\cdot T^{-2}\cdot L}{T} = \frac{M\cdot L}{I\cdot T^3}.$$

.....

5.2 a) On a $\left\|\vec{j}_{\text{cond}}\right\| = \|\sigma E_0\cos(\omega t+\varphi)\| < \|\sigma E_0\|$ et $\left\|\vec{j}_{\text{dépl}}\right\| = \|-\varepsilon_0\omega E_0\sin(\omega t+\varphi)\| < \|\varepsilon_0\omega E_0\|$. Donc,

$$\alpha \text{ a pour ordre de grandeur } \frac{\sigma E_0}{\varepsilon_0\omega E_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega}.$$

.....

5.2 b) On a $\alpha \gg 1 \iff f \ll \dfrac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0} = \dfrac{1\times10^{7}\,\mathrm{S\cdot m^{-1}}}{2\pi\times 8{,}8\times10^{-12}\,\mathrm{F\cdot m^{-1}}} = 1{,}8\times10^{17}\,\mathrm{Hz}.$

.....

5.2 c) On a $\alpha = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0\omega} = \dfrac{1{,}0\times10^{7}\,\mathrm{S\cdot m^{-1}}}{8{,}8\times10^{-12}\,\mathrm{F\cdot m^{-1}}\times 1{,}0\times10^{6}\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}} = 1{,}1\times10^{12} \gg 1.$

.....

5.2 d) On a $\alpha = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0\omega} = \dfrac{1{,}0\times10^{-4}\,\mathrm{S\cdot m^{-1}}}{8{,}8\times10^{-12}\,\mathrm{F\cdot m^{-1}}\times 1{,}0\times10^{6}\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}} = 1{,}1\times10^{1}$, dont l'ordre de grandeur est 10.

.....

5.2 e) On a $\alpha = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0\omega} = \dfrac{1{,}0\times10^{-13}\,\mathrm{S\cdot m^{-1}}}{8{,}8\times10^{-12}\,\mathrm{F\cdot m^{-1}}\times 1{,}0\times10^{6}\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}} = 1{,}1\times10^{-8} \ll 1.$

.....

5.3 a) On a :

$$\begin{aligned}\underline{\vec{E}}_1 &= E_0\exp[\mathrm{i}(\omega t-kx)]\vec{e_y} - \mathrm{i}E_0\exp[\mathrm{i}(\omega t-kx)]\vec{e_z}\\ &= E_0(\cos(\omega t-kx)+\mathrm{i}\sin(\omega t-kx))\vec{e_y} - \mathrm{i}E_0(\cos(\omega t-kx)+\mathrm{i}\sin(\omega t-kx))\vec{e_z}.\end{aligned}$$

Donc, $\vec{E}_1 = \mathsf{Re}(\underline{\vec{E}}_1) = E_0\cos[\omega t-kx]\vec{e_y} + E_0\sin[\omega t-kx]\vec{e_z}$.

.....

5.5 a) On peut estimer le rotationnel selon un axe en observant si le champ de vecteurs « tourne » dans le sens direct ou indirect. Si le champ de vecteurs ne « tourne » pas autour d'un axe alors le rotationnel est nul. Si le champ de vecteurs semble « tourner » dans le sens direct alors le rotationnel est positif ; dans le cas contraire, il est négatif.

.....

5.6 a) Avec la relation de Maxwell-Ampère et le théorème de Schwarz, on a :

$$\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}) = \mathrm{div}\left(\mu_0\,\vec{j} + \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = \mu_0\ \mathrm{div}\ \vec{j} + \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial\,\mathrm{div}\,\vec{E}}{\partial t}.$$

.....

5.6 b) Avec la relation de Maxwell-Gauss, on a :

$$\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}) = \mu_0\ \mathrm{div}\ \vec{j} + \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial(\frac{\rho}{\varepsilon_0})}{\partial t} = \mu_0\left(\mathrm{div}\ \vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t}\right).$$

.....

5.6 c) Comme $\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}) = 0$, on obtient : $\mathrm{div}\ \vec{j} + \dfrac{\partial\rho}{\partial t} = 0$.

.....

5.7 a) En utilisant l'homogénéité, on voit que a est une longueur, en mètres (m).

.....

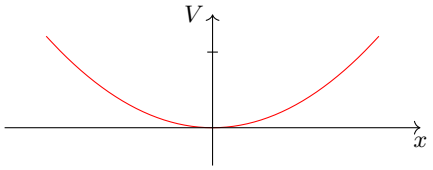
5.7 b) On a $\Delta V = \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \dfrac{V_0}{a^2}(2+4-6) = 0.$

.....

5.7 c) L'équation de Poisson $\Delta V = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ est vérifiée en prenant $\rho = 0$ car l'énoncé impose un espace vide de charge.

.....

5.7 d) On a $V(x,0,0) = \dfrac{V_0}{a^2}x^2$: c'est une parabole.
L'allure en est donnée ci-contre :



.....

5.7 e) Le champ électrique est donné par :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{e_x} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{e_y} - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e_z} = 2\frac{V_0}{a^2}(-x\vec{e_x} - 2y\vec{e_y} + 3z\vec{e_z}).$$

En O, origine du repère, ce champ est nul.

.....

5.8 a) On a $\vec{v} = \omega\vec{e_z} \wedge (r\vec{e_r} + z\vec{e_z}) = r\omega\vec{e_\theta}$.

.....

5.8 b) On a $\vec{v} = \omega\vec{e_z} \wedge (x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}) = -\omega y\vec{e_x} + \omega x\vec{e_y}$.

.....

5.8 c) En coordonnées cartésiennes, on obtient : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = 2\omega\vec{e_z}$.

.....

5.8 d) On simplifie l'expression $\oint_\Gamma \vec{v}_{(\text{M})} \cdot \vec{\text{d}\ell}_{(\text{M})} = \iint_\Sigma \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v})_{(\text{M})} \cdot \vec{n}\,\text{d}S_{(\text{M})}$ en considérant $\vec{\text{d}\ell} = r\,\text{d}\theta\vec{e_\theta}$ et $\vec{n}\,\text{d}S_{(\text{M})} = r\,\text{d}r\,\text{d}\theta\vec{e_z}$; d'où $v2\pi r = \displaystyle\int_0^r 4\omega\pi r\,\text{d}r$, soit $v = r\omega$.

.....

5.8 e) On simplifie l'expression $\oint_\Gamma \vec{v}_{(\text{M})} \cdot \vec{\text{d}\ell}_{(\text{M})} = \iint_\Sigma \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v})_{(\text{M})} \cdot \vec{n}\,\text{d}S_{(\text{M})}$ en considérant $\vec{\text{d}\ell} = r\,\text{d}\theta\vec{e_\theta}$ et $\vec{n}\,\text{d}S_{(\text{M})} = r\,\text{d}r\,\text{d}\theta\vec{e_z}$; d'où $v2\pi r = \displaystyle\int_0^a 4\omega\pi r\,\text{d}r + \int_a^r 0 \times 2\pi r\,\text{d}r$, soit $v = \dfrac{a^2}{r}\omega$.

.....

5.9 a) On a $\text{div}\,\vec{A} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} = \dfrac{1}{r^2}(3ar^2 - 5br^4) = 3a - 5br^2$.

.....

5.9 c) On a :

$$\begin{aligned}
\oiint_{\text{sphère}} \vec{A} \cdot \vec{\text{d}S} &= \iiint_{\text{boule}} \text{div}\,\vec{A}\,\text{d}\tau \\
&= \int_{r=0}^{r=R}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} (3a - 5br^2)r^2\sin(\theta)\,\text{d}r\,\text{d}\varphi\,\text{d}\theta \\
&= \left[\varphi\right]_0^{2\pi} \times \left[-\cos(\theta)\right]_0^{\pi} \times \left[ar^3 - br^5\right]_0^R \\
&= 4\pi R^3(a - bR^2).
\end{aligned}$$

.....

5.9 e) On a :

$$\oiint_{\text{sphère}} \vec{A} \cdot \vec{\text{d}S} = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} (aR - bR^3)R^2\sin(\theta)\,\text{d}\varphi\,\text{d}\theta = 4\pi R^3(a - bR^2).$$

On retrouve bien le résultat de la question c).

.....

5.10 a) Il faut vérifier que les équations de Maxwell sont respectées les unes après les autres. On a :

- $\operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{\partial E_x}{\partial x} + \dfrac{\partial E_y}{\partial y} + \dfrac{\partial E_z}{\partial z} = 0$
- $\operatorname{div}\vec{B} = \dfrac{\partial B_x}{\partial x} + \dfrac{\partial B_y}{\partial y} + \dfrac{\partial B_z}{\partial z} = 0$
- $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = \left(\dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{e_x} + \left(\dfrac{\partial E_x}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial x}\right)\vec{e_y} + \left(\dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{e_z} = \dfrac{\partial E_y}{\partial x}\vec{e_z} = E_0 k \sin(\omega t - kx + \varphi_0)\vec{e_z}$

  et $\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -E_0 k \sin(\omega t - kx + \varphi_0)\vec{e_z}$
- Enfin,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} &= \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right)\vec{e_x} + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right)\vec{e_y} + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\vec{e_z} \\ &= -\frac{\partial B_z}{\partial x}\vec{e_y} = -\frac{E_0 k^2}{\omega}\sin(\omega t - kx + \varphi_0)\vec{e_y}\end{aligned}$$

et $\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -E_0\omega \sin(\omega t - kx + \varphi_0)\vec{e_y}$ donc $\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\dfrac{E_0 k^2}{\omega}\sin(\omega t - kx + \varphi_0)\vec{e_y}$

Les quatre équations de Maxwell sont respectées donc le champ électromagnétique peut exister.

.....

5.10 b) On a :

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\partial E_y}{\partial y} = -E_0 k \sin(\omega t + ky).$$

L'équation de Maxwell-Gauss dans le vide n'est pas respectée donc ce champ électromagnétique ne peut pas exister.

.....

5.10 c) On a :

- $\operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{\partial E_x}{\partial x} + \dfrac{\partial E_y}{\partial y} + \dfrac{\partial E_z}{\partial z} = 0$
- $\operatorname{div}\vec{B} = \dfrac{\partial B_x}{\partial x} + \dfrac{\partial B_y}{\partial y} + \dfrac{\partial B_z}{\partial z} = 0$
-

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} &= \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{e_x} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\vec{e_y} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{e_z} = -\frac{\partial E_y}{\partial z}\vec{e_x} + \frac{\partial E_x}{\partial z}\vec{e_y} \\ &= E_2 k \sin(\omega t + kz + \varphi_2)\vec{e_x} - E_1 k \sin(\omega t + kz + \varphi_1)\vec{e_y}\end{aligned}$$

  et $\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -E_2 k \sin(\omega t + kz + \varphi_2)\vec{e_x} + E_1 k \sin(\omega t + kz + \varphi_1)\vec{e_y}$
- Enfin,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} &= \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right)\vec{e_x} + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right)\vec{e_y} + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\vec{e_z} = -\frac{\partial B_y}{\partial z}\vec{e_x} + \frac{\partial B_x}{\partial z}\vec{e_y} \\ &= -\frac{E_1 k^2}{\omega}\sin(\omega t + kz + \varphi_1)\vec{e_x} + \frac{E_2 k^2}{\omega}\sin(\omega t + kz + \varphi_2)\vec{e_y}\end{aligned}$$

et $\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -E_1\omega \sin(\omega t + kz + \varphi_1)\vec{e_x} - \omega E_2 \sin(\omega t + kz + \varphi_2)\vec{e_y}$ donc

$$\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{E_1 k^2}{\omega}\sin(\omega t + kz + \varphi_1)\vec{e_x} - \frac{E_2 k^2}{\omega}\sin(\omega t + kz + \varphi_2)\vec{e_y}$$

Les quatre équations de Maxwell sont respectées donc le champ électromagnétique peut exister.

.....

5.11 a) Le champ électrique est de la forme $\vec{E} = E_x(z,t)\vec{e_x}$ avec $E_x(z,t) = E_0\cos(\omega t - kz + \varphi)$.

D'après l'expression du rotationnel en coordonnées cartésiennes, on a :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = \frac{\partial E_x}{\partial z}\vec{e_y} = E_0 k \sin(\omega t - kz + \varphi)\vec{e_y}.$$

D'après l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\vec{B} = \int -\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E})\,\text{d}t = -E_0 k\vec{e_y}\int \sin(\omega t - kx + \varphi)\,\text{d}t = E_0\frac{k}{\omega}\cos(\omega t - kz + \varphi)\vec{e_y} + \overrightarrow{\text{cste}}.$$

Comme le milieu est vide de charge et de courant, il n'y a aucun champ statique donc $\overrightarrow{\text{cste}} = \vec{0}$.

.....

5.11 b) Le champ électrique est de la forme $\vec{E} = E_x(z,t)\vec{e_x}$ avec $E_x(z,t) = E_0\cosh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha z)\exp(-\alpha t)$.

D'après l'expression du rotationnel en coordonnées cartésiennes, on a :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = \frac{\partial E_x}{\partial z}\vec{e_y} = E_0\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha\sinh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha z)\exp(-\alpha t)\vec{e_y}.$$

D'après l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\vec{B} = \int -\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E})\,\text{d}t = -E_0\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha\sinh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha z)\vec{e_y}\int \exp(-\alpha t)\,\text{d}t = E_0\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\sinh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha z)\exp(-\alpha t)\vec{e_y} + \overrightarrow{\text{cste}}.$$

Comme le milieu est vide de charge et de courant, il n'y a aucun champ statique donc $\overrightarrow{\text{cste}} = \vec{0}$.

.....

5.11 c) Le champ électrique est de la forme $\vec{E} = E_z(r,t)\vec{e_z}$ avec :

$$E_x(z,t) = \frac{E_0}{(kr)^2}\cos(\omega t).$$

D'après l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques, on a :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial E_z}{\partial r}\vec{e_\theta} = \frac{2E_0}{k^2r^3}\cos(\omega t)\vec{e_\theta}.$$

D'après l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\vec{B} = \int -\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E})\,\text{d}t = -\frac{2E_0}{k^2r^3}\int \cos(\omega t)\vec{e_\theta}\,\text{d}t.$$

Comme $\vec{e_\theta}$ est un vecteur dont l'orientation dépend du temps (base cylindrique), on ne peut développer davantage le calcul car on ne connaît pas l'évolution temporelle de l'angle θ.

.....

5.12 a) Le champ magnétique est de la forme $\vec{B} = B_y(z,t)\vec{e_y}$ avec $B_y(z,t) = B_0\sin(\omega t - kz + \varphi)$.

D'après l'expression du rotationnel en coordonnées cartésiennes, on a :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = -\frac{\partial B_y}{\partial z}\vec{e_x} = B_0 k\cos(\omega t - kz + \varphi)\vec{e_x}.$$

D'après l'équation de Maxwell-Ampère vide de courant ($\vec{j} = \vec{0}$) :

$$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\int \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B})\,\text{d}t = \frac{B_0 k}{\varepsilon_0\mu_0}\vec{e_x}\int \cos(\omega t - kz + \varphi)\,\text{d}t = \frac{B_0 k}{\varepsilon_0\mu_0\omega}\sin(\omega t - kz + \varphi)\vec{e_x} + \overrightarrow{\text{cste}}.$$

Comme le milieu est vide de charge et de courant, il n'y a aucun champ statique donc $\overrightarrow{\text{cste}} = \vec{0}$.

.....

5.12 b) Le champ magnétique est de la forme $\vec{B} = B_y(z,t)\vec{e_y}$ avec $B_y(z,t) = B_0 \sinh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha z)\exp(-\alpha t)$.

D'après l'expression du rotationnel en coordonnées cartésiennes, on a :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = -\frac{\partial B_y}{\partial z}\vec{e_x} = -B_0\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha\cosh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha z)\exp(-\alpha t)\vec{e_x}.$$

D'après l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\int \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B})\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}B_0\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha\cosh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha z)\vec{e_x}\int\exp(-\alpha t)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{B_0}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\cosh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha z)\exp(-\alpha t)\vec{e_x} + \overrightarrow{\text{cste}}.\end{aligned}$$

Comme le milieu est vide de charge et de courant, il n'y a aucun champ statique donc $\overrightarrow{\text{cste}} = \vec{0}$.

Ce champ électromagnétique $(\vec{E},\vec{B})$ est le même que celui de la question b) de l'entraînement précédent, en posant $E_0 = \dfrac{B_0}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$.

.....

5.12 c) Le champ magnétique est de la forme $\vec{B} = B_\theta(r,t)\vec{e_\theta}$ avec $B_\theta(r,t) = \dfrac{cB_0}{(kr)^2}\sin(\omega t)$.

D'après l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques, on a :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \frac{1}{r}\frac{\partial r B_\theta}{\partial r}\vec{e_z} = -\frac{cB_0}{k^2r^3}\sin(\omega t)\vec{e_z}.$$

D'après l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\int\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B})\,\mathrm{d}t = -\frac{cB_0}{\varepsilon_0\mu_0k^2r^3}\vec{e_z}\int\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{c^3B_0}{k^2\omega r^3}\cos(\omega t)\vec{e_z} + \overrightarrow{\text{cste}}.$$

Comme le milieu est vide de charge et de courant, il n'y a aucun champ statique donc $\overrightarrow{\text{cste}} = \vec{0}$. Contrairement aux cas précédents, on ne retrouve pas le champ de la question c) de l'entraînement précédent : ces champs électromagnétiques $(\vec{E},\vec{B})$ ne sont solutions ni d'une seule équation de Maxwell, ni de l'ensemble (équation de propagation !) donc il ne s'agit pas de champs électromagnétiques qui se propagent.

.....

5.13 a) Le solénoïde étant invariant par rotation autour de l'axe $(\mathrm{O}z)$ et par translation le long du même axe, la norme du champ électrique ne dépend que de r.

.....

5.13 b) L'équation de Maxwell-Faraday est $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$. On calcule d'abord le rotationnel de $\vec{E}$. Le champ magnétique étant porté par $(\mathrm{O}z)$, il reste : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial rE_\theta}{\partial r}\vec{e_z}$.

On calcule la dérivée du champ magnétique par rapport au temps pour $r < R$: $\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \mu_0 n\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\vec{e_z}$.

Enfin, on a $rE_\theta = -\mu_0 n\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\dfrac{r^2}{2}$ donc $E_\theta = -\mu_0 n\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\dfrac{r}{2}$.

.....

5.13 c) Le champ magnétique étant nul à l'extérieur du solénoïde, on a :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial rE_\theta}{\partial r} = 0 \qquad \text{donc} \qquad E_\theta = \frac{C}{r}$$

avec C une constante. Il reste à déterminer cette constante. Par continuité du champ électrique en $r = R$, on a :

$$\frac{C}{R} = -\mu_0 n\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\frac{R}{2} \qquad \text{donc} \qquad C = -\mu_0 n\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\frac{R^2}{2}.$$

Ainsi, on a $\vec{E} = -\mu_0 n\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\dfrac{R^2}{2r}\vec{e_\theta}$.

.....

5.13 d) La forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday est $\oint_\Gamma \vec{E}\cdot\vec{\mathrm{d}\ell} = -\iint_\Sigma \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\vec{\mathrm{d}S}$.

Nous sommes donc amenés à calculer la circulation de $\vec{E}$ sur le contour délimitant la surface Σ que l'on va choisir et à calculer le flux de $\vec{B}$ à travers cette même surface.

Pour que le calcul de la circulation soit simple, il faut trouver une surface dont le contour ne dépend pas de r, ainsi le champ électrique sera constant sur ce contour.

Pour que le calcul du flux soit simple, il faut dans un premier temps trouver une surface dont la surface élémentaire ne s'exprime pas en fonction des variables de B : B étant constant ici, la question ne se pose pas. Dans un deuxième temps, on choisit une surface telle que $\vec{B}$ et le vecteur normal à la surface soient colinéaires afin que le produit scalaire se calcule facilement : on choisit une surface perpendiculaire à $\vec{e_z}$.

On souhaite donc une surface de rayon constant r, perpendiculaire à $\vec{e_z}$: il s'agit donc d'un disque de rayon r et d'axe (Oz).

.....

5.13 e) La forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday est $\oint_\Gamma \vec{E}\cdot\vec{\mathrm{d}\ell} = -\iint_\Sigma \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\vec{\mathrm{d}S}$.

On choisit comme surface Σ le disque de rayon r et donc comme contour Γ le cercle de rayon r. La circulation de $\vec{E}$ donne :

$$\oint_\Gamma \vec{E}\cdot\mathrm{d}\ell = 2\pi r E(r,t).$$

Le flux de la dérivée du champ magnétique donne : $\iint_\Sigma \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\vec{\mathrm{d}S} = \pi r^2\mu_0 n\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$. Finalement, $\vec{E} = -\mu_0 n\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\frac{r}{2}\vec{e_\theta}$.

.....

5.13 f) La forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday est $\oint_\Gamma \vec{E}\,\mathrm{d}\ell = -\iint_\Sigma \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\vec{\mathrm{d}S}$.

On choisit comme surface Σ le disque de rayon r et donc comme contour Γ le cercle de rayon r. La circulation de $\vec{E}$ donne :

$$\oint_\Gamma \vec{E}\,\mathrm{d}\ell = 2\pi r E(r,t).$$

Le flux de la dérivée du champ magnétique donne : $\iint_\Sigma \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\vec{\mathrm{d}S} = \pi R^2\mu_0 n\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$. Finalement, $\vec{E} = -\mu_0 n\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\frac{R^2}{2r}\vec{e_\theta}$.

.....

5.14 a) On a :

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0}E_0\cos(\omega t - kz + \varphi)\vec{e_x}\wedge B_0\sin(\omega t - kz + \varphi)\vec{e_y} = \frac{E_0B_0}{\mu_0}\cos(\omega t - kz + \varphi)\sin(\omega t - kz + \varphi)\vec{e_z}.$$

L'énergie se propage dans une direction orthogonale à celles des champs électrique et magnétique.

.....

5.14 b) On a :

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0}E_0\cosh(\beta z)\exp(-\alpha t)\vec{e_z}\wedge B_0\sinh(\beta z)\exp(-\alpha t)\vec{e_y} = -\frac{E_0B_0}{\mu_0}\cosh(\beta z)\sinh(\beta z)\exp(-2\alpha t)\vec{e_x}.$$

L'énergie se propage dans une direction orthogonale à celles des champs électrique et magnétique.

.....

5.15 a) Pour une onde plane progressive, on a la relation de structure :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{\omega} = \frac{\vec{e_z}\wedge\vec{E}}{c} = \frac{1}{c}\begin{vmatrix}0\\0\\1\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}E_x\\E_y\\E_z\end{vmatrix} = \frac{1}{c}\begin{vmatrix}-E_y\\E_x\\0\end{vmatrix}.$$

On en déduit : $\vec{B} = -\frac{E_{0y}}{c}\cos(k\,z - \omega\,t + \psi_2)\,\vec{e_x} + \frac{E_{0x}}{c}\cos(k\,z - \omega\,t + \psi_1)\,\vec{e_y}$.

.....

5.15 b) Le vecteur de Poynting est donné par :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0\,c}\begin{vmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -E_y \\ E_x \\ 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\mu_0\,c}\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ E_x^2+E_y^2 \end{vmatrix} = \frac{E_x^2+E_y^2}{\mu_0\,c}\,\vec{e_z}.$$

.....

5.15 c) En notation complexe, avec $\vec{r} = \overrightarrow{\mathrm{OM}}$ et $\vec{k}$ le vecteur d'onde, le champ électrique peut s'écrire :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0\,\exp\bigl[\mathrm{i}\bigl(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega\,t\bigr)\bigr] = \underline{\vec{E}}_0\,\exp[\mathrm{i}(k\,z-\omega\,t)],$$

avec $\underline{\vec{E}}_0 = E_{0x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\psi_1}\,\vec{e_x} + E_{0y}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\psi_2}\,\vec{e_y}$; $\underline{\vec{E}}_0$ est l'amplitude complexe du champ électrique.

.....

5.15 d) L'équation de Maxwell-Faraday $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\underline{\vec{E}} = -\dfrac{\partial\underline{\vec{B}}}{\partial t}$ donne : $\mathrm{i}\,\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}} = +\mathrm{i}\,\omega\,\underline{\vec{B}}$. Donc,

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k}}{\omega}\wedge\underline{\vec{E}} = \frac{\vec{e_z}}{c}\wedge\bigl(E_{0x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\,z-\omega\,t+\psi_1)}\,\vec{e_x} + E_{0y}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\,z-\omega\,t+\psi_2)}\,\vec{e_y}\bigr) = \frac{1}{c}\bigl(E_{0x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\,z-\omega\,t+\psi_1)}\,\vec{e_y} - E_{0y}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\,z-\omega\,t+\psi_2)}\,\vec{e_x}\bigr).$$

.....

5.15 e) On en déduit le conjugué : $\underline{\vec{B}}^* = \dfrac{1}{c}\bigl(E_{0x}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k\,z-\omega\,t+\psi_1)}\,\vec{e_y} - E_{0y}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k\,z-\omega\,t+\psi_2)}\,\vec{e_x}\bigr)$.

.....

5.15 f) Le produit vectoriel $\underline{\vec{E}}\wedge\underline{\vec{B}}^*$ vaut :

$$\begin{aligned}\underline{\vec{E}}\wedge\underline{\vec{B}}^* &= \bigl(E_{0x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\,z-\omega\,t+\psi_1)}\,\vec{e_x} + E_{0y}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\,z-\omega\,t+\psi_2)}\,\vec{e_y}\bigr)\wedge\left(\frac{1}{c}\bigl(E_{0x}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k\,z-\omega\,t+\psi_1)}\,\vec{e_y} - E_{0y}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k\,z-\omega\,t+\psi_2)}\,\vec{e_x}\bigr)\right)\\ &= \frac{E_{0x}^2}{c}\,\vec{e_z} + \frac{E_{0y}^2}{c}\,\vec{e_z} = \frac{\bigl(E_{0x}^2+E_{0y}^2\bigr)\vec{e_z}}{c}.\end{aligned}$$

On en déduit le vecteur complexe $\dfrac{1}{2\,\mu_0}\underline{\vec{E}}\wedge\underline{\vec{B}}^* = \dfrac{E_{0x}^2+E_{0y}^2}{2\,\mu_0\,c}\,\vec{e_z}$.

.....

5.15 g) Avec $\langle\cos^2\rangle = \dfrac{1}{2}$, la valeur moyenne du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ vaut :

$$\bigl\langle\vec{\Pi}\bigr\rangle = \left\langle\frac{(E_{0x}\,\cos(k\,z-\omega\,t+\psi_1))^2 + (E_{0y}\,\cos(k\,z-\omega\,t+\psi_2))^2}{\mu_0\,c}\,\vec{e_z}\right\rangle = \frac{E_{0x}^2+E_{0y}^2}{2\,\mu_0\,c}\,\vec{e_z}.$$

La valeur moyenne du vecteur $\left\langle\dfrac{\underline{\vec{E}}\wedge\underline{\vec{B}}^*}{2\,\mu_0}\right\rangle$ est identique : on peut donc choisir l'une ou l'autre des deux méthodes.

.....

5.16 a) On intègre la densité volumique d'énergie électromagnétique dans tout le volume $\mathcal{V}$ séparant les deux armatures :

$$\mathcal{E} = \iiint_{\mathcal{V}}\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\,\mathrm{d}\tau = \iiint_{\mathcal{V}}\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S^2}\,\mathrm{d}\tau = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S^2}LS = \frac{LQ^2}{2\varepsilon_0 S}.$$

.....

5.16 b) On a $\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \dfrac{\frac{Q}{\varepsilon_0 S}\vec{e_z}\cdot\frac{\mu_0}{2S}\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}R\vec{e_\theta}}{\mu_0} = -\dfrac{R}{2\varepsilon_0 S^2}Q\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\vec{e_r}$.

.....

5.16 c) On cherche le flux sortant du vecteur de Poynting à travers la surface Σ du cylindre de rayon R et de hauteur L formé par les deux armatures du condensateur, soit :

$$\oiint_{\Sigma}\vec{\Pi}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = -\frac{R}{2\varepsilon_0 S^2}Q\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\times 2\pi RL = -\frac{L\pi R^2}{\varepsilon_0 S^2}Q\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\frac{L}{\varepsilon_0 S}Q\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}.$$

.....

5.16 d) On a $\dfrac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \dfrac{\partial\left(\dfrac{LQ(t)^2}{2\varepsilon_0 S}\right)}{\partial t} = \dfrac{L}{2\varepsilon_0 S} 2Q(t)\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}(t) = \dfrac{L}{\varepsilon_0 S} Q\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\phi.$

.....

5.16 e) On a $\dfrac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \phi = 0.$

En utilisant le théorème de Green-Ostrogradski, qui dit $\oiint_\Sigma \vec{\Pi}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iiint_\mathcal{V} \operatorname{div}\vec{\Pi}\,\mathrm{d}\tau$, et en utilisant que $\mathcal{E} = \iiint_\mathcal{V} e\,\mathrm{d}\tau$, on obtient :

$$\iiint_\mathcal{V} \frac{\partial e}{\partial t}\,\mathrm{d}\tau + \iiint_\mathcal{V} \operatorname{div}\vec{\Pi}\,\mathrm{d}\tau = 0 \qquad \text{donc} \qquad \frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{\Pi} = 0,$$

ce qui correspond au théorème de Poynting en l'absence de courant de conduction.

.....

Fiche n° 6. Induction

Réponses

6.1 a) $\boxed{\vec{e_z}}$

6.1 b) $\boxed{-\vec{e_z}}$

6.1 c) $\boxed{\vec{e_y}}$

6.1 d) $\boxed{\vec{e_y}}$

6.1 e) $\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e_y}+\vec{e_z})}$

6.1 f) $\boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e_y}+\vec{e_z})}$

6.2 a) $\boxed{\text{d}}$

6.2 b) $\boxed{\text{aucune}}$

6.2 c) $\boxed{\text{b}}$

6.2 d) $\boxed{\text{a}}$

6.3 a) $\boxed{\text{oui}}$

6.3 b) $\boxed{\text{oui}}$

6.3 c) $\boxed{\text{non}}$

6.3 d) $\boxed{\text{non}}$

6.3 e) $\boxed{\text{oui}}$

6.3 f) $\boxed{\text{non}}$

6.4 a) $\boxed{0}$

6.4 b) $\boxed{-Bx_{\text{c}}\ell}$

6.4 c) $\boxed{-B\ell^2}$

6.4 d) $\boxed{-B(a-(x_{\text{c}}-\ell))\ell}$

6.4 e) $\boxed{0}$

6.4 f) $\boxed{-Bv\ell}$

6.4 g) $\boxed{0}$

6.4 h) $\boxed{Bv\ell}$

6.5 a) $\boxed{\pi R^2 B_{\text{m}}\cos(\omega t)}$

6.5 b) $\boxed{\pi a^2 B_{\text{m}}\cos(\omega t)}$

6.5 c) $\boxed{\text{d}S = r\,\text{d}\theta\,\text{d}r}$

6.5 d) $\boxed{2\pi B_0\left(\frac{R^2}{2}-\frac{R^3}{3a}\right)}$

6.5 e) $\boxed{2\pi B_0\frac{a^2}{6}}$

6.6 a) $\boxed{B\pi R^2\cos(\omega t)}$

6.6 b) $\boxed{0}$

6.6 c) $\boxed{-\frac{B\pi R^2}{2}}$

6.6 d) $\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}B\pi R^2}$

6.6 e) $\boxed{B\pi R^2}$

6.7 a) $\boxed{\text{a}}$

6.7 b) $\boxed{\text{a}}$

6.7 c) $\boxed{\frac{\mu_0 N I a}{2\pi}\ln\left(\frac{d+a}{d}\right)}$

6.7 d) $\boxed{\frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi}\ln\left(\frac{d+a}{d}\right)}$

6.8 a) $\boxed{\text{c}}$

6.8 b) $\boxed{B_0\omega\sin(\omega t)\frac{r}{2}}$

6.9 a) $\boxed{\text{c}}$

6.9 b) $\boxed{\text{a}}$

6.10 a) $\boxed{\text{c}}$

6.10 b) $\boxed{\frac{-\alpha B\underline{I}}{h+\text{j}(m\omega-\frac{k}{\omega})}}$

6.10 c) $\boxed{\text{c}}$

6.11 a) $\boxed{-Ri^2}$

6.11 b) ..... $\boxed{mv\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - fv}$

6.11 c) ..... $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} + \mathcal{P}_\mathrm{J}}$

6.12 a) ..... $\boxed{-iaB\overrightarrow{e_y}}$

6.12 b) ..... $\boxed{ibB\overrightarrow{e_x}}$

6.12 c) ..... $\boxed{iaB\overrightarrow{e_y}}$

6.12 d) ..... $\boxed{-ibB\overrightarrow{e_x}}$

6.12 e) ..... $\boxed{\overrightarrow{0}}$

6.13 a) ..... $\boxed{\overrightarrow{0}}$

6.13 b) ..... $\boxed{-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}aB\overrightarrow{e_z}}$

6.13 c) ..... $\boxed{i\dfrac{\sqrt{3}}{2}aB\overrightarrow{e_x}}$

6.14 a) ..... $\boxed{S\overrightarrow{e_y}}$

6.14 b) ..... $\boxed{-IBS\overrightarrow{e_z}}$

6.14 c) ..... $\boxed{\overrightarrow{0}}$

6.14 d) ..... $\boxed{IBS\overrightarrow{e_x}}$

6.14 e) ..... $\boxed{\text{c}}$

6.14 f) ..... $\boxed{\text{d}}$

6.14 g) ..... $\boxed{\text{d}}$

6.15 a) ..... $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{B^2\ell^2}{mR}v = 0}$

6.15 b) ..... $\boxed{\text{c}}$

6.16 a) ..... $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + \dfrac{B^2\ell^2}{mr}v(t) = -\dfrac{B\ell E}{mr}}$

6.16 b) ..... $\boxed{-\dfrac{E}{B\ell}}$

6.17 a) ..... $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2i(t)}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{r}{L}\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \dfrac{B^2\ell^2}{mL}i(t) = 0}$

6.17 b) ..... $\boxed{\text{a}}$

6.17 c) ..... $\boxed{\text{c}}$

6.17 d) ..... $\boxed{\text{d}}$

6.18 a) ..... $\boxed{\text{b}}$

6.18 b) ..... $\boxed{E - Ba\dot{x} - Ri}$

6.18 c) ..... $\boxed{-\dfrac{(Ba)^2}{m}i - R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}}$

6.18 d) ..... $\boxed{R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{(Ba)^2}{m}i = 0}$

6.18 e) ..... $\boxed{R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \left(\dfrac{(Ba)^2}{m} + \dfrac{1}{C}\right)i = 0}$

6.18 f) ..... $\boxed{L\dfrac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \left(\dfrac{(Ba)^2}{m} + \dfrac{1}{C}\right)i = 0}$

6.19 a) ..... $\boxed{\text{b}}$

6.19 b) ..... $\boxed{x_0 + \dfrac{e}{Ba}\left(t + \tau\mathrm{e}^{-\dfrac{t}{\tau}} - \tau\right)}$

6.20 a) ..... $\boxed{\text{b}}$

6.20 b) ..... $\boxed{\text{b}}$

6.21 a) ..... $\boxed{\text{d}}$

6.21 b) ..... $\boxed{-iB2\pi RN\overrightarrow{e_z}}$

6.22 a) ..... $\boxed{\text{a}}$

6.22 b) ..... $\boxed{-S\overrightarrow{e_z}}$

6.22 c) ..... $\boxed{-B\dfrac{t}{\tau}S}$

6.22 d) ..... $\boxed{\dfrac{BS}{\tau}}$

6.22 e) ..... $\boxed{300\,\mathrm{mV}}$

6.22 f) ..... $\boxed{\text{b}}$

6.22 g) ..... $\boxed{S\overrightarrow{e_z}}$

6.22 h) ..... $\boxed{\dfrac{BSt}{\tau}}$

6.22 i) ..... $\boxed{-\dfrac{BS}{\tau}}$

6.22 j) ..... $\boxed{300\,\text{mV}}$

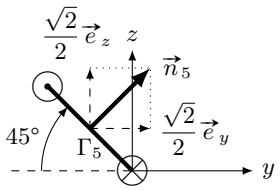
6.23 a) ..... $\boxed{Ei - Ri^2}$

6.23 b) ..... $\boxed{mv\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + kxv + \alpha v^2}$

6.23 c) ..... $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}t} + \mathcal{P}_\mathrm{f} + \mathcal{P}_\mathrm{J}}$

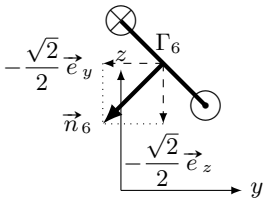
Corrigés

6.1 e)



.....

6.1 f)



.....

6.3 a) Il y a trois façons de modifier un flux : modifier la surface, modifier le champ, changer l'angle entre le vecteur normal à la surface et le champ. Ici, comme $\vec{B} \wedge \vec{n} = \vec{0}$ à $t = 0$, les deux vecteurs sont colinéaires. Comme le cadre tourne autour d'un de ses côtés, l'angle entre $\vec{n}$ et $\vec{B}$ varie au cours du temps.

.....

6.3 b) La surface où le champ est non nul augmente au cours du temps tant que le cadre n'est pas entièrement dans la zone où règne le champ.

.....

6.3 c) Le produit scalaire entre $\vec{B}(t)$ et $\vec{n}$ est nul.

.....

6.3 d) Ni la surface ni l'angle entre $\vec{B}$ et $\vec{n}$ ne varie.

.....

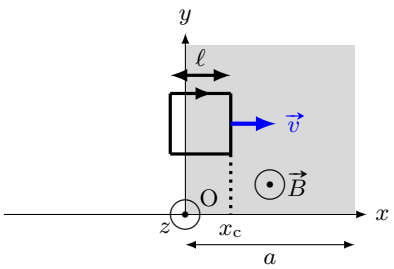
6.3 e) La surface varie.

.....

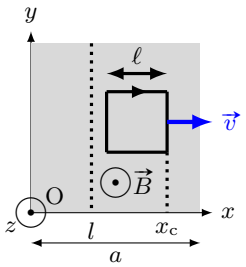
6.3 f) Il ne faut pas confondre les termes « uniforme » (ne varie pas dans l'espace) et « constant » (ne varie pas dans le temps).

.....

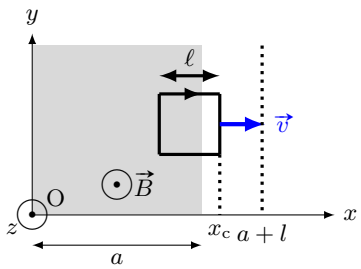
6.4 b)



6.4 c)



6.4 d)



6.5 a) On a $\Phi = \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi} B_m \cos(\omega t) r\,\mathrm{d}r \times \mathrm{d}\theta = B_m \cos(\omega t) \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi} r\,\mathrm{d}r \times \mathrm{d}\theta.$

6.5 b) On a $\Phi = \int_{r=0}^{a}\int_{\theta=0}^{2\pi} B_m \cos(\omega t) r\,\mathrm{d}r \times \mathrm{d}\theta = B_m \cos(\omega t) \int_{r=0}^{a}\int_{\theta=0}^{2\pi} r\,\mathrm{d}r \times \mathrm{d}\theta.$

6.5 d) On a $\Phi' = \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi} B_0\left(1-\frac{r}{a}\right) r\,\mathrm{d}r \times \mathrm{d}\theta = B_0 \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi} \left(r - \frac{r^2}{a}\right) \mathrm{d}r \times \mathrm{d}\theta = 2\pi B_0 \left[\frac{R^2}{2} - \frac{R^3}{3a}\right].$

6.5 e) On a $\Phi' = \int_{r=0}^{a}\int_{\theta=0}^{2\pi} B_0\left(1-\frac{r}{a}\right) r\,\mathrm{d}r \times \mathrm{d}\theta = B_0 \int_{r=0}^{a}\int_{\theta=0}^{2\pi} \left(r - \frac{r^2}{a}\right) \mathrm{d}r \times \mathrm{d}\theta = 2\pi B_0 \frac{a^2}{6}.$

6.6 a) L'angle entre la normale à la spire et le champ magnétique $\vec{B}$ étant ωt, le calcul du flux s'écrit :

$$\Phi = \iint_S \vec{B}\cdot\vec{n}\;\mathrm{d}S = \iint_S B\cos(\omega t)\,\mathrm{d}S = B\cos(\omega t)\iint_S \mathrm{d}S = B\pi R^2\cos(\omega t).$$

6.7 d) Le flux propre à travers les N spires sera $\dfrac{\mu_0 N^2 I a}{2\pi}\ln\left(\dfrac{d+a}{d}\right) = LI$.

.....

6.8 b) On a $\dfrac{\mathrm{d}(rE(r))}{\mathrm{d}r} = B_0 r\omega\sin(\omega t)$. Donc, $E = \dfrac{\displaystyle\int_{r'=0}^{r} B_0 r'\omega\sin(\omega t)\,\mathrm{d}r'}{} = B_0\omega\sin(\omega t)\displaystyle\int_{r'=0}^{r} r'\,\mathrm{d}r'$.

.....

6.9 b) Chaque terme de l'équation doit avoir même dimension. Or $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ a pour dimension $\dfrac{\mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-1}}{\mathrm{T}}$, donc $\dfrac{a^2B^2v}{Rm}$ a pour dimension $\mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-2}$. On déduit la dimension de $\dfrac{a^2B^2}{Rm}$ en divisant $\mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-2}$ par la dimension de la vitesse $\mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-1}$. Donc $\dfrac{a^2B^2}{Rm}$ a pour dimension T^{-1}.

.....

6.11 a) On a $e\times i = Ri\times i$ donc $-Bav\times i = Ri^2$ donc $Bavi = -Ri^2$.

.....

6.11 b) On a $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\times v = f\times v + f_\mathrm{L}\times v$ donc $mv\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = f\times v + Bai\times v$ donc $Bavi = mv\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - fv$.

.....

6.11 c) D'après les questions précédentes, on peut égaliser les deux expressions de $Bavi$; on a donc :

$$-Ri^2 = mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - fv \qquad \text{donc} \qquad fv = mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + Ri^2 = \frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} + \mathcal{P}_\mathrm{J} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) + \mathcal{P}_\mathrm{J} = \frac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} + \mathcal{P}_\mathrm{J}.$$

.....

6.12 e) Dans le cas d'un champ uniforme (égal à la même valeur en tout point de l'espace), la résultante des forces de Laplace s'exerçant sur un circuit fermé est nulle.

.....

6.13 a) Le champ magnétique $\vec{B}$ et le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ sont tous deux portés par $\vec{e_x}$. Le produit vectoriel $\overrightarrow{\mathrm{QR}}\wedge\vec{B}$ étant nul, on a $\vec{F_\mathrm{L}} = \vec{0}$.

.....

6.13 b) Le courant étant uniforme, la force de Laplace s'écrit : $\vec{F_\mathrm{L}} = i\overrightarrow{\mathrm{RS}}\wedge\vec{B}$. On a :

$$\overrightarrow{\mathrm{RS}} = a\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\vec{e_y} + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\vec{e_z}\right) = \frac{a}{2}\left(\vec{e_y} + \sqrt{3}\vec{e_z}\right) \qquad \text{donc} \qquad \vec{F_\mathrm{L}} = i\frac{a}{2}\left(\vec{e_y} + \sqrt{3}\vec{e_z}\right)\wedge\left(B\vec{e_y}\right) = -i\frac{\sqrt{3}}{2}aB\vec{e_z}.$$

.....

6.13 c) Le courant étant uniforme, la force de Laplace s'écrit : $\vec{F_\mathrm{L}} = i\overrightarrow{\mathrm{SQ}}\wedge\vec{B}$. On a :

$$\overrightarrow{\mathrm{SQ}} = a\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\vec{e_y} - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\vec{e_z}\right) = \frac{a}{2}\left(\vec{e_y} + \sqrt{3}\vec{e_z}\right) \qquad \text{donc} \qquad \vec{F_\mathrm{L}} = i\frac{a}{2}\left(\vec{e_y} - \sqrt{3}\vec{e_z}\right)\wedge\left(B\vec{e_y}\right) = i\frac{\sqrt{3}}{2}aB\vec{e_x}.$$

.....

6.14 a) D'après la règle de la main droite, le sens de circulation du courant d'intensité I impose que $\vec{\mathcal{S}} = S\vec{e_y}$.

.....

6.14 b) D'après l'expression du couple des forces de Laplace, on a $\vec{\Gamma}_\mathrm{L} = \vec{\mathcal{M}}\wedge\vec{B_1} = IS\vec{e_y}\wedge B\vec{e_x} = -IBS\vec{e_z}$.

.....

6.14 c) D'après l'expression du couple des forces de Laplace, on a $\vec{\Gamma}_\mathrm{L} = \vec{\mathcal{M}}\wedge\vec{B_1} = IS\vec{e_y}\wedge B\vec{e_y} = \vec{0}$.

.....

6.14 d) D'après l'expression du couple des forces de Laplace, on a $\vec{\Gamma}_\mathrm{L} = \vec{\mathcal{M}}\wedge\vec{B_1} = IS\vec{e_y}\wedge B\vec{e_z} = IBS\vec{e_x}$.

.....

6.14 e) Le couple des forces de Laplace produit par $\overrightarrow{B_3}$ est orienté selon les $x > 0$, d'après la règle de la main droite, la spire va donc tourner autour de l'axe (Ox) dans le sens direct.

.....

6.14 f) Aucun couple calculé plus tôt n'est orienté selon $\vec{e_y}$, il n'y a donc pas de champ magnétique qui provoque une rotation de la spire autour de l'axe (Oy).

.....

6.14 g) Le couple des forces de Laplace produit par $\overrightarrow{B_1}$ est orienté selon les $z < 0$, d'après la règle de la main droite, la spire va donc tourner autour de l'axe (Oz) dans le sens indirect. Il n'y a donc pas de champ magnétique qui provoque une rotation de la spire autour de l'axe (Oz) dans le sens direct.

.....

6.15 a) L'équation électrique permet d'établir que $i(t) = \dfrac{B\ell v}{R}$. En injectant cette relation dans l'équation mécanique, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{B^2\ell^2}{mR}v = 0.$$

.....

6.15 b) La résolution de l'équation différentielle sur v donne $v(t) = A\exp\left(-\dfrac{B^2\ell^2}{mR}t\right)$. À l'instant $t = 0$, on a $v(t=0) = v_0$, donc $A\exp(0) = v_0$ et donc $A = v_0$. Ainsi, on a $v(t) = v_0\exp\left(-\dfrac{B^2\ell^2}{mR}t\right)$.

.....

6.16 a) On isole $i(t)$ dans l'équation électrique pour obtenir $i = \dfrac{B\ell v(t)}{r} + \dfrac{E}{r}$. En injectant ce résultat dans l'équation mécanique, on obtient :

$$m\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{B^2\ell^2}{r}v(t) - \frac{B\ell E}{r} \qquad \text{donc} \qquad \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{B^2\ell^2}{mr}v(t) = -\frac{B\ell E}{mr}.$$

.....

6.16 b) La vitesse limite $v_{\lim}$ correspond à la vitesse atteinte en régime permanent, soit quand $\dfrac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = 0$.

On a donc $\dfrac{B^2\ell^2}{r}v_{\lim} = -\dfrac{B\ell E}{r}$. On en déduit $v_{\lim} = -\dfrac{E}{B\ell}$.

.....

6.17 a) À partir de l'équation électrique, on a $v = \dfrac{1}{B\ell}\left(L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + ri(t)\right)$, qu'on injecte dans l'équation mécanique.

On obtient $\dfrac{m}{B\ell}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + ri\right) = -B\ell i$, et ainsi $\dfrac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{r}{L}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{B^2\ell^2}{mL}i = 0$.

.....

6.17 c) On calcule son discriminant $\Delta = \dfrac{r^2}{L^2} - 4\dfrac{B^2\ell^2}{mL} = \dfrac{1}{0{,}25} - 4\times\dfrac{1\times10^{-2}}{0{,}01\times0{,}5} = 4 - 4\times2 = -4$.

.....

6.17 d) Le discriminant étant négatif, les racines complexes sont :

$$\rho_{1/2} = -\frac{r}{2L} \pm \mathrm{j}\frac{1}{2}\sqrt{4\frac{B^2\ell^2}{mL} - \frac{r^2}{L^2}} = -\frac{r}{2L} \pm \mathrm{j}\omega,$$

avec $\omega = \dfrac{1}{2}\sqrt{4\dfrac{B^2\ell^2}{mL} - \dfrac{r^2}{L^2}}$. On obtient $i(t) = \mathrm{e}^{-\frac{r}{2L}t}(\alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t))$.

.....

6.18 a) Avec la règle de la main droite, en utilisant l'orientation du contour, on oriente la surface pour le calcul du flux (suivant $-\vec{e_z}$). La source de tension induite de fém e a une polarité (sa flèche tension) dans le même sens que l'orientation du contour.

.....

6.18 b) D'après la loi des mailles, on a $E + e = u + Ri$, donc $E - Ba\dot{x} = u + Ri$, et donc $u = E - Ba\dot{x} - Ri$.

.....

6.18 c) D'après la question précédente, $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E - Ba\dot{x} - Ri) = -Ba\ddot{x} - R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$. Comme $\ddot{x} = \dfrac{Ba}{m}i$, on a :

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\frac{(Ba)^2}{m}i - R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}.$$

.....

6.18 d) Le dipôle 1 est un fil, sa tension u est donc nulle, ainsi $-\dfrac{(Ba)^2}{m}i - R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$, ou $R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{(Ba)^2}{m}i = 0$.

.....

6.18 e) Le dipôle 2 est un condensateur traversé par un courant d'intensité $i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$, soit $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \dfrac{i}{C}$. D'où :

$$\frac{i}{C} = -\frac{(Ba)^2}{m}i - R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \qquad \text{et donc} \qquad R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{(Ba)^2}{m} + \frac{1}{C}\right)i = 0.$$

.....

6.18 f) Le dipôle 4 est une association série d'une bobine et d'un condensateur. La tension à ses bornes est donc $u = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + u_C$, avec u_C la tension aux bornes du condensateur. Donc $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = L\dfrac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = L\dfrac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{i}{C}$. D'où :

$$L\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{i}{C} = -\frac{(Ba)^2}{m}i - R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \qquad \text{et donc} \qquad L\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{(Ba)^2}{m} + \frac{1}{C}\right)i = 0.$$

.....

6.19 a) L'argument $-\dfrac{t}{\tau}$ de l'exponentielle doit être sans dimension. Donc τ a la même dimension que t, soit T.

.....

6.20 b) Chaque terme de l'équation doit avoir même dimension.

On pouvait aussi exploiter le fait que $\left[\dfrac{R}{L}\right] = \mathrm{T}^{-1}$ *et* $[g] = \mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-2}$.

.....

6.21 b) On a $\overrightarrow{F_\mathrm{L}} = \displaystyle\int_{\theta=0}^{2\pi N} iR\,\mathrm{d}\theta\overrightarrow{e_\theta} \wedge (B\overrightarrow{e_r}) = -iRB\int_{\theta=0}^{2\pi N} d\theta\overrightarrow{e_z} = -iB2\pi RN\overrightarrow{e_z}$.

.....

6.22 a) La flèche de tension de la fém e induite est orientée dans le même sens que le courant induit i_ind, soit horaire, donc elle est orientée dans le même sens que E.

.....

6.22 b) D'après la règle de la main droite, le vecteur surface du circuit $\vec{S}$ est orienté selon $-\overrightarrow{e_z}$; comme S est positif, il vient que $\vec{S} = -S\overrightarrow{e_z}$.

.....

6.22 c) Le flux magnétique traversant le circuit est tel que $\phi = \vec{B}\cdot\vec{S} = B\dfrac{t}{\tau}\overrightarrow{e_z}\cdot(-S\overrightarrow{e_z}) = -B\dfrac{t}{\tau}S$.

.....

6.22 d) La fém apparaissant dans le circuit est telle que $e = -\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{\tau}\dfrac{\mathrm{d}(-BtS)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{BS}{\tau}$.

.....

6.22 e) D'après la loi des mailles, $u = E + e = E + \dfrac{BS}{\tau}$. D'où :

$$u = 2{,}00\times10^{-3}\,\mathrm{V} + \frac{2\,\mathrm{T}}{1\,\mathrm{s}}\times500\times10^{-4}\,\mathrm{m}^2 = 300\,\mathrm{mV}.$$

.....

6.22 f) La flèche de tension de la fém e induite est orientée dans le même sens que le courant induit i_{ind}, soit anti-horaire, donc elle est orientée dans le sens opposé à E.

.....

6.22 g) D'après la règle de la main droite, le vecteur surface du circuit $\vec{S}$ est orienté selon $\vec{e_z}$; comme S est positif, il vient que $\vec{S} = S\vec{e_z}$.

.....

6.22 h) Le flux magnétique traversant le circuit est tel que $\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B\dfrac{t}{\tau}\vec{e_z} \cdot S\vec{e_z} = \dfrac{BSt}{\tau}$.

.....

6.22 i) La fém apparaissant dans le circuit est telle que $e = -\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{\tau}\dfrac{\mathrm{d}(BtS)}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{BS}{\tau}$.

.....

6.22 j) D'après la loi des mailles, $u = E - e = E + \dfrac{BS}{\tau}$. D'où :

$$u = 2{,}00 \times 10^{-3}\,\mathrm{V} + \frac{2\,\mathrm{T}}{1\,\mathrm{s}} \times 500 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}^2 = 300\,\mathrm{mV}.$$

.....

6.23 a) On a $E \times i + e \times i = Ri \times i$ donc $Ei - Bav \times i = Ri^2$ et donc $Bavi = Ei - Ri^2$.

.....

6.23 b) On a $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \times v = f_{\mathrm{L}} \times v - kx \times v - \alpha v \times v$ donc $mv\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = Bai \times v - kxv - \alpha v^2$. Finalement, on a :

$$Bavi = mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + kxv + \alpha v^2.$$

.....

6.23 c) D'après les questions précédentes, on peut égaliser les deux expressions de $Bavi$.

On a donc $Ei - Ri^2 = mv\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + kxv + \alpha v^2$ et donc :

$$Ei = mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + kxv + \alpha v^2 + Ri^2 = \frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2}k\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t} + \mathcal{P}_{\mathrm{f}} + \mathcal{P}_{\mathrm{J}} = \frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) + \mathcal{P}_{\mathrm{f}} + \mathcal{P}_{\mathrm{J}} = \frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}t} + \mathcal{P}_{\mathrm{f}} + \mathcal{P}_{\mathrm{J}}.$$

.....

Fiche n° 7. Ondes électromagnétiques I

Réponses

7.1 a) $\boxed{3 \times 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}}$

7.1 b) $\boxed{5 \times 10^{14}\,\mathrm{Hz}}$

7.1 c) $\boxed{1 \times 10^{-1}\,\mathrm{m}}$

7.1 d) $\boxed{1 \times 10^{-20}\,\mathrm{s}}$

7.2 a) $\boxed{\dfrac{E_0^2 S}{2\mu_0 c}}$

7.2 b) $\boxed{1 \times 10^{-5}\,\mathrm{W}}$

7.2 c) $\boxed{\text{Ampoule classique}}$

7.3 a) $\boxed{B_0 = \sqrt{\dfrac{2\mu_0 \langle P \rangle}{cS}}}$

7.3 b) $\boxed{\text{b}}$

7.4 a) $\boxed{-\omega E_0 \sin(\omega t - kx)\vec{e_z}}$

7.4 b) $\boxed{kE_0 \sin(\omega t - kx)\vec{e_z}}$

7.4 c) $\boxed{\vec{0}}$

7.4 d) $\boxed{-k^2 E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{e_z}}$

7.4 e) $\boxed{-\omega^2 E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{e_z}}$

7.5 a) $\boxed{-\omega B_0 \sin\left(\dfrac{\pi y}{a}\right) \sin(\omega t - kx)\vec{e_z}}$

7.5 b) $\boxed{kB_0 \sin\left(\dfrac{\pi y}{a}\right) \sin(\omega t - kx)\vec{e_z}}$

7.5 c) $\boxed{\dfrac{\pi}{a} B_0 \cos\left(\dfrac{\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kx)\vec{e_z}}$

7.5 d) $\boxed{-\omega^2 B_0 \sin\left(\dfrac{\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kx)\vec{e_z}}$

7.5 e) $\boxed{-k^2 B_0 \sin\left(\dfrac{\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kx)\vec{e_z}}$

7.5 f) $\boxed{-\left(\dfrac{\pi}{a}\right)^2 B_0 \sin\left(\dfrac{\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kx)\vec{e_z}}$

7.6 a) $\boxed{0}$

7.6 b) $\boxed{-kE_0 \sin(\omega t - kx)\vec{e_y}}$

7.6 c) $\boxed{k^2 E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{e_z}}$

7.7 a) $\boxed{A_0 \sin\left(\dfrac{\pi y}{a}\right)\left(-\dfrac{\pi}{a}\cos(\omega t - kz) + k\alpha \sin(\omega t - kz)\right)}$

7.7 b) $\boxed{A_0 \cos\left(\dfrac{\pi y}{a}\right)\left(\dfrac{\pi}{a}\alpha \cos(\omega t - kz) - k \sin(\omega t - kz)\right)\vec{e_x}}$

7.7 c) $\boxed{-A_0 \cos(\omega t - kz)\left(\left(\dfrac{\pi}{a}\right)^2 + k^2\right) \times \left(\cos\left(\dfrac{\pi y}{a}\right) + \alpha \sin\left(\dfrac{\pi y}{a}\right)\right)\vec{e_x}}$

7.8 a) $\boxed{\text{c}}$

7.8 b) $\boxed{-\vec{\Delta}\vec{E}}$

7.8 c) $\boxed{c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}}$

7.9 a) $\boxed{\text{signal n° 1}}$

7.9 b) $\boxed{\text{signal n° 2}}$

7.9 c) $\boxed{\text{signal n° 3}}$

7.10 a) $\boxed{\text{Progressive}}$

7.10 b) $\boxed{\text{Stationnaire, donc non progressive et harmonique}}$

7.10 c) $\boxed{\text{Progressive et harmonique}}$

7.11 $\boxed{\text{a}}$

7.12 a) $\boxed{-(\alpha^2 + k^2)\vec{E}}$

7.12 b) $\boxed{-\omega^2 \vec{E}}$

7.12 c) $\boxed{k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2}$

7.12 d) $\boxed{\text{oui}}$

7.13 a) $\boxed{\dfrac{ak}{r} \sin(\omega t - kr)\vec{e_\varphi}}$

7.13 b) ..... $\boxed{\dfrac{ak}{\omega r}\cos(\omega t - kr)\vec{e_\varphi}}$

7.13 c) ..... $\boxed{\text{(a), (c) et (e)}}$

7.14 a) ..... $\boxed{z = ct - (2p+1)\dfrac{\lambda}{4}}$

7.14 b) ..... $\boxed{x = qa}$

7.15 a) ..... $\boxed{\mathrm{j}\omega\underline{\vec{E}}}$

7.15 b) ..... $\boxed{-\mathrm{j}k_x\underline{E}_x}$

7.15 c) ..... $\boxed{-\mathrm{j}k_z\underline{E}_x\vec{e_y} + \mathrm{j}k_y\underline{E}_x\vec{e_z}}$

7.15 d) ..... $\boxed{-k^2\underline{\vec{E}}}$

7.15 e) ..... $\boxed{\text{(d)}}$

7.15 f) ..... $\boxed{\text{(a)}}$

7.15 g) ..... $\boxed{\text{(c)}}$

7.15 h) ..... $\boxed{\text{(b)}}$

7.16 a) ..... $\boxed{v_\varphi = \dfrac{c}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}}$

7.16 b) ..... $\boxed{v_\mathrm{g} = c\sqrt{1 - \left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$

7.17 a) ..... $\boxed{\varepsilon_0 c E_0^2 \cos^2(\omega t - ky)\vec{e_y}}$

7.17 b) ..... $\boxed{\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - ky)}$

7.18 a) ..... $\boxed{\dfrac{\varepsilon_0 c a^2}{r^2}\cos^2(\omega t - kr)\vec{e_r}}$

7.18 b) ..... $\boxed{\dfrac{\varepsilon_0 a^2}{r^2}\cos^2(\omega t - kr)}$

7.18 c) ..... $\boxed{4\pi\varepsilon_0 c a^2 \cos^2(\omega t - kr)}$

7.19 a) ..... $\boxed{\dfrac{E_0}{\omega}\left[-k\sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - kz)\vec{e_x} - \dfrac{\pi}{a}\cos\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\sin(\omega t - kz)\vec{e_z}\right]}$

7.19 b) ..... $\boxed{\dfrac{E_0^2}{\mu_0}\sin\left(\tfrac{\pi x}{a}\right)\left[\dfrac{1}{c}\sin\left(\tfrac{\pi x}{a}\right)\cos^2(\omega t - kz)\vec{e_z} - \dfrac{\pi}{a\omega}\cos\left(\tfrac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - kz)\sin(\omega t - kz)\vec{e_x}\right]}$

7.19 c) ..... $\boxed{\dfrac{\varepsilon_0 c E_0^2}{2}\sin^2\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\vec{e_z}}$

7.20 a) ..... $\boxed{\text{(a)}}$

7.20 b) ..... $\boxed{\text{(f)}}$

7.20 c) ..... $\boxed{\text{(c)}}$

7.20 d) ..... $\boxed{\text{(d)}}$

7.20 e) ..... $\boxed{\text{(c)}}$

7.20 f) ..... $\boxed{\text{(a)}}$

7.20 g) ..... $\boxed{\text{(b)}}$

7.20 h) ..... $\boxed{\text{(d)}}$

Corrigés

7.2 a) La puissance rayonnée par le laser a alors pour expression $P = \iint \vec{\Pi}\cdot\vec{dS} = \Pi S$. Le vecteur de Poynting vaut

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = -\frac{E_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t - kx)\vec{e_z}\wedge\vec{e_y} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t - kx)\vec{e_x}.$$

En moyenne, puisque $\langle\cos^2\rangle = \dfrac{1}{2}$, on a alors : $\langle P\rangle = \dfrac{E_0^2 S}{2\mu_0 c}$.

.....

7.2 b) Numériquement, on a $\langle P\rangle = \dfrac{1\times10^2\,\mathrm{V^2\cdot m^{-1}}\cdot 1\times10^{-6}\,\mathrm{mm^2}}{2(4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{H\cdot m^{-1}})(3\times10^8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})} = \dfrac{10^{-4}}{750}\mathrm{W} = 1\times10^{-5}\,\mathrm{W}.$

.....

7.2 c) Contrairement à ce que l'on pourrait penser, c'est l'ampoule classique à filament qui est la plus puissante.

.....

7.3 a) La puissance moyenne de l'onde s'exprime en fonction de la norme de B_0 :

$$\langle P\rangle = \frac{E_0^2 S}{2\mu_0 c} = \frac{cB_0^2 S}{2\mu_0} \qquad \text{donc} \qquad B_0 = \sqrt{\frac{2\mu_0\langle P\rangle}{cS}}.$$

.....

7.3 b) Numériquement, on a $B_0 = \sqrt{\dfrac{2(4\pi\times 10^{-7}\,\mathrm{H\cdot m^{-1}})(1\,\mathrm{W})}{1\,\mathrm{m^2}\cdot 3\times 10^8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}} = 1\times 10^{-8}\,\mathrm{T}$. Le champ terrestre est plus intense que le champ de l'onde radiofréquence.

.....

7.6 a) L'unique composante de $\vec{E}$, ici suivant $\vec{e_z}$, ne dépend pas de z, donc :

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 + 0 + 0 = 0.$$

.....

7.6 b) On a $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = \left(\dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{e_x} + \left(\dfrac{\partial E_x}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial x}\right)\vec{e_y} + \left(\dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{e_z}$, ce qui donne :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = (0-0)\vec{e_x} + \left(0 - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\vec{e_y} + (0-0)\vec{e_z} = -kE_0\sin(\omega t - kx)\vec{e_y}.$$

.....

7.6 c) On a $\vec{\Delta}\vec{E} = \Delta E_x\vec{e_x} + \Delta E_y\vec{e_y} + \Delta E_z\vec{e_z}$. Ici, comme $E_y = E_x = 0$, il reste donc :

$$\vec{\Delta}\vec{E} = \Delta E_z\vec{e_z} = \left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}\right)\vec{e_z} = \left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + 0 + 0\right)\vec{e_z}.$$

Enfin, comme on a $\dfrac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = (-k)^2 E_0\cos(\omega t - kx) = k^2 E_0\cos(\omega t - kx)$, on a $\vec{\Delta}\vec{E} = k^2 E_0\cos(\omega t - kx)\vec{e_z} = k^2\vec{E}$.

.....

7.7 a) On a :

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = -\frac{\pi}{a}A_0\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kz) + k\alpha A_0\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\sin(\omega t - kz)\\ &= A_0\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\left(-\frac{\pi}{a}\cos(\omega t - kz) + k\alpha\sin(\omega t - kz)\right).\end{aligned}$$

.....

7.7 b) On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A} &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e_x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{e_y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{e_z}\\ &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e_x} + (0-0)\vec{e_y} + (0-0)\vec{e_z} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e_x}.\end{aligned}$$

En calculant les dérivées partielles, on trouve :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A} &= \left(\frac{\pi}{a}\alpha A_0\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kz) + kA_0\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\sin(\omega t - kz)\right)\vec{e_x}\\ &= A_0\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\left(\frac{\pi}{a}\alpha\cos(\omega t - kz) + k\sin(\omega t - kz)\right)\vec{e_x}.\end{aligned}$$

.....

7.7 c) On a $\vec{\Delta}\vec{A} = \Delta A_x\vec{e_x} + \Delta A_y\vec{e_y} + \Delta A_z\vec{e_z}$. Ici, $A_x = 0$, il reste donc :

$$\vec{\Delta}\vec{A} = \Delta A_y\vec{e_y} + \Delta A_z\vec{e_z} = \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}\right)\vec{e_y} + \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right)\vec{e_z}$$
$$= \left(0 + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}\right)\vec{e_y} + \left(0 + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right)\vec{e_z} = \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}\right)\vec{e_y} + \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right)\vec{e_z}.$$

En calculant les dérivées partielles,

$$\frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} = -\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 A_0 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kz) - k^2 A_0 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kz)$$
$$= -\left(\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + k^2\right) A_0 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kz)$$
$$\text{et} \quad \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} = -\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \alpha A_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kz) - k^2 \alpha A_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kz)$$
$$= -\left(\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + k^2\right)\alpha A_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kz),$$

on obtient $\vec{\Delta}\vec{A} = -A_0\cos(\omega t - kz)\left(\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + k^2\right)\left(\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) + \alpha\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\right)\vec{e_x}$.

.....

7.8 a) L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$. En lui appliquant le rotationnel, on obtient :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2},$$

où l'on a utilisé l'équation de Maxwell-Ampère dans le vide. Ainsi, $\alpha = -\mu_0\varepsilon_0$.

.....

7.8 b) Grâce à la formule du double rotationnel, on obtient : $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\,\vec{E}) - \vec{\Delta}\vec{E}$. Or, d'après l'équation de Maxwell-Gauss dans le vide, on a $\text{div}\,\vec{E} = 0$. Donc, $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}) = -\vec{\Delta}\vec{E}$.

.....

7.8 c) Les deux formules obtenues précédemment donnent :

$$-\vec{\Delta}\vec{E} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{soit} \quad \vec{\Delta}\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{c^2} = \mu_0\varepsilon_0 \quad \text{d'où} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}.$$

.....

7.12 a) Le champ électrique n'a qu'une composante selon $\vec{e_y}$, qui dépend de x et de z.

Ainsi, le laplacien vectoriel s'écrit :

$$\vec{\Delta}\vec{E} = \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}\vec{e_y} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}\vec{e_y} = E_0\cos(\alpha z)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(\sin(\omega t - kx))\vec{e_y} + E_0\sin(\omega t - kx)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}(\cos(\alpha z))\vec{e_y},$$

avec $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(\sin(\omega t - kx)) = -k^2\sin(\omega t - kx)$ et $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}(\cos(\alpha z)) = -\alpha^2\cos(\alpha z)$. Ainsi, $\Delta\vec{E} = (-k^2 - \alpha^2)\vec{E} = -(k^2 + \alpha^2)\vec{E}$.

.....

7.12 b) On a : $\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = E_0\cos(\alpha z)\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}(\sin(\omega t - kx))\vec{e_y} = -\omega^2 E_0\cos(\alpha z)\sin(\omega t - kx)\vec{e_y} = -\omega^2\vec{E}$.

.....

7.12 c) On utilise l'équation de d'Alembert avec les deux termes calculés précédemment, on obtient :

$$-(\alpha^2 + k^2)\vec{E} = -\frac{\omega^2}{c^2}\vec{E} \quad \text{soit} \quad \alpha^2 + k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad \text{d'où} \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2.$$

.....

7.12 d) La relation de dispersion précédente se réécrit : $\dfrac{\omega^2}{k^2} = \dfrac{\omega^2 c^2}{\omega^2 - c^2\alpha^2}$; d'où $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k} = c\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{c\alpha}{\omega}\right)^2}}$.

La vitesse de phase v_φ dépend ici de la pulsation ω : il y a donc dispersion.

.....

7.13 a) On a $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(rE_\theta)}{\partial r}\overrightarrow{e_\varphi} = \dfrac{a}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\cos(\omega t - kr)\overrightarrow{e_\varphi} = \dfrac{a}{r}k\sin(\omega t - kr)\overrightarrow{e_\varphi}$.

.....

7.13 b) Avec Maxwell-Faraday, on a $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = \dfrac{a}{r}k\sin(\omega t - kr)\overrightarrow{e_\varphi} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$. Donc, $\vec{B} = \dfrac{ak}{\omega r}\cos(\omega t - kr)\overrightarrow{e_\varphi}$.

.....

7.13 c) Les vecteurs $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ sont respectivement colinéaires aux vecteurs $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$ donc le champ est transverse électromagnétique et forme un trièdre direct.

.....

7.14 a) Pour que $\cos(\omega t - kz) = 0$, il faut que $\omega t - kz = (2p+1)\dfrac{\pi}{2}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et donc que $z = \dfrac{\omega}{k}t - (2p+1)\dfrac{\pi}{2k}$. Or, dans le vide, $k = \dfrac{\omega}{c} = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ d'où $z = ct - (2p+1)\dfrac{\lambda}{4}$. La structure est analogue à une onde progressive selon z.

.....

7.14 b) Pour que $\sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right) = 0$, il faut que $\dfrac{\pi x}{a} = q\pi$, avec $q \in \mathbb{Z}$, et donc que $x = qa$. Ces plans sont indépendants du temps comme une onde stationnaire selon x.

.....

7.15 a) On a $\dfrac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t} = \mathrm{j}\omega\underline{\vec{E}}$.

.....

7.15 b) La seule composante non nulle de $\vec{E}$ est la composante E_x sur l'axe x. On a donc :

$$\text{div}\,\underline{\vec{E}} = \frac{\partial\underline{E}_0\exp[\mathrm{j}(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)]}{\partial x} = -\mathrm{j}k_x\underline{E}_x.$$

.....

7.15 c) Seule la composante E_x de $\vec{E}$ est non nulle. Donc, $\overrightarrow{\text{rot}}\,\underline{\vec{E}} = -\mathrm{j}k_z\underline{E}_x\overrightarrow{e_y} + \mathrm{j}k_y\underline{E}_x\overrightarrow{e_z}$.

.....

7.15 d) La seule composante non nulle de $\vec{E}$ est la composante E_x sur l'axe x. Donc,

$$\begin{aligned}\Delta\underline{\vec{E}} &= \Delta(\exp[-\mathrm{j}(k_x x + k_y y + k_z z)])\,\underline{E}_0\exp(\mathrm{j}\omega t)\overrightarrow{e_x}\\ &= \left[(-\mathrm{j}k_x)^2 + (-\mathrm{j}k_y)^2 + (-\mathrm{j}k_z)^2\right]\exp[-\mathrm{j}(k_x x + k_y y + k_z z)]\,\underline{E}_0\exp(\mathrm{j}\omega t)\overrightarrow{e_x} = -k^2\underline{\vec{E}}.\end{aligned}$$

.....

7.15 e) On a $\dfrac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t} = \mathrm{j}\omega\underline{\vec{E}}$.

.....

7.15 f) On a $\text{div}\,\underline{\vec{E}} = -\mathrm{j}\vec{k}\cdot\underline{\vec{E}}$.

.....

7.15 g) On a $\overrightarrow{\text{rot}}\,\underline{\vec{E}} = -\mathrm{j}\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}$.

.....

7.15 h) On a $\vec{\Delta}\,\underline{\vec{E}} = -k^2\underline{\vec{E}}$.

.....

7.16 a) On divise la relation de dispersion par ω^2 : on obtient $\dfrac{k^2}{\omega^2} = \dfrac{1-\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}{c^2}$ donc $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{c}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$.

.....

7.16 b) On différentie la relation de dispersion donnée : on a $\mathrm{d}(k^2) = \mathrm{d}\left(\dfrac{\omega^2-\omega_0^2}{c^2}\right)$, donc $2k\,\mathrm{d}k = \dfrac{2\omega}{c^2}\,\mathrm{d}\omega$, donc $\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = c^2\dfrac{k}{\omega} = \dfrac{c^2}{v_\varphi}$. On en déduit ainsi, grâce à la vitesse de phase trouvée précédemment : $v_\mathrm{g} = c\sqrt{1-\left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}$.

.....

7.17 a) On a $\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \dfrac{E_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t-ky)\vec{e_z}\wedge\vec{e_x} = \varepsilon_0 c E_0^2\cos^2(\omega t-ky)\vec{e_y}$, avec $\mu_0\varepsilon_0 c^2 = 1$.

.....

7.17 b) On a $w_\mathrm{em} = \dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \dfrac{B^2}{2\mu_0} = \dfrac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}\cos^2(\omega t-ky) + \dfrac{E_0^2}{2\mu_0 c^2}\cos^2(\omega t-ky) = \varepsilon_0 E_0^2\cos^2(\omega t-ky)$, avec $\mu_0\varepsilon_0 c^2 = 1$.

.....

7.18 a) On a $\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \dfrac{a^2}{\mu_0 c r^2}\cos^2(\omega t-kr)\vec{e_\theta}\wedge\vec{e_\varphi} = \dfrac{\varepsilon_0 c a^2}{r^2}\cos^2(\omega t-kr)\vec{e_r}$, avec $\mu_0\varepsilon_0 c^2 = 1$.

.....

7.18 b) On a $w_\mathrm{em} = \dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \dfrac{B^2}{2\mu_0} = \dfrac{\varepsilon_0 a^2}{2r^2}\cos^2(\omega t-kr) + \dfrac{a^2}{2\mu_0 c^2 r^2}\cos^2(\omega t-kr) = \dfrac{\varepsilon_0 a^2}{r^2}\cos^2(\omega t-kr)$, avec $\mu_0\varepsilon_0 c^2 = 1$.

.....

7.18 c) On calcule la puissance rayonnée, avec $\overrightarrow{\mathrm{d}S} = r^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{e_r}$:

$$P = \iint \frac{\varepsilon_0 c a^2}{r^2}\cos^2(\omega t-kr)\,\vec{e}_r\cdot r^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{e_r} = \iint \frac{\varepsilon_0 c a^2}{r^2}\cos^2(\omega t-kr) r^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$
$$= \frac{\varepsilon_0 c a^2}{r^2}\cos^2(\omega t-kr) r^2\iint\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\varepsilon_0 c a^2}{r^2}\cos^2(\omega t-kr) r^2\int_0^\pi\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi.$$

La double intégrale donne 4π, donc l'expression de la puissance est :

$$P = 4\pi\frac{\varepsilon_0 c a^2}{r^2}\cos^2(\omega t-kr) r^2 = 4\pi\varepsilon_0 c a^2\cos^2(\omega t-kr).$$

.....

7.19 a) Avec l'équation de Maxwell-Faraday, on a :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial E_y}{\partial z}\vec{e_x} + \frac{\partial E_y}{\partial x}\vec{e_z} = -kE_0\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin(\omega t-kz)\vec{e_x} + \frac{\pi}{a}E_0\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t-kz)\vec{e_z} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

donc $\vec{B} = -\dfrac{k}{\omega}E_0\sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t-kz)\vec{e_x} - \dfrac{\pi}{a\omega}E_0\cos\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\sin(\omega t-kz)\vec{e_z}$.

.....

7.19 b) On a :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_y\vec{e_y}}{\mu_0}\wedge(B_x\vec{e_x}+B_z\vec{e_z}) = -\frac{E_y B_x}{\mu_0}\vec{e_z} + \frac{E_y B_z}{\mu_0}\vec{e_x}$$
$$= \frac{E_0^2}{\mu_0}\left[\frac{1}{c}\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos^2(\omega t-kz)\vec{e_z} - \frac{\pi}{a\omega}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t-kz)\sin(\omega t-kz)\vec{e_x}\right]$$
$$= \frac{E_0^2}{\mu_0}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\left[\frac{1}{c}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos^2(\omega t-kz)\vec{e_z} - \frac{\pi}{a\omega}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t-kz)\sin(\omega t-kz)\vec{e_x}\right].$$

.....

7.19 c) On a $\langle\vec{\Pi}\rangle = \dfrac{E_0^2}{2\mu_0 c}\sin^2\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\vec{e_z} = \dfrac{\varepsilon_0 c E_0^2}{2}\sin^2\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\vec{e_z}$ avec $\mu_0\varepsilon_0 c^2 = 1$.

.....

7.20 a) L'onde associée à $\overrightarrow{E_1}$ est rectiligne et se propage selon $+z$.

.....

7.20 b) L'onde associée à $\overrightarrow{E_2}$ est circulaire droite et se propage selon $-z$.

.....

7.20 c) L'onde associée à $\overrightarrow{E_3}$ est circulaire gauche et se propage selon $+z$.

.....

7.20 d) L'onde associée à $\overrightarrow{E_4}$ est circulaire gauche et se propage selon $-z$.

.....

7.20 e) On a $\overrightarrow{E_1}\left(t=\frac{T}{3},z=0\right)=\begin{cases}E_0\cos\alpha\cos\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{3}\right)\overrightarrow{e_x}\\E_0\sin\alpha\cos\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{3}\right)\overrightarrow{e_y}\end{cases}=E_0\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\begin{cases}\cos\alpha\overrightarrow{e_x}\\\sin\alpha\overrightarrow{e_y}\end{cases}=-\frac{E_0}{2}\begin{cases}\cos\alpha\overrightarrow{e_x}\\\sin\alpha\overrightarrow{e_y}.\end{cases}$

Le vecteur est opposé au cas initial donc d'angle $\alpha+\pi$ et la norme est réduite de moitié, d'où le cas (c).

.....

7.20 f) On a $\overrightarrow{E_2}\left(t=\frac{T}{2},z=0\right)=\begin{cases}E_0\cos\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}+\alpha\right)\overrightarrow{e_x}\\E_0\sin\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}+\alpha\right)\overrightarrow{e_y}\end{cases}=\begin{cases}E_0\cos(\pi+\alpha)\overrightarrow{e_x}\\E_0\sin(\pi+\alpha)\overrightarrow{e_y}\end{cases}=\begin{cases}-E_0\cos(\alpha)\overrightarrow{e_x}\\-E_0\sin(\alpha)\overrightarrow{e_y}.\end{cases}$

Le vecteur est opposé au cas initial donc d'angle $\alpha+\pi$, d'où le cas (a).

.....

7.20 g) On a :

$$\begin{aligned}\underline{\overrightarrow{E_3}}\left(t=\frac{T}{4},z=0\right)&=E_0\exp\left[\mathrm{j}\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{4}+\alpha\right)\right](\overrightarrow{e_x}-\mathrm{j}\overrightarrow{e_y})=E_0\exp\left(\mathrm{j}\frac{\pi}{2}\right)\exp(\mathrm{j}\alpha)\,(\overrightarrow{e_x}-\mathrm{j}\overrightarrow{e_y})\\&=E_0\,\mathrm{j}\,\exp(\mathrm{j}\alpha)\,(\overrightarrow{e_x}-\mathrm{j}\overrightarrow{e_y})=E_0[\cos(\alpha)+\mathrm{j}\sin(\alpha)]\,(\mathrm{j}\overrightarrow{e_x}+\overrightarrow{e_y})\\&=\begin{cases}-E_0\sin(\alpha)\overrightarrow{e_x}\\E_0\cos(\alpha)\overrightarrow{e_y}.\end{cases}\end{aligned}$$

Le champ est déphasé de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à l'angle initial, d'où le cas (b).

.....

7.20 h) On a $\overrightarrow{E_4}\left(t=\frac{T}{4},z=0\right)=\begin{cases}E_0\cos\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{4}+\alpha\right)\overrightarrow{e_x}\\-E_0\sin\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{4}-\alpha\right)\overrightarrow{e_y}\end{cases}=\begin{cases}E_0\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\overrightarrow{e_x}\\-E_0\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\overrightarrow{e_y}\end{cases}=\begin{cases}-E_0\sin(\alpha)\overrightarrow{e_x}\\-E_0\cos(\alpha)\overrightarrow{e_y}.\end{cases}$

Le vecteur fait un angle α avec le vecteur $-\overrightarrow{e_y}$ et $\frac{\pi}{2}+\alpha$ avec $\overrightarrow{e_x}$, d'où le cas (d).

.....

Fiche n° 8. Ondes électromagnétiques II

Réponses

8.1 a) ..... oui

8.1 b) ..... non

8.1 c) ..... oui

8.2 a) ..... $\underline{k}^2 = \dfrac{\mathrm{i}\omega}{\alpha}$

8.2 b) ..... $\underline{k}^3 = \dfrac{\omega^3}{\alpha} - \dfrac{\beta}{\alpha}\omega$

8.2 c) ..... $\underline{k} = \dfrac{\beta - \omega^2}{\mathrm{i}\alpha}$

8.3 a) ..... $\underline{\rho}\left(\dfrac{\underline{\alpha}}{\varepsilon_0} + \mathrm{i}\,\omega\right)$

8.3 b) ..... $\mathrm{i}\,\omega\,\underline{\rho}\left(1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) = 0$

8.4 a) ..... $\pm\dfrac{1+\mathrm{i}}{\delta}$ avec $\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\mu_0\,\alpha\,\omega}}$

8.4 b) ..... $\pm\mathrm{i}\dfrac{\omega}{c}\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}$

8.4 c) ..... $\pm\dfrac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$

8.4 d) ..... $\pm\dfrac{\omega}{c}$

8.5 a) ..... $v_\varphi = \dfrac{c}{\sqrt{1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$

8.5 b) ..... $v_g = c\sqrt{1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega_p}}$

8.6 a) ..... $\dfrac{nE_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t - kz)\vec{e_z}$

8.6 b) ..... $\dfrac{nE_0^2}{2\mu_0 c}\vec{e_z}$

8.6 c) ..... $\dfrac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}\left(1+n^2\right)\cos^2(\omega t - kz)$

8.6 d) ..... $\dfrac{\varepsilon_0 E_0^2}{4}\left(1+n^2\right)$

8.7 a) ..... $\dfrac{E_0^2}{2\mu_0\omega\delta}\mathrm{e}^{-\frac{2x}{\delta}}\vec{e_x}$

8.7 b) ..... $\dfrac{\gamma E_0^2}{2}\mathrm{e}^{-\frac{2x}{\delta}}$

8.8 ..... $\dfrac{|\underline{E}_0|^2}{2\mu_0 c}\,\mathrm{Re}(\underline{n})\vec{e_z}$

8.9 ..... $k^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$

8.10 a) ..... $\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$

8.10 b) ..... $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\gamma\vec{E} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

8.10 c) ..... $\Delta\vec{E} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0\gamma\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

8.11 a) ..... non

8.11 b) ..... non

8.11 c) ..... non

8.11 d) ..... oui

8.12 a) ..... oui

8.12 b) ..... oui

8.12 c) ..... oui

8.12 d) ..... oui

8.13 a) ..... (c)

8.13 b) ..... (a)

8.13 c) ..... (b)

8.14 a) ..... 1 et 4

8.14 b) ..... 1 et 2

8.14 c) ..... 1 et 3

8.15 a) ..... $\boxed{\begin{cases} r+1 = t \\ n_1 - r n_1 = t n_2 \end{cases}}$

8.15 b) ..... $\boxed{\begin{cases} r = \dfrac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \\ t = \dfrac{2n_1}{n_1 + n_2} \end{cases}}$

8.16 a) ..... $\boxed{2\,\text{m et } 4\,\text{m}}$

8.16 b) ..... $\boxed{\frac{1}{3} \text{ et } \frac{4}{3}}$

8.16 c) ..... $\boxed{\frac{1}{2}}$

8.16 d) ..... $\boxed{\frac{1}{9} \text{ et } \frac{8}{9}}$

8.17 a) ..... $\boxed{\dfrac{|\underline{E}|^2}{2\mu_0\omega}\,\mathsf{Re}\left(\vec{\underline{k}}_1\right)}$

8.17 b) ..... $\boxed{\begin{array}{c} -\dfrac{|\underline{E}|^2|\underline{r}|^2}{2\mu_0\omega}\,\mathsf{Re}\left(\vec{\underline{k}}_1\right) \\ \dfrac{|\underline{E}|^2|\underline{t}|^2}{2\mu_0\omega}\,\mathsf{Re}\left(\vec{\underline{k}}_2\right) \end{array}}$

8.17 c) ..... $\boxed{|\underline{r}|^2 \text{ et } |\underline{t}|^2\,\mathsf{Re}\left(\dfrac{\underline{k}_2}{\underline{k}_1}\right)}$

Corrigés

8.1 a) La première équation indique que $\vec{a}$ et $\vec{b}$ doivent être orthogonaux. Les deux équations suivantes indiquent que $\vec{a}$ et $\vec{c}$ sont orthogonaux et de même pour $\vec{b}$ et $\vec{c}$.

.....

8.1 b) Les trois vecteurs doivent être orthogonaux et le sens de $\vec{c}$ doit respecter la règle de la main droite, ce qui n'est pas le cas ici.

.....

8.1 c) Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ doivent être colinéaires et orthogonaux à $\vec{c}$.

.....

8.2 a) On a $\dfrac{\partial \vec{\underline{E}}}{\partial t} = \mathrm{i}\omega\vec{\underline{E}}$ et $\dfrac{\partial^2 \vec{\underline{E}}}{\partial z^2} = -\underline{k}^2\vec{\underline{E}}$.

.....

8.2 b) On peut écrire $\dfrac{\partial^3 \vec{\underline{E}}}{\partial t^3} = -\mathrm{i}\omega^3\vec{\underline{E}}$ et $\dfrac{\partial^3 \vec{\underline{E}}}{\partial z^3} = -\mathrm{i}\underline{k}^3\vec{\underline{E}}$.

.....

8.2 c) On a $\dfrac{\partial^2 \vec{\underline{E}}}{\partial t^2} = -\omega^2\vec{\underline{E}}$.

.....

8.3 a) En régime sinusoïdal forcé, l'équation de conservation de la charge devient, en tenant compte de la loi d'Ohm locale, $\mathrm{i}\,\omega\underline{\rho} + \underline{\alpha}\,\mathrm{div}\,\vec{\underline{E}} = 0$. Avec l'équation de Maxwell-Gauss, on a $\underline{\rho}\left(\dfrac{\underline{\alpha}}{\varepsilon_0} + \mathrm{i}\,\omega\right)$.

.....

8.3 b) En injectant l'expression de la conductivité complexe, l'équation précédente devient :

$$\underline{\rho}\left(\frac{N\,e^2}{\mathrm{i}\,m\,\omega\,\varepsilon_0} + \mathrm{i}\,\omega\right) = \mathrm{i}\,\omega\,\underline{\rho}\left(1 - \frac{N\,e^2}{m\,\varepsilon_0\,\omega^2}\right) = \mathrm{i}\,\omega\,\underline{\rho}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) = 0.$$

.....

8.4 a) Si $\omega \ll \dfrac{1}{\tau} \ll \omega_p$, alors :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 + \mathrm{i}\frac{\omega_p^2\,\tau^2}{\omega\,\tau\,(1-\mathrm{i}\,\omega\,\tau)}\right] \sim \frac{\omega^2}{c^2}\,\mathrm{i}\,\frac{\omega_p^2\,\tau}{\omega} = \mathrm{i}\,\frac{\omega_p^2\,\tau}{c^2}\,\omega = \mathrm{i}\,\alpha_0\,\mu_0\,\omega.$$

En utilisant $\mathrm{i} = \dfrac{(1+\mathrm{i})^2}{2}$, on en déduit $\underline{k} = \pm\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\sqrt{\alpha_0\,\mu_0\,\omega} = \pm\dfrac{1+\mathrm{i}}{\delta}$.

.....

8.4 b) Si $\dfrac{1}{\tau} \ll \omega < \omega_p$, alors :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 + \mathrm{i}\frac{\omega_p^2\,\tau^2}{\omega\,\tau\,(1-\mathrm{i}\,\omega\,\tau)}\right] \sim \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 + \mathrm{i}\frac{\omega_p^2\,\tau^2}{-\mathrm{i}\,\omega^2\,\tau^2}\right] = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right].$$

Il vient ainsi $\underline{k} = \pm\mathrm{i}\dfrac{\omega}{c}\sqrt{-1 + \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}}$.

.....

8.4 c) Si $\dfrac{1}{\tau} \ll \omega_p < \omega$, alors :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 + \mathrm{i}\frac{\omega_p^2\,\tau^2}{\omega\,\tau\,(1-\mathrm{i}\,\omega\,\tau)}\right] \sim \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 + \mathrm{i}\frac{\omega_p^2\,\tau^2}{-\mathrm{i}\,\omega^2\,\tau^2}\right] = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right] = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}.$$

Il vient ainsi : $\underline{k} = \pm\dfrac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$.

.....

8.4 d) Si $\dfrac{1}{\tau} \ll \omega_p \ll \omega$, alors :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 + \mathrm{i}\frac{\omega_p^2\,\tau^2}{\omega\,\tau\,(1-\mathrm{i}\,\omega\,\tau)}\right] \sim \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 + \mathrm{i}\frac{\omega_p^2\,\tau^2}{-\mathrm{i}\,\omega^2\,\tau^2}\right] \sim \frac{\omega^2}{c^2}.$$

Il vient ainsi : $\underline{k} = \pm\dfrac{\omega}{c}$.

.....

8.5 a) Si $\omega > \omega_p$, alors $\underline{k}^2 > 0$: le nombre d'onde est réel. On a $k'' = 0$ et $k' = \dfrac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$.

Le champ en notation réelle a pour expression $\vec{E} = E_0\,\cos\bigl(\omega\,t - k'\,z\bigr)\,\vec{e_x}$. L'onde est progressive et sa vitesse de phase vaut :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k'} = \frac{c}{\sqrt{1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}}}.$$

.....

8.5 b) La vitesse de groupe est définie par $v_g = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k'}$. En dérivant la relation de dispersion, on obtient :

$$v_g = c^2\,\frac{k'}{\omega} = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}.$$

.....

8.6 a) On a $\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \dfrac{nE_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t - kz)\vec{e_z}$.

.....

8.6 b) On peut écrire $\bigl\langle\vec{\Pi}\bigr\rangle = \dfrac{nE_0^2}{\mu_0 c}\bigl\langle\cos^2(\omega t - kz)\bigr\rangle\vec{e_z} = \dfrac{nE_0^2}{2\mu_0 c}\vec{e_z}$.

.....

8.6 c) On a $w_{EM} = \dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \dfrac{B^2}{2\mu_0} = \left(\dfrac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} + \dfrac{n^2 E_0^2}{2\mu_0 c^2}\right)\cos^2(\omega t - kz) = \dfrac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}\bigl(1 + n^2\bigr)\cos^2(\omega t - kz)$.

.....

8.6 d) On peut écrire $\langle w_{EM}\rangle = \dfrac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}\big(1+n^2\big)\big\langle\cos^2(\omega t - kz)\big\rangle = \dfrac{\varepsilon_0 E_0^2}{4}\big(1+n^2\big)$.

.....

8.7 a) On a :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0\omega\delta}\mathrm{e}^{-\frac{2x}{\delta}}\left[\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\sin\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) + \cos^2\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\right]\vec{e_x}.$$

Donc, on a $\big\langle\vec{\Pi}\big\rangle = \dfrac{E_0^2}{2\mu_0\omega\delta}\mathrm{e}^{-\frac{2x}{\delta}}\vec{e_x}$.

.....

8.7 b) On peut écrire $\langle p_J\rangle = \big\langle\vec{j}\cdot\vec{E}\big\rangle = \big\langle\gamma|\vec{E}|^2\big\rangle = \gamma E_0^2\mathrm{e}^{-\frac{2x}{\delta}}\left\langle\cos^2\left(\omega t - \dfrac{x}{\delta}\right)\right\rangle = \dfrac{\gamma E_0^2}{2}\mathrm{e}^{-\frac{2x}{\delta}}$.

.....

8.8 On a $\big\langle\vec{\Pi}\big\rangle = \dfrac{1}{2\mu_0}\,\mathsf{Re}\left(\underline{E}_0^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-kz)}\vec{e_x}\wedge\dfrac{n\underline{E}_0}{c}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-kz)}\vec{e_y}\right) = \dfrac{1}{2\mu_0 c}\,\mathsf{Re}(|\underline{E}_0|^2\,\underline{n}\vec{e_z}) = \dfrac{|\underline{E}_0|^2}{2\mu_0 c}\,\mathsf{Re}(\underline{n})\vec{e_z}$.

.....

8.9 Le laplacien $\Delta\underline{\vec{E}}$ se réduit ici à $\dfrac{\partial^2\underline{\vec{E}}}{\partial z^2}$. La dérivée partielle de $\underline{\vec{E}}$ par rapport à z vaut $-\underline{k}^2\,\underline{\vec{E}}$. La dérivée partielle de $\underline{\vec{E}}$ par rapport à t vaut $-\omega^2\,\underline{\vec{E}}$. La dérivée partielle $\dfrac{\partial\vec{j}}{\partial t}$ vaut $\mathrm{i}\,\omega\,\underline{\alpha}\,\underline{\vec{E}}$.

Il vient ainsi : $-\underline{k}^2\,\underline{\vec{E}} + \dfrac{1}{c^2}\,\omega^2\,\underline{\vec{E}} = \mathrm{i}\,\omega\,\underline{\alpha}\,\mu_0\,\underline{\vec{E}} = \dfrac{n\,e^2}{m}\,\underline{\alpha}\,\mu_0\,\underline{\vec{E}}$. En posant $\omega_p^2 = \dfrac{n\,e^2}{m}\,\underline{\alpha}\,\mu_0\,c^2 = \dfrac{n\,e^2}{m}\,\underline{\alpha}\,\dfrac{1}{\varepsilon_0}$ et avec $\underline{\vec{E}}$ non nul, on obtient :

$$k^2 = \frac{\omega^2-\omega_p^2}{c^2}.$$

.....

8.10 a) Les équations de Maxwell s'écrivent $\operatorname{div}\vec{E} = 0$ et $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\gamma\vec{E} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$.

.....

8.10 c) On exprime le rotationnel $\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E}) = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div}\vec{E}) - \Delta\vec{E} = -\Delta\vec{E}$. On peut alors écrire :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E}) = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\gamma\vec{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right).$$

Donc, $\Delta\vec{E} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0\gamma\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$.

.....

8.11 a) On a $\operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{\partial E}{\partial z} \neq 0$.

.....

8.11 b) On a $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = \vec{0} \neq -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$.

.....

8.11 c) On peut écrire $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = -\dfrac{\omega E_0}{c^2}\cos(\omega t - kz)\vec{e_y}$ et $\mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \dfrac{\omega E_0}{c^2}\cos(\omega t - kz)\vec{e_z}$.

.....

8.11 d) On a $\operatorname{div}\vec{B} = \dfrac{\partial B}{\partial x} = 0$.

.....

8.12 a) On a $\operatorname{div}\underline{\vec{E}} = \dfrac{\partial\underline{E}}{\partial x} = 0$.

.....

8.12 b) On peut écrire $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\underline{\vec{E}} = -kE_0\exp[\mathrm{i}(\omega t - kz)]\vec{e_y}$ et $-\dfrac{\partial\underline{\vec{B}}}{\partial t} = -kE_0\exp[\mathrm{i}(\omega t - kz)]\vec{e_y}$.

.....

8.12 c) On a $\overrightarrow{\text{rot}}\,\underline{\vec{B}} = \dfrac{\omega E_0}{c^2}\exp[\mathrm{i}(\omega t - kz)]\overrightarrow{e_x}$ et $\mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t} = \dfrac{\omega E_0}{c^2}\exp[\mathrm{i}(\omega t - kz)]\overrightarrow{e_x}$.

.....

8.12 d) On a $\text{div}\,\underline{\vec{B}} = \dfrac{\partial \underline{B}}{\partial y} = 0$.

.....

8.13 a) On a $\underline{k}^2$ complexe donc $\underline{k} = k + \mathrm{i}k''$.

.....

8.13 b) On a $\underline{k}^2 > 0$ donc $\underline{k}$ est réel et $\underline{k} = k'$.

.....

8.13 c) On a $\underline{k}^2 < 0$ donc $\underline{k}$ est un imaginaire pur et $\underline{k} = \mathrm{i}k''$.

.....

8.14 a) La norme de $\vec{E}$ est une fonction sinusoïdale de x et de t.

.....

8.14 b) La norme de $\vec{E}$ est une fonction sinusoïdale de t et décroît exponentiellement avec x.

.....

8.14 c) La norme de $\vec{E}$ est une fonction sinusoïdale de t. Elle décroît exponentiellement avec x mais en présentant des oscillations.

.....

8.15 a) La continuité du champ électrique impose :

$$\vec{E}_i(0,t) + \vec{E}_r(0,t) = \vec{E}_t(0,t) \quad \text{donc} \quad E_0\cos(\omega t) + rE_0\cos(\omega t) = tE_0\cos(\omega t) \quad \text{donc} \quad 1 + r = t.$$

La continuité du champ magnétique impose :

$$\vec{B}_i(0,t) + \vec{B}_r(0,t) = \vec{B}_t(0,t) \quad \text{donc} \quad \frac{n_1E_0}{c}\cos(\omega t) - \frac{n_1rE_0}{c}\cos(\omega t) = \frac{n_2tE_0}{c}\cos(\omega t) \quad \text{donc} \quad n_1 - rn_1 = tn_2.$$

.....

8.15 b) On déduit de la question précédente :

$$n_1 - rn_1 = tn_2 = n_2 + rn_2 \quad \text{donc} \quad n_1 - n_2 = r(n_1 + n_2) \quad \text{donc} \quad r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

et

$$t = 1 + r = \frac{n_1 + n_2 + n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}.$$

.....

8.16 a) Dans le vide, $\lambda_1 = 2\,\text{m}$ et, dans le plasma, $\lambda_2 = 4\,\text{m}$.

.....

8.16 b) On lit sur la figure $r = \dfrac{E_r}{E_i} = \dfrac{1}{3}$ et $t = \dfrac{E_t}{E_i} = \dfrac{4}{3}$.

.....

8.16 c) On peut écrire :

$$r = \frac{1 - n_2}{1 + n_2} = \frac{1}{3} \quad \text{donc} \quad 3 - 3n_2 = 1 + n_2 \quad \text{donc} \quad 2 = 4n_2 \quad \text{donc} \quad n_2 = \frac{1}{2}.$$

On peut aussi écrire :

$$t = \frac{2}{1 + n_2} = \frac{4}{3} \quad \text{donc} \quad 6 = 4 + 4n_2 \quad \text{donc} \quad n_2 = \frac{1}{2}.$$

.....

8.16 d) On écrit $R = |r|^2 = \dfrac{1}{9}$ et $T = |t|^2 n_2 = \dfrac{16}{9} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{8}{9}$.

.....

8.17 a) On a :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \mathsf{Re}(\underline{\vec{E}}^* \wedge \underline{\vec{B}}) = \frac{1}{2\mu_0} \mathsf{Re}\left[\underline{\vec{E}}^* \wedge \left(\frac{\underline{\vec{k}}_1 \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega}\right)\right] = \frac{1}{2\mu_0\omega} \mathsf{Re}\left[(\underline{\vec{E}}^* \cdot \underline{\vec{E}})\,\underline{\vec{k}}_1 - (\underline{\vec{E}}^* \cdot \underline{\vec{k}}_1)\underline{\vec{E}}\right].$$

On en déduit $\langle \vec{\Pi} \rangle = \dfrac{|\underline{E}|^2}{2\mu_0\omega} \mathsf{Re}\big(\underline{\vec{k}}_1\big)$.

.....

8.17 b) On écrit $\langle \vec{\Pi}_r \rangle = -\dfrac{|\underline{E}|^2 |\underline{r}|^2}{2\mu_0\omega} \mathsf{Re}\big(\underline{\vec{k}}_1\big)$ et $\langle \vec{\Pi}_t \rangle = \dfrac{|\underline{E}|^2 |\underline{t}|^2}{2\mu_0\omega} \mathsf{Re}\big(\underline{\vec{k}}_2\big)$.

.....

8.17 c) On a $R = |\underline{r}|^2$ et $T = |\underline{t}|^2 \,\mathsf{Re}\left(\dfrac{\underline{k}_2}{\underline{k}_1}\right)$.

.....

Fiche n° 9. Modèle scalaire de la lumière

Réponses

9.1 a) $\boxed{n_{\text{air}} \times h}$

9.1 b) $\boxed{n_{\text{eau}} \times H}$

9.1 c) $\boxed{n_{\text{air}} \times h + n_{\text{eau}} \times H}$

9.1 d) $\boxed{1 \times h + n_{\text{eau}} \times H}$

9.2 a) $\boxed{n \times e}$

9.2 b) $\boxed{1 \times (\text{AA}' - e)}$

9.2 c) $\boxed{\text{AA}' + (n-1)e}$

9.3 a) $\boxed{\text{AB}\sin(\alpha)}$

9.3 b) $\boxed{-\text{AB}\sin(\alpha)}$

9.4 a) $\boxed{\text{Convergente}}$

9.4 b) $\boxed{\text{Convergente}}$

9.4 c) $\boxed{\text{Divergente}}$

9.4 d) $\boxed{\text{Convergente}}$

9.5 a) $\boxed{\text{(a) et (c)}}$

9.5 b) $\boxed{\text{(c)}}$

9.6 a) $\boxed{\text{(b) et (c)}}$

9.6 b) $\boxed{\text{(b)}}$

9.6 c) $\boxed{n_1 a \sin(\alpha)}$

9.6 d) $\boxed{\text{(a)}}$

9.6 e) $\boxed{n_2 a \sin(\beta)}$

9.6 f) $\boxed{n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)}$

9.7 a) $\boxed{\text{(a) et (b)}}$

9.7 b) $\boxed{\dfrac{2\pi}{\lambda_0}((\text{SA}') + d + e)}$

9.7 c) $\boxed{\dfrac{2\pi}{\lambda_0}((\text{SA}) + d + ne)}$

9.7 d) $\boxed{\dfrac{2\pi}{\lambda_0}(n-1)e}$

9.8 a) $\boxed{\dfrac{\pi}{\lambda_0}\dfrac{h}{\sin(\theta_1)}}$

9.8 b) $\boxed{\dfrac{2\pi}{\lambda_0}\dfrac{h}{\sin(\theta_1)} + \pi}$

9.8 c) $\boxed{2e\tan(\theta_2)}$

9.8 d) $\boxed{\dfrac{h}{2} - e\tan(\theta_2)}$

9.8 e) $\boxed{\text{(b)}}$

9.8 f) $\boxed{\dfrac{4\pi}{\lambda_0}\left(\dfrac{h}{2\sin\theta_1} + \left(n - \dfrac{1}{n}\right)\dfrac{e}{\cos(\theta_2)}\right)}$

9.8 g) $\boxed{\dfrac{4\pi}{\lambda_0}\dfrac{e}{\cos(\theta_2)}\left(n - \dfrac{1}{n}\right) - \pi}$

9.8 h) $\boxed{\text{(a)}}$

9.9 a) $\boxed{\dfrac{2\pi}{\lambda_0}e(n-1)}$

9.9 b) $\boxed{\dfrac{e}{\cos(\theta_2)}}$

9.9 c) $\boxed{\text{I}_1\text{I}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)}$

9.9 d) $\boxed{\dfrac{2\pi}{\lambda_0}\dfrac{e}{\cos(\theta_2)}(n - \cos(\theta_1 - \theta_2))}$

9.9 e) $\boxed{\text{(c)}}$

9.9 f) $\boxed{\dfrac{2\pi}{\lambda_0}e(n\cos(\theta_2) - \cos(\theta_1))}$

9.10 a) $\boxed{2\pi}$

9.10 b) $\boxed{\pi}$

9.10 c) $\boxed{\dfrac{e}{\cos(\theta_2)}}$

9.10 d) $\boxed{\dfrac{4\pi}{\lambda_0}\dfrac{ne}{\cos(\theta_2)} - \pi}$

9.11 a) ..... $\boxed{\Delta f = 1{,}0 \times 10^{11}\,\text{Hz}}$

9.11 b) ..... $\boxed{\Delta f = 1{,}0 \times 10^{7}\,\text{Hz}}$

9.11 c) ..... $\boxed{\tau_\text{c} = 45 \times 10^{3}\,\text{ps}}$

9.11 d) ..... $\boxed{\text{②, ① puis ③}}$

9.12 a) ..... $\boxed{K_1 S_0 \dfrac{T}{2\pi\tau} \sin\left(2\pi \dfrac{\tau}{T}\right)}$

9.12 b) ..... $\boxed{\text{d}}$

9.12 c) ..... $\boxed{100\,\text{GHz}}$

9.12 d) ..... $\boxed{\dfrac{K_2 S_0^2}{2\tau}\left(\tau + \dfrac{T}{4\pi}\sin\left(4\pi\dfrac{\tau}{T}\right)\right)}$

9.12 e) ..... $\boxed{\text{b}}$

9.12 f) ..... $\boxed{\text{non}}$

9.13 a) ..... $\boxed{1{,}00 \times 10^{-10}\,\text{W}}$

9.13 b) ..... $\boxed{7{,}50 \times 10^{-10}\,\text{W}}$

9.13 c) ..... $\boxed{6{,}67 \times 10^{-9}\,\text{W}}$

9.13 d) ..... $\boxed{2 \times 10^{-17}\,\text{J}}$

9.13 e) ..... $\boxed{3{,}38 \times 10^{-16}\,\text{J}}$

9.13 f) ..... $\boxed{3{,}33 \times 10^{-16}\,\text{J}}$

9.13 g) ..... $\boxed{\text{a}}$

Corrigés

9.1 a) L'air a pour indice optique n_air. Du point S au point I, le rayon lumineux parcourt la distance h.

9.1 b) L'eau a pour indice optique n_eau. Du point I au point F, le rayon lumineux parcourt la distance H.

9.1 c) Les chemins optiques se somment : $(\text{SF}) = (\text{SI}) + (\text{IF}) = n_\text{air} \times h + n_\text{eau} \times H$.

9.1 d) L'indice optique du vide est égal à 1.

9.2 a) Entre les points B et C, le rayon confondu avec l'axe optique parcourt la distance géométrique e.

9.2 b) L'indice optique du vide est égal à 1. De plus, à la distance totale AA', il faut retrancher l'épaisseur e de la lentille pour obtenir la distance géométrique parcourue par le rayon lumineux dans l'air.

9.2 c) Les chemins optiques se somment : $(\text{AA}') = n \times e + 1 \times (\text{AA}' - e) = \text{AA}' + (n-1)e$. Cette expression est valable quel que soit le rayon issu de A et arrivant en A' puisque les points A et A' sont conjugués !

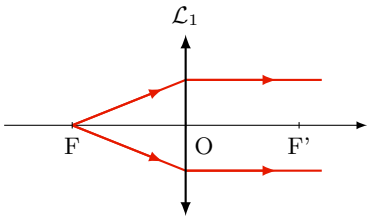
9.3 a) En décomposant le chemin optique de la source S jusqu'au point A, la différence de chemin optique demandée s'écrit : $(\text{SA}) - (\text{SB}) = (\text{SH}) + (\text{HA}) - (\text{SB})$. Par ailleurs, le plan passant par H et B étant une surface d'onde issue de S, il vient : $(\text{SA}) - (\text{SB}) = (\text{HA})$. Dans l'air, cela donne : $(\text{SA}) - (\text{SB}) = \text{HA} = \text{AB}\sin(\alpha)$.

9.3 b) Il y a égalité des chemins optiques : $(\text{SAS}') = (\text{SBS}')$, c'est-à-dire $(\text{SA}) + (\text{AS}') = (\text{SB}) + (\text{BS}')$.

On en déduit : $(\text{AS}') - (\text{BS}') = (\text{SB}) - (\text{SA}) = -\text{AB}\sin(\alpha)$.

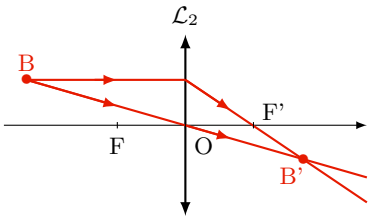
9.4 a)

En vertu du théorème de Malus, les rayons en aval de la lentille sont parallèles à l'axe optique. En amont, les surfaces d'onde sont des cercles concentriques centrés sur un point (lui aussi en amont), qui est donc le conjugué d'une image à l'infini sur l'axe optique, à savoir le foyer principal objet. Ainsi, $\mathcal{L}_1$ est convergente.



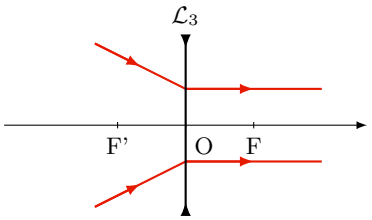
9.4 b)

Les surfaces d'onde permettent de voir qu'il y a conjugaison entre un objet réel et une image réelle (de même taille, et renversée) : $\mathcal{L}_2$ est donc nécessairement convergente.



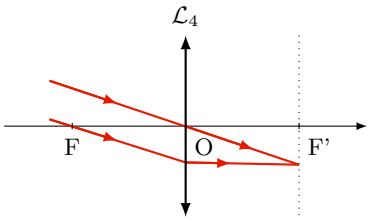
9.4 c)

Les surfaces d'onde incidentes sont des cercles concentriques centrés sur un point en aval de la lentille. De plus, en vertu du théorème de Malus, les rayons émergents sont parallèles à l'axe optique. Le point en question est donc le foyer objet de la lentille, situé après son centre optique : $\mathcal{L}_3$ est donc divergente.



9.4 d)

En vertu du théorème de Malus, les rayons incidents, parallèles entre eux, proviennent d'un objet à l'infini, qui est conjugué par la lentille d'un point hors de l'axe optique : il s'agit d'un foyer image secondaire, situé après le centre optique. $\mathcal{L}_4$ est donc convergente.



9.5 a) Les rayons incidents étant parallèles à l'axe optique, d'après le théorème de Malus, les surfaces d'onde sont perpendiculaires à l'axe optique.

9.5 b) Tout se passe comme si F' était une source ponctuelle émettant une onde sphérique : les surfaces d'onde sont donc des cercles concentriques centrés sur F'.

9.6 a) Le point H_1 est le projeté orthogonal de I_2 : d'après le théorème de Malus, ils se situent donc sur la même surface d'onde. De même, H_2 et I_1 appartiennent à un même front d'onde issu de M_∞ (principe du retour inverse de la lumière).

9.6 b) On voit sur le schéma que $i_1 + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\pi}{2}$; d'où, directement, $\alpha = i_1$.

9.6 c) Dans le triangle $H_1I_1I_2$, on a $\sin(\alpha) = \frac{H_1I_1}{a}$. De plus, $(H_1I_1) = n_1H_1I_1$, d'où $(H_1I_1) = n_1 a \sin(\alpha)$.

9.6 d) Dans le triangle $H_2I_1I_2$, on a $\beta + \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - i_2\right) = \pi$; d'où $\beta = i_2$.

9.6 e) Dans le triangle $H_2I_1I_2$, on a $\sin(\beta) = \frac{I_2H_2}{a}$. De plus, $(I_2H_2) = n_2 I_2H_2$, d'où $(I_2H_2) = n_2 a \sin(\beta)$.

9.6 f) Les chemins optiques (H_1I_1) et (I_2H_2) étant identiques, on retrouve la loi de la réfraction de Snell-Descartes : $n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$.

9.7 a) L'indice de la lame étant différent de celui de l'air, C et C′ ne sont pas sur la même surface d'onde.

9.7 b) On a $\phi(C') = \frac{2\pi}{\lambda_0}(SC') = \frac{2\pi}{\lambda_0}(SA') + \frac{2\pi}{\lambda_0}(A'B') + \frac{2\pi}{\lambda_0}(B'C') = \frac{2\pi}{\lambda_0}(\left(SA'\right) + d + e)$.

9.7 c) On a $\phi(C) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(SC) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(SA) + \frac{2\pi}{\lambda_0}(AB) + \frac{2\pi}{\lambda_0}(BC) = \frac{2\pi}{\lambda_0}((SA) + d + ne)$.

9.7 d) Les points A et A′ appartenant à la même surface d'onde, les chemins optiques (SA) et $\left(SA'\right)$ sont égaux donc le déphasage est $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n-1)e$.

9.8 a) D'après la loi de la réflexion de Snell-Descartes, au niveau du point d'incidence A, l'angle réfléchi est égal à l'angle incident en valeur absolue. Le triangle SAM est donc un triangle isocèle qu'on peut subdiviser en deux triangles rectangles. Ainsi, en se plaçant dans celui d'hypoténuse SA et de côté $h/2$, le chemin optique (SA) est tel que :

$$(SA) = n_{air} \times SA = 1 \times \frac{h}{2\sin(\theta_1)} = \frac{h}{2\sin(\theta_1)}$$

donc la phase $\phi_1(A)$ vérifie $\phi_1(A) = \frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{h}{2\sin(\theta_1)} = \frac{\pi}{\lambda_0}\frac{h}{\sin(\theta_1)}$.

9.8 b) Le chemin optique (AM) est égal au chemin optique (SA), ainsi $(SM) = 2\times(SA)$. Donc, avec le déphasage induit par la réflexion, la phase est telle que $\phi_1(M) = 2 \times \phi_1(A) + \pi = \frac{4\pi}{\lambda_0}\frac{h}{2\sin(\theta_1)} + \pi = \frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{h}{\sin(\theta_1)} + \pi$.

9.8 c) En se plaçant dans le triangle rectangle d'hypoténuse BC, on constate que :

$$\tan(\theta_2) = \frac{BD/2}{e} \qquad \text{donc} \qquad BD = 2e\tan(\theta_2).$$

9.8 d) La distance EB est telle que $EB = \frac{h - BD}{2} = \frac{h}{2} - e\tan(\theta_2)$.

9.8 e) En se plaçant dans le triangle rectangle SEB, le chemin optique (SB) est tel que :

$$(SB) = n_{air} \times SB = 1 \times \frac{EB}{\sin(\theta_1)} = \frac{h}{2\sin(\theta_1)} - \frac{e\tan(\theta_2)}{\sin(\theta_1)} = \frac{h}{2\sin(\theta_1)} - \frac{e\sin(\theta_2)}{\cos(\theta_2)\sin(\theta_1)} = \frac{h}{2\sin(\theta_1)} - \frac{e}{n\cos(\theta_2)}$$

donc la phase $\phi_2(B)$ vérifie $\phi_2(B) = \frac{2\pi}{\lambda_0}\left(\frac{h}{2\sin(\theta_1)} - \frac{e}{n\cos(\theta_2)}\right)$.

9.8 f) En se plaçant dans le triangle rectangle d'hypoténuse BC, le chemin optique (BC) est tel que :

$$(\mathrm{BC}) = n \times \mathrm{BC} = \frac{ne}{\cos(\theta_2)}.$$

Le chemin optique (SC) est donc tel que :

$$(\mathrm{SC}) = (\mathrm{SB}) + (\mathrm{BC}) = \frac{h}{2\sin\theta_1} - \frac{e}{n\cos(\theta_2)} + \frac{ne}{\cos(\theta_2)} = \frac{h}{2\sin\theta_1} + \left(n - \frac{1}{n}\right)\frac{e}{\cos(\theta_2)}.$$

Le chemin optique (SM) est égal au double de (SC). Ainsi la phase est $\phi_2(\mathrm{M}) = \dfrac{4\pi}{\lambda_0}\left(\dfrac{h}{2\sin\theta_1} + \left(n - \dfrac{1}{n}\right)\dfrac{e}{\cos(\theta_2)}\right)$.

.....

9.8 g) On a :

$$\Delta\phi = \phi_2(\mathrm{M}) - \phi_1(\mathrm{M}) = \frac{4\pi}{\lambda_0}\left(\frac{h}{2\sin\theta_1} + \left(n - \frac{1}{n}\right)\frac{e}{\cos(\theta_2)}\right) - \frac{4\pi}{\lambda_0}\frac{h}{2\sin(\theta_1)} - \pi = \frac{4\pi}{\lambda_0}\frac{e}{\cos(\theta_2)}\left(n - \frac{1}{n}\right) - \pi.$$

.....

9.8 h) On a :

$$\Delta\phi = \frac{4\pi}{\lambda_0}\frac{e}{\cos(\theta_2)}\left(n - \frac{1}{n}\right) - \pi = \frac{4\pi}{\lambda_0}\frac{e}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta_2)}} - \pi.$$

Or, d'après la loi de la réflexion de Snell-Descartes, il vient que :

$$\Delta\phi = \left(n - \frac{1}{n}\right) = \frac{4\pi}{\lambda_0}\frac{ne}{\sqrt{n^2 - \sin^2(\theta_1)}}\left(n - \frac{1}{n}\right) - \pi = \frac{4\pi}{\lambda_0}\frac{e\left(n^2 - 1\right)}{\sqrt{n^2 - \sin^2(\theta_1)}} - \pi.$$

.....

9.9 a) Les chemins optiques ($\mathrm{SI_1}$) et ($\mathrm{SH_1}$), ainsi que ($\mathrm{I_2N}$) et ($\mathrm{H_2M}$) sont égaux, on peut donc écrire :

$$\Delta\phi = \phi(\mathrm{N}) - \phi(\mathrm{M}) = \frac{2\pi}{\lambda_0}((\mathrm{SM}) - (\mathrm{SN})) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n\mathrm{I_1I_2} - \mathrm{H_1H_2}) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(ne + d - e) - \frac{2\pi}{\lambda_0}d = \frac{2\pi}{\lambda_0}e(n-1).$$

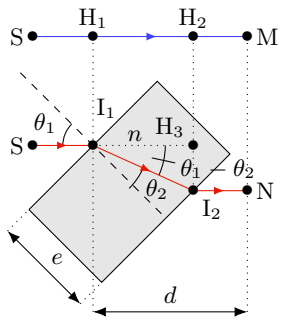
.....

9.9 b) Dans le triangle rectangle d'hypoténuse $\mathrm{I_1I_2}$, on a $\cos(\theta_2) = \dfrac{e}{\mathrm{I_1I_2}}$.

.....

9.9 c) On identifie un triangle rectangle $\mathrm{I_1I_2H_3}$ d'hypoténuse $\mathrm{I_1I_2}$ avec un angle $\theta_1 - \theta_2$ de côté adjacent $\mathrm{H_1H_2}$. Il vient que $\mathrm{H_1H_2} = \mathrm{I_1I_2}\cos(\theta_1 - \theta_2)$.

Cas 2



.....

9.9 d) Les chemins optiques (SI_1) et (SH_1), ainsi que (I_2N) et (H_2M) sont égaux, on peut donc écrire :

$$\Delta\phi = \phi(N) - \phi(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0}((SM) - (SN)) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(nI_1I_2 - H_1H_2).$$

En utilisant les expressions obtenues précédemment, on a :

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0}(nI_1I_2 - I_1I_2\cos(\theta_1 - \theta_2)) = \frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{e}{\cos(\theta_2)}(n - \cos(\theta_1 - \theta_2)).$$

.....

9.9 e) En utilisant l'identité trigonométrique, il vient que $\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) + \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)$. De plus, la loi de Snell-Descartes de la réfraction nous permet d'écrire $\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) + n\sin^2(\theta_2)$. Enfin, en utilisant l'identité trigonométrique $1 = \sin^2(\theta_2) + \cos^2(\theta_2)$, il vient que :

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) + n - n\cos^2(\theta_2).$$

.....

9.9 f) En utilisant les expressions obtenues précédemment, on a :

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= \frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{e}{\cos(\theta_2)}(n - \cos(\theta_1 - \theta_2)) = \frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{e}{\cos(\theta_2)}\big(n - \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - n + \cos^2(\theta_2)\big)\\ &= \frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{e}{\cos(\theta_2)}\big(-\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) + n\cos^2(\theta_2)\big).\end{aligned}$$

Donc, $\Delta\phi = \dfrac{2\pi}{\lambda_0}e(n\cos(\theta_2) - \cos(\theta_1))$.

.....

9.10 a) Le rayon est d'abord réfléchi par la lame semi-réfléchissante. L'indice de réfraction de la lame est supérieur à celui de l'air, il y a donc un déphasage de π. Puis, le rayon est réfléchi par le miroir et est donc, de nouveau, déphasé de π.

.....

9.10 b) Le rayon passe une première fois dans la lame, puis est réfléchi par M_2 : le rayon est déphasé de π. Il traverse une deuxième fois la lame et est réfléchi une seconde fois par la lame. Dans ce cas, le milieu de propagation du rayon incident est le plus réfringent : il n'y a pas de déphasage supplémentaire.

.....

9.10 c) On considère le triangle rectangle d'hypoténuse I_1I_2 et on utilise la relation trigonométrique $\cos(\theta_2) = \dfrac{e}{I_2I_2}$.

.....

9.10 d) Le rayon réfléchi par M_1 traverse la lame entre I_1 et I_3 après la réflexion par M_1. Le rayon réfléchi par M_2 traverse la lame entre I_1 et I_2 avant la réflexion par M_2, puis entre I_2 et I_1 après la réflexion par M_2, puis entre I_1 et I_3. En tenant compte du déphasage dû aux réflexions, et comme $I_1I_2 = I_1I_3$, il vient que :

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0}(3nI_1I_2) + \pi - \frac{2\pi}{\lambda_0}(nI_1I_2 + 2\pi) = \frac{4\pi}{\lambda_0}nI_1I_2 - \pi = \frac{4\pi}{\lambda_0}\frac{ne}{\cos(\theta_2)} - \pi.$$

.....

9.11 a) Attention à la conversion des picosecondes en secondes : on a $1\,\text{ps} = 1 \times 10^{-12}\,\text{s}$.

.....

9.11 b) Attention à la conversion des microsecondes en secondes : on a $1\,\mu\text{s} = 1 \times 10^{-6}\,\text{s}$.

.....

9.11 c) La relation $\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda} = \dfrac{\Delta f}{f}$ se réécrit $\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda} = \dfrac{1}{\tau_c f}$, soit $\tau_c = \dfrac{\lambda^2}{c\Delta\lambda}$. Ainsi, on a :

$$\tau_c = \frac{\left(820\times10^{-9}\,\mathrm{m}\right)^2}{3\times10^{8}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\times50\times10^{-9}\,\mathrm{m}} = 45\times10^{-15}\,\mathrm{s} = 45\times10^{3}\,\mathrm{ps}.$$

.....

9.11 d) Une source possède une cohérence temporelle d'autant plus forte que le temps de cohérence est long (trains d'onde avec une durée importante). Parmi les trois sources, c'est le laser qui possède la meilleure cohérence temporelle. La source de lumière blanche munie du filtre possède la moins bonne cohérence temporelle.

.....

9.12 a) La tension u_1 vérifie :

$$u_1 = K_1\langle s(t)\rangle = \frac{K_1}{\tau}\int_0^\tau s(t)\,\mathrm{d}t = \frac{K_1}{\tau}\int_0^\tau S_0\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{K_1S_0}{\tau}\left[\frac{\sin(\omega t)}{\omega}\right]_0^\tau$$
$$= K_1S_0\frac{1}{\omega\tau}\sin(\omega\tau) = K_1S_0\frac{T}{2\pi\tau}\sin\left(2\pi\frac{\tau}{T}\right).$$

.....

9.12 b) La valeur maximale de la fonction $\sin\left(2\pi\dfrac{\tau}{T}\right)$ est 1, donc la valeur maximale de u_1 est $K_1S_0\dfrac{T}{2\pi\tau}$.

.....

9.12 c) La valeur maximale du signal u_1 est $K_1S_0\dfrac{T}{2\pi\tau}$. Ce signal est exploitable lorsque

$$K_1S_0\frac{T}{2\pi\tau} \geqslant \frac{K_1S_0}{2\pi\times100} \qquad \text{soit} \qquad T \geqslant \frac{\tau}{100} \qquad \text{soit} \qquad f \leqslant \frac{100}{\tau}.$$

Ainsi la fréquence maximale du signal exploitable par le capteur A est $f = \dfrac{100}{1\times10^{-9}\,\mathrm{s}} = 1\times10^{11}\,\mathrm{Hz} = 100\,\mathrm{GHz}$.

.....

9.12 d) La tension u_2 vérifie :

$$u_2 = K_2\langle s^2(t)\rangle = \frac{K_2}{\tau}\int_0^\tau s^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{K_2S_0^2}{\tau}\int_0^\tau\cos^2(\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{K_2S_0^2}{2\tau}\left(\int_0^\tau\mathrm{d}t + \int_0^\tau\cos(2\omega t)\,\mathrm{d}t\right)$$
$$= \frac{K_2S_0^2}{2\tau}\left(\tau + \frac{T}{4\pi}\sin\left(4\pi\frac{\tau}{T}\right)\right).$$

.....

9.12 e) La valeur maximale de la fonction $\sin\left(4\pi\dfrac{\tau}{T}\right)$ est 1, donc la valeur maximale de u_2 est $\dfrac{K_2S_0^2}{2\tau}\left(\tau+\dfrac{T}{4\pi}\right)$.

.....

9.12 f) La valeur maximale du signal u_2 est $\dfrac{K_2S_0^2}{2\tau}\left(\tau+\dfrac{T}{4\pi}\right)$. Ce signal est exploitable lorsque

$$\frac{K_2S_0^2}{2\tau}\left(\tau+\frac{T}{4\pi}\right) \geqslant \frac{K_2S_0^2}{2} \qquad \text{soit} \qquad K_2S_0^2\frac{T}{8\pi\tau} \geqslant 0 \qquad \text{soit} \qquad f < +\infty.$$

Ainsi, théoriquement, il n'y a pas de limite à la fréquence du signal exploitable par le capteur B.

.....

9.13 a) On a $\mathcal{P}_{\mathrm{min}\ 1} = \dfrac{I_{\mathrm{obs}\ 1}}{s_1} = \dfrac{3\times10^{-11}\,\mathrm{A}}{0{,}3\,\mathrm{A\cdot W^{-1}}} = 1{,}00\times10^{-10}\,\mathrm{W}$.

.....

9.13 d) On a $E_{\mathrm{min}\ 1} = \mathcal{P}_{\mathrm{min}\ 1}\times\tau = 1{,}00\times10^{-10}\,\mathrm{W}\times2{,}00\times10^{-7}\,\mathrm{s} = 2{,}00\times10^{-17}\,\mathrm{J}$.

.....

9.13 g) Le nombre minimal de photons reçus par une photodiode N_{min} vérifie $N_{\mathrm{min}} = \dfrac{E_{\mathrm{min}}}{h\nu} = \dfrac{E_{\mathrm{min}}\lambda_0}{hc}$.

Ainsi, on a $N_{\mathrm{min}\ 1} = 47$, $N_{\mathrm{min}\ 2} = 935$ et $N_{\mathrm{min}\ 3} = 1\,104$.

.....

Fiche n° 10. Interférences à deux ondes

Réponses

10.1 a) $\boxed{\cos(a)\cos(b) = \dfrac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2}}$

10.1 b) $\boxed{\cos^2 a = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}}$

10.1 c) $\boxed{\sin^2 a = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}}$

10.1 d) $\boxed{\sin(a)\cos(a) = \dfrac{\sin(2a)}{2}}$

10.2 a) $\boxed{\cos(\omega t - kx)}$

10.2 b) $\boxed{-\sin(\omega t - kx)}$

10.2 c) $\boxed{\text{c}}$

10.3 a) $\boxed{\dfrac{2\pi}{\omega_1}}$

10.3 b) $\boxed{0}$

10.3 c) $\boxed{\dfrac{2\pi}{\omega_2}}$

10.3 d) $\boxed{0}$

10.3 e) $\boxed{\dfrac{\pi}{\omega_1}}$

10.3 f) $\boxed{\dfrac{S_1^2}{2}}$

10.3 g) $\boxed{\dfrac{\pi}{\omega_2}}$

10.3 h) $\boxed{\dfrac{S_2^2}{2}}$

10.4 a) $\boxed{1+\cos(\pm\varphi_1 \mp \varphi_2)}$

10.4 b) $\boxed{A^2}$

10.4 c) $\boxed{\dfrac{A^2+B^2}{2}}$

10.4 d) $\boxed{\dfrac{A^2}{8}\left(\dfrac{5}{4}+\cos(\varphi_0)\right)}$

10.5 $\boxed{\text{c}}$

10.6 a) $\boxed{k(x'-x)}$

10.6 b) $\boxed{\text{a}}$

10.6 c) $\boxed{\omega(t-t')}$

10.6 d) $\boxed{\text{a}}$

10.7 a) $\boxed{\text{c}}$

10.7 b) $\boxed{1{,}3\,\text{cm}}$

10.7 c) $\boxed{48\,\mu\text{m}}$

10.8 a) $\boxed{\text{b}}$

10.8 b) $\boxed{0{,}57\,\text{cm}}$

10.8 c) $\boxed{0{,}76\,\mu\text{m}}$

10.8 d) $\boxed{6{,}4\,\text{cm}}$

10.8 e) $\boxed{0{,}14\,\mu\text{m}}$

10.9 a) $\boxed{a\sin(\theta_1)}$

10.9 b) $\boxed{\arctan\left(\dfrac{y}{f_2'}\right)}$

10.9 c) $\boxed{\dfrac{nay}{f_2'}}$

10.9 d) $\boxed{\dfrac{f_2'\lambda}{na}}$

10.9 e) $\boxed{\text{b}}$

10.10 a) $\boxed{\text{a}}$

10.10 b) $\boxed{(n-1)\alpha y}$

10.10 c) $\boxed{\dfrac{\lambda_0}{(n-1)\alpha}}$

10.10 d) $\boxed{\text{b}}$

10.11 a) $\boxed{\dfrac{e}{\cos(\theta)}}$

10.11 b) $\boxed{2e\tan(\theta)}$

10.11 c) $\boxed{\mathrm{IK}\sin(\theta)}$

10.11 d) $\boxed{2e\dfrac{1-\cos^2(\theta)}{\cos(\theta)}}$

10.11 e) $\boxed{2ne\cos(\theta)}$

10.11 f) $\boxed{\text{c}}$

10.12 a) $\boxed{\text{b}}$

10.12 b) $\boxed{\dfrac{2e\sin^2 i}{\cos(i)}}$

10.12 c) $\boxed{\dfrac{e}{\cos(i)}}$

10.12 d) $\boxed{2ne\cos(i)}$

10.12 e) $\boxed{\text{c}}$

10.13 a) $\boxed{1{,}0\times10^{-1}\,\mathrm{s}}$

10.13 b) $\boxed{2{,}2\times10^{-1}\,\mathrm{m}}$

10.13 c) $\boxed{2{,}6\times10^{-3}\,\mathrm{s^{-1}}}$

10.13 d) $\boxed{9{,}5\times10^{-3}\,\mathrm{m^{-1}}}$

10.13 e) $\boxed{1{,}9\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}}$

10.13 f) $\boxed{1{,}3\times10^{-9}\,\mathrm{rad\cdot m^{-1}}}$

10.14 a) $\boxed{\dfrac{c}{\nu_1-\nu_2}}$

10.14 b) $\boxed{6{,}00\times10^{11}\,\mathrm{Hz}}$

10.14 c) $\boxed{\dfrac{c}{\nu_1+\nu_2}}$

10.14 d) $\boxed{6{,}00\times10^{12}\,\mathrm{Hz}}$

10.14 e) $\boxed{599{,}8\,\mathrm{nm}}$

10.14 f) $\boxed{600{,}2\,\mathrm{nm}}$

10.15 a) $\boxed{\text{a}}$

10.15 b) $\boxed{\text{b}}$

10.15 c) $\boxed{\text{c}}$

10.16 a) $\boxed{f'\tan(\theta)}$

10.16 b) $\boxed{1\,555{,}2}$

10.16 c) $\boxed{\text{b}}$

10.16 d) $\boxed{\text{a}}$

10.16 e) $\boxed{8{,}22\,\mathrm{mm}}$

10.16 f) $\boxed{\text{a}}$

10.16 g) $\boxed{19{,}7\,\mathrm{mm}}$

10.16 h) $\boxed{5{,}47\,\mathrm{cm}}$

Corrigés

10.1 a) Si on somme les relations (1) et (2), il vient que :

$$\cos(a-b)+\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)+\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)=2\cos(a)\cos(b).$$

Donc, $\cos(a)\cos(b)=\dfrac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2}$.

.....

10.1 b) En remplaçant b par a dans la relation précédente, il vient que :

$$\cos(a)\cos(a)=\frac{\cos(a-a)+\cos(a+a)}{2}\qquad\text{donc}\qquad\cos^2 a=\frac{1+\cos(2a)}{2}.$$

.....

10.2 a) On a :

$$\begin{aligned}s(x,t)&=S_0\ \cos(\omega t-kx)+S_0\ \cos(\omega t-kx+\varphi)=S_0\ \big(\cos(\omega t-kx)+\cos(\omega t-kx+\varphi)\big)\\&=S_0\ \big(\cos(\omega t-kx)+\cos(\omega t-kx)\cos(\varphi)-\sin(\omega t-kx)\sin(\varphi)\big)\\&=S_0\ \big(\cos(\omega t-kx)\ \big(1+\cos(\varphi)\big)-\sin(\omega t-kx)\sin(\varphi)\big)\\&=S_0\big(\ f(x,t)\ \big(1+\cos(\varphi)\big)+g(x,t)\ \sin(\varphi)\ \big).\end{aligned}$$

Par identification, on a $f(x,t)=\cos(\omega t-kx)$ et $g(x,t)=-\sin(\omega t-kx)$.

.....

10.2 c) La fonction $s(x,t)$ s'annule si, et seulement si,

$$\begin{cases}1+\cos(\varphi)=0\\ \sin(\varphi)=0\end{cases}\qquad\text{soit}\qquad\begin{cases}\varphi=\pi\ \ [2\pi]\\ \varphi=\pi\ \ [\pi].\end{cases}$$

On en déduit que l'unique condition d'annulation est $\varphi=\pi\ \ [2\pi]$.

.....

10.3 a) La pulsation du signal $s_1(t)=S_1\cos(\omega_1 t-k_1x)$ est ω_1 donc sa période est $T_1=\dfrac{2\pi}{\omega_1}$.

.....

10.3 b) On a :

$$\begin{aligned}\langle s_1(t)\rangle&=\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1}S_1\cos(\omega_1 t-k_1x)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{T_1}\frac{1}{\omega_1}S_1\Big[\sin(\omega_1 t-k_1x)\Big]_0^{T_1}\\&=\frac{\omega_1}{2\pi}\frac{1}{\omega_1}S_1(\sin(\omega_1T_1-k_1x)-\sin(-k_1x))=\frac{1}{2\pi}S_1(\sin(2\pi-k_1x)-\sin(-k_1x)).\end{aligned}$$

Comme $\sin(2\pi-k_1x)=\sin(-k_1x)$, on voit que $\langle s_1(t)\rangle=0$.

.....

10.3 d) On a :

$$\begin{aligned}\langle s_2(t)\rangle&=\frac{1}{T_2}\int_0^{T_2}S_2\sin(\omega_2 t-k_2x+\varphi_2)\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{T_2}\frac{1}{\omega_2}S_2\Big[\cos(\omega_2 t-k_2x+\varphi_2)\Big]_0^{T_2}\\&=-\frac{\omega_2}{2\pi}\frac{1}{\omega_2}S_2(\cos(\omega_2T_2-k_2x+\varphi_2)-\cos(-k_2x+\varphi_2))=-\frac{1}{2\pi}S_2(\cos(2\pi-k_2x+\varphi_2)-\cos(-k_2x+\varphi_2)).\end{aligned}$$

Comme $\cos(2\pi-k_2x+\varphi_2)=\cos(-k_2x+\varphi_2)$, on voit que $\langle s_2(t)\rangle=0$.

.....

10.3 e) Le signal $f_1(t) = s_1^2(t) = S_1^2 \cos^2(\omega_1 t - k_1 x)$. Or, on a

$$\cos(a)\cos(a) = \frac{\cos(a-a)+\cos(a+a)}{2} \qquad \text{donc} \qquad \cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2}.$$

Donc, $f_1(t) = \dfrac{S_1^2}{2} + \dfrac{S_1^2}{2}\cos(2\omega_1 t - 2k_1 x)$.

Ainsi, la pulsation du signal $f_1(t)$ est $2\omega_1$ donc sa période est $T_3 = \dfrac{2\pi}{2\omega_1} = \dfrac{\pi}{\omega_1}$.

.....

10.3 f) On a :

$$\begin{aligned}\langle f_1(t)\rangle &= \frac{1}{T_3}\int_0^{T_3} \frac{S_1^2}{2} + \frac{S_1^2}{2}\cos(2\omega_1 t - 2k_1 x)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T_3}\frac{S_1^2}{2}\left(\int_0^{T_3}\mathrm{d}t + \int_0^{T_3}\cos(2\omega_1 t - 2k_1 x)\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \frac{1}{T_3}\frac{S_1^2}{2}\left([t]_0^{T_3} + \frac{1}{2\omega_1}[\sin(2\omega_1 t - 2k_1 x)]_0^{T_3}\right) = \frac{1}{T_3}\frac{S_1^2}{2}\left(T_3 + \frac{1}{2\omega_1}(\sin(2\omega_1 T_3 - 2k_1 x) - \sin(-2k_1 x))\right)\\ &= \frac{S_1^2}{2}\left(1 + \frac{\omega_1}{\pi}\frac{1}{2\omega_1}(\sin(2\pi - 2k_1 x) - \sin(-2k_1 x))\right).\end{aligned}$$

Comme $\sin(2\pi - 2k_1 x) = \sin(-2k_1 x)$, on voit que $\langle f_1(t)\rangle = \dfrac{S_1^2}{2}$.

.....

10.3 g) Le signal $f_2(t) = s_2^2(t) = S_2^2 \sin^2(\omega_2 t - k_2 x + \varphi_2)$. Or, on a

$$\sin(a)\sin(a) = \frac{\cos(a-a)-\cos(a+a)}{2} \qquad \text{donc} \qquad \sin^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2}.$$

Donc, $f_2(t) = \dfrac{S_2^2}{2} - \dfrac{S_2^2}{2}\cos(2\omega_2 t - 2k_2 x + 2\varphi_2)$.

Ainsi, la pulsation du signal $f_2(t)$ est $2\omega_2$ donc sa période est $T_4 = \dfrac{2\pi}{2\omega_2} = \dfrac{\pi}{\omega_2}$.

.....

10.3 h) On a :

$$\begin{aligned}\langle f_2(t)\rangle &= \frac{1}{T_4}\int_0^{T_4} \frac{S_2^2}{2} - \frac{S_2^2}{2}\cos(2\omega_2 t - 2k_2 x + 2\varphi_2)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T_4}\frac{S_2^2}{2}\left(\int_0^{T_4}\mathrm{d}t - \int_0^{T_4}\cos(2\omega_2 t - 2k_2 x + 2\varphi_2)\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \frac{1}{T_4}\frac{S_2^2}{2}\left(\big[t\big]_0^{T_4} - \frac{1}{2\omega_2}\Big[\sin(2\omega_2 t - 2k_2 x + 2\varphi_2)\Big]_0^{T_4}\right)\\ &= \frac{1}{T_4}\frac{S_2^2}{2}\left(T_4 - \frac{1}{2\omega_2}(\sin(2\omega_2 T_4 - 2k_2 x + 2\varphi_2) - \sin(-2k_2 x + 2\varphi_2))\right)\\ &= \frac{S_2^2}{2}\left(1 - \frac{\omega_2}{\pi}\frac{1}{2\omega_2}(\sin(2\pi - 2k_2 x + 2\varphi_2) - \sin(-2k_2 x + 2\varphi_2))\right).\end{aligned}$$

Comme $\sin(2\pi - 2k_2 x + 2\varphi_2) = \sin(-2k_2 x + 2\varphi_2)$, on voit que $\langle f_2(t)\rangle = \dfrac{S_2^2}{2}$.

.....

10.4 a) On a :

$$\begin{aligned}&\Big\langle[\cos(\omega_0 t + \varphi_1) + \cos(\omega_0 t + \varphi_2)]^2\Big\rangle\\ &= \Big\langle[\cos(\omega_0 t + \varphi_1)]^2 + 2\cos(\omega_0 t + \varphi_1)\cos(\omega_0 t + \varphi_2) + [\cos(\omega_0 t + \varphi_2)]^2\Big\rangle\\ &= \left\langle\frac{\cos(0) + \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_1)}{2}\right\rangle + \left\langle 2\frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos(2\omega_0 t + \varphi_1 + \varphi_2)}{2}\right\rangle + \left\langle\frac{\cos(0) + \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_2)}{2}\right\rangle\\ &= \frac{1}{2} + 0 + \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + 0 + \frac{1}{2} + 0 = 1 + \cos(\pm\varphi_1 \mp \varphi_2).\end{aligned}$$

.....

10.4 b) On a :

$$\begin{aligned}
&\big\langle [A\cos(3\omega_0 t+\varphi_1)+A\cos(\omega_0 t+\varphi_2)]^2\big\rangle\\
&=\big\langle [A\cos(3\omega_0 t+\varphi_1)]^2+2A^2\cos(3\omega_0 t+\varphi_1)\cos(\omega_0 t+\varphi_2)+[A\cos(\omega_0 t+\varphi_2)]^2\big\rangle\\
&=\left\langle A^2\frac{\cos(0)+\cos(6\omega_0 t+2\varphi_1)}{2}\right\rangle+\left\langle 2A^2\frac{\cos(2\omega_0 t+\varphi_1-\varphi_2)+\cos(4\omega_0 t+\varphi_1+\varphi_2)}{2}\right\rangle\\
&\qquad\qquad+\left\langle A^2\frac{\cos(0)+\cos(2\omega_0 t+2\varphi_2)}{2}\right\rangle\\
&=A^2\left[\frac12+0+0+0+\frac12+0\right]=A^2.
\end{aligned}$$

.....

10.4 c) On a :

$$\begin{aligned}
&\big\langle [A\cos(42\omega_0 t+\varphi_1)+B\sin(43\omega_0 t+\varphi_2)]^2\big\rangle\\
&=\big\langle [A\cos(42\omega_0 t+\varphi_1)]^2+2AB\cos(42\omega_0 t+\varphi_1)\sin(43\omega_0 t+\varphi_2)+[B\sin(43\omega_0 t+\varphi_2)]^2\big\rangle\\
&=\left\langle A^2\frac{\cos(0)+\cos(84\omega_0 t+2\varphi_1)}{2}\right\rangle+\left\langle 2AB\frac{\sin(\omega_0 t-\varphi_1+\varphi_2)+\sin(85\omega_0 t+\varphi_1+\varphi_2)}{2}\right\rangle\\
&\qquad\qquad+\left\langle B^2\frac{\cos(0)-\cos(86\omega_0 t+2\varphi_2)}{2}\right\rangle\\
&=\left[\frac{A^2}{2}+0+0+0+\frac{B^2}{2}-0\right]=\frac{A^2+B^2}{2}.
\end{aligned}$$

.....

10.4 d) On a :

$$\begin{aligned}
&\left\langle\left[\frac{A}{4}\sin\Big(\frac{\omega_0}{2}t+\varphi_0\Big)+\frac{A}{2}\sin\Big(\frac{\omega_0}{2}t+2\varphi_0\Big)\right]^2\right\rangle\\
&=\left\langle\left[\frac{A}{4}\sin(\frac{\omega_0}{2}t+\varphi_0)\right]^2+\frac{A^2}{4}\sin(\frac{\omega_0}{2}t+\varphi_0)\sin(\frac{\omega_0}{2}t+2\varphi_0)+\left[\frac{A}{2}\sin(\frac{\omega_0}{2}t+2\varphi_0)\right]^2\right\rangle\\
&=\left\langle\frac{A^2}{16}\frac{\cos(0)-\cos(\omega_0 t+2\varphi_0)}{2}\right\rangle+\left\langle\frac{A^2}{4}\frac{\cos(\varphi_0)-\cos(\omega t+3\varphi_0)}{2}\right\rangle+\left\langle\frac{A^2}{4}\frac{\cos(0)-\cos(\omega_0 t+4\varphi_0)}{2}\right\rangle\\
&=\left[\frac{A^2}{32}-0+\frac{A^2}{8}\cos(\varphi_0)-0+\frac{A^2}{8}-0\right]=\frac{A^2}{8}\Big(\frac14+\cos(\varphi_0)+1\Big)=\frac{A^2}{8}\Big(\frac54+\cos(\varphi_0)\Big).
\end{aligned}$$

.....

10.5

- Pour (a), on a $C=\dfrac{10{,}0\times10^6\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}-1{,}00\,\mathrm{MW\cdot m^{-2}}}{10{,}0\times10^6\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}+1{,}00\,\mathrm{MW\cdot m^{-2}}}=\dfrac{1{,}00\times10^7\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}-1{,}00\times10^6\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}}{1{,}00\times10^7\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}+1{,}00\times10^6\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}}=0{,}82.$
- Pour (b), on a $C=\dfrac{660\,\mathrm{mW\cdot mm^{-2}}-0{,}220\,\mathrm{kW\cdot dm^{-2}}}{660\,\mathrm{mW\cdot mm^{-2}}+0{,}220\,\mathrm{kW\cdot dm^{-2}}}=\dfrac{6{,}60\times10^5\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}-2{,}20\times10^4\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}}{6{,}60\times10^5\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}+2{,}20\times10^4\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}}=93{,}5.$
- Pour (c), on a $C=\dfrac{5{,}00\,\mathrm{mW\cdot mm^{-2}}-2{,}00\,\mathrm{mW\cdot cm^{-2}}}{5{,}00\,\mathrm{mW\cdot mm^{-2}}+2{,}00\,\mathrm{mW\cdot cm^{-2}}}=\dfrac{5{,}00\times10^3\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}-20{,}0\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}}{5{,}00\times10^3\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}+20{,}0\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}}=99{,}2.$
- Pour (d), on a $C=\dfrac{72{,}0\,\mathrm{pW\cdot\mu m^{-2}}-3{,}00\,\mathrm{MW\cdot km^{-2}}}{72{,}0\,\mathrm{pW\cdot\mu m^{-2}}+3{,}00\,\mathrm{MW\cdot km^{-2}}}=\dfrac{72{,}0\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}-3{,}00\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}}{72{,}0\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}+3{,}00\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}}=92{,}0.$

.....

10.6 a) On a $\Delta\varphi=\omega t_0-kx-\big(\omega t_0-kx'\big)=k\big(x'-x\big)$.

.....

10.6 b) Le déphasage $\Delta\varphi_n$ entre deux positions successives est constant si $k(x_n-x_{n+1})=0\ \ [2\pi]=n2\pi$.

Autrement dit, on a $\Delta x_n=n\dfrac{2\pi}{k}=n\dfrac{2\pi\lambda}{2\pi}=n\lambda$. Pour un instant donné, les positions distantes d'un nombre entier de fois la longueur d'onde de la vibration lumineuse sont en phase : réponse (a).

.....

10.6 c) On a $\Delta\varphi = \omega t - kx_0 - \big(\omega t' - kx_0\big) = \omega\big(t - t'\big)$.

.....

10.6 d) Le déphasage $\Delta\varphi_n$ entre deux instants successifs est constant si $\omega(t_n - t_{n+1}) = 0\ [2\pi] = n2\pi$. Autrement dit, on a $\Delta t_n = n\dfrac{2\pi}{\omega} = n\dfrac{2\pi T}{2\pi} = nT$. Pour une position donnée, les instants séparés d'un nombre entier de fois la période de la vibration lumineuse sont en phase : réponse (a).

.....

10.7 a) On a $I(\mathrm{M}) = 2I_0\left(1 + \cos\left(\dfrac{2\pi x}{i}\right)\right)$; on identifie donc $i = \dfrac{\lambda D}{na}$.

.....

10.7 b) Par lecture graphique, on constate qu'entre $x = -20\,\mathrm{mm}$ et $x = +20\,\mathrm{mm}$ se trouvent trois interfranges. Donc, on a $i = \dfrac{4{,}0\,\mathrm{cm}}{3} = 1{,}3\,\mathrm{cm}$.

.....

10.7 c) On a $a = \dfrac{\lambda D}{ni}$. Donc, $a = \dfrac{630 \times 10^{-9}\,\mathrm{m} \times 1{,}0\,\mathrm{m}}{1{,}0 \times 1{,}3 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}} = 48\,\mu\mathrm{m}$.

.....

10.8 a) On a $C(x) = \cos\left(\dfrac{2\pi x}{X}\right)$; on identifie donc $X = \dfrac{2\lambda_{\mathrm{moy}}^2 D}{na\Delta\lambda}$.

.....

10.8 c) On a $\lambda_{\mathrm{moy}} = \dfrac{ina}{D}$. Donc, $\lambda_{\mathrm{moy}} = \dfrac{0{,}57 \times 10^{-3}\,\mathrm{m} \times 1{,}0 \times 0{,}20 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}}{1{,}5\,\mathrm{m}} = 0{,}76\,\mu\mathrm{m}$.

.....

10.8 e) On a $\Delta\lambda = \dfrac{2\lambda_{\mathrm{moy}}^2 D}{naX}$. Donc, $\Delta\lambda = \dfrac{2 \times (0{,}76.10^{-6})^2 \times 1{,}5}{1{,}0 \times 0{,}20.10^{-3} \times 6{,}4.10^{-2}} = 0{,}14\,\mu\mathrm{m}$.

.....

10.9 a) On a $\sin(\theta_1) = \dfrac{\mathrm{S_2H}}{a}$ donc $\mathrm{S_2H} = a\sin(\theta_1)$.

.....

10.9 b) À l'aide du tracé en tirets, on obtient un triangle avec : $\tan(\theta_1) = \dfrac{y}{f_2'}$. On en déduit $\theta_1 = \arctan\big(\dfrac{y}{f_2'}\big)$.

.....

10.9 c) On sait que $\delta_{\mathrm{SM}} = \mathcal{L}_{\mathrm{S_2H}} = n\mathrm{S_2H} = na\sin(\theta_1)$. À l'ordre 1, on a $\sin(\theta_1) = \theta_1$ et $\tan(\theta_1) = \theta_1 = \dfrac{y}{f_2'}$. Donc, on a $\delta_{\mathrm{SM}} = \dfrac{nay}{f_2'}$.

.....

10.9 d) En identifiant, on a : $\dfrac{y}{i} = \dfrac{\delta_{\mathrm{SM}}}{\lambda} = \dfrac{nay}{f_2'\lambda}$. Donc : $i = \dfrac{\lambda f_2'}{na}$.

.....

10.9 e) L'éclairement ne dépend que de la variable y. Ainsi, pour une valeur de y fixée, l'éclairement doit être constant, ce qui est seulement le cas pour la figure 2. La bonne réponse est (b).

.....

10.10 a) Dans l'interféromètre, un rayon est atténué par deux lames séparatrices, ainsi son éclairement en sortie I' est tel que $I' = I_0/4$. Donc son amplitude en sortie S' est telle que $S'^2 = S_0^2/4$, soit $S' = S_0/2$.

.....

10.10 b) En considérant l la distance parcourue par un rayon dans un des bras de l'interféromètre de S jusqu'à l'écran, la différence de marche entre les rayons passant par les deux bras de l'interféromètre est :

$$\delta = n_{\mathrm{air}}(l - e) + ne - \big(n_{\mathrm{air}}\big(l - e'\big) + ne'\big) = l + (n-1)e - l - (n-1)e' = (n-1)\big(e - e'\big) = (n-1)\alpha y.$$

.....

10.10 c) Le déphasage entre les deux rayons est $\Delta\varphi = \dfrac{2\pi}{\lambda_0}\delta = \dfrac{2\pi}{\lambda_0}(n-1)\alpha y$. Par identification, on a :

$$2\pi\frac{y}{i} = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n-1)\alpha y \qquad \text{donc} \qquad i = \frac{\lambda_0}{(n-1)\alpha}.$$

.....

10.10 d) L'éclairement ne dépend que de la variable y. Ainsi, pour une valeur de y fixée, l'éclairement doit être constant, ce qui est seulement le cas pour la figure 2. La bonne réponse est (b).

.....

10.11 a) On a $\cos(\theta) = \dfrac{e}{\text{IJ}} = \dfrac{e}{\text{JK}}$; donc, $\text{IJ} = \text{JK} = \dfrac{e}{\cos(\theta)}$.

.....

10.11 b) On a $\tan(\theta) = \dfrac{\frac{\text{IK}}{2}}{e} = \dfrac{\text{IK}}{2e}$; donc, $\text{IK} = 2e\tan(\theta)$.

.....

10.11 c) On a $\sin(\theta) = \dfrac{\text{IH}}{\text{IK}}$; donc, $\text{IH} = \text{IK}\sin(\theta)$.

.....

10.11 d) On a $\text{IH} = \text{IK}\sin(\theta) = 2e\tan(\theta)\sin(\theta) = 2e\dfrac{\sin^2(\theta)}{\cos(\theta)}$ car $\tan(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$. Or, $\sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta)$.

Donc, $\text{IH} = 2e\dfrac{1-\cos^2(\theta)}{\cos(\theta)}$.

.....

10.11 e) On a $\delta_{\text{SM}} = \mathcal{L}_{\text{IJ}} + \mathcal{L}_{\text{JK}} - \mathcal{L}_{\text{IH}} = n(\text{IJ} + \text{JK} - \text{IH})$. En injectant les résultats précédents, on obtient :

$$\delta_{\text{SM}} = n\left(2\frac{e}{\cos(\theta)} - 2e\frac{1-\cos^2(\theta)}{\cos(\theta)}\right) = \frac{2ne}{\cos(\theta)}\left[1 - \left(1-\cos^2(\theta)\right)\right] = \frac{2ne}{\cos(\theta)}\cos^2(\theta) = 2ne\cos(\theta).$$

.....

10.11 f) La différence de marche ne dépend que de la variable θ. Or l'éclairement dépend de la différence de marche (formule de Fresnel) donc l'éclairement dépend uniquement de la variable θ. Cela signifie que l'on retrouve une valeur fixée d'éclairement pour une valeur fixée de θ ! Autrement dit, l'ensemble des points de même éclairement correspond à un cercle, conformément à ce qui est observé dans la figure 3. Réponse (c).

.....

10.12 a) Le rayon inférieur d'amplitude S' en M est réfléchi deux fois de plus que le rayon supérieur d'amplitude S en M. Ainsi $S' = r^2 S$. Comme l'éclairement I est proportionnel au carré de l'amplitude, on a $I' = r^4 I$ et

$$I' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 I = \frac{I}{4} \qquad \text{donc} \qquad \frac{I'}{I} = \frac{1}{4}.$$

.....

10.12 b) D'après la loi de la réflexion, on a $\tan(i) = \dfrac{\frac{1}{2}\text{BE}}{e}$ et donc $\text{BE} = 2e\tan(i)$. Par ailleurs, on a $\sin(i) = \dfrac{\text{BH}}{\text{BE}}$, d'où $\text{BH} = \text{BE}\sin(i)$. En injectant la première relation dans la seconde, il vient :

$$\text{BH} = 2e\tan(i)\sin(i) = \frac{2e\sin^2 i}{\cos(i)}.$$

.....

10.12 c) D'après la loi de la réflexion, il vient $\cos(i) = \dfrac{e}{\text{BD}}$. On en déduit $\text{BD} = \dfrac{e}{\cos(i)}$.

.....

10.12 d) On a :

$$\begin{aligned}\delta_{\mathrm{SM}} &= \mathcal{L}_{\mathrm{SABDFM}} - \mathcal{L}_{\mathrm{SABHCM}} \\ &= (\mathrm{SA} + n\mathrm{AB} + n\mathrm{BD} + n\mathrm{DE} + \mathrm{EF} + \mathrm{FM}) - (\mathrm{SA} + n\mathrm{AB} + \mathrm{BH} + \mathrm{HC} + \mathrm{CM}).\end{aligned}$$

Or, on a BD = DE, EF = HC et FM = CM donc :

$$\delta_{\mathrm{SM}} = 2n\mathrm{BD} - \mathrm{BH} = 2n\frac{e}{\cos(i)} - \frac{2e\sin^2 i}{\cos(i)} = 2ne\frac{1-\sin^2 i}{\cos(i)} = 2ne\frac{\cos^2 i}{\cos(i)} = 2ne\cos(i).$$

.....

10.12 e) Les franges d'interférence sont isophases, donc telles que δ_{SM} est constant. Or δ_{SM} ne dépend que de l'angle i, donc les franges d'interférence coïncident avec des cercles épais concentriques. Réponse (c).

.....

10.13 a) On identifie la période $\dfrac{2\pi}{T_1}t = 60t$ donc $T_1 = \dfrac{2\pi}{60}\mathrm{s} = 1{,}0 \times 10^{-1}\,\mathrm{s}$.

.....

10.13 b) On identifie la longueur d'onde $\dfrac{2\pi}{\lambda_1}x = 28x$ donc $\lambda_1 = \dfrac{2\pi}{28}\mathrm{m} = 2{,}2 \times 10^{-1}\,\mathrm{m}$.

.....

10.13 c) On identifie la fréquence $2\pi\nu_2 t = \left(\dfrac{t}{21} - \dfrac{t}{32}\right)$ donc $\nu_2 = \dfrac{1}{2\pi}\left(\dfrac{1}{21} - \dfrac{1}{32}\right)\mathrm{s}^{-1} = 2{,}6 \times 10^{-3}\,\mathrm{s}^{-1}$.

.....

10.13 d) On identifie le nombre d'onde $2\pi\sigma_2 t = \left(\dfrac{x}{7} - \dfrac{x}{12}\right)$ donc $\sigma_2 = \dfrac{1}{2\pi}\left(\dfrac{1}{7} - \dfrac{1}{12}\right)\mathrm{m}^{-1} = 9{,}5 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^{-1}$.

.....

10.13 e) Attention : le terme $\dfrac{\pi}{2}$ correspond à la valeur de la phase du signal à l'origine (argument de la fonction cosinus pour $t = 0$ et $x = 0$), il n'entre ni dans l'expression de la pulsation temporelle, ni dans celle de la pulsation spatiale.

Ainsi, on identifie la pulsation temporelle $\omega_3 t = \dfrac{3\pi}{5}t + \dfrac{t}{23}$; donc $\omega_3 = \dfrac{3\pi}{5} + \dfrac{1}{23}\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1} = 1{,}9\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

.....

10.13 f) On identifie la pulsation spatiale $k_3 x = \dfrac{2\pi\nu_3}{5c}x$; donc $k_3 = \dfrac{1{,}9}{5\times 3\times 10^8}\mathrm{rad}\cdot\mathrm{m}^{-1} = 1{,}3 \times 10^{-9}\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{m}^{-1}$.

.....

10.14 a) La période spatiale de $\cos\left(2\pi\dfrac{\nu_1 - \nu_2}{c}x\right)$ est telle que $\lambda = \dfrac{c}{\nu_1 - \nu_2}$.

.....

10.14 b) D'après la figure, on a $\dfrac{\lambda}{2} = 0{,}500\,0\,\mathrm{mm}$ donc $\lambda = 1{,}000 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$. Or, on a vu que $\lambda = \dfrac{c}{\nu_1 - \nu_2}$. Donc,

$$\Delta\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3\times 10^8\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}}{1{,}000\times 10^{-3}\,\mathrm{m}} = 3{,}000 \times 10^{11}\,\mathrm{Hz}.$$

.....

10.14 c) La période spatiale de $\cos\left(2\pi\dfrac{\nu_1 + \nu_2}{c}x\right)$ est telle que $\lambda' = \dfrac{c}{\nu_1 + \nu_2}$.

.....

10.14 d) D'après la figure, on a $8\lambda' = 2{,}400\,\mu\mathrm{m}$ donc $\lambda' = 3{,}000 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}$. Or, on a vu que $\lambda' = \dfrac{c}{\nu_1 + \nu_2}$. Donc,

$$\nu_0 = \frac{c}{2\lambda'} = \frac{3\times 10^8\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}}{2\times 3{,}000\times 10^{-7}\,\mathrm{m}} = 5{,}000 \times 10^{14}\,\mathrm{Hz}.$$

.....

10.14 e) En sommant $2\nu_0$ et $\Delta\nu$, il vient que $2\nu_0 + \Delta\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_1 - \nu_2 = 2\nu_1$, donc $\nu_1 = \nu_0 + \dfrac{\Delta\nu}{2}$ et donc :

$$\lambda_1 = \frac{c}{\nu_1} = \frac{3\times 10^8\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}}{5{,}00\times 10^{14}\,\mathrm{Hz} + \frac{3{,}00\times 10^{11}\,\mathrm{Hz}}{2}} = 599{,}8\,\mathrm{nm}.$$

.....

10.14 f) En soustrayant $\Delta\nu$ à $2\nu_0$, il vient que $2\nu_0 - \Delta\nu = \nu_1 + \nu_2 - \nu_1 + \nu_2 = 2\nu_2$, donc $\nu_2 = \nu_0 - \dfrac{\Delta\nu}{2}$ et donc :

$$\lambda_2 = \frac{c}{\nu_2} = \frac{3 \times 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}}{5{,}00 \times 10^{14}\,\mathrm{Hz} - \frac{3{,}00 \times 10^{11}\,\mathrm{Hz}}{2}} = 600{,}2\,\mathrm{nm}.$$

.....

10.15 a) La figure est dans le plan $(z\mathrm{O}x)$. L'ensemble des points d'éclairement constant correspond à des franges linéaires de direction parallèle à l'axe $(\mathrm{O}z)$. Autrement dit, les ensembles de points isophases ne dépendent ni de la coordonnée y (figure plane) ni de la coordonnée z (orientation des franges), donc uniquement de la coordonnée x. De manière analogue, on peut dire qu'il n'y a aucune variation d'éclairement selon la coordonnée z. Réponse (a).

.....

10.15 b) La figure est dans le plan $(y\mathrm{O}z)$. L'ensemble des points d'éclairement constant correspond à des franges linéaires de direction parallèle à l'axe $(\mathrm{O}z)$. Autrement dit, les ensembles de points isophases ne dépendent ni de la coordonnée x (figure plane) ni de la coordonnée z (orientation des franges), donc uniquement de la coordonnée y. De manière analogue, on peut dire qu'il n'y a aucune variation d'éclairement selon la coordonnée z. Réponse (b).

.....

10.15 c) La figure est dans le plan $(z\mathrm{O}y)$. L'ensemble des points d'éclairement constant correspond à des franges circulaires. Les ensembles de points d'éclairement constant sont définis pour une valeur constante de distance au centre de la figure $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ issu du point O. Réponse (c).

.....

10.16 a) On a $\tan(\theta) = \dfrac{r}{f'}$; donc $r = f' \tan(\theta)$.

.....

10.16 b) On a $p_0 = \dfrac{2ne\cos(0)}{\lambda} = \dfrac{2ne}{\lambda}$. Donc, $p_0 = \dfrac{2 \times 1{,}00 \times 500 \times 10^{-6}}{6{,}43 \times 10^{-7}} = 1\,555{,}2$.

.....

10.16 d) Lorsque θ augmente, $\cos(\theta)$ diminue donc p diminue aussi. Le premier anneau brillant correspond au premier entier de p plus petit que $p_0 = 1\,555{,}2$. Donc $p_1 = 1\,555$.

.....

10.16 e) On a $r_1 = f' \tan(\theta_1) = f' \tan\left(\arccos\left(\dfrac{p_1\lambda}{2ne}\right)\right)$. Donc,

$$r_1 = 50{,}0 \times 10^{-2} \tan\left(\arccos\left(\frac{1555 \times 643 \times 10^{-9}}{2 \times 1{,}00 \times 500 \times 10^{-6}}\right)\right) = 8{,}22\,\mathrm{mm}.$$

.....

10.16 f) Pour voir le deuxième anneau brillant, il faut que θ augmente encore donc que p diminue d'un entier : on a donc $p_2 = 1\,554$.

.....

10.16 g) On a $r_2 = f' \tan(\theta_2) = f' \tan\left(\arccos\left(\dfrac{p_2\lambda}{2ne}\right)\right)$. Donc,

$$r_2 = 50{,}0 \times 10^{-2} \tan\left(\arccos\left(\frac{1554 \times 643 \times 10^{-9}}{2 \times 1{,}00 \times 500 \times 10^{-6}}\right)\right) = 19{,}7\,\mathrm{mm}.$$

.....

10.16 h) On a $p_{10} = 1\,555 - 9 = 1\,546$ et $r_{10} = f' \tan(\theta_{10}) = f' \tan\left(\arccos\left(\dfrac{p_{10}\lambda}{2ne}\right)\right)$. Donc,

$$r_{10} = 50{,}0 \times 10^{-2} \tan\left(\arccos\left(\frac{1546 \times 643 \times 10^{-9}}{2 \times 1{,}00 \times 500 \times 10^{-6}}\right)\right) = 5{,}47\,\mathrm{cm}.$$

.....

Fiche n° 11. Interférences à N ondes

Réponses

11.1 a) ..... ⓒ

11.1 b) ..... $2(1+\cos\theta)$

11.1 c) ..... ⓑ

11.1 d) ..... $2(1-\cos\theta)$

11.2 a) ..... $2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\theta}{2}}$

11.2 b) ..... $4\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

11.3 a) ..... $2\mathrm{j}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\theta}{2}}$

11.3 b) ..... $4\sin^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

11.4 a) ..... $\dfrac{1}{(1-R)^2}$

11.4 b) ..... $\dfrac{4R}{(1-R)^2}$

11.5 a) 2

11.5 b) ..... θ

11.5 c) ..... $-\theta$

11.6 1

11.7 a) ..... $a=3$

11.7 b) ..... $\underline{f}(\varphi)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$

11.7 c) ..... $a=5$

11.7 d) ..... $\underline{f}(\varphi)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}3\varphi}$

11.8 ..... 1,67 µm

11.9 a) ..... ⓑ

11.9 b) ..... 1 200 traits/mm

11.10 ..... $-19{,}1°$

11.11 a) ..... $[14{,}1°;24{,}5°]$

11.11 b) ..... $[29{,}1°,56{,}0°]$

11.11 c) ..... $[46{,}8°;79{,}4°]$

11.11 d) ..... ⓒ

11.12 a) ..... $1-\cos^2(\varphi)$

11.12 b) ..... $\dfrac{1}{2}(1-\cos(\varphi))$

11.12 c) ..... $2I_0(1+\cos(\varphi))$

11.13 a) ..... ⓓ

11.13 b) ..... ⓓ

11.13 c) ..... ⓑ

11.13 d) ..... ⓑ

11.14 ..... ⓒ

11.15 a) ..... π

11.15 b) 2π

11.15 c) ..... $\dfrac{2\pi}{N}$

11.15 d) ..... ⓐ

11.16 a) 1

11.16 b) ..... $N-1$

11.16 c) 10

11.17 a) ..... ⓒ

11.17 b) ..... $\dfrac{4\pi}{N}$

11.18 a) ..... $x=p$ et $y=a_0\sin(\theta')$

11.18 b) ..... 0,534 µm

11.18 c) ..... 534 nm

11.19 a) ..... ⓒ

11.19 b) ..... ⓒ

11.19 c) ..... ⓒ

11.19 d) ..... ⓒ

11.20 a) ..... $\dfrac{6\pi}{\lambda}a$

11.20 b) ..... $\dfrac{\pi}{\lambda}a$

11.20 c) ..... $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{5\pi}{\lambda}a\sin\theta}$

11.21 1,69

11.22 a) ..... $\dfrac{3\pi}{N}$

11.22 b) 0,05

Corrigés

11.1 a) On a $\underline{Z}_1 = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} = (1 + \cos\theta) + \mathrm{j}\sin\theta$. Ainsi,

$$\underline{Z}_1^* = (1 + \cos(\theta)) - \mathrm{j}\sin(\theta) = (1 + \cos(-\theta)) + \mathrm{j}\sin(-\theta) = 1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}.$$

.....

11.1 b) On a $\underline{Z}_1\underline{Z}_1^* = \left(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}\right) \times \left(1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}\right) = 2 + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}$. Ainsi, $\underline{Z}_1\underline{Z}_1^* = 2(1 + \cos(\theta))$.

.....

11.1 c) On a $\underline{Z}_2 = 1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta} = (1 - \cos(-\theta)) - \mathrm{j}\sin(-\theta)$.
Ainsi, $\underline{Z}_2^* = (1 - \cos(-\theta)) + \mathrm{j}\sin(-\theta) = (1 - \cos(\theta)) - \mathrm{j}\sin(\theta) = 1 - \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$.

.....

11.1 d) On a $\underline{Z}_2\underline{Z}_2^* = \left(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}\right) \times \left(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}\right) = 2 - \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}$. Ainsi, $\underline{Z}_2\underline{Z}_2^* = 2(1 - \cos(\theta))$.

.....

11.2 a) On a $\underline{Z}_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\theta}{2}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\theta}{2}} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\theta}{2}}\right) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\theta}{2}}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Ainsi, $\underline{f}\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\theta}{2}}$.

.....

11.2 b) On a $\underline{Z}_1\underline{Z}_1^* = \left(2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\theta}{2}}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \times \left(2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\theta}{2}}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = 4\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

.....

11.3 a) On a $\underline{Z}_2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\theta}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\theta}{2}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\theta}{2}}\right) = 2\mathrm{j}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\theta}{2}}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Ainsi, $\underline{g}\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\mathrm{j}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\theta}{2}}$.

.....

11.3 b) On a $\underline{Z}_2\underline{Z}_2^* = \left(2\mathrm{j}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\theta}{2}}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \times \left(-2\mathrm{j}\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\theta}{2}}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = 4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

.....

11.4 a) On a $\underline{ss}^* = \dfrac{1}{1 - R\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}} \times \dfrac{1}{1 - R\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}} = \dfrac{1}{1 + R^2 - R(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi})} = \dfrac{1}{1 + R^2 - 2R(\cos\varphi)}$.
Or, $\cos\varphi = 1 - 2\sin^2(\varphi/2)$. Ainsi,

$$\underline{ss}^* = \frac{1}{1 + R^2 - 2R(1 - 2\sin^2(\varphi/2))} = \frac{1}{(1-R)^2 + 4R\sin^2(\varphi/2)} = \frac{1}{(1-R)^2}\frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2}\sin^2(\varphi/2)}.$$

Par identification, on trouve $a = \dfrac{1}{(1-R)^2}$ et $m = \dfrac{4R}{(1-R)^2}$.

.....

11.5 a) On sait que $\cos(\theta') = \cos(\theta) \implies \theta' = \theta + 2k\pi$ ou $\theta' = -\theta + 2k'\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$ et $k' \in \mathbb{Z}$.

Les valeurs $k = 0$ et $k' = 0$ sont les seules permettant de respecter l'ensemble de définition de θ'. Nous en déduisons $\theta' = \{-\theta, \theta\}$.

Il y a donc deux éléments dans l'ensemble des solutions.

.....

11.5 b) On a $\theta \in [-90°, 0°]$. Ainsi, $\theta < -\theta$. Le plus petit élément de l'ensemble des solutions est θ.

.....

11.5 c) Le plus grand élément de l'ensemble des solutions est $-\theta$.

.....

11.6 On sait que $\sin(\theta') = \sin(\theta) \Rightarrow \theta' = \theta + 2k\pi$ ou $\theta' = \pi - \theta + 2k'\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$ et $k' \in \mathbb{Z}$.
Il existe une seule possibilité pour avoir une solution comprise dans l'intervalle $[-90°, 90°]$. Nous en déduisons $\theta' = \{\theta\}$. Il n'y a qu'un élément dans l'ensemble des solutions.

.....

11.7 a) On a $\underline{s}(\varphi) = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} + \mathrm{e}^{2\mathrm{j}\varphi} = \dfrac{1-\mathrm{e}^{3\mathrm{j}\varphi}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}} = \dfrac{\mathrm{e}^{3\mathrm{j}\varphi/2}}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi/2}}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{-3\mathrm{j}\varphi/2}-\mathrm{e}^{3\mathrm{j}\varphi/2}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi/2}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi/2}}\right)$. Ainsi, $\underline{s}(\varphi) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\dfrac{\sin\left(3\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$.

Nous en déduisons $a = 3$ et $\underline{f}(\varphi) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$.

.....

11.7 c) On a $\underline{s}(\varphi) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\left(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} + \mathrm{e}^{2\mathrm{j}\varphi} + \mathrm{e}^{3\mathrm{j}\varphi} + \mathrm{e}^{4\mathrm{j}\varphi}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\dfrac{1-\mathrm{e}^{5\mathrm{j}\varphi}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\dfrac{\mathrm{e}^{5\mathrm{j}\varphi/2}}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi/2}}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{-5\mathrm{j}\varphi/2}-\mathrm{e}^{5\mathrm{j}\varphi/2}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi/2}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi/2}}\right)$.

Ainsi, $\underline{s}(\varphi) = \mathrm{e}^{3\mathrm{j}\varphi}\dfrac{\sin\left(5\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$. Nous en déduisons $a = 5$ et $\underline{f}(\varphi) = \mathrm{e}^{3\mathrm{j}\varphi}$.

.....

11.8 On a $a = \dfrac{1\,\mathrm{mm}}{600\,\mathrm{traits}} = \dfrac{1\times10^{-3}\,\mathrm{m}}{600\,\mathrm{traits}} = 1{,}67\,\mu\mathrm{m}$.

.....

11.9 a) On a $1\,\mathrm{pied} = \dfrac{1\,\mathrm{yard}}{3}$ et $1\,\mathrm{inch} = \dfrac{1\,\mathrm{pied}}{12}$. De plus, $1\,\mathrm{inch} = \dfrac{1\,\mathrm{yard}}{3\times12} = \dfrac{91{,}44\,\mathrm{cm}}{3\times12}$, donc $1\,\mathrm{inch} = 25{,}4\,\mathrm{mm}$.

.....

11.9 b) La linéature du réseau vaut $n = \dfrac{30\,000\,\mathrm{traits}}{1\,\mathrm{inch}} = \dfrac{30\,000\,\mathrm{traits}}{25{,}4\,\mathrm{mm}}$, soit $n = 1\,200\,\mathrm{traits/mm}$.

.....

11.10 En observant l'ordre $p = 1$ sous émergence normale, on a $\theta = 0$.
On en déduit $\sin(\theta_0) = -1\times\dfrac{600\,\mathrm{traits}}{1\,\mathrm{mm}}\times546{,}1\,\mathrm{nm} = -\dfrac{600\,\mathrm{traits}}{1\times10^{-3}\,\mathrm{m}}\times546{,}1\times10^{-9}\,\mathrm{m}$; d'où $\theta_0 = -19{,}1°$.

.....

11.11 a) Le spectre de la source diffracté dans l'ordre 1 s'étale entre les angles :

- $\theta_1^{\min}$ tel que
$$\sin(\theta_1^{\min}) = 1\times\frac{600\,\mathrm{traits}}{1\times10^{-3}\,\mathrm{m}}\times404{,}7\times10^{-9}\,\mathrm{m}\ \text{donc}\ \theta_1^{\min} = 14{,}1°\ ;$$
- $\theta_1^{\max}$ tel que
$$\sin(\theta_1^{\max}) = 1\times\frac{600\,\mathrm{traits}}{1\times10^{-3}\,\mathrm{m}}\times690{,}7\times10^{-9}\,\mathrm{m}\ \text{donc}\ \theta_1^{\max} = 24{,}5°.$$

.....

11.11 b) Le spectre de la source diffracté dans l'ordre 2 s'étale entre les angles :

- $\theta_2^{\min}$ tel que
$$\sin(\theta_2^{\min}) = 2\times\frac{600\,\mathrm{traits}}{1\times10^{-3}\,\mathrm{m}}\times404{,}7\times10^{-9}\,\mathrm{m}\ \text{donc}\ \theta_2^{\min} = 29{,}1°\ ;$$
- $\theta_2^{\max}$ tel que
$$\sin(\theta_2^{\max}) = 2\times\frac{600\,\mathrm{traits}}{1\times10^{-3}\,\mathrm{m}}\times690{,}7\times10^{-9}\,\mathrm{m}\ \text{donc}\ \theta_2^{\max} = 56{,}0°.$$

.....

11.11 c) Le spectre de la source diffracté dans l'ordre 3 s'étale entre les angles :

- $\theta_3^{\min}$ tel que
$$\sin(\theta_3^{\min}) = 3\times\frac{600\,\mathrm{traits}}{1\times10^{-3}\,\mathrm{m}}\times404{,}7\times10^{-9}\,\mathrm{m}\ \text{donc}\ \theta_3^{\min} = 46{,}8°\ ;$$
- $\theta_3^{\max}$ tel que
$$\sin(\theta_3^{\max}) = 3\times\frac{600\,\mathrm{traits}}{1\times10^{-3}\,\mathrm{m}}\times546{,}1\times10^{-9}\,\mathrm{m}\ \text{donc}\ \theta_3^{\max} = 79{,}4°.$$

Pour les longueurs d'onde supérieures à $546{,}1\times10^{-9}\,\mathrm{m}$, l'angle de diffraction n'est pas défini. Les raies correspondantes ne sont donc pas observables.

.....

11.11 d) Compte tenu des angles limites des spectres précédents, on constate un premier chevauchement des ordres dès l'ordre 2, pour les longueurs d'onde λ telles que : $3 \times n \times \lambda \leqslant 2 \times n \times 690{,}7 \times 10^{-9}$, soit pour $\lambda \leqslant 460{,}5\,\text{nm}$. Ainsi, les trois premières raies du mercure diffractées dans l'ordre 3 se mélangent avec le spectre d'ordre 2. La bonne réponse est la réponse (c).

.....

11.12 a) Comme $N = 2$, on a $\sin^2\left(N\frac{\varphi}{2}\right) = \sin^2(\varphi) = 1 - \cos^2(\varphi)$.

.....

11.12 b) Comme $\cos(\varphi) = \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$, on a $\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 - \cos(\varphi))$.

.....

11.12 c) On a :

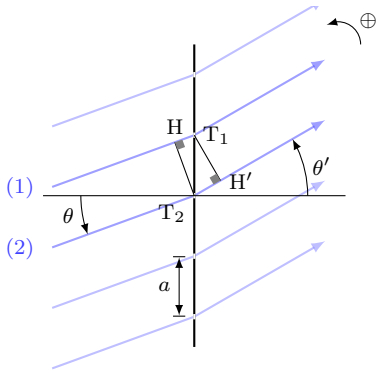
$$I = 2I_0\frac{1-\cos^2(\varphi)}{1-\cos(\varphi)} = 2I_0\frac{(1-\cos(\varphi))(1+\cos(\varphi))}{(1-\cos(\varphi))} = 2I_0(1+\cos(\varphi)).$$

Nous retrouvons la formule de Fresnel donnant l'expression de l'intensité pour un interféromètre à deux ondes.

.....

11.13 a)

La différence de marche se réduit, dans ce cas précis, à : $\delta_A = \left[T_2H'\right] - [HT_1]$.
Notons par ailleurs que θ et θ' sont deux angles positifs au vu de la convention adoptée.
Nous retrouvons l'angle θ au sommet T_2 du triangle rectangle T_1HT_2.
Ainsi, $[HT_1] = a\sin(\theta)$ car l'indice optique est pris égal à 1.
De la même façon, nous trouvons : $\left[T_2H'\right] = a\sin\left(\theta'\right)$.
Conclusion : $\delta_A = a\left(\sin\left(\theta'\right) - \sin(\theta)\right)$.

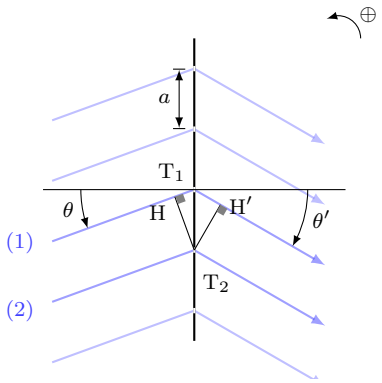


.....

11.13 b)
La différence de marche se réduit, dans ce cas précis, à :

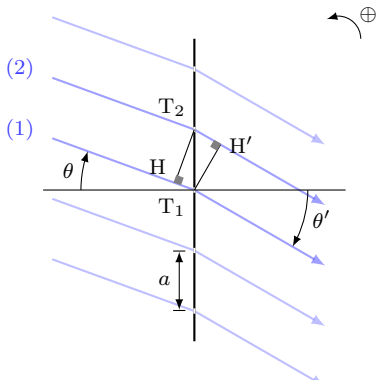
$$\delta_B = -[HT_1] - \left[T_1H'\right].$$

Notons par ailleurs que θ est un angle positif alors que θ' est négatif au vu de la convention adoptée.
Nous retrouvons l'angle θ au sommet T_2 du triangle rectangle T_1HT_2.
Ainsi, $[HT_1] = a\sin(\theta)$ car l'indice optique est pris égal à 1.
De la même façon, nous trouvons : $\left[T_1H'\right] = a\sin\left(|\theta'|\right) = -a\sin\left(\theta'\right)$.
Conclusion : $\delta_B = a\left(\sin\left(\theta'\right) - \sin(\theta)\right)$.



.....

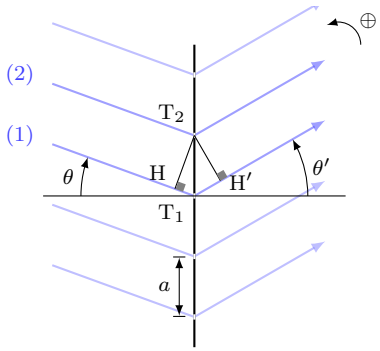
11.13 c)



La différence de marche se réduit, dans ce cas précis, à : $\delta_C = \left[T_2H'\right] - [HT_1]$.
Notons par ailleurs que θ et θ' sont négatifs au vu de la convention adoptée.
Nous retrouvons l'angle $|\theta|$ au sommet T_2 du triangle rectangle T_1HT_2.
Ainsi, $[HT_1] = a\sin(|\theta|) = -a\sin(\theta)$ car l'indice optique est pris égal à 1.
De la même façon, nous trouvons : $\left[T_2H'\right] = a\sin\left(|\theta'|\right) = -a\sin\left(\theta'\right)$.
Conclusion : $\delta_C = a\left(\sin(\theta) - \sin\left(\theta'\right)\right)$.

.....

11.13 d)



La différence de marche se réduit, dans ce cas précis, à :

$$\delta_D = -[HT_1] - \left[T_1H'\right].$$

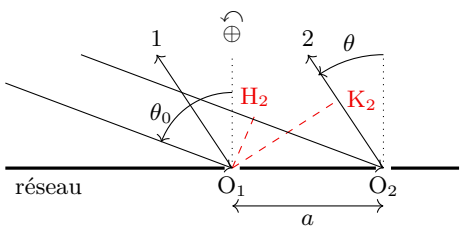
Notons par ailleurs que θ est un angle négatif alors que θ' est positif au vu de la convention adoptée.
Nous retrouvons l'angle $|\theta|$ au sommet T_2 du triangle rectangle T_1HT_2.
Ainsi, $[HT_1] = a\sin(|\theta|) = -a\sin(\theta)$ car l'indice optique est pris égal à 1.
De la même façon, nous trouvons : $\left[T_1H'\right] = a\sin\left(\theta'\right)$.
Conclusion : $\delta_D = a\left(\sin(\theta) - \sin\left(\theta'\right)\right)$.

.....

11.14

Notons H_2 le projeté orthogonal de O_1 sur le rayon incident 2 et K_2 le projeté orthogonal de O_1 sur le rayon émergent 2.

En application du théorème de Malus-Dupin, les chemins optiques de moins l'infini jusqu'à O_1 sur le rayon 1 et de moins l'infini jusqu'à H_2 sur le rayon 2 sont identiques.



Il en est de même pour le chemin optique de O_1 jusqu'à l'infini sur le rayon émergent 1 et pour celui de K_2 jusqu'à l'infini sur le rayon émergent 2.

La différence de marche du rayon 2 par rapport au rayon 1 vaut donc : $\delta_{2/1} = n_{\text{air}}[H_2O_2 + K_2O_2]$.

Compte tenu des angles sur la figure, on a $H_2O_2 = a\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta_0\right) = \sin(\theta_0)$ et $K_2O_2 = a\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta)$.

On en déduit $\delta_{2/1} = a(\sin(\theta_0) + \sin(\theta))$, soit la réponse (c).

.....

11.15 a) La fonction $\sin(x)$ est 2π-périodique en x mais $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$, d'où $\sin^2(x+\pi) = \sin^2(x)$, montrant que la fonction $\sin^2(x)$ est π-périodique en x.

.....

11.15 b) Posons $x = \dfrac{\phi}{2}$. La fonction $\sin^2(x)$ est π-périodique en x, donc 2π-périodique en variable ϕ.

.....

11.15 c) Posons $x = \dfrac{N\phi}{2}$. La fonction $\sin^2(x)$ est π-périodique en x, donc $\dfrac{2\pi}{N}$-périodique en variable ϕ.

.....

11.15 d) La période de la fonction réseau est le p.p.c.m. des périodes des fonctions $\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)$ et $\sin^2\left(\frac{N\phi}{2}\right)$, soit le p.p.c.m. de 2π et de $\frac{2\pi}{N}$. La fonction réseau est donc 2π-périodique en variable ϕ.

.....

11.16 a) Quand $\phi \to 0$, la fonction réseau présente une forme indéterminée de type $\frac{0}{0}$. On lève cette indétermination en formant un développement limité du numérateur et du dénominateur à l'ordre 1.

D'où $\mathcal{R}_N(\phi) \sim \left(\frac{\frac{N\phi}{2}}{N\frac{\phi}{2}}\right)^2 = 1$. La fonction réseau admet une limite finie en 0. On la prolonge par continuité en posant $\mathcal{R}_N(0) = 1$. La fonction réseau est alors continue et dérivable sur tout $\mathbb{R}$.

.....

11.16 b) La fonction réseau s'annule pour $\sin\left(\frac{N\phi}{2}\right) = 0$ avec $\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \neq 0$, soit pour $\frac{N\phi}{2} = q\pi$ avec $\phi \neq 0$ et $\phi \neq 2\pi$. Sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, les zéros de la fonction réseau correspondent aux valeurs $\phi = q\frac{2\pi}{N}$, avec q entier compris entre 1 et $(N-1)$, soit $N-1$ valeurs par période.

.....

11.16 c) On sait qu'on a $N-1$ zéros de la fonction réseau sur une période, soit ici 9 valeurs. On a donc $N = 10$.

.....

11.17 a) Le terme $\sin\left(\frac{N\phi}{2}\right)$ s'annule la première fois après $\phi = 0$ pour $\frac{N\phi}{2} = \pi$, soit pour $\phi = \frac{2\pi}{N}$, d'où la réponse (c).

.....

11.17 b) Plaçons-nous autour du pic principal en $\phi = 0$. Les premiers zéros autour de $\phi = 0$ sont obtenus pour $\phi = \pm\frac{2\pi}{N}$ d'où $\delta\phi = \frac{4\pi}{N}$.

.....

11.18 a) L'équation $y = ax + b$ est une modélisation de la relation $a_0 \sin\theta' = p\lambda$.

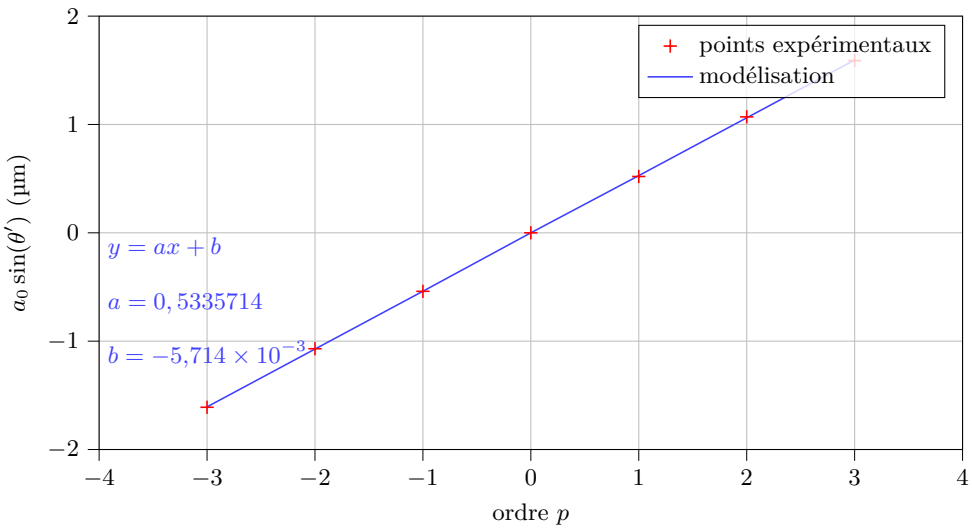
Par identification, on trouve $x = p$ et $y = a_0 \sin(\theta')$.

.....

11.18 b) Afin de réaliser la régression linéaire, il est nécessaire d'établir le tableau suivant :

p	-3	-2	-1	0	1	2	3
$a_0 \sin(\theta')$ (en µm)	$-1{,}61$	$-1{,}07$	$-0{,}54$	0	$0{,}52$	$1{,}07$	$1{,}59$

Il ne reste qu'à faire la régression linéaire à la calculatrice.



La quantité $a_0 \sin(\theta)$ est homogène à une longueur alors que p est sans dimension. Ainsi, a est homogène à une longueur.
On a $a = 0{,}534\,\mu\text{m}$.

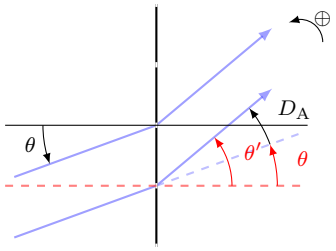
.....

11.18 c) Par identification $\lambda = a = 0{,}534\,\mu\text{m} = 534\,\text{nm}$.

.....

11.19 a)

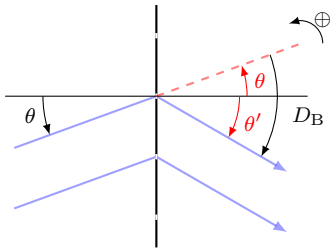
Les angles D_A, θ et θ' sont positifs au vu de la convention adoptée.
À l'aide du schéma, nous comprenons que $|D_\text{A}| = |\theta'| - |\theta|$.
Ainsi, $D_\text{A} = \theta' - \theta$.



.....

11.19 b)

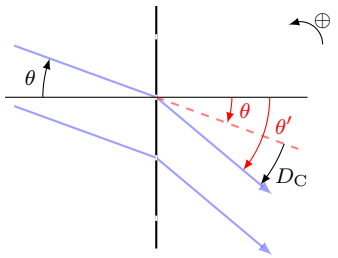
L'angle θ est négatif, alors que θ' et D_B sont négatifs au vu de la convention adoptée.
À l'aide du schéma, nous comprenons que $|D_\text{B}| = |\theta'| + |\theta|$.
Ainsi, $D_\text{B} = \theta' - \theta$.



.....

11.19 c)

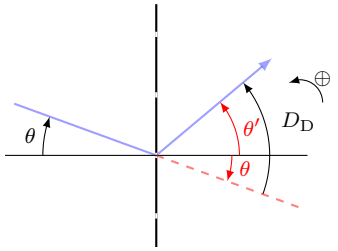
Les angles θ, θ' et D_C sont négatifs au vu de la convention adoptée.
À l'aide du schéma, nous comprenons que $|D_C| = |\theta'| - |\theta|$.
Ainsi, $D_C = \theta' - \theta$.



.....

11.19 d)

L'angle θ est négatif alors que θ' et D_D sont positifs au vu de la convention adoptée.
À l'aide du schéma, nous comprenons que $|D_D| = |\theta'| + |\theta|$.
Ainsi, $D_D = \theta' - \theta$.



.....

11.20 a) On a $\underline{s}(\theta) = \sum_{k=0}^{5} \mathrm{e}^{k\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda}a\sin(\theta)} = \dfrac{1-\mathrm{e}^{6\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda}a\sin(\theta)}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda}a\sin(\theta)}} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{5\pi}{\lambda}a\sin(\theta)}\left(\dfrac{\sin\left(\frac{6\pi}{\lambda}a\sin(\theta)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda}a\sin(\theta)\right)}\right)$. Ainsi, $\alpha = \dfrac{6\pi}{\lambda}a$.

.....

11.20 b) Par identification $\beta = \dfrac{\pi}{\lambda}a$.

.....

11.20 c) Par identification $\underline{g}(\theta) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{5\pi}{\lambda}a\sin(\theta)}$.

.....

11.21 Plaçons-nous autour du pic principal en $\phi = 0$. On cherche ϕ tel que $\mathcal{R}_N(\phi) = \dfrac{1}{2}$. Soit encore, en considérant que $\phi \ll 1$, $\left(\dfrac{\frac{N\phi}{2} - \frac{1}{6}\left(\frac{N\phi}{2}\right)^3}{\frac{N\phi}{2}}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$, qui donne $1 - \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{N\phi}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. On en tire $\phi = \pm\dfrac{2}{N}\sqrt{6\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)}$, qui donne $\Delta\phi_{1/2} = \dfrac{4}{N}\sqrt{6\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)}$. On en déduit la valeur de α cherchée : $\alpha = \dfrac{4}{\pi}\sqrt{6\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)}$, soit $\alpha \approx 1{,}69$.

.....

11.22 a) On observe que le premier maximum secondaire est à peu près à mi-distance entre les deux premiers zéros de la fonction réseau après un pic principal, soit entre $\dfrac{2\pi}{N}$ et $\dfrac{4\pi}{N}$. On peut donc évaluer la position du premier maximum secondaire pour $\dfrac{3\pi}{N}$.

.....

11.22 b) On calcule, pour $\phi = \dfrac{3\pi}{N}$, $\mathcal{R}_N(\phi) = \left(\dfrac{\sin\left(\frac{3\pi N}{2N}\right)}{N\sin\left(\frac{3\pi}{2N}\right)}\right)^2 = \left(\dfrac{-1}{\frac{3\pi}{2}}\right)^2$ en tenant compte du fait que $N \gg 1$ (qui donne $\sin(x) \sim x$) et avec $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = -1$. Il reste $\mathcal{R}_N(\phi) = \left(\dfrac{2}{3\pi}\right)^2$, soit $\mathcal{R}_N(\phi) \approx 0{,}05$. Notons que la valeur du premier maximum secondaire est indépendante de celle de N et représente moins de 5 % de la valeur d'un pic principal. Seuls les pics principaux sont visibles.

.....

Fiche n° 12. Outils mathématiques pour la diffusion

Réponses

12.1 a) ..... $\boxed{abc}$

12.1 b) ..... $\boxed{abc\sin(\alpha)}$

12.1 c) ..... $\boxed{\pi r^2 h}$

12.1 d) ..... $\boxed{\pi r^2 h\cos(\alpha)}$

12.2 a) ..... $\boxed{\text{négatif}}$

12.2 b) ..... $\boxed{\text{positif}}$

12.2 c) ..... $\boxed{\text{b}}$

12.2 d) ..... $\boxed{\text{b}}$

12.2 e) ..... $\boxed{\text{c}}$

12.2 f) ..... $\boxed{\text{a}}$

12.3 a) ..... $\boxed{\dfrac{2\pi rh}{3}}$

12.3 b) ..... $\boxed{\dfrac{\pi r^2}{3}}$

12.3 c) ..... $\boxed{\text{c}}$

12.4 a) ..... $\boxed{\text{c}}$

12.4 b) ..... $\boxed{\text{b}}$

12.4 c) ..... $\boxed{\pi R^2 + 2\dfrac{V}{R}}$

12.4 d) ..... $\boxed{\text{b}}$

12.4 e) ..... $\boxed{\text{a et c}}$

12.5 a) ..... $\boxed{n(x,t) = j_0 x + n_0}$

12.5 b) ..... $\boxed{n(x,t) = \dfrac{n_1 - n_0}{L}x + n_0}$

12.5 c) ..... $\boxed{\dfrac{p}{2}x(x-L) + n_0}$

12.6 a) ..... $\boxed{n(x,t) = n_0 \exp\left(\dfrac{t}{\tau}\right)}$

12.6 b) ..... $\boxed{n(t) = \dfrac{n_0}{1 + \dfrac{n_0 t}{n_c \tau}}}$

12.6 c) ..... $\boxed{n_0\left(1 - \dfrac{x}{L}\right)\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right) + p\tau\left(1 - \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\right)}$

Corrigés

12.2 e) Le point B est au niveau d'un col de la fonction $f(x,y)$. À partir du point B, en se déplaçant dans la direction y croissant et en gardant x fixe à $x = x_\text{B}$, la quantité $f(x_\text{B}, y)$ décroît de plus en plus. La dérivée seconde par rapport à y est donc négative.

.....

12.2 f) De même, en se déplaçant dans la direction x croissant à y fixe à $y = y_\text{B}$, la quantité $f(x, y_\text{B})$ croît de plus en plus. La dérivée seconde par rapport à x est donc positive.

.....

12.3 c) On a les équivalences suivantes :

$$\frac{\partial V}{\partial h} > \frac{\partial V}{\partial r} \iff \frac{\pi r^2}{3} > \frac{2\pi rh}{3} \iff r > 2h.$$

.....

12.4 a) Il faut sommer la surface du fond de la casserole et la surface latérale.

.....

12.4 b) C'est le volume d'un cylindre de rayon R et de hauteur H.

.....

12.4 c) Il faut utiliser les deux résultats précédents.

.....

12.4 d) On fait varier le rayon R pour une valeur de V fixée à V_0. La notation $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}R}(R, V_0)$ n'est pas adéquate, la notation « d » étant réservée aux fonctions d'une seule variable.

.....

12.4 e) Pour minimiser la surface, on cherche : $\left(\dfrac{\partial S}{\partial R}\right)_{V_0} = 2\pi R + 2V(-\dfrac{1}{R^2}) = 0$, soit $V = \pi R^3$. Or $V = \pi R^2 H$, on en déduit donc $R = H$ par identification. On peut vérifier dans sa cuisine que cela correspond bien au choix « standard » des industriels.

.....

12.5 c) Par intégrations successives, on obtient :

$$\frac{\partial n}{\partial x}(x,t) = px + A \quad \text{donc} \quad n(x,t) = \frac{px^2}{2} + Ax + B.$$

Les conditions aux limites imposent :

$$\begin{cases} n(0,t) = B & = n_0 \\ n(L,t) = \dfrac{pL^2}{2} + AL + B & = n_0 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} B & = n_0 \\ A & = -\dfrac{pL}{2}. \end{cases}$$

La fonction n s'écrit alors :

$$n(x,t) = \frac{px^2}{2} - \frac{pL}{2}x + n_0 = \frac{p}{2}x(x-L) + n_0.$$

.....

12.6 b) On a une fonction qui ne dépend que de t. On sépare les variables, en écrivant :

$$-\frac{\mathrm{d}n}{n^2} = \frac{\mathrm{d}t}{n_c\tau} \quad \text{donc} \quad \mathrm{d}\Big(\frac{1}{n}\Big) = \mathrm{d}\Big(\frac{t}{n_c T}\Big).$$

On intègre :

$$\frac{1}{n(t)} - \frac{1}{n_0} = \frac{t}{n_c\tau} \quad \text{donc} \quad n(t) = \frac{n_0}{1 + \dfrac{n_0 t}{n_c\tau}}.$$

.....

12.6 c) On a une équation différentielle sur t : $\dfrac{\partial n}{\partial t}(x,t) + \dfrac{n(x,t)}{\tau} = p$. C'est une équation linéaire dont la solution est de la forme $n(x,t) = A\exp\Big(-\dfrac{t}{\tau}\Big) + p\tau$. La condition initiale impose $n(x,0) = n_0\Big(1 - \dfrac{x}{L}\Big)$. On a donc :

$$A = n_0\Big(1 - \frac{x}{L}\Big) - p\tau = A(x).$$

La solution est donc de la forme :

$$n(x,t) = n_0\Big(1 - \frac{x}{L}\Big)\exp\Big(-\frac{t}{\tau}\Big) + p\tau\Big(1 - \exp\Big(-\frac{t}{\tau}\Big)\Big).$$

.....

Fiche n° 13. Diffusion thermique

Réponses

13.1 a) ..... (d)

13.1 b) ..... (b)

13.1 c) ..... (c)

13.1 d) ..... $\mathrm{d}U = \mu c \dfrac{\partial T}{\partial t} S \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t$

13.1 e) ..... (b)

13.1 f) ..... (a)

13.1 g) ..... (c)

13.1 h) ..... $-\dfrac{\partial j_Q}{\partial x} S \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t$

13.2 a) ..... (a)

13.2 b) ..... (a)

13.2 c) ..... (b)

13.3 a) ..... $\sqrt{2}$

13.3 b) ..... $1/\sqrt{2}$

13.3 c) 4

13.3 d) 2

13.4 a) ..... (a)

13.4 b) ..... 2×10^{-3}

13.4 c) ..... oui

13.5 a) ..... $T(x) = \dfrac{T_2 - T_1}{L} x + T_1$

13.5 b) ..... (b) et (c)

13.5 c) ..... (a)

13.6 a) ..... (b)

13.6 b) ..... (c)

13.6 c) ..... (d)

13.6 d) ..... (a)

13.7 a) ..... (a)

13.7 b) ..... (c)

13.7 c) ..... (c)

13.7 d) ..... en série

13.7 e) ..... $1{,}1 \times 10^3\,\mathrm{W}$

13.8 ..... $\dfrac{T_1 + R_{\mathrm{th}} h_2 S T_2}{1 + R_{\mathrm{th}} h_2 S}$

13.9 a) ..... $4{,}5 \times 10^{-2}\,\mathrm{K \cdot W^{-1}}$

13.9 b) ..... $0{,}53\,\mathrm{K \cdot W^{-1}}$

13.9 c) ..... (c)

13.9 d) ..... $3{,}2 \times 10^{-1}\,\mathrm{K \cdot W^{-1}}$

13.9 e) ..... (a)

13.10 a) ..... 0,7 m

13.10 b) ..... 0,8 m

13.10 c) ..... (cub., (c)) (cyl., (a)) (sph., (b))

13.10 d) ..... Sphérique

13.10 e) ..... 11 °C

13.11 ..... (c)

13.12 a) .. $\dfrac{\mathrm{d}\theta_{\mathrm{i}}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\theta_i}{R_{\mathrm{th}} C_{\mathrm{th}}} = \dfrac{1}{R_{\mathrm{th}} C_{\mathrm{th}}} (R_{\mathrm{th}} \phi_{\mathrm{i}} + \theta_{\mathrm{e}})$

13.12 b) ..... $\dfrac{1}{R_{\mathrm{th}}} (\theta_{\mathrm{i}0} - \theta_{\mathrm{e}0} - \theta_{\mathrm{e}1} \cos(\omega t))$

13.13 a) ..... (a)

13.13 b) ..... (a)

13.14 ..... Les bottes de paille

13.15 a) ..... $\boxed{\mathrm{d}U = \mu c \dfrac{\partial T}{\partial t} S \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t}$

13.15 b) ..... $\boxed{\lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} S \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t}$

13.15 c) ..... $\boxed{p_{\text{prod}} S \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t}$

13.15 d) ..... $\boxed{\mu c \dfrac{\partial T}{\partial t} = \lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + p_{\text{prod}}}$

13.16 a) ..... $\boxed{\mathrm{d}U = \mu c \dfrac{\partial T}{\partial t} S \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t}$

13.16 b) ..... $\boxed{\lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} S \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t}$

13.16 c) ..... $\boxed{\text{c}}$

13.16 d) ... $\boxed{\mu c \dfrac{\partial T}{\partial t} = \lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} - h \dfrac{p}{S}(T(x,t) - T_{\text{ext}})}$

13.17 a) ..... $\boxed{\text{b}}$

13.17 b) . $\boxed{\dfrac{R_{\text{th}} h_1 S + \dfrac{h_1}{h_2}}{1 + \dfrac{h_1}{h_2} + R_{\text{th}} h_1 S} T_1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{h_1}{h_2} + R_{\text{th}} h_1 S} T_2}$

13.17 c) .. $\boxed{\dfrac{1}{1 + \dfrac{h_2}{h_1} + R_{\text{th}} h_2 S} T_1 + \dfrac{\dfrac{h_2}{h_1} + R_{\text{th}} h_2 S}{1 + \dfrac{h_2}{h_1} + R_{\text{th}} h_2 S} T_2}$

Corrigés

13.1 a) On utilise l'analyse dimensionnelle.

.....

13.1 c) Il faut utiliser la première loi de Joule, en supposant la tranche suffisamment fine pour considérer la température uniforme. À l'instant t, l'énergie interne de l'élément de volume de section S et de longueur $\mathrm{d}x$ peut s'écrire : $U(t) = \mu(S\,\mathrm{d}x)cT(x,t)$.

.....

13.1 d) On exprime l'énergie interne à l'instant $t + \mathrm{d}t$: $U(t+\mathrm{d}t) = \mu c S\,\mathrm{d}x T(t+\mathrm{d}t)$ puis on calcule la différence $\mathrm{d}U = U(t+\mathrm{d}t) - U(t)$.

.....

13.1 e) On considère $\mathrm{d}t$ suffisamment court pour considérer $\vec{j_Q}$ constant entre t et $t + \mathrm{d}t$. Le vecteur $\vec{S}$ entrant est orienté suivant $\vec{e_x}$.

.....

13.1 f) Attention aux conventions de signe ! Le vecteur $\vec{S}$ entrant est orienté dans le sens $-\vec{e_x}$.

.....

13.1 g) Il n'y a pas de transfert thermique au niveau de la surface latérale du fait des orientations réciproques de $\vec{j_Q}$ et de la surface considérée.

.....

13.1 h) On a $j_Q(x,t)S\,\mathrm{d}t - j_Q(x+\mathrm{d}x,t)S\,\mathrm{d}t = -\dfrac{\partial j_Q}{\partial x} S\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x$. On peut vérifier qualitativement le signe pour éviter les étourderies.

.....

13.2 a) La situation est unidimensionnelle : la température ne dépend spatialement que de x.

.....

13.2 b) Le courant thermique $\vec{j_Q} = -\lambda \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, T$ est donc dirigé seulement selon $\vec{e_x}$.

.....

13.2 c) La variation d'énergie interne pendant $\mathrm{d}t$ est $\mathrm{d}U = \mu(S\,\mathrm{d}x)c\dfrac{\partial T}{\partial t}\,\mathrm{d}t$. Cette variation est due au flux thermique $\Phi\,\mathrm{d}t = j_Q(x,t)S\,\mathrm{d}t - j_Q(x+\mathrm{d}x,t)S\,\mathrm{d}t = -\dfrac{\partial j_Q}{\partial x}S\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x$. Comme $j_Q = -\lambda\dfrac{\partial T}{\partial x}$, on a :

$$\mu(S\,\mathrm{d}x)c\frac{\partial T}{\partial t}\,\mathrm{d}t = \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}S\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x,$$

qui se simplifie en $\dfrac{\partial T}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ avec $D = \dfrac{\lambda}{\mu c}$. On vérifie donc l'équation de diffusion libre à une dimension sans source.

.....

13.4 a) Lorsque $\mathrm{Fo} \ll 1$, il ne s'est pas écoulé suffisamment de temps pour que la diffusion ait eu lieu : le processus peut être considéré comme adiabatique.

Lorsque $\mathrm{Fo} \gg 1$, suffisamment de temps s'est écoulé pour que la diffusion ait eu lieu.

.....

13.4 c) Le nombre de Fourier vaut :

$$\mathrm{Fo} = \frac{13\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}} \times 1{,}5\times10^{-2}\,\mathrm{s}}{7\,800\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}} \times 480\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}} \times \left(5\times10^{-3}\,\mathrm{m}\right)^2} = 2\times10^{-3} \ll 1.$$

L'hypothèse d'une transformation adiabatique est donc valide.

.....

13.5 a) L'équation de la diffusion devient $\dfrac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} = 0$, soit $T(x) = Ax + B$. On utilise enfin les conditions limites $T(0) = T_1$ et $T(L) = T_2$. Le profil de température est donc linéaire dans la barre en régime permanent.

.....

13.5 b) L'hypothèse de barre homogène permet d'affirmer que la conductivité est identique dans toute la barre. L'hypothèse de régime permanent permet d'affirmer que $\overrightarrow{j_Q}$ est à flux conservatif. L'hypothèse des parois latérales calorifugées permet d'affirmer que le flux n'est orienté que suivant $\overrightarrow{e_x}$.

.....

13.5 c) On a $\Phi(x) = \displaystyle\iint_S \overrightarrow{j_Q}(x)\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S} = j(x)S = -\lambda S\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = \frac{\lambda S}{L}(T_1 - T_2)$.

.....

13.6 a) La contrainte est due à l'inhomogénéité spatiale d'une grandeur intensive.

.....

13.6 b) La réponse correspond au flux d'une grandeur, le processus tendant à diminuer l'inhomogénéité spatiale liée à la contrainte.

.....

13.6 c) Le modèle proposé correspond donc au cas où l'on fait l'hypothèse d'une réponse linéaire du système.

.....

13.6 d) C'est donc une propriété intrinsèque du milieu.

.....

13.7 a) On a $R_{\mathrm{th,v}} = \dfrac{L}{\lambda S} = \dfrac{5\times10^{-3}\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{W\cdot K^{-1}\cdot m^{-1}}\times1\,\mathrm{m^2}} = 5\times10^{-3}\,\mathrm{K\cdot W^{-1}}$.

.....

13.7 b) On a $\Delta T = 19\,^\circ\mathrm{C} - 9\,^\circ\mathrm{C} = 10\,^\circ\mathrm{C}$. Le flux Φ vaut donc $\Phi = \dfrac{\Delta T}{R_{\mathrm{th}}} = \dfrac{10}{5\times10^{-3}}\mathrm{W} = 2\times10^3\,\mathrm{W}$.

.....

13.7 c) On a $\Phi = \dfrac{T_1 - T(0)}{R_{\mathrm{th},1}} = h_1S(T_1 - T(0))$ et $\Phi = \dfrac{T(L) - T_2}{R_{\mathrm{th},2}} = h_2S(T(L) - T_2)$.

.....

13.7 d) Les couches sont traversées par le même flux thermique : ainsi, les résistances thermiques sont en série.

.....

13.7 e) On a $\Phi' = \dfrac{1}{R'_{\text{th}}}(T_1 - T_2)$. Les résistances thermiques sont en série ; donc

$$R'_{\text{th}} = R_{\text{th}} + R_{\text{th},1} + R_{\text{th},2} = \frac{L}{\lambda S} + 2 \times \frac{1}{hS} = 9 \times 10^{-3}\,\text{K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

On a donc $\Phi' = \dfrac{10\,\text{K}}{9 \times 10^{-3}\,\text{K} \cdot \text{W}^{-1}} \approx 1{,}1 \times 10^3\,\text{W}$. Les pertes sont presque deux fois plus faibles que dans le cas du premier modèle : des conditions limites peu réalistes peuvent conduire à surestimer fortement les pertes thermiques.

.....

13.8 Par substitution, on élimine ϕ : on a $T_1 - T(L) = R_{\text{th}} h_2 S(T(L) - T_2)$ puis on isole $T(L)$. Ainsi,

$$T(L) = \frac{T_1 + R_{\text{th}} h_2 S T_2}{1 + R_{\text{th}} h_2 S}.$$

.....

13.9 a) La surface du mur en brique est de $7{,}5\,\text{m}^2 - 1{,}2\,\text{m}^2 = 6{,}3\,\text{m}^2$. La résistance de la brique est :

$$R_{\text{b}} = \frac{e_{\text{b}}}{\lambda_{\text{b}}(S_{\text{tot}} - S_{\text{f}})} = 4{,}53 \times 10^{-2}\,\text{K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

.....

13.9 b) La résistance de l'isolant est $R_{\text{i}} = \dfrac{e_{\text{i}}}{\lambda_{\text{i}}(S_{\text{tot}} - S_{\text{f}})} = 5{,}29 \times 10^{-1}\,\text{K} \cdot \text{W}^{-1}$.

.....

13.9 d) La résistance de la brique et celle de l'isolant sont en série ; d'où $R_{\text{mur}} = R_{\text{b}} + R_{\text{i}} = 5{,}74 \times 10^{-1}\,\text{K} \cdot \text{W}^{-1}$.

Les résistances R_{mur} et R_{f} sont en parallèle. La résistance équivalente du mur est alors :

$$R_{\text{eq}} = \frac{R_{\text{mur}} R_{\text{f}}}{R_{\text{mur}} + R_{\text{f}}} = 3{,}16 \times 10^{-1}\,\text{K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

.....

13.9 e) Pour maintenir cet écart, le système de chauffage doit fournir un flux thermique ϕ tel que :

$$\phi = \frac{\Delta T}{R_{\text{eq}}} = \frac{15\,\text{K}}{3{,}16 \times 10^{-1}\,\text{K} \cdot \text{W}^{-1}} = 47{,}5\,\text{W}.$$

.....

13.10 c) Il faut calculer les surfaces d'échange pour les différents igloos afin d'identifier le dénominateur des intégrales. En notant r la variable d'espace, on a $S_{\text{cub.}} = 5r^2$, $S_{\text{cyl.}} = \pi r^2 + 2\pi r \times r = 3\pi r^2$ et $S_{\text{sph.}} = 2\pi r^2$.

.....

13.10 d) Toutes les résistances thermiques sont de la forme $R_{\text{th}} = \displaystyle\int_a^{a+e} \frac{\text{d}r}{\alpha r^2} = \frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{a+e}\right] = \frac{e}{\alpha a(a+e)}$.

On peut alors facilement calculer les résistances thermiques pour les différents igloos en identifiant pour chacun la valeur de α et a. D'où :

$$R_{\text{th, cub.}} = \frac{0{,}1\,\text{m}}{5 \times 0{,}2\,\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \times 1\,\text{m} \times 1{,}1\,\text{m}} = \frac{1}{55 \times 0{,}2}\text{K} \cdot \text{W}^{-1} = \frac{1}{11}\text{K} \cdot \text{W}^{-1}$$

$$R_{\text{th, cyl.}} = \frac{0{,}1\,\text{m}}{3\pi \times 0{,}2\,\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \times 0{,}7\,\text{m} \times 0{,}8\,\text{m}} = \frac{1}{52{,}1 \times 0{,}2}\text{K} \cdot \text{W}^{-1} = \frac{1}{10{,}4}\text{K} \cdot \text{W}^{-1}$$

$$R_{\text{th, sph.}} = \frac{0{,}1\,\text{m}}{2\pi \times 0{,}2\,\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \times 0{,}8\,\text{m} \times 0{,}9\,\text{m}} = \frac{1}{44{,}6 \times 0{,}2}\text{K} \cdot \text{W}^{-1} = \frac{1}{8{,}9}\text{K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

.....

13.10 e) On a $\Delta T = R_{\text{th,C}}\phi = \dfrac{100\,\text{W}}{8{,}9\,\text{W} \cdot \text{K}^{-1}} = 11{,}2\,°\text{C}$.

.....

13.12 a) La loi des nœuds en termes de potentiels appliquée en N donne :

$$C_{\text{th}}\frac{\mathrm{d}\theta_\text{i}}{\mathrm{d}t} = \phi_\text{i} + \frac{1}{R_{\text{th}}}(\theta_\text{e} - \theta_\text{i}) \qquad \text{donc} \qquad \frac{\mathrm{d}\theta_\text{i}}{\mathrm{d}t} + \frac{\theta_\text{i}}{R_{\text{th}}C_{\text{th}}} = \frac{1}{R_{\text{th}}C_{\text{th}}}(R_{\text{th}}\phi_\text{i} + \theta_\text{e}).$$

.....

13.12 b) Si θ_i est une constante, l'équation différentielle se simplifie en : $\phi_\text{i}(t) = \dfrac{1}{R_{\text{th}}}(\theta_{\text{i}0} - \theta_{\text{e}0} - \theta_{\text{e}1}\cos(\omega t))$.

Le chauffage est donc en opposition de phase avec la température extérieure.

.....

13.13 b) Les résistances thermiques des isolants ⓐ et ⓑ s'écrivent respectivement :

$$R_\text{a} = \frac{1}{2\pi\lambda_\text{a}L}\ln\!\left(\frac{5}{1}\right) = \frac{1}{2\pi L}\left(\frac{1}{\lambda_\text{a}}\ln(5)\right) \qquad \text{et} \qquad R_\text{b} = \frac{1}{2\pi\lambda_\text{b}L}\ln\!\left(\frac{7}{5}\right) = \frac{1}{2\pi L}\left(\frac{1}{\lambda_\text{b}}[\ln(7) - \ln(5)]\right).$$

Les deux résistances étant en série et comme on cherche la température à l'interface entre ces deux isolants, la formule du pont diviseur de tension appliquée au potentiel donne :

$$\theta_M = 20\,^\circ\text{C} + \frac{R_\text{b}}{R_\text{a}+R_\text{b}} \times 80\,^\circ\text{C} = 20\,^\circ\text{C} + \frac{80\,^\circ\text{C}}{1 + \dfrac{\lambda_\text{b}}{\lambda_\text{a}}\dfrac{\ln(5)}{\ln(7)-\ln(5)}} = 20\,^\circ\text{C} + \frac{80\,^\circ\text{C}}{1 + 3\dfrac{1}{\frac{\ln(7)}{\ln(5)} - 1}}$$

$$= 20\,^\circ\text{C} + \frac{80\,^\circ\text{C}}{1 + 3\dfrac{1}{\frac{\ln(7)}{\ln(5)} - 1}} = 20\,^\circ\text{C} + \frac{80\,^\circ\text{C}}{1 + \dfrac{1}{0{,}07}} = 20\,^\circ\text{C} + \frac{7 \times 80\,^\circ\text{C}}{107} \approx 25{,}2\,^\circ\text{C}.$$

.....

13.14

Isolants	Épaisseur pour $r = 7$ e (cm)	Déphasage (pour $r = 7$) $\Delta\tau$	Énergie grise surfacique $\mathcal{E}_\text{S}$ (kWh · m^{-2})
Fibre de bois	26	17 h 00	78
Bottes de paille	36	14 h 30	3,6
Laine minérale	21	4 h 30	50
Vermiculite	35	19 h 20	84
Polystyrène expansé	22	4 h 40	140
Polyuréthane	16	4 h 30	160

.....

13.15 a) Il faut utiliser la première loi de Joule, en supposant la tranche suffisamment fine pour considérer la température uniforme. À l'instant t, l'énergie interne de l'élément de volume de section S et de longueur $\mathrm{d}x$ peut s'écrire : $U(t) = \mu(S\,\mathrm{d}x)cT(x,t)$.

.....

13.15 b) Le transfert reçu en x est $\overrightarrow{j_Q}(x,t) \cdot S\overrightarrow{e_x}\,\mathrm{d}t$. Le transfert reçu en $x + \mathrm{d}x$ est $\overrightarrow{j_Q}(x+\mathrm{d}x,t) \cdot S(-\overrightarrow{e_x})\,\mathrm{d}t$, le signe étant dû à l'orientation de $\overrightarrow{S}$. Le flux total reçu est la somme des flux précédents :

$$\Phi(x+\mathrm{d}x,t) = [j_Q(x,t) - j_Q(x+\mathrm{d}x,t)]S\,\mathrm{d}t = -\frac{\partial j_Q}{\partial x}(x+\mathrm{d}x,t)\,\mathrm{d}x S\,\mathrm{d}t = \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

.....

13.15 c) L'énergie produite est proportionnelle au volume de la tranche et vaut $p_{\text{prod}}S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$.

.....

13.16 a) Raisonnement identique à celui de l'entraînement précédent.

.....

13.16 b) Raisonnement identique à celui de l'entraînement précédent.

.....

13.16 d) La surface latérale vaut $p\,\mathrm{d}x$: attention à l'algébrisation.

La variation d'énergie interne de l'élément de volume de section S et de longueur $\mathrm{d}x$ est due aux flux thermiques conductifs suivant l'axe $(\mathrm{O}x)$ et conducto-convectifs en radial :

$$\mathrm{d}U = \mu c \frac{\partial T}{\partial t} S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - h(T(x,t) - T_{ext}) p\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,$$

soit $\mu c \dfrac{\partial T}{\partial t} = \lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} - h\dfrac{p}{S}(T(x,t) - T_{\text{ext}})$.

.....

13.17 a) Le premier graphique correspond au premier modèle ne prenant pas en compte les pertes conducto-convectives.

.....

13.17 b) À partir de la première et de la troisième ligne du système, on obtient :

$$h_1 S(T_1 - T(0)) = h_2 S(T(L) - T_2) \qquad \text{donc} \qquad T(L) = \frac{h_1}{h_2}(T_1 - T(0)) + T_2.$$

En injectant cette expression dans la deuxième équation, on trouve :

$$T(0)\left[1 + \frac{h_1}{h_2}\right] - \left(\frac{h_1}{h_2} T_1 + T_2\right) = R_{\text{th}} h_1 S(T_1 - T(0)) \quad \text{donc} \quad T(0)\left[1 + \frac{h_1}{h_2} + R_{\text{th}} h_1 S\right] = \left(R_{\text{th}} h_1 S + \frac{h_1}{h_2}\right) T_1 + T_2$$

$$\text{donc} \quad T(0) = \frac{R_{\text{th}} h_1 S + \dfrac{h_1}{h_2}}{1 + \dfrac{h_1}{h_2} + R_{\text{th}} h_1 S} T_1 + \frac{1}{1 + \dfrac{h_1}{h_2} + R_{\text{th}} h_1 S} T_2.$$

.....

13.17 c) On fait de même pour obtenir $T(L)$: à partir de la 1re et de la 3e ligne, on a : $T(0) = T_1 - \dfrac{h_2}{h_1}(T(L) - T_2)$. On injecte dans la deuxième équation :

$$T_1 + \frac{h_2}{h_1} T_2 - \left[1 + \frac{h_2}{h_1}\right] T(L) = R_{\text{th}} h_2 S(T(L) - T_2),$$

soit :

$$T(L) = \frac{1}{1 + \dfrac{h_2}{h_1} + R_{\text{th}} h_2 S} T_1 + \frac{\dfrac{h_2}{h_1} + R_{\text{th}} h_2 S}{1 + \dfrac{h_2}{h_1} + R_{\text{th}} h_2 S} T_2.$$

.....

Fiche n° 14. Transferts thermiques

Réponses

14.1 a) ..... positif

14.1 b) ..... négatif

14.1 c) ..... nul

14.2 a) ..... (b) et (e)

14.2 b) ..... $60\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$

14.3 a) ..... (b)

14.3 b) ..... (b)

14.3 c) ..... Même sens que $\vec{e_r}$

14.3 d) ..... Même sens que $\vec{e_r}$

14.3 e) ..... $2{,}9\times10^{5}\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$

14.3 f) ..... $1{,}4\times10^{5}\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$

14.4 ..... $\mathrm{W\cdot K^{-1}\cdot m^{-2}}$

14.5 a) ..... (b)

14.5 b) ..... $65\,^{\circ}\mathrm{C}$

14.6 a) ..... (c)

14.6 b) ..... $\lambda\dfrac{\pi a^2}{b}(T_0-T_a)$

14.7 a) ..... $62{,}9\,\mathrm{MW\cdot m^{-2}}$

14.7 b) ..... $3{,}8\times10^{26}\,\mathrm{W}$

14.7 c) ..... (c)

14.7 d) ..... (c)

14.8 a) ..... (b)

14.8 b) ..... (b)

14.8 c) ..... $1{,}5\,\mathrm{m^2}$

14.9 ..... $\mathrm{L^2\cdot T^{-1}}$

14.10 a) ..... (c)

14.10 b) ..... (b)

14.11 a) ..... $\dfrac{p_v}{2\lambda}x(L-x)+(T_1-T_0)\dfrac{x}{L}+T_0$

14.11 b) ..... (d)

14.11 c) ..... $60\,\mathrm{W\cdot m^{-3}}$

14.12 a) ..... $T_0+\dfrac{I^2}{2\gamma\lambda S^2}\left(\left(\dfrac{L}{2}\right)^2-x^2\right)$

14.12 b) 0

14.12 c) ..... $T_0+\dfrac{I^2}{\lambda\gamma S^2}\dfrac{L^2}{8}$

14.12 d) ..... (b) et (c)

14.13 a) ..... $1{,}0\times10^{-2}\,\mathrm{K\cdot W^{-1}}$

14.13 b) ..... $1{,}2\,\mathrm{W\cdot K^{-1}\cdot m^{-1}}$

14.13 c) ..... $4{,}0\,\mathrm{cm}$

14.14 a) ..... (a)

14.14 b) ..... (c)

Corrigés

14.2 a) Le profil de température dans le mur est une fonction affine en régime stationnaire.

On a alors $\overrightarrow{\text{grad}}\,T = \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\vec{e_x}$ indépendant de x. La loi de Fourier donne alors $\vec{\jmath}_{\text{th}} = -\lambda\,\overrightarrow{\text{grad}}\,T = -\lambda\dfrac{T_\text{C} - T_\text{A}}{e}\vec{e_x}$ pour tous les points de la dalle. Ici, $\overrightarrow{\text{grad}}\,T = \dfrac{T_\text{C} - T_\text{A}}{e}\vec{e_x}$ avec $\dfrac{T_\text{C} - T_\text{A}}{e} = 50\,\text{K}\cdot\text{m}^{-1}$.

.....

14.2 b) On a $\|\vec{\jmath}_{\text{th}}(\text{B})\| = \lambda\dfrac{|T_\text{C} - T_\text{A}|}{e} = 1{,}2\,\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1} \times \dfrac{10\,\text{K}}{0{,}2\,\text{m}} = 60\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$.

.....

14.3 a) La température ne dépend spatialement que de la distance r à l'axe $(\text{O}z)$. Par conséquent, on a :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,T = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\vec{e_r}.$$

.....

14.3 b) La température ne dépend spatialement que de la distance r à l'axe $(\text{O}z)$. Par conséquent, on a :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,T = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\vec{e_r}.$$

.....

14.3 c) On constate que $\overrightarrow{\text{grad}}\,T \cdot \vec{e_r} = \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} < 0$ donc $\vec{\jmath}_{\text{th}} \cdot \vec{e_r} > 0$.

.....

14.3 d) On constate que $\overrightarrow{\text{grad}}\,T \cdot \vec{e_r} = \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} < 0$ donc $\vec{\jmath}_{\text{th}} \cdot \vec{e_r} > 0$.

.....

14.3 e) On a $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = \dfrac{T_\text{C} - T_\text{A}}{\ln\left(\dfrac{c}{a}\right)}\dfrac{1}{r}$ donc $\|\vec{\jmath}_{\text{th}}(\text{A})\| = \vec{\jmath}_{\text{th}}(\text{A}) \cdot \vec{e_r} = -\lambda\dfrac{T_\text{C} - T_\text{A}}{\ln\left(\dfrac{c}{a}\right)}\dfrac{1}{a}$. Donc,

$$\lambda\frac{T_\text{A} - T_\text{C}}{\ln\left(\dfrac{c}{a}\right)}\frac{1}{a} = 400\,\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1} \times \frac{10\,\text{K}}{\ln(2)}\frac{1}{2\times10^{-2}\,\text{m}} = 2{,}9\times10^{5}\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}.$$

.....

14.3 f) On obtient $\vec{\jmath}_{\text{th}}(\text{C}) \cdot \vec{e_r} = -\lambda\dfrac{T_\text{C} - T_\text{A}}{\ln\left(\dfrac{c}{a}\right)}\dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{2}\vec{\jmath}_{\text{th}}(\text{A}) \cdot \vec{e_r}$.

.....

14.5 a) La puissance transmise par la paroi au fluide est $P_{p\to f} = hS(T_p - T_f)$. Par définition de la résistance thermique, on a $R_\text{cc} = \dfrac{T_p - T_f}{P_{p\to f}}$ donc $R_\text{cc} = \dfrac{1}{hS}$.

.....

14.5 b) On a $T_\text{toit} - T_\text{air} = \dfrac{P_{\text{toit}\to\text{air}}}{hS} = \dfrac{40\times10^{3}\,\text{W}}{20\,\text{W}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}\times50\,\text{m}^{2}} = 40\ \text{K}$.

.....

14.6 b) On obtient $P_0 = -\lambda\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}(0)\pi a^2$ avec $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}(0) = \dfrac{T_a - T_0}{b}$.

.....

14.7 a) On calcule $\varphi_\odot = 5{,}67\times10^{-8}\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-4}\times(5\,772\,\text{K})^4 = 6{,}29\times10^{7}\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$.

.....

14.7 b) On a $P_S = \varphi_\odot 4\pi R_\odot^2 = 6{,}29\times10^{7}\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\times4\pi\left(696\times10^{6}\,\text{m}\right)^2 = 3{,}83\times10^{26}\,\text{W}$.

.....

14.7 c) La puissance $\varphi(r)4\pi r^2$ traversant la sphère de rayon r étant identique à celle émise par le Soleil $\varphi_\odot 4\pi R_\odot^2$, il vient $\varphi(r) = \varphi_\odot\left(\dfrac{R_\odot}{r}\right)^2$.

.....

14.7 d) On trouve $\varphi(D_{ST}) = \varphi_\odot\left(\dfrac{R_\odot}{D_{ST}}\right)^2$. Donc,

$$\varphi(D_{ST}) = 6{,}29\times10^7\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}\times\left(\frac{696\times10^3\,\mathrm{km}}{150\times10^6\,\mathrm{km}}\right)^2 = 1{,}35\times10^3\,\mathrm{W\cdot m^{-2}} \quad \text{arrondi à} \quad 1{,}4\times10^3\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}.$$

.....

14.8 a) Le radiateur rayonne vers l'air la puissance $P_r = \sigma T_s^4 S$ et reçoit la puissance $P_a = \sigma T_a^4 S$ de la part de l'air. La puissance cédée par le radiateur à l'air est donc $P = P_r - P_a$.

.....

14.8 b) La loi de Newton rappelée dans la fiche donne le résultat.

.....

14.8 c) La puissance totale cédée par le radiateur à l'air est $P = \big(\sigma\big(T_s^4 - T_a^4\big) + h(T_s - T_a)\big)S$.

On a :

$$\begin{aligned}\sigma\big(T_s^4 - T_a^4\big) + h(T_s - T_a) &= 5{,}67\times10^{-8}\,\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-4}}\times\big(333^4 - 293^4\big)\mathrm{K}^4 + 10\,\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}}\times 40\,\mathrm{K}\\ &= 679\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}.\end{aligned}$$

Donc $S = \dfrac{P}{\sigma(T_s^4 - T_a^4) + h(T_s - T_a)} = \dfrac{1{,}0\times10^3\,\mathrm{W}}{679\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}} = 1{,}5\,\mathrm{m}^2$.

.....

14.10 b) La durée caractéristique τ de la diffusion thermique est liée à la longueur caractéristique L de l'œuf et à sa diffusivité thermique D par $\tau = \dfrac{L^2}{D}$. On en déduit que $\dfrac{\tau_a}{\tau_p} = \left(\dfrac{L_a}{L_p}\right)^2 \approx 3^2$ (où l'indice « a » est pour l'œuf d'autruche et « p » pour l'œuf de poule).

.....

14.11 a) En intégrant $\dfrac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} = -\dfrac{p_v}{\lambda}$ par rapport à x, on obtient $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{p_v}{\lambda}x + A$ puis $T(x) = -\dfrac{p_v}{\lambda}\dfrac{x^2}{2} + Ax + B$. Les conditions aux limites $T(0) = T_0$ et $T(L) = T_1$ mènent à $B = T_0$ et $A = \dfrac{T_1 - T_0}{L} + \dfrac{p_v L}{2\lambda}$.

.....

14.11 b) On pose $A = \dfrac{p_v L}{2\lambda} + \dfrac{T_1 - T_0}{L}$. La température est maximale en $x_1 = 3L/10$. Or $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{p_v}{\lambda}x + A$. On a donc $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = 0$ pour $x_1 = \dfrac{\lambda A}{p_v}$. Après calculs, on obtient $p_v = \dfrac{5\lambda}{L^2}(T_0 - T_1)$.

.....

14.11 c) On a $p_v = \dfrac{5\times1{,}2\,\mathrm{W\cdot K^{-1}\cdot m^{-1}}}{1\,\mathrm{m}^2}\times10\,\mathrm{K} = 60\,\mathrm{W\cdot m^{-3}}$.

.....

14.12 a) On note $A = \dfrac{I^2}{\lambda\gamma S^2}$. En intégrant $\dfrac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} = -A$ par rapport à x, on obtient $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -Ax + B$ puis $T(x) = -A\dfrac{x^2}{2} + Bx + C$. Les conditions aux limites $T\left(\pm\dfrac{L}{2}\right) = T_0$ mènent à $B = 0$ et $C = T_0 + AL^2/8$.

On peut aussi justifier $B = 0$ par un argument de symétrie du profil de température par rapport au plan $x = 0$. Le profil parabolique et le fait qu'on ait $T\left(\pm\dfrac{L}{2}\right) = T_0$ prouvent que $x \longmapsto T(x)$ est une fonction paire ; on en déduit que $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}(0) = 0$.

.....

14.12 d) On a $\vec{\jmath}_{\text{th}}\left(-\dfrac{L}{2}\right)\cdot\vec{e_x} = -\lambda\left.\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right|_{-L/2} < 0$ car $\left.\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right|_{-L/2} > 0$ et $\vec{\jmath}_{\text{th}}\left(\dfrac{L}{2}\right)\cdot\vec{e_x} = -\lambda\left.\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right|_{-L/2} > 0$ car $\left.\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right|_{-L/2} < 0$.

.....

14.13 a) Par définition de la résistance thermique du mur, on a $R = \dfrac{T_1 - T_2}{P_{1\to 2}} = \dfrac{10}{10^3} = 1{,}0\times 10^{-2}\,\mathrm{K\cdot W^{-1}}$.

.....

14.13 b) En notant $S = hL = 25\,\mathrm{m}^2$, la conductivité du béton est alors $\lambda_1 = \dfrac{e}{SR} = \dfrac{0,3}{25\times 10^{-2}} = 1{,}2\,\mathrm{W\cdot K^{-1}\cdot m^{-1}}$.

.....

14.13 c) Les deux matériaux sont associés en série. Afin que la puissance traversant le mur isolé soit divisée par 5 pour la même différence de température, il faut que la résistance thermique soit multipliée par 5. En notant R_1 la résistance du mur de béton et R_2 celle de la plaque de polystyrène, $R_1 + R_2 = 5R_1$, soit $R_2 = 4R_1$.

Ceci s'écrit alors $\dfrac{e_2}{\lambda_2 S} = 4\dfrac{e_1}{\lambda_1 S}$. L'épaisseur e_2 de polystyrène est donc $e_2 = 4e_1\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} = 4{,}0\,\mathrm{cm}$.

.....

14.14 a) La conductance est proportionnelle à la surface du mur. En écrivant que $G_m = KS_m$, on en déduit que $G'_m = K(S_m - S_f)$ et donc $G'_m = \dfrac{S_m - S_f}{S_m}G_m$.

.....

14.14 b) Le mur percé et la fenêtre sont associés en parallèle. La conductance thermique équivalente est la somme de la conductance de la fenêtre G_f et de celle du mur percé G'_m différente de G_m. Donc, on a :

$$G = G_f + \frac{S_m - S_f}{S_m}G_m = G_m\left(1 - \frac{S_f}{S_m}\right) + G_f.$$

.....

Fiche n° 15. Tables et diagrammes thermodynamiques

Réponses

15.1 a) .. $9{,}1 \times 10^{-4}\,\mathrm{g \cdot mL^{-1}}$

15.1 b) ..... (b)

15.1 c) ..... (a)

15.2 a) ..... ①

15.2 b) ..... ③

15.2 c) ..... ②

15.2 d) ..... 760,8 mmHg

15.2 e) ..... diphasé

15.2 f) $1{,}017 \times 10^{-3}\,\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1}}$

15.2 g) ..... $7{,}6672\,\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1}}$

15.2 h) ..... (c)

15.3 a) ..... isobare

15.3 b) ..... isotherme

15.3 c) ..... isochore

15.3 d) ..... $2V_1$

15.4 a) ..... (b)

15.4 b) ..... (a)

15.4 c) ..... (d)

15.5 a) 0

15.5 b) ..... $-\dfrac{p_0}{v_0}$

15.5 c) ..... ∞

15.5 d) ..... $-\gamma\dfrac{p_0}{v_0}$

15.5 e) ..... isochore

15.5 f) ..... isobare

15.5 g) ..... isotherme

15.5 h) ..... isentrope

15.6 a) ..... $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} - \dfrac{T}{c_p} = 0$

15.6 b) ..... (b)

15.6 c) ..... (b)

15.6 d) ..... (a)

15.7 ..... (a)

15.8 a) ..... (a) et (c)

15.8 b) ..... (a) et (d)

15.8 c) ..... (b), (c) et (d)

15.8 d) ..... (c) et (d)

15.8 e) ..... $800\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$

15.8 f) ... $-5\,000\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$

15.8 g) ..... $-1\,650\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$

15.9 a) ..... (b)

15.9 b) ..... (d)

15.9 c) ..... (c)

15.10 a) ..... (a) et (d)

15.10 b) ..... (b), (c) et (d)

15.10 c) ..... (b) et (c)

15.10 d) ..... (a)

15.11 a) ..... $\dfrac{R}{\ln(10) M v c_p}$

15.11 b) ..... isotherme

15.11 c) ..... isentrope

15.11 d) ..... isochore

15.11 e) ..... isobare

15.12 a) ..... (a)

15.12 b) ..... $1\,320\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$

15.12 c) ..... $2\,650\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$

15.12 d) ..... $420\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$

15.12 e) ..... (b)

15.12 f) ..... $x_\mathrm{B} = 40\,\%$

15.12 g) ..... (b)

15.13 a) ..... (b)

15.13 b) ..... (d)

15.13 c) ..... $2{,}45\,\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1}}$

15.13 d) ..... (d)

15.13 e) ..... $2{,}45\,\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1}}$

15.14 a) ..... $2\,675{,}6\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$

15.14 b) ..... $419{,}2\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$

15.14 c) ..... (c)

15.14 d) .... $-2\,031\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$

15.15 a) ..... (c)

15.15 b) ..... (b)

15.16 a) ..... (b)

15.16 b) ..... isotherme

15.16 c) ..... isentrope

15.16 d) ..... isochore

15.16 e) ..... isobare

15.17 a) ..... $\boxed{\dfrac{T_0}{c_p}}$

15.17 b) ..... $\boxed{0}$

15.17 c) ..... $\boxed{\dfrac{T_0}{c_v}}$

15.17 d) ..... $\boxed{\infty}$

15.17 e) ..... $\boxed{\text{isentrope}}$

15.17 f) ..... $\boxed{\text{isochore}}$

15.17 g) ..... $\boxed{\text{isobare}}$

15.17 h) ..... $\boxed{\text{isotherme}}$

15.18 a) ..... $\boxed{\text{c}}$

15.18 b) ..... $\boxed{\text{b}}$

15.19 a) ..... $\boxed{2\,680\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}}$

15.19 b) ..... $\boxed{\text{c}}$

15.19 c) .... $\boxed{8\,\text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}}$

15.19 d) ..... $\boxed{300\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}}$

15.19 e) ..... $\boxed{250\,^\circ\text{C}}$

15.19 f) ..... $\boxed{400\,^\circ\text{C}}$

15.19 g) ..... $\boxed{\text{a}}$

Corrigés

15.1 a) On a $v(T = 200\,^\circ\text{C}, p = 200\,\text{kPa}) = 1{,}0805\,\text{m}^3\cdot\text{kg}^{-1} = 1{,}0805\times10^6\,\text{mL}\cdot\text{kg}^{-1} = 1{,}0805\times10^3\,\text{mL}\cdot\text{g}^{-1}$ $\approx 1{,}1\times10^3\,\text{mL}\cdot\text{g}^{-1}$ donc $\rho = \dfrac{1}{v} = \dfrac{1}{1{,}1\times10^3} = 0{,}9090\cdots\times10^{-3}\,\text{g}\cdot\text{mL}^{-1} \approx 9{,}1\times10^{-4}\,\text{g}\cdot\text{mL}^{-1}$.

Remarque : La division ci-dessus « se pose à la main ». Il est aussi possible d'utiliser le développement limité autour de 0 de $(1+x)^\alpha = 1+\alpha x$ à l'ordre 1 : $\dfrac{1}{1{,}1\times10^3} = (1+0{,}1)^{-1}\times10^{-3} \approx (1-0{,}1)\times10^{-3} = 9\times10^{-4}$.

15.1 b) Par lecture de la table, on a $T_{\text{sat}}(200\,\text{kPa}) = 120{,}21\,^\circ\text{C}$.

15.1 c) Par lecture de la table, on a $100\,^\circ\text{C} < T_{\text{sat}}(200\,\text{kPa}) = 120{,}21\,^\circ\text{C}$: le fluide est donc monophasé sous forme de liquide.

15.2 d) À 100 °C, on a :

$$p_{\text{sat}} = 0{,}10142\,\text{MPa} = 0{,}10142\times10^6\times1\,\text{Pa} = 0{,}10142\times10^6\times\frac{1}{133,3}\,\text{mmHg} = 760{,}8\,\text{mmHg}.$$

15.2 e) On a $v = 1{,}03\,\text{cm}^3\cdot\text{g}^{-1} = 1{,}03\times10^{-3}\,\text{m}^3\cdot\text{kg}^{-1}$. Or, par lecture de la table, le volume massique du liquide saturant est $v_\ell(60\,^\circ\text{C}) = 1{,}017\times10^{-3}\,\text{m}^3\cdot\text{kg}^{-1}$ et celui de la vapeur saturante est $v_{\text{g}}(60\,^\circ\text{C}) = 7{,}6672\,\text{m}^3\cdot\text{kg}^{-1}$. Il vient que $v_\ell(60\,^\circ\text{C}) \leqslant v \leqslant v_{\text{g}}(60\,^\circ\text{C})$: le système est alors diphasé, c'est-à-dire un mélange de vapeur et de liquide.

15.2 h) Le volume massique vaut $v = 1\,030\,\text{cm}^3\cdot\text{g}^{-1}$, soit $v = 1{,}030\,\text{m}^3\cdot\text{kg}^{-1}$.

Or, $v_{\text{g}} = 7{,}6672\,\text{m}^3\cdot\text{kg}^{-1} \approx 7v \approx 7\times10^3 v_{\text{l}}$ donc il est numériquement raisonnable de considérer que $v_{\text{g}} - v_{\text{l}} \approx v_{\text{g}}$ et $v - v_{\text{l}} \approx v$, d'où $x_{\text{g}} \approx v/v_{\text{g}}$. La réponse est donc la (c).

15.3 d) La transformation est isobare donc $V_2 = \dfrac{T_2 V_1}{T_1} = 2V_1$.

15.4 a) La transformation est isotherme donc $PV = nRT$ est une constante.

15.4 b)

- Lors de la transformation (A) isobare, le volume augmente donc (b) ne convient pas. Dans le cas de (d), la transformation (C) isochore a lieu au volume minimal, ce qui est en contradiction avec la fiche synoptique où le volume prend sa valeur maximale pendant cette transformation ($V = 3V_1$) : la (d) ne convient donc pas.
- Pour la transformation (B) isotherme, la pression et le volume vérifient la relation $P = \dfrac{\text{cste}}{V}$ donc, en échelle linéaire, la représentation graphique de $P = f(V)$ est une branche d'hyperbole, ce qui ne peut que correspondre à (a).

.....

15.4 c) Le sens de rotation est horaire : le travail total reçu au cours du cycle est négatif, le cycle est moteur.

.....

15.5 h) La courbe isobare est de pente nulle donc il s'agit de la courbe ①.

La courbe isochore est de pente infinie donc il s'agit de la courbe ②.

Il reste deux courbes à identifier : la courbe isotherme vérifiant $p_{\text{iso}-T} = \dfrac{\text{A}}{v}$ et la courbe isentropique vérifiant $p_{\text{iso}-s} = \dfrac{B}{v^\gamma}$, où $A = nrT = p_0 v_0$ et $B = p_0 v_0^\gamma$ sont des constantes. L'identification des courbes se fait par un calcul de dérivée au point M_0 de coordonnées (p_0, v_0) :

$$\left(\frac{\mathrm{d}p_{\text{iso}-T}}{\mathrm{d}v}\right)(v_0) = -\frac{A}{v_0^2} = -\frac{p_0}{v_0} \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}p_{\text{iso}-s}}{\mathrm{d}v}\right)(v_0) = -\gamma\frac{B}{v_0^{\gamma+1}} = -\gamma\frac{p_0}{v_0} = \gamma\left(\frac{\mathrm{d}p_{\text{iso}-T}}{\mathrm{d}v}\right)(v_0)\,.$$

Au point M_0, la courbe isentrope est donc la courbe la plus pentue : la courbe ④ est la courbe isentrope et la courbe ③ est la courbe isotherme.

.....

15.6 a) En combinant la 2e identité thermodynamique et la seconde loi de Joule, il vient : $c_P\,\mathrm{d}T = T\,\mathrm{d}s + v\,\mathrm{d}p$. Le long d'une courbe isobare, $\mathrm{d}p = 0$. L'équation différentielle en $T(s)$ s'obtient en réorganisant les variables s et T de telle sorte qu'une dérivée $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}$ apparaisse : $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} - \dfrac{T}{c_p} = 0$.

.....

15.6 b) L'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} - \dfrac{T}{c_p} = 0$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants et sans second membre dont la solution est de la forme $T(s) = A\exp\left(\dfrac{s}{c_p}\right)$. Le choix (arbitraire) de la constante d'intégration A est ici fait de telle sorte que la courbe isobare passe par un état de référence (s_0, T_0) : $A = T_0\exp\left(-\dfrac{s_0}{c_p}\right)$, d'où $T(s) = T_0\exp\left(\dfrac{s - s_0}{c_p}\right)$.

Conseil : Tester la vraisemblance en remarquant que, d'une part, $T(s = s_0) = T_0$ *et, d'autre part,* $\dim(s - s_0) = \dim(c_p)$ *: l'argument d'exponentielle est bien sans dimension.*

.....

15.6 c) La loi de Laplace donne $p_1^{1-\gamma}T_1^\gamma = p_2^{1-\gamma}T_2^\gamma$, soit $p_2^{1-\gamma} = \left(\dfrac{T_1}{T_2}\right)^\gamma p_1^{1-\gamma}$; d'où $p_1\left(\dfrac{T_1}{T_2}\right)^{\gamma/(1-\gamma)}$.

.....

15.6 d) Graphiquement, $T_1 < T_2$, soit $\dfrac{T_1}{T_2} < 1$. Or, $\dfrac{p_2}{p_1} = \left(\dfrac{T_1}{T_2}\right)^{\gamma/(1-\gamma)}$ avec $\gamma > 1$, c'est-à-dire que $\dfrac{\gamma}{1-\gamma} < 0$. Ainsi, $\dfrac{T_1}{T_2} < 1$ implique que $\left(\dfrac{T_1}{T_2}\right)^{\gamma/(1-\gamma)} > 1$. Autrement dit, $\dfrac{p_2}{p_1} > 1$ donc $p_2 > p_1$.

.....

15.7 Le transfert thermique correspond géométriquement à l'aire du cycle parcouru dans le diagramme entropique. Il est compté positivement si le cycle est parcouru dans le sens horaire (moteur) et négativement si le cycle est parcouru dans le sens trigonométrique (récepteur). Attention ici, l'entropie est donnée en $\text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}$ donc $Q_{\text{ABCDA}} = (T_\text{B} - T_\text{A})(S_\text{C} - S_\text{B}) = 100 \cdot 1{,}5 \times 10^3 = 1{,}5 \times 10^5$ J.

.....

15.8 a) Une enthalpie massique est indiquée en $\mathrm{J \cdot kg^{-1}}$, et non en J. Le point A est à droite de la courbe de saturation et en dessous du point critique donc le fluide est à l'état gazeux. Les courbes isenthalpes ($\mathrm{d}h = 0$) sont quasiment horizontales, c'est-à-dire presque confondues avec des courbes isothermes ($\mathrm{d}T = 0$) : le modèle du gaz parfait peut être considéré comme valide au point A car la relation $\mathrm{d}h = c\,\mathrm{d}T$ n'est pas mise en défaut au point A. Enfin, le point A passe par la courbe isobare 0,05 bar représentée en pointillés.

.....

15.8 b) Le point B est à gauche de la courbe de saturation et en dessous du point critique donc le fluide est à l'état liquide. Une lecture graphique, réalisée à l'aide d'une règle graduée, puis l'application d'une « règle de trois », conduit à évaluer l'abscisse du point B comme étant égale à $600\,\mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$.

.....

15.8 c) La grandeur x représente le titre massique en *vapeur* dans le mélange. Le point E se situe à équidistance (le long de la courbe isotherme passant par le point E) des courbes isotitres $x = 0{,}6$ et $x = 0{,}8$. Ainsi, $x_\mathrm{E} = 0{,}7$.

Comme le titre en vapeur est de 0,7, celui en liquide est de 0,3.

.....

15.8 d) En passant de l'état E à l'état F (situé sur la courbe d'ébullition), le système passe d'un état diphasé à un état de liquide juste saturant : la vapeur saturante se liquéfie. De plus, cette transformation est isotherme ; or, l'eau étant un corps pur, elle est également isobare.

.....

15.8 f) Par lecture graphique, $s_\mathrm{F} = 800\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$. Ainsi, $s_\mathrm{F} - s_\mathrm{E} = 800 - 5800 = -5\,000\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$.

.....

15.8 g) L'incrément des courbes isenthalpes est de $200\,\mathrm{J \cdot kg^{-1}}$. Aussi, le point E étant situé à équidistance (le long de la courbe isotherme passant par le point E) des courbes isenthalpes 1800 et $2\,000\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$, il vient que $h_\mathrm{E} = 1\,900\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$. De même, $h_\mathrm{F} = 250\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$, d'où $h_\mathrm{F} - h_\mathrm{E} = 250 - 1900 = -1\,650\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$.

.....

15.9 a) Pour une phase condensée incompressible indilatable (domaine liquide, à gauche de la courbe de saturation), $\mathrm{d}h = c_p\,\mathrm{d}T$ donc, à T constante, h est constante. Une courbe isotherme doit donc être verticale dans cette zone.

Pour un mélange liquide-vapeur d'un corps pur (zone sous la courbe de saturation) à l'équilibre, si T est fixée alors p est fixée aussi. Une courbe isotherme doit donc être horizontale dans cette zone.

Pour un gaz parfait (domaine vapeur, à droite de la courbe de saturation, et pour une faible pression), $\mathrm{d}h = c_p\,\mathrm{d}T$ donc, à T constante, h est constante. Une courbe isotherme doit donc être verticale dans cette zone.

.....

15.9 b) On peut procéder par élimination :

- Il ne s'agit pas d'isobares car nous aurions alors des droites horizontales.
- Il ne s'agit pas d'isenthalpes car nous aurions alors des droites verticales.
- Il ne s'agit pas d'isothermes car, dans la zone gaz à faible pression (domaine de validité de l'hypothèse gaz parfait), nous aurions alors des droites verticales.
- Il ne s'agit pas d'isotitres car certaines courbes sont en dehors du domaine liquide + vapeur.

Il s'agit donc nécessairement d'isentropes.

.....

15.9 c) Ces courbes n'existent que dans le domaine « Liquide + Vapeur » et se rejoignent toutes au point critique, il s'agit donc d'isotitres.

.....

15.10 a) La pression est de 100 bar donc $100 \times 1{,}00 \times 10^5\,\mathrm{Pa} = 1{,}00 \times 10^7\,\mathrm{Pa}$.

La température est indiquée en °C donc la réponse (b) ne convient pas. Le point A est à gauche de la courbe de saturation et en dessous du point critique donc le fluide est à l'état liquide.

.....

15.10 b) Par lecture graphique, la pression est de $10^0\text{bar} = 1\,\text{bar} \neq 1\,\text{Pa}$ donc la réponse (a) ne convient pas. Le point B est sous la courbe de saturation donc la réponse (b) convient. La valeur de x indiquée correspond au titre massique en vapeur. Sa valeur est de $0,4$ donc le titre en liquide est $1 - 0{,}4 = 0{,}6$.

.....

15.10 c) Le long d'une isotherme, on a $\mathrm{d}T = 0$; avec la seconde loi de Joule, cela implique : $\mathrm{d}h = 0$.

Les courbes isenthalpes sont donc des portions de droites parallèles à l'axe des ordonnées (puisque h est la grandeur en abscisses).

.....

15.10 d) Le modèle du gaz parfait est une bonne approximation lorsque les courbes isothermes ($\mathrm{d}T = 0$) sont également des courbes isenthalpes ($\mathrm{d}h = c_p\,\mathrm{d}T = 0$), ce qui tend à être le cas en zone (a).

.....

15.11 a) L'équation d'état donne $p = \dfrac{R}{Mv}T$ donc, en différentiant à v fixé, il vient $\mathrm{d}p = \dfrac{R}{Mv}\,\mathrm{d}T$. L'utilisation de la 2$^{\text{nde}}$ loi de Joule puis la division par $p\ln(10)$ permet d'écrire :

$$\frac{\mathrm{d}p}{p}\frac{1}{\ln(10)} = \frac{R}{Mv}\frac{1}{p\ln(10)}\frac{\mathrm{d}h}{c_p} \quad \text{soit} \quad \frac{\mathrm{d}(\ln(p)/\ln(10))}{\mathrm{d}h} = \frac{R}{c_pMv\ln(10)}\frac{1}{p} \quad \text{d'où} \quad \frac{\mathrm{d}\log(p)}{\mathrm{d}h} = \frac{A}{p} \text{ avec } A = \frac{R}{\ln(10)Mvc_p}$$

une constante pour une transformation isochore ($v = \text{cste}$).

.....

15.11 e) La courbe isobare est de pente nulle ; donc il s'agit de la courbe ④.

Du fait de la seconde loi de Joule, la courbe isotherme est également une courbe isenthalpe, c'est-à-dire de pente infinie. Ainsi, la courbe isotherme est la courbe ①.

Pour une courbe isochore, il a été montré que $\dfrac{\mathrm{d}\log(p)}{\mathrm{d}h} = \dfrac{A}{p}$ avec A une constante.

Ainsi, dans un diagramme $(\log(p), h)$, il apparaît que la pente n'est pas constante ; elle tend vers l'infini lorsque h tend vers 0 : la courbe ③ est donc la courbe isochore et, par élimination, la courbe ② est la courbe isentrope.

.....

15.12 a) L'échelle des abscisses étant linéaire, il est possible d'utiliser la position du point B par rapport à la courbe de saturation pour déterminer si le fluide contient plus de liquide ou plus de vapeur. Ici, le point B est plus proche de la courbe de bulle (isotitre $x = 0$ en trait plein) que de la courbe de rosée (isotitre $x = 1$ en trait plein) donc il y a davantage de liquide que de vapeur.

.....

15.12 b) L'enthalpie massique du fluide diphasé correspond à l'abscisse du point B : $h_{\text{B}} = 1\,320\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$.

.....

15.12 c) L'enthalpie massique de la vapeur saturante de l'état représenté par le point B correspond à l'abscisse du projeté de B sur la courbe de rosée : $h_{\text{v,B}} = 2\,650\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$.

.....

15.12 d) L'enthalpie massique du liquide saturant de l'état représenté par le point B correspond à l'abscisse du projeté de B sur la courbe de bulle : $h_{\text{l,B}} = 420\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$.

.....

15.12 f) On a

$$x_{\text{B}} = \frac{h_{\text{B}} - h_{\text{l,B}}}{h_{\text{v,B}} - h_{\text{l,B}}} = \frac{1320 - 420}{2650 - 420} = \frac{900}{2230} \approx \frac{900}{2250} = \frac{9000}{2250} \times 10^{-1} = 0{,}40,$$

ce qui est cohérent avec le fait que le point B soit placé sur la courbe isotitre $x = 0{,}4$.

.....

15.12 g) Pour rappel, l'enthalpie massique du liquide saturant d'un mélange diphasé correspond à l'abscisse du projeté de cet état sur la courbe de bulle tandis que l'enthalpie massique de la vapeur saturante correspond à l'abscisse du projeté sur la courbe de rosée. Dans le diagramme $\big(\log(p), h\big)$, la distance entre ces deux projetés est $h_\text{v} - h_\text{l} = \Delta_\text{vap}h$.

Graphiquement, il apparaît que h_v diminue et que h_l augmente avec la pression, d'où une enthalpie de vaporisation $\Delta_\text{vap}h$ qui diminue lorsque la pression augmente.

.....

15.13 b) L'équation d'état des gaz parfaits est $PV = nRT$ avec n la quantité de matière et V le volume.

Or, $n = m/M$ (m est la masse) donc il vient $PV = mTR/M$, soit $Pv = rT$ avec $v = V/m$.

.....

15.13 c) On a $v = \dfrac{rT}{p} = \dfrac{0{,}46 \times 10^3 \times (260 + 273)}{100 \times 10^3} = 2{,}45\,\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$.

.....

15.13 d) De manière générale, les points $\text{M}(x, y)$ le long d'un segment défini par les points $\text{M}_1(x_1, y_1)$ et $\text{M}_2(x_2, y_2)$ vérifient $y = y_1 + (x - x_1)\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

.....

15.14 c) Par extensivité et additivité de l'enthalpie, $h_\text{i} = xh_\text{g} + (1 - x)h_\ell$ avec x le titre massique de la vapeur saturante. Ici, $x = 90\,\% = 0{,}90$ et $1 - x = 10\,\% = 0{,}10$.

.....

15.14 d) On a $q = \Delta h = h_\ell(P = 1{,}0142\,\text{bar}) - h_\text{i}$ avec h_i l'enthalpie massique initiale du mélange et

$$h_\text{i} = 10\,\% \times h_\ell(P = 1{,}0142\,\text{bar}) + 90\,\% \times h_\text{g}(P = 1{,}0142\,\text{bar}) = 10\,\% \times 419{,}2 + 90\,\% \times 2\ 675{,}6 = 2\,450\,\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

Ainsi, le transfert thermique massique est $q = 419{,}2 - 2\ 450 = -2\,031\,\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

.....

15.15 a) La transformation (D) étant isentropique, la loi de Laplace est valide : $PV^\gamma = \text{cste}$. De plus, le gaz est parfait donc l'injection de l'équation d'état $PV = nRT$ dans la loi de Laplace aboutit à $TV^{\gamma-1} = \text{cste}$.

.....

15.15 b) Lors de la transformation (D) isentrope, le volume décroît de $3V_1$ à V_1. De plus, le volume et la température ne sont pas reliés par une relation linéaire ($TV^{\gamma-1} = \text{cste}$). Ainsi, seule la réponse (b) vérifie ces deux conditions.

.....

15.16 a) L'équation d'état des gaz parfaits donne $p = \dfrac{nR}{V}T$.

Or, ici, $V = m \times v_0 = nMv_0$. Ainsi, $p = \dfrac{R}{Mv_0}T$, d'où $\dfrac{\partial p}{\partial T} = \dfrac{R}{Mv_0} = \text{cste}$: une courbe isochore est une courbe de pente constante (et positive) dans un diagramme (p, T).

.....

15.16 e) La courbe isobare est de pente nulle donc il s'agit de la courbe ①. La courbe isotherme est de pente infinie donc il s'agit de la courbe ④.La courbe isochore est une courbe de pente constante (finie et non nulle) donc il s'agit de la courbe ③.Par élimination, la courbe ② est la courbe isentrope.

.....

15.17 h) La courbe isotherme est de pente nulle donc il s'agit de la courbe ④.La courbe isentrope est de pente infinie donc il s'agit de la courbe ①.

Il reste deux courbes à identifier : la courbe isobare de pente $\dfrac{T_0}{c_p}$ et la courbe isochore de pente $\dfrac{T_0}{c_v}$. Le rapport

entre la pente de la courbe isochore et celle de la courbe isobare est $\frac{T_0}{c_v} \times \left(\frac{T_0}{c_p}\right)^{-1} = \frac{c_p}{c_v} = \gamma > 1$: au point M_0, la courbe isochore est plus pentue que la courbe isobare donc la courbe ② est la courbe isochore et la courbe ③ est la courbe isobare.

.....

15.18 a) La transformation (D) étant isentropique, la loi de Laplace est valide : $PV^\gamma = \text{cste}$. De plus, le gaz est parfait donc l'injection de l'équation d'état $PV = nRT$ dans la loi de Laplace aboutit à $P^{1-\gamma}T^\gamma = \text{cste}$.

.....

15.18 b) Lors de la transformation (A) isobare, la température augmente donc la réponse (a) est à rejeter. La transformation (C) étant isochore, la relation entre la pression et la température est une relation linéaire $P = \frac{nRT}{V}$, ce qui correspond à une portion de droite. Pour la transformation (D) isentropique, la pression et la température vérifient $P = \frac{\text{cste}}{T^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}}$, ce qui ne peut pas être une portion de droite puisque $\gamma > 1$; la réponse (c) ne convient pas.

.....

15.19 a) Le point I se trouve à l'intersection de la courbe isobare $250\,\text{mbar} = 2{,}5 \times 10^{-1}\,\text{bar}$ et de la courbe isotherme 100 °C. La courbe isobare de $2{,}5 \times 10^{-1}$ bar est la droite horizontale située à peu près à mi-chemin entre la deuxième et la troisième graduation en partant de la graduation associée à 10^{-1}bar. La courbe isotherme de 100 °C correspond à la courbe en pointillés étiquetée « $T = 100\,°\text{C}$ ».

Par lecture graphique de l'abscisse du point I, on a $h_\text{I} = 2\,680\,\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

.....

15.19 b) Le point I se trouve à droite de la courbe de saturation (et bien en dessous de l'isobare critique, une droite horizontale passant par le sommet de la courbe de saturation). Ainsi, le fluide est initialement une vapeur sèche.

.....

15.19 c) Le point I passe par une courbe isentrope qui est ici représentée à l'aide de tirets. La valeur associée n'est pas indiquée, mais les deux courbes isentropes voisines indiquent $7\,\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ et $9\,\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$. L'incrément du réseau des courbes isentropes est de $1\,\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ donc $s_\text{I} = 8\,\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$.

.....

15.19 d) Le point F est à l'intersection de la courbe isentrope $s_\text{F} = s_\text{I} = 8\,\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ et de la courbe isobare $p_\text{F} = 1\,\text{bar}$, c'est-à-dire la droite passant par l'ordonnée 10^0 bar. Par lecture graphique de l'abscisse du point F, on a $h_\text{F} = 2\,980\,\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ donc $w = 2980 - 2680 = 300\,\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

.....

15.19 e) Le point F passe par la courbe isotherme comprise entres les courbes isothermes de 200 °C et 300 °C. L'incrément étant de 50 °C, cette isotherme est associée à 250 °C donc $T_\text{F} = 250\,°\text{C}$.

.....

15.19 f) L'entropie finale est désormais $s_{\text{F}'} = (1 + 6\,\%)s_\text{F} = (1 + 0{,}06) \times 8 = 8 + 0{,}48 \approx 8{,}5\,\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$. Or, il n'y a aucune courbe isentrope tracée pour cette valeur d'entropie massique. Il faut interpoler la position du point F' dans le diagramme $\big(\log(p), h\big)$. Pour cela, il suffit de tracer un segment horizontal le long de la courbe isobare de 1 bar qui relie les courbes isentropes de $8\,\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ et $9\,\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$. La position du point F' est approximativement au milieu du segment tracé. Le point F' passe par la courbe isotherme de 400 °C donc $T_{\text{F}'} = 400\,°\text{C}$.

.....

15.19 g) L'élévation totale de température s'exprime comme $T_{\text{F}'} - T_\text{I}$ tandis que celle due à la compression (réversible) est $T_\text{F} - T_\text{I}$. L'élévation de température due aux irréversibilités est donc $T_{\text{F}'} - T_\text{F}$. Sa proportion relativement à l'élévation totale est donc $\frac{T_{\text{F}'} - T_\text{F}}{T_{\text{F}'} - T_\text{I}} \times 100$.

.....

Fiche n° 16. Thermodynamique industrielle

Réponses

16.1 a) ⓐ

16.1 b) ⓓ

16.1 c) ⓒ

16.1 d) ⓐ

16.2 a) ⓒ

16.2 b) ⓓ

16.2 c) ⓐ

16.2 d) ⓐ

16.3 a) ⓒ

16.3 b) $\frac{1}{M}\frac{\gamma R}{\gamma-1}(T_2-T_1)$

16.3 c) $c_2=\sqrt{\frac{2}{M}\frac{\gamma R}{\gamma-1}(T_1-T_2)}$

16.3 d) $383\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

16.4 a) ⓑ

16.4 b) ⓐ

16.5 a) ⓐ

16.5 b) ⓐ

16.5 c) ⓑ

16.5 d) ⓓ

16.5 e) ⓐ

16.5 f) ⓒ

16.5 g) $-\frac{w_1+w_3}{q_2}$

16.5 h) $1-\frac{T_4-T_1}{T_3-T_2}$

16.6 a) $1\to 2$

16.6 b) $50\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$

16.6 c) $2\to 3$

16.6 d) $-200\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$

16.6 e) 4

16.7 a) $2{,}50\,\mathrm{kJ\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$

16.7 b) $50\,^\circ\mathrm{C}$

16.7 c) $110\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$

16.7 d) $140\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$

16.7 e) 0,78

16.7 f) $100\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$

16.8 a) ⓕ

16.8 b) ⓐ

16.8 c) ⓐ

16.8 d) ⓑ

16.8 e) ⓐ

16.8 f) ⓒ

16.8 g) ⓐ

16.8 h) ⓑ

16.9 a) condenseur

16.9 b) évaporateur

16.9 c) condenseur

16.10 a) $D_{\mathrm{m1}}+D_{\mathrm{m2}}=D_{\mathrm{m}}$

16.10 b) $c_{\mathrm{p}}(T-T_1)=q_{2\to 1}$

16.10 c) ..... $\boxed{c_\mathrm{p}(T-T_2)=q_{1\to2}}$

16.10 d) ..... $\boxed{D_{\mathrm{m}1}(T-T_1)+D_{\mathrm{m}2}(T-T_2)=0}$

16.10 e) ..... $\boxed{T=\dfrac{D_{\mathrm{m}1}T_1+D_{\mathrm{m}2}T_2}{D_m}}$

16.10 f) ..... $\boxed{38\,^\circ\mathrm{C}}$

16.11 a) ..... $\boxed{\text{a}}$

16.11 b) ..... $\boxed{\text{d}}$

16.11 c) ..... $\boxed{9\times10^6\,\mathrm{J}}$

16.12 a) ..... $\boxed{\text{a}}$

16.12 b) ..... $\boxed{\text{d}}$

16.12 c) ..... $\boxed{\Delta h=v(p_2-p_1)}$

16.12 d) ..... $\boxed{v(p_2-p_1)}$

16.12 e) ..... $\boxed{1{,}99\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}}$

Corrigés

16.1 a) La transformation est adiabatique donc $q=0$ et $s_\mathrm{e}=q/T=0$; la transformation est réversible donc $s_\mathrm{c}=0$. Finalement, $\Delta h=w_\mathrm{i}$ et $\Delta s=0$.

.....

16.1 b) Il n'y a pas de pièce mobile donc $w_\mathrm{i}=0$ et donc $\Delta h=q$; on a $\Delta s=s_\mathrm{e}+s_\mathrm{c}$.

.....

16.1 c) La transformation est adiabatique donc $q=0$ et $s_\mathrm{e}=q/T=0$; il n'y a pas de pièce mobile donc $w_\mathrm{i}=0$ et ainsi $\Delta h=0$. On a $\Delta s=s_\mathrm{c}$.

.....

16.1 d) La transformation est adiabatique donc $q=0$ et $s_\mathrm{e}=q/T=0$; la transformation est réversible donc $s_\mathrm{c}=0$ et ainsi $\Delta h=w_\mathrm{i}$; $\Delta s=0$.

.....

16.2 a) On a $\Delta h=c_\mathrm{p}\Delta T\approx1\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}\times10\,\mathrm{K}=10\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$.

.....

16.2 b) On a $e_\mathrm{c}=\dfrac{1}{2}v^2\approx0,5\times\left(10\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\right)^2=50\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}}$.

.....

16.2 c) On a $\Delta e_\mathrm{p}=g\Delta z\approx10\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}\times1\,\mathrm{m}=10\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}}$.

.....

16.3 a) On a $\Delta h+\Delta e_\mathrm{p}+\Delta e_\mathrm{c}=q_\mathrm{e}+w_\mathrm{i}$. Ici, $\Delta e_\mathrm{p}=0$, $q_\mathrm{e}=0$ (adiabatique car isolée thermiquement) et $w_\mathrm{i}=0$ (tuyère indéformable). On en déduit : $\Delta h+\Delta e_\mathrm{c}=0$ (donc $h+e_\mathrm{c}=\mathrm{cste}$).

.....

16.3 b) La deuxième loi de Joule s'écrit : $\Delta h=c_\mathrm{p}(T_2-T_1)=\dfrac{1}{M}\dfrac{\gamma R}{\gamma-1}(T_2-T_1)$.

.....

16.3 c) Comme c_1 est négligable, on en déduit des questions précédentes :

$$\frac{1}{2}c_2^2=-\Delta h=-\frac{1}{M}\frac{\gamma R}{\gamma-1}(T_2-T_1)\qquad\text{et}\qquad c_2=\sqrt{\frac{2}{M}\frac{\gamma R}{\gamma-1}(T_1-T_2)}.$$

.....

16.3 d) La vitesse d'éjection est alors $c_2=383\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

.....

16.4 a) La première phase étant isentropique, les températures sont liées par la loi de Laplace :

$$T_1^\gamma p_1^{1-\gamma} = \text{cste} = T_2^\gamma p_2^{1-\gamma} \quad \text{donc} \quad T_2^\gamma = T_1^\gamma \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1-\gamma},$$

ce qui conduit au résultat en prenant la puissance $1/\gamma$ de l'ensemble.

.....

16.5 a) Parcouru dans le sens horaire, le cycle est moteur.

.....

16.5 b) Les travaux w_2 et w_4 sont nuls. Les travaux reçus pendant le cycle sont w_1 et w_3.

.....

16.5 c) La deuxième phase est isobare, d'où : $q_2 = \Delta h = c_\text{p}(T_3 - T_2)$.

.....

16.5 d) La quatrième phase est isobare, d'où : $q_4 = \Delta h = c_\text{p}(T_1 - T_4)$.

.....

16.5 e) Le transfert thermique est nul pour cette transformation (isentropique). Le premier principe pour les systèmes en écoulement permanent s'écrit donc ici : $\Delta h = w_1$. d'où : $w_1 = h_2 - h_1 = c_\text{p}(T_2 - T_1) > 0$.

.....

16.5 f) De même, on a $w_3 = h_4 - h_3 = c_\text{p}(T_4 - T_3) < 0$.

.....

16.5 g) Les échanges énergétiques étant algébriques, le rendement du cycle est défini par $\rho = -\dfrac{w_\text{i}}{q_\text{c}} = -\dfrac{w_1 + w_3}{q_2}$.

.....

16.5 h) Le rendement du turbopropulseur est alors : $\rho = -\dfrac{c_\text{p}(T2 - T_1 + T_4 - T_3)}{c_\text{p}(T_3 - T_2)} = 1 - \dfrac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$.

.....

16.6 a) Le compresseur a pour effet d'augmenter la pression et la température du fluide : ici, il s'agit donc de l'étape $1 \to 2$.

.....

16.6 b) D'après le premier principe industriel, on a $w_\text{compr} = h_2 - h_1 = 450 - 400 = 50\,\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

.....

16.6 c) Le domaine de la vapeur est à droite du diagramme, celui du liquide à gauche, la liquéfaction correspond donc à l'étape $2 \to 3$.

.....

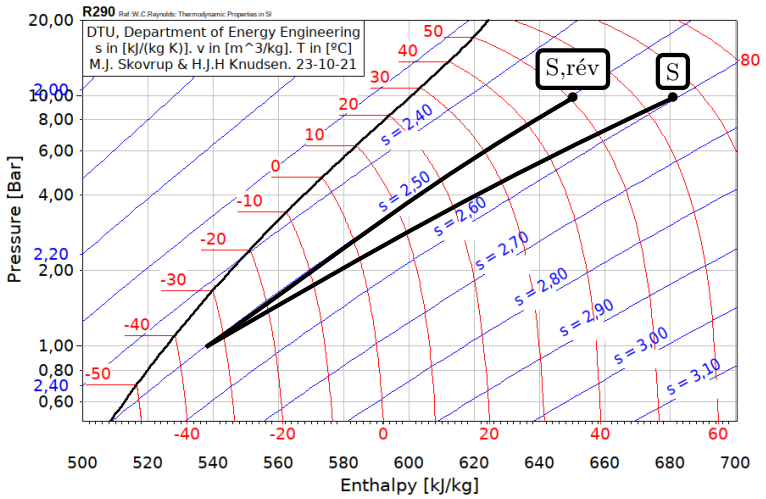
16.6 d) D'après le premier principe industriel, $q_\text{cond} = h_3 - h_2 = 250 - 450 = -200\,\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

.....

16.7 a) La compression étant réversible, et en l'absence d'échange thermique, la compression est isentropique donc $s_{\text{S,rév}} = s_\text{E} = 2{,}50\,\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$.

.....

16.7 b) L'état de sortie « S,rév » du compresseur se trouve à l'intersection entre l'isentrope passant par E et l'isobare à $P_S = 10\,\text{bar}$, comme schématisé ci-dessous.



.....

16.7 c) D'après le premier principe industriel, on a $w_{\text{rév}} = h_{\text{S,rév}} - h_{\text{E}} = 650 - 540 = 110\,\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

.....

16.7 d) La donnée de la température permet de placer le point S sur le diagramme. D'après le premier principe industriel, on a $w = h_{\text{S}} - h_{\text{E}} = 680 - 540 = 140\,\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

.....

16.7 f) La compression est adiabatique, il n'y a donc pas d'entropie échangée. Toute la variation d'entropie correspond à une création, d'où $s_{\text{créée}} = s_{\text{S}} - s_{\text{E}} = 2{,}60 - 2{,}50 = 0{,}1\,\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$.

.....

16.8 a) La machine produit du travail ($W < 0$) grâce à un fluide chauffé ($Q_{\text{c}} > 0$) puis refroidi ($Q_{\text{f}} < 0$) : ainsi, on a $W < 0$; $Q_{\text{f}} < 0$; $Q_{\text{c}} > 0$.

.....

16.8 c) La machine reçoit du travail ($W > 0$) pour que le fluide refroidisse un compartiment plus froid (source froide $Q_{\text{f}} > 0$) que l'air ambiant, tout en réchauffant ce dernier ($Q_{\text{c}} < 0$) : on a $W > 0$; $Q_{\text{f}} > 0$; $Q_{\text{c}} < 0$.

.....

16.8 e) La machine reçoit du travail ($W > 0$) pour que le fluide refroidisse un compartiment plus froid (source froide $Q_{\text{f}} > 0$) que l'air ambiant, tout en réchauffant ce dernier ($Q_{\text{c}} < 0$) : on a $W > 0$; $Q_{\text{f}} > 0$; $Q_{\text{c}} < 0$.

.....

16.8 g) La machine reçoit du travail ($W > 0$) pour que le fluide refroidisse un compartiment plus froid (source froide $Q_{\text{f}} > 0$) que l'air ambiant, tout en réchauffant ce dernier ($Q_{\text{c}} < 0$) : on a $W > 0$; $Q_{\text{f}} > 0$; $Q_{\text{c}} < 0$.

.....

16.9 a) Le fluide d'une centrale est chauffé dans la chaudière (source chaude), passe par la turbine pour produire un travail puis est refroidi dans le condenseur (source froide).

.....

16.9 b) Le fluide d'un réfrigérateur refroidit la source froide en se réchauffant grâce à l'évaporateur, puis le fluide est refroidi dans le condenseur en contact avec l'air extérieur (source chaude).

.....

16.9 c) Le fluide d'une pompe à chaleur réchauffe la source chaude en se refroidissant grâce au condenseur, puis le fluide est réchauffé dans l'évaporateur en contact avec l'air extérieur (source froide).

.....

16.10 a) La loi des nœuds sur les fluides donne $D_{m1} + D_{m2} = D_m$.

.....

16.10 b) On a $\Delta h_1 = q_{2\to1}$ donc $c_p(T - T_1) = q_{2\to1}$.

.....

16.10 c) On a $\Delta h_2 = q_{1\to2}$ donc $c_p(T - T_2) = q_{1\to2}$.

.....

16.10 e) On a $D_m T = D_{m1} T_1 - D_{m2} T_2$ donc $T = \dfrac{D_{m1} T_1 + D_{m2} T_2}{D_m}$.

.....

16.10 f) On a $T = \dfrac{3{,}0\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}} \times 353\,\mathrm{K} + 7{,}0\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}} \times 293\,\mathrm{K}}{3{,}0\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}} + 7{,}0\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}}} = 311\,\mathrm{K} = 38\,^\circ\mathrm{C}$.

.....

16.11 a) La turbine est isolée thermiquement et horizontale, donc $q_e = 0$ et $\Delta e_p = 0$. Les températures sont identiques en entrée et sortie, donc d'après la loi de Joule $\Delta h = 0$. Le premier principe s'écrit donc $\Delta e_c = w_i$.

.....

16.11 b) Comme $\Delta T = 0$, cela signifie que $\Delta H = 0$ (deuxième loi de Joule) et que : $W_f = -W_i = -\Delta E_c = \dfrac{1}{2} m c_1^2$.

.....

16.11 c) La masse traversant la turbine pendant 1 heure est de 1 800 kg, d'où

$$W_f = \frac{1}{2} \times 1\,800\,\mathrm{kg} \times (100\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})^2 = 9 \times 10^6\,\mathrm{J}\,.$$

.....

16.12 a) Le transfert thermique q_e est nul, et on peut supposer $e_c = \text{cste}$ et $e_p = \text{cste}$ (la vitesse est négligeable et la variation d'altitude est faible).

.....

16.12 c) La deuxième identité thermodynamique s'écrit :

$$\mathrm{d}h = T\,\mathrm{d}s + v\,\mathrm{d}p,$$

avec ici $\mathrm{d}s = 0$ car l'écoulement est isentropique. On a donc $\Delta h = v(p_2 - p_1)$.

.....

16.12 d) Finalement, on a $w_i = v(p_2 - p_1)$.

.....

16.12 e) Numériquement, on a $w_i = 1{,}99\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$.

.....

Fiche nº 17. Signaux

Réponses

17.1 a) 0

17.1 b) ..... $\frac{1}{2}$

17.1 c) 0

17.2 a) c

17.2 b) ..... d

17.3 a) ..... instable

17.3 b) ..... stable

17.3 c) ..... instable

17.3 d) ..... stable

17.3 e) ..... instable

17.4 a) c

17.4 b) ..... a

17.4 c) ..... a

17.5 a) ..... a

17.5 b) c

17.5 c) c

17.6 a) ..... 0,75 A

17.6 b) ..... 4 V

17.6 c) ..... 333 Hz

17.6 d) ..... a

17.6 e) ..... b

17.6 f) ..... a

17.6 g) ..... 2,56 mH

17.7 a) ..... b

17.7 b) ..... a

17.7 c) ..... b

17.7 d) ..... 1,6 µF

17.8 a) ..... b

17.8 b) c

17.9 a) ..... b

17.9 b) ..... a

17.9 c) c

17.9 d) ..... 50 Ω

17.9 e) ..... 7 mH

17.10 a) ..... $4x^0$

17.10 b) ..... $4x^{-2}$

17.10 c) ..... $1x^0$

17.10 d) ..... $\frac{2}{3}x^0$

17.10 e) ..... $\frac{2}{5}x^1$

17.10 f) ..... $\frac{3}{5}x^0$

17.11 a) ..... 1 ms

17.11 b) ..... 2 V

17.11 c) ..... 1 kHz

17.11 d) ..... b

17.11 e) 0

17.11 f) ..... a et d

17.11 g) ..... a

17.12 a) ..... 20 ms

17.12 b) ..... 0,1 V

17.12 c) ..... 0,1 V

17.12 d) ..... 50 Hz

17.12 e) ..... 0,1 V

17.12 f) ..... b et c

17.12 g) ..... a

17.13 a) ..... 1 Hz

17.13 b) ..... 16,7 Hz

17.13 c) ..... 12,5 Hz

17.13 d) ..... 9,61 Hz

17.13 e) ..... a

17.13 f) .. Repliement de spectre

17.13 g) ..... d

17.14 a) ..... a

17.14 b) .. $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0 s = H_0 \omega_0 e$

17.14 c) ..... b

17.15 a) ..... B

17.15 b) ..... A

17.15 c) C

17.15 d) ..... E

17.15 e) ..... D

17.16 a) ..... 0,1 ms

17.16 b) ..... 0,005 ms

17.16 c) ..... 10 V

17.16 d) 0,6

17.16 e) ..... 200 kHz

17.16 f) ..... 10 kHz

Corrigés

17.1 a) On a $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \cos(\omega t)\,\mathrm{d}t = \left[\dfrac{\sin(\omega t)}{\omega}\right]_0^T = 0$ car la fonction $t \mapsto \sin(\omega t)$ est T-périodique.

.....

17.1 b) Il faut commencer par linéariser le $\cos^2$:

$$\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1+\cos(2\omega t)}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$

comme la fonction $\cos(2\omega t)$ est périodique de période $\dfrac{T}{2}$.

.....

17.1 c) Il faut faire une intégration par parties. On a :

$$\frac{1}{T}\int_0^T t\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\left[\frac{t}{\omega}\sin(\omega t)\right]_0^T - \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{\omega}\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

.....

17.2 On commence par remarquer que les deux graphiques tendent vers une valeur non nulle : cela élimine la proposition (b) et les propositions (a) et (f), qui ne sont pas stables.

La proposition (e) est l'équation d'un oscillateur harmonique : elle ne correspond pas aux graphiques.

Le signal $s_1(t)$ présente une discontinuité de sa pente : il est donc régi par une équation différentielle du premier ordre : c'est la proposition (c).

On en déduit que le signal $s_2(t)$ est associé à la proposition (d).

.....

17.3 Pour une équation différentielle linéaire à coefficients constants homogène, une condition nécessaire de stabilité, et suffisante pour les systèmes du premier et et du second ordre, est que tous les coefficients de l'équation différentielle soient de même signe.

.....

17.4 En régime permanent, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil : on a $u_C\big(0^-\big) = E$, $i\big(0^-\big) = i_C\big(0^-\big) = 0$.

La bobine impose la continuité de l'intensité électrique qui la traverse et le condensateur la tension à ses bornes : on a $u_C\big(0^+\big) = E, i\big(0^-\big) = 0$. Comme $u_R = u_C$, on a donc $i_R\big(0^+\big) = \dfrac{E}{R}$, soit, d'après la loi des nœuds :

$$i_C\big(0^+\big) = -i_R\big(0^+\big) = -\frac{E}{R}.$$

En régime permanent, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil : ainsi, on a $u_C(+\infty) = \dfrac{R}{R+r}E$, $i\big(0^-\big) = i_R\big(0^-\big) = \dfrac{E}{R+r}$ et $i_C\big(0^-\big) = 0$.

.....

17.5 L'interrupteur étant ouvert et le régime permanent étant atteint : $i_2\big(0^-\big) = 0$ et $i_1\big(0^-\big) = i\big(0^-\big) = \dfrac{E_1}{2R}$.

La bobine impose la continuité du courant qui la traverse : $i\big(0^+\big) = i\big(0^-\big) = \dfrac{E_1}{2R}$. Pour déterminer i_1 et i_2, il nous faut deux équations ; on utilise la loi des mailles dans la grande maille et la loi des nœuds :

$$\begin{cases} i_1\big(0^+\big) + i_2\big(0^+\big) = \dfrac{E_1}{2R} \\ E_1 - Ri_1\big(0^+\big) = E_2 - Ri_2\big(0^+\big) \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} i_1\big(0^+\big) + i_2\big(0^+\big) = \dfrac{E_1}{2R} \\ i_1\big(0^+\big) - i_2\big(0^+\big) = \dfrac{E_1 - E_2}{R} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} i_1\big(0^+\big) = \dfrac{3E_1 - 2E_2}{4R} \\ i_2\big(0^+\big) = \dfrac{2E_2 - E_1}{4R}. \end{cases}$$

En régime permanent, la bobine se comporte comme un fil. On a donc directement $i_1(+\infty) = \dfrac{E_1}{R}$, $i_2(+\infty) = \dfrac{E_2}{R}$ donc $i(+\infty) = \dfrac{E_1 + E_2}{R}$. On a donc le système :

$$\begin{cases} i_1(+\infty) + i_2(+\infty) & = i(+\infty) \\ E_1 - Ri_1(+\infty) & = Ri(+\infty) \\ E_2 - Ri_2(+\infty) & = Ri(+\infty). \end{cases}$$

En sommant les deux dernières lignes, on a directement $i(+\infty) = \dfrac{E_1 + E_2}{3R}$. On a alors le système :

$$\begin{cases} i_1(+\infty) + i_2(+\infty) & = \dfrac{E_1 + E_2}{3R} \\ i_1(+\infty) - i_2(+\infty) & = \dfrac{E_1 - E_2}{R}. \end{cases}$$

On a alors $i_1(+\infty) = \dfrac{2E_1 - E_2}{3R}$ et $i_2(+\infty) = \dfrac{2E_2 - E_1}{3R}$.

.....

17.6 g) Le module de $\underline{Z}$ est tel que $|\underline{Z}| = \left|\dfrac{\underline{U}}{\underline{I}}\right| = \dfrac{4\,\text{V}}{0{,}75\,\text{A}} = \dfrac{16}{3}\,\Omega$. Or, on a $|\underline{Z}| = L\omega$; donc :

$$L = \frac{|\underline{Z}|}{\omega} = \frac{16/3\,\Omega}{2\pi\dfrac{1\,000}{3}} = \frac{8 \times 10^{-3}}{\pi} = 2{,}56 \times 10^{-3}\,\text{H} = 2{,}56\,\text{mH}.$$

.....

17.7 d) Graphiquement, on trouve $T = 1\,\text{ms}$. Le module de l'impédance est $|\underline{Z}| = \left|\dfrac{\underline{U}}{\underline{I}}\right| = \dfrac{2\,\text{V}}{0{,}02\,\text{A}} = 100\,\Omega$. Donc,

$$C = \frac{1}{|\underline{Z}|\omega} = \frac{T}{2\pi|\underline{Z}|} \approx 0{,}16\frac{10^{-3}\text{s}}{100\,\Omega} = 1{,}6\,\mu\text{F}.$$

.....

17.8 On a une association de dipôles en série : $\underline{Z} = R + \text{j}L\omega$. Comme $|\underline{Z}|$ est le rapport des amplitudes de la tension et de l'intensité électrique, on a $|\underline{Z}|^2 = R^2 + (L\omega)^2 = \left(\dfrac{U_0}{I_0}\right)^2$. L'argument de l'impédance vaut $\varphi = \arctan\left(\dfrac{L\omega}{R}\right)$.

.....

17.9 L'analyse graphique donne :

$$U_0 = 8\,\text{V}, \quad I_0 = 100\,\text{mA}, \quad T = 0{,}7\,\text{ms} \quad \text{et} \quad \delta t_{u/i} = -100\,\mu\text{s}.$$

La pulsation est donc $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{7} \cdot 10^4 = 8{,}97 \times 10^3\,\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$. La tension est en avance sur i donc $\varphi > 0$; donc le déphasage de la tension par rapport à l'intensité du courant électrique est égale à :

$$\varphi = -2\pi\frac{\delta t}{T} = 2\pi\frac{1/10}{0{,}7} = \frac{2\pi}{7} = \frac{2}{7}\pi.$$

À partir des relevés graphiques, on a le système :

$$\begin{cases} R^2 + (L\omega)^2 & = (80)^2 \\ \dfrac{L\omega}{R} & = \tan\left(\dfrac{2}{7}\pi\right). \end{cases}$$

On a donc $R^2\left[1 + \tan^2\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)\right] = \left(\dfrac{U_0}{I_0}\right)^2 = \left(\dfrac{8}{0{,}1}\right)^2$ donc $R = \dfrac{U_0/I_0}{\sqrt{1 + \tan^2\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)}} = \dfrac{U_0}{I_0}\cos\left(\dfrac{2\pi}{7}\right) = 50\,\Omega$.

On en déduit $L = 7\,\text{mH}$.

.....

17.11 c) La période étant de $T = 1\,\text{ms}$, la fréquence du fondamental est $f = \dfrac{1}{T} = 1\,\text{kHz}$.

.....

17.11 d) La fonction $u(t)$ est décroissante sur l'intervalle $[0, T/2]$: cela élimine les propositions (a) et (d).

En $T/2$, on a $u(T/2) = -U$: c'est donc la réponse (b).

.....

17.11 e) La valeurs a_0 correspond à la valeur moyenne : elle est donc nulle ici.

.....

17.11 f) Par intégration par parties, on trouve :

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} U\Big(1-\frac{4t}{T}\Big)\cos(2\pi fnt)\,\mathrm{d}t = \frac{4U}{T}\left(\left[\Big(1-\frac{4t}{T}\Big)\frac{\sin(2\pi fnt)}{2\pi fn}\right]_0^{T/2} + \frac{4}{T}\int_0^{T/2}\frac{\sin(2\pi fnt)}{2\pi fn}\,\mathrm{d}t\right)$$
$$= \frac{4U}{T}\left(0 + \frac{4}{T}\left[-\frac{\cos(2\pi fnt)}{(2\pi fn)^2}\right]_0^{T/2}\right) = \frac{16U}{4\pi^2T^2f^2n^2}\times(-\cos(\pi n)+1) = \frac{4U}{\pi^2n^2}(1-\cos(\pi n)).$$

On a donc $a_n = 0$ si n est pair et $a_n = \dfrac{8U}{\pi^2n^2}$.

.....

17.12 d) La fréquence fondamentale est $\nu = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{20\,\text{ms}} = 50\,\text{Hz}$.

.....

17.12 e) Par définition, on a $\underline{c_0} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T s(t)\,\mathrm{d}t = s_0 = 0{,}1\,\text{V}$.

.....

17.12 f) Pour ce signal carré particulier, numériquement, $s_0 = S_\text{m}$. Ainsi, $s(t\in[0,T/2]) = s_0 + S_\text{m} = 2S_\text{m}$ et $s(t\in[T/2,T]) = 0$. Il vient alors :

$$\underline{c_n} = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} 2S_\text{m}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,n\,2\pi\nu\,t}\,\mathrm{d}t = \frac{2S_\text{m}}{-\mathrm{i}n\,2\pi\nu}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,n\,2\pi\nu\,t}\right]_0^{T/2}$$
$$= \frac{2S_\text{m}}{-\mathrm{i}n\,2\pi\nu}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,n\pi\overbrace{\nu T}^{=1}} - 1\right] = \frac{2S_\text{m}}{-\mathrm{i}n\,2\pi\nu}\big((-1)^n-1\big) = \begin{cases}0 & \text{si } n \text{ pair}\\ \dfrac{2S_\text{m}}{\mathrm{i}n\pi\nu} & \text{si } n \text{ impair.}\end{cases}$$

.....

17.12 g) Les harmoniques de rang pair doivent êtres nulles, ce qui exclut le cas (b).

De plus, numériquement, on a $s_0 = S_\text{m}$ et $2/\pi \approx 0,64 < 1$, d'où $s_0 > 2s_0/\pi = 2S_\text{m}/\pi$: cette relation n'est pas vérifiée dans le cas du spectre (c).

.....

17.13 b) La période T_e d'échantillonnage est la durée entre deux points d'acquisition successifs. La fréquence d'échantillonnage f_e vaut donc :

$$f_e = \frac{1}{T_e} = \frac{N}{T_\text{max}} = \frac{500}{30} = 16{,}7\,\text{Hz}.$$

.....

17.13 e) Il d'agit du spectre (a) car les autres font apparaître des pics « fantômes » vu que la fréquence $\dfrac{f_e}{2}$ est inférieure à la fréquence des harmoniques.

.....

17.13 g) C'est le critère de Shannon-Nyquist.

.....

17.14 a) On a $\underline{H} \underset{\omega\to 0}{\longrightarrow} H_0$ et $\underline{H} \underset{\omega\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\omega_0 H_0}{\mathrm{j}\omega} \underset{\omega\to+\infty}{\longrightarrow} 0$; le filtre est donc un passe-bas. Le dénominateur étant d'ordre 1, c'est un passe-bas d'ordre 1.

.....

17.14 b) On a :

$$\frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{H_0}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_0}} \quad \text{donc} \quad \left(1+\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0}\right)\underline{s} = H_0\underline{e}.$$

Multiplier par $\mathrm{j}\omega$ est équivalent à dériver en réel ; on trouve donc l'équation différentielle $s + \dfrac{1}{\omega_0}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = H_0 e$.

.....

17.15 a) Le pré-amplificateur ne change que l'amplitude du signal, pas son spectre : le spectre B correspond à $u_2(t)$.

.....

17.15 b) Le filtre passe-bande a une bande passante assez étroite pour ne garder que $f_p - f_m$, f_p et $f_p + f_m$: le spectre A correspond donc à $u_3(t)$.

.....

17.15 d) Le multiplieur donne en sortie :

- pour une fréquence en entrée de f_p :

$$k(A\cos(2\pi f_p t)) \times U_p \cos(2\pi f_p t) = kAU_p \cos^2(2\pi f_p t) = kAU_p \frac{1+\cos(2\pi[2f_p]t)}{2} ;$$

- pour une fréquence en entrée de $f_p \pm f_m$:

$$\begin{aligned} k(A\cos(2\pi[f_p \pm f_m]t)) \times U_p \cos(2\pi f_p t) &= kAU_p \cos(2\pi[f_p \pm f_m]t)\cos(2\pi f_p t) \\ &= kAU_p \frac{\cos(2\pi[f_m]t) + \cos(2\pi[2f_p + f_m]t)}{2}. \end{aligned}$$

Le signal $u_4(t)$ correspond au spectre E.

.....

17.16) La tension $u_+(t)$ oscille entre 4 V et 16 V. En identifiant les valeurs extrêmes à partir de son expression, on a le système :

$$\begin{cases} U_p(1+m) = 16\,\mathrm{V} \\ U_p(1-m) = 4\,\mathrm{V} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} U_p = 10\,\mathrm{V} \\ m = 0{,}6. \end{cases}$$

.....

Fiche n° 18. ALI

Réponses

18.1 a) ..... ⓐ

18.1 b) ..... ⓑ

18.1 c) ..... ⓐ

18.1 d) ..... ⓒ

18.2 a) ..... $i_1 = i_2 + i_1'$

18.2 b) ..... $\dfrac{u_1}{R_1} = \dfrac{u_2}{R_2} + C_1 \dfrac{\mathrm{d}u_1'}{\mathrm{d}t}$

18.2 c) ..... $i_1 = -i_2'$

18.2 d) ..... $\dfrac{V_\mathrm{D} - V_\mathrm{A}}{R_1} = i_2' = C_2 \dfrac{\mathrm{d}V_\mathrm{A}}{\mathrm{d}t}$

18.3 a) ..... ⓑ

18.3 b) ..... $i_2 + i_4 = 0$

18.3 c) ..... ⓑ

18.3 d) ..... $i_5 + i_6 = 0$

18.3 e) ..... ⓒ

18.4 a) ..... $\dfrac{u_1}{R_1} = \dfrac{u_\mathrm{s}}{R_1 + R_2}$

18.4 b) ..... $i_1 = i_2 + i_3$

18.4 c) ..... $i_2 = \dfrac{u_\mathrm{e}}{R}$

18.4 d) ..... $i_3 = C \dfrac{\mathrm{d}u_\mathrm{e}}{\mathrm{d}t}$

18.4 e) .... $u_\mathrm{s} = u_R + u_C + u_\mathrm{e} = Ri_1 + u_C + u_\mathrm{e}$

18.4 f) ..... $\dfrac{\mathrm{d}u_\mathrm{s}}{\mathrm{d}t} = R\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \dfrac{i_1}{C} + \dfrac{\mathrm{d}u_\mathrm{e}}{\mathrm{d}t}$

18.4 g) ..... $\dfrac{\mathrm{d}u_\mathrm{s}}{\mathrm{d}t} = RC\dfrac{\mathrm{d}^2u_\mathrm{e}}{\mathrm{d}t^2} + 3\dfrac{\mathrm{d}u_\mathrm{e}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{RC}u_\mathrm{e}$

18.5 a) ..... $i_1 + i_2 = i_3$

18.5 b) ..... $\dfrac{u_1}{R_1} + \dfrac{u_2}{R_2} = -\dfrac{u_\mathrm{s}}{R_3}$

18.6 a) ..... $i_1 = i_3$

18.6 b) ..... $i_2 = i_4$

18.6 c) ..... $V_+ = \dfrac{R_4}{R_2 + R_4} u_2$

18.6 d) ..... $V_- = \dfrac{R_3}{R_1 + R_3} u_1 + \dfrac{R_1}{R_1 + R_3} u_\mathrm{s}$

18.7 a) ..... $i_\mathrm{e} + i_C + i_2 = 0$

18.7 b) ..... $i_C + i_1 = 0$

18.7 c) ..... $-i_\mathrm{e} + \dfrac{v_\mathrm{e} - V_\mathrm{B}}{R_2} + \mathrm{j}\omega C_1 (v_\mathrm{e} - V_\mathrm{C}) = 0$

18.7 d) ..... ⓑ et ⓓ

18.7 e) ..... ⓒ

18.8 a) 0

18.8 b) ..... $\dfrac{\underline{u_\mathrm{e}}}{R} + \mathrm{j}C\omega\underline{u_\mathrm{s}} = 0$

18.8 c) ..... $-\dfrac{1}{\mathrm{j}RC\omega}$

18.8 d) ..... $u_\mathrm{e}(t) + RC\dfrac{\mathrm{d}u_\mathrm{s}}{\mathrm{d}t}(t) = 0$

18.8 e) ..... ⓑ

18.8 f) ..... R

18.9 a) 0

18.9 b) ..... $\mathrm{j}C\omega\underline{u_\mathrm{e}} + \dfrac{\underline{u_\mathrm{s}}}{\mathrm{j}L\omega} = 0$

18.9 c) ..... $LC\omega^2$

18.9 d) ..... $u_\mathrm{s}(t) = -LC\dfrac{\mathrm{d}^2u_\mathrm{e}}{\mathrm{d}t^2}$

18.9 e) ..... ⓒ

18.9 f) ..... $\boxed{\dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}}$

18.10 a) ..... $\boxed{\text{b}}$

18.10 b) ..... $\boxed{\text{a}}$

18.11 a) ..... $\boxed{v_\mathrm{s} = v_\mathrm{e}}$

18.11 b) ..... $\boxed{v_\mathrm{s} = -v_\mathrm{e}}$

18.12 a) ..... $\boxed{1}$

18.12 b) ..... $\boxed{-1}$

18.12 c) ..... $\boxed{1}$

18.12 d) ..... $\boxed{-2\arctan(RC\omega)}$

18.12 e) ..... $\boxed{E\sin(\omega t)}$

18.13 a) ..... $\boxed{R_2}$

18.13 b) ..... $\boxed{R_1}$

18.13 c) ..... $\boxed{\omega_1 = \dfrac{1}{R_1C_1} \text{ et } \omega_2 = \dfrac{1}{R_2C_1}}$

18.13 d) ..... $\boxed{\text{a}}$

Corrigés

18.1 a) La rétroaction est négative donc l'ALI fonctionne en régime linéaire.

.....

18.1 b) La rétroaction est positive donc l'ALI fonctionne en régime saturé.

.....

18.1 c) La rétroaction est négative donc l'ALI fonctionne en régime linéaire.

.....

18.1 d) Il y a une double rétroaction donc on ne peut pas prédire le régime de fonctionnement de l'ALI.

.....

18.2 a) La loi des nœuds en D s'écrit bien sûr $i_1 = i_2 + i_1'$.

.....

18.2 b) La loi des nœuds en D s'écrit alors $\dfrac{u_1}{R_1} = \dfrac{u_2}{R_2} + C_1\dfrac{\mathrm{d}u_1'}{\mathrm{d}t}$.

.....

18.2 c) L'intensité i_+ est nulle et $i_1 = -i_2'$.

.....

18.2 d) On a ainsi : $\dfrac{V_\mathrm{D} - V_\mathrm{A}}{R_1} = i_2' = C_2\dfrac{\mathrm{d}V_\mathrm{A}}{\mathrm{d}t}$.

.....

18.3 b) Dans le modèle de l'ALI idéal, les courants de polarisation sont nuls. Ainsi, $i_1 = i_3 = 0$.

.....

18.3 d) Dans le modèle de l'ALI idéal, les courants de polarisation sont nuls. Ainsi, $i_7 = 0$.

.....

18.3 e) La loi d'Ohm donne $\dfrac{V_\mathrm{C} - V_\mathrm{B}}{R} + \dfrac{V_\mathrm{C} - V_\mathrm{S}}{R} = 0$.

.....

18.4 a) L'intensité est nulle à l'entrée non inverseuse et l'intensité du courant est donc identique dans R_1 et R_2. On reconnaît donc un pont diviseur de tension. La relation demandée est donc : $\dfrac{u_1}{R_1} = \dfrac{u_\mathrm{s}}{R_1 + R_2}$.

.....

18.4 b) On a $i_1 = i_2 + i_3$.

.....

18.4 c) Cette fois, on a $i_2 = \dfrac{u_\text{e}}{R}$.

18.4 d) Ici, on a $i_3 = C\dfrac{\mathrm{d}u_\text{e}}{\mathrm{d}t}$.

18.4 g) La relation précédente fournit : $\dfrac{\mathrm{d}u_\text{s}}{\mathrm{d}t} = R\dfrac{\mathrm{d}i_2 + i_3}{\mathrm{d}t} + \dfrac{i_2 + i_3}{C} + \dfrac{\mathrm{d}u_\text{e}}{\mathrm{d}t}$, dont on déduit :

$$\frac{\mathrm{d}u_\text{s}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u_\text{e}}{\mathrm{d}t} + RC\frac{\mathrm{d}^2u_\text{e}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{RC}u_\text{e} + \frac{\mathrm{d}u_\text{e}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u_\text{e}}{\mathrm{d}t}.$$

Finalement, on obtient : $\dfrac{\mathrm{d}u_\text{s}}{\mathrm{d}t} = RC\dfrac{\mathrm{d}^2u_\text{e}}{\mathrm{d}t^2} + 3\dfrac{\mathrm{d}u_\text{e}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{RC}u_\text{e}$.

18.5 a) L'intensité du courant à l'entrée inverseuse étant nulle, la loi des nœuds en D s'écrit $i_1 + i_2 = i_3$.

18.5 b) L'ALI étant idéal, le potentiel de l'entrée inverseuse est égal à celui de l'entrée non inverseuse, donc nul. Ainsi, la relation précédente s'écrit : $\dfrac{u_1}{R_1} + \dfrac{u_2}{R_2} = -\dfrac{u_\text{s}}{R_3}$.

18.6 a) L'intensité entrant à la borne inverseuse étant nulle, on a $i_1 = i_3$.

18.6 b) L'intensité entrant à la borne non inverseuse étant nulle, on a $i_2 = i_4$.

18.6 c) Le pont diviseur du bas permet d'écrire : $i_2 = \dfrac{u_2}{R_2 + R_4} = \dfrac{V_+ - 0}{R_4}$, soit $V_+ = \dfrac{R_4}{R_2 + R_4}u_2$.

18.6 d) Le pont diviseur du haut permet d'écrire : $i_1 = \dfrac{u_1 - V_-}{R_1} = \dfrac{V_- - u_\text{s}}{R_3}$, soit $V_- = \dfrac{R_3}{R_1 + R_3}u_1 + \dfrac{R_1}{R_1 + R_3}u_\text{s}$.

18.7 a) Les courants de polarisation sont nuls dans l'hypothèse de l'ALI idéal. Ainsi, $i_\text{e} + i_C + i_2 = 0$.

18.7 b) Les courants de polarisation sont nuls dans l'hypothèse de l'ALI idéal. Ainsi, $i_C + i_1 = 0$.

18.7 c) On a $-i_\text{e} + \dfrac{v_\text{e} - V_\text{B}}{R_2} + \mathrm{j}\omega C_1(v_\text{e} - V_\text{C}) = 0$.

18.7 d) La tension v_s n'est pas connue, ce qui élimine la (c) et, comme on peut le voir en question suivante, la loi des nœuds en B ((a)) n'est pas utile.

18.7 e) Le courant i_3 est inconnu.

18.8 a) On sait que, pour un ALI idéal en régime linéaire, on a $V_- = V_+$.

Or $V_+ = 0$ car la borne positive est reliée directement à la masse. Donc $V_- = 0$.

18.8 b) D'après la loi des nœuds appliquée au point A, on a : $\underline{i_\mathrm{e}} + \underline{i_C} = \underline{i_-}$. Comme $\underline{u_R} = \underline{u_\mathrm{e}}$, on en déduit :

$$\underline{i_\mathrm{e}} = \frac{\underline{u_R}}{\underline{Z_R}} = \frac{\underline{u_\mathrm{e}} - \underline{V_\mathrm{A}}}{R} \qquad \text{et} \qquad \underline{i_C} = \frac{\underline{u_C}}{\underline{Z_C}} = \big(\underline{u_\mathrm{s}} - \underline{V_\mathrm{A}}\big)\mathrm{j}C\omega.$$

De plus, on sait que, pour un ALI idéal, $\underline{i_-} = 0$ et on a vu précédemment que $\underline{V_-} = 0 = \underline{V_\mathrm{A}}$. D'où $\frac{\underline{u_\mathrm{e}}}{R} + \mathrm{j}C\omega\underline{u_\mathrm{s}} = 0$.

.....

18.8 c) Comme $\frac{\underline{u_\mathrm{e}}}{R} = -\mathrm{j}C\omega\underline{u_\mathrm{s}}$, on a $\underline{H} = \frac{\underline{u_\mathrm{s}}}{\underline{u_\mathrm{e}}} = -\frac{1}{\mathrm{j}RC\omega}$.

.....

18.8 d) En utilisant la relation de la question b) et en passant dans le domaine temporel, on obtient l'équation différentielle suivante : $u_\mathrm{e}(t) + RC\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{s}}{\mathrm{d}t}(t) = 0$.

.....

18.8 e) Le montage est un intégrateur. L'intégration d'un signal en créneau fournit un signal triangulaire : c'est le signal (b) qui est la bonne réponse.

.....

18.8 f) D'après la loi d'Ohm, on a $u_\mathrm{e} = Ri_\mathrm{e}$. Donc $\underline{Z_\mathrm{e}} = R$.

.....

18.9 a) On sait que, pour un ALI idéal en régime linéaire, on a $V_- = V_+$. De plus, l'ALI est idéal, donc $i_+ = 0$. Or $V_+ = Ri_+$ d'après la loi d'Ohm. Donc $V_+ = 0$ et $V_- = 0$.

.....

18.9 b) D'après la loi des nœuds appliquée au point A, on a : $\underline{i_\mathrm{e}} + \underline{i_L} = \underline{i_-}$. Or, on a :

$$\underline{i_\mathrm{e}} = \frac{\underline{u_C}}{\underline{Z_C}} = \big(\underline{u_\mathrm{e}} - \underline{V_\mathrm{A}}\big)\mathrm{j}C\omega \qquad \text{et} \qquad \underline{i_L} = \frac{\underline{u_L}}{\underline{Z_L}} = \frac{\underline{u_\mathrm{s}} - \underline{V_\mathrm{A}}}{\mathrm{j}L\omega}.$$

De plus, on sait que, pour un ALI idéal, $\underline{i_-} = 0$ et, comme on a vu précédemment, que $\underline{V_-} = 0 = \underline{V_\mathrm{A}}$.

D'où, $\mathrm{j}C\omega\underline{u_\mathrm{e}} + \frac{\underline{u_\mathrm{s}}}{\mathrm{j}L\omega} = 0$.

.....

18.9 c) Comme $\frac{\underline{u_\mathrm{s}}}{\mathrm{j}L\omega} = -\mathrm{j}C\omega\underline{u_\mathrm{e}}$, on a $\underline{H} = \frac{\underline{u_\mathrm{s}}}{\underline{u_\mathrm{e}}} = -\mathrm{j}^2LC\omega^2 = LC\omega^2$.

.....

18.9 d) On a $\underline{u_\mathrm{s}} = -LC(\mathrm{j}\omega)^2\underline{u_\mathrm{e}}$. En passant en régime temporel, on obtient : $u_\mathrm{s}(t) = -LC\frac{\mathrm{d}^2u_\mathrm{e}}{\mathrm{d}t^2}$.

.....

18.9 e) Le montage suivant est un double dérivateur. Or si on dérive une première fois le signal triangle, cela donne un signal créneau. Si on dérive un signal créneau, cela donne un signal nul sauf aux points où le créneau avait des pentes non nulles. Cela correspond au signal (c).

.....

18.9 f) D'après la définition de l'impédance, on a $\underline{Z_\mathrm{e}} = \frac{\underline{u_\mathrm{e}}}{\underline{i_\mathrm{e}}} = \underline{Z_C} = \frac{1}{\mathrm{j}C\omega}$.

.....

18.10 a) Le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert à basses fréquences. On en déduit donc que $i_C = i_1 = 0$, ainsi, le potentiel du point C est nul d'après la loi d'Ohm. L'ALI étant considéré idéal et étudié en régime linéaire, on en déduit que $V_\mathrm{B} = 0$. R_2 est donc parcourue par i_e et soumise à une tension v_e. Le montage est donc équivalent à R_2.

.....

18.10 b) Le condensateur est équivalent à un fil à basses fréquences. On en déduit donc que $V_C = v_e$. Ainsi, l'ALI étant considéré comme idéal et étudié en régime linéaire, $V_B = v_e$, la résistance R_2 est soumise à une tension nulle, elle n'est donc parcourue par aucun courant. Tout le courant i_e passe dans R_1 qui est alors soumise à la tension v_e. Le montage est donc équivalent à R_1.

.....

18.11 a) À basses fréquences, C est équivalent à un interrupteur ouvert et n'est donc parcouru par aucun courant. On en déduit donc, par une loi des nœuds au point B, que la résistance qui lui est reliée n'est parcourue par aucun courant non plus. On en déduit donc que $V_B = v_e$ et donc, l'ALI étant idéal et fonctionnant en régime linéaire, $V_A = v_e$, soit $v_s = v_e$, les courants circulant dans les résistances étant nuls.

.....

18.11 b) À hautes fréquences, C est équivalent à un fil. L'ALI étant idéal et fonctionnant en régime linéaire, on en déduit donc que $V_A = V_B$. On en déduit donc que $v_s = -v_e$.

.....

18.12 a) À basses fréquences, la fonction de transfert devient $\underline{H}(\omega) = 1$.

.....

18.12 b) À hautes fréquences, la fonction de transfert devient $\underline{H}(\omega) = \dfrac{-\mathrm{j}RC\omega}{\mathrm{j}RC\omega} = -1$.

.....

18.12 c) Le gain est donné par le module de la fonction de transfert :

$$G(\omega) = |\underline{H}(\omega)| = \frac{|1 - \mathrm{j}RC\omega|}{|1 + \mathrm{j}RC\omega|} = \frac{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} = 1.$$

.....

18.12 d) Le déphasage est donné par l'argument de la fonction de transfert :

$$\varphi(\omega) = \arg(\underline{H}(\omega)) = \arg(1 - \mathrm{j}RC\omega) - \arg(1 + \mathrm{j}RC\omega) = -2\arctan(RC\omega).$$

.....

18.12 e) La pulsation du signal est $\omega = 1{,}3 \times 10^4\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$. À cette pulsation, le déphasage vaut :

$$\varphi(\omega) = -2\arctan(RC\omega) = -2\arctan(800\,\Omega \times 100\,\mathrm{nF} \times 1{,}3 \times 10^4\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}) = -\frac{\pi}{2}.$$

On en déduit donc l'expression : $v_s = E\cos\left(\omega t - \dfrac{\pi}{2}\right) = E\sin(\omega t)$.

.....

18.13 a) À basses fréquences, l'impédance devient $\underline{Z}(\omega) = R_2\dfrac{1}{1} = R_2$.

.....

18.13 b) À hautes fréquences, l'impédance devient $\underline{Z}(\omega) = R_2\dfrac{\mathrm{j}R_1C_1\omega}{\mathrm{j}R_2C_1\omega} = R_1$.

.....

18.13 c) L'impédance peut se mettre sous la forme : $\underline{Z}(\omega) = R_2\dfrac{1 + \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_1}}{1 + \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_2}}$ avec $\omega_1 = \dfrac{1}{R_1C_1}$ et $\omega_2 = \dfrac{1}{R_2C_1}$.

.....

18.13 d) On a $\omega \ll \omega_2$ donc l'impédance devient : $\underline{Z}(\omega) = R_2(1 + \mathrm{j}R_1C_1\omega) = R_2 + \mathrm{j}R_1R_2C_1\omega$. On identifie ainsi deux termes, l'impédance est une bobine d'inductance $R_1R_2C_1$ en série avec une résistance R_2.

.....

Fiche n° 19. ALI saturé

Réponses

19.1 a) ..... oui

19.1 b) ..... non

19.1 c) ..... oui

19.2 a) ..... $\dfrac{\mu_0}{1+\mathrm{j}\omega\tau}$

19.2 b) ..... (a)

19.2 c) ..... $\dfrac{1}{\tau}$

19.2 d) ..... μ_0

19.2 e) ..... μ_0

19.2 f) ..... $-\mathrm{j}\mu_0\dfrac{\omega_c}{\omega}$

19.2 g) ..... (1)

19.3 a) ..... $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}+\dfrac{s}{\tau}=\dfrac{\mu_0 e}{\tau}$

19.3 b) ..... (c)

19.3 c) ..... non

19.4 a) ..... (a)

19.4 b) ..... $\dfrac{eR'+sR}{R+R'}$

19.4 c) .... $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}+\dfrac{R+R'-\mu_0 R}{R+R'}\dfrac{s}{\tau}=\mu_0\dfrac{R'}{R+R'}\dfrac{e}{\tau}$

19.4 d) ..... non

19.5 a) ..... (c)

19.5 b) ..... (a)

19.5 c) ..... $\varepsilon=-\dfrac{3e+s}{6}$

19.5 d) ..... $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}+\left(\dfrac{\mu_0}{6}+1\right)\dfrac{s}{\tau}=-\mu_0\dfrac{e}{2\tau}$

19.5 e) ..... oui

19.6 a) ..... $v_+=e$

19.6 b) ..... $e>0$

19.6 c) ..... $e<0$

19.6 d) ..... (a)

19.7 a) ..... $v_+=\dfrac{R'e+Rs}{R+R'}$

19.7 b) ..... $e>v_{\text{réf}}\dfrac{R+R'}{R'}-V_{\text{sat}}\dfrac{R}{R'}$

19.7 c) ..... $e<v_{\text{réf}}\dfrac{R+R'}{R'}+V_{\text{sat}}\dfrac{R}{R'}$

19.7 d) ..... (b)

19.8 a) ..... (3)

19.8 b) ..... (1)

19.8 c) ..... (5)

19.8 d) ..... (6)

19.8 e) ..... (4)

19.8 f) ..... (2)

19.9 a) ..... 15 V

19.9 b) ..... 2 V

19.9 c) ..... 900 Ω

19.9 d) ..... (c)

19.10 a) ..... (2)

19.10 b) ..... (2)

19.10 c) ..... (1)

19.10 d) ..... (3)

19.10 e) ..... (2)

19.10 f) ..... (1)

19.10 g) ..... (3)

Corrigés

19.1 a) L'ALI n'est pas bouclé, la saturation s'impose.

.....

19.1 b) La rétroaction a lieu sur la borne inverseuse, l'ALI peut donc *a priori* fonctionner en régime linéaire (il s'agit d'un montage suiveur).

.....

19.1 c) La rétroaction a lieu sur la borne non inverseuse, l'ALI fonctionne donc en régime saturé (il s'agit d'un montage comparateur à hystérésis non inverseur).

.....

19.2 a) En régime harmonique, cela devient $\dfrac{\underline{s}}{(\underline{v}_+ - \underline{v}_-)} = \underline{\mu} = \dfrac{\mu_0}{1 + \mathrm{j}\omega\tau}$.

.....

19.2 b) La fonction de transfert canonique associée est $\underline{H} = \dfrac{H_0}{1 + \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_c}}$ où H_0 et ω_c sont respectivement le gain statique et la pulsation de coupure du filtre. Le filtre est donc un passe-bas, la réponse correcte est la (a).

.....

19.2 c) On identifie $\omega_c = \dfrac{1}{\tau}$ la pulsation de coupure de ce filtre.

.....

19.2 d) On identifie $H_0 = \mu_0$.

.....

19.2 e) À basse fréquence, la fonction de transfert est équivalente à $\underline{\mu}_{\text{BF}} = \mu_0$.

.....

19.2 f) À haute fréquence, la fonction de transfert est équivalente à $\underline{\mu}_{\text{HF}} = -\mathrm{j}\mu_0 \dfrac{\omega_c}{\omega}$.

.....

19.2 g) À basse fréquence, le gain en décibels est constant et vaut $G_{\text{dB,BF}} = 20\log(\mu_0)$. À haute fréquence, il est de la forme $G_{\text{dB,BF}} = 20\log(\mu_0) - 20\log\left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)$, la courbe suit donc une droite de pente $-20\,\text{dB}$ par décade. Le diagramme (2) est donc éliminé.

Enfin, le filtre étant du premier ordre, le gain réel à ω_c vaut $-3\,\text{dB}$, le diagramme (3) est donc éliminé.

.....

19.3 a) La tension différentielle est donnée, en régime linéaire, par : $\underline{v_+} - \underline{v_-} = \underline{e}$. D'après l'expression de la fonction de transfert donnée dans l'énoncé, on obtient $(1 + \mathrm{j}\omega\tau)\underline{s} = \mu_0\underline{e}$. On en déduit donc $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \dfrac{s}{\tau} = \dfrac{\mu_0 e}{\tau}$ en régime linéaire.

.....

19.3 b) En régime permanent, la dérivée de $s(t)$ est nulle ; donc l'équation différentielle donne :

$$\frac{s(t)}{\tau} = \frac{\mu_0 e(t)}{\tau} \quad \text{avec } e(t) = E_0 \text{ pour } t > 0.$$

La réponse correcte est la (c).

.....

19.3 c) La tension de sortie tend donc vers $\mu_0 E_0$ en régime permanent. Au vu de la valeur de μ_0 donnée dans les prérequis, s tend donc vers une valeur qui dépassera la tension de saturation. Le montage est stable mais il sature quelle que soit la valeur de E_0.

.....

19.4 a) L'ALI étant idéal, l'intensité du courant entrant dans la borne non inverseuse est nulle. On en déduit donc, en appliquant la loi des nœuds et la loi d'Ohm $\dfrac{v_+ - e}{R} + \dfrac{v_+ - s}{R'} = 0$. La réponse correcte est donc la (a).

.....

19.4 b) D'après la question précédente : $\dfrac{e - v_+}{R} + \dfrac{s - v_+}{R'} = 0$. Ainsi, on isole $v_+ = \dfrac{eR' + sR}{R + R'}$. Par définition, on a $\varepsilon = v_+ - v_-$ et l'entrée inverseuse est reliée à la masse. On a donc $\varepsilon = \dfrac{eR' + sR}{R + R'}$.

.....

19.4 c) La fonction de transfert donnée dans l'énoncé permet d'écrire, en régime linéaire :

$$\frac{\underline{s}}{\dfrac{\underline{e}R' + \underline{s}R}{R + R'}} = \frac{\mu_0}{1 + \mathrm{j}\omega\tau}.$$

On en déduit ainsi : $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \dfrac{R + R' - \mu_0 R}{R + R'}\dfrac{s}{\tau} = \mu_0 \dfrac{R'}{R + R'}\dfrac{e}{\tau}$.

.....

19.4 d) Le gain de l'ALI étant très élevé, les coefficients de l'équation différentielle homogène ne sont pas de même signe, le système étudié est donc instable, l'ALI fonctionne donc en régime saturé.

.....

19.5 a) L'ALI étant idéal, l'intensité du courant entrant dans la borne inverseuse est nulle. On en déduit donc, en appliquant la loi des nœuds et la loi d'Ohm, que $\dfrac{v_- - e}{R} + \dfrac{v_- - s}{R} = 0$ et donc que $v_- = \dfrac{e + s}{2}$.
La réponse correcte est la (c).

.....

19.5 b) L'ALI étant idéal, l'intensité du courant entrant dans la borne non inverseuse est nulle. On en déduit donc, en appliquant la loi des nœuds et la loi d'Ohm, $\dfrac{v_+ - s}{R} + \dfrac{v_+}{R/2} = 0$ donc $3v_+ = s$.
La réponse correcte est la (a).

.....

19.5 c) Les deux questions précédentes permettent d'établir l'expression suivante pour la tension différentielle :

$$v_+ - v_- = \frac{s}{3} - \frac{e + s}{2} = -\frac{3e + s}{6}.$$

.....

19.5 d) La fonction de transfert donnée dans l'énoncé permet d'écrire, en régime linéaire : $\dfrac{6\underline{s}}{-3\underline{e} - \underline{s}} = \dfrac{\mu_0}{1 + \mathrm{j}\omega\tau}$.
Ainsi, l'équation différentielle décrivant le montage est, en régime linéaire : $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \left(\dfrac{\mu_0}{6} + 1\right)\dfrac{s}{\tau} = -\mu_0\dfrac{e}{2\tau}$.

.....

19.5 e) Le montage est stable car tous les coefficients de l'équation différentielle homogène sont de même signe. De plus, en régime permanent, la tension de sortie tend vers $-\dfrac{3e}{2}$, on en déduit donc que le régime linéaire est envisageable dès que la tension d'entrée ne dépasse pas $-\dfrac{2V_{\text{sat}}}{3}$.

.....

19.6 a) On a directement $v_+ = e$.

.....

19.6 b) Pour rester dans cet état, l'entrée différentielle $v_+ - v_-$ doit rester positive, soit : $e > 0$.

.....

19.6 c) Pour rester dans cet état, l'entrée différentielle $v_+ - v_-$ doit rester négative, soit : $e < 0$.

.....

19.6 d) La caractéristique (a) correspond au comparateur simple, la (b) correspond à un comparateur à hystérésis. Il s'agit donc de la (a).

.....

19.7 a) Un pont diviseur de tension donne $v_+ - e = \dfrac{R}{R+R'}(s-e)$, soit $v_+ = \dfrac{R'e+Rs}{R+R'}$.

.....

19.7 b) Pour rester dans cet état, l'entrée différentielle $v_+ - v_-$ doit rester positive, soit : $\dfrac{R'e+Rs}{R+R'} - v_{\text{réf}} > 0$, soit, avec l'expression de s :

$$e > v_{\text{réf}}\frac{R+R'}{R'} - V_{\text{sat}}\frac{R}{R'}.$$

.....

19.7 c) Pour rester dans cet état, l'entrée différentielle $v_+ - v_-$ doit rester négative, soit : $\dfrac{R'e+Rs}{R+R'} - v_{\text{réf}} < 0$, soit, avec l'expression de s :

$$e < v_{\text{réf}}\frac{R+R'}{R'} + V_{\text{sat}}\frac{R}{R'}.$$

.....

19.7 d) La caractéristique (a) correspond au comparateur simple, la (b) correspond à un comparateur à hystérésis. Il s'agit donc de la (b).

.....

19.8 a) Il n'y a qu'une tension de bascule non nulle, il s'agit donc d'un comparateur simple dont la tension de bascule est décalée par rapport à l'origine. Cela laisse le choix entre les caractéristiques (3) et (4).

Ici, s est positive lorsque e est supérieure à la tension de bascule, on en déduit donc que la caractéristique correspondante est la (3).

.....

19.8 b) Il n'y a qu'une tension de bascule nulle, il s'agit donc d'un comparateur simple symétrique. Cela laisse le choix entre les caractéristiques (1) et (2).

Ici, s est positive lorsque e est supérieure à la tension de bascule, on en déduit donc que la caractéristique correspondante est la (1).

.....

19.8 c) Il y a deux tensions de bascule, il s'agit donc d'un comparateur à hystérésis. Cela laisse le choix entre les caractéristiques (5) et (6).

Ici, s devient positive lorsque e atteint une tension de bascule positive en augmentant. On en déduit donc que la caractéristique correspondante est la (5).

.....

19.8 d) Il y a deux tensions de bascule, il s'agit donc d'un comparateur à hystérésis. Cela laisse le choix entre les caractéristiques (5) et (6).

Ici, s devient négative lorsque e atteint une tension de bascule positive en augmentant. On en déduit donc que la caractéristique correspondante est la (6).

.....

19.8 e) Il n'y a qu'une tension de bascule non nulle, on en déduit donc que la caractéristique correspondante est la (4).

.....

19.8 f) Il n'y a qu'une tension de bascule nulle, il s'agit donc d'un comparateur simple symétrique. La caractéristique correspondante est donc la (2).

.....

19.9 a) On lit, pour la tension en tirets, une amplitude de 1 carreau. Cette tension sature donc à 15 V compte tenu de l'échelle.

.....

19.9 b) On identifie une intersection entre les deux signaux lorsque $e(t)$ atteint une valeur correspondant à $\frac{2}{6}$ de carreau. Compte tenu de l'échelle, on en déduit donc que $V_{\text{lim}} = 1{,}7\,\text{V}$.

.....

19.9 c) D'après l'énoncé, $V_{\text{lim}} = \frac{R}{R'} V_{\text{sat}}$, or R, V_{sat} et V_{lim} sont connues. On peut donc écrire $R' = \frac{V_{\text{sat}}}{V_{\text{lim}}} R$. L'application numérique donne : $R' = \frac{15\,\text{V}}{\frac{5\,\text{V}}{3}} \times 100\,\Omega = 900\,\Omega$.

.....

19.9 d) La valeur de V_{lim} est de 1,7 V, soit 1,7 carreau d'après l'échelle. Or, l'amplitude est inférieure à 1,7 carreau, la valeur de bascule n'est donc pas atteinte par la tension d'entrée. La réponse correcte est donc la (c).

.....

19.10 a) Le signal (1) met en évidence une saturation en amplitude de tension de sortie et le signal (3) met en évidence une saturation en vitesse de balayage.

Le signal (2) est le seul qui présente une allure de sinusoïde.

.....

19.10 b) Le montage (1) met en évidence une saturation en amplitude de tension de sortie et le montage (3) met en évidence une saturation en vitesse de balayage.

Le gain de l'amplificateur est de 10, on en déduit donc qu'une entrée d'amplitude 1 V conduit à une sortie d'amplitude 10 V. L'ALI ne sature donc pas.

De plus, la variation de tension de sortie sera donc de l'ordre de $\frac{\text{d}s}{\text{d}t} \approx 10\,\text{V} \times 2\,000\,\text{Hz} \approx 20\,\text{V/ms}$ en considérant une variation de 10 V sur une demi-période. L'ALI ne sature donc pas en vitesse de balayage non plus.

.....

19.10 c) Le gain de l'amplificateur conduit à une tension de sortie pouvant aller jusqu'à 20 V. L'ALI sature donc en amplitude de tension à $V_{\text{sat}} = 15\,\text{V}$ d'après les prérequis.

.....

19.10 d) L'amplitude de sortie est de 10 V au vu du gain de l'amplificateur. Ainsi, la variation de tension de sortie sera donc de l'ordre de $\frac{\text{d}s}{\text{d}t} \approx 10\,\text{V} \times 2 \times 10^7\,\text{Hz} \approx 200\,\text{V/µs}$. L'ALI sature donc en vitesse de balayage.

.....

19.10 e) Ce premier spectre ne comporte qu'une composante spectrale, il correspond donc à un signal sinusoïdal, soit celui du chronogramme (2).

.....

19.10 f) Ce spectre et le suivant comportent tous deux des harmoniques. Celui-ci est plus riche en hautes fréquences que le suivant, on en déduit donc qu'il correspond au signal présentant le plus de discontinuités de tension, cela correspond au chronogramme (1).

.....

19.10 g) Par élimination, ce spectre correspond au chronogramme (3), qui présente une allure globale conservée par rapport au signal sinusoïdal et moins de discontinuités que le spectre précédent.

.....

Fiche n° 20. Oscillateurs électroniques

Réponses

20.1 a) $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\dfrac{u}{\tau}=0}$

20.1 b) $\boxed{\dfrac{1}{\tau}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2 u+\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}=0}$

20.1 c) $\boxed{RC\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2 u-\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}=A}$

20.1 d) $\boxed{\dfrac{1}{\tau}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2 u+\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}=0}$

20.2 a) $\boxed{\mathrm{j}\omega\underline{i}=-\dfrac{\underline{i}}{RC}}$

20.2 b) $\boxed{\dfrac{\mathrm{j}\omega}{\tau}\underline{i}+L^2C^2\underline{i}-(\mathrm{j}\omega)^2\underline{i}=A}$

20.3 a) ⓒ

20.3 b) ⓔ

20.4 a) ⓐ

20.4 b) ⓑ

20.4 c) ⓐ

20.4 d) ⓑ

20.5 a) ⓑ

20.5 b) ⓐ

20.5 c) ⓒ

20.5 d) ⓑ

20.6 a) Vrai

20.6 b) Faux

20.6 c) ⓑ

20.7 a) ⓒ

20.7 b) $\boxed{u_1=\dfrac{u_\mathrm{s}}{A}}$

20.7 c) ⓐ

20.7 d) ⓑ

20.7 e) $\boxed{\dfrac{\left(R+\underline{Z_C}\right)^2+R\underline{Z_C}}{R\underline{Z_C}}}$

20.7 f) ⓓ

20.7 g) $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2u_\mathrm{s}}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{3-A}{RC}\dfrac{\mathrm{d}u_\mathrm{s}}{\mathrm{d}t}+\dfrac{1}{R^2C^2}u_\mathrm{s}=0}$

20.8 a) ⓐ

20.8 b) ⓔ

20.8 c) ⓐ

20.8 d) ⓑ

20.9 a) ⓒ

20.9 b) $\boxed{\dfrac{R_1}{R_1+R_2}V_\mathrm{sat}}$

20.9 c) $\boxed{i=C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}}$

20.9 d) $\boxed{i=\dfrac{V_\mathrm{sat}-u_C}{R}}$

20.9 e) ⓓ

20.9 f) ⓒ

20.9 g) ⓑ

20.9 h) ⓐ

20.9 i) ⓒ

20.9 j) ⓑ

20.10 a) $\boxed{\dfrac{u_\mathrm{e}}{u_\mathrm{s}}=\dfrac{R_0}{R_0+R_2}}$

20.10 b) ..... $\boxed{u_\text{e} - u_\text{s} = R_1 i_\text{e}}$

20.10 c) ..... $\boxed{u_\text{e} = -R_0 \dfrac{R_1}{R_2} i_\text{e}}$

20.10 d) ..... ⓐ

20.10 e) ..... ⓑ

20.10 f) ..... $\boxed{u_\text{e} = R_1 i_\text{e} + V_\text{sat}}$

20.10 g) ..... Caractéristique ①

20.10 h) ..... Caractéristique ③

20.10 i) ..... ⓒ

Corrigés

20.1 a) On remplace une multiplication par $\mathrm{j}\omega$ par une dérivée temporelle. On obtient : $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u}{\tau} = 0$.

.....

20.1 b) De même, on a ici : $\dfrac{1}{\tau}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u + \dfrac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} = 0$.

.....

20.1 c) Avec $\omega^2 \underline{u} = -\mathrm{j}^2\omega^2\underline{u} = -(\mathrm{j}\omega)^2\underline{u}$, on obtient : $RC\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u - \dfrac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} = A$.

.....

20.1 d) En multipliant par $\mathrm{j}\omega\omega_0$, on obtient : $\dfrac{\mathrm{j}\omega}{\tau}\underline{u} + \omega_0^2\underline{u} + (\mathrm{j}\omega)^2\underline{u} = \mathrm{j}\omega_0\omega A$. Il vient ensuite :

$$\frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u + \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} = \omega_0 \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = 0.$$

.....

20.2 a) On remplace une dérivée temporelle par une multiplication par $\mathrm{j}\omega$: $\mathrm{j}\omega\underline{i} = -\dfrac{\underline{i}}{RC}$.

.....

20.3 a) Seul le filtre passe-bande peut être utilisé.

.....

20.3 b) Le filtre passe-bande atténue, donc il faut amplifier le signal pour compenser.

.....

20.4 a) Les deux coefficients sont de même signe, donc le système est stable : solution en $\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$.

.....

20.4 b) Les deux coefficients sont de signes contraires, donc le système est instable : solution en $\exp\left(+\dfrac{t}{\tau}\right)$.

.....

20.4 c) Les trois coefficients sont de même signe, donc le système est stable.

.....

20.4 d) Les trois coefficients sont de signes différents, donc le système est instable.

.....

20.5 a) Si le système est stable, il y a amortissement, donc pas d'oscillations.

.....

20.5 b) Pour démarrer, il faut qu'il y ait amplification et non amortissement, ce qui impose que le deuxième coefficient de l'équation différentielle soit négatif.

.....

20.5 c) Les oscillations sinusoïdales sont décrites par l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 u = 0$ de pulsation ω_0.

20.5 d) Pour avoir des oscillations parfaitement sinusoïdales, il faut que le produit $\underline{H_\mathrm{a} H_\mathrm{f}}$ soit égal à 1, ce qui implique $AH_0 = 1 + \mathrm{j}Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)$, soit $H_0 A = 1$ et $\omega = \omega_0$. C'est le critère de Barkhausen.

20.6 c) Si le complexe $\underline{AB}$ vaut 1, son module vaut 1 et son argument vaut 0.

20.7 a) Il y a rétroaction sur les deux bornes inverseuse et non inverseuse : l'ALI fonctionne alternativement en régime linéaire et en régime saturé.

20.7 b) L'intensité est nulle à l'entrée non inverseuse, et l'intensité du courant est donc identique dans R_1 et R_2. On reconnaît donc un pont diviseur de tension. La relation demandée est donc : $\dfrac{u_1}{R_1} = \dfrac{u_\mathrm{s}}{R_1 + R_2}$, soit $u_1 = \dfrac{u_\mathrm{s}}{A}$.

20.7 c) On a $\underline{Z_1} = R + \underline{Z_C}$.

20.7 d) Ici, $\dfrac{1}{\underline{Z_2}} = \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{\underline{Z_C}} = \dfrac{R + \underline{Z_C}}{R\underline{Z_C}}$, d'où : $\underline{Z_2} = \dfrac{R\underline{Z_C}}{R + \underline{Z_C}}$.

20.7 e) Pour le bloc de droite, on peut appliquer la relation du pont diviseur de tension. On a

$$\frac{\underline{u_\mathrm{s}}}{\underline{u_\mathrm{e}}} = \frac{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}}{\underline{Z_2}} = \frac{R + \underline{Z_C} + \dfrac{R\underline{Z_C}}{R + \underline{Z_C}}}{\dfrac{R\underline{Z_C}}{R + \underline{Z_C}}} = \frac{\left(R + \underline{Z_C}\right)^2 + R\underline{Z_C}}{R\underline{Z_C}}.$$

20.7 f) La relation $\dfrac{\underline{u_\mathrm{s}}}{\underline{u_\mathrm{e}}} = \dfrac{\left(R + \underline{Z_C}\right)^2 + R\underline{Z_C}}{R\underline{Z_C}}$ s'écrit :

$$\frac{\underline{u_\mathrm{s}}}{\underline{u_\mathrm{e}}} = \frac{\left(R + \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}\right)^2 + R\dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}}{R\dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}} = \frac{R^2 + \left(\dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}\right)^2 + 3\dfrac{R}{\mathrm{j}C\omega}}{R\dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}} = \frac{(\mathrm{j}\omega)^2 R^2C^2 + 1 + 3\mathrm{j}\omega RC}{\mathrm{j}\omega RC}.$$

Comme $u_1 = u_\mathrm{e}$, on obtient :

$$\underline{u_\mathrm{s}} = \frac{(\mathrm{j}\omega)^2 R^2C^2 + 1 + 3\mathrm{j}\omega RC}{\mathrm{j}\omega RC}\underline{u_\mathrm{e}} = \frac{(\mathrm{j}\omega)^2 R^2C^2 + 1 + 3\mathrm{j}\omega RC}{\mathrm{j}\omega RC}\frac{1}{A}\underline{u_\mathrm{s}}.$$

D'où :

$$\underline{u_\mathrm{s}} = \frac{(\mathrm{j}\omega)^2 R^2C^2 + 1 + 3\mathrm{j}\omega RC}{\mathrm{j}\omega RC}\frac{1}{A}\underline{u_\mathrm{s}} \quad \text{donc} \quad \left[(\mathrm{j}\omega)^2 + \frac{1}{R^2C^2} + \frac{\mathrm{j}\omega}{RC}(3 - A)\right]\underline{u_\mathrm{s}} = 0.$$

20.7 g) En transposant en réels, on en déduit $\dfrac{\mathrm{d}^2u_\mathrm{s}}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{3 - A}{RC}\dfrac{\mathrm{d}u_\mathrm{s}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{R^2C^2}u_\mathrm{s} = 0$.

20.8 a) Il faut supprimer l'amortissement, donc le premier ordre, d'où $A = 3$.

20.8 b) On a alors $\dfrac{\mathrm{d}^2u_\mathrm{s}}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 u_\mathrm{s} = 0$, avec $\omega_0 = \dfrac{1}{RC}$, d'où $f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi RC}$.

20.8 c) Si $A < 3$, la tension va s'amortir lors d'un régime pseudo-périodique jusqu'à une valeur nulle.

20.8 d) Si $A > 3$, la tension va s'amplifier jusqu'à saturation de l'ALI.

20.9 a) Il y a rétroaction sur les deux bornes inverseuse et non inverseuse : on ne peut pas répondre.

20.9 b) L'intensité à l'entrée de la borne non inverseuse étant nulle, le pont diviseur donne :

$$u_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u_\text{s} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_\text{sat}.$$

20.9 c) On a : $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$.

20.9 d) On a : $i = \dfrac{u_\text{s} - u_C}{R} = \dfrac{V_\text{sat} - u_C}{R}$.

20.9 e) On a $i = \dfrac{V_\text{sat} - u_C}{R} = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$. On en déduit : $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u_C}{RC} = \dfrac{V_\text{sat}}{RC}$.

20.9 f) C'est la solution d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants.

20.9 g) Le second membre étant constant, la solution particulière est constante.

20.9 h) Le condensateur se charge sous la tension V_sat.

20.9 i) Lorsque le condensateur se charge, V_- augmente, donc ε diminue.

20.9 j) La tension différentielle ε diminue. Au moment où cette tension ε devient négative, l'ALI bascule en saturation négative.

20.10 a) On a $v_+ = v_- = u_\text{e}$ car l'ALI est en régime linéaire. Le pont diviseur de tension en bas donne :

$$v_+ = u_\text{e} = u_\text{s} \frac{R_0}{R_0 + R_2}.$$

20.10 b) La relation est obtenue avec la loi d'Ohm aux bornes de R_1.

20.10 c) Avec $i_\text{e} = \dfrac{u_\text{e} - u_\text{s}}{R_1}$, il vient : $u_\text{e} = -R_0 \dfrac{R_1}{R_2} i_\text{e}$.

20.10 d) Pour éviter la saturation : $|u_\text{s}| < V_\text{sat}$.

20.10 e) Les relations $|u_\text{e}| = u_\text{s} \dfrac{R_0}{R_0 + R_2}$ et $|u_\text{s}| < V_\text{sat}$ donnent $|u_\text{e}| < \dfrac{R_0}{R_0 + R_2} V_\text{sat}$.

20.10 f) En prenant $u_\text{s} = +V_\text{sat}$, on a $u_\text{e} = R_1 i_\text{e} + V_\text{sat}$.

20.10 g) En régime linéaire, la pente est négative $\left(u_e = -\dfrac{R_0 R_1}{dR_2}\right)$: toutes les caractéristiques sont possibles. En régime saturé, $u_e = R_1 i_e + V_{sat}$: la pente est positive et l'ordonnée à l'origine vaut V_{sat}. Cela élimine la caractéristique (2).

- En saturation haute, on a $V_+ > V_-$; donc $u_e = V_- < V_+ = \dfrac{R_0}{R_0 + R_2} V_{sat}$.
- En saturation basse, on a $V_+ < V_-$; donc $u_e = V_- > V_+ = -\dfrac{R_0}{R_0 + R_2} V_{sat}$.

D'où la condition indiquée dans l'énoncé $|u_e| < \dfrac{R_0}{R_0 + R_2} V_{sat}$.

Ces conditions imposent la caractéristique (1).

.....

20.10 h) On a toujours les propriétés suivantes :

- En saturation haute, $u_s = +V_{sat}$ et $V_+ > V_-$, donc $u_e = V_- < V_+ = \dfrac{R_0}{R_0 + R_2} V_{sat}$.
  Dans ce cas, $i_e = \dfrac{u_e - V_{sat}}{R_1}$ (ordonnée à l'origine négative) ; cela correspond à :
  $$i_e < \frac{\dfrac{R_0}{R_0 + R_2} V_{sat} - V_{sat}}{R_1} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{V_{sat}}{R_0 + R_2}.$$
- En saturation basse, $u_s = -V_{sat}$ et $V_+ < V_-$, donc $u_e = V_- > V_+ = -\dfrac{R_0}{R_0 + R_2} V_{sat}$.
  Dans ce cas, $i_e = \dfrac{u_e + V_{sat}}{R_1}$ (ordonnée à l'origine positive) ; cela correspond à :
  $$i_e > \frac{-\dfrac{R_0}{R_0 + R_2} V_{sat} + V_{sat}}{R_1} = +\frac{R_2}{R_1} \frac{V_{sat}}{R_0 + R_2}.$$

Ces conditions imposent la caractéristique (3).

Plus simplement, on peut également effectuer une symétrie de la caractéristique (1) de la question précédente.

.....

20.10 i) C'est bien sûr dans la zone centrale que le dipôle se comporte comme une résistance négative.

.....

Fiche n° 21. Cinématique des fluides

Réponses

21.1 a) $\boxed{2{,}59 \times 10^{-1}\,\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{h}^{-1}}$

21.1 b) $\boxed{2{,}59 \times 10^{2}\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{h}^{-1}}$

21.2 $\boxed{\text{b}}$

21.3 $\boxed{\text{c}}$

21.4 a) $\boxed{8{,}7\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}}$

21.4 b) $\boxed{22\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}}$

21.5 a) $\boxed{\text{b}}$

21.5 b) $\boxed{\frac{\pi}{2}\rho V_0 R^2}$

21.6 $\boxed{\text{c}}$

21.7 a) $\boxed{0}$

21.7 b) $\boxed{\text{oui}}$

21.7 c) $\boxed{\text{non}}$

21.7 d) $\boxed{\text{oui}}$

21.8 a) $\boxed{\vec{0}}$

21.8 b) $\boxed{\text{oui}}$

21.8 c) $\boxed{-v_0 y + \phi_0}$

21.9 a) $\boxed{\vec{0}}$

21.9 b) $\boxed{-\frac{k}{2}x^2 - \frac{k}{2}y^2 + \phi_0}$

21.9 c) $\boxed{\text{non}}$

21.9 d) $\boxed{\text{impossible}}$

21.10 a) $\boxed{\vec{0}}$

21.10 b) $\boxed{\vec{0}}$

21.10 c) $\boxed{\vec{0}}$

21.11 a) $\boxed{-\omega x \vec{e_z}}$

21.11 b) $\boxed{\text{oui}}$

21.12 a) $\boxed{\text{d}}$

21.12 b) $\boxed{\text{b}}$

21.12 c) $\boxed{\vec{0}}$

21.13 a) $\boxed{\frac{x}{\tau}\vec{e_x}}$

21.13 b) $\boxed{\vec{0}}$

21.13 c) $\boxed{\text{non}}$

21.13 d) $\boxed{\frac{x}{\tau^2}\vec{e_x}}$

21.14 a) $\boxed{\omega a^2}$

21.14 b) $\boxed{\text{oui}}$

21.14 c) $\boxed{\text{oui}}$

21.14 d) $\boxed{\omega \vec{e_z}}$

21.15 $\boxed{\begin{pmatrix} \frac{3z-2x}{\tau} - 5xK\exp(-t/\tau) \\ 0 \\ \frac{2z-3x}{\tau} - 5zK\exp(-t/\tau) \end{pmatrix} K\exp(-t/\tau)}$

21.16 a) $\boxed{\text{oui}}$

21.16 b) $\boxed{\text{oui}}$

21.16 c) $\boxed{\beta \ln(r) - \alpha\theta}$

21.16 d) $\boxed{-\frac{\beta^2 + \alpha^2}{r^3}\vec{e_r}}$

Corrigés

21.1 a) On convertit le volume en m^3 et la durée en heures. On a :

$$D_v = \frac{15{,}4 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3}{(3 \times 60 + 34) \times \dfrac{1}{3600}\,\mathrm{h}} = 2{,}59 \times 10^{-1}\,\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{h}^{-1}.$$

.....

21.1 b) Cette fois, on convertit le volume en masse grâce à la masse volumique de l'eau, en gardant la même durée. On a :

$$D_v = \frac{1{,}00 \times 10^3\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3} \times 15{,}4 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3}{214 \times \dfrac{1}{3600}\,\mathrm{h}} = 2{,}59 \times 10^2\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{h}^{-1}.$$

.....

21.2 Calculons le débit pour chaque cas donné :

- 100 kg d'eau pendant 50 min correspond à un débit volumique égal à

$$\frac{100\,\mathrm{kg}}{1{,}0 \times 10^3\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3} \times 50\,\mathrm{min} \times 60\,\mathrm{s/min}} = 3{,}3 \times 10^{-5}\,\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{s}^{-1}.$$

- 0,2 mol d'eau pendant 3 ms correspond à un débit volumique égal à

$$\frac{0{,}2\,\mathrm{mol} \times 18{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{mol}^{-1}}{1{,}00 \times 10^3\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3} \times 3{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{s}} = 1{,}2 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{s}^{-1}.$$

- $18\,\mathrm{m}^3$ d'eau pendant 2 jours correspond à un débit volumique égal à

$$\frac{18\,\mathrm{m}^3}{2\,\mathrm{jours} \times 24\,\mathrm{h/jour} \times 3\,600\,\mathrm{s/h}} = 1{,}0 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{s}^{-1}.$$

C'est par conséquent l'écoulement (b) qui possède le débit volumique le plus important.

.....

21.3 On exprime d'abord la masse volumique du fluide en fonction des données du problème : $\rho = \dfrac{D_m}{Sv}$. On réalise ensuite les applications numériques pour les deux valeurs extrêmes de débit massique afin d'obtenir un encadrement de la valeur de masse volumique. On prend soin de convertir les grandeurs dans le système d'unités internationales et de calculer correctement la surface de la section circulaire ($S = \pi r^2 = \pi \dfrac{d^2}{4}$). Ainsi, on a :

$$\rho_{\min} = \frac{70\,\mathrm{g} \cdot \mathrm{s}^{-1}}{\pi(\frac{6\,\mathrm{mm}}{2})^2 \times 2\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}} = \frac{6 \times 10^{-2}\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^{-1}}{\pi(3 \times 10^{-3}\,\mathrm{m})^2 \times 2\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}} = 1{,}2 \times 10^3\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3} = 1{,}2\,\mathrm{g} \cdot \mathrm{cm}^{-3}$$

et $$\rho_{\max} = \frac{80\,\mathrm{g} \cdot \mathrm{s}^{-1}}{\pi(\frac{6\,\mathrm{mm}}{2})^2 \times 2\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}} = \frac{6 \times 10^{-2}\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^{-1}}{\pi(3 \times 10^{-3}\,\mathrm{m})^2 \times 2\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}} = 1{,}4 \times 10^3\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3} = 1{,}4\,\mathrm{g} \cdot \mathrm{cm}^{-3}.$$

En conclusion, on a $\rho = (1{,}3 \pm 0{,}1)\,\mathrm{g} \cdot \mathrm{cm}^{-3}$, les fluides potentiels sont donc le miel et la glycérine. Réponse (c).

.....

21.4 a) Dans le cas d'un écoulement uniforme, on a $D_{v1} = v_1 S_1$. Ici, on a :

$$S_1 = h_1 \times l_1 = 1{,}5 \times 10^3\,\mathrm{cm}^2 = 1{,}5 \times 10^{-1}\,\mathrm{m}^2 \quad \text{et} \quad D_{v1} = \frac{4\,700\,\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{h}^{-1}}{3\,600\,\mathrm{s} \cdot \mathrm{h}^{-1}} = 1{,}306\,\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{s}^{-1}.$$

On en déduit la vitesse moyenne : $v_1 = \dfrac{D_{v1}}{S_1} = \dfrac{1{,}306\,\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{s}^{-1}}{1{,}5 \times 10^{-1}\,\mathrm{m}^2} = 8{,}7\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

.....

21.4 b) Par conservation du débit (écoulement incompressible), on a $D_{v1} = D_{v2}$ donc $v_1 S_1 = v_2 S_2$. D'où,

$$v_2 = v_1 \frac{S_1}{S_2} = 8{,}7\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \times \frac{1{,}5\times10^{-1}\,\mathrm{m^2}}{6{,}0\times10^{-2}\,\mathrm{m^2}} = 22\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

.....

21.5 a) La formule (a) n'est pas homogène : le produit $r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ est homogène à un volume, et non à une surface. De plus, il faut intégrer de 0 à 2π et non de 0 à π : la formule (c) est donc également incorrecte.

.....

21.5 b) Par définition, $D_m = \iint \rho\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$. En coordonnées cylindriques, on obtient ainsi :

$$D_m = \rho V_0 \iint \left(1-\frac{r^2}{R^2}\right) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \rho V_0 \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta \int_0^R \left(1-\frac{r^2}{R^2}\right) r\,\mathrm{d}r = \rho V_0 \times 2\pi \times \left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4R^2}\right]_0^R = 2\pi\rho V_0\left(\frac{R^2}{2}-\frac{R^2}{4}\right).$$

Ainsi, $D_m = \dfrac{\pi}{2}\rho V_0 R^2$.

.....

21.6 On a $\dfrac{\partial}{\partial t}(v_0\sin(\omega t)\vec{e_y}) = \omega v_0\cos(\omega t)\vec{e_y} \neq \vec{0}$.

.....

21.7 a) On a $\mathrm{div}(\vec{v}) = \mathrm{div}(v_0\vec{e_z}) = 0$.

.....

21.7 b) On a $\mathrm{div}(\vec{v}) = 0$; ainsi, l'écoulement est incompressible.

.....

21.7 c) On a $\mathrm{div}(\vec{v}) = \mathrm{div}(kx\vec{e_x} + ky\vec{e_y}) = 2k \neq 0$; ainsi, l'écoulement est compressible.

.....

21.7 d) On a $\mathrm{div}(\vec{v}) = \mathrm{div}(kz\vec{e_x}) = 0$; ainsi, l'écoulement est incompressible.

.....

21.8 a) On a $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}(v_0\vec{e_y}) = \vec{0}$.

.....

21.8 b) On a $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v}) = \vec{0}$; ainsi, l'écoulement est irrotationnel.

.....

21.8 c) On a $\vec{v} = v_0\vec{e_y} = -\dfrac{\mathrm{d}\phi(y)}{\mathrm{d}y}\vec{e_y}$ donc $\phi(y) = -v_0 y + \phi_0$.

.....

21.9 a) On a $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}(kx\vec{e_x} + ky\vec{e_y}) = \vec{0}$.

.....

21.9 b) On a :

$$\vec{v} = kx\vec{e_x} + ky\vec{e_y} = -\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x}\vec{e_x} - \frac{\partial\phi(x,y)}{\partial y}\vec{e_y} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d}\phi = \frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial\phi(x,y)}{\partial y}\,\mathrm{d}y = -kx\,\mathrm{d}x - ky\,\mathrm{d}y.$$

Donc, $\phi - \phi_0 = -\displaystyle\int_0^x kx\,\mathrm{d}x - \int_0^y ky\,\mathrm{d}y$ et donc $\phi(x,y) = -\dfrac{k}{2}x^2 - \dfrac{k}{2}y^2 + \phi_0$.

.....

21.9 c) On a $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v}) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}(kz\vec{e_x}) = k\vec{e_y} \neq \vec{0}$: l'écoulement n'est pas irrotationnel mais tourbillonnaire.

.....

21.10 a) On a $\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \dfrac{\partial(v_0\vec{e_y})}{\partial t} = \vec{0}$.

.....

21.10 b) On a $\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v} = \left(v_0\dfrac{\partial}{\partial y}\right)v_0\vec{e_y} = \vec{0}$.

.....

21.10 c) On a $\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v} = \vec{0}$.

.....

21.11 a) On a :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}(x)) = -\frac{\partial v_z(x)}{\partial x}\vec{e_y} + \frac{\partial v_y(x)}{\partial x}\vec{e_z} = \omega\vec{e_y} \qquad \text{donc} \qquad v_y(x) = A \text{ et } v_z(x) = -\omega x + B,$$

avec A et B des constantes d'intégration.
Comme on a $\vec{v}(x=0) = \vec{0}$, on en déduit $0 = v_y(0) = A$ et $0 = v_z(0) = B$. Donc, $\vec{v}(x) = -\omega x\vec{e_z}$.

.....

21.11 b) On a $\text{div}(\vec{v}(x)) = \text{div}(-\omega x\vec{e_z}) = \dfrac{\partial v_z(x)}{\partial z} = 0$; ainsi, l'écoulement est incompressible.

.....

21.12 a) On a :

$$\vec{v}^2(z) = v_0^2\left(1-\left(\frac{z}{L}\right)^2\right)^2 \qquad \text{donc} \qquad \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\vec{v}^2(z)}{2}\right) = \frac{\text{d}}{\text{d}z}\left(v_0^2\left(1-\left(\frac{z}{L}\right)^2\right)^2\right)\vec{e_z} = -v_0^2\frac{2z}{L^2}\left(1-\left(\frac{z}{L}\right)^2\right)\vec{e_z}.$$

.....

21.12 b) On a :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}(z)) = \frac{\text{d}}{\text{d}z}\left(v_0\left(1-\left(\frac{z}{L}\right)^2\right)\right)\vec{e_y} = -v_0\frac{2z}{L^2}\vec{e_y}$$

$$\text{donc} \qquad \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}(z))\wedge\vec{v}(z) = -v_0\frac{2z}{L^2}\left(v_0\left(1-\left(\frac{z}{L}\right)^2\right)\right)\vec{e_y}\wedge\vec{e_x} = v_0^2\frac{2z}{L^2}\left(1-\left(\frac{z}{L}\right)^2\right)\vec{e_z}.$$

.....

21.12 c) On a $\left(\vec{v}(z)\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}(z) = -v_0^2\dfrac{2z}{L^2}\left(1-\left(\dfrac{z}{L}\right)^2\right)\vec{e_z} + v_0^2\dfrac{2z}{L^2}\left(1-\left(\dfrac{z}{L}\right)^2\right)\vec{e_z} = \vec{0}$.

.....

21.13 a) On a $\vec{v}(x) = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\phi(x) = -\overrightarrow{\text{grad}}\left(-\dfrac{x^2}{2\tau}+\phi_0\right) = \dfrac{x}{\tau}\vec{e_x}$.

.....

21.13 b) On a $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}(x,y,z,t) = \overrightarrow{\text{rot}}\left(\dfrac{x}{\tau}\vec{e_x}\right) = \dfrac{\text{d}v_x(x)}{\text{d}z}\vec{e_y} - \dfrac{\text{d}v_x(x)}{\text{d}y}\vec{e_z} = \vec{0}$.

.....

21.13 c) On a $\text{div}\,\vec{v}(x,y,z,t) = \text{div}\left(\dfrac{x}{\tau}\vec{e_x}\right) = \dfrac{\text{d}\left(\frac{x}{\tau}\right)}{\text{d}x} = \dfrac{1}{\tau} \neq 0$. Donc, l'écoulement n'est pas incompressible.

.....

21.13 d) On a $\overrightarrow{a_{\text{M}}}(t) = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{x}{\tau}\vec{e_x}\right) + \left[\dfrac{x}{\tau}\vec{e_x}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right]\left(\dfrac{x}{\tau}\vec{e_x}\right) = \vec{0} + \left[\dfrac{x}{\tau}\dfrac{\partial}{\partial x}\right]\left(\dfrac{x}{\tau}\vec{e_x}\right) = \dfrac{x}{\tau^2}\vec{e_x}$.

.....

21.14 a) Il y a continuité de la vitesse en $r = a$, ce qui se traduit par $\omega a = \dfrac{K}{a}$ d'où $K = \omega a^2$.

.....

21.14 b) On voit que $v_r = 0$: ainsi, la divergence de la vitesse est nulle, ce qui correspond à un écoulement incompressible.

.....

21.14 c) Pour $r \geqslant a$, on a $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\text{d}K}{\text{d}r}\vec{e_z} = \vec{0}$. L'écoulement est donc irrotationnel hors du coeur.

.....

21.14 d) Pour $r \leqslant a$, le vecteur tourbillon s'écrit $\vec{\Omega} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}(\omega r^2)}{\mathrm{d}r}\vec{e_z} = \dfrac{1}{2r} \times 2r\omega\vec{e_z} = \omega\vec{e_z}$.

.....

21.15 La dérivée particulaire à calculer porte sur le champ de vitesse $\vec{v}$:

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v}.$$

Le champ à dériver est exprimé dans un système de coordonnées cartésiennes. En projetant cette équation vectorielle sur une base $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ et en développant l'expression du gradient en coordonnées cartésiennes, on obtient trois équations scalaires qui sont les composantes a_x, a_y et a_z :

$$\begin{aligned}
a_x &= \frac{\mathrm{D}v_x}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\\
a_y &= \frac{\mathrm{D}v_y}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\\
a_z &= \frac{\mathrm{D}v_z}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Calculons les différentes composantes. On a :

$$\begin{aligned}
a_x &= \frac{3z-2x}{\tau}K\exp(-t/\tau) + \Big(2\times(2x-3z) - 3\times(3x-2z)\Big)K^2\exp(-2t/\tau)\\
&= \left(\frac{3z-2x}{\tau} - 5xK\exp(-t/\tau)\right)K\exp(-t/\tau)\\
\text{et}\quad a_y &= 0\\
\text{et}\quad a_z &= \frac{2z-3x}{\tau}K\exp(-t/\tau) + \Big(3\times(2x-3z) - 2\times(3x-2z)\Big)K^2\exp(-2t/\tau)\\
&= \left(\frac{2z-3x}{\tau} - 5zK\exp(-t/\tau)\right)K\exp(-t/\tau).
\end{aligned}$$

Finalement, en écrivant la solution $\vec{a} = a_x\vec{e_x} + a_y\vec{e_y} + a_z\vec{e_z}$ sous forme matricielle (vecteur colonne), on a :

$$\vec{a}(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} \dfrac{3z-2x}{\tau} - 5xK\exp(-t/\tau)\\ 0\\ \dfrac{2z-3x}{\tau} - 5zK\exp(-t/\tau)\end{pmatrix}K\exp(-t/\tau).$$

.....

21.16 a) On a $\operatorname{div}\vec{v} = \operatorname{div}\left(-\dfrac{\beta}{r}\vec{e_r} + \dfrac{\alpha}{r}\vec{e_\theta}\right) = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\beta}{r}\right) = 0$; ainsi, l'écoulement est incompressible.

.....

21.16 b) On a $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{v} = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(-\dfrac{\beta}{r}\vec{e_r} + \dfrac{\alpha}{r}\vec{e_\theta}\right) = \vec{0} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\alpha}{r}\right)\vec{e_z} = \vec{0}$; ainsi, l'écoulement est irrotationnel.

.....

21.16 c) On a :

$$\vec{v} = -\frac{\beta}{r}\vec{e_r} + \frac{\alpha}{r}\vec{e_\theta} = -\frac{\partial\Phi}{\partial r}\vec{e_r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\vec{e_\theta} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d}\Phi = \frac{\partial\Phi(r,\theta)}{\partial r}\,\mathrm{d}r + \frac{\partial\Phi(r,\theta)}{\partial\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\beta}{r}\,\mathrm{d}r - \alpha\,\mathrm{d}\theta.$$

Donc,

$$\Phi(r,\theta) - \Phi(1,0) = \int_1^r \frac{\beta}{r}\,\mathrm{d}r - \int_0^\theta \alpha\,\mathrm{d}\theta \qquad \text{et donc} \qquad \Phi(r,\theta) = \beta\ln(r) - \alpha\theta.$$

.....

21.16 d) L'écoulement est stationnaire et irrotationnel. Donc, on a :

$$\vec{a_p} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\left(\frac{\vec{v}^2}{2}\right) = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\left(\frac{\beta^2+\alpha^2}{2r^2}\right) = -\frac{\beta^2+\alpha^2}{r^3}\vec{e_r}.$$

.....

Fiche n° 22. Dynamique des fluides I

Réponses

22.1 a) ..... ⓑ

22.1 b) ..... $32\,\text{nm}$

22.2 ..... ⓒ

22.3 a) ..... $10^5\,\text{Pa}$

22.3 b) ..... $10\,\text{N}\cdot\text{cm}^{-2}$

22.3 c) ..... $100\,\text{N}$

22.4 a) ..... ⓐ

22.4 b) ..... ⓐ

22.4 c) ..... $2{,}5\times10^{13}$

22.5 a) ..... $p_0hL\vec{e_x}$

22.5 b) ..... $-\left(p_0+\dfrac{\mu gh}{2}\right)hL\vec{e_x}$

22.5 c) ..... $-\dfrac{\mu gh^2}{2}L\vec{e_x}$

22.6 a) ..... $p_0+\mu g(h(x,t)-z)$

22.6 b) ..... $(h(x,t)-f(x))L\,\mathrm{d}x$

22.6 c) ..... $-\mu g\dfrac{\partial h}{\partial x}\times(h(x,t)-f(x))\times L\,\mathrm{d}x$

22.7 a) ..... $\dfrac{M_{\text{air}}\delta n}{\mathrm{d}V}$

22.7 b) ..... $\dfrac{M_{\text{air}}p}{RT_0}$

22.7 c) ..... $1{,}2\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$

22.8 a) ..... $1\times10^3\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$

22.8 b) ..... $p_0-\rho gz$

22.8 c) ..... $\dfrac{p(z)M}{RT_0}$

22.8 d) ..... $p_0\exp\left(-\dfrac{Mgz}{RT_0}\right)$

22.8 e) ..... $p_0\left(\dfrac{T_0-\alpha z}{T_0}\right)^{\frac{Mg}{\alpha R}}$

22.9 a) ..... $5{,}8\,\text{km}$

22.9 b) ..... $p_0(1-\dfrac{z}{H})$

22.9 c) ..... $2\times10^{-2}\%$

22.10 a) ..... $v(r)\times\mathrm{d}S$

22.10 b) ..... $2\pi r\,\mathrm{d}r$

22.10 c) ..... πR^2U

22.10 d) ..... $\pi\dfrac{R^2}{2}v_0$

22.11 a) ..... ⓑ

22.11 b) ..... $2\pi r_0L$

22.11 c) ..... $-4\pi r_0^2AL\eta$

22.11 d) ..... $4\pi R^2AL\eta$

22.12 a) ..... $\vec{u_3}$

22.12 b) ..... A_2

22.12 c) ..... A_1

22.12 d) ..... A_4

22.12 e) ..... A_3

22.12 f) ..... $i+\alpha_0=\phi+\varepsilon$

22.13 a) ..... $\vec{F_{\text{p}}}+\vec{F_{\text{t}}}+\vec{P}+\vec{F_{\text{m}}}=\vec{0}$

22.13 b) ..... $\dfrac{1}{2}\mu SC_{\text{p}}v^2=mg$

22.13 c) ..... $\dfrac{1}{2}\mu SC_tv^2=F_{\text{m}}$

22.14 a) ..... $\vec{F_{\text{p}}}+\vec{F_{\text{t}}}+\vec{P}=\vec{0}$

22.14 b) ..... $F_{\text{t}}=mg\sin(\alpha_0)$

22.14 c) ..... $\boxed{F_\text{p} = mg\cos(\alpha_0)}$

22.14 d) ..... $\boxed{\tan\alpha_0 = \dfrac{C_t}{C_\text{p}}}$

22.14 e) ..... $\boxed{\text{C}}$

Corrigés

22.1 a) On a $n_a^* = \dfrac{p\mathcal{N}_A}{RT} = \dfrac{3\times10^5\,\text{Pa}\times6{,}02\times10^{23}\,\text{mol}^{-1}}{8{,}314\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}\times280\,\text{K}} = 7{,}8\times10^{25}\,\text{m}^{-3}$.

De la même façon, on trouve : $n_b^* = 4{,}5\times10^{25}\,\text{m}^{-3}$. Notons que $n_b^* < n_a^*$; ainsi $\ell_b > \ell_a$.

.....

22.1 b) D'après la relation, on a $\ell_a = \dfrac{1}{\sqrt{2}\pi(3\times10^{-10}\,\text{m})^2\times7{,}8\times10^{25}\,\text{m}^{-3}} = 32\,\text{nm}$.

.....

22.2

(a) On reconnaît ici le poids divisé par un volume. La relation est donc le poids volumique.

(b) La force de Lorentz est : $\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B})$. De plus, ρ est homogène à une charge sur un volume. Ainsi, $\rho(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B})$ est homogène à une force volumique.

(c) Notons que $Q\vec{E}$ est homogène à une force. On a $[\vec{j}\wedge\vec{E}] = \dfrac{[i]}{L^2}[\vec{E}] = \dfrac{[Q]}{T\times L^2}[\vec{E}] \neq \dfrac{[Q]}{L^3}[\vec{E}]$. Ainsi, $\vec{j}\wedge\vec{E}$ n'est pas une force volumique.

(d) Notons que $[Q\vec{v}\wedge\vec{B}]$ est homogène à une force. On a $[Q\vec{v}\wedge\vec{B}] = [Q]\dfrac{L}{T}[\vec{B}]$. Donc,

$$[\vec{j}\wedge\vec{B}] = \frac{[i]}{L^2}[\vec{B}] = \frac{[Q]}{T\times L^2}[\vec{B}] = \frac{[Q\vec{v}\wedge\vec{B}]}{L^3}.$$

Ainsi, l'expression proposée est homogène à une force volumique.

(e) La force de pression agissant sur une surface s'écrit : $\vec{F} = PS\vec{u}$; ainsi $[\vec{F}] = [P]\times L^2$. On a :

$$\left[\overrightarrow{\text{grad}}(P)\right] = \frac{[P]}{L} = \frac{[P]\times L^2}{L^3}.$$

L'expression proposée est donc homogène à une force volumique.

.....

22.3 a) La pression au niveau de la mer, dans les conditions usuelles, vaut sensiblement $1\,\text{bar} = 10^5\,\text{Pa}$.

.....

22.3 b) La pression est une force surfacique donc $1\,\text{Pa} = 1\,\text{N}\cdot\text{m}^{-2}$ avec $1\,\text{m}^2 = 10^4\,\text{cm}^2$.

On a donc une pression de $10\,\text{N}\cdot\text{cm}^{-2}$.

.....

22.3 c) Une pression de $1\,\text{bar} = 10\,\text{N}\cdot\text{cm}^{-2}$, sur une surface de $10\,\text{cm}^2$, donne une force qui vaut :

$$10\,\text{N}\cdot\text{cm}^{-2}\times10\,\text{cm}^2 = 100\,\text{N}.$$

.....

22.4 a) La densité volumique vérifie $n^* = \dfrac{p\mathcal{N}_A}{RT} = \dfrac{10^5\,\text{Pa}\times6{,}02\times10^{23}\,\text{mol}^{-1}}{8{,}314\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}\times288{,}15\,\text{K}} = 2{,}5\times10^{25}\,\text{m}^{-3}$.

.....

22.4 b) Le nombre de particules vérifie $N_0 = n^*\times V = 2{,}5\times10^{25}\,\text{m}^{-3}\times1\times10^{-3}\,\text{m} = 2{,}5\times10^{22}$.

.....

22.4 c) Le nombre de particules vérifie $N_0 = n^* \times d^3 = 2{,}5 \times 10^{25}\,\mathrm{m}^{-3} \times 1 \times 10^{-12}\,\mathrm{m}^3 = 2{,}5 \times 10^{13}$.

22.5 a) Pour l'air, $\vec{u} = \vec{e_x}$ et le champ de pression est uniforme, égal à p_0. On a $\overrightarrow{F_1} = p_0 S\vec{e_x} = p_0 hL\vec{e_x}$.

22.5 b) Pour l'eau, $\vec{u} = -\vec{e_x}$. On a :

$$F_2 = \int_{y=0}^{L} \mathrm{d}y \int_{z=-h}^{0} (p_0 - \mu g z)\,\mathrm{d}z = L \times \left[p_0 z - \mu g \frac{z^2}{2}\right]_{-h}^{0} \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{F_2} = -\left(p_0 + \frac{\mu g h}{2}\right) hL\vec{e_x}.$$

22.5 c) La résultante des forces s'écrit $\vec{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$.

22.6 a) La hauteur de la colonne de fluide ΔH vaut $h(x,z,t) - z$. Ainsi $p(x,z,t) = p_0 + \mu g(h(x,t) - z)$.

22.6 b) La section de ce volume vaut $(h(x,t) - f(x)) \times L$. Ainsi, on a $\mathrm{d}V = (h(x,t) - f(x))L\,\mathrm{d}x$.

22.6 c) La force élémentaire selon $(\mathrm{O}x)$ vaut $\mathrm{d}F_x = -\mu g \dfrac{\partial h}{\partial x} \times (h(x,t) - f(x)) \times L\,\mathrm{d}x$.

22.7 a) La masse volumique vaut $\rho = \dfrac{\delta m}{\mathrm{d}V} = \dfrac{M_{\text{air}}\delta n}{\mathrm{d}V}$.

22.7 b) Si on assimile l'air de l'atmosphère à un gaz parfait, on a $\rho = \dfrac{M_{\text{air}}\delta n}{dV} = \dfrac{M_{\text{air}} p}{RT_0}$.

22.7 c) Au niveau de l'océan, la pression est de 1 bar soit 1×10^5 Pa. La masse volumique vaut :

$$\rho = \frac{29 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg \cdot mol^{-1}} \times 10^5\,\mathrm{Pa}}{8{,}314\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}} \times 288\,\mathrm{K}} = 1{,}2\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}.$$

22.8 a) La masse volumique de l'eau est $\rho_0 = \dfrac{1\,\mathrm{kg}}{1\,\mathrm{L}} = \dfrac{1\,\mathrm{kg}}{1 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3}$.

22.8 b) La masse volumique ρ est constante. On a $\displaystyle\int_{p(z)}^{p(0)=p_0} \mathrm{d}p = \int_z^0 -\rho_0 g\,\mathrm{d}z$ donc $p(z) = p_0 - \rho_0 g z$.

22.8 c) On a $pV = nRT_0 = \dfrac{m}{M}RT_0$ donne $\rho(z) = \dfrac{m}{V} = \dfrac{p(z)M}{RT_0}$.

22.8 d) L'équation différentielle est $\dfrac{dp}{dz} + \dfrac{Mg}{RT_0}p(z) = 0$ avec la condition initiale $p(z=0) = p_0$.

On calcule : $\displaystyle\int_{p(z)}^{p(0)=p_0} \frac{\mathrm{d}p}{p} = \int_z^0 -\frac{Mg}{RT_0}\,\mathrm{d}z$, ce qui conduit à $p(z) = p_0 \exp\left(-\dfrac{Mgz}{RT_0}\right)$.

22.8 e) On utilise $\rho(z) = \dfrac{m}{V} = \dfrac{p(z)M}{RT(z)}$, ce qui donne l'équation $\dfrac{dp}{p} = -\dfrac{Mg}{R(T_0 - \alpha z)}\,\mathrm{d}z$. On calcule :

$$\int_{p(z)}^{p(0)=p_0} \frac{\mathrm{d}p}{p} = \int_z^0 -\frac{Mg}{R(T_0 - \alpha z)}\,\mathrm{d}z,$$

ce qui conduit à $\ln\left(\dfrac{p(z)}{p_0}\right) = \dfrac{Mg}{R\alpha} \times \ln\left(\dfrac{T_0 - \alpha z}{T_0}\right)$ et donc $p(z) = p_0\left(\dfrac{T_0 - \alpha z}{T_0}\right)^{\frac{Mg}{\alpha R}}$.

22.9 a) L'altitude z_0 est telle que $p(z=z_0)=\dfrac{p_0}{2}=p_0\mathrm{e}^{-z_0/H}$ et vaut donc $z_0=H\ln(2)$.

22.9 b) On fait un développement limité de $p(z)$ à l'ordre 1 et l'on obtient $p(z)\approx p_0\left(1-\dfrac{z}{H}\right)$.

22.9 c) La diminution de pression vérifie $\Delta p=p_0\dfrac{\Delta z}{H}$ où $\Delta z\approx 1{,}7\,\mathrm{m}$ est la différence d'altitude entre les pieds et la tête. Ainsi $\dfrac{\Delta p}{p_0}\approx 2\times10^{-2}\,\%$.

22.10 a) Les vecteurs $\vec{v}=v(r)\vec{e_z}$ et $\overrightarrow{\mathrm{d}S}=\mathrm{d}S\vec{e_z}$ sont colinéaires.

22.10 b) On écrit que $\mathrm{d}S=\displaystyle\int_{\theta=0}^{2\pi} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$. Soit $\mathrm{d}S=2\pi r\,\mathrm{d}r$.

22.10 c) On écrit que $Q_v=\displaystyle\int_{r=0}^{R}2\pi U r\,\mathrm{d}r$. On obtient $Q_v=\pi R^2U$.

22.10 d) On écrit que $Q_v=\displaystyle\int_{r=0}^{R}2\pi r v(r)\,\mathrm{d}r$. On obtient $Q_v=\pi\dfrac{R^2}{2}v_0$.

22.11 a) Le fluide étant visqueux, il y a continuité de la vitesse au niveau d'une paroi. Comme celle-ci est immobile, on en déduit que $v(r=R)=0$.

22.11 b) Il s'agit de la surface latérale d'un cylindre de longueur L et de rayon r_0 ; ainsi, on a $S=2\pi r_0L$.

22.11 c) On utilise le fait qu'ici $\left(\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)_{r=r_0}=-2Ar_0$. L'expression de la force est donc : $F(r_0)=-4\pi r_0^2AL\eta$.

22.11 d) La force F_0 correspond à $-F(r_0=R)$. Ainsi $F_0=4\pi R^2AL\eta$.

22.12 a) En l'absence de vent, le vent relatif a la direction de la trajectoire de l'aéronef.

22.13 a) Il s'agit du principe fondamental de la dynamique, dans le cas où l'accélération est nulle.

22.13 b) On projette le principe fondamental de la dynamique selon l'axe vertical.

22.13 c) On projette le principe fondamental de la dynamique selon l'axe horizontal.

22.14 a) Il s'agit du principe fondamental de la dynamique, dans le cas où l'accélération est nulle.

22.14 e) On construit la droite qui passe par l'origine et qui est tangente à la polaire. Le point de tangence correspond au choix optimal, c'est donc qualitativement le point C.

Fiche n° 23. Dynamique des fluides II

Réponses

23.1 a) $\boxed{v(y) = \frac{v_0}{a} y}$

23.1 b) $\boxed{v(y) = \frac{v_0}{a} y - \frac{K}{2} a y \left(1 - \frac{y}{a}\right)}$

23.1 c) $\boxed{v(r) = -\frac{KR^2}{4}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)}$

23.2 a) $\boxed{D_v = v_0 ab}$

23.2 b) $\boxed{D_v = A\pi \frac{R^4}{2}}$

23.3 a) $\boxed{\text{b}}$

23.3 b) $\boxed{\text{c}}$

23.3 c) $\boxed{\text{a}}$

23.4 a) $\boxed{\frac{\rho V L}{\eta}}$

23.4 b) $\boxed{\frac{V}{\Omega L}}$

23.4 c) $\boxed{\frac{\eta}{\rho \Omega L^2}}$

23.5 a) $\boxed{M.L^{-1}.T^{-1}}$

23.5 b) $\boxed{L^2.T^{-1}}$

23.5 c) $\boxed{\text{d}}$

23.6 a) $\boxed{\mu g \vec{e_z}}$

23.6 b) $\boxed{L\left(P_0 h - \mu g \frac{h^2}{2}\right)\vec{e_z}}$

23.7 a) $\boxed{\frac{P_2 - P_1}{L}\vec{e_x}}$

23.7 b) $\boxed{\frac{P_2 - P_1}{L}(x - x_1) + P_1}$

23.7 c) $\boxed{\left[\frac{P_1 - P_2}{L}(L - x_1) + P_1\right] S \vec{e_x}}$

23.8 a) $\boxed{2A\eta \vec{e_x}}$

23.8 b) $\boxed{2A\eta h L^2 \vec{e_x}}$

23.9 a) $\boxed{5{,}2 \times 10^{-3}}$

23.9 b) $\boxed{3{,}4 \times 10^{-5}\,\text{N}}$

23.9 c) $\boxed{6{,}7 \times 10^{-6}\,\text{N}}$

23.9 d) $\boxed{4{,}0 \times 10^{-5}\,\text{N}}$

23.9 e) $\boxed{\frac{2\mu_\text{a} R^2}{9\eta}}$

23.9 f) $\boxed{0{,}5\,\text{ms}}$

23.10 a) $\boxed{P(x, y, z)\,\text{d}y\,\text{d}z\vec{e_x}}$

23.10 b) $\boxed{-P(x + \text{d}x, y, z)\,\text{d}y\,\text{d}z\vec{e_x}}$

23.10 c) $\boxed{-\frac{\partial P}{\partial x}\,\text{d}\tau}$

23.10 d) $\boxed{-\frac{\partial P}{\partial y}\,\text{d}\tau}$

23.10 e) $\boxed{-\frac{\partial P}{\partial z}\,\text{d}\tau}$

23.10 f) $\boxed{-\overrightarrow{\text{grad}}\,P}$

23.11 a) $\boxed{\vec{0}}$

23.11 b) $\boxed{\text{b}}$

23.11 c) $\boxed{\text{d}}$

23.12 a) $\boxed{\text{d}}$

23.12 b) $\boxed{\eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\,\text{d}\tau\,\vec{e_x}}$

23.12 c) $\boxed{\text{a}}$

23.13 a) $\boxed{\text{d}}$

23.13 b) $\boxed{\text{a}}$

23.13 c) $\boxed{\vec{0}}$

23.14 a) ..... $\boxed{\vec{0} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P(\text{M},t) + \vec{F}_{\text{V,a}}}$

23.14 b) ..... $\boxed{\text{d}}$

23.14 c) ..... $\boxed{\text{c}}$

23.15 a) ..... $\boxed{\vec{0}}$

23.15 b) ..... $\boxed{\text{b}}$

23.15 c) ..... $\boxed{U\dfrac{z}{a}}$

23.15 d) ..... $\boxed{\text{c}}$

23.16 a) ..... $\boxed{\text{b}}$

23.16 b) ..... $\boxed{\text{a}}$

23.16 c) ..... $\boxed{\text{b}}$

23.16 d) ..... $\boxed{\text{d}}$

23.17 a) .... $\boxed{\mu\left(\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}\right) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P + \mu\vec{g}}$

23.17 b) ..... $\boxed{\dfrac{2\Delta P}{\mu}}$

23.17 c) ..... $\boxed{D_V = v_{\text{B}}s = Ss\sqrt{\dfrac{2\Delta P}{\mu(S^2 - s^2)}}}$

23.18 a) ..... $\boxed{\vec{0}}$

23.18 b) ... $\boxed{\vec{0} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P(x,z) + \eta\Delta\vec{v}(z) + \mu\vec{g}}$

23.18 c) ..... $\boxed{\dfrac{\partial P(x,z)}{\partial x} = \eta\dfrac{\partial^2 v(z)}{\partial z^2}}$

23.18 d) ..... $\boxed{v(z) = v_0\left(1 - \dfrac{z^2}{h^2}\right)}$

23.18 e) ..... $\boxed{P(x) = P_0 - \dfrac{2\eta v_0}{h^2}x}$

23.19 a) .... $\boxed{\begin{array}{r}\mu\dfrac{\partial\vec{v}(z,t)}{\partial t} = \\ -\overrightarrow{\text{grad}}\, P(z,t) + \eta\Delta\vec{v}(z,t) + \mu\vec{g}\end{array}}$

23.19 b) ..... $\boxed{\mu\dfrac{\partial v(z,t)}{\partial t} = \eta\dfrac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2}}$

23.19 c) ..... $\boxed{\dfrac{\mu}{\eta}h^2}$

23.19 d) ..... $\boxed{\text{2 h 46 min 40 s}}$

23.19 e) ..... $\boxed{\dfrac{\text{d}^2 v(z)}{\text{d}z^2} = 0}$

23.19 f) ..... $\boxed{v(z) = \dfrac{v_p}{h}z}$

23.19 g) ..... $\boxed{-\eta\dfrac{v_p}{h}S\vec{e_x}}$

23.20 a) ..... $\boxed{\text{a}}$

23.20 b) ..... $\boxed{\text{c}}$

23.21 a) ..... $\boxed{v_{\text{B}}^2 = v_{\text{A}}^2 + 2gh}$

23.21 b) ..... $\boxed{\dfrac{R^2}{a^2}v_{\text{A}}}$

23.21 c) ..... $\boxed{\sqrt{2gh}}$

23.22 a) ..... $\boxed{\text{c}}$

23.22 b) ..... $\boxed{\text{c}}$

23.22 c) ..... $\boxed{\text{c}}$

23.23 a) ..... $\boxed{\dfrac{U}{T}\dfrac{\partial\vec{v^*}}{\partial t^*}}$

23.23 b) ..... $\boxed{\dfrac{U^2}{L}\left(\vec{v^*}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}^*\right)(\vec{v^*})}$

23.23 c) ..... $\boxed{\dfrac{U}{L^2}\Delta^*(\vec{v^*})}$

23.23 d) ..... $\boxed{\rho U^2}$

23.23 e) ..... $\boxed{\dfrac{L}{UT}}$

23.23 f) ..... $\boxed{\dfrac{U^2}{gL}}$

23.23 g) ..... $\boxed{\dfrac{\rho LU}{\eta}}$

Corrigés

23.1 a) On a $\dfrac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}y^2} = 0$ donc $v(y) = A + By$. Les conditions aux limites permettent d'écrire $A = 0$ et $B = \dfrac{v_0}{a}$.

.....

23.1 b) On a $v(y) = A + By + \dfrac{K}{2}y^2$. Les conditions aux limites permettent d'écrire $A = 0$ et $B = \dfrac{v_0}{a} - \dfrac{K}{2}a$.

.....

23.1 c) On a $v(r) = \dfrac{Kr^2}{4} + B\ln(r) + A$. La constante B doit être nulle pour éviter la divergence de v en $r = 0$. La condition aux limites $v(0) = 0$ permet de trouver $A = -\dfrac{KR^2}{4}$.

.....

23.2 b) On peut écrire :

$$D_v = 2\pi A\left[R^2\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^R = A\left[\int_{\theta=0}^{2\pi}\mathrm{d}\theta\right] \times \left[\int_{r=0}^{R}\left(R^2 - r^2\right)r\,\mathrm{d}r\right] = A\pi\frac{R^4}{2}.$$

.....

23.3 a) Un dauphin peut être modélisé par un cylindre dont le rayon est de 50 cm environ. La vitesse doit de plus être exprimée en mètres par seconde : $20\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1} = 20/3{,}6\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. On a donc $\mathrm{Re} = \dfrac{20 \times 0{,}50}{3{,}6 \times 10^{-6}}$.

.....

23.3 b) Une balle de tennis a un diamètre de l'ordre de 6 cm.

.....

23.3 c) Un moucheron a une taille caractéristique de l'ordre de 1 mm.

.....

23.4 a) On a $\|\rho(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{v}\| \sim \rho V^2/L$ et $\|\Delta\vec{v}\| \sim v/L^2$.

.....

23.5 a)

- La dimension du laplacien du champ des vitesses est : $[\Delta(\vec{v})] = \dfrac{[\text{vitesse}]}{[\text{longueur}]^2} = L^{-1}.T^{-1}$.
- La dimension de la force volumique visqueuse est $[f_{\text{vis}}] = \dfrac{[\text{force}]}{[\text{volume}]} = \dfrac{M.L.T^{-2}}{L^3} = M.L^{-2}.T^{-2}$.
- La dimension de la viscosité dynamique est : $[\eta] = \dfrac{M.L^{-2}.T^{-2}}{L^{-1}.T^{-1}}$ soit $[\eta] = M.L^{-1}.T^{-1}$.

.....

23.5 b) La dimension de la viscosité cinématique se déduit du résultat précédent sur la viscosité dynamique :

$$[\nu] = \frac{M.L^{-1}.T^{-1}}{M.L^{-3}} = L^2.T^{-1}.$$

.....

23.5 c) On calcule en unités du système international avec $\rho = 10^3\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$: on a $\nu = \dfrac{10^{-3}\,\text{usi}}{10^3} = 10^{-6}\,\text{usi}$.

.....

23.6 a) On a $-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P(z) = -\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}\vec{e_z} = \mu g\vec{e_z}$.

.....

23.6 b) On écrit $\delta\overrightarrow{F_P} = P(z)\,\mathrm{d}\overrightarrow{S} = P(z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\overrightarrow{e_x} = (P_0 - \mu g z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\overrightarrow{e_x}$. En intégrant sur toute la surface, on a :

$$\overrightarrow{F_P} = \iint_{(S)} P(z)\,\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \int_{y=0}^{L}\int_{z=0}^{h} (P_0 - \mu g z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\overrightarrow{e_x} = L\overrightarrow{e_x}\left[P_0 z - \frac{\mu g}{2}z^2\right]_0^h = L\left(P_0 h - \mu g\frac{h^2}{2}\right)\overrightarrow{e_x}.$$

.....

23.7 a) Comme le gradient est constant, on a $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P(x) = \dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\overrightarrow{e_x} = \dfrac{P(x_2) - P(x_1)}{x_2 - x_1}\overrightarrow{e_x}$. Avec les conditions données, on obtient :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P(x) = \frac{P_2 - P_1}{L}\overrightarrow{e_x}.$$

.....

23.7 b) En primitivant la composante selon $(\mathrm{O}x)$ et en utilisant les conditions aux limites, on obtient :

$$\frac{P_2 - P_1}{L}(x - x_1) + P_1.$$

.....

23.7 c) On a :

$$\delta\overrightarrow{F_P} = P(L)\,\mathrm{d}\overrightarrow{S} = -\left[\frac{P_2 - P_1}{L}(L - x_1) + P_1\right]\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\overrightarrow{e_x}.$$

Sachant que $P(x)$ ne dépend ni de y ni de z, on obtient par intégration : $\overrightarrow{F_P} = \left[\dfrac{P_1 - P_2}{L}(L - x_1) + P_1\right]S\overrightarrow{e_x}$.

.....

23.8 a) On écrit $\eta\Delta(\overrightarrow{v}(z)) = \eta\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{v}(z)}{\mathrm{d}z^2} = \eta\dfrac{\mathrm{d}^2\left(Az^2\right)}{\mathrm{d}z^2}\overrightarrow{e_x} = 2A\eta\overrightarrow{e_x}$.

.....

23.8 b) On écrit $\delta\overrightarrow{F_\mathrm{v}} = \eta\dfrac{\partial Az^2}{\partial z}\,\mathrm{d}S\overrightarrow{e_x} = 2A\eta z\,\mathrm{d}S\overrightarrow{e_x}$.

En sommant sur toute la surface, sachant que $\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ et $z = h$, on obtient :

$$\overrightarrow{F_\mathrm{v}} = \iint_S \delta\overrightarrow{F_\mathrm{v}} = \int_{x=0}^{L}\int_{y=0}^{L} 2A\eta h\overrightarrow{e_x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2A\eta h L^2\overrightarrow{e_x}.$$

.....

23.9 a) On a $\mathrm{Re} = \dfrac{\mu_\mathrm{g}\,\mathrm{d}v_\ell}{\eta} = \dfrac{1{,}3\times10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}\times1{,}0\times10^{-3}\,\mathrm{m}\times3{,}8\,\mathrm{mm\cdot s^{-1}}}{0{,}94\,\mathrm{Pa\cdot s}} = 5{,}3\times10^{-3}$.

.....

23.9 b) On a $\|\overrightarrow{F_\mathrm{t}}\| = 6\pi\eta R v_\ell = 6\pi\times0{,}94\,\mathrm{Pa\cdot s}\,\dfrac{1{,}0\times10^{-3}\,\mathrm{m}}{2}\,3{,}8\,\mathrm{mm\cdot s^{-1}} = 3{,}4\times10^{-5}\,\mathrm{N}$.

.....

23.9 c) La bille étant entièrement immergée, $V_\mathrm{s,i} = \dfrac{4}{3}\pi R^3$, d'où la norme de la poussée d'Archimède :

$$\|\overrightarrow{\Pi}\| = \mu_\mathrm{g}\frac{4}{3}\pi R^3 g = 1{,}3\times10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}\frac{4}{3}\pi\left(\frac{1{,}0\times10^{-3}\,\mathrm{m}}{2}\right)^3 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}} = 6{,}7\times10^{-6}\,\mathrm{N}.$$

.....

23.9 d) Sachant que la bille a une masse $m = \mu_\mathrm{a}V$ et un volume $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$, on a :

$$\|\overrightarrow{P}\| = \mu_\mathrm{a}\frac{4}{3}\pi R^3 g = 7{,}8\times10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}\frac{4}{3}\pi\left(\frac{1{,}0\times10^{-3}\,\mathrm{m}}{2}\right)^3 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}} = 4{,}0\times10^{-5}\,\mathrm{N}.$$

.....

23.9 e) La seconde loi de Newton dans un référentiel galiléen donne :

$$m\vec{a}_{\mathrm{M}}(t) = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t}(t) = \vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{F}_t.$$

En projetant selon l'axe vertical, on obtient :

$$\mu_{\mathrm{a}}\frac{4}{3}\pi R^3\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = \mu_{\mathrm{a}}\frac{4}{3}\pi R^3 g - \mu_{\mathrm{g}}\frac{4}{3}\pi R^3 g - 6\pi\eta R v(t) \qquad \text{donc} \qquad \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{v(t)}{\tau} = \left(1 - \frac{\mu_{\mathrm{g}}}{\mu_{\mathrm{a}}}\right)g,$$

avec $\tau = \dfrac{2\mu_{\mathrm{a}}R^2}{9\eta}$.

.....

23.9 f) On écrit $\tau = \dfrac{2\times 7{,}8\times 10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}\left(5\times 10^{-4}\,\mathrm{m}\right)^2}{9\times 0{,}94\,\mathrm{Pa\cdot s}} = 4{,}6\times 10^{-4}\,\mathrm{s} \approx 0{,}5\,\mathrm{ms}.$

.....

23.10 c) La résultante des forces de pression suivant $(\mathrm{O}x)$ est la somme algébrique de la force pressante qui s'exerce sur la surface $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ à la cote x et sur la surface $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ à la cote $x+\mathrm{d}x$. La surface faisant déjà intervenir le produit $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, on peut considérer la pression comme égale à $P(x,y,z)$ en tout point de la surface en x et à $P(x+\mathrm{d}x,y,z)$ sur la surface en $x+\mathrm{d}x$.

Il vient en projection sur $(\mathrm{O}x)$: $\mathrm{d}F_{Px} = [+P(x,y,z) - P(x+\mathrm{d}x,y,z)]\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

Par un développement de Taylor-Young limité au premier ordre en $\mathrm{d}x$, on obtient :

$$\mathrm{d}F_{Px} = \left[-\frac{\partial P}{\partial x}\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \qquad \text{donc} \qquad \mathrm{d}F_{Px} = -\frac{\partial P}{\partial x}\,\mathrm{d}\tau.$$

.....

23.10 d) La résultante des forces de pression suivant $(\mathrm{O}y)$ est la somme algébrique de la force pressante qui s'exerce sur la surface $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$ à la cote y et sur la surface $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$ à la cote $y+\mathrm{d}y$.

Comme précédemment, il vient en projection sur $(\mathrm{O}y)$: $\mathrm{d}F_{Py} = [+P(x,y,z) - P(x,y+\mathrm{d}y,z)]\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

Un développement de Taylor-Young limité au premier ordre en $\mathrm{d}y$ donne :

$$\mathrm{d}F_{Py} = \left[-\frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z \qquad \text{donc} \qquad \mathrm{d}F_{Py} = -\frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}\tau.$$

.....

23.10 e) La résultante des forces de pression suivant $(\mathrm{O}z)$ est la somme algébrique de la force pressante qui s'exerce sur la surface $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ à la cote z et sur la surface $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ à la cote $z+\mathrm{d}z$.

On a : $\mathrm{d}F_{Pz} = [+P(x,y,z) - P(x,y,z+\mathrm{d}z)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, qui donne par le même raisonnement que précédemment :

$$\mathrm{d}F_{Pz} = \left[-\frac{\partial P}{\partial z}\,\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \text{donc} \qquad \mathrm{d}F_{Pz} = -\frac{\partial P}{\partial z}\,\mathrm{d}\tau.$$

.....

23.10 f) En reprenant les résultats précédents, la résultante des forces pressantes exercée sur le volume particulaire $\mathrm{d}\tau$ s'écrit : $\mathrm{d}\overrightarrow{F_P} = -\left[\dfrac{\partial P}{\partial x}\vec{e}_x + \dfrac{\partial P}{\partial y}\vec{e}_y + \dfrac{\partial P}{\partial z}\vec{e}_z\right]\mathrm{d}\tau$, d'où $\vec{f}_P = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{F_P}}{\mathrm{d}\tau} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P$.

.....

23.11 a) La résultante des forces de pression s'écrit $\overrightarrow{F_P} = -\oiint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}\overrightarrow{S_{\mathrm{ext}}} = -\iiint_V \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P\,\mathrm{d}\tau$. Si la pression est uniforme, $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P = \vec{0}$ d'où $\overrightarrow{F_P} = \vec{0}$.

.....

23.11 b) Pour que la distribution initiale des pressions, avec P_2 sur S_2, soit la même que la superposition de P_1 uniforme partout et de P' extérieure sur S_2, il faut que $P' = P_2 - P_1$.

.....

23.11 c) On calcule la résultante des forces de pression sur Σ en utilisant la superposition des deux distributions précédentes. La contribution pour P_1 uniforme donne une résultante nulle (voir question a).
La contribution pour P' donne : $\overrightarrow{F_P} = -P'S_2\vec{e_z}$, soit $\overrightarrow{F_P} = (P_1 - P_2)S_2\vec{e_z}$.

.....

23.12 a) Compte tenu de la définition prise pour $\mathrm{d}\overrightarrow{f_{\text{vis}}}$, la force extérieure au volume particulaire $\mathrm{d}\tau$ qui s'exerce sur la surface $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$ située à la cote y est directement $\mathrm{d}\overrightarrow{F_1}(y,t) = +\overrightarrow{f_{\text{vis}}}(y,t) = -\eta\dfrac{\partial v_x}{\partial y}(y,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\vec{e_x}$. La force visqueuse extérieure exercée sur la surface $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$ en $y + \mathrm{d}y$ est celle due aux couches fluides situées en $y' \geqslant y + \mathrm{d}y$, donc, en vertu du principe des actions réciproques, l'opposée de celle exercée par les couches situées en $y' \leqslant y + \mathrm{d}y$. On aura donc $\mathrm{d}\overrightarrow{F_2}(y + \mathrm{d}y, t) = -\overrightarrow{f_{\text{vis}}}(y + \mathrm{d}y, t) = +\eta\dfrac{\partial v_x}{\partial y}(y + \mathrm{d}y, t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\vec{e_x}$. La bonne réponse est la réponse (d).

.....

23.12 b) On reprend l'expression de $\mathrm{d}\vec{F}$ de la question précédente et on forme un développement de Taylor-Young de $v_x(y,t)$ par rapport à y limité au premier ordre en $\mathrm{d}y$, soit :

$$\frac{\partial v_x}{\partial y}(y + \mathrm{d}y, t) \approx \frac{\partial v_x}{\partial y}(y,t) + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}(y,t)\,\mathrm{d}y.$$

Il vient $\mathrm{d}\vec{F} = +\eta\left[\dfrac{\partial v_x}{\partial y}(y + \mathrm{d}y, t) - \dfrac{\partial v_x}{\partial y}(y,t)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\vec{e_x}$, soit $\mathrm{d}\vec{F} = +\eta\,\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}(y,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\vec{e_x}$.

.....

23.12 c) On sait que, pour un fluide incompressible, le champ des vitesses vérifie l'équation locale $\mathrm{div}(\vec{v}) = 0$: la réponse (c) n'est donc pas pertinente. On a montré à la question précédente que, pour un champ de vitesse du type $\vec{v}(\mathrm{M},t) = v_x(y,t)\,\vec{e_x}$, la force volumique de viscosité au sein du fluide s'écrit $\overrightarrow{f_{\text{visc}}}(\mathrm{M},t) = \dfrac{\mathrm{d}\vec{F}}{\mathrm{d}\tau} = +\eta\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\vec{e_x}$, dont la généralisation à un champ de vitesse quelconque conduit à $\overrightarrow{f_{\text{visc}}}(\mathrm{M},t) = \eta\Delta(\vec{v})$, soit la réponse (a).

.....

23.13 a) La dimension de $\dfrac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t}$ est : $[\dfrac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t}] = \dfrac{[\text{vitesse}]}{[\text{temps}]} = L.T^{-2}$.

La dimension de $\rho\dfrac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t}$ est donc : $\left[\rho\dfrac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t}\right] = M.L^{-3}.L.T^{-2} = \dfrac{[\text{force}]}{[\text{volume}]}$. La bonne réponse est la réponse (d).

.....

23.13 b) On rappelle que $\dfrac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t} = \dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\bullet\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)(\vec{v})$. Pour un écoulement stationnaire, on a $\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$. Pour un écoulement uniforme, $\vec{v}$ ne dépend pas du point choisi, donc $\left(\vec{v}\bullet\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)(\vec{v}) = \vec{0}$.
La bonne réponse est donc la réponse (a).

.....

23.13 c) Si les lignes de courant sont rectilignes et parallèles, le champ eulérien des vitesses est du type :

$$\vec{v}(\mathrm{M},t) = v_x(\mathrm{M},t)\,\vec{e_x},$$

en choisissant l'axe des x suivant la direction de $\vec{v}$. Pour un écoulement incompressible et homogène, on a $\mathrm{div}(\vec{v}) = 0$, soit ici $\dfrac{\partial v_x}{\partial x} = 0$. Comme l'écoulement est stationnaire : $\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$.
L'accélération convective vaut ici : $\left(\vec{v}\bullet\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)(\vec{v}) = \left(v_x\dfrac{\partial v_x}{\partial x}\right)(\vec{v}) = \vec{0}$. D'où $\dfrac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t} = \vec{0}$.

.....

23.14 a) On a $\vec{v}(\mathrm{M},t) = \vec{0}$ donc $\vec{0} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P(\mathrm{M},t) + \vec{F}_{\text{V,a}}$.

.....

23.14 b) Une particule d'eau de masse m subit une force d'inertie d'entraînement $-m\vec{a}_{\mathrm{M}}(t)$ donc :

$$\vec{F}_{\mathrm{V,a}} = \vec{P}_V + \vec{F}_{V,\mathrm{ie}} = -\mu g\vec{e_z} - \mu a\vec{e_x}.$$

.....

23.14 c) Une particule d'eau de masse m se trouvant à une distance r de l'axe $(\mathrm{O}z)$ subit une force d'inertie d'entraînement $-mr\omega^2\vec{e_r}$ donc :

$$\vec{F}_{\mathrm{V,a}} = \overrightarrow{P_V} + \vec{F}_{V,\mathrm{ie}} = -\mu g\vec{e_z} + \mu\omega r^2\vec{e_r}.$$

.....

23.15 a) L'accélération locale $\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t}$ est nulle car l'écoulement est stationnaire. L'accélération convective se réduit ici à : $\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)(\vec{v}) = v(z)\dfrac{\partial v(z)}{\partial x}\vec{e_x}$. L'écoulement étant supposé incompressible, le champ des vitesses vérifie l'équation locale $\mathrm{div}(\vec{v}) = 0$, soit ici $\dfrac{\partial v(z)}{\partial x} = 0$. On obtient ainsi : $\dfrac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{0}$.

.....

23.15 b) On rappelle que, en coordonnées cartésiennes et en cartésiennes seulement, les composantes du laplacien vectoriel sont le laplacien des composantes, soit ici : $\Delta(\vec{v}) = \Delta(v_x)\vec{e_x}$ (les autres composantes de $\vec{v}$ sont nulles).

Or, on a $\Delta(v_x) = \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}$. Comme $v_x = v(z)$ ne dépend que de z, il reste $\Delta(\vec{v}) = \dfrac{\mathrm{d}^2 v(z)}{\mathrm{d}z^2}\vec{e_x}$.

La bonne réponse est la réponse (b).

.....

23.15 c) La projection de l'équation de Navier-Stokes suivant $(\mathrm{O}x)$ donne ici : $\dfrac{\mathrm{d}^2 v(z)}{\mathrm{d}z^2} = 0$, qui s'intègre en $v(z) = Az + B$.

Les conditions aux limites donnent ici, en $z = \pm a$: $\begin{cases} +U = Aa + B \\ -U = -Aa + B. \end{cases}$ On en déduit $B = 0$ et $A = \dfrac{U}{a}$.

Finalement, on a $v(z) = U\dfrac{z}{a}$.

.....

23.15 d) On écrit que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v}) = \vec{\nabla}\wedge\vec{v}$, soit ici $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \frac{U}{a}z \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{U}{a} \\ 0 \end{vmatrix} = \dfrac{U}{a}\vec{e_y}$: la réponse (c) est la bonne.

.....

23.16 a) L'équation de conservation de la masse avec $\rho = \mathrm{cste}$ conduit à $\mathrm{div}(\vec{v}) = 0$, soit ici $\dfrac{\partial v(r,z)}{\partial z} = 0$: la composante axiale v_z de $\vec{v}$ ne dépend que de r.

.....

23.16 b) La projection de l'équation de Navier-Stokes suivant la direction radiale $\vec{e_r}$ donne : $0 = -\dfrac{\partial P}{\partial r} + 0$. La bonne réponse est la réponse (a).

.....

23.16 c) La projection de l'équation de Navier-Stokes suivant la direction axiale $(\mathrm{O}z)$ donne : $\dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\eta}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial v(r)}{\partial r}\right)$.

Le membre de gauche de cette équation aux dérivées partielles ne dépend que de z (on a montré à la question précédente que P ne dépendait pas de r), tandis que le membre de droite ne dépend que de r : ces deux membres de l'équation ne peuvent qu'être égaux à une constante numérique C. La bonne réponse est la réponse (a).

.....

23.16 d) Puisque $\dfrac{\partial P}{\partial z} = \text{cste}$, et que P ne dépend que de z, la loi $P(z)$ est une loi affine et $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = \dfrac{P(L)-P(0)}{L-0}$.

L'équation de Navier-Stokes donne en projection sur $(\mathrm{O}z)$, avec ce qui a été déjà vu :

$$\frac{\eta}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v(r)}{\mathrm{d}r}\right) = \frac{[P(L)-P(0)]}{L} \qquad \text{donc} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v(r)}{\mathrm{d}r}\right) = \frac{[P(L)-P(0)]}{\eta L}r,$$

qui s'intègre, entre 0 et r, en :

$$r\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}r} - 0 = \frac{[P(L)-P(0)]}{2\eta L}r^2 \qquad \text{donc} \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = \frac{[P(L)-P(0)]}{2\eta L}r.$$

Une seconde intégration par rapport à r, entre 0 et r, conduit à : $v(r) - v(0) = \dfrac{[P(L)-P(0)]}{4\eta L}r^2$.

Il reste à déterminer $v(0)$, en utilisant la condition aux limites en $r = R$, où $v(R) = 0$. On obtient ainsi :

$$0 - v(0) = \frac{[P(L)-P(0)]}{4\eta L}R^2.$$

Finalement, le champ des vitesses d'un écoulement de Poiseuille cylindrique s'écrit :

$$v(r) = \frac{[P(0)-P(L)]}{4\eta L}(R^2 - r^2).$$

.....

23.17 a) On a $\mu\left(\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t}(\mathrm{M},t) + \left(\vec{v}(\mathrm{M},t)\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}(\mathrm{M},t)\right) = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P(\mathrm{M},t) + \mu\vec{g}$.

.....

23.17 b) On écrit $\mu\dfrac{v_\mathrm{A}^2}{2} + \mu g(R-r) + P_\mathrm{A} - P_\mathrm{B} = \mu\dfrac{v_\mathrm{B}^2}{2} = \mu\dfrac{v_\mathrm{A}^2}{2} + \Delta P$ donc $v_\mathrm{B}^2 - v_\mathrm{A}^2 = \dfrac{2\Delta P}{\mu}$.

.....

23.17 c) On a $v_\mathrm{B}^2 = v_\mathrm{A}^2 + \dfrac{2\Delta P}{\mu}$ et $v_\mathrm{A} = \dfrac{s}{S}v_B$ donc $v_\mathrm{B}^2\left(1 - \left(\dfrac{s}{S}\right)^2\right) = \dfrac{2\Delta P}{\mu}$ et $v_B = S\sqrt{\dfrac{2\Delta P}{\mu(S^2-s^2)}}$.

On en déduit :

$$D_V = v_\mathrm{B}s = Ss\sqrt{\frac{2\Delta P}{\mu(S^2-s^2)}}.$$

.....

23.18 a) On écrit $\dfrac{\partial \vec{v}(z)}{\partial t} + (\vec{v}(z)\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}(z) = \vec{0} + v(z)\dfrac{\partial v(z)}{\partial x}\vec{e_x} = \vec{0}$.

.....

23.18 b) En régime permanent, l'accélération d'une particule de fluide étant nulle et la seule autre force volumique étant celle de pesanteur, on a :

$$\vec{0} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P(x,z) + \eta\Delta(\vec{v}(z)) + \mu\vec{g}.$$

.....

23.18 c) On a :

$$\frac{\partial P(x,z)}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial P(x,z)}{\partial z}\vec{e_z} = \eta\frac{\partial^2 v(z)}{\partial z^2}\vec{e_x} - \mu g\vec{e_z}.$$

Donc la projection selon l'axe $(\mathrm{O}x)$ donne : $\dfrac{\partial P(x,z)}{\partial x} = \eta\dfrac{\partial^2 v(z)}{\partial z^2}$.

.....

23.18 d) La primitive par rapport à z donne $\eta\dfrac{\mathrm{d}v(z)}{\mathrm{d}z} = -Az + C$ et la seconde primitive conduit à :

$$\eta v(z) = -\frac{A}{2}z^2 + Cz + D.$$

Avec les trois conditions, on trouve $D = \eta v_0$, $C = 0$ et $A = \dfrac{2\eta v_0}{h^2}$, d'où, en éliminant η, $v(z) = v_0\left(1 - \dfrac{z^2}{h^2}\right)$.

.....

23.18 e) Comme $A = \dfrac{2\eta v_0}{h^2}$, la primitive par rapport à x donne $P(x) = -Ax + B$ et, avec la condition $P(0) = P_0$, on a $B = P_0$ d'où $P(x) = P_0 - Ax$.

.....

23.19 a) L'accélération convective est nulle : on a $(\vec{v}(z,t) \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}(z,t) = v(z)\dfrac{\partial \vec{v}(z)}{\partial x} = \vec{0}$.
Il n'y a pas de gradient de pression dans le sens de l'écoulement donc la pression ne dépend que de z et de t. D'où :

$$\mu \frac{\partial \vec{v}(z,t)}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P(z,t) + \eta \Delta(\vec{v}(z,t)) + \mu \vec{g}.$$

.....

23.19 b) On a :

$$\mu \frac{\partial v(z,t)}{\partial t}\vec{e_x} = -\frac{\partial P(z,t)}{\partial z}\vec{e_z} + \eta \frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2}\vec{e_x} - \mu g \vec{e_z}.$$

Donc, selon (Ox), on a $\mu \dfrac{\partial v(z,t)}{\partial t} = \eta \dfrac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2}$. On reconnaît l'équation de diffusion.

.....

23.19 c) L'équation précédente est une équation de diffusion : donc, en ordre de grandeur, $\mu \dfrac{v}{\tau} \approx \eta \dfrac{v}{h^2}$ et $\tau \approx \dfrac{\mu}{\eta} h^2$.

.....

23.19 d) On calcule $\tau \approx \dfrac{h^2}{\nu} = \dfrac{(1 \times 10^{-1}\,\text{m})^2}{1{,}0 \times 10^{-6}\,\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}} = 1{,}0 \times 10^4\,\text{s}$, soit environ 2 h 46 min 40 s.

.....

23.19 e) On a $0 = \eta \dfrac{\partial^2 v(z)}{\partial z^2}$ donc $\dfrac{\text{d}^2 v(z)}{\text{d}z^2} = 0$; c'est l'équation de Laplace.

.....

23.19 f) On a $\dfrac{\text{d}v(z)}{\text{d}z} = A$ puis $v(z) = Az + B$ avec A et B des constantes d'intégration. D'après les conditions aux limites, on a $0 = v(0) = B$ et $v_p = v(h) = Ah$ d'où $A = \dfrac{v_p}{h}$ et donc $v(z) = \dfrac{v_p}{h} z$.

.....

23.19 g) On a $\overrightarrow{F_\text{v}} = -\eta \dfrac{\text{d}}{\text{d}z}\left(\dfrac{v_p}{h} z\right)_{z=h} S\vec{e_x} = -\eta \dfrac{v_p}{h} S\vec{e_x}$.

.....

23.20 a) En notant $\vec{g} = -\overrightarrow{\text{grad}}(gz)$, l'équation qui régit l'écoulement peut se mettre sous la forme :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz\right) = \vec{0},$$

ce qui montre que la charge $C = \dfrac{\vec{v}^2}{2} + \dfrac{P}{\rho} + gz$ est constante dans tout le volume de l'écoulement irrotationnel. La bonne réponse est la réponse (a).

.....

23.20 b) En considérant l'air à l'extérieur d'un cyclone en écoulement stationnaire, incompressible, parfait et irrotationnel, la forme étendue de la relation de Bernoulli donne entre le bord du cyclone, où $v = 200\,\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$, et le centre, où la vitesse est nulle, $\rho \dfrac{v^2}{2} + P_\text{min} = P_\text{max}$, donc $P_\text{max} - P_\text{min} = \dfrac{1{,}2\,\text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \times (200\,\text{km} \cdot \text{h}^{-1}/3{,}6)^2}{2} \approx 20\,\text{mbar}$.

.....

23.21 a) La relation de Bernoulli sur une ligne de courant entre un point A de la surface libre à la pression atmosphérique P_0 et un point du jet de sortie en B, lui aussi au contact de l'atmosphère, donc à la pression P_0, donne :

$$P_0 + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v_\text{A}^2 = P_0 + 0 + \frac{1}{2}\rho v_B^2.$$

D'où $v_\text{B}^2 = v_\text{A}^2 + 2gh$.

.....

23.21 b) L'incompressibilité du fluide entraîne la conservation du débit-volume : on a $S_\mathrm{A} v_\mathrm{A} = S_\mathrm{B} v_\mathrm{A}$. Comme on a aussi $S_\mathrm{A} = \pi R^2$ et $S_\mathrm{B} = \pi a^2$, on en déduit $v_\mathrm{B} = \dfrac{R^2}{a^2} v_\mathrm{A}$.

.....

23.21 c) Comme $a \ll R$, on aura $v_\mathrm{A} \ll v_\mathrm{B}$, d'où $v_\mathrm{B} \simeq \sqrt{2gh}$.

.....

23.22 a) Avec $(\mathrm{O}z)$ suivant la verticale ascendante, on a $\vec{g} = -g\vec{e_z}$. On en déduit $\vec{g} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(gz)$. La bonne réponse est la réponse (c).

.....

23.22 b) En faisant circuler l'équation d'Euler le long d'une ligne de courant, on a $\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v}) \wedge \vec{v}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 0$ car $\mathrm{d}\vec{\ell}$ est colinéaire à $\vec{v}$ et $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v}) \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{v}$. Il reste $\displaystyle\int_\mathrm{A}^\mathrm{B} \frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_\mathrm{A}^\mathrm{B} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{\vec{v}^2}{2}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \frac{\vec{v_\mathrm{B}}^2 - \vec{v_\mathrm{A}}^2}{2}$.

Pour le terme de droite, on a $\displaystyle -\int_\mathrm{A}^\mathrm{B} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{P}{\rho} + g\right) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -\frac{P_\mathrm{B} - P_\mathrm{A}}{\rho} - g(z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A})$.

.....

23.22 c) Le calcul précédent montre que $P_\mathrm{A} + \dfrac{\rho\vec{v_\mathrm{A}}^2}{2} + \rho g z_\mathrm{A} = P_\mathrm{B} + \dfrac{\rho\vec{v_\mathrm{B}}^2}{2} + \rho g z_\mathrm{B}$: la quantité étudiée est donc constante, à condition de rester sur une même ligne de courant liant A et B. La bonne réponse est (c).

.....

23.23 a) On a $\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \dfrac{U\partial\vec{v^*}}{T\partial t^*} = \dfrac{U}{T}\dfrac{\partial\vec{v^*}}{\partial t^*}$.

.....

23.23 b) On trouve $\left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)(\vec{v}) = \left(U\vec{v^*} \cdot \dfrac{1}{L}\overrightarrow{\mathrm{grad}^*}\right)(U\vec{v^*}) = \dfrac{U^2}{L}\left(\vec{v^*} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}^*}\right)(\vec{v^*})$.

.....

23.23 c) On a $\Delta(\vec{v}) = \dfrac{1}{L^2}\Delta^*(U\vec{v^*}) = \dfrac{U}{L^2}\Delta^*(\vec{v^*})$.

.....

23.23 d) Compte tenu des résultats précédents, l'équation de Navier-Stokes se réécrit, en divisant par $\rho = \text{cste}$:

$$\frac{U}{T}\frac{\partial\vec{v^*}}{\partial t^*} + \frac{U^2}{L}\left(\vec{v^*} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}^*}\right)(\vec{v^*}) = -\frac{\overrightarrow{\mathrm{grad}^*}(P)}{L} - g\vec{e_z} + \frac{\eta U}{\rho L^2}\Delta^*(\vec{v^*}).$$

En multipliant chaque terme par $\dfrac{L}{U^2}$, il vient :

$$\frac{L}{UT}\frac{\partial\vec{v^*}}{\partial t^*} + \left(\vec{v^*} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}^*}\right)(\vec{v^*}) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}^*}\left(\frac{P}{\rho U^2}\right) - \frac{gL}{U^2}\vec{e_z} + \frac{\eta}{\rho LU}\Delta^*(\vec{v^*}).$$

Par identification, il vient $P^* = \rho U^2$.

.....

23.23 e) L'expression obtenue à la question précédente donne immédiatement $\mathcal{S}_\mathrm{tr} = \dfrac{L}{UT}$.

.....

23.23 f) Le nombre de Froude est tel que $\dfrac{1}{\mathcal{F}_\mathrm{r}} = \dfrac{gL}{U^2}$, d'où $\mathcal{F}_\mathrm{r} = \dfrac{U^2}{gL}$.

.....

23.23 g) On identifie $\dfrac{1}{\mathrm{Re}} = \dfrac{\eta}{\rho LU}$, ce qui donne $\mathrm{Re} = \dfrac{\rho LU}{\eta}$.

.....

Fiche n° 24. Bilans en mécanique des fluides

Réponses

24.1 a) non homogène

24.1 b) homogène

24.1 c) non homogène

24.1 d) homogène

24.2 a) $5{,}9 \times 10^4\,\mathrm{Pa}$

24.2 b) $1{,}3 \times 10^2\,\mathrm{J/kg}$

24.3 a) oui

24.3 b) oui

24.3 c) oui

24.3 d) oui

24.4 a) (c)

24.4 b) (b)

24.4 c) (b)

24.4 d) (c)

24.4 e) (b)

24.5 a) $\dfrac{v^2}{2} + \dfrac{P}{\mu} = \text{cste}$

24.5 b) $gz + \dfrac{P}{\mu} = \text{cste}$

24.5 c) $v = 1\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$

24.6 a) $D_v = 0{,}55\,\mathrm{L \cdot s^{-1}}$

24.6 b) (c)

24.6 c) (b)

24.6 d) $\mathcal{P} = 3{,}6 \times 10^2\,\mathrm{W}$

24.6 e) (c)

24.7 a) $\xi = 0{,}05$

24.7 b) $3{,}1 \times 10^2\,\mathrm{Pa}$

24.7 c) 2×10^{-4}

24.7 d) $60\,\mu\mathrm{m}$

24.8 a) $U_1 = U_2 = 3{,}2\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$

24.8 b) $3{,}0\,\mathrm{bar}$

24.9 a) (c)

24.9 b) (c)

24.9 c) $-\mathcal{P}$

24.9 d) $\dfrac{1}{2} D_\mathrm{m} v_2^2\,\mathrm{d}t$

24.9 e) $\dfrac{1}{2} D_\mathrm{m} v_1^2\,\mathrm{d}t$

24.9 f) $\mathcal{P} = \dfrac{1}{2} D_\mathrm{m}(v_1^2 - v_2^2)$

24.9 g) $\mathcal{P} = 100\,\mathrm{W}$

24.10 a) $\mathrm{d}m_1 = D_{m1}\,\mathrm{d}t$

24.10 b) $\mathrm{d}m_2 = D_{m2}\,\mathrm{d}t$

24.10 c) $\mathrm{d}m = \mathrm{d}m_1 - \mathrm{d}m_2$

24.10 d) $D_{m1} = D_{m2}$

24.11 a) $m^*(t) = m(t) + \mathrm{d}m_1$

24.11 b) $m^*(t + \mathrm{d}t) = m(t + \mathrm{d}t) + \mathrm{d}m_2$

24.11 c) $\mathrm{d}m^* = 0$

24.11 d) $\mathrm{d}m_1 = \mathrm{d}m_2$

Corrigés

24.1 a) Comme le membre de gauche est homogène à une énergie massique, on voit que le terme ρ est en trop dans le membre de droite.

.....

24.1 b) Le membre de gauche est homogène à un débit massique (en kg/s) fois une énergie massique (en J/kg), ce qui revient à une puissance. Le terme de droite étant également une puissance, l'équation est homogène.

.....

24.1 c) Il manque un ρ au dénominateur dans le terme de droite : $-D_{\mathrm{m}}\dfrac{\Delta P}{\rho}$.

.....

24.1 d) Le terme de gauche est homogène à une longueur : il mesure directement la perte de charge en hauteur. L'équation est homogène.

.....

24.2 a) La perte de charge correspond au terme gh_{pc} sauf que, en l'état, elle correspond à une perte d'énergie massique. Pour obtenir une perte de pression, il faut multiplier par μ_0. Ainsi, $\Delta P_{\mathrm{pc}} = \mu_0 g h_{\mathrm{pc}}$.

.....

24.2 b) Sans variation de pression et de vitesse, la relation de Bernoulli généralisée s'écrit :

$$g\Delta z = w_u - gh_{\mathrm{pc}} \qquad \text{donc} \qquad w_u = g(\Delta z + h_{\mathrm{pc}}).$$

.....

24.3 a) Le fluide est ici un liquide. C'est un fluide incompressible donc l'écoulement est également incompressible.

.....

24.3 b) Le fait que $s \ll S$ permet de qualifier l'écoulement de quasi stationnaire car, par conservation du débit volumique, la vitesse de la surface libre de l'eau dans le réservoir est très faible devant la vitesse de sortie ; autrement dit, on a $\dot{h} \ll v_B$.

.....

24.3 c) On néglige toute perte de charge, ce qui revient à dire que l'écoulement est parfait.

.....

24.3 d) Le fluide est de l'eau liquide, qu'on peut considérer comme une phase condensée incompressible et indilatable, c'est-à-dire de masse volumique uniforme.

.....

24.4 a) Le récipient est ouvert sur l'extérieur en A et en B, la pression est donc égale à la pression atmosphérique en ces deux points.

.....

24.4 b) Le débit volumique est défini comme $D_v = \displaystyle\iint_S \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$. La réponse (b) est donc la seule correcte.

.....

24.4 d) À partir de l'égalité des deux débits volumiques, on peut écrire $v_{\mathrm{A}} = \dfrac{s v_{\mathrm{B}}}{S}$. Comme $s \ll S$, on en déduit que $v_{\mathrm{A}} \ll v_{\mathrm{B}}$.

.....

24.4 e) Avec les résultats des questions précédentes (égalité des pressions et vitesse négligeable en A), la relation de Bernoulli devient :

$$g z_{\mathrm{A}} = \frac{v_{\mathrm{B}}^2}{2} + g z_{\mathrm{B}}.$$

On obtient donc la réponse (b) avec $h(t) = z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{B}}$.

.....

24.5 a) La cote z reste constante, les contributions de pesanteur gz se compensent.

.....

24.5 b) La vitesse v est faible, les contributions cinétiques $\dfrac{v^2}{2}$ sont négligées.

.....

24.5 c) On obtient $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9{,}81\,\mathrm{m \cdot s^{-2}} \times 5 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}} = 1\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

.....

24.6 a) Le débit volumique s'écrit : $D_v = SU$ avec S la section de la canalisation. Soit $D_v = U\pi\dfrac{D^2}{4}$, d'où $D_v = 7{,}0\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} \times \pi \times \dfrac{(10 \times 10^{-3}\,\mathrm{m})^2}{4} = 5{,}5 \times 10^{-4}\,\mathrm{m^3 \cdot s^{-1}} = 0{,}55\,\mathrm{L \cdot s^{-1}}$.

.....

24.6 b) La vitesse en A avant la pompe étant négligeable et celle en B valant U, on a $\Delta v^2 = U^2$.

Avant la pompe et après le robinet, la pression vaut P_0, pression atmosphérique, donc $\Delta P = 0$.

Le point B est situé à la distance L au-dessus de A donc $\Delta z = L$. Dans le terme de droite, w_u est le travail massique fourni par la pompe et $gh_{\mathrm{pc}} = \Delta e_{\mathrm{pcr}}$ est la perte d'énergie massique due aux pertes régulières le long du tuyau de longueur L.

La relation de Bernoulli s'écrit donc : $\dfrac{1}{2}U^2 + gL = w_u - \Delta e_{\mathrm{pcr}} = w_u - \dfrac{1}{2}\xi\dfrac{L}{D}U^2$.

.....

24.6 c) La relation de Bernoulli donnée est un bilan d'énergie massique. Il faut le multiplier par une masse et le diviser par un temps pour obtenir une puissance, c'est-à-dire multiplier par un débit massique.

.....

24.6 d) On déduit de la première question : $w_u = \dfrac{1}{2}U^2 + gL + \dfrac{1}{2}\xi\dfrac{L}{D}U^2 = gL + \dfrac{1}{2}U^2\Big(1 + \xi\dfrac{L}{D}\Big)$.

Or, on a $\mathcal{P} = D_{\mathrm{m}}w_u = \mu D_v w_u$. Donc :

$$\mathcal{P} = \mu D_v\Big[\frac{1}{2}U^2 + gL + \frac{1}{2}\xi\frac{L}{D}U^2\Big] = \mu D_v\Big[gL + \frac{1}{2}U^2\Big(1 + \xi\frac{L}{D}\Big)\Big].$$

L'application numérique donne $\mathcal{P} = 3{,}6 \times 10^2\,\mathrm{W}$.

.....

24.6 e) Il faut que la puissance soit supérieure à $\mathcal{P} = 3{,}6 \times 10^2\,\mathrm{W}$, on prend donc la pompe ayant une puissance immédiatement supérieure.

.....

24.7 a) On calcule la rugosité relative $\dfrac{\varepsilon}{D} = 0{,}02$ et on lit sur l'axe des ordonnées la valeur de ξ.

.....

24.7 b) On a $\Delta P = \dfrac{1}{2}\rho U^2\xi\dfrac{\ell}{D} = \dfrac{1}{2} \times 1 \times 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}} \times \big(0{,}5\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}\big)^2 \times 0{,}05 \times \dfrac{10\,\mathrm{m}}{20 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}} = 3{,}1 \times 10^2\,\mathrm{Pa}$.

.....

24.8 a) Comme le diamètre de tout le circuit est constant, on a : $U_1 = U_2 = \dfrac{D_v}{S} = \dfrac{4D_v}{\pi D^2}$.

.....

24.8 b) Réécrivons la relation de Bernoulli entre le début du tuyau vertical et un point en aval du robinet en la rendant homogène à une pression :

$$\frac{1}{2}\mu\big(U^2 - U^2\big) + P_0 - P_i + g\mu(L - 0) = -\frac{1}{2}\mu U^2(k_1 + k_2).$$

Donc, on a $P_i = P_0 + g\mu L + \dfrac{1}{2}\mu U^2(k_1 + k_2)$.

.....

24.9 a) La force volumique associée à la résultante des forces de pression s'écrit $\vec{f_p} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P$. La pression étant uniforme, la résultante des forces pressantes est nulle.

.....

24.9 b) Les forces pressantes étant nulles, elles ne travaillent pas.

.....

24.9 c) D'un point de vue énergétique, ce qui est fourni par un système est reçu par un autre.

.....

24.9 d) La masse élémentaire $D_\text{m}\,\text{d}t$ sort à la vitesse $\vec{v_2}$ en aval pendant la durée $\text{d}t$.

.....

24.9 e) La masse élémentaire $D_\text{m}\,\text{d}t$ entre à la vitesse $\vec{v_1}$ en amont pendant la durée $\text{d}t$.

.....

24.9 f) En régime stationnaire la variation d'énergie cinétique est $\frac{1}{2}D_m(v_2^2 - v_1^2)\,\text{d}t$. Le théorème de la puissance cinétique donne alors $\frac{1}{2}D_m(v_2^2 - v_1^2) = -\mathcal{P}$.

.....

24.11 c) Le système (S^*) étant fermé, sa masse ne varie pas, donc $\text{d}m^* = 0$.

.....

24.11 d) On a $\text{d}m^* = m^*(t+dt) - m^*(t) = m(t+dt) + \text{d}m_2 - m(t) - \text{d}m_1 = 0$.

Comme $m(t+dt) = m(t)$ en régime stationnaire, il reste $\text{d}m_1 = \text{d}m_2$.

.....

Fiche n° 25. Transformations chimiques

Réponses

25.1 a) $-250\,\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$

25.1 b) $-130\,\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$

25.1 c) $-915\,\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$

25.2 a) $\alpha = -2$ et $\beta = 1$

25.2 b) $50{,}0\,\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$

25.3 a) $-44{,}5\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$

25.3 b) $-124\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$

25.3 c) $-12\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$

25.4 a) $-236{,}7\,\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$

25.4 b) $3{,}15\cdot10^{41}$

25.4 c) $-93{,}0\,\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$

25.4 d) $2{,}04\cdot10^{16}$

25.4 e) $-911\,\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$

25.4 f) $4{,}89\cdot10^{159}$

25.5 a) $-78\,\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$

25.5 b) $-123{,}5\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$

25.6 a) $-28\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$

25.6 b) $-99\,\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$

25.6 c) (d) et (e)

25.6 d) $-99\,\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$

25.6 e) $28\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$

25.7 (a), (c) et (d)

25.8 a) $-46{,}1\,\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$

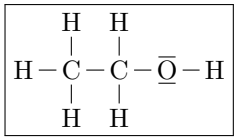
25.8 b) $\ln\left(\dfrac{K^\circ_2}{K^\circ_1}\right) = \dfrac{\Delta_\text{r}H^\circ}{R}\left(\dfrac{1}{T_1}-\dfrac{1}{T_2}\right)$

25.8 c) 0,42

25.9 a) (a), (b) et (d)

25.9 b) $2\,\text{C(s)} + 3\,\text{H}_2\text{(g)} + \dfrac{1}{2}\,\text{O}_2\text{(g)} \rightarrow \text{C}_2\text{H}_5\text{OH}(\ell)$

25.9 c)



25.9 d)

C–C	C–H	C–O	O–H
1	5	1	1

25.9 e) $\Delta_\text{f}H^\circ(\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}(\ell)) = -1{,}66\times10^3\,\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$

25.10 a) (a), (c) et (d)

25.10 b) (d)

25.10 c) $-65\,\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$

25.11 a) (c) et (d)

25.11 b) ΔH_chi pour (1)
ΔH_phy pour (2)

25.11 c) $\Delta H_\text{chi} = \Delta_\text{r}H^\circ \times n_0$

25.11 d) $\Delta H_\text{phy} = (3C^\circ_{\text{p,m,H}_2\text{O}} + 2C^\circ_{\text{p,m,CO}_2})n_0(T_\text{f} - T_\text{i})$

25.11 e) $\Delta H = \Delta H_\text{phy} + \Delta H_\text{chi}$

25.11 f) 7 088 °C

25.12 a) (b)

25.12 b) (a)

25.12 c) (c)

25.12 d) (a)

25.12 e) (c)

25.12 f) ..... (b)

25.12 g) ..... (b)

25.13 ..... (a), (c), (e) et (f)

25.14 a) ..... $\alpha = -2$ et $\beta = 2$

25.14 b) ..... $-182\,\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$

25.15 a) ..... (e)

25.15 b) ..... $-568\,\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$

25.16 a) ..... $-92\,\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$

25.16 b) ..... (a)

25.16 c) ..... $-196\,\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$

25.16 d) ..... $-34\,\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$

25.16 e) ..... $7{,}7 \times 10^5$

25.16 f) ..... (a)

Corrigés

25.1 a) On applique la loi de Hess à l'enthalpie de réaction. On a :

$$\begin{aligned}\Delta_r H^\circ &= \Delta_f H^\circ(\text{H}_2\text{O}\,(\text{g})) - \frac{1}{2} \times \Delta_f H^\circ(\text{O}_2(\text{g})) - \Delta_f H^\circ(\text{H}_2(\text{g})) \\ &= -250\,\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1} - \frac{1}{2} \times 0\,\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1} = -250\,\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}.\end{aligned}$$

25.1 b) On applique la loi de Hess à l'enthalpie de réaction. On a :

$$\begin{aligned}\Delta_r H^\circ &= \Delta_f H^\circ(\text{CH}_4(\text{g})) + \Delta_f H^\circ(\text{H}_2\text{O}(\ell)) - \Delta_f H^\circ(\text{CH}_3\text{OH}(\ell)) - \Delta_f H^\circ(\text{H}_2(\text{g})) \\ &= 1 \times \left(-70\,\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}\right) + 1 \times \left(-300\,\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}\right) - 1 \times \left(-240\,\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}\right) - 1 \times 0\,\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \\ &= -130\,\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}.\end{aligned}$$

25.1 c) On applique la loi de Hess à l'enthalpie de réaction. On a :

$$\begin{aligned}\Delta_r H^\circ &= 2 \times \Delta_f H^\circ(\text{CO}_2(\text{g})) + 2 \times \Delta_f H^\circ(\text{H}_2\text{O}(\ell)) - \Delta_f H^\circ(\text{CH}_3\text{COOH}(\ell)) - 2\Delta_f H^\circ(\text{O}_2(\text{g})) \\ &= 2 \times (-400\,\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}) + 2 \times (-300\,\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}) - (-485\,\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}) \\ &= -915\,\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}.\end{aligned}$$

25.2 a) La réaction (3) s'écrit comme combinaison linéaire des réactions (1) et (2) selon la relation :

$$(3) = 1 \times (2) - 2 \times (1).$$

On a donc $\alpha = -2$ et $\beta = 1$.

25.2 b) On a $\Delta_r H_3^\circ = -2 \times \Delta_r H_1^\circ + \Delta_r H_2^\circ$. Donc,

$$\Delta_r H_3^\circ = -2 \times (-562{,}6\,\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}) + (-1\,075{,}2\,\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}) = 50{,}0\,\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

25.3 a) On applique la relation donnée à l'entropie : $\Delta_r S^\circ = S_m^\circ(\text{H}_2\text{O}\,(\text{g})) - S_m^\circ(\text{H}_2(\text{g})) - \frac{1}{2} S_m^\circ(\text{O}_2(\text{g}))$. D'où :

$$\Delta_r S^\circ = 189\,\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} - 131\,\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} - \frac{205\,\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}}{2} = -44{,}5\,\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

25.3 b) On applique la relation donnée à l'entropie. On a :

$$\Delta_r S^\circ = S^\circ_m(H_2O(\ell)) + S^\circ_m(CH_4(g)) - S^\circ_m(H_2(g)) - S^\circ_m(CH_3OH(\ell)).$$

Donc,

$$\Delta_r S^\circ = 65\,J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1} + 70\,J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1} - 131\,J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1} - 128\,J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1} = -124\,J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}.$$

.....

25.3 c) On applique la relation donnée à l'entropie. On a :

$$\Delta_r S^\circ = 2\times S^\circ_m(H_2O(\ell)) + 2\times S^\circ_m(CO_2(g)) - S^\circ_m(CH_3COOH(\ell)) - 2\times S^\circ_m(O_2(g)).$$

Donc,

$$\begin{aligned}\Delta_r S^\circ &= 2\times 65\,J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1} + 2\times 214\,J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1} - 160\,J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1} - 2\times 205\,J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}\\ &= -12\,J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}.\end{aligned}$$

.....

25.4 a) On applique la relation donnée, avec $\Delta_r H^\circ_1 = -250\,kJ\cdot mol^{-1}$ et $\Delta_r S^\circ_1 = -44{,}5\,J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}$. On a :

$$\Delta_r G^\circ_1 = \Delta_r H^\circ_1 - T\times\Delta_r S^\circ_1 = -250\,kJ\cdot mol^{-1} - 298\,K\times(-44{,}5\times10^{-3}\,kJ\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}) = -236{,}7\,kJ\cdot mol^{-1}.$$

.....

25.4 b) La constante d'équilibre s'exprime par la relation $\Delta_r G^\circ_1 = -RT\ln K^\circ_1$. Donc,

$$K^\circ_1 = \exp\left(-\frac{\Delta_r G^\circ_1}{RT}\right) = \exp\left(\frac{236{,}7\times10^3\,J\cdot mol^{-1}}{8{,}314\,J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}\times 298\,K}\right) = 3{,}15\cdot10^{41}.$$

.....

25.4 c) On applique la relation donnée, avec $\Delta_r H^\circ_2 = -130\,kJ\cdot mol^{-1}$ et $\Delta_r S^\circ_2 = -124\,J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}$. On a :

$$\Delta_r G^\circ_2 = \Delta_r H^\circ_2 - T\times\Delta_r S^\circ_2 = -130\,kJ\cdot mol^{-1} - 298\,K\times(-124\times10^{-3}\,kJ\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}) = -93{,}0\,kJ\cdot mol^{-1}.$$

.....

25.4 d) La constante d'équilibre s'exprime par la relation $\Delta_r G^\circ_2 = -RT\ln K^\circ_2$. Donc,

$$K^\circ_2 = \exp\left(-\frac{\Delta_r G^\circ_2}{RT}\right) = \exp\left(\frac{93{,}0\times10^3\,J\cdot mol^{-1}}{8{,}314\,J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}\times 298\,K}\right) = 2{,}04\cdot10^{16}.$$

.....

25.4 e) On applique la relation donnée, avec $\Delta_r H^\circ_3 = -915\,kJ\cdot mol^{-1}$ et $\Delta_r S^\circ_3 = -12\,J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}$. On a :

$$\Delta_r G^\circ_3 = \Delta_r H^\circ_3 - T\times\Delta_r S^\circ_3 = -915\,kJ\cdot mol^{-1} + 298\,K\times12\times10^{-3}\,kJ\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1} = -911\,kJ\cdot mol^{-1}.$$

.....

25.4 f) La constante d'équilibre s'exprime par la relation $\Delta_r G^\circ_3 = -RT\ln K^\circ_3$. Donc,

$$K^\circ_3 = \exp\left(-\frac{\Delta_r G^\circ_3}{RT}\right) = \exp\left(\frac{911\times10^3\,J\cdot mol^{-1}}{8{,}314\,J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}\times 298\,K}\right) = 4{,}89\cdot10^{159}.$$

.....

25.5 a) La loi de Hess généralisée appliquée à l'enthalpie libre donne la relation :

$$\Delta_r G^\circ = 2\times\Delta_f G^\circ(H_2O) + 2\times\Delta_f G^\circ(C\ell_2) - \Delta_f G^\circ(O_2) - 4\times\Delta_f G^\circ(HC\ell).$$

Donc,

$$\Delta_r G^\circ = 2\times-229\,kJ\cdot mol^{-1} + 2\times0\,kJ\cdot mol^{-1} - 0\,kJ\cdot mol^{-1} - 4\times(-95\,kJ\cdot mol^{-1}) = -78\,kJ\cdot mol^{-1}.$$

.....

25.5 b) On a $\Delta_r G^\circ = \Delta_r H^\circ - T\Delta_r S^\circ$. Donc,

$$\Delta_r S^\circ = \frac{\Delta_r H^\circ - \Delta_r G^\circ}{T} = \frac{-114{,}8\,\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1} + 78{,}0\,\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}}{298\,\text{K}} = -123{,}5\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}.$$

.....

25.6 a) On détermine graphiquement le coefficient directeur a en prenant deux points, par exemple le point A(600 ; −115, 5) et le point B(300 ; −107). Ainsi, on a

$$a = \frac{\Delta_r G^\circ(\text{A}) - \Delta_r G^\circ(\text{B})}{T(\text{A}) - T(\text{B})} = \frac{(-115{,}5 + 107)\times 10^3\,\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}}{600\,\text{K} - 300\,\text{K}} = -28\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}.$$

.....

25.6 b) L'équation est de la forme $y = ax + b$, avec $a = -28\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$. On détermine graphiquement l'ordonnée à l'origine b en choisissant un point particulier, par exemple le point B(300 ; −107).

On a donc $b = \Delta_r G^\circ(\text{B}) - a\cdot T(\text{B})$. Donc,

$$b = -107\times 10^3\,\text{J}\cdot\text{mol}^{-1} + 28\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}\times 300\,\text{K} = -99\times 10^3\,\text{J}\cdot\text{mol}^{-1}.$$

.....

25.6 c) On a $\Delta_r G^\circ = \Delta_r H^\circ - T\Delta_r S^\circ$ et on suppose l'approximation d'Ellingham vérifiée. Donc, le coefficient directeur de la droite représentant $\Delta_r G^\circ$ en fonction de T est $-\Delta_r S^\circ$ et l'ordonnée à l'origine est $\Delta_r H^\circ$.

.....

25.6 d) D'après les questions précédentes, on a $\Delta_r H^\circ = b = -99\times 10^3\,\text{J}\cdot\text{mol}^{-1} = -99\,\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$.

.....

25.6 e) D'après les questions précédentes, on a $a = -\Delta_r S^\circ$ donc $\Delta_r S^\circ = -a = 28\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$.

.....

25.7 Une constante d'équilibre est sans dimension, les enthalpies libres standard de réaction et les enthalpies standard de réaction s'expriment en $\text{J}\cdot\text{mol}^{-1}$, les entropies standard de réaction s'expriment en $\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$; de plus, T s'exprime en K et R en $\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$. Les expressions homogènes sont donc (a), (c) et (d).

.....

25.8 a) On a $\Delta_r H^\circ = \Delta_f H^\circ(\text{NH}_3(\text{g})) = -46{,}1\,\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$.

.....

25.8 b) Par intégration de la relation de van 't Hoff, on obtient $\ln K_2^\circ - \ln K_1^\circ = -\dfrac{\Delta_r H^\circ}{RT_2} - \left(-\dfrac{\Delta_r H^\circ}{RT_1}\right)$, ou encore $\ln\left(\dfrac{K_2^\circ}{K_1^\circ}\right) = \dfrac{\Delta_r H^\circ}{R}\left(\dfrac{1}{T_1} - \dfrac{1}{T_2}\right)$.

.....

25.8 c) D'après l'expression intégrée de la relation de van 't Hoff, $\ln\left(\dfrac{K_2^\circ}{K_1^\circ}\right) = \dfrac{\Delta_r H^\circ}{R}\left(\dfrac{1}{T_1} - \dfrac{1}{T_2}\right)$. On en déduit donc $K_2^\circ = K_1^\circ \times \exp\left(\dfrac{\Delta_r H^\circ}{R}\left(\dfrac{1}{T_1} - \dfrac{1}{T_2}\right)\right) = 6{,}8\times \exp\left(\dfrac{-46{,}1\times 10^3\,\text{J}\cdot\text{mol}^{-1}}{8{,}314\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}}\left(\dfrac{1}{400\,\text{K}} - \dfrac{1}{500\,\text{K}}\right)\right) = 0{,}42.$

.....

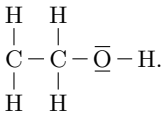
25.9 a) La réaction de formation d'un corps est définie à partir de ses éléments pris dans leur état standard sous forme de corps simples (constitués d'un seul élément). L'éthanol étant constitué de carbone, d'hydrogène et d'oxygène, sont impliqués dans sa formation le carbone C(s), le dihydrogène $\text{H}_2(\text{g})$ et le dioxygène $\text{O}_2(\text{g})$.

.....

25.9 b) On considère la formation d'une mole d'éthanol $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}(\ell)$, constitué de 2 atomes de carbone, 6 atomes d'hydrogène et 1 atome d'oxygène. Pour ce faire, il faut donc 2 moles de carbone C(s), 3 moles de dihydrogène $\text{H}_2(\text{g})$ et $\dfrac{1}{2}$ mole de dioxygène $\text{O}_2(\text{g})$.

La réaction de formation de l'éthanol est donc : $2\,\text{C(s)} + 3\,\text{H}_2(\text{g}) + \dfrac{1}{2}\,\text{O}_2(\text{g}) \longrightarrow \text{C}_2\text{H}_5\text{OH}(\ell)$.

.....

25.9 c) Le schéma de Lewis de l'éthanol est :  .

25.9 d) Le schéma de Lewis précédent montre que l'éthanol est constitué de cinq liaisons C−H, une liaison C−C, une liaison C−O et une liaison O−H.

25.9 e) On exprime l'enthalpie standard de formation de l'éthanol liquide en sommant les énergies des liaisons rompues et en retranchant les énergies des liaisons formées. On a :

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathrm{f}}H^\circ(\mathrm{C_2H_5OH}(\ell)) &= 3\times\mathcal{E}(\mathrm{H{-}H})+\frac{1}{2}\times\mathcal{E}(\mathrm{O{=}O})-(5\times\mathcal{E}(\mathrm{C{-}H})+\mathcal{E}(\mathrm{C{-}C})+\mathcal{E}(\mathrm{C{-}O})+\mathcal{E}(\mathrm{O{-}H}))\\ &= 3\times 435+\frac{1}{2}\times 502-(5\times 411+346+358+459)=-1{,}66\times10^3\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}.\end{aligned}$$

25.10 a) Par définition, l'énergie de liaison est l'énergie à fournir pour rompre une liaison donnée (ou une mole de cette liaison) : la réponse (a) est correcte. La réponse (b) est fausse car la formation d'une mole de $\mathrm{N_2(g)}$ à partir de deux moles de $\mathrm{N(g)}$ libère une énergie égale à $\mathcal{E}(\mathrm{N{\equiv}N})$. Les réponses (c) et (d) sont exactes d'après la définition donnée.

25.10 b) Lors de l'étape (1), on forme deux moles d'ammoniac liquide donc $(1) = 2\times\Delta_{\mathrm{f}}H^\circ(\mathrm{NH_3}(\ell))$.

Lors de l'étape (2), on forme deux moles d'ammoniac liquide à partir d'ammoniac gazeux donc cette liquéfaction (inverse de la vaporisation) libère une énergie égale à $-2\times\Delta_{\mathrm{vap}}H^\circ(\mathrm{NH_3}(\ell))$: $(2) = -2\times\Delta_{\mathrm{vap}}H^\circ(\mathrm{NH_3}(\ell))$. C'est donc la réponse (d) qui est correcte.

25.10 c) On utilise le cycle pour écrire une égalité entre l'énergie du chemin (1) et celle du chemin (2)→(3)→(4). On a ainsi :

$$\begin{aligned}2\times\Delta_{\mathrm{f}}H^\circ(\mathrm{NH_3}(\ell)) &= \mathcal{E}(\mathrm{N{\equiv}N})+3\times\mathcal{E}(\mathrm{H{-}H})-6\times\mathcal{E}(\mathrm{N{-}H})-2\times\Delta_{\mathrm{vap}}H^\circ(\mathrm{NH_3}(\ell))\\ &= 960+3\times450-6\times400-2\times20=-130\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}.\end{aligned}$$

Donc, $\Delta_{\mathrm{f}}H^\circ(\mathrm{NH_3}(\ell)) = -65\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$.

25.11 a) Lors d'une transformation monobare, la pression initiale du système est égale à la pression finale mais elle peut varier durant la transformation : la réponse (a) est donc fausse. Lors d'une transformation adiabatique, le système n'échange pas de chaleur avec l'extérieur mais la température peut tout de même varier : la réponse (b) est donc fausse mais la réponse (c) est exacte. Enfin, pour une transformation adiabatique et monobare, la variation d'enthalpie du système est nulle : la réponse (d) est exacte.

25.11 b) L'étape (1) correspond au passage des réactifs aux produits mais sans variation de température : c'est donc une transformation chimique isotherme, dont la variation d'enthalpie est ΔH_{chi}. L'étape (2) correspond à l'évolution de la température du système de la température T_{i} à la température T_{f}, sans modification de l'avancement. La variation d'enthalpie est donc ΔH_{phy}.

25.11 c) On a $\Delta H_{\mathrm{chi}} = \displaystyle\int_0^{n_0}\Delta_{\mathrm{r}}H\,\mathrm{d}\xi \approx \Delta_{\mathrm{r}}H^\circ\times n_0$.

25.11 d) On a $\Delta H_{\mathrm{phy}} = \displaystyle\int_{T_{\mathrm{i}}}^{T_{\mathrm{f}}} C_{\mathrm{p}}\,\mathrm{d}T$ avec $C_{\mathrm{p}} = \displaystyle\sum_k n_k\times C^\circ_{\mathrm{p,m},k} = 3n_0\times C^\circ_{\mathrm{p,m,H_2O(g)}} + 2n_0\times C^\circ_{\mathrm{p,m,CO_2(g)}}$.

On obtient donc :

$$\Delta H_{\mathrm{phy}} = \int_{T_{\mathrm{i}}}^{T_{\mathrm{f}}}(3n_0\times C^\circ_{\mathrm{p,m,H_2O(g)}} + 2n_0\times C^\circ_{\mathrm{p,m,CO_2(g)}})\,\mathrm{d}T = (3C^\circ_{\mathrm{p,m,H_2O(g)}} + 2C^\circ_{\mathrm{p,m,CO_2(g)}})\times n_0\times(T_{\mathrm{f}}-T_{\mathrm{i}}).$$

25.11 e) On a $\Delta H = \Delta H_{\text{phy}} + \Delta H_{\text{chi}}$.

.....

25.11 f) On a $\Delta H = \Delta H_{\text{phy}} + \Delta H_{\text{chi}} = (3C^\circ_{\text{p,m,H}_2\text{O(g)}} + 2C^\circ_{\text{p,m,CO}_2\text{(g)}})n_0(T_\text{f} - T_\text{i}) + \Delta_\text{r}H^\circ \times n_0 = 0$. On en déduit que $T_\text{f} - T_\text{i} = -\dfrac{\Delta_\text{r}H^\circ}{3C^\circ_{\text{p,m,H}_2\text{O(g)}} + 2C^\circ_{\text{p,m,CO}_2\text{(g)}}}$, soit $T_\text{f} = T_\text{i} - \dfrac{\Delta_\text{r}H^\circ}{3C^\circ_{\text{p,m,H}_2\text{O(g)}} + 2C^\circ_{\text{p,m,CO}_2\text{(g)}}}$.

L'application numérique donne $T_\text{f} = 25\,^\circ\text{C} + \dfrac{1\,236 \times 10^3\ \text{J} \cdot \text{mol}^{-1}}{3 \times 33{,}6\ \text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} + 2 \times 37{,}1\ \text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}} = 7\,088\,^\circ\text{C}$.

.....

25.12 a) Une transformation endothermique est favorisée par une augmentation de la température : (b).

.....

25.12 b) Par définition du quotient de réaction pour des espèces chimiques en phase gazeuse, on a :

$$Q = \frac{P_{\text{H}_2}^3 \times P_{\text{CO}}}{P_{\text{CH}_4} \times P_{\text{H}_2\text{O}} \times (P^\circ)^2} = \frac{x_{\text{H}_2}^3 \times x_{\text{CO}}}{x_{\text{CH}_4} \times x_{\text{H}_2\text{O}}} \times \left(\frac{P_\text{tot}}{P^\circ}\right)^2.$$

Ainsi, seule l'expression de la réponse (a) est correcte.

.....

25.12 c) Une augmentation isotherme de la pression totale entraîne une augmentation de la valeur du quotient de réaction Q. Pour retrouver l'état d'équilibre, Q doit diminuer, la réaction évolue donc dans le sens de la diminution de la quantité de matière de gaz, soit le sens inverse : (c).

.....

25.12 d) Par définition du quotient de réaction pour des espèces chimiques en phase gazeuse, on a :

$$Q = \frac{P_{\text{H}_2}^3 \times P_{\text{CO}}}{P_{\text{CH}_4} \times P_{\text{H}_2\text{O}} \times (P^\circ)^2} = \frac{x_{\text{H}_2}^3 \times x_{\text{CO}}}{x_{\text{CH}_4} \times x_{\text{H}_2\text{O}}} \times \left(\frac{P_\text{tot}}{P^\circ}\right)^2.$$

En remplaçant pour chaque constituant la fraction molaire x_i par $\dfrac{n_i}{n_\text{tot}}$, on obtient :

$$Q = \frac{n_{\text{H}_2}^3 \times n_{\text{CO}}}{n_{\text{CH}_4} \times n_{\text{H}_2\text{O}} \times n_\text{tot}^2} \times \left(\frac{P_\text{tot}}{P^\circ}\right)^2.$$

Seule l'expression de la réponse (a) est correcte.

.....

25.12 e) D'après l'expression du quotient de réaction, l'ajout de dihydrogène fait augmenter n_{H_2} mais aussi n_tot. L'augmentation de n_{H_2} étant plus importante que celle de n_tot, cela mène à une augmentation du quotient de réaction. Le retour à l'état d'équilibre implique que le quotient de réaction diminue, l'évolution se fait donc dans le sens inverse : (c).

.....

25.12 f) D'après l'expression du quotient de réaction, l'ajout d'eau fait augmenter $n_{\text{H}_2\text{O}}$ et n_tot, qui apparaissent tous les deux au dénominateur, donc cela mène à une diminution du quotient de réaction. Le retour à l'état d'équilibre implique que le quotient de réaction augmente, l'évolution se fait dans le sens direct : (b).

.....

25.12 g) Le diazote est spectateur donc son ajout ne participe qu'à l'augmentation de la quantité de matière totale d'espèces gazeuses n_tot : cela mène à une diminution du quotient de réaction. Le retour à l'état d'équilibre implique que le quotient de réaction augmente, l'évolution se fait dans le sens direct : (b).

.....

25.13 Un corps simple est une substance chimique qui n'est composée que d'un type d'élément chimique : c'est le cas de $O_2(g)$, $H_2(\ell)$, $N_2(g)$, $Fe(\ell)$, $C(s)$ et $I_2(s)$. L'état standard de référence d'un élément est l'état standard du corps simple le plus stable, dans son état le plus stable à la température considérée et à la pression standard. Ce n'est pas le cas pour $H_2(\ell)$ et $Fe(\ell)$.

.....

25.14 a) On a $(3) = 2 \times (2) - 2 \times (1)$ donc $\alpha = -2$ et $\beta = 2$.

.....

25.14 b) On a $\Delta_r H_3^\circ = -2 \times \Delta_r H_1^\circ + 2 \times \Delta_r H_2^\circ$ donc :

$$\Delta_r H_3^\circ = -2 \times (-191\,\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}) + 2 \times (-282\,\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}) = -182\,\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

.....

25.15 a) D'après l'équation de la réaction, deux molécules d'eau sont formées. L'enthalpie standard de la réaction de synthèse de l'eau est donc égale à $\Delta_r H^\circ = 2 \times \Delta_r H^\circ(H_2O(\ell)) = 2 \times (-285\,\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}) = -570\,\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$.
La réponse (e) est correcte.

.....

25.15 b) D'après la loi de Kirchhoff, on a :

$$\begin{aligned}\Delta_r H^\circ(323\,\text{K}) &= \Delta_r H^\circ(298\,\text{K}) + \int_{298\,\text{K}}^{323\,\text{K}} \left(2 \times C_{p,m}^\circ(H_2O(\ell)) - 2 \times C_{p,m}^\circ(H_2(g)) - C_{p,m}^\circ(O_2(g))\right) dT \\ &= -570\,\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1} + (2 \times 75{,}3 - 2 \times 28{,}8 - 29{,}4) \times 10^{-3}\,\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \times (323 - 298)\text{K} \\ &= -568\,\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}.\end{aligned}$$

.....

25.16 a) D'après la loi de Hess, on a $\Delta_r H^\circ = 2 \times \Delta_f H^\circ(NH_3(g)) - \Delta_f H^\circ(N_2(g)) - 3 \times \Delta_f H^\circ(H_2(g))$.

Donc, $\Delta_r H^\circ = 2 \times (-46\,\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}) - 0\,\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1} = -92\,\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$.

.....

25.16 b) On a $\Delta_r H^\circ < 0$ donc la transformation est exothermique : réponse (a).

.....

25.16 c) On calcule l'entropie standard de réaction à partir des entropies molaires standard. On a :

$$\begin{aligned}\Delta_r S^\circ &= 2 \times S_m^\circ(NH_3(g)) - S_m^\circ(N_2(g)) - 3 \times S_m^\circ(H_2(g)) \\ &= 2 \times 192\,\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} - 190\,\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} - 3 \times 130\,\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \\ &= -196\,\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}.\end{aligned}$$

.....

25.16 d) L'enthalpie libre standard de la réaction $\Delta_r G^\circ$ est définie par : $\Delta_r G^\circ = \Delta_r H^\circ - T \times \Delta_r S^\circ$.

Donc, $\Delta_r G^\circ = -92\,\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1} + 298\,\text{K} \times 196 \times 10^{-3}\,\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1} = -34\,\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$.

.....

25.16 e) La constante d'équilibre K° de la réaction est définie par rapport à l'enthalpie libre standard selon la relation $\Delta_r G^\circ = -RT \ln K^\circ$, soit $K^\circ = \exp\left(-\dfrac{\Delta_r G^\circ}{RT}\right) = \exp\left(\dfrac{34 \times 10^3\,\text{J} \cdot \text{mol}^{-1}}{8{,}314\,\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \times 298\,\text{K}}\right) = 7{,}7 \times 10^5$.

.....

25.16 f) Une augmentation de pression isotherme déplace l'équilibre dans le sens de la diminution du nombre de moles de gaz. Il y en a 4 moles dans les réactifs, 2 moles dans les produits, donc la réaction est bien déplacée dans le sens direct : la réponse (a) est exacte. Une augmentation de température isobare déplace l'équilibre dans le sens endothermique, donc le sens inverse : la réponse (b) est fausse.

.....

Fiche n° 26. Phénomène de corrosion

Réponses

26.1 a) ⓑ

26.1 b) ⓑ

26.1 c) ⓐ

26.1 d) $60\,\text{mC}$

26.1 e) $20\,\mu\text{g}$

26.2 a) O_2/H_2O

26.2 b) ⓐ

26.2 c) ⓔ

26.2 d) $0{,}99\,\text{V}$

26.2 e) $0{,}36\,\text{V}$

26.3 a) ⓒ

26.3 b) $5 \times 10^{-6}\,\text{mol}$

26.3 c) ⓓ

26.3 d) $1{,}9\,\text{C}$

26.4 a) ⓑ

26.4 b) ⓑ

26.4 c) ⓒ

26.4 d) ⓑ,ⓓ

26.5 a) Zn

26.5 b) O_2

26.5 c) $2\,Zn + O_2 + 2\,H_2O = 2\,Zn^{2+} + 4\,HO^-$

26.5 d) ⓐ

26.5 e) ⓐ

26.6 a) $E^\circ_{Mg^{2+}/Mg} + 0{,}03 \log\left(\dfrac{[Mg^{2+}]}{C^\circ}\right)$

26.6 b) $-2{,}55\,\text{V}$

26.6 c) $E^\circ_{H^+/H_2} - 0{,}06\,\text{pH} - 0{,}03 \log \dfrac{p_{H_2}}{p^\circ}$

26.6 d) $-0{,}24\,\text{V}$

26.6 e) ⓐ

26.6 f) oui

26.7 a) Le zinc

26.7 b) ⓐ

26.7 c) ⓑ

26.7 d) Le fer

26.7 e) ⓓ

26.8 a) $Mg + 2\,H^+ = Mg^{2+} + H_2$

26.8 b) $-1\,\text{V}$

26.8 c) $2n\mathcal{F}$

26.8 d) $7{,}8\,\text{C}$

26.8 e) $13\,\text{mA}$

26.9 a) 2

26.9 b) $-M_{Fe}\dfrac{d\xi}{dt}$

26.9 c) ⓓ

26.10 a) $\dfrac{2\mathcal{F}m_0}{i_{corr}M_{Cu}}$

26.10 b) ⓑ

26.10 c) non

Corrigés

26.1 a) Le courant circule de l'électrode de cuivre vers l'électrode de zinc. Les électrons sont donc produits au niveau de l'électrode de zinc et migrent vers l'électrode de cuivre pour y être consommés.

.....

26.1 b) La cathode est donc l'électrode de cuivre, lieu de la réduction : on a $Cu^{2+} + 2\ e^- = Cu$.

.....

26.1 c) Le sens du courant permet de comprendre que le zinc s'oxyde. Nous observerons la réaction suivante : $Zn = Zn^{2+} + 2\ e^-$.

.....

26.1 d) D'après la définition du courant, on a $I = \dfrac{Q}{\tau}$ et donc $Q = I \times \tau = 100 \times 10^{-6}\,\text{A} \times 10 \times 60\,\text{s} = 60\,\text{mC}$.

.....

26.1 e) La seule réaction se produisant est $Zn + Cu^{2+} = Zn^{2+} + Cu$.

Au cours de cette réaction, lorsque deux moles d'électrons sont échangées entre les deux couples rédox, une mole de zinc est consommée.
Durant le temps τ, $n = \dfrac{Q}{\mathcal{F}}$ moles d'électrons sont échangées. Donc la masse de zinc consommée est : $m = M_{Zn}\dfrac{Q}{2\mathcal{F}}$.
On trouve finalement : $m = 65{,}4\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1} \times \dfrac{60 \times 10^{-3}\,\text{C}}{2 \times 96\,500\,\text{C}\cdot\text{mol}^{-1}} = 20\,\mu\text{g}$.

.....

26.2 a) Il s'agit d'une courbe à courant positif, donc d'une oxydation. Le couple à considérer est donc celui dans lequel l'eau est le réducteur, c'est-à-dire O_2/H_2O.

.....

26.2 c) La demi-équation du couple s'écrit : $O_2 + H^+ + 4\,e^- = 2\,H_2O$. On en déduit :

$$E_N = E^\circ + \frac{0{,}06}{4}\log\frac{(p_{O_2}/p^\circ)\,([H^+]/c^\circ)^4}{1^2}.$$

.....

26.2 d) Le calcul conduit à $E_N = 0{,}99\,\text{V}$.

.....

26.2 e) On a $\eta_a = 1{,}35\,\text{V} - E_{N,O_2/H_2O} = 0{,}36\,\text{V}$.

.....

26.3 b) Dressons le tableau d'avancement pour la réaction d'oxydoréduction considérée :

	2 Fe +	O_2 +	4 H^+ =	2 Fe^{2+} +	2 H_2O
État initial	n_1	n_2	n_3	0	/
Après un temps τ	$n_1 - 2\xi$	$n_2 - \xi$	$n_3 - 4\xi$	2ξ	/

où n_1, n_2 et n_3 sont des quantités de matière à l'instant initial.
Au bout du temps τ, la masse restante de Fe est $m_1' = \dfrac{45}{100}m_1$.
À la lecture du tableau d'avancement, nous avons $n_1' = n_1 - 2\xi$, ce qui peut s'écrire sous la forme :

$$m_1' = M_{Fe}n_1' = M_{Fe}(n_1 - 2\xi) = m_1 - 2M_{Fe}\xi.$$

Nous obtenons ainsi : $2M_{Fe}\xi = \dfrac{100-45}{100}m_1$. Finalement $\xi = \dfrac{55}{200}\dfrac{m_1}{M_{Fe}} = \dfrac{55 \times 1 \times 10^{-3}\,\text{g}}{200 \times 55{,}8\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}} = 5 \times 10^{-6}\,\text{mol}$.

.....

26.3 c) On a $\mathrm{Fe} = \mathrm{Fe}^{2+} + 2\ \mathrm{e}^-$. Au bout d'un temps τ, 2ξ moles de fer sont consommées. Il y a donc 4ξ moles d'électrons échangées.

.....

26.3 d) D'après les questions précédentes, $Q = 4\xi\mathcal{N}_A e = 4\xi\mathcal{F} = 4 \times 5 \times 10^{-6}\,\mathrm{mol} \times 96\,500\,\mathrm{C \cdot mol^{-1}} = 1{,}9\,\mathrm{C}$.

.....

26.4 a) Il n'existe aucun domaine commun entre Al et $\mathrm{H_2O}$, donc Al n'est jamais stable dans l'eau.

.....

26.4 b) La passivation se fait toujours sous forme d'oxyde solide, les ions ne sont pas des espèces passivantes car ils ne peuvent pas rester accrochés en surface du métal et le protéger de la corrosion.

.....

26.4 c) En milieu acide, l'espèce stable est l'ion Al^{3+}. L'aluminium passe en solution, la plaque va donc se dissoudre progressivement.

.....

26.4 d) En milieu neutre ou légèrement basique, l'espèce stable est le solide $\mathrm{Al_2O_3}$, qui peut rester accroché en surface et protéger la plaque : c'est la passivation. Une partie de l'aluminium est néanmoins consommée pour former l'oxyde.

.....

26.5 a) Le zinc s'oxyde sous l'action du dioxygène. Il va donc se corroder.

.....

26.5 b) Le dioxygène se réduit en HO^-.

.....

26.5 c) La réaction de réduction du dioxygène s'écrit : $\mathrm{O_2} + 2\,\mathrm{H_2O} + 4\,\mathrm{e}^- = 4\,\mathrm{HO}^-$.
La réaction d'oxydation du zinc s'écrit : $\mathrm{Zn} = \mathrm{Zn}^{2+} + 2\,\mathrm{e}^-$.
La réaction d'oxydoréduction est donc : $2\,\mathrm{Zn} + \mathrm{O_2} + 2\,\mathrm{H_2O} = 2\,\mathrm{Zn}^{2+} + 4\,\mathrm{HO}^-$.

.....

26.5 d) La production de HO^- assure une augmentation du pH.

.....

26.6 a) Il y a deux électrons échangés, donc la loi de Nernst s'écrit $E_{\mathrm{Mg^{2+}/Mg}} = E^\circ_{\mathrm{Mg^{2+}/Mg}} + \dfrac{0{,}06}{2}\log\left(\dfrac{[\mathrm{Mg}^{2+}]}{c^\circ}\right)$.

.....

26.6 c) La loi de Nernst s'écrit :

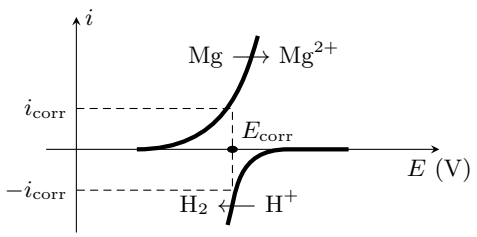
$$E_{\mathrm{H^+/H_2}} = E^\circ_{\mathrm{H^+/H_2}} + \frac{0{,}06}{2}\log\frac{[\mathrm{H}^+]^2/(c^\circ)^2}{p_{\mathrm{H_2}}/p^\circ} = E^\circ_{\mathrm{H^+/H_2}} - 0{,}06\,\mathrm{pH} - 0{,}03\log\frac{p_{\mathrm{H_2}}}{p^\circ}.$$

.....

26.6 e) Le couple $\mathrm{Mg}^{2+}/\mathrm{Mg}$ est rapide alors que le couple $\mathrm{H}^+/\mathrm{H_2}$ est lent, c'est donc sur la courbe de ce dernier que doit se retrouver le surpotentiel, ce qui élimine la proposition (b). L'intensité est toujours une fonction croissante du potentiel, ce qui élimine la proposition (c). Un courant d'oxydation (courant anodique) est toujours positif. Notons que, dans notre cas, le magnésium est oxydé ($E_{\mathrm{H^+/H_2}} > E_{\mathrm{Mg^{2+}/Mg}}$), ce qui élimine la proposition (d). Le bon diagramme est donc celui de la proposition (a).

.....

26.6 f)



.....

26.7 a) Le métal le plus facilement corrodable (c'est-à-dire susceptible d'être oxydé) d'un point de vue thermodynamique est le réducteur le plus fort, donc celui de potentiel standard le plus faible, soit ici le zinc.

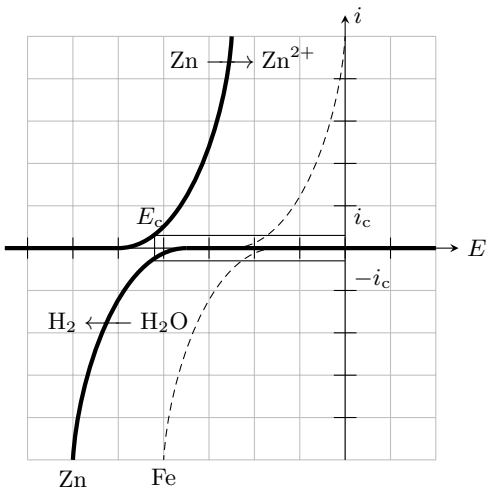
.....

26.7 b)

Dans cette question, les courbes à considérer sont d'une part $Zn \longrightarrow Zn^{2+}$ et d'autre part $H_2O \longrightarrow H_2$ sur Zn, les seules représentées en trait plein sur la figure ci-contre.

On lit graphiquement :

$$E_c \approx -0{,}85\,V \quad \text{et} \quad i_c \approx 2\,mA.$$



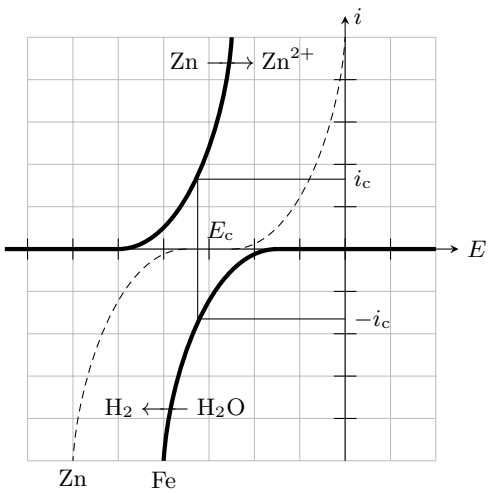
.....

26.7 c)

Les courbes à considérer sont cette fois d'une part $Zn \longrightarrow Zn^{2+}$ et d'autre part $H_2O \longrightarrow H_2$ sur Fe, comme indiqué sur la figure ci-contre.

On lit graphiquement :

$$E_c \approx -0{,}65\,V \quad \text{et} \quad i_c \approx 18\,mA.$$



.....

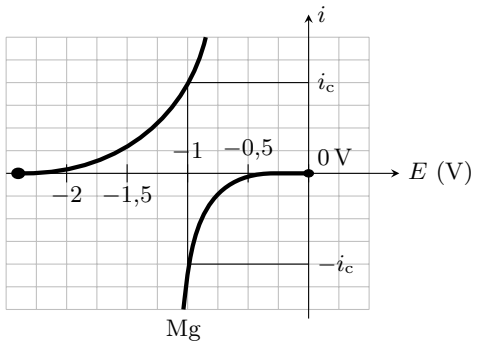
26.7 d) La réduction de l'eau est beaucoup plus rapide sur le fer, c'est donc là qu'elle a (majoritairement) lieu.

.....

26.7 e) Les électrons sont libérés du côté zinc de la jonction, car c'est Zn qui est oxydé, et consommés du côté fer, car c'est là que H_2O est réduite. Ainsi, ils se déplacent globalement du zinc vers le fer.

.....

26.8 b) Le potentiel pour lequel les courants sont égaux en valeur absolue est $E_c = -1\,\text{V}$.



.....

26.8 c) La demi-équation électronique s'écrit $2\,H^+ + 2\,e^- = H_2$, il faut donc échanger 2 moles d'électrons pour former 1 mole de dihydrogène. Ainsi, pour la formation de n moles de H_2, il faut $2n$ moles d'électrons, d'où une charge totale $2n\mathcal{F}$.

.....

26.8 d) D'après l'équation d'état des gaz parfaits, la quantité de matière de dihydrogène formée est :

$$n = \frac{PV}{RT} = \frac{1\times10^5\,\text{Pa}\times1\times10^{-6}\,\text{m}^3}{8{,}3\,\text{J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}\times298\,\text{K}} = 4{,}0\times10^{-5}\,\text{mol}\,,$$

ce qui donne une charge échangée : $Q = 2n\mathcal{F} = 2\times4{,}0\times10^{-5}\,\text{mol}\times9{,}65\times10^4\,\text{C}\cdot\text{mol}^{-1} = 7{,}8\,\text{C}$.

.....

26.8 e) Nous obtenons : $i = \dfrac{Q}{\Delta t} = \dfrac{7{,}8\,\text{C}}{600\,\text{s}} = 13\,\text{mA}$.

.....

26.9 a) Le nombre d'oxydation du fer sous sa forme réduite Fe est nul. Celui du fer sous sa forme d'oxyde $Fe(OH)_2$ est +II. Nous en déduisons : $\alpha = 2$.

.....

26.9 b) Dressons le tableau d'avancement pour la réaction d'oxydoréduction considérée :

	Fe +	$\frac{1}{2}O_2$ +	H_2O =	$Fe(OH)_2$
État initial	n_1	n_2	/	0
À l'instant t	$n_1 - \xi$	$n_2 - \frac{\xi}{2}$	/	ξ

où n_1 et n_2 sont les quantités de matière à l'instant initial.

On a $n_1 = \dfrac{m_0}{M_{Fe}}$ et, à l'instant t, $n_1' = \dfrac{m(t)}{M_{Fe}} = n_1 - \xi$. On a donc $m(t) = M_{Fe}(n_1 - \xi) = m_0 - M_{Fe}\xi$. Ainsi,

$$\frac{\text{d}m}{\text{d}t} = -M_{Fe}\frac{\text{d}\xi}{\text{d}t}.$$

.....

26.10 a) À l'aide de la définition du courant de corrosion, on a $\displaystyle\int_0^{\tau} \mathrm{d}t = \int_0^{\xi_f} \frac{2\mathcal{F}}{i_{\mathrm{corr}}}\,\mathrm{d}\xi$, ce qui conduit à : $\tau = \dfrac{2\mathcal{F}}{i_{\mathrm{corr}}}\xi_f$.

Au bout du temps τ, une masse m_0 de cuivre est consommée. On a donc $\xi_f = \dfrac{m_0}{M_{\mathrm{Cu}}}$ et donc $\tau = \dfrac{2\mathcal{F}m_0}{i_{\mathrm{corr}}M_{\mathrm{Cu}}}$.

.....

26.10 b) La masse de cuivre corrodé est $m_0 = \rho_{\mathrm{Cu}}S(e_1 - e_2)$. Le temps τ vérifie :

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{2\mathcal{F}}{i_{\mathrm{corr}}M_{\mathrm{Cu}}}\rho_{\mathrm{Cu}}S(e_2 - e_1)\\ &= \frac{2 \times 96\,500\,\mathrm{C}\cdot\mathrm{mol}^{-1}}{65 \times 10^{-6}\,\mathrm{A} \times 63{,}5\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{mol}^{-1}} \times 8{,}96\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{cm}^{-3} \times 2\,\mathrm{cm}^2 \times (0{,}500\,\mathrm{cm} - 0{,}498\,\mathrm{cm})\\ &= 16{,}75 \times 10^5\,\mathrm{s}.\end{aligned}$$

Le temps τ correspond donc à 19 jours et 10 heures.

.....

26.10 c) On a $\tau = 1 \times 3\,600\,\mathrm{s} + 45 \times 60\,\mathrm{s} = 6\,300\,\mathrm{s}$ et

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{2\mathcal{F}}{i_{\mathrm{corr}}M_{\mathrm{Cu}}}m_0,\\ M_{\mathrm{Cu}} &= \frac{2\mathcal{F}}{i_{\mathrm{corr}}\tau}m_0,\\ M_{\mathrm{Cu}} &= \frac{2 \times 96\,500\,\mathrm{C}\cdot\mathrm{mol}^{-1}}{55 \times 10^{-6}\,\mathrm{A} \times 6\,300\,\mathrm{s}} \times 0{,}1 \times 10^{-3}\,\mathrm{g}\\ &= 55{,}8\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{mol}^{-1} \neq 63{,}5\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{mol}^{-1}.\end{aligned}$$

L'électrode n'est donc pas en cuivre.

.....

Fiche n° 27. Piles et accumulateurs

Réponses

27.1 a) ..... ⓑ et ⓓ

27.1 b) ..... ⓐ

27.1 c) ..... $Q = 0{,}52\,\text{A}\cdot\text{h}$

27.2 a) ..... $Q = I\Delta t$

27.2 b) ..... ⓓ

27.2 c) ..... $n_{\text{Ag}^+} = n_{\text{e}}$

27.2 d) ..... $n_{\text{Pb}^{2+}} = \dfrac{n_{\text{e}}}{2}$

27.2 e) ..... $\left[\text{Ag}^+\right]_{\text{f}} = 75{,}8\,\text{mmol}\cdot\text{L}^{-1}$

27.2 f) ..... $\left[\text{Pb}^{2+}\right]_{\text{f}} = 112\,\text{mmol}\cdot\text{L}^{-1}$

27.3 a) ..... $\text{Zn}^{2+} + 2\,\text{e}^- = \text{Zn}$

27.3 b) ..... $\text{Ag}^+ + \text{e}^- = \text{Ag}$

27.3 c) ..... $\text{Zn} + 2\,\text{Ag}^+ \longrightarrow \text{Zn}^{2+} + 2\,\text{Ag}$

27.3 d) ..... ⓐ et ⓓ

27.4 a) ..... $E_{\text{Zn}} = -0{,}79\,\text{V}$

27.4 b) ..... $E_{\text{Cu}} = 0{,}32\,\text{V}$

27.4 c) ..... + : Cu et − : Zn

27.4 d) ..... + (cathode) : Cu ; − (anode) : Zn

27.4 e) ..... ⓒ et ⓓ

27.4 f) ..... $U_{\text{co}} = 1{,}11\,\text{V}$

27.4 g) ..... $\Delta_{\text{r}}G = -2{,}12\times10^2\,\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$

27.5 a) ..... $K^\circ = \dfrac{a(\text{Cu})_{\text{éq}}\times a(\text{Zn}^{2+})_{\text{éq}}}{a(\text{Zn})_{\text{éq}}\times a(\text{Cu}^{2+})_{\text{éq}}}$

27.5 b) ..... $K^\circ = \dfrac{[\text{Zn}^{2+}]_{\text{éq}}}{[\text{Cu}^{2+}]_{\text{éq}}}$

27.5 c) ... $E = E^\circ(\text{Zn}^{2+}/\text{Zn}) + \dfrac{0{,}059}{2}\log\left(\dfrac{[\text{Zn}^{2+}]}{C^\circ}\right)$

27.5 d) .. $E = E^\circ(\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}) + \dfrac{0{,}059}{2}\log\left(\dfrac{[\text{Cu}^{2+}]}{C^\circ}\right)$

27.5 e) ..... ⓐ et ⓓ

27.5 f) ..... ⓐ

27.5 g) ..... $K^\circ = 10^{37} > 1$

27.6 a) ..... $\text{Cu}^{2+} + 2\,\text{e}^- = \text{Cu}$

27.6 b) ..... $\text{Cu}^{2+} + \text{e}^- = \text{Cu}^+$

27.6 c) ..... $\text{Cu}^+ + \text{e}^- = \text{Cu}$

27.6 d) ..... ⓐ

27.6 e) ..... ⓐ

27.6 f) ..... ⓑ

27.7 a) ..... $2\,\text{Cl}^- \longrightarrow \text{Cl}_2 + 2\,\text{e}^-$

27.7 b) ..... $2\,\text{H}_2\text{O} + 2\,\text{e}^- \longrightarrow \text{H}_2 + 2\,\text{HO}^-$

27.7 c) .. $2\,\text{H}_2\text{O} + 2\,\text{Cl}^- \longrightarrow \text{Cl}_2 + \text{H}_2 + 2\,\text{HO}^-$

27.8 a) ..... $2{,}16\times10^9\,\text{C}$

27.8 b) ..... $1{,}12\times10^4\,\text{mol}$

27.8 c) ..... $254\,\text{m}^3$

27.8 d) ..... 91,7 %

27.9 a) ..... $6{,}48\times10^9\,\text{J}$

27.9 b) ..... $2{,}78\times10^7\,\text{J}\cdot\text{m}^{-3}$

27.10 a) ..... $\text{Au(CN)}_2{}^- + \text{e}^- = \text{Au} + 2\,\text{CN}^-$

27.10 b) ..... ⓑ

27.10 c) ..... ⓐ

27.10 d) ..... $\boxed{4\,HO^- = 2\,H_2O + O_2 + 4\,e^-}$

27.10 e) ..... $\boxed{E(O_2\,/\,H_2O) = 0{,}39\,V}$

27.10 f) ..... ⓒ

27.10 g) ..... ⓑ

27.11 a) ..... ⓒ

27.11 b) ..... ⓐ

27.12 a) ..... ⓑ

27.12 b) ..... ⓓ

27.12 c) . $\boxed{4\,Ag^+ + 2\,H_2O \longrightarrow 4\,Ag + O_2 + 4\,H^+}$

27.12 d) ..... ⓑ

27.13 a) .... $\boxed{Sn^{4+} + 2\,H_2O \longrightarrow Sn + O_2 + 4\,H^+}$

27.13 b) ..... ⓒ

27.13 c) ..... ⓓ

27.13 d) ..... ⓑ et ⓒ

27.14 a) ..... $\boxed{n(Cu^{2+}) = 2{,}5 \times 10^{-2}\,mol}$

27.14 b) ..... $\boxed{n(Zn) = 0{,}46\,mol}$

27.14 c) ..... $\boxed{Cu^{2+}}$

27.14 d) ..... $\boxed{n(e^-) = 5{,}0 \times 10^{-2}\,mol}$

27.14 e) ..... $\boxed{Q = 4{,}8 \times 10^3\,C = 1{,}3\,A \cdot h}$

Corrigés

27.1 a) Lorsque les valeurs maximales sont atteintes pour u et i, la loi d'Ohm donne : $I = \dfrac{U}{R} = \dfrac{0{,}40\,V}{15\,\Omega} = 27\,mA$.

.....

27.1 b) La quantité d'électricité Q correspond à la charge électrique échangée entre les électrodes pendant la durée Δt. Pour une intensité constante $I = \dfrac{U}{R}$, il vient : $Q = I\Delta t = \dfrac{U\Delta t}{R}$.

.....

27.1 c) On a $Q = \dfrac{0{,}40\,V \times 70 \times 10^3\,s}{15\,\Omega} = 1{,}9 \times 10^3\,C = 0{,}52\,A \cdot h$ puisque $1\,A \cdot h = 3\,600\,C$.

.....

27.2 a) La quantité d'électricité Q correspond à la charge électrique échangée entre les électrodes pendant la durée Δt. Pour une intensité constante I, il vient : $Q = I\Delta t$.

.....

27.2 b) Chaque électron porte, en valeur absolue, la charge e, d'où la charge électrique échangée : $Q = n_e \times \mathcal{N}_A \times e$. Il vient : $n_e = \dfrac{Q}{\mathcal{N}_A e}$ ou encore $n_e = \dfrac{Q}{\mathcal{F}}$ ou encore $n_e = \dfrac{I\Delta t}{\mathcal{F}}$.

.....

27.2 c) D'après la demi-équation à la cathode : $n_{Ag^+} = n_e$.

.....

27.2 d) D'après la demi-équation à l'anode : $n_{Pb^{2+}} = \dfrac{n_e}{2}$.

.....

27.2 e) Dans le bécher (1), les ions argent sont consommés : $\left[Ag^+\right]_f = C_1 - \dfrac{n_{Ag^+}}{V_1}$, soit $\left[Ag^+\right]_f = C_1 - \dfrac{I\Delta t}{V_1\mathcal{F}}$. Il vient :

$$\left[Ag^+\right]_f = 0{,}100\,mol \cdot L^{-1} - \frac{65{,}0 \times 10^{-3}\,A \times 1{,}00 \times 3\,600\,s}{100{,}0 \times 10^{-3}\,L \times 96\,500\,C \cdot mol^{-1}} = 7{,}58 \times 10^{-2}\,mol \cdot L^{-1}.$$

.....

27.2 f) Dans le bécher (2), les ions plomb sont formés : $\left[\mathrm{Pb}^{2+}\right]_\mathrm{f} = C_2 + \dfrac{n_{\mathrm{Pb}^{2+}}}{V_2}$, soit $\left[\mathrm{Pb}^{2+}\right]_\mathrm{f} = C_2 + \dfrac{I\Delta t}{2V_2\mathcal{F}}$. Il vient :

$$\left[\mathrm{Pb}^{2+}\right]_\mathrm{f} = 0{,}100\,\mathrm{mol\cdot L^{-1}} + \frac{65{,}0\times10^{-3}\,\mathrm{A}\times1{,}00\times3\,600\,\mathrm{s}}{2\times100{,}0\times10^{-3}\,\mathrm{L}\times96\,500\,\mathrm{C\cdot mol^{-1}}} = 1{,}12\times10^{-1}\,\mathrm{mol\cdot L^{-1}}.$$

.....

27.3 a) Dans le sens de la réduction : $\mathrm{Zn}^{2+} + 2\,\mathrm{e}^- = \mathrm{Zn}$.

.....

27.3 b) Dans le sens de la réduction : $\mathrm{Ag}^+ + \mathrm{e}^- = \mathrm{Ag}$.

.....

27.3 c) La première demi-équation fait intervenir deux électrons alors que la deuxième n'en fait intervenir qu'un : il faut multiplier cette dernière par deux, soit $2\,\mathrm{Ag}^+ + 2\,\mathrm{e}^- = 2\,\mathrm{Ag}$. Il suffit ensuite de sommer les deux équations en prenant garde de placer les réactifs à gauche (Zn et Ag^+) pour tenir compte du sens de la réaction. En précisant les états physico-chimiques, cela donne : $\mathrm{Zn(s)} + 2\,\mathrm{Ag}^+\mathrm{(aq)} \longrightarrow \mathrm{Zn}^{2+}\mathrm{(aq)} + 2\,\mathrm{Ag(s)}$. Les électrons n'apparaissent pas dans l'équation de la réaction.

.....

27.3 d) D'après l'équation précédente, le zinc est consommé alors que de l'argent est formé. C'est donc l'électrode de zinc qui s'amincit et celle d'argent qui s'épaissit.

.....

27.4 a) On note E_Zn le potentiel de la demi-pile de zinc. Avec l'approximation $\dfrac{RT\ln(10)}{\mathcal{F}} \approx 0{,}059\,\mathrm{V}$ à 25 °C, la loi de Nernst donne : $E_\mathrm{Zn} = E^\circ(\mathrm{Zn}^{2+}/\mathrm{Zn}) + \dfrac{0{,}059}{2}\log\left(\dfrac{[\mathrm{Zn}^{2+}]}{C^\circ}\right) = -0{,}76\,\mathrm{V} + \dfrac{0{,}059\,\mathrm{V}}{2}\log\left(\dfrac{0{,}1\,\mathrm{mol\cdot L^{-1}}}{1\,\mathrm{mol\cdot L^{-1}}}\right) = -0{,}79\,\mathrm{V}$.

.....

27.4 b) On note E_Cu le potentiel de la demi-pile de cuivre. Avec l'approximation $\dfrac{RT\ln(10)}{\mathcal{F}} \approx 0{,}059\,\mathrm{V}$, la loi de Nernst donne : $E_\mathrm{Cu} = E^\circ(\mathrm{Cu}^{2+}/\mathrm{Cu}) + \dfrac{0{,}059}{2}\log\left(\dfrac{[\mathrm{Cu}^{2+}]}{C^\circ}\right) = 0{,}34\,\mathrm{V} + \dfrac{0{,}059\,\mathrm{V}}{2}\log\left(\dfrac{0{,}25\,\mathrm{mol\cdot L^{-1}}}{1\,\mathrm{mol\cdot L^{-1}}}\right) = 0{,}32\,\mathrm{V}$.

.....

27.4 c) On a $E_\mathrm{Zn} = -0{,}79\,\mathrm{V}$ et $E_\mathrm{Cu} = 0{,}32\,\mathrm{V}$ donc $E_\mathrm{Zn} < E_\mathrm{Cu}$. On en déduit que le pôle + est à droite (cuivre) et que le pôle − est à gauche (zinc).

.....

27.4 d) Le pôle + est à droite (cuivre) et correspond à la cathode (siège de la réduction). Le pôle − est à gauche (zinc) et correspond à l'anode (siège de l'oxydation).

.....

27.4 e) Dans les fils, les électrons se déplacent de l'électrode de zinc (anode) vers l'électrode de cuivre (cathode). Dans le pont salin, les cations (ions ammonium $\mathrm{NH_4}^+$) se déplacent du compartiment de gauche (zinc) vers le compartiment de droite (cuivre) alors que les anions (ions nitrate $\mathrm{NO_3}^-$) se déplacent du compartiment de droite (cuivre) vers le compartiment de gauche (zinc).

.....

27.4 f) La tension à vide, choisie positive, est $U_\mathrm{co} = E_\mathrm{Cu} - E_\mathrm{Zn} = 0{,}32\,\mathrm{V} + 0{,}79\,\mathrm{V} = 1{,}11\,\mathrm{V}$.

.....

27.4 g) On a $\Delta_\mathrm{r}G = -eFU_\mathrm{co} = -2FU_\mathrm{co} = -2\times96\,500\,\mathrm{C\cdot mol^{-1}}\times1{,}11\,\mathrm{V} = -2{,}1\times10^2\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$.

.....

27.5 a) Par définition, on a $K^\circ = \dfrac{a(\mathrm{Cu})_\mathrm{éq}\times a(\mathrm{Zn}^{2+})_\mathrm{éq}}{a(\mathrm{Zn})_\mathrm{éq}\times a(\mathrm{Cu}^{2+})_\mathrm{éq}}$.

.....

27.5 b) On a $K^\circ = \dfrac{a(\text{Cu})_{\text{éq}} \times a(\text{Zn}^{2+})_{\text{éq}}}{a(\text{Zn})_{\text{éq}} \times a(\text{Cu}^{2+})_{\text{éq}}}$, avec $a(\text{Zn})_{\text{éq}} = a(\text{Cu})_{\text{éq}} = 1$ (solide pur), $a(\text{Zn}^{2+})_{\text{éq}} = \dfrac{[\text{Zn}^{2+}]_{\text{éq}}}{C^\circ}$ et $a(\text{Cu}^{2+})_{\text{éq}} = \dfrac{[\text{Cu}^{2+}]_{\text{éq}}}{C^\circ}$ (solutés), où $C^\circ = 1\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$ est la concentration standard. Il vient : $K^\circ = \dfrac{[\text{Zn}^{2+}]_{\text{éq}}}{[\text{Cu}^{2+}]_{\text{éq}}}$.

27.5 c) D'après la relation de Nernst : $E = E^\circ(\text{Zn}^{2+}/\text{Zn}) + \dfrac{0{,}059}{2}\log\left(\dfrac{[\text{Zn}^{2+}]}{C^\circ}\right)$.

27.5 d) D'après la relation de Nernst : $E = E^\circ(\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}) + \dfrac{0{,}059}{2}\log\left(\dfrac{[\text{Cu}^{2+}]}{C^\circ}\right)$.

27.5 e) On a :

$$E_{\text{éq}} = E^\circ(\text{Zn}^{2+}/\text{Zn}) + \frac{0{,}059}{2}\log\left(\frac{[\text{Zn}^{2+}]_{\text{éq}}}{C^\circ}\right) = E^\circ(\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}) + \frac{0{,}059}{2}\log\left(\frac{[\text{Cu}^{2+}]_{\text{éq}}}{C^\circ}\right).$$

Donc, on a :

$$E^\circ(\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}) - E^\circ(\text{Zn}^{2+}/\text{Zn}) = \frac{0{,}059}{2}\log\left(\frac{[\text{Zn}^{2+}]_{\text{éq}}}{C^\circ}\right) - \frac{0,059}{2}\log\left(\frac{[\text{Cu}^{2+}]_{\text{éq}}}{C^\circ}\right) = \frac{0{,}059}{2}\log\frac{[\text{Zn}^{2+}]_{\text{éq}}}{[\text{Cu}^{2+}]_{\text{éq}}}.$$

On peut également écrire cette égalité :

$$E^\circ(\text{Zn}^{2+}/\text{Zn}) - E^\circ(\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}) = \frac{0{,}059}{2}\log\left(\frac{[\text{Cu}^{2+}]_{\text{éq}}}{C^\circ}\right) - \frac{0{,}059}{2}\log\left(\frac{[\text{Zn}^{2+}]_{\text{éq}}}{C^\circ}\right) = \frac{0{,}059}{2}\log\frac{[\text{Cu}^{2+}]_{\text{éq}}}{[\text{Zn}^{2+}]_{\text{éq}}}.$$

27.5 f) On a $E^\circ(\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}) - E^\circ(\text{Zn}^{2+}/\text{Zn}) = \dfrac{0{,}059}{2}\log\dfrac{[\text{Zn}^{2+}]_{\text{éq}}}{[\text{Cu}^{2+}]_{\text{éq}}} = \dfrac{0{,}059}{2}\log K^\circ$. On en déduit :

$$K^\circ = 10^{\frac{2}{0{,}059}(E^\circ(\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}) - E^\circ(\text{Zn}^{2+}/\text{Zn}))}.$$

27.5 g) On a $K^\circ = 10^{\frac{2}{0{,}059}(0{,}34+0{,}76)} = 10^{37}$.

La constante d'équilibre est supérieure à 1 donc la réaction est favorisée thermodynamiquement.

27.6 a) L'équation (1) est $\text{Cu}^{2+} + 2\,\text{e}^- = \text{Cu}$.

27.6 b) L'équation (2) est $\text{Cu}^{2+} + \text{e}^- = \text{Cu}^+$.

27.6 c) L'équation (3) est $\text{Cu}^+ + \text{e}^- = \text{Cu}$.

27.6 d) On a (1) = (2) + (3).

27.6 e) D'après la loi de Hess : (1) = (2) + (3), soit $\Delta_{1/2}G_1^\circ = \Delta_{1/2}G_2^\circ + \Delta_{1/2}G_3^\circ$.

27.6 f) Dans la relation précédente, on remplace $\Delta_{1/2}G^\circ$ par $-n \times \mathcal{F} \times E^\circ$, où n est le nombre d'électrons échangés pour chaque demi-équation. On obtient alors l'égalité suivante : $-2 \times \mathcal{F} \times E_1^\circ = -\mathcal{F} \times E_2^\circ - \mathcal{F} \times E_3^\circ$, soit $2E_1^\circ = E_2^\circ + E_3^\circ$, ou encore $E_3^\circ = 2E_1^\circ - E_2^\circ = 0{,}52\,\text{V}$.

27.7 b) La nature fortement basique du milieu complexifie légèrement l'écriture de la réaction : le plus simple est alors de commencer par l'écrire en milieu acide, puis d'ajouter autant de HO^- que nécessaire à droite et à gauche pour faire disparaître les H^+.

27.7 c) Il suffit de sommer les deux demi-équations précédentes. En précisant les états physico-chimiques, cela donne : $2\,H_2O\,(\ell) + 2\,Cl^-\,(aq) \longrightarrow Cl_2(g) + H_2(g) + 2\,HO^-\,(aq)$.

.....

27.8 a) On a $Q_{éch} = jS\Delta t = 6{,}00 \times 10^3\,A \cdot m^{-2} \times 100\,m^2 \times 3\,600\,s = 2{,}16 \times 10^9\,C$.

.....

27.8 b) D'après l'équation de réaction électrochimique, il faut deux moles d'électrons pour former une mole de dichlore. Autrement dit, une mole d'électrons échangés permet de former une demi-mole de dichlore. La charge utile à la réaction est par hypothèse égale à la charge échangée donc $n_{Cl_2} = 0{,}5 \times \dfrac{Q_{éch}}{\mathcal{F}}$, avec $\mathcal{F}$ la charge portée, en valeur absolue, par une mole d'électrons (constante de Faraday). Il vient : $n_{Cl_2} = 0{,}5 \times \dfrac{2{,}16 \times 10^9\,C}{96\,500\,C \cdot mol^{-1}} = 1{,}12 \times 10^4\,mol$.

.....

27.8 c) L'équation d'état des gaz parfaits donne :

$$V_{Cl_2} = \frac{1{,}12 \times 10^4\,mol \times 8{,}314\,J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1} \times 273\,K}{1{,}00 \times 10^5\,Pa} = 254\,m^3.$$

.....

27.8 d) Le rendement faradique est le rapport entre la charge utile et la charge échangée, et donc également le rapport entre les quantités de matière réelle et maximale formées, et de même entre les volumes.

.....

27.9 a) On a $\mathcal{E} = 3{,}00\,V \times 6{,}00 \times 10^3\,A \cdot m^{-2} \times 100\,m^2 \times 3\,600\,s = 6{,}48 \times 10^9\,J$.

.....

27.9 b) En raisonnant sur une heure d'électrolyse, on trouve $\dfrac{6{,}48 \times 10^9\,J}{233\,m^3} = 2{,}78 \times 10^7\,J \cdot m^{-3}$.

.....

27.10 a) À la cathode, la réduction des ions aurocyanure mène à la production d'or et d'ions cyanure : on a donc $Au(CN)_2^- + e^- = Au + 2\,CN^-$. Il suffit de bien lire l'énoncé et d'équilibrer la demi-équation.

.....

27.10 b) Les électrons sont « consommés » au niveau de l'électrode (1), là où ils permettent aux ions aurocyanure d'être réduits : les électrons se déplacent réellement de l'électrode (2) vers l'électrode (1).

.....

27.10 c) Le sens conventionnel du courant est opposé au sens réel de déplacement des électrons donc, en tenant compte de l'orientation choisie pour I, on en déduit que $I < 0$. On retrouve bien le fait que, sur une courbe intensité-potentiel, le fonctionnement cathodique correspond à $I < 0$.

.....

27.10 d) La demi-équation électronique de l'oxydation de l'eau est : $2\,H_2O = 4\,H^+ + O_2 + 4\,e^-$. Le pH étant ici fixé à 14, la demi-équation doit être équilibrée en milieu basique : $4\,HO^- = 2\,H_2O + O_2 + 4\,e^-$.

.....

27.10 e) Chaque potentiel standard est donné à pH = 0, donc il faut commencer par écrire la demi-équation associée au couple de l'eau à l'anode en milieu acide : $2\,H_2O = 4\,H^+ + O_2 + 4\,e^-$. Il vient :

$$E(O_2\,/\,H_2O) = E^\circ(O_2\,/\,H_2O) - 0{,}059\,pH = 1{,}23\,V - 0{,}059\,V \times 14 = 0{,}40\,V.$$

.....

27.10 f) La tension minimale à imposer est la différence de potentiel entre celui du couple de l'eau en oxydation et celui du couple de l'or en réduction : $(0{,}40\,V + 0{,}60\,V) - (-0{,}60\,V) = 1{,}60\,V$.

.....

27.10 g) Au-delà d'une certaine valeur, le solvant pourrait être réduit.

.....

27.11 a) Il s'agit d'une courbe à courant négatif, donc de réduction. Pour le couple H^+/H_2, le surpotentiel égal à $-0{,}30\,V$ doit être ajouté au potentiel d'équilibre valant $-0{,}20\,V$. Il y a donc un décalage de la courbe vers la gauche, par rapport au potentiel d'équilibre.

.....

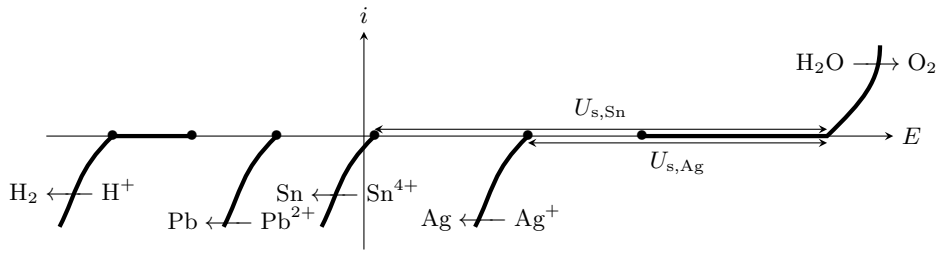
27.11 b) Initialement, seuls les cations sont présents dans la solution. Au cours de l'électrolyse, certains métaux au moins vont se déposer à la cathode, mais ils ne pourront alors pas s'oxyder. En revanche, compte tenu du potentiel de Nernst, l'oxydation de l'argent serait parfaitement envisageable... s'il y en avait. Le raisonnement serait le même pour les autres métaux.

.....

27.12 a) Puisqu'il s'agit de l'anode, la réaction électrochimique est forcément une oxydation... or la seule oxydation possible ici est celle de l'eau en dioxygène.

.....

27.12 b) Puisqu'il s'agit de la cathode, la réaction électrochimique est forcément une réduction, si bien qu'ici les quatre processus proposés sont théoriquement possibles et entrent en compétition. Celui qui a lieu en pratique est celui pour lequel la tension seuil d'électrolyse, c'est-à-dire la tension pour laquelle les réactions ont lieu avec un courant non nul, est la plus faible. On constate graphiquement qu'il s'agit ici de la réduction de Ag^+ en Ag.



.....

27.12 c) En précisant les états physico-chimiques : $4\,Ag^+(aq) + 2\,H_2O(\ell) \longrightarrow 4\,Ag(s) + O_2(g) + 4\,H^+(aq)$.

.....

27.12 d) La réaction est observée si la tension appliquée est supérieure à la tension seuil discutée précédemment : $U_{s,Ag} = 1{,}05\,V + 0{,}70\,V - 0{,}6\,V = 1{,}15\,V$.

.....

27.13 a) La réaction électrochimique qui doit forcément avoir lieu à la cathode est la réduction de Sn^{4+} pour que de l'étain métallique s'y dépose ; la réaction anodique n'est en revanche pas modifiée. En précisant les états physico-chimiques, cela donne : $Sn^{4+}(aq) + 2\,H_2O(\ell) \longrightarrow Sn(s) + O_2(g) + 4\,H^+(aq)$.

.....

27.13 b) Comme discuté dans l'entraînement précédent, le dépôt d'argent se forme pour une tension plus faible que le dépôt d'étain : s'il reste des impuretés d'argent dans la solution, alors elles se déposeront avant l'étain et il faut donc les éliminer. En revanche, le plomb se dépose à la cathode pour une tension supérieure à l'étain, ces impuretés ne sont donc pas gênantes pour réaliser l'électrolyse.

.....

27.13 c) La réaction est observée si la tension appliquée est supérieure à la tension seuil discutée précédemment : $U_{s,Sn} = 1{,}05\,V + 0{,}70\,V - 0{,}05\,V = 1{,}70\,V$.

.....

27.13 d) La tension seuil est celle pour laquelle le courant est (quasi) nul, donc la vitesse de réaction aussi. Comme on peut le voir sur l'allure des courbes courant-potentiel, obtenir un courant plus élevé nécessite une tension plus élevée. À ce phénomène s'ajoute la chute ohmique, liée à la conductivité électrique imparfaite de la solution. En revanche, les réactions parasites affectent le rendement de l'électrolyse mais ne modifient pas la tension à imposer.

.....

27.14 a) On a $n(\mathrm{Cu}^{2+}) = C_2 \times V_2 = 0{,}25\,\mathrm{mol}\cdot\mathrm{L}^{-1} \times 100 \times 10^{-3}\,\mathrm{L} = 2{,}5 \times 10^{-2}\,\mathrm{mol}$.

.....

27.14 b) On a $n(\mathrm{Zn}) = \dfrac{m}{M(\mathrm{Zn})} = \dfrac{30\,\mathrm{g}}{65{,}4\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{mol}^{-1}} = 0{,}46\,\mathrm{mol}$.

.....

27.14 c) La stœchiométrie de chacun des réactifs (Zn et Cu^{2+}) est de 1. On constate que $\dfrac{n(\mathrm{Cu}^{2+})}{1} < \dfrac{n(\mathrm{Zn})}{1}$ donc Cu^{2+} est le réactif limitant.

.....

27.14 d) Les ions cuivre(II) Cu^{2+} sont limitants. La demi-équation associée au couple $\mathrm{Cu}^{2+}/\mathrm{Cu}$ est :

$$\mathrm{Cu}^{2+} + 2\,\mathrm{e}^- = \mathrm{Cu}.$$

Ainsi, pour chaque ion cuivre Cu^{2+} consommé, deux électrons traversent le circuit. Par conséquent, on a :

$$n(\mathrm{e}^-) = 2 \times n(\mathrm{Cu}^{2+}) = 5{,}0 \times 10^{-2}\,\mathrm{mol}.$$

.....

27.14 e) La charge totale que la pile peut débiter est :

$$Q = n(\mathrm{e}^-) \times \mathcal{F} = 5{,}0 \times 10^{-2}\,\mathrm{mol} \times 96\,500\,\mathrm{C}\cdot\mathrm{mol}^{-1} = 4{,}8 \times 10^{3}\,\mathrm{C}.$$

Pour obtenir la valeur en ampèreheures, il suffit de diviser le résultat précédent par 3 600. Il vient : $Q = 1{,}3\,\mathrm{A}\cdot\mathrm{h}$.

.....