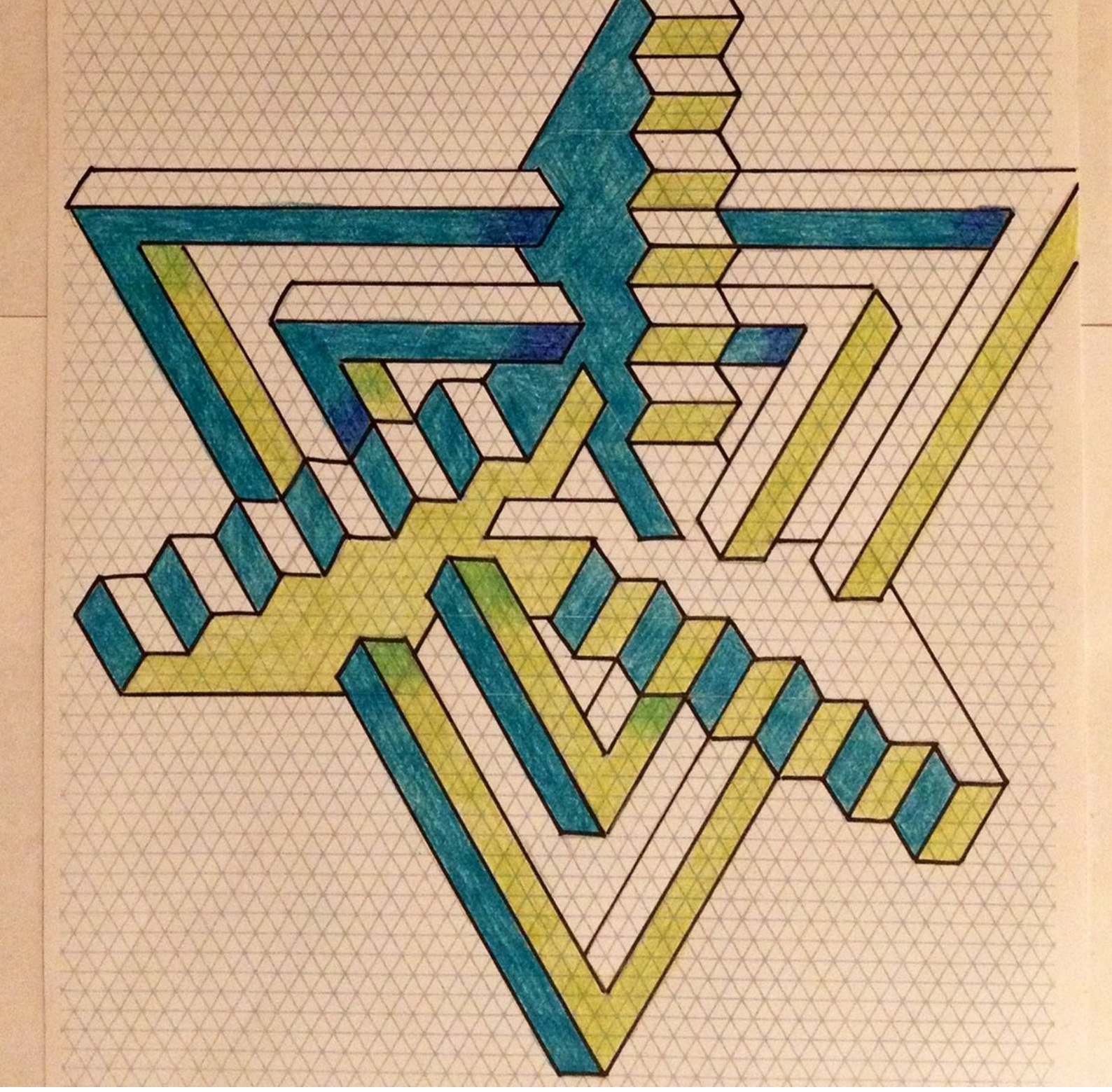


Cahier d'entraînement en physique-chimie

ATS

Page web du *Cahier d'entraînement*,
dernières versions

Ce cahier d'entraînement a été écrit collectivement par des professeurs en classes préparatoires scientifiques.

Coordination

Colas Bardavid et Catherine Lavainne

Équipe des participants

Steve Arnefaux
Stéphane Bargot
Chloé Barraud
Fabien Baudribos
Laurent Beau
Julien Bellier
Lionel Beluze
Marc Beutier
Ariane Beyrath
Allan Bildé
Guillaume Blot-Teyssedre
Olivier Boinot-Turpault
Cécile Bonnand
Alexis Brès
Frédéric Bruneau
Geoffroy Burgunder
Erwan Capitaine
Hervé Catry
Vincent Combette
Guillaume Davieau
Jean-Marie Delorme
Frédéric Desforges
Alexis Drouard
Hervé George
Florence Goutverg
Mathieu Hebding
Lucas Henry
Didier Hérisson
Fanny Jospitre
Joris Laleque
Catherine Lavainne
Alain Lombard
Emmanuel Loyer
Louis Péault
Gwenaël Raillet
Alain Robichon
Renaud Ruamps
Pierre-Simon Saulue
Théo Tassin
Étienne Thibierge
Marc Venturi
Delphine Viandier
Anthony Yip

Le pictogramme de l'horloge a été créé par Ralf Schmitzer (The Noun Project).
Le pictogramme du bulldozer a été créé par Ayub Irawan (The Noun Project).
Le pictogramme de la calculatrice a été créé par Sita Raisita (The Noun Project).

L'illustration de la couverture a été réalisée par Regolo Bizzi.

Version 1.4.9 — 13 mai 2025

Sommaire

Mode d'emploi du cahier d'entraînement v

Généralités

☐ Fiche 1. Opérateurs vectoriels 3

Électromagnétisme en régime permanent

☐ Fiche 2. Électrostatique 13

☐ Fiche 3. Magnétostatique 26

Électromagnétisme en régime variable

☐ Fiche 4. Équations de Maxwell 37

☐ Fiche 5. Induction 49

☐ Fiche 6. Ondes électromagnétiques I 64

☐ Fiche 7. Ondes électromagnétiques II 75

Optique

☐ Fiche 8. Modèle scalaire de la lumière 83

Thermodynamique

☐ Fiche 9. Outils mathématiques pour la diffusion 91

☐ Fiche 10. Diffusion thermique 95

☐ Fiche 11. Tables et diagrammes thermodynamiques 109

☐ Fiche 12. Thermodynamique industrielle 122

Mécanique des fluides

☐ Fiche 13. Bilans en mécanique des fluides 132

Réponses et corrigés

Réponses et corrigés 139

Mode d'emploi

Qu'est-ce que le cahier d'entraînement ?

Le *cahier d'entraînement en physique-chimie* est un outil destiné à renforcer l'acquisition de **réflexes utiles en physique et en chimie**.

Il ne se substitue en aucun cas aux TD donnés par votre professeur ; travailler avec ce cahier d'entraînement vous permettra en revanche d'aborder avec plus d'aisance les exercices de physique-chimie.

Pour donner une analogie, on pourrait dire que ce cahier d'entraînement est comparable aux **exercices de musculation** d'un athlète : ils sont nécessaires pour mieux réussir le jour J lors de la compétition, mais ils ne sont pas suffisants. Un coureur de sprint fait de la musculation, mais il fait également tout un tas d'autres exercices.

Pour vous aider à mieux vous entraîner, nous avons ajouté quelques exercices sur des thèmes qui ne figurent pas au programme, en prenant soin de rappeler, dans ce cas, les équations en jeu. Il faut voir ces exercices comme des occasions supplémentaires pour s'entraîner à manipuler des mathématiques au service de la physique et de la chimie.

Ce cahier a été conçu par une large équipe de professeurs en classes préparatoires, tous soucieux de vous apporter l'aide et les outils pour réussir.

Comment est-il organisé ?

Le cahier est organisé en *fiches d'entraînement*, chacune correspondant à un thème issu de votre programme de deuxième année.

Chaque fiche est composée d'une suite de petits exercices, appelés *entraînements*, dont le temps de résolution estimé est indiqué par une (🕒🕒🕒🕓), deux (🕒🕒🕓🕓), trois (🕒🕓🕓🕓) ou quatre (🕓🕓🕓🕓) horloges.

Les pictogrammes

Certains entraînements sont accompagnés d'un pictogramme.

Ces entraînements sont **basiques et transversaux**.

Les compétences qu'ils mettent en jeu ne sont pas forcément spécifiques au thème de la fiche et peuvent être transversales.

Ce pictogramme a été choisi parce que le bulldozer permet de construire les fondations et que c'est sur des fondations solides que l'on bâtit les plus beaux édifices. Ces entraînements sont donc le gage pour vous d'acquérir un socle solide de savoir-faire.

Ces entraînements vous entraînent au **calcul à la main**.

Dans ces entraînements, les calculs doivent être faits **sans calculatrice**.

Comment utiliser ce cahier ?

Le cahier d'entraînement ne doit pas remplacer vos TD. Il s'agit d'un outil à utiliser en complément de votre travail « normal » en physique-chimie (apprentissage du cours, recherche de TD, recherche des DM).

Un travail personnalisé.

Le cahier d'entraînement est prévu pour être **utilisé en autonomie**.

Choisissez vos entraînements en fonction des difficultés que vous rencontrez, des chapitres que vous étudiez, ou bien en fonction des conseils de votre professeur.

Ne cherchez pas à faire linéairement ce cahier : les fiches ne sont pas à faire dans l'ordre mais en fonction des points que vous souhaitez travailler.

Un travail régulier.

Pratiquez l'entraînement à un rythme régulier : **une dizaine de minutes par jour** par exemple. Privilégiez un travail régulier sur le long terme plutôt qu'un objectif du type « faire dix fiches par jour pendant les vacances ».

Un travail efficace.

Utilisez les réponses et les corrigés de façon appropriée : il est important de chercher suffisamment par vous-même avant d'aller les regarder. Il faut vraiment **persévérer** dans votre raisonnement et vos calculs avant d'aller voir le corrigé si vous voulez que ces entraînements soient efficaces.

Une erreur ? Une remarque ?

Si jamais vous voyez une erreur d'énoncé ou de corrigé, ou bien si vous avez une remarque à faire, n'hésitez pas à écrire à l'adresse `cahier.entrainement@gmail.com`.

Si vous pensez avoir décelé une erreur, merci de donner aussi l'identifiant de la fiche, écrit en gris en haut à gauche de chaque fiche.

Énoncés

Opérateurs vectoriels

Prérequis
Notation avec et sans le symbole nabla $\vec{\nabla}$ des opérateurs :

- gradient : $\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \vec{\nabla} f$
- divergence : $\text{div}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$
- rotationnel : $\overrightarrow{\text{rot}}(f) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$

Expressions de ces opérateurs vectoriels en coordonnées cartésiennes.

Dans toute cette fiche, les grandeurs a, b et c sont des constantes ayant la dimension d'une longueur.

Sur l'opérateur gradient

Entraînement 1.1 — Quelle écriture pour le gradient ?

Le gradient est un opérateur vectoriel qui s'applique à des fonctions scalaires. Pour un système de coordonnées cartésiennes (x, y, z) décrivant l'espace, la définition du gradient d'une fonction $f(x, y, z)$ est :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \vec{\nabla}(f) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e_z}.$$

On considère la fonction $V(x, y, z) = xyz$. Quelle est la bonne expression du gradient de V ?

(a) $\nabla(V) = zy\,\vec{e_x} + zx\,\vec{e_y} + yx\,\vec{e_z}$

(b) $\text{grad}\left(\vec{V}\right) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ yz \end{pmatrix}$

(c) $\overrightarrow{\text{grad}}(V) = zy\,\vec{e_y} + zx\,\vec{e_x} + yx\,\vec{e_z}$

(d) $\vec{\nabla}(V) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$

.....

Entraînement 1.2 — Calcul de gradients en coordonnées cartésiennes.

On munit l'espace d'un repère cartésien dont le système de coordonnées est noté (x, y, z).

On rappelle l'expression de l'opérateur gradient dans ce système de coordonnées :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f(x, y, z)) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e_z}.$$

Développer les expressions suivantes :

a) $\overrightarrow{\text{grad}}\left(xy + yz + zx + \dfrac{xyz}{a}\right)$ .....

b) $\overrightarrow{\text{grad}}\left(3x^2 + 2a(y - z) + b^2\right)$ .....

c) $\overrightarrow{\text{grad}}\left(x^2y + y^2z + z^2x + a^3\right)$ .....

d) $\overrightarrow{\text{grad}}\left(2xy + 8a^2\mathrm{e}^{z/(2b)} - 6c^2\right)$ .....

e) $\overrightarrow{\text{grad}}\left(8x^2y + \dfrac{6a^4}{y} - 5b^2z\right)$ .....

Entraînement 1.3 — Calcul de gradients en coordonnées cylindriques.

On munit l'espace d'un repère cylindrique dont le système de coordonnées est noté (r, θ, z).

On donne l'expression de l'opérateur gradient dans ce système de coordonnées :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f(r,\theta,z)) = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{e_z}.$$

Développer les expressions suivantes :

a) $\overrightarrow{\text{grad}}\left(3z - \dfrac{r^2}{a} - 2r\theta\right)$ .....

b) $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\dfrac{a^2}{r^2}\mathrm{e}^{5\theta}\right)$ .....

c) $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\sqrt{r^2 - a^2}\right)$ .....

d) $\overrightarrow{\text{grad}}\left(7\theta\left(\dfrac{r}{a}\right)^4 + \ln(z/b)\right)$ .....

e) $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\dfrac{z}{r}\sin(\theta)\right)$ .....

Entraînement 1.4 — La bonne formule.

On introduit deux systèmes de coordonnées pour décrire un plan : des coordonnées cartésiennes (x_1, x_2) et des coordonnées polaires (ρ, α).

Parmi les formules suivantes de gradient à deux dimensions d'une fonction scalaire g du plan, identifier la seule écriture valable :

(a) $\overrightarrow{\text{grad}}(g(x_1,x_2)) = \dfrac{\partial g}{\partial x_1}\overrightarrow{e_{x_1}} + \dfrac{\partial g}{\partial x_2}\overrightarrow{e_{x_2}}$

(b) $\vec{\nabla} g(x_1,x_2) = \dfrac{\partial g}{\partial x_2}\overrightarrow{e_{x_1}} + \dfrac{\partial g}{\partial x_1}\overrightarrow{e_{x_1}}$

(c) $\overrightarrow{\text{grad}}(g(r,\alpha)) = \dfrac{\partial g}{\partial \rho}\overrightarrow{e_\rho} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \rho}\overrightarrow{e_\alpha}$

(d) $\vec{\nabla} \cdot g(r,\rho) = \dfrac{\partial g}{\partial \rho}\overrightarrow{e_\rho} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial g}{\partial \alpha}\overrightarrow{e_\alpha}$

.....

Entraînement 1.5 — Valeurs et projections d'un gradient.

On munit l'espace d'un repère cartésien dont le système de coordonnées est noté (x, y, z).

On donne l'expression de l'opérateur gradient dans ce système de coordonnées :

$$\vec{\nabla}(f(x,y,z)) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e_z}.$$

On considère la fonction $g(x,y,z) = (x-2)^2 + (y+1)^2 + z^2 - 1$, on note $\mathrm{M}(x,y,z)$ un point quelconque de l'espace et A le point de coordonnées $(-1, 1, 2)$.

a) Calculer $g(\mathrm{A})$ .....

b) La quantité $2z$ correspond à :

(a) $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(g) \cdot \vec{e_x}$ (b) $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(g) \cdot \vec{e_y}$ (c) $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(g) \cdot \vec{e_z}$

.....

c) La quantité $2y + 2$ correspond à :

(a) $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(g) \cdot \vec{e_x}$ (b) $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(g) \cdot \vec{e_y}$ (c) $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(g) \cdot \vec{e_z}$

.....

d) La quantité $2x - 4$ correspond à :

(a) $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(g) \cdot \vec{e_x}$ (b) $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(g) \cdot \vec{e_y}$ (c) $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(g) \cdot \vec{e_z}$

.....

e) La quantité $\vec{\nabla} g(M)$ correspond au vecteur :

(a) $\begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2(y-1) \\ 2z \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2(y-1) \\ 2(x+2) \\ 2z \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2(y+1) \\ 2z \end{pmatrix}$

.....

f) Calculer $\left\| \vec{\nabla} g(\mathrm{A}) \right\|$ .....

Entraînement 1.6 — Enquête sur une fonction.

On considère une fonction $f(x,y,z)$ inconnue telle que $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) = 2xy\vec{e_x} + x^2\vec{e_y} + a^2\vec{e_z}$.

a) Quelle est l'unique relation valable ?

(a) $\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = 2xy$ (b) $\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = x^2$ (c) $\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = y$

.....

b) Quelle primitive est solution de la réponse précédente ?

(a) $f(x,y,z) = xy^2 + g(x,y)$ (b) $f(x,y,z) = x^2y + g(y,z)$ (c) $f(x,y,z) = x^2y + yx^2$

.....

c) Que vérifie la dérivée partielle par rapport à y de la réponse précédente ?

(a) $\dfrac{\partial g}{\partial y} = 0$ (b) $\dfrac{\partial g}{\partial y} = x^2$ (c) $\dfrac{\partial g}{\partial y} = 1$

.....

d) En s'appuyant sur les réponses précédentes, quelle est la bonne expression de g ?

(a) $g = a^2 y + \text{cste}$ (b) $g = a^2 z + \text{cste}$ (c) $g = a^2 + \text{cste}$

.....

e) Quelle est l'expression de la fonction $f(x, y, z)$ telle que $f(0, 0, 0) = 0$?

(a) $f = x^2 y + a^2 z$ (b) $f = y^2 z + a^2 x$ (c) $f = x^2 z + a^2 y$

.....

Sur l'opérateur divergence

Entraînement 1.7 — Calcul de divergences en coordonnées cartésiennes.

On munit l'espace d'un repère cartésien dont le système de coordonnées est noté (x, y, z).

On donne l'expression de l'opérateur divergence dans ce système de coordonnées :

$$\text{div}(\vec{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Développer les expressions suivantes :

a) $\text{div}\left(3x^2\vec{e_x} + 2ay\vec{e_y} - 2bz\vec{e_z}\right)$ .....

b) $\text{div}\left(2xy\vec{e_y} + 8a^2 \mathrm{e}^{\frac{z}{2b}}\vec{e_z} - 6b^2\vec{e_x}\right)$ .....

c) $\text{div}\left(8x^2 y\vec{e_x} + \frac{6x^4}{y}\vec{e_y}\right)$ .....

d) $\text{div}(x\vec{e_z} + z\vec{e_x})$ .....

e) $\text{div}\left(x^2 y\vec{e_x} - yx^2(\vec{e_y} - \vec{e_z})\right)$ .....

Entraînement 1.8 — Calcul de divergences en coordonnées cylindriques.

On munit l'espace d'un repère cylindrique dont le système de coordonnées est noté (r, θ, z).

On donne l'expression de l'opérateur divergence dans ce système de coordonnées :

$$\text{div}(\vec{A}) = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Développer les expressions suivantes :

a) $\text{div}\left(-\frac{r^2}{a}\vec{e_r} - 2r\theta\vec{e}_\theta + 3z\vec{e}_z\right)$ .....

b) $\text{div}(r\vec{e}_\theta)$ .....

Entraînement 1.9 — Bataille de divergences.

Quel est le champ dont la divergence au point $A(-1,-1,1)$ est maximale ?

(a) $x^2\vec{e_x}+y^2\vec{e_y}+z^2\vec{e_z}$

(b) $y^2\vec{e_x}+x^2\vec{e_y}+z^2\vec{e_z}$

(c) $z^2\vec{e_x}+x^2\vec{e_y}+y^2\vec{e_z}$

(d) $y^2\vec{e_x}+x^2\vec{e_z}+z^2\vec{e_y}$

.....

Entraînement 1.10 — Choix du système de coordonnées.

On munit l'espace d'un système de coordonnées cartésiennes (x,y,z) et d'un système de coordonnées sphériques (r,θ,φ). On s'intéresse au champ vectoriel $\overrightarrow{OM}=x\vec{e_x}+y\vec{e_y}+z\vec{e_z}=r\vec{e_r}$ et on donne l'expression de l'opérateur divergence en coordonnées sphériques :

$$\mathrm{div}(\vec{A})=\frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 A_r}{\partial r}+\frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial(\sin(\theta)A_\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}.$$

Développer les expressions suivantes :

a) $\mathrm{div}(x\vec{e_x}+y\vec{e_y}+z\vec{e_z})$ .....

b) $\mathrm{div}(r\vec{e_r})$ .....

On munit l'espace de dimension 2 d'un système de coordonnées cylindro-polaires (r,θ).

On s'intéresse au champ vectoriel $\overrightarrow{OM}=x\vec{e_x}+y\vec{e_y}=r\vec{e_r}$.

c) La divergence de ce champ (définie dans l'entraînement **1.8**), en tout point, vaut :

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

.....

Sur l'opérateur rotationnel

Entraînement 1.11 — Calcul de rotationnels en coordonnées cartésiennes.

On munit l'espace d'un repère cartésien dont le système de coordonnées est noté (x,y,z).

On donne l'expression de l'opérateur rotationnel dans ce système de coordonnées :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{A})=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e_x}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{e_y}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{e_z}.$$

Développer les expressions suivantes :

a) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\big(3x^2\vec{e_x}+2by\vec{e_y}-2cz\vec{e_z}\big)$ .....

b) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\big(2xy\vec{e_x}+8c^2\mathrm{e}^{\frac{z}{2c}}\vec{e_y}-6c^2\vec{e_z}\big)$ .....

c) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(8x^2y\vec{e_x}+\frac{6x^4}{y}\vec{e_y}\right)$ .....

d) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(-x\vec{e_z}+z\vec{e_x})$ .....

e) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\big(x^2y\vec{e_x}-yx^2(\vec{e_y}-\vec{e_z})\big)$ .....

Entraînement 1.12 — Calcul de rotationnels en coordonnées cylindriques.

On munit l'espace d'un repère cylindrique dont le système de coordonnées est noté (r, θ, z).

On donne l'expression de l'opérateur divergence dans ce système de coordonnées :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{A}) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{e_r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e_\theta} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial r A_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e_z}.$$

Développer les expressions suivantes :

a) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(-\frac{r^2}{a}\vec{e_r} - 2r\theta\vec{e_\theta} + 3z\vec{e_z}\right)$ .....

b) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(r\vec{e_\theta})$ .....

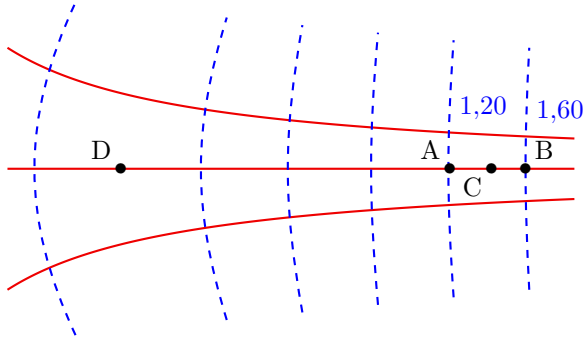
Sur la représentation graphique

Entraînement 1.13 — Exploiter une carte de champ.

On considère un champ $\vec{v}(\mathrm{M})$ dérivant d'un gradient de potentiel Φ, c'est-à-dire tel qu'en tout point M :

$$\vec{v}(\mathrm{M}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \Phi(\mathrm{M})$$

La figure ci-dessous représente les lignes de champ (en trait plein) et les équipotentielles (en tirets). Le système est invariant par translation orthogonalement au plan de la figure. Les valeurs du potentiel $\Phi(\mathrm{M})$ sont données pour chaque équipotentielle en UA (unité arbitraire).



On admet que le champ est tel que $\mathrm{div}\ \vec{v} = \vec{0}$, c'est-à-dire à flux conservatif. Autrement dit, le long d'un tube de champ de section S, la quantité vS est conservée.

a) Par rapport aux équipotentielles, les lignes de champ sont orientées :

(a) parallèlement (b) orthogonalement (c) aléatoirement

.....

b) Estimer graphiquement $v(\mathrm{C})$ en UA/m sachant que AB $\approx$ 50 cm .....

c) Le vecteur $\vec{v}(\mathrm{C})$ est orienté dans le sens du vecteur :

(a) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ (b) $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$

.....

d) Estimer graphiquement $\dfrac{v(\mathrm{C})}{v(\mathrm{D})}$ en calculant un rapport de longueurs .....

Sur les opérateurs laplaciens

Entraînement 1.14 — Opérateur laplacien scalaire en coordonnées cartésiennes.

On munit l'espace d'un repère cartésien dont le système de coordonnées est noté (x, y, z).

On donne l'expression de l'opérateur laplacien (scalaire) dans ce système de coordonnées :

$$\Delta(f(x,y,z)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Développer les expressions suivantes :

a) $\Delta\left(\dfrac{x^2 y}{a} + bz + c^2\right)$ .....

b) $\Delta(y^2 - 5az)$ .....

c) $\Delta\left(b^2 \ln(\dfrac{z}{a}) + 3x^2\right)$ .....

Entraînement 1.15 — Opérateur laplacien vectoriel en coordonnées cartésiennes.

On munit l'espace d'un repère cartésien dont le système de coordonnées est noté (x, y, z).

On donne l'expression de l'opérateur laplacien (vectoriel) dans ce système de coordonnées :

$$\Delta(\vec{A}(x,y,z)) = \Delta A_x \vec{e_x} + \Delta A_y \vec{e_y} + \Delta A_z \vec{e_z}.$$

On dispose d'un vecteur $\vec{A}$ dont les coordonnées cartésiennes sont les suivantes : $\begin{pmatrix} \dfrac{x^2 y}{a} + bz + c^2 \\ y^2 - 5az \\ b^2 \ln\left(\dfrac{z}{a}\right) + 3x^2 \end{pmatrix}$.

Développer $\Delta\vec{A}$ .....

Bilan sur les opérateurs

Entraînement 1.16 — Scalaire ou vecteur ?

Les différents opérateurs rencontrés peuvent être des opérateurs :

(a) scalaires s'appliquant à des scalaires
(b) scalaires s'appliquant à des vecteurs
(c) vectoriels s'appliquant à des scalaires
(d) vectoriels s'appliquant à des vecteurs

a) Quel cas correspond à l'opérateur « gradient » ? .....

b) Quel cas correspond à l'opérateur « divergence » ? .....

c) Quel cas correspond à l'opérateur « rotationnel » ? .....

d) Quel cas correspond à l'opérateur « laplacien » appliqué à un champ scalaire ? .....

e) Quel cas correspond à l'opérateur « laplacien » appliqué à un champ vectoriel ? .....

Autres entraînements

Entraînement 1.17 — Calcul de gradients en coordonnées sphériques.

On munit l'espace d'un repère cylindrique dont le système de coordonnées est noté (r, θ, φ).

On donne l'expression de l'opérateur gradient dans ce système de coordonnées :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f(r,\theta,\varphi)) = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\overrightarrow{e_\varphi}.$$

Développer les expressions suivantes :

a) $\overrightarrow{\text{grad}}\left(r + 2a\theta + \dfrac{6b}{\varphi}\right)$ .....

b) $\overrightarrow{\text{grad}}\big((r\sin(\theta-\varphi))^3\big)$ .....

c) $\overrightarrow{\text{grad}}\big(r^2\sqrt{\varphi}\sin\theta\big)$ .....

d) $\overrightarrow{\text{grad}}(\tan(\theta))$ .....

Entraînement 1.18 — Calcul de divergences en coordonnées sphériques.

On munit l'espace d'un repère sphérique dont le système de coordonnées est noté (r, θ, φ).

On donne l'expression de l'opérateur divergence dans ce système de coordonnées :

$$\mathrm{div}(\vec{A}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial(\sin(\theta)A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}.$$

Développer les expressions suivantes :

a) $\mathrm{div}\left(r\vec{e_r} + 2a\sin\theta\vec{e_\theta} + \frac{6a}{\varphi}\vec{e_\varphi}\right)$ .....

b) $\mathrm{div}\left(r^2\sin(\theta)\sqrt{\varphi}(\vec{e_r} + \vec{e_\theta} + \vec{e_\varphi})\right)$ .....

c) $\mathrm{div}(r\vec{e_\theta})$ .....

Entraînement 1.19 — Calcul de rotationnels en coordonnées sphériques.

On munit l'espace d'un repère sphérique dont le système de coordonnées est noté (r, θ, φ).

On donne l'expression de l'opérateur rotationnel dans ce système de coordonnées :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{A}) = \frac{1}{r\sin(\theta)}\left(\frac{\partial(\sin(\theta)A_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\vec{e_r} + \left(\frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{e_\varphi}.$$

Développer les expressions suivantes :

a) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(r\vec{e_r} + 2a\theta\vec{e_\theta} + \frac{6b}{\varphi}\vec{e_\varphi}\right)$ .....

b) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(r^2\sin(\theta)\sqrt{\varphi}\vec{e_r}\right)$ .....

c) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(r\vec{e_\theta})$ .....

Réponses mélangées

$-4c\mathrm{e}^{\frac{z}{2c}}\vec{e_x} - 2x\vec{e_z}$ (a) $\left(-\frac{2r}{a} - 2\theta\right)\vec{e_r} - 2\vec{e}_\theta + 3\vec{e_z}$ (b) (a)

$-\frac{2a^2}{r^3}\mathrm{e}^{5\theta}\vec{e_r} + \frac{5a^2}{r^3}\mathrm{e}^{5\theta}\vec{e}_\theta$ $\frac{2y}{a}$ $4r\sin\theta\sqrt{\varphi} + 2r\cos\theta\sqrt{\varphi} + \frac{r}{2\sqrt{\varphi}}$ $2x + 4\frac{a^2}{b}\mathrm{e}^{\frac{z}{2b}}$

$\vec{e_r} + \frac{2a}{r}\vec{e_\theta} + \frac{-6b}{r\sin\theta\varphi^2}\vec{e_\varphi}$ 0,80 UA/m $\frac{6b}{r\varphi\tan\theta}\vec{e_r} - \frac{6b}{r\varphi}\vec{e_\theta} + \frac{2a\theta}{r}\vec{e_\varphi}$

$28\frac{\theta r^3}{a^4}\vec{e_r} + 7\frac{r^3}{a^4}\vec{e}_\theta + \frac{1}{z}\vec{e_z}$ (a) $\left(z + y + \frac{yz}{a}\right)\vec{e_x} + \left(x + z + \frac{xz}{a}\right)\vec{e_y} + \left(x + y + \frac{yx}{a}\right)\vec{e_z}$ $\vec{0}$ $2\vec{e_\varphi}$

$-4\theta\vec{e_z}$ $3r^2\begin{pmatrix}\sin^3(\theta-\varphi)\\ \cos(\theta-\varphi)\sin^2(\theta-\varphi)\\ -\frac{1}{\sin\theta}\cos(\theta-\varphi)\sin^2(\theta-\varphi)\end{pmatrix}$ 2 (b) (c) $-3\frac{r}{a} + 1$

(b) (c) $6x\vec{e_x} + 2a\vec{e_y} - 2a\vec{e_z}$ 0 $r\sqrt{\varphi}\begin{pmatrix}2\sin\theta\\ \cos\theta\\ \frac{1}{2\varphi}\end{pmatrix}$ (b) $\frac{8x^2}{y}(3x-y)\vec{e_z}$

$\begin{pmatrix}\frac{2y}{a}\\ 2\\ 6-\frac{b^2}{z^2}\end{pmatrix}$ (b) (a) $-\frac{z\sin(\theta)}{r^2}\vec{e_r} + \frac{z\cos\theta}{r^2}\vec{e}_\theta + \frac{\sin(\theta)}{r}\vec{e_z}$ (a) 0

$2\vec{e_y}$ (b) $6 - \frac{b^2}{z^2}$ (a) $1/\tan(\theta)$ $\frac{r}{\sqrt{r^2-a^2}}\vec{e_r}$ $6x + 2a - 2b$ 3

$2\vec{e_z}$ $x^2\vec{e_x} - 2xy(\vec{e_y} + \vec{e_z}) - x^2\vec{e_z}.$ 2 $16xy\vec{e_x} + \left(8x^2 - \frac{6a^4}{y^2}\right)\vec{e_y} - 5b^2\vec{e_z}$

$(2xy + z^2)\vec{e_x} + (2yz + x^2)\vec{e_y} + (2xz + y^2)\vec{e_z}$ (d) 3 $2\sqrt{17}$ (d) $x(2y - x)$

(d) (b) (c) $\frac{r}{2\sqrt{\varphi}}\vec{e_\theta} - r\sqrt{\varphi}\cos(\theta)\vec{e_\varphi}$ $3 + \frac{4a\cos\theta}{r} - \frac{6}{\varphi^2\sin\theta}\frac{a}{r}$

$\frac{1}{r\cos^2\theta}\vec{e_\theta}$ (a) $2y\vec{e_x} + 2x\vec{e_y} + 4\frac{a^2}{b}\mathrm{e}^{z/(2b)}\vec{e_z}$ 16 $16xy - \frac{6x^4}{y^2}$

► Réponses et corrigés page 140

Électrostatique

Prérequis
Repérages cartésien, cylindrique et sphérique.
Intégrales curvilignes, de surface et de volume.
Champs scalaires et vectoriels. Gradient. Théorème de Gauss.

Constantes utiles
→ Charge élémentaire : $e = 1{,}60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
→ Permittivité diélectrique du vide : $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F \cdot m^{-1}}$

Distributions de charge : symétries, invariances, charge totale

Entraînement 2.1 — Calculs intégraux de longueurs, surfaces et volumes.

On rappelle les déplacements élémentaires dans chacun des trois systèmes de coordonnées :

- en coordonnées cartésiennes : $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mathrm{d}x\,\overrightarrow{e_x} + \mathrm{d}y\,\overrightarrow{e_y} + \mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_z}$
- en coordonnées cylindriques (ou cylindro-polaires) : $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mathrm{d}r\,\overrightarrow{e}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{e}_\theta + \mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_z}$
- en coordonnées sphériques : $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mathrm{d}r\,\overrightarrow{e}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{e}_\theta + r\sin(\theta)\,\mathrm{d}\varphi\,\overrightarrow{e}_\varphi$

a) Exprimer l'élément de circonférence $\mathrm{d}\mathcal{C}$ d'un disque de rayon R .....

b) Grâce à un calcul intégral, retrouver la circonférence d'un cercle de rayon R.

.....

c) En coordonnées cylindriques, exprimer l'aire $\mathrm{d}\mathcal{S}$ de l'élément de surface orthogonal à $\overrightarrow{e_z}$.

.....

d) Grâce à un calcul d'intégrale, retrouver la surface d'un disque de rayon R ....

e) Grâce à un calcul d'intégrale, retrouver le volume d'une boule de rayon R ....

Entraînement 2.2 — Charge totale d'une distribution linéique.

Dans chacun des cas suivants, déterminer la charge totale des distributions linéiques suivantes à l'aide de la relation : $Q = \displaystyle\int \lambda(\mathrm{M})\,\mathrm{d}\ell_\mathrm{M}$.

a) Pour une tige de longueur ℓ chargée avec une densité linéique de charge uniforme λ_0.

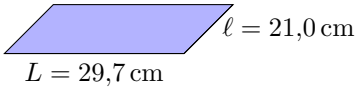
.....

b) Pour un anneau de rayon a dont la densité linéique de charge, non uniforme, est $\lambda(\mathrm{M}) = q_0\theta/a$ avec q_0 une constante et θ l'angle qui repère le point M sur l'anneau.

.....

Entraînement 2.3 — Feuille d'aluminium chargée.

Soit une feuille d'aluminium de format A4 à laquelle 1 000 électrons ont été arrachés. La feuille porte alors la charge électrique Q.



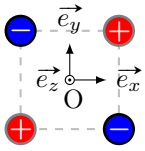
a) Exprimer la charge Q en fonction de la charge électrique élémentaire e .....

b) Exprimer la surface S de la feuille en fonction des longueurs L et ℓ .....

c) En déduire la valeur de la charge surfacique moyenne $\sigma = Q/S$ portée par la feuille ....

Entraînement 2.4 — Quadrupôle électrostatique.

On considère la distribution de charge ci-dessous.



a) Quels sont les trois plans de symétrie de la distribution ?

.....

b) Quels sont les deux plans d'antisymétrie de la distribution ?

.....

Entraînement 2.5 — Autour d'une sphère chargée.

Tous les résultats devront être donnés en écriture scientifique.

a) Quel est le volume en m^3 d'une sphère de rayon $R = 25\,\mathrm{cm}$? .....

b) Que vaut la charge totale de la sphère, en coulombs, si celle-ci est chargée avec une densité volumique uniforme de $\rho_0 = 50{,}0\,\mathrm{nC \cdot m^{-3}}$?

.....

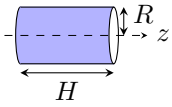
c) Quelle est l'aire de la surface de la sphère en m^2 ? .....

d) Que vaut la charge totale de la sphère, en coulombs, si celle-ci est chargée avec une densité surfacique uniforme $\sigma = 8\,\mathrm{\mu C \cdot m^{-2}}$?

.....

Entraînement 2.6 — Tube chargé localement.

Un tube conducteur d'axe (Oz) possède une densité surfacique de charge $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos(\theta)$, avec σ_0 une constante et θ l'angle des coordonnées cylindriques (r, θ, z).



a) Comment s'exprime l'aire d'un élément de surface dS du tube ?

(a) $\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z$ (b) $R\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$ (c) $R\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$ (d) $R\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$

.....

b) Comment s'exprime la charge totale Q portée par le tube ?

(a) $Q = \displaystyle\int_{r=0}^{R}\int_{z=0}^{H} \sigma(\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z$

(b) $Q = \displaystyle\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{H} \sigma(\theta) R\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$

(c) $Q = \displaystyle\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{H} \sigma(\theta) R\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$

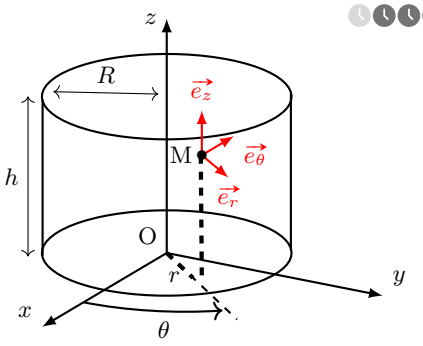
(d) $Q = \displaystyle\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi} \sigma(\theta) R\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$

.....

c) À l'aide du calcul d'une intégrale, déterminer la charge totale Q .....

Entraînement 2.7 — Autour d'un cylindre chargé.

Soit un câble cylindrique d'axe (Oz), de hauteur h et de rayon R, doté d'une densité volumique de charge ρ.



a) Laquelle de ces formules permet de calculer l'aire de la surface latérale du cylindre ?

(a) $\pi R^2 h$ (c) $4\pi R^2 h$

(b) $2\pi R h$ (d) $4\pi R h$

.....

b) Sans négliger les effets de bords, déterminer les invariances de cette distribution de charge si,

$$\text{pour } 0 \leqslant z \leqslant h,\ \rho = \rho_0 \left(\frac{r}{R}\right)^3,$$

avec ρ_0 une constante homogène à une charge volumique.

(a) invariance par translation parallèlement à $\vec{e_x}$ (c) invariance par translation parallèlement à $\vec{e_z}$

(b) invariance par rotation autour de l'axe (Oz) (d) aucune invariance

.....

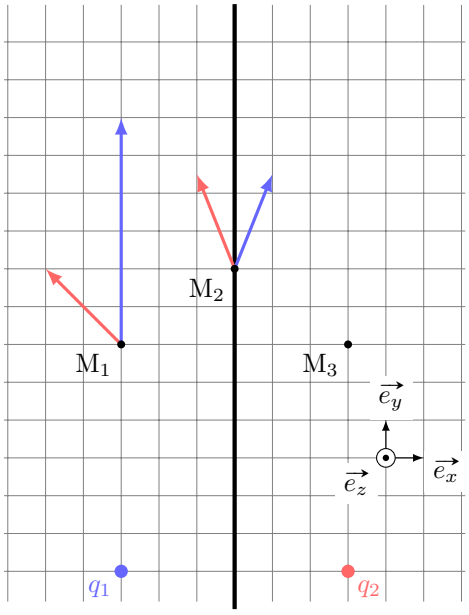
c) Même question si, pour $0 \leqslant z \leqslant h$, $\rho = \rho_0 \left(\frac{r}{R}\right)^3 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ .....

d) Même question si le cylindre est de hauteur infinie avec $\rho = \rho_0 \left(\frac{r}{R}\right)^3$ .....

De la distribution de charge au champ électrostatique

Entraînement 2.8 — Superpositions et symétries.

Sur le schéma ci-contre figurent, en M_1 et M_2, les champs électrostatiques $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ respectivement générés par les deux charges $q_1 = +e$ et $q_2 = +e$.



a) Exprimer le champ électrostatique total $\vec{E}$ au point M_1 en fonction des vecteurs de la base.

.....

b) Exprimer le champ électrostatique total $\vec{E}$ au point M_2 en fonction des vecteurs de la base.

.....

Le plan $(M_2, \vec{e_y}, \vec{e_z})$, nommé $\mathcal{P}$, est un plan de symétrie de la distribution de charge.

c) Quelles propositions sont correctes ?

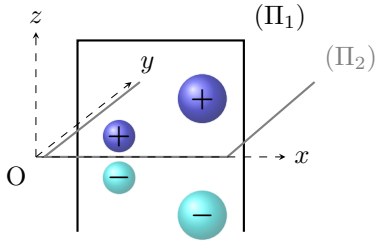
(a) $\vec{E}(M_3) = -2\vec{e_x} + 8\vec{e_y}$ (c) $\vec{E}(M_2) \in \mathcal{P}$

(b) $\vec{E}(M_3) = 2\vec{e_x} + 8\vec{e_y}$ (d) $\vec{E}(M_2) \perp \mathcal{P}$

.....

Entraînement 2.9 — Symétrie d'une distribution volumique de charge.

Le champ électrostatique créé par la distribution volumique ci-dessous est noté $\vec{E}$. Le plan (Π_1) est un plan de symétrie de la distribution. Le plan (Π_2) est un plan d'antisymétrie de la distribution.



On rappelle qu'en tout point d'un plan de symétrie (resp. antisymétrie) de la distribution, le champ électrostatique appartient (resp. est perpendiculaire) à ce plan.

a) Quel vecteur unitaire est normal au plan (Π_1) ? .....

b) Quel vecteur unitaire est normal au plan (Π_2) ? .....

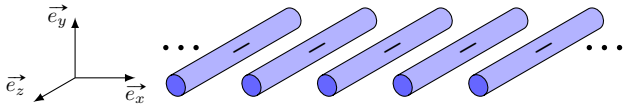
c) En un point $M(x, 0, 0)$ de l'axe (Ox), identifier l'expression correcte parmi celles proposées.

(a) $\vec{E}(M) = \vec{0}$ (b) $\vec{E}(M) = E(M)\vec{e_x}$ (c) $\vec{E}(M) = E(M)\vec{e_y}$ (d) $\vec{E}(M) = E(M)\vec{e_z}$

.....

Entraînement 2.10 — Invariances d'une distribution volumique de charge.

La grille infinie représentée ci-dessous est constituée de tiges infinies selon $\vec{e_z}$ et est chargée uniformément négativement.



Soit M un point de l'espace repéré par (x, y, z).

Sachant que les composantes du champ électrique $\vec{E}$ possèdent les mêmes invariances que celles de la distribution de charge, lesquelles de ces expressions sont valides si l'étude des symétries a déjà été menée ?

(a) $\vec{E}(x,y,z) = E_x(y)\vec{e_x} + E_y(y)\vec{e_y}$

(b) $\vec{E}(x,y,z) = E_x(x,y)\vec{e_x} + E_y(x,y)\vec{e_y}$

(c) $\vec{E}(x,y,z) = E_x(x,y) + E_y(x,y)$

(d) $\|\vec{E}\|(x,y,z) = \|\vec{E}\|(x,y,0)$

.....

Entraînement 2.11 — Homogénéités.

Dans les expressions suivantes, ρ, σ et λ sont des densités de charge volumique, surfacique et linéique. Le potentiel électrostatique est noté V, et a, ℓ, h et r sont des longueurs.

a) Parmi les expressions suivantes, identifier celles qui sont homogènes à une charge électrique.

(a) $4\pi a^2\rho$ (b) $\lambda\pi a^2$ (c) $\rho\pi a^2 h$ (d) $\dfrac{\sigma\ell^3}{a}$

.....

b) Parmi les expressions suivantes, identifier celles qui sont homogènes à un champ électrostatique.

(a) $\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ (b) $(V_2 - V_1)e$ (c) $\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ (d) $\dfrac{\rho r}{\varepsilon_0}$

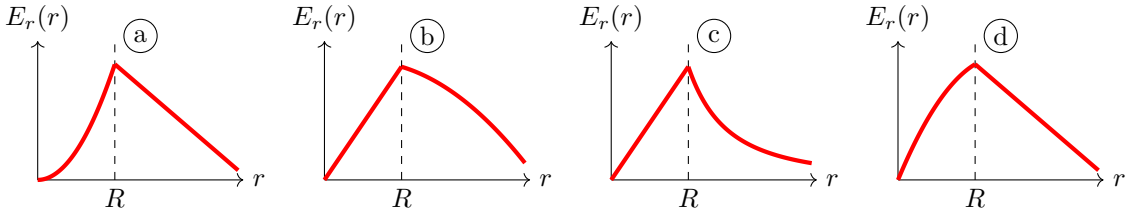
.....

Entraînement 2.12 — Tracé d'une composante du champ.

La composante radiale du champ électrostatique créé au point M par une sphère de centre O, de rayon R, dotée d'une densité volumique de charge ρ_0, est donnée en fonction de la distance $r = \mathrm{OM}$ par

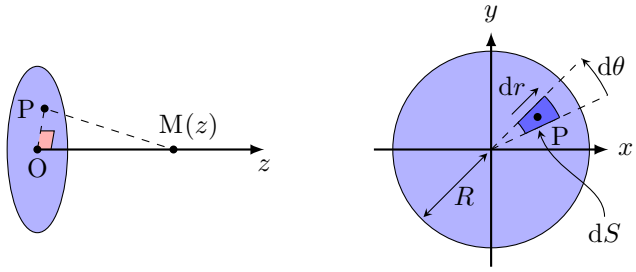
$$E_r(r < R) = \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0} \qquad \text{et} \qquad E_r(r > R) = \frac{3\rho_0 R^3}{\varepsilon_0 r^2}.$$

Laquelle de ces courbes décrit l'évolution de E_r en fonction de r ? .....



Entraînement 2.13 — Calcul d'un champ électrostatique par intégration.

Un disque, d'axe (Oz) et de rayon R, possède une charge surfacique uniforme σ. On note P un point du disque tandis que M est un point de l'espace qui appartient à l'axe (Oz).



a) Comment s'exprime l'aire élémentaire dS centrée sur P(r, θ) ?

(a) $\mathrm{d}S = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z$
(b) $\mathrm{d}S = r\sin(\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$
(c) $\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$
(d) $\mathrm{d}S = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$

b) Quelle est l'expression du produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{PM}} \cdot \vec{e_z}$?

(a) $\overrightarrow{\mathrm{PM}} \cdot \vec{e_z} = \mathrm{PM}$
(b) $\overrightarrow{\mathrm{PM}} \cdot \vec{e_z} = \mathrm{d}z$
(c) $\overrightarrow{\mathrm{PM}} \cdot \vec{e_z} = z$
(d) $\overrightarrow{\mathrm{PM}} \cdot \vec{e_z} = r$

c) Quelle est l'expression de la distance $\mathrm{PM} = \left\|\overrightarrow{\mathrm{PM}}\right\|$?

(a) $\mathrm{PM} = z^2 + r^2$
(b) $\mathrm{PM} = \sqrt{z^2 + r^2}$
(c) $\mathrm{PM} = \sqrt{\mathrm{d}z^2 + \mathrm{d}r^2}$
(d) $\mathrm{PM} = \mathrm{d}r + \mathrm{d}z$

Le principe de superposition énonce que le champ électrostatique en M est la somme des champs électrostatiques créés par chaque élément de surface d'aire dS et de charge $\mathrm{d}Q = \sigma\,\mathrm{d}S$. L'expression du champ créé par une source ponctuelle permet alors d'exprimer la composante axiale $E_z = \vec{E} \cdot \vec{e_z}$ du champ créé par le disque sur l'axe (Oz) par :

$$E_z = \iint_P \frac{\sigma\,\mathrm{d}S}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\overrightarrow{\mathrm{PM}} \cdot \vec{e_z}}{\mathrm{PM}^3} = \int_{r=0}^{r=R} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{\sigma\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0} \frac{z}{(r^2+z^2)^{3/2}}.$$

d) Calculer l'intégrale précédente à l'aide du changement de variable $u = r^2$.

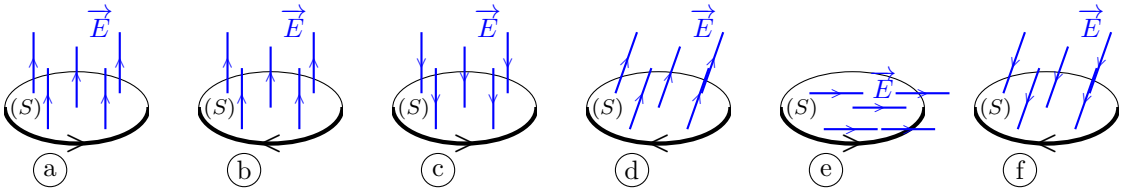
e) Simplifier l'expression obtenue en d) si $z \ll R$ afin de retrouver l'expression du champ créé par un plan infini uniformément chargé.

f) Sachant que $(1+\varepsilon)^\alpha = 1 + \alpha\varepsilon$ à l'ordre 1 en ε quand $\varepsilon \to 0$, simplifier l'expression obtenue en d) si $z \gg R$ afin de retrouver l'expression du champ créé par une charge ponctuelle $Q_0 = \pi R^2 \sigma$.

Flux électrostatique

Entraînement 2.14 — Signe d'un flux électrostatique à travers une surface.

Le flux $\phi = \iint \vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ du champ électrostatique $\vec{E}$ à travers une surface orientée (S) dépend de l'orientation de cette surface (voir ci-dessous la flèche sur chaque contour).



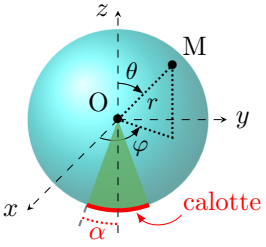
a) Quels sont les cas pour lesquels $\phi > 0$? .....

b) Que vaut ϕ dans le cas e ? .....

Entraînement 2.15 — Flux électrostatique à travers une calotte sphérique.

Une charge ponctuelle q, placée au centre O d'un repère sphérique, crée le champ électrostatique $\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}\vec{e}_r$ avec (r, θ, φ) les coordonnées sphériques du point M.

La calotte sphérique représentée ci-contre (en deux dimensions) est la portion de sphère de rayon R qui intersecte le demi-cône d'axe de révolution $(\mathrm{O}z)$ et de demi-angle $\alpha > 0$.



a) Comment s'exprime un élément de surface $\mathrm{d}S$ de la calotte sphérique ?

a) $\mathrm{d}S = R^2\cos(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$

b) $\mathrm{d}S = R\sin(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$

c) $\mathrm{d}S = R\cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$

d) $\mathrm{d}S = R^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$

.....

b) Comment s'exprime le flux ϕ du champ électrostatique $\vec{E}$ à travers la calotte sphérique ?

a) $\phi = \displaystyle\int_{\varphi=\pi-\alpha}^{\pi+\alpha}\int_{\theta=0}^{2\pi}\vec{E}\cdot R^2\cos(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_r$

b) $\phi = \displaystyle\int_{\varphi=-\alpha}^{\alpha}\int_{\theta=0}^{\pi}\vec{E}\cdot R^2\cos(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_r$

c) $\phi = \displaystyle\int_{\theta=\pi-\alpha}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\vec{E}\cdot R^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{e}_r$

d) $\phi = \displaystyle\int_{\theta=-\alpha}^{\alpha}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\vec{E}\cdot R^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{e}_r$

.....

c) Calculer la double intégrale. Écrire le résultat obtenu sous la forme $\phi = K(1-\cos\alpha)$, avec K une constante à exprimer en fonction de q et ε_0. .....

d) Réaliser l'application numérique de ϕ dans le cas où $\alpha = \pi$ et $q = e$. .....

Entraînement 2.16 — Avec le théorème de Gauss.

Une distribution volumique, de charge volumique inconnue, crée un champ électrostatique dont l'expression en repérage sphérique est $\vec{E}(\mathrm{M}) = E_r\,\vec{e}_r = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2}\left(1+\dfrac{r}{a}\right)\mathrm{e}^{-r/a}\,\vec{e}_r$, où q et a sont des constantes positives.

a) Exprimer le flux électrostatique $\phi(\vec{E})$ à travers une sphère de rayon r en fonction de $E(r)$ et r.

.....

b) Exprimer la charge $Q = \varepsilon_0\phi(\vec{E})$ (théorème de Gauss) située à l'intérieur de la sphère de rayon r.

(a) $\dfrac{q}{\varepsilon_0}\left(1+\dfrac{r}{a}\right)\mathrm{e}^{-r/a}$

(b) $q\left(a+\dfrac{r}{a}\right)\mathrm{e}^{-r/a}$

(c) $q\left(1+\dfrac{r}{a}\right)\mathrm{e}^{-r/a}$

(d) $-q\,\mathrm{e}^{-r/a}$

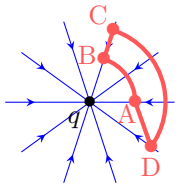
.....

c) Quelles sont les valeurs limites de Q pour $r \to 0$ et $r \to +\infty$? .....

Circulation du champ électrostatique – Potentiel électrostatique

Entraînement 2.17 — Signe d'une circulation électrostatique le long d'un chemin.

Les lignes du champ électrostatique $\vec{E}$ produit par une charge ponctuelle q négative convergent vers cette charge. La circulation $\mathcal{C} = \displaystyle\int \vec{E}\cdot\vec{\mathrm{d}\ell}$ le long d'un chemin orienté dépend de l'orientation de ce chemin.



Pour chaque chemin orienté, indiquer si la circulation $\mathcal{C}$ est positive, négative ou nulle.

a) A→B ... b) B→C ... c) C→D ... d) D→A ..

Entraînement 2.18 — Orientation du champ au sein d'un condensateur plan.

Le schéma ci-dessous représente un condensateur plan dont les armatures sont portées aux potentiels $V_1 = -6\,\mathrm{V}$ et $V_2 = 3\,\mathrm{V}$. Deux surfaces équipotentielles sont représentées par des lignes en tirets.

a) Donner l'orientation du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$.

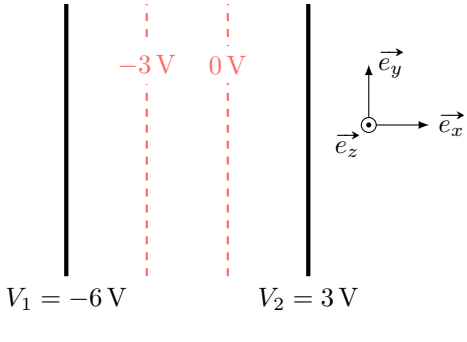
(a) $\vec{e_x}$ (b) $-\vec{e_y}$ (c) $-\vec{e_x}$ (d) $\vec{e_z}$

.....

b) Donner l'orientation du vecteur champ électrostatique $\vec{E}$.

(a) $\vec{e_x}$ (b) $-\vec{e_y}$ (c) $-\vec{e_x}$ (d) $\vec{e_z}$

.....



Entraînement 2.19 — Circulation et différence de potentiel.

Soit un segment orienté allant d'un point A à un point B de coordonnées cartésiennes respectives $(a, 0)$ et $(2a, 2a)$. Le vecteur déplacement élémentaire en repérage cartésien s'exprime comme $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mathrm{d}x\overrightarrow{e_x} + \mathrm{d}y\overrightarrow{e_y}$.

a) Laquelle des relations suivantes est valable le long du segment AB ?

(a) $\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$ (b) $\mathrm{d}y = 2\,\mathrm{d}x$ (c) $\mathrm{d}x = 0$ (d) $\mathrm{d}y = 0$

.....

Soit un champ $\overrightarrow{E} = E_0\left(1 - \mathrm{e}^{-x/a}\right)\overrightarrow{e_x}$, avec $a > 0$.

b) Sachant que le champ électrostatique est orienté dans le sens des potentiels électriques V décroissants, déterminer sans calcul lequel de $V(x = a)$ ou $V(x = 2a)$ est le potentiel le plus élevé .....

c) La circulation électrostatique sur le segment AB est reliée à la différence de potentiel électrique par

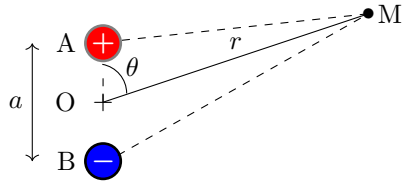
$$V(\mathrm{A}) - V(\mathrm{B}) = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}.$$

Exprimer $V(\mathrm{A}) - V(\mathrm{B})$ en fonction de E_0 et a .....

Entraînement 2.20 — Approximation dipolaire.

Soit un dipôle électrostatique constitué de deux charges ponctuelles opposées $+q$ et $-q$, séparées par une distance $\mathrm{AB} = a$. D'après le principe de superposition, le potentiel créé par ce doublet en un point M s'écrit

$$V(\mathrm{M}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\mathrm{AM}} - \frac{1}{\mathrm{BM}}\right).$$



a) Laquelle de ces propositions donne l'expression de $\mathrm{AM} = \|\overrightarrow{\mathrm{AM}}\|$ au carré en fonction de a et θ ?

(a) $\mathrm{AM}^2 = r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - ar\sin(\theta)$

(b) $\mathrm{AM}^2 = r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + ar\cos(\theta)$

(c) $\mathrm{AM}^2 = r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - ar\cos(\theta)$

.....

On se place dans l'approximation dipolaire, c'est-à-dire loin du doublet de charges : $r \gg a$.

b) Réaliser un développement limité de $1/\mathrm{AM}$ à l'ordre 1 en a/r .....

c) Même question pour $1/\mathrm{BM}$ .....

d) En déduire l'expression du potentiel $V(\mathrm{M})$ dans l'approximation dipolaire.

.....

Entraînement 2.21 — Effet de pointe.

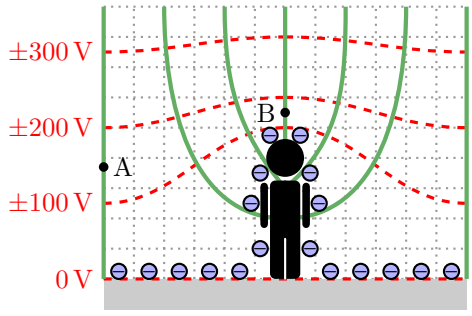
Un individu porte une charge négative, ce qui modifie localement les propriétés du champ électrostatique. La figure ci-dessous représente qualitativement les lignes de champ en trait plein tandis que les (surfaces) équipotentielles sont illustrées en pointillés. L'échelle du schéma est 1 division ↔ 40 cm.

a) Comment sont orientées les lignes de champ électrostatique ?

(a) vers l'individu

(b) sortant de l'individu

.....



b) Quel est le signe des valeurs de potentiel électrostatique des équipotentielles représentées ? .....

c) Évaluer l'ordre de grandeur du champ en A ...

d) Indiquer par une analyse de la carte de champ, et sans aucun calcul, laquelle de ces propositions est vraisemblable :

(a) $\vec{E}(\mathrm{B}) > \vec{E}(\mathrm{A})$

(b) $\|\vec{E}(\mathrm{B})\| > \|\vec{E}(\mathrm{A})\|$

(c) $\vec{E}(\mathrm{B}) = \vec{E}(\mathrm{A})$

(d) $\|\vec{E}(\mathrm{B})\| < \|\vec{E}(\mathrm{A})\|$

.....

Toujours plus d'électrostatique

Entraînement 2.22 — Charge totale et charge moyenne.

La charge totale d'une distribution occupant un volume V s'exprime comme $Q = \iiint_{(V)} \rho \,\mathrm{d}V$ avec ρ la charge volumique et $\mathrm{d}V$ le volume élémentaire dont les expressions en repérages cartésien, cylindrique et sphérique sont respectivement $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, $\mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$ et $\mathrm{d}V = r^2 \sin(\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$.

Déterminer la charge totale et la charge volumique moyenne $\rho_\mathrm{m} = Q/V$ des distributions ci-dessous.

On notera que ρ_0 est une constante homogène à une charge volumique.

a) Un pavé, d'épaisseur $2H$ selon la direction $\vec{e_z}$ $(-H \leqslant z \leqslant +H)$ et de base d'aire $\mathcal{A}$ a une charge volumique $\rho(x, y, z) = \rho_0 \left(1 - \dfrac{z^2}{H^2}\right)$.

.....

b) Un cylindre, de rayon R et de hauteur H, a une charge volumique $\rho(r, \theta, z) = \rho_0 \left(1 - \dfrac{r^2}{R^2}\right)$.

.....

c) L'espace (infini) a une charge volumique $\rho(r, \theta, \varphi) = \rho_0 \dfrac{R^2}{r^2} \exp\left(-\dfrac{r}{R}\right)$ où R est une constante homogène à une distance.

.....

Entraînement 2.23 — Analyse dimensionnelle.

Laquelle de ces expressions n'est pas homogène à un potentiel électrostatique V (ou une tension U) si C est une capacité de condensateur, q une charge électrique, T une température, R la constante des gaz parfaits, $\mathcal{N}_\mathrm{A}$ la constante d'Avogadro, E_z un champ électrostatique et d une distance ?

(a) $U = Cq$ (b) $V = RT/q\mathcal{N}_\mathrm{A}$ (c) $U = E_z d$

.....

Entraînement 2.24 — Calcul de divergence de champ électrostatique.

Le champ électrostatique et sa divergence en repérage cylindrique sont respectivement

$$\vec{E} = E_r\vec{e_r} + E_\theta\vec{e_\theta} + E_z\vec{e_z} \quad \text{et} \quad \operatorname{div}\vec{E} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rE_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\,.$$

Exprimer la divergence du champ $\overrightarrow{E_1} = \dfrac{\alpha}{r}\vec{e_r}$ avec α une constante .....

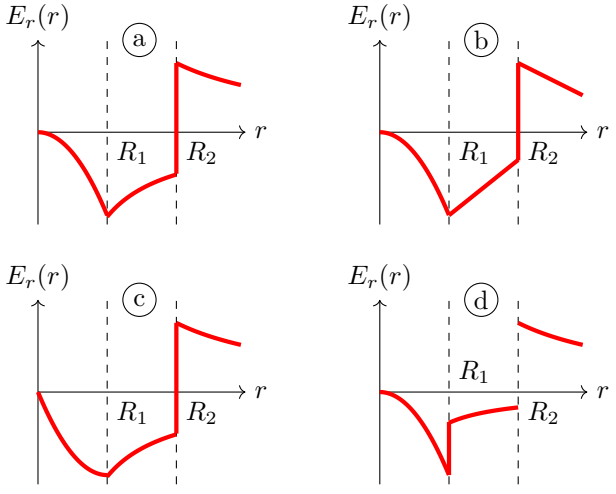
Entraînement 2.25 — Tracé d'une composante du champ – *Bis repetita.*

Une distribution de charge à symétrie cylindrique, d'axe $(\mathrm{O}z)$, de rayons caractéristiques R_1 et R_2, produit en un point de coordonnée radiale r un champ électrostatique de composante radiale donnée par

$$\begin{cases} E_r(r < R_1) = -\dfrac{\alpha r^2}{3\varepsilon_0} \\ E_r(R_1 < r < R_2) = -\dfrac{\alpha R_1^3}{3\varepsilon_0 r} \\ E_r(r > R_2) = \dfrac{1}{\varepsilon_0 r}\left(-\dfrac{\alpha R_1^3}{3} + \sigma R_2\right), \end{cases}$$

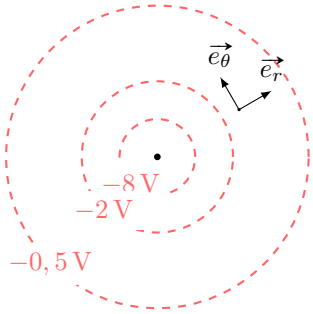
avec α et σ deux constantes positives.

Laquelle de ces courbes décrit l'évolution de E_r en fonction de r ? .....



Entraînement 2.26 — Orientation du champ créé par une charge ponctuelle.

Sur le schéma ci-contre, on trouve 3 surfaces équipotentielles générées par une charge ponctuelle placée au centre.



a) Donner l'orientation du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$.

(a) $\vec{e_\theta}$ (b) $-\vec{e_r}$ (c) $-\vec{e_\theta}$ (d) $\vec{e_r}$

.....

b) Donner l'orientation du vecteur champ électrostatique $\vec{E}$.

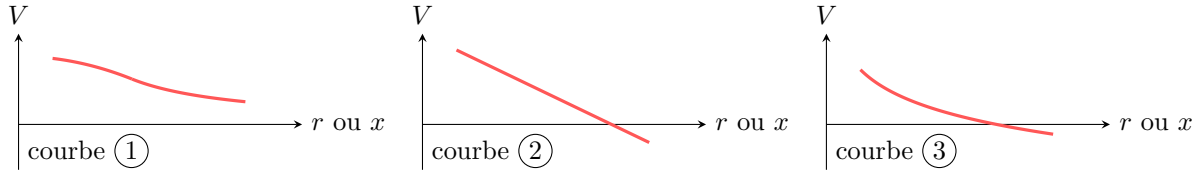
(a) $\vec{e_\theta}$ (b) $-\vec{e_r}$ (c) $-\vec{e_\theta}$ (d) $\vec{e_r}$

.....

Entraînement 2.27 — Un potentiel, une courbe.

Les expressions des potentiels électrostatiques V_a, V_b et V_c données ci-après rendent compte de situations physiques volontairement non détaillées ici. Les fonctions V_a, V_b et V_c sont définies pour des valeurs de r strictement positives. Enfin, λ, σ et ρ sont des constantes positives.

$$V_\mathrm{a}(r) = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \quad , \quad V_\mathrm{b}(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho}{6\varepsilon_0}(3R^2 - r^2) & \text{si } r \leqslant R \\ \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\dfrac{R^3}{r} & \text{si } r \geqslant R \end{cases} \quad \text{et} \quad V_\mathrm{c}(x) = V_0 - \frac{\sigma}{\varepsilon_0}x.$$



Attribuer à chaque potentiel électrostatique une courbe.

a) V_a ..... b) V_b ..... c) V_c .....

Entraînement 2.28 — Énergie électrostatique au sein d'un condensateur.

Soit un condensateur sphérique dont l'armature interne est une sphère de rayon R et l'armature externe une sphère de rayon $R+h$. Le champ électrostatique entre les deux armatures est $\vec{E} = -\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e_r}$, avec $-Q$ la charge portée par l'armature interne.

L'énergie électrostatique stockée entre les armatures du condensateur est

$$\mathcal{E} = \int_{r=R}^{R+h}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{\varepsilon_0\vec{E}^2}{2}r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi.$$

Exprimer $\mathcal{E}$ en fonction de R, h, Q et ε_0 .....

Réponses mélangées

$V(a)$ $\quad +1\,000 \times e$ $\quad \pi R^2$ $\quad$ b $\quad 2\pi R$ $\quad$ d $\quad 1{,}8 \times 10^{-8}\,\mathrm{V \cdot m}$

$Q = 4\rho_0 \mathcal{A} H/3,\ \rho_\mathrm{m} = 2\rho_0/3$ $\quad$ b et c $\quad \overrightarrow{e_z}$ $\quad Q = \rho_0 \pi R^2 H/2,\ \rho_\mathrm{m} = \rho_0/2$ $\quad$ positif

a et d $\quad$ c $\quad 1 \times 10^2\,\mathrm{V \cdot m^{-1}}$ $\quad \lambda_0 \ell$ $\quad$ a et f $\quad$ b $\quad$ c $\quad$ a $\quad$ c

d $\quad$ b $\quad$ b $\quad r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ $\quad$ a $\quad$ Courbe 1 $\quad \dfrac{1}{r}\left(1 - \dfrac{a\cos(\theta)}{2r}\right)$ $\quad$ b

$\dfrac{qa\cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ $\quad$ d $\quad$ c $\quad$ c $\quad$ d $\quad$ c et d $\quad$ a $\quad \dfrac{1}{r}\left(1 + \dfrac{a\cos(\theta)}{2r}\right)$

$\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ $\quad$ Courbe 3 $\quad 4\pi r^2 E(r)$ $\quad -2\overrightarrow{e_x} + 8\overrightarrow{e_y}$ $\quad \dfrac{4}{3}\pi R^3$ $\quad$ a $\quad E_0 a(1 + \mathrm{e}^{-2} - \mathrm{e}^{-1})$

0 $\quad \dfrac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\dfrac{h}{R(R+h)}$ $\quad 2{,}57 \times 10^{-15}\,\mathrm{C \cdot m^{-2}}$ $\quad 7{,}9 \times 10^{-1}\,\mathrm{m^2}$ $\quad Q = \rho_0 4\pi R^3,\ \rho_\mathrm{m} = 0$

0 $\quad$ d $\quad$ nulle $\quad$ positive $\quad 0$ $\quad$ c $\quad$ Courbe 2 $\quad \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \sqrt{\dfrac{z^2}{z^2 + R^2}}\right)$

négative $\quad (\mathrm{O}, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_z})$ et $(\mathrm{O}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ $\quad 3{,}3 \times 10^{-9}\,\mathrm{C}$ $\quad$ b et c $\quad$ c $\quad \overrightarrow{e_y}$

$6{,}5 \times 10^{-2}\,\mathrm{m^3}$ $\quad \dfrac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 z^2}$ $\quad$ b et d $\quad (\mathrm{O}, \overrightarrow{e_x} + \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}),\ (\mathrm{O}, \overrightarrow{e_x} - \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ et $(\mathrm{O}, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$ $\quad$ b $\quad 5\overrightarrow{e_y}$

$\underbrace{\dfrac{q}{2\varepsilon_0}}_{K}(1 - \cos\alpha)$ $\quad 6 \times 10^{-6}\,\mathrm{C}$ $\quad R\,\mathrm{d}\theta$ $\quad$ b $\quad q$ et 0 $\quad$ nulle $\quad L \times \ell$ $\quad 2\pi^2 q_0$

► Réponses et corrigés page 149

Magnétostatique

Prérequis
Repérages cartésien, cylindrique et sphérique. Intégrales curvilignes, de surface et de volume. Champs scalaire et vectoriel. Théorème d'Ampère.

Constantes utiles

→ Charge électrique élémentaire : $e = 1{,}602 \times 10^{-19}$ C

→ Masse de l'électron : $m_e = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg

→ Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{H \cdot m^{-1}}$

Distributions de courant et densités de courant

Entraînement 3.1 — Dimension de densités de courant.

La dimension d'une intensité électrique est notée I, celle d'un temps T, et celle d'une longueur L.

a) On note $\vec{j}$ une densité volumique de courant, $\vec{j_s}$ une densité surfacique de courant et I l'intensité d'un courant. Quelles sont les relations correctes ?

(a) $I = \iint \vec{j} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$ (b) $\vec{j} = \iint I \overrightarrow{\mathrm{d}S}$ (c) $I = \iiint \vec{j} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}V}$ (d) $I = \int \vec{j_s} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$

b) Comment s'écrit la dimension de la norme d'une densité volumique de courant $\vec{j}$?

(a) $\mathrm{I \cdot L^{-3}}$ (b) $\mathrm{I \cdot T \cdot L^{-2}}$ (c) $\mathrm{I \cdot T \cdot L^{-3}}$ (d) $\mathrm{I \cdot L^{-2}}$

c) Comment s'écrit la dimension de la norme d'une densité surfacique de courant $\vec{j_s}$?

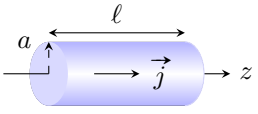
(a) $\mathrm{I \cdot L^{-1}}$ (b) $\mathrm{I \cdot T \cdot L^{-1}}$ (c) $\mathrm{I \cdot L^{2}}$ (d) $\mathrm{I \cdot L^{-2}}$

Entraînement 3.2 — Densité volumique de courant en coordonnées cylindriques.

Soit un conducteur cylindrique (rayon a et longueur ℓ) d'axe (Oz) parcouru par un courant d'intensité

$$I = \iint \vec{j} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S},$$

où $\vec{j} = j_0 \dfrac{b}{r} \vec{e_z}$ est le vecteur densité volumique de courant, avec j_0 et b constants, et $\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \mathrm{d}S\vec{e_z}$ un élément de section orientée.

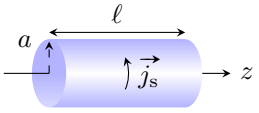


Exprimer I en fonction de la section S du conducteur, du rayon a et des constantes j_0 et b.

Entraînement 3.3 — Densité surfacique de courant en coordonnées cylindriques.

Soit un conducteur cylindrique (rayon a et longueur ℓ) d'axe (Oz) parcouru par un courant d'intensité

$$I = \int \vec{j_s} \cdot \vec{\mathrm{d}\ell},$$



où $\vec{j_s} = j_{s,0}\vec{e_\theta}$ est un vecteur densité surfacique de courant constant et où $\vec{\mathrm{d}\ell} = \mathrm{d}z\vec{e_\theta}$ un élément de longueur orientée.

Exprimer I en fonction de la longueur ℓ du conducteur et de la constante $j_{s,0}$.

.....

Symétries et invariances

Entraînement 3.4 — Vent solaire.

Le vent solaire est un flux de particules chargées, majoritairement constitué de protons et de noyaux d'hélium. Le Soleil est considéré comme ponctuel et placé à l'origine O d'un repère sphérique. En première approximation, le vent solaire est assimilé à un courant de particules radial et stationnaire.

a) Si l'émission est isotrope, quelle est l'expression simplifiée du vecteur densité de courant en M(r, θ, φ) ?

(a) $\vec{j}(\mathrm{M}) = j_r(r,\theta)\vec{e_\theta}$

(b) $\vec{j}(\mathrm{M}) = j_\theta(r)\vec{e_\theta}$

(c) $\vec{j}(\mathrm{M}) = j_r(r,\theta)\vec{e_r}$

(d) $\vec{j}(\mathrm{M}) = j_r(r)\vec{e_r}$

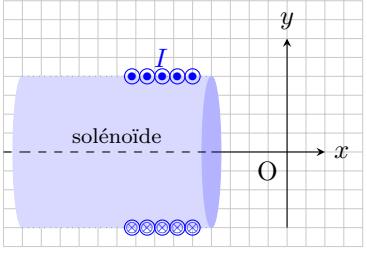
.....

b) Exprimer alors l'intensité I_R du courant électrique traversant une sphère de rayon R.

.....

Entraînement 3.5 — Propriétés de symétrie d'une distribution de courant (I).

Soit un solénoïde d'axe (Ox), parcouru par un courant stationnaire d'intensité I.



On rappelle qu'un plan de symétrie (resp. antisymétrie) d'une distribution de courant est un plan pour lequel, de part et d'autre de celui-ci, les courants de la distribution sont répartis de manière strictement identique (resp. opposée).

Parmi les propositions ci-dessous, quelles sont celles qui sont correctes ?

(a) Le plan (xOy) est un plan de symétrie de la distribution.

(b) Le plan (xOy) est un plan d'antisymétrie de la distribution même si le solénoïde n'est pas infiniment long.

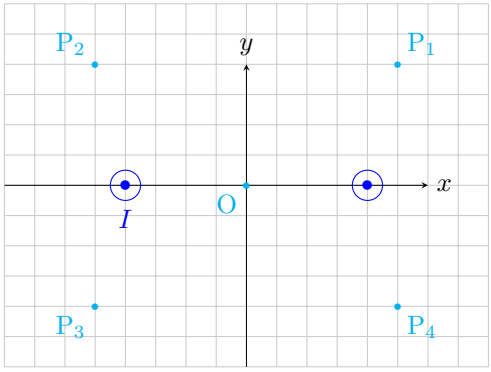
(c) Le plan (xOz) est un plan d'antisymétrie de la distribution.

(d) Le plan (xOz) est un plan de symétrie de la distribution seulement si le solénoïde est infiniment long.

.....

Entraînement 3.6 — Propriétés de symétrie d'une distribution de courant (II).

On considère la situation suivante, où deux fils infinis sont parcourus par des courants de même intensité I et de même sens (de l'arrière vers l'avant).



On rappelle qu'en tout point d'un plan de symétrie (respectivement d'antisymétrie) de la distribution, le champ magnétostatique est perpendiculaire (respectivement appartient) à ce plan.

a) Le plan $(x\mathrm{O}y)$ est un plan d'antisymétrie pour la distribution.

Quelles sont les propositions correctes ?

(a) Le vecteur $\vec{e_z}$ est normal à ce plan.

(b) Au point O, le champ $\vec{B}$ est selon $\pm\vec{e_z}$.

(c) Au point P_1, le champ $\vec{B}$ appartient à ce plan.

(d) Au point P_3, le champ $\vec{B}$ appartient à ce plan.

.....

b) Le plan $(y\mathrm{O}z)$ est un plan de symétrie pour la distribution.

Quelles sont les propositions incorrectes ?

(a) Le vecteur $\vec{e_x}$ est normal à ce plan.

(b) $\vec{B}(\mathrm{P}_4) = B_y(\mathrm{P}_4)\vec{e_y} + B_z(\mathrm{P}_4)\vec{e_z}$

(c) Au point P_2, le champ $\vec{B}$ est selon $\pm\vec{e_y}$.

(d) $\vec{B}(\mathrm{O}) = B(\mathrm{O})\vec{e_z}$

.....

c) Quelles sont les propositions incomplètes ou incorrectes ?

(a) Le plan $(x\mathrm{O}z)$ est un plan d'antisymétrie pour la distribution.

(b) $\vec{B}(\mathrm{O}) = \vec{0}$

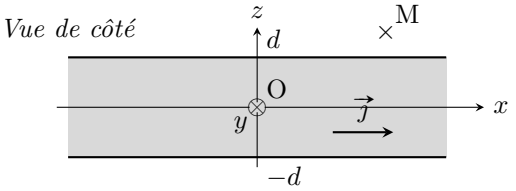
(c) Le champ $\vec{B}$ est toujours perpendiculaire au plan $(x\mathrm{O}z)$.

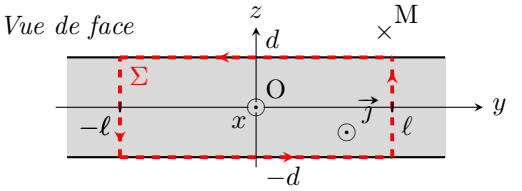
(d) $\vec{B}(\mathrm{P}_2) = -\vec{B}(\mathrm{P}_1)$

.....

Entraînement 3.7 — Couche épaisse infinie parcourue par un courant.

Soit une couche infinie suivant les axes (Ox) et (Oy), située entre les plans d'équations $z = d$ et $z = -d$, parcourue par un courant de densité volumique uniforme $\vec{j} = j_0\vec{e_x}$.





a) Exprimer l'intensité I du courant qui traverse la surface Σ orientée suivant $\vec{e_x}$ ...

b) Quelles sont les invariances de cette distribution de courant ?

(a) invariance par translation parallèlement à l'axe (Ox)

(b) invariance par rotation autour de l'axe (Oz)

(c) invariance par translation parallèlement à l'axe (Oy)

(d) aucune invariance

.....

c) Le champ magnétostatique au point M est suivant le vecteur $\vec{e_y}$.

Sachant que les composantes du champ magnétostatique possèdent les mêmes invariances que la distribution, déterminer l'expression correcte.

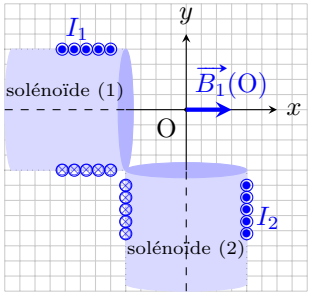
(a) $\vec{B}(M) = B_y(y)\vec{e_y}$ (b) $\vec{B}(M) = B_y(z)\vec{e_y}$ (c) $\vec{B}(M) = B_y(y,z)\vec{e_y}$

.....

Champs magnétostatiques

Entraînement 3.8 — Théorème de superposition.

Deux solénoïdes longs, parcourus par des courants stationnaires d'intensités I_1 et I_2, sont positionnés perpendiculairement entre eux et à égale distance d'un point O. En ce point, le champ magnétostatique produit par le solénoïde (1) est supposé s'écrire $\vec{B_1}(\mathrm{O}) = \mu_0 n_1 I_1 \vec{e_x}$, avec n_1 le nombre de spires par unité de longueur du solénoïde (1).



a) Par analogie avec l'expression fournie pour le solénoïde (1), écrire le champ magnétostatique produit par le solénoïde (2) au point O.

.....

b) D'après le théorème de superposition, comment s'écrit alors le champ total produit au point O ?

(a) $\vec{B}(\mathrm{O}) = \mu_0(n_1 I_1 + n_2 I_2)\vec{e_z}$

(b) $\vec{B}(\mathrm{O}) = \mu_0(n_1 I_1 - n_2 I_2)\vec{e_z}$

(c) $\vec{B}(\mathrm{O}) = \mu_0(n_1 I_1 - n_2 I_2)(\vec{e_x} + \vec{e_y})$

(d) $\vec{B}(\mathrm{O}) = \mu_0(n_1 I_1 \vec{e_x} - n_2 I_2 \vec{e_y})$

.....

Entraînement 3.9 — Analyse dimensionnelle et champ magnétique.

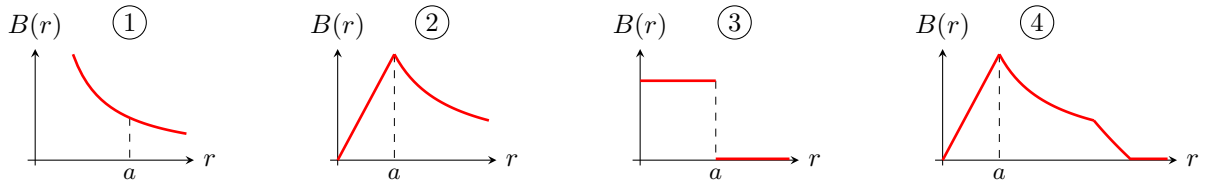
Sachant que la force magnétique s'exprime comme $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$, avec $\vec{v}$ une vitesse, q une charge électrique et $\vec{B}$ un champ magnétique, déterminer laquelle des expressions ci-dessous est homogène à la norme B d'un champ magnétique si m est une masse et R un rayon.

(a) $\dfrac{qv}{mR}$ (b) $\dfrac{mR}{qv}$ (c) $\dfrac{qR}{mv}$ (d) $\dfrac{mv}{qR}$

.....

Entraînement 3.10 — Graphes et expressions d'un champ magnétique.

On donne les graphes associés aux champs magnétiques créés par divers dispositifs, chacun étant parcouru par un courant d'intensité I.



Le champ magnétique d'un conducteur cylindrique de rayon a parcouru par un courant volumique uniforme est donné par

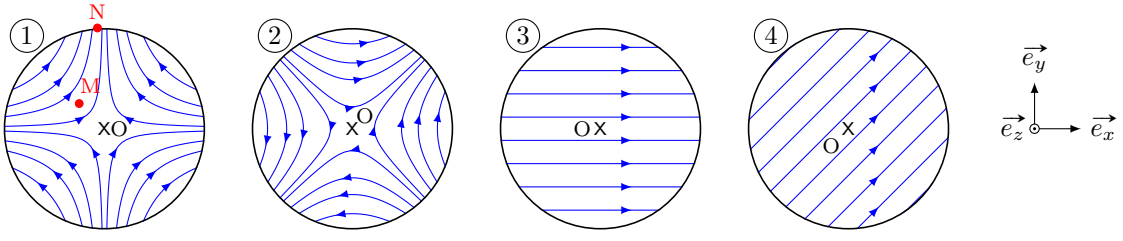
$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \text{ pour } 0 < r < a \qquad \text{et} \qquad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \text{ pour } r > a.$$

Quel graphe correspond au champ magnétique créé par ce conducteur cylindrique ? .....

Entraînement 3.11 — Champ magnétostatique quadrupolaire.

En repérage cartésien et dans le plan d'équation $z = 0$, les composantes du champ magnétostatique créé par un quadrupôle sont $B_x = ky$, $B_y = kx$ et $B_z = 0$, avec k une constante non nulle.

a) Quelle carte de champ correspond à l'expression du champ donnée ci-dessus ? .....



b) En ce qui concerne la carte de champ (1), quelle est la proposition valide ?

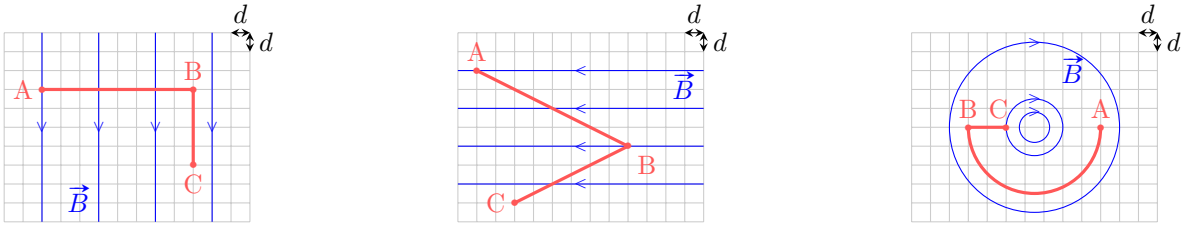
(a) $\vec{B}(\mathrm{M}) = \vec{B}(\mathrm{N})$ (b) $B(\mathrm{M}) < B(\mathrm{N})$ (c) $B(\mathrm{M}) > B(\mathrm{N})$

.....

Circulation et flux magnétostatiques

Entraînement 3.12 — Circulation d'un champ magnétostatique sur un chemin.

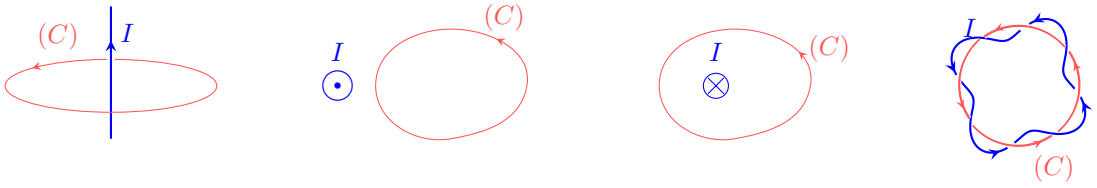
La circulation $\mathcal{C} = \int_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot \vec{\mathrm{d}\ell}$ du champ magnétostatique $\vec{B}$ le long d'un chemin orienté (Γ) dépend de l'orientation de ce chemin. Pour chaque cas, exprimer $\mathcal{C}$ le long du chemin $\overset{\frown}{\mathrm{ABC}}$ en fonction du pas d du quadrillage. Sur chaque ligne de champ, la norme B du champ est supposée uniforme.



a) ..... b) ..... c) .....

Entraînement 3.13 — Courants enlacés.

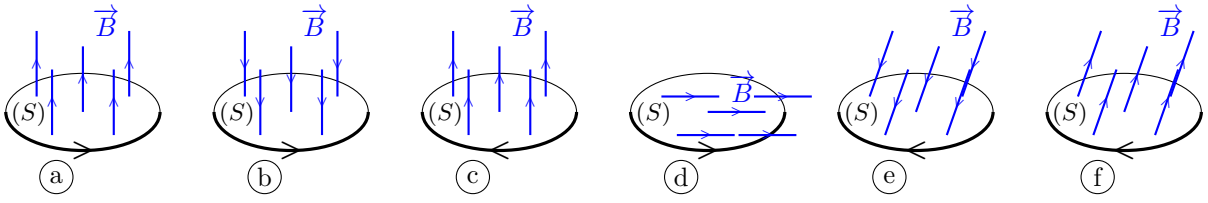
Pour chaque cas, exprimer l'intensité I_{enl} des courants enlacés par le contour (C) en fonction de l'intensité du courant I. Attention aux signes !



a) ..... b) ..... c) ..... d) .....

Entraînement 3.14 — Signe d'un flux magnétostatique à travers une surface.

On sait que le flux $\phi = \iint \vec{B} \cdot \vec{\mathrm{d}S}$ du champ magnétostatique $\vec{B}$ à travers une surface orientée (S) dépend de l'orientation de cette surface (voir ci-dessous la flèche sur chaque contour).

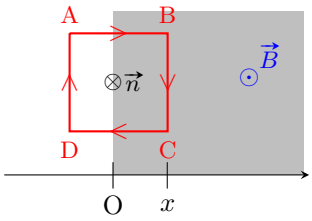


a) Quels sont les cas pour lesquels $\phi > 0$? .....

b) Que vaut ϕ dans le cas d ? .....

Entraînement 3.15 — Flux à travers une spire carrée.

Soit une spire carrée de côté a, orientée dans le sens ABCD. On note x l'abscisse du côté BC. Dans le demi-espace tel que $x \geqslant 0$, règne un champ magnétostatique $\vec{B}$ uniforme perpendiculaire au plan de la spire.



Exprimer le flux magnétostatique à travers la spire orientée, de normale $\vec{n}$, défini par $\phi(\vec{B}) = \iint \vec{B} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}S$.

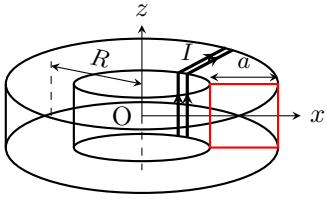
a) Pour $x < 0$ ...

b) Pour $x \in [0, a]$

c) Pour $x > a$ ...

Entraînement 3.16 — Théorème d'Ampère et flux d'un champ non uniforme.

Un fil conducteur est bobiné en N spires jointives sur un tore circulaire de rayon moyen R à section carrée de côté a. La normale de chaque spire est orientée suivant le vecteur $\vec{e_\theta}$ de la base cylindrique. L'intensité du courant parcourant la bobine est notée I.



Le champ magnétostatique créé par cette bobine à l'intérieur du tore s'écrit : $\vec{B} = B(r)\vec{e_\theta}$.

a) Soit un cercle de centre O, de rayon $R - \dfrac{a}{2} < r < R + \dfrac{a}{2}$ et orienté suivant le vecteur $\vec{e_\theta}$. Quelle est l'intensité du courant enlacé par ce cercle ?

(a) I (b) NI (c) $\dfrac{a}{R}I$ (d) $\dfrac{a}{R}NI$

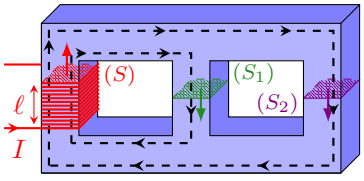
.....

b) Le théorème d'Ampère s'écrit : $\oint \vec{B} \cdot \vec{\mathrm{d}l} = \mu_0 I_{\text{enl}}$, avec I_{enl} l'intensité du courant enlacé par le contour fermé choisi. En déduire l'expression de la composante $B(r)$ du champ .....

c) Exprimer le flux $\phi(\vec{B}) = \iint \vec{B} \cdot \mathrm{d}S\vec{e_\theta}$ à travers la surface d'une spire .....

Entraînement 3.17 — Flux magnétostatique au sein d'un circuit magnétique.

Dans le circuit magnétique représenté ci-contre, de perméabilité relative $\mu_\mathrm{r} = 4\,000$, chaque colonne possède une section carrée de côté $a = 20\,\mathrm{cm}$. Celle de gauche est bobinée, formant un solénoïde de $N = 1\,000$ spires jointives et de longueur $\ell = 10\,\mathrm{cm}$.



Le circuit est alimenté par un courant d'intensité $I = 200\,\mathrm{mA}$. Le champ magnétostatique produit est guidé dans le circuit selon les lignes fléchées en tirets et a pour intensité $B = \mu_0 \mu_\mathrm{r} N I / \ell$.

a) Calculer avec un chiffre significatif la valeur du champ magnétostatique au sein du solénoïde.

.....

b) Le flux magnétostatique à travers (S) s'exprime comme $\phi = NBS$. Calculer ϕ .....

c) Sachant que le flux ϕ_2 traversant (S_2) vérifie $4\phi_2 = \phi$, calculer le flux ϕ_1 traversant (S_1) .

Dipôle magnétostatique

Entraînement 3.18 — Spire circulaire et développement dipolaire.

Le champ magnétostatique créé en un point $\mathrm{M}(0,0,z)$ par un courant d'intensité I parcourant une spire de rayon R et d'axe $(\mathrm{O}z)$ est $\vec{B}(\mathrm{M}) = \dfrac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+z^2)^{3/2}}\vec{e_z}$.

a) Quel est le moment magnétique associé à cette source de champ magnétostatique ?

(a) $\vec{\mathcal{M}} = \pi R^2 I$ (b) $\vec{\mathcal{M}} = \mu_0 \pi R^2 I \vec{e_z}$ (c) $\vec{\mathcal{M}} = \pi R^2 I \vec{e_z}$

.....

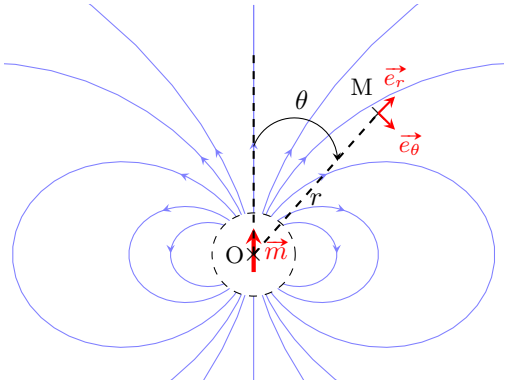
b) Simplifier l'expression du champ magnétostatique dans l'approximation dipolaire $z \gg R$.

.....

Entraînement 3.19 — Champ créé par un dipôle.

La carte de champ d'un dipôle magnétique de centre O et de moment magnétique $\vec{m}$ est représentée ci-contre. Le champ magnétostatique est noté $\vec{B}$.

En s'aidant de la carte fournie et en étudiant la situation pour certains angles particuliers, identifier l'expression correcte de $\vec{B}$ en un point M quelconque loin du dipôle.



(a) $\vec{B}(M) = \dfrac{\mu_0 m}{4\pi r^3}(2\sin(\theta)\vec{e_r} - \cos(\theta)\vec{e_\theta})$

(b) $\vec{B}(M) = \dfrac{\mu_0 m}{4\pi r^3}(2\sin(\theta)\vec{e_r} + \cos(\theta)\vec{e_\theta})$

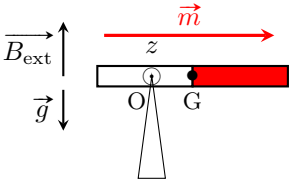
(c) $\vec{B}(\mathrm{M}) = \dfrac{\mu_0 m}{4\pi r^3}(2\cos(\theta)\vec{e_r} - \sin(\theta)\vec{e_\theta})$

(d) $\vec{B}(\mathrm{M}) = \dfrac{\mu_0 m}{4\pi r^3}(2\cos(\theta)\vec{e_r} + \sin(\theta)\vec{e_\theta})$

.....

Entraînement 3.20 — Équilibre d'un aimant.

Un aimant très fin, de moment magnétique $\vec{m}$, est posé sur une pointe en un point O différent de son centre de gravité G. L'ensemble est plongé dans un champ magnétostatique $\overrightarrow{B_{\text{ext}}}$ vertical uniforme. L'aimant subit le couple magnétique de moment $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \overrightarrow{B_{\text{ext}}}$. À l'équilibre, il est à l'horizontale.



a) Exprimer la projection du moment $\vec{\Gamma}$ suivant l'axe $(\mathrm{O}z)$ .....

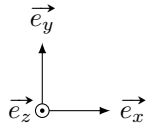
b) Le moment du poids par rapport à l'axe $(\mathrm{O}z)$ s'écrit $-dMg$, avec M la masse de l'aimant et $d = \mathrm{OG}$. En supposant qu'il n'y a pas d'autre moment, exprimer la distance d à l'équilibre.

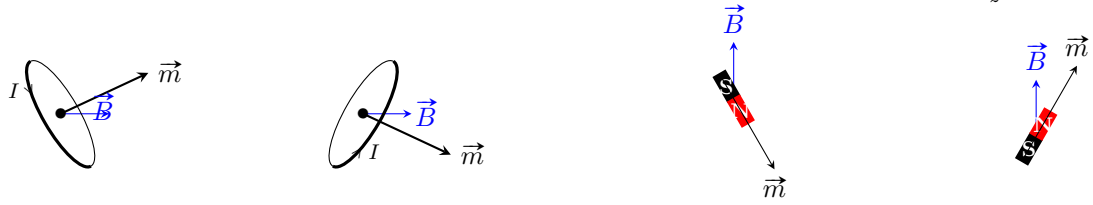
.....

Entraînement 3.21 — Moment de force magnétique.

On rappelle qu'un dipôle de moment magnétique $\vec{m}$, baignant dans un champ magnétostatique extérieur uniforme $\vec{B}$, subit des forces magnétiques de moment $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$.

Pour chaque situation suivante (boucle de courant ou aimant droit), les vecteurs $\vec{m}$ et $\vec{B}$ sont dans le plan (Oxy). Indiquer la direction et le sens du moment $\vec{\Gamma}$.





a) ..... b) ..... c) ..... d) .....

Entraînement 3.22 — Force exercée sur un dipôle.

Un dipôle de moment magnétique $\vec{m}$ dans un champ magnétostatique $\overrightarrow{B_{\text{ext}}}$ non uniforme subit la force $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_{\text{p}})$, avec $E_{\text{p}} = -\vec{m} \cdot \overrightarrow{B_{\text{ext}}}$. En coordonnées cylindriques, on a $\overrightarrow{\text{grad}}(f(r)) = \dfrac{\text{d}f}{\text{d}r}\vec{e_r}$.

a) Déterminer l'expression de $\vec{F}$ pour un dipôle qui serait de même direction et de même sens qu'un champ d'expression $\overrightarrow{B_{\text{ext}}} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e_\theta}$ (fil rectiligne infini d'axe (Oz)).

.....

b) Vers quelles zones le dipôle est-il alors attiré ?

(a) celles de champ plus faible (b) celles de champ plus intense

.....

Toujours plus de magnétostatique

Entraînement 3.23 — Encore une analyse dimensionnelle (I).

Quelle expression est homogène à la norme B d'un champ magnétique si I est une intensité électrique, μ_0 la perméabilité magnétique du vide et R un rayon ?

(a) $\dfrac{I}{2\pi R}$ (b) $\dfrac{2\pi R\mu_0}{I}$ (c) $\dfrac{\mu_0 I}{2\pi R}$ (d) $\dfrac{2\pi\mu_0}{IR}$

.....

Entraînement 3.24 — Encore une analyse dimensionnelle (II).

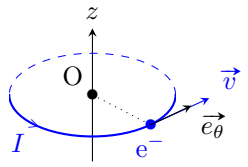
Quelle expression est homogène à une norme B de champ magnétique si I est une intensité électrique, N un nombre de spires, S une surface et L une inductance ?

(a) $B = \dfrac{LI}{NS}$ (b) $B = \dfrac{LS}{NI}$ (c) $B = \dfrac{NS}{LI}$ (d) $B = \dfrac{NL}{IS}$

.....

Entraînement 3.25 — Moment magnétique élémentaire : magnéton de Bohr.

Dans le cadre du modèle classique de Bohr, l'électron (charge $-e$, masse m_e) de l'atome d'hydrogène décrit un cercle (rayon r, période de révolution T) centré sur le noyau atomique (origine O du repère). L'orbite est supposée dans le plan $z = 0$. Le vecteur vitesse $\vec{v}$ indique le sens de rotation de l'électron. La constante de Planck est $h = 6{,}63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$.



a) En considérant que l'électron définit une boucle de courant circulaire (une spire), comment s'exprime l'intensité I correspondante (voir schéma pour l'orientation) ?

(a) $I = eT$ (b) $I = e/T$ (c) $I = -eT$ (d) $I = -e/T$

b) De loin, le système est équivalent à un dipôle magnétique de moment magnétique $\vec{m} = I\vec{S}$, avec $\vec{S}$ le vecteur surface de la spire. Donner l'expression de $\vec{m}$ en fonction de e, T, r et $\vec{e_z}$.

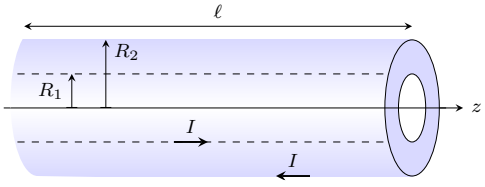
c) Le moment cinétique de l'électron par rapport au noyau (point O) est $\vec{\sigma} = \dfrac{2m_e}{T}\vec{S}$. Montrer alors que $\vec{m} = \gamma\vec{\sigma}$, avec γ le rapport gyromagnétique de l'électron à exprimer en fonction de e et m_e.

d) La quantification du moment cinétique $\|\vec{\sigma}\| = n\hbar$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$, conduit à définir un moment magnétique élémentaire μ_B (magnéton de Bohr). Indiquer alors la ou les propositions correctes.

(a) $\mu_B = \hbar\gamma$ (b) $\mu_B = \dfrac{e\hbar}{2m_e}$ (c) $\mu_B = 9{,}28 \times 10^{-24}\,\mathrm{N \cdot m}$

Entraînement 3.26 — Énergie magnétique d'un câble coaxial.

Un cylindre long et creux de rayon R_1 est parcouru en surface par un courant d'intensité I. Ce courant « revient » par un cylindre de rayon $R_2 > R_1$, coaxial au premier et d'épaisseur négligeable. Cet ensemble forme un câble coaxial de longueur ℓ et d'axe (Oz).



Le champ magnétostatique produit est, en coordonnées cylindriques :

$$\vec{B} = \begin{cases} \vec{0} & \text{pour } r < R_1 \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e_\theta} & \text{pour } R_1 \leqslant r \leqslant R_2 \\ \vec{0} & \text{pour } r > R_2 \end{cases}$$

a) Exprimer le flux propre Φ_p, c'est-à-dire le flux du champ magnétostatique à travers une tranche du câble de surface $S = \ell R_2$, en fonction de I, ℓ, R_1 et R_2.

.....

b) En déduire l'expression de l'inductance propre par unité de longueur $\Lambda = \dfrac{L}{\ell} = \dfrac{\Phi_\mathrm{p}}{\ell I}$ du câble en fonction de R_1 et R_2.

.....

On rappelle que la densité volumique d'énergie magnétique a pour expression $w_\mathrm{m} = \dfrac{B^2}{2\mu_0}$ et que l'énergie magnétique s'exprime alors comme $W_\mathrm{m} = \iiint w_\mathrm{m}\,\mathrm{d}\tau$.

c) Déterminer l'expression de l'énergie magnétique W_m correspondant à une portion de longueur ℓ du câble ainsi formé en fonction de I, ℓ, R_1 et R_2.

.....

d) En déduire l'expression de l'inductance propre par unité de longueur $\Lambda = \dfrac{L}{\ell} = \dfrac{2W_\mathrm{m}}{\ell I^2}$ du câble en fonction de R_1 et R_2.

.....

Réponses mélangées

1×10^1 T $\quad +\vec{e_z}$ $\quad$ b $\quad$ b $\quad$ b $\quad$ a et d $\quad \dfrac{\mu_0 N I a}{2\pi} \ln\left(\dfrac{R + a/2}{R - a/2}\right)$

$+\vec{e_z}$ $\quad 4\pi R^2 j_r(R)$ $\quad$ a et e $\quad$ d $\quad$ a $\quad -Ba^2$ $\quad -Bax$ $\quad 3 \times 10^2$ Wb

4×10^2 Wb $\quad$ b $\quad$ c $\quad mB_\mathrm{ext}$ $\quad$ b et c $\quad j_{\mathrm{s},0}\ell$ $\quad -\dfrac{e}{2m_\mathrm{e}}$ $\quad -\dfrac{e}{T}\underbrace{\pi r^2 \vec{e_z}}_{\vec{S}}$

I $\quad 4d\ell j_0$ $\quad$ d $\quad 4Bd$ $\quad$ d $\quad -I$ $\quad -\vec{e_z}$ $\quad$ a et c $\quad -2Bd$ $\quad \dfrac{\mu_0}{2\pi} \ln \dfrac{R_2}{R_1}$

2 $\quad -\mu_0 n_2 I_2 \vec{e_y}$ $\quad \dfrac{\mu_0 I \ell}{2\pi} \ln \dfrac{R_2}{R_1}$ $\quad \dfrac{\mu_0 I^2 \ell}{4\pi} \ln \dfrac{R_2}{R_1}$ $\quad \dfrac{\mu_0 N I}{2\pi r}$ $\quad$ a, c et d $\quad$ d

a, c et d $\quad 0$ $\quad -\dfrac{\mu_0 I m}{2\pi r^2}\vec{e_r}$ $\quad \dfrac{\mu_0}{2\pi} \ln \dfrac{R_2}{R_1}$ $\quad 2j_0 S \dfrac{b}{a}$ $\quad \dfrac{\mu_0 \vec{\mathcal{M}}}{2\pi z^3}$ $\quad$ b, c et d

$4I$ $\quad 0$ $\quad$ d $\quad \dfrac{mB_\mathrm{ext}}{Mg}$ $\quad$ 2 $\quad$ d $\quad \dfrac{7\pi}{2} Bd$ $\quad$ b $\quad 0$ $\quad +\vec{e_z}$ $\quad$ c $\quad$ a

► Réponses et corrigés page 156

Équations de Maxwell

Prérequis
Équations de Maxwell. Opérateurs différentiels.

Constantes utiles

→ Permittivité du vide : $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\ \mathrm{F \cdot m^{-1}}$

→ Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 1{,}26 \times 10^{-6}\ \mathrm{T \cdot m \cdot A^{-1}}$

→ Dans le vide : $\varepsilon_0 \mu_0 = \dfrac{1}{c^2}$, où c est la célérité de la lumière dans le vide

Pour commencer

Entraînement 4.1 — Équations de Maxwell et dimensions.

On munit l'espace d'un repère cartésien (x, y, z) et on note t la dépendance temporelle.

On s'intéresse aux équations de Maxwell auxquelles obéissent les champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$ dans un milieu caractérisé par une densité volumique de charge ρ et une densité volumique de courant $\vec{j}$.

a) Parmi les quatre équations suivantes, laquelle n'est pas une équation de Maxwell ?

(a) $\mathrm{div}(\vec{E}) = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

(b) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

(c) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

(d) $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\vec{j}) = 0$

.....

On s'intéresse aux relations entre les dimensions qui découlent des équations de Maxwell.

On considère les dimensions suivantes : L pour une longueur, T pour un temps, M pour une masse et I pour une intensité du courant électrique.

On rappelle l'expression de la force de Lorentz : $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$.

b) Donner la dimension d'une charge électrique q .....

c) Donner la dimension d'un champ magnétique à l'aide de l'expression de la force de Lorentz.

.....

d) Donner la dimension d'un champ électrique à l'aide de l'expression de la force de Lorentz.

.....

e) Retrouver la dimension d'un champ électrique, à l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday.

.....

Entraînement 4.2 — Courants et ordres de grandeur.

L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit aussi, en introduisant le courant de conduction $\vec{j}_{\text{cond}}$ et le courant de déplacement $\vec{j}_{\text{dépl}}$:

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0\big(\vec{j}_{\text{cond}} + \vec{j}_{\text{dépl}}\big), \quad \text{qui est équivalente à} \quad \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0\,\vec{j}_{\text{cond}} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.$$

On admet la loi d'Ohm $\vec{j}_{\text{cond}} = \sigma\vec{E}$ et on considère un champ électrique $\vec{E} = E_0\cos(\omega t + \varphi)\vec{e_x}$.

a) Comment s'exprime l'ordre de grandeur de la quantité $\alpha = \dfrac{\|\vec{j}_{\text{cond}}\|}{\|\vec{j}_{\text{dépl}}\|}$?

(a) $\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ (c) $\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0\omega}$

(b) $\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0\omega}$

.....

b) Laquelle des conditions suivantes permet d'obtenir $\alpha \gg 1$ dans un conducteur (où σ a pour ordre de grandeur $10^7\,\text{S}\cdot\text{m}^{-1}$) ?

(a) $f \ll 10^3$ Hz (c) $f \ll 10^{17}$ Hz

(b) $f \ll 10^9$ Hz

.....

On considère une onde électromagnétique de pulsation $\omega = 1{,}0\,\text{rad}\cdot\text{MHz}$.

c) Calculer α si cette onde se propage dans un métal de conductivité $\sigma = 1{,}0\times10^7\,\text{S}\cdot\text{m}^{-1}$ ..

d) Calculer α si cette onde se propage dans de l'eau de mer avec $\sigma = 1{,}0\times10^{-4}\,\text{S}\cdot\text{m}^{-1}$ .....

e) Calculer α si cette onde se propage dans du verre avec $\sigma = 1{,}0\times10^{-13}\,\text{S}\cdot\text{m}^{-1}$ .....

Entraînement 4.3 — Transposition réels $\longleftrightarrow$ complexes.

On considère les deux champs électriques suivants :

$$\underline{\vec{E}}_1 = E_0\exp[\text{i}(\omega t - kx)]\vec{e_y} - \text{i}E_0\exp[\text{i}(\omega t - kx)]\vec{e_z}$$
$$\text{et} \quad \vec{E}_2 = -E_0\cos[\omega t + kz]\vec{e_x} - E_0\sin[\omega t + kz]\vec{e_y}.$$

a) Exprimer le champ $\vec{E}_1$ associé à $\underline{\vec{E}}_1$.

.....

b) Exprimer le champ $\underline{\vec{E}}_2$ associé à $\vec{E}_2$.

.....

Champs et opérateurs

Entraînement 4.4 — Voir la divergence.

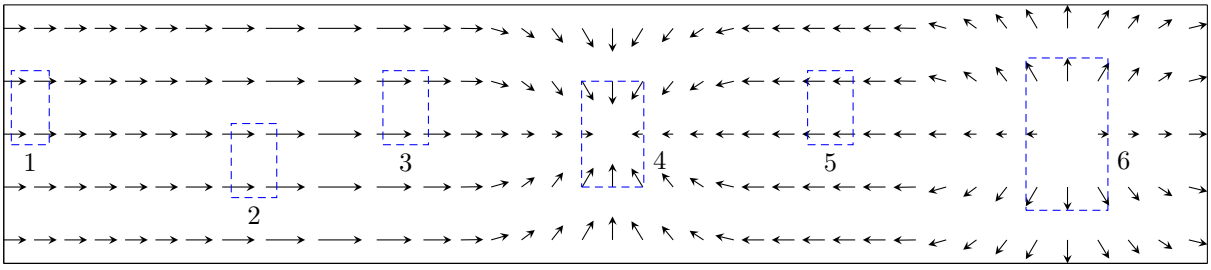
Le théorème de Green-Ostrogradski affirme que, pour un champ de vecteurs $\vec{A}$, on a

$$\iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div}(\vec{A})\,\mathrm{d}\tau = \oiint_{\mathcal{S}} \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{\mathcal{S}},$$

où $\mathcal{V}$ est le volume délimité par la surface $\mathcal{S}$ fermée.

Ce théorème indique que si le flux élémentaire $\mathrm{d}\phi$ du champ de vecteurs $\vec{A}$ à travers une surface infinitésimale fermée $\mathrm{d}\mathcal{S}$ autour d'un point M est non nul, alors la divergence de ce même champ de vecteurs au point M est non nulle. En particulier, si $\mathrm{d}\phi > 0$ (flux sortant) alors $\operatorname{div}\vec{A}(\mathrm{M}) > 0$.

On considère le champ de vecteurs suivant :



Pour chacune des zones suivantes, en estimant le flux du champ de vecteurs sur la zone, indiquer si la divergence du champ de vecteurs y est nulle, positive ou négative.

a) Zone 1 .....

b) Zone 2 .....

c) Zone 3 .....

d) Zone 4 .....

e) Zone 5 .....

f) Zone 6 .....

Entraînement 4.5 — Voir le rotationnel.

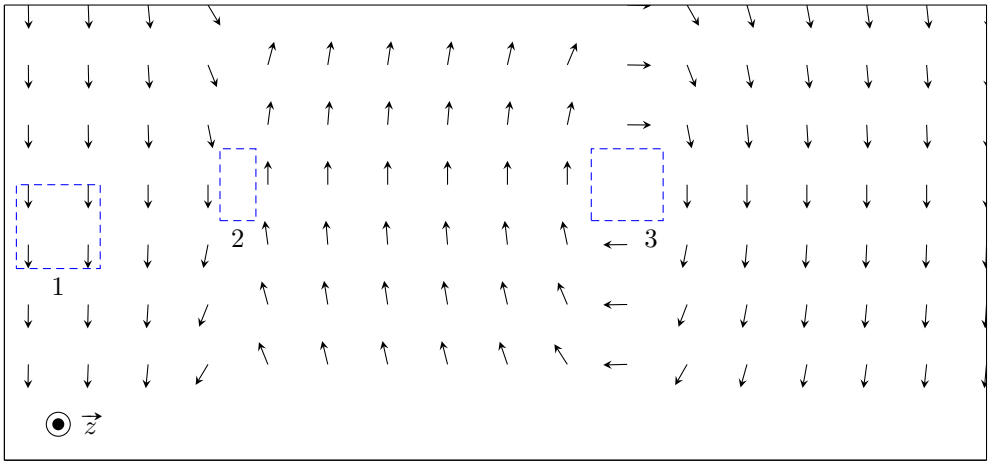
Le théorème de Stokes affirme que, pour un champ de vecteurs $\vec{A}$, on a

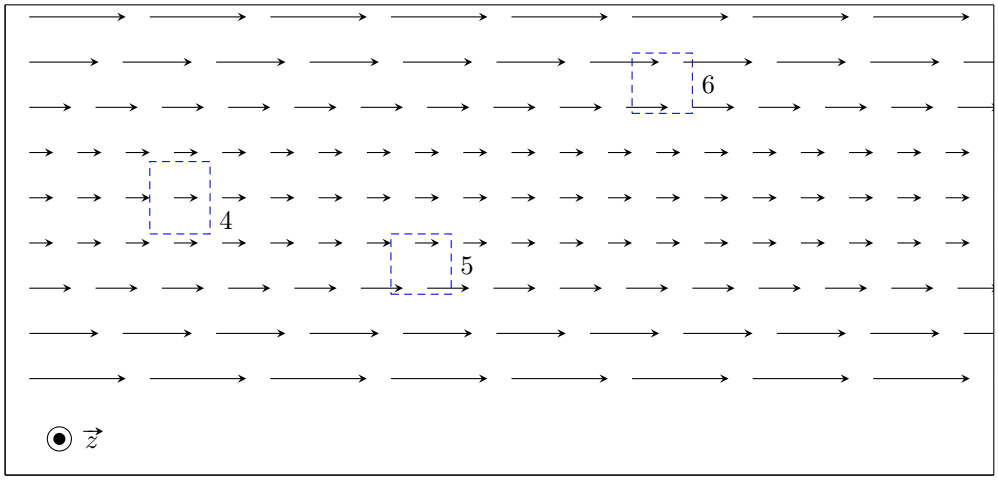
$$\iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell},$$

où $\mathcal{S}$ est la surface délimitée par le contour Γ fermé.

Ce théorème indique que si la circulation élémentaire $\mathrm{d}\mathcal{C}$ du champ de vecteurs $\vec{A}$ à travers un contour fermé Γ délimitant une surface infinitésimale $\mathrm{d}S$ est non nulle, alors le rotationnel de ce même champ de vecteurs au point M est non nul. En particulier, si $\mathrm{d}\mathcal{C} > 0$ alors $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}(\mathrm{M}) > 0$.

On considère les champs de vecteurs suivants :





Pour chacune des zones suivantes, en estimant la circulation du champ de vecteurs sur la zone, indiquer si la composante du rotationnel selon $\vec{e_z}$ du champ de vecteurs y est nulle, positive ou négative.

a) Zone 1 ..... ☐ c) Zone 3 ..... ☐ e) Zone 5 ..... ☐

b) Zone 2 ..... ☐ d) Zone 4 ..... ☐ f) Zone 6 ..... ☐

Conservation de la charge et potentiel électrique

Entraînement 4.6 — Conservation de la charge.

On note ρ la densité volumique de charge et $\vec{j}$ le vecteur densité volumique de courant.

On rappelle les équations de Maxwell-Ampère : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$, et de Maxwell-Gauss : $\text{div}\,\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$.

On rappelle aussi le théorème de Schwarz : pour tout champ $\vec{A}$, on a $\text{div}\left(\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = \dfrac{\partial(\text{div}\,\vec{A})}{\partial t}$.

a) Développer $\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B})$ à l'aide de l'équation de Maxwell-Ampère.

.....

b) Exprimer $\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B})$ en injectant l'équation de Maxwell-Gauss.

.....

c) On rappelle que, pour tout vecteur $\vec{A}$, $\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}) = 0$. Quelle équation obtient-on ?

(a) $\text{div}\,\vec{j} - \dfrac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ (b) $\text{div}\,\vec{j} + \dfrac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ (c) $\mu_0\,\text{div}\,\vec{j} + \dfrac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ (d) $\mu_0\,\text{div}\,\vec{j} - \dfrac{\partial\rho}{\partial t} = 0$

.....

Entraînement 4.7 — Piège électrostatique.

On considère une région de l'espace, vide de charge, dans laquelle règne un potentiel :

$$V(x,y,z) = \frac{V_0}{a^2}\left(x^2 + 2y^2 - 3z^2\right),$$

où V_0 (en V) et a sont des constantes positives.

a) Donner l'unité de a .....

L'opérateur laplacien en coordonnées cartésiennes est donné par $\Delta V = \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2}$.

b) Déterminer l'expression de ΔV .....

c) L'équation de Poisson $\Delta V = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ est-elle vérifiée ? .....

d) L'allure de $V(x,0,0)$ en fonction de l'abscisse x est une portion :

(a) de cercle (b) d'hyperbole (c) d'exponentielle (d) de parabole

.....

L'opérateur gradient en coordonnées cartésiennes est donné par $\overrightarrow{\text{grad}}\,V = \dfrac{\partial V}{\partial x}\vec{e_x} + \dfrac{\partial V}{\partial y}\vec{e_y} + \dfrac{\partial V}{\partial z}\vec{e_z}$.

e) Calculer le champ électrique $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$ en O, origine du repère .....

Théorèmes de Stokes-Ampère et Green-Ostrogradski

Entraînement 4.8 — Théorème de Stokes-Ampère.

Dans le repère $(\mathrm{O}, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$, considérons le vecteur fixe

$$\vec{\omega} = \omega\, \vec{e_z}.$$

Rappelons que, pour tout point M de l'espace, on a :

- $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\vec{e_r} + z\vec{e_z}$ dans la base cylindrique $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$;
- $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}$ dans la base cartésienne.

On considère par ailleurs un cylindre infini d'axe $(\mathrm{O}z)$ et de rayon a.

On considère le champ de vecteurs défini par :

$$\begin{cases} \vec{v} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OM}} & \text{pour } r < a\,; \\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{v} = \vec{0} & \text{pour } r > a\ . \end{cases}$$

a) Déterminer l'expression de $\vec{v} = \omega\vec{e_z} \wedge (r\vec{e_r} + z\vec{e_z})$ .....

b) Déterminer l'expression de $\vec{v} = \omega\vec{e_z} \wedge (x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z})$ .....

En coordonnées cartésiennes, l'opérateur rotationnel est défini par :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\vec{e_x} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\vec{e_y} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\vec{e_z}.$$

c) Calculer $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{v}$ pour $r < a$ en coordonnées cartésiennes .....

Le théorème de Stokes s'énonce de la façon suivante.

Soit Γ un contour fermé et orienté, et soit Σ une surface quelconque s'appuyant sur Γ et orientée avec la règle du tire-bouchon de Maxwell ou la règle de la main droite. Pour un champ de vecteurs $\vec{A}$ défini en tout point, on a :

$$\oint_\Gamma \vec{A}_{(\mathrm{M})} \cdot \vec{\mathrm{d}\ell}_{(\mathrm{M})} = \iint_\Sigma \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{A})_{(\mathrm{M})} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}S_{(\mathrm{M})}.$$

En appliquant ce théorème sur un contour fermé circulaire Γ de rayon r, calculer $v(r)$ dans les deux cas suivants :

d) Pour $r < a$ .....

e) Pour $r > a$ .....

Entraînement 4.9 — Application du théorème de Green-Ostrogradski.

On considère le champ suivant :

$$\vec{A}(r,\theta,\varphi) = (ar - br^3)\vec{e_r},$$

en coordonnées sphériques, où a et b sont des constantes.

En coordonnées sphériques, l'opérateur divergence est défini par :

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}.$$

a) Calculer $\operatorname{div}(\vec{A})$ .....

b) Quelle est l'expression de l'élément de volume d'une boule en coordonnées sphériques ?

(a) $\mathrm{d}\tau = r\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$

(b) $\mathrm{d}\tau = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$

(c) $\mathrm{d}\tau = r\sin\theta\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$

(d) $\mathrm{d}\tau = r^2\sin\theta\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$

.....

On rappelle le théorème de Green-Ostrogradski.

Soit $\mathcal{S}$ une surface fermée de volume intérieur $\mathcal{V}$, orientée vers l'extérieur par convention. Pour un champ de vecteurs $\vec{A}$ défini en tout point, on a :

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div}(\vec{A})\,\mathrm{d}\tau.$$

c) À l'aide de ce théorème, exprimer le flux $\oiint_{\text{sphère}} \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ du champ à travers une sphère de centre O de rayon R.

.....

d) Quelle est l'expression de l'élément de surface d'une sphère en coordonnées sphériques ?

(a) $\mathrm{d}S = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$

(b) $\mathrm{d}S = r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$

(c) $\mathrm{d}S = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$

.....

e) Calculer directement le flux du champ à travers la sphère de centre O et de rayon R à partir de l'expression du champ $\vec{A}$.

.....

Jouons avec les équations de Maxwell

On donne pour les quatre prochains exercices les expressions du rotationnel en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e_x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{e_y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{e_z}$$

et en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{e_r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial r A_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e_z}.$$

Entraînement 4.10 — Existence ou non d'un champ électromagnétique.

Vérifier à l'aide des équations de Maxwell si les champs électromagnétiques suivants existent ou non.

Répondre par « oui » par « non ».

On se place dans le vide ; on rappelle donc que $\varepsilon_0\mu_0 = \dfrac{1}{c^2} = \dfrac{k^2}{\omega^2}$.

a) $\vec{E} = E_0\cos(\omega t - kx + \varphi_0)\vec{e_y}$ et $\vec{B} = \dfrac{E_0 k}{\omega}\cos(\omega t - kx + \varphi_0)\vec{e_z}$ .....

b) $\vec{E} = E_0\cos(\omega t + ky)\vec{e_y}$ et $\vec{B} = \dfrac{E_0 k}{\omega}\cos(\omega t + ky)\vec{e_y}$ .....

c)

$$\begin{cases} \vec{E} = E_1\cos(\omega t + kz + \varphi_1)\vec{e_x} + E_2\cos(\omega t + kz + \varphi_2)\vec{e_y} \\ \vec{B} = \dfrac{E_2 k}{\omega}\cos(\omega t + kz + \varphi_2)\vec{e_x} - \dfrac{E_1 k}{\omega}\cos(\omega t + kz + \varphi_1)\vec{e_y} \end{cases}$$

.....

Entraînement 4.11 — Utilisation de l'équation de Maxwell-Faraday.

On rappelle l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

On se place dans un milieu vide de charge et de courant (sans champ statique).

Déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B}$ associé à chacun des champs électriques $\vec{E}$ suivants.

a) En coordonnées cartésiennes : $\vec{E} = E_0\cos(\omega t - kz + \varphi)\vec{e_x}$

.....

b) En coordonnées cartésiennes : $\vec{E} = E_0\cosh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha z)\exp(-\alpha t)\vec{e_x}$

.....

c) En coordonnées cylindriques : $\vec{E} = \dfrac{E_0}{(kr)^2}\cos(\omega t)\vec{e_z}$

.....

Entraînement 4.12 — Utilisation de l'équation de Maxwell-Ampère.

On rappelle l'équation de Maxwell-Ampère : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

On se place dans un milieu vide de charge et de courant (pas de champs statiques).

Déterminer l'expression du champ électrique $\vec{E}$ associé à chacun des champs magnétiques $\vec{B}$ suivants.

a) En coordonnées cartésiennes : $\vec{B} = B_0 \sin(\omega t - kz + \varphi)\vec{e_y}$

.....

b) En coordonnées cartésiennes : $\vec{B} = B_0 \sinh(\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}\alpha z) \exp(-\alpha t)\vec{e_y}$

.....

c) En coordonnées cylindriques : $\vec{B} = \dfrac{cB_0}{(kr)^2} \sin(\omega t)\vec{e_\theta}$

.....

Entraînement 4.13 — Détermination de $\vec{E}$ à partir de $\vec{B}$.

Le champ magnétique créé dans un solénoïde infini de rayon R, d'axe $(\mathrm{O}z)$, comportant n spires par unité de longueur et parcouru par un courant d'intensité électrique $i(t)$ dépendant du temps est

$$\vec{B} = \mu_0 n i(t)\vec{e_z}.$$

On rappelle que le champ magnétique à l'extérieur d'un solénoïde est nul.

On rappelle les expressions de l'équation de Maxwell-Faraday sous formes locale et intégrale :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{et} \qquad \oint_\Gamma \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -\iint_\Sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}.$$

a) Par analyse des invariances, déterminer la ou les variable(s) dont dépend le champ électrique. On adoptera les coordonnées cylindriques.

(a) r (b) θ (c) z (d) r et θ

.....

Le champ électrique $\vec{E}$ est dirigé selon $\vec{e_\theta}$.

En utilisant l'équation locale de Maxwell-Faraday, déterminer l'expression du champ électrique créé par le solénoïde dans les deux cas suivants.

b) Pour $r < R$ .....

c) Pour $r > R$, sachant que le champ est continu .....

On souhaite retrouver ces résultats en passant par la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday. Cette méthode nécessite de choisir une surface sur laquelle nous allons calculer le flux et la circulation.

d) En tenant compte de la direction du champ $\vec{B}$ et des dépendances spatiales du champ $\vec{E}$, quelle surface pouvons-nous choisir ?

(a) Un cylindre de hauteur h et de rayon r

(b) Un plan rectangulaire de dimension $r \times z$

(c) Un disque d'axe $(\mathrm{O}z)$ et de rayon r

(d) Une sphère de rayon r

.....

En utilisant la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday sur cette surface, déterminer l'expression du champ électrique créé par le solénoïde dans les deux cas suivants.

e) Pour $r < a$ .....

f) Pour $r > a$ .....

Vecteur de Poynting

Entraînement 4.14 — Vecteur de Poynting.

La forme générale du vecteur de Poynting vérifie : $\vec{\Pi} = \dfrac{1}{\mu_0}\vec{E} \wedge \vec{B}$.

Développer les vecteurs de Poynting pour les champs électromagnétiques suivants :

a) $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz + \varphi)\vec{e_x}$ et $\vec{B} = B_0 \sin(\omega t - kz + \varphi)\vec{e_y}$

.....

b) $\vec{E} = E_0 \cosh(\beta z) \exp(-\alpha t)\vec{e_z}$ et $\vec{B} = B_0 \sinh(\beta z) \exp(-\alpha t)\vec{e_y}$

.....

Entraînement 4.15 — Vecteur de Poynting complexe.

Une onde électromagnétique plane monochromatique se propage suivant l'axe $(\mathrm{O}z)$. Les expressions des composantes du champ électrique sont :

$$\vec{E} \left| \begin{array}{l} E_x = E_{0x} \cos(k\,z - \omega\,t + \psi_1) \\ E_y = E_{0y} \cos(k\,z - \omega\,t + \psi_2) \\ E_z = 0. \end{array} \right.$$

Le vecteur d'onde est noté $\vec{k} = k\,\vec{e_z}$ avec $\omega = k\,c$.

On travaille tout d'abord en notation réelle :

a) Déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B} = \dfrac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$ .....

b) Déterminer l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ ....

On travaille maintenant en notation complexe :

c) Déterminer l'expression du champ électrique $\underline{\vec{E}}$ .....

d) Déterminer l'expression du champ magnétique $\underline{\vec{B}}$ .....

e) Déterminer l'expression du conjugué du champ magnétique $\underline{\vec{B}}^*$ ..

f) Calculer les composantes du vecteur complexe $\dfrac{\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*}{2\,\mu_0}$ .....

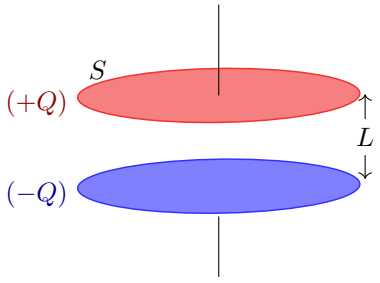
Conclusion :

g) On en déduit que $\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle = \left\langle \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right\rangle$ vaut : (a) $\left\langle \dfrac{\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*}{2\,\mu_0} \right\rangle$ (b) $\left\langle \dfrac{2\,\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*}{2\,\mu_0} \right\rangle$ (c) $\left\langle \dfrac{\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*}{\mu_0} \right\rangle$?

.....

Entraînement 4.16 — Un bilan d'énergie.

On considère un condensateur composé de deux disques métalliques de surface S, de rayon R, distants de $L \ll R$ et séparés par du vide. Lors de la charge, on suppose que, dans le système de coordonnées cylindriques, les champs électrique et magnétique régnant entre les deux armatures sont :



$$\vec{E}(t) = \frac{Q(t)}{\varepsilon_0 S}\vec{e_z} \qquad \text{et} \qquad \vec{B}(r,t) = \frac{\mu_0}{2S}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} r \vec{e_\theta}.$$

On ne considère aucun courant de conduction dans cet exercice.

On considère que l'énergie stockée dans le condensateur est essentiellement sous forme électrique. La densité volumique d'énergie électromagnétique s'écrit alors $e = \dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2}$.

a) Calculer l'énergie stockée $\mathcal{E} = \iiint_{\mathcal{V}} e\,\mathrm{d}\tau$ dans le condensateur sachant que l'élément de volume $\mathrm{d}\tau$, en coordonnées cylindriques, vaut $\mathrm{d}\tau = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$.

.....

b) Calculer le vecteur de Poynting $\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ en $r = R$ .....

c) Calculer le flux sortant $\phi = \iint_{\text{cylindre}} \vec{\Pi} \cdot \vec{\mathrm{d}S}$ à travers la surface cylindrique délimitant le volume entre les deux armatures.

.....

d) Les résultats précédents permettent de déduire que :

(a) $\mathcal{E} + \phi = 0$ (b) $\mathcal{E} + \dfrac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ (c) $\dfrac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \phi = 0$ (d) $\dfrac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \dfrac{\partial \phi}{\partial t} = 0$

.....

e) On rappelle le théorème de Green-Ostrogradski.

Soit Σ une surface fermée de volume intérieur $\mathcal{V}$, orientée vers l'extérieur par convention. Pour un champ de vecteurs $\vec{A}$ défini en tout point, on a :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{\mathrm{d}S} = \iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{div}(\vec{A})\, \mathrm{d}\tau.$$

En utilisant ce théorème, quelle relation (appelée *théorème de Poynting*) obtient-on ?

(a) $\dfrac{\partial e}{\partial t} + \dfrac{\partial\left(\mathrm{div}\,\vec{\Pi}\right)}{\partial t} = 0$

(b) $\dfrac{\partial e}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{\Pi} = 0$

(c) $e + \dfrac{\partial\left(\mathrm{div}\,\vec{\Pi}\right)}{\partial t} = 0$

(d) $e + \mathrm{div}\,\vec{\Pi} = 0$

.....

Réponses mélangées

$3a - 5br^2$ $\quad r\omega\vec{e_\theta}$ $\quad \dfrac{E_x^2 + E_y^2}{\mu_0\, c}\,\vec{e_z}$ $\quad \dfrac{c^3 B_0}{k^2\omega r^3}\cos(\omega t)\vec{e_z}$ $\quad$ Nulle $\quad$ (c) $\quad$ (b)

$\dfrac{E_0 B_0}{\mu_0}\cos(\omega t - kz + \varphi)\sin(\omega t - kz + \varphi)\vec{e_z}$ $\quad \dfrac{LQ^2}{2\varepsilon_0 S}$ $\quad$ non $\quad B_0\dfrac{k}{\varepsilon_0\mu_0\omega}\sin(\omega t - kz + \varphi)\vec{e_x}$

$E_0\cos[\omega t - kx]\vec{e_y} + E_0\sin[\omega t - kx]\vec{e_z}$ $\quad 0$ $\quad$ Negative $\quad -\mu_0 n\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\dfrac{r}{2}\vec{e_\theta}$

$-\mu_0 n\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\dfrac{R^2}{2r}\vec{e_\theta}$ $\quad$ Positive $\quad$ Négative $\quad -\dfrac{E_{0y}}{c}\cos(k\,z - \omega\,t + \psi_2)\,\vec{e_x} + \dfrac{E_{0x}}{c}\cos(k\,z - \omega\,t + \psi_1)\,\vec{e_y}$ $\quad$ Négative

$-\dfrac{E_0 B_0}{\mu_0}\cosh(\beta z)\sinh(\beta z)\exp(-2\alpha t)\vec{e_x}$ $\quad 1{,}1\times 10^1$ $\quad I\cdot T$ $\quad \dfrac{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}{2\,\mu_0\, c}\,\vec{e_z}$ $\quad$ (c)

$\dfrac{B_0}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\cosh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha z)\exp(-\alpha t)\vec{e_x}$ $\quad$ (d) $\quad \dfrac{M}{I\cdot T^2}$ $\quad$ (b) $\quad -\dfrac{2E_0}{k^2 r^3}\displaystyle\int\cos(\omega t)\vec{e_\theta}\,\mathrm{d}t$

$-\mu_0 n\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\dfrac{R^2}{2r}\vec{e_\theta}$ $\quad$ Négative $\quad$ Nulle $\quad$ (b) $\quad$ Nulle $\quad$ (b) $\quad \mu_0\ \mathrm{div}\ \vec{j} + \mu_0\dfrac{\partial\rho}{\partial t}$

$4\pi R^3(a - bR^2)$ $\quad \dfrac{a^2}{r}\omega$ $\quad 1{,}1\times 10^{-8}$ $\quad -E_0\exp[\mathrm{i}(\omega t + kz)]\vec{e_x} + \mathrm{i}E_0\exp[\mathrm{i}(\omega t + kz)]\vec{e_y}$ $\quad$ (c) $\quad$ Oui $\quad$ (d)

$\dfrac{M\cdot L}{I\cdot T^3}$ $\quad$ Positive $\quad$ Positive $\quad r\omega$ $\quad \dfrac{M\cdot L}{I\cdot T^3}$ $\quad$ oui $\quad E_0\dfrac{k}{\omega}\cos(\omega t - kz + \varphi)\vec{e_y}$

$E_0\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\sinh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha z)\exp(-\alpha t)\vec{e_y}$ $\quad -\mu_0 n\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\dfrac{r}{2}\vec{e_\theta}$ $\quad \dfrac{1}{c}\left(E_{0x}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k\,z-\omega\,t+\psi_1)}\,\vec{e_y} - E_{0y}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k\,z-\omega\,t+\psi_2)}\,\vec{e_x}\right)$

(a) $\quad 1{,}1\times 10^{12}$ $\quad E_{0x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\,z-\omega\,t+\psi_1)}\,\vec{e_x} + E_{0y}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\,z-\omega\,t+\psi_2)}\,\vec{e_y}$ $\quad -\dfrac{R}{2\varepsilon_0 S^2}Q\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\vec{e_r}$ $\quad$ m $\quad \vec{0}$

Positive $\quad \dfrac{1}{c}\left(E_{0x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\,z-\omega\,t+\psi_1)}\,\vec{e_y} - E_{0y}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\,z-\omega\,t+\psi_2)}\,\vec{e_x}\right)$ $\quad -\dfrac{L}{\varepsilon_0 S}Q\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ $\quad$ Nulle $\quad$ oui $\quad$ (a)

(c) $\quad 4\pi R^3(a - bR^2)$ $\quad 2\omega\vec{e_z}$ $\quad \mu_0\ \mathrm{div}\ \vec{j} + \varepsilon_0\,\mu_0\dfrac{\partial\,\mathrm{div}\,\vec{E}}{\partial t}$ $\quad -\omega y\vec{e_x} + \omega x\vec{e_y}$

► Réponses et corrigés page 163

Induction

Fiche du « Cahier d'entraînement 1re année » pour se préparer
⟶ *Champ magnétique, Induction*

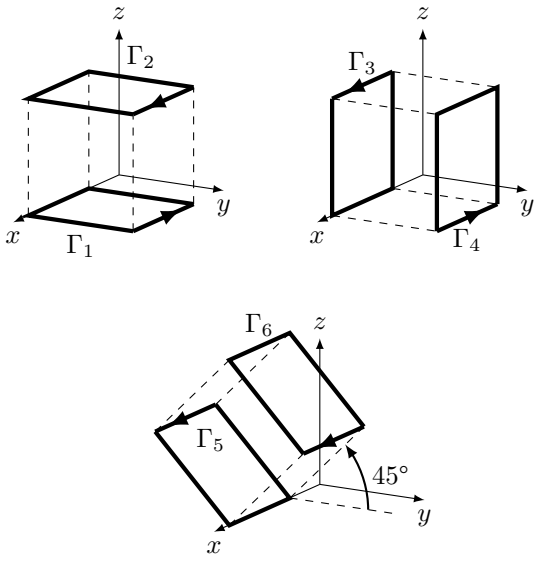
Prérequis
Champ magnétique. Loi de Faraday. Orientation d'une surface à l'aide de la règle de la main droite (règle du tire-bouchon).
Flux du champ magnétique $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{\mathrm{d}S}$.
Force élémentaire de Laplace $\mathrm{d}\vec{F_\mathrm{L}} = i\vec{\mathrm{d}\ell} \wedge \vec{B}$. Loi des mailles.

Pour commencer

Entraînement 5.1 — Orientation d'une surface.

On associe à un contour orienté son vecteur normal en utilisant la règle dite de la main droite ou du tire-bouchon.

Pour chaque contour Γ_i orienté suivant, exprimer le vecteur normal unitaire $\vec{n_i}$ de la surface qu'il délimite en fonction des vecteurs $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$.



a) $\vec{n_1}$ .....

b) $\vec{n_2}$ .....

c) $\vec{n_3}$ .....

d) $\vec{n_4}$ .....

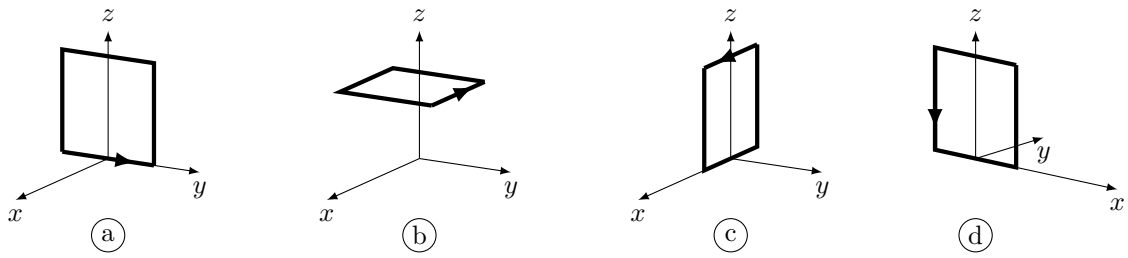
e) $\vec{n_5}$ .....

f) $\vec{n_6}$ .....

Entraînement 5.2 — Orientation d'un contour.

On associe à un contour orienté son vecteur normal en utilisant la règle dite de la main droite ou du tire-bouchon. Quelle représentation du contour pourrait correspondre aux vecteurs suivants ?

La réponse peut être « aucune » !



a) $-\vec{e_y}$ ..... ☐

b) $-\vec{e_x}$ ..... ☐

c) $\vec{e_z}$ ..... ☐

d) $\vec{e_x}$ ..... ☐

Entraînement 5.3 — Varie ou ne varie pas ? Telle est la question.

Soit un cadre de vecteur normal $\vec{n}$ et un champ magnétique $\vec{B}$.

Dans les situations suivantes, le flux de $\vec{B}$ à travers le cadre varie-t-il au cours du temps ?

Répondre par « oui » ou « non ».

On rappelle que le flux est défini par $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$.

a) $\vec{B}$ est uniforme et initialement $\vec{B} \wedge \vec{n} = \vec{0}$. Le cadre tourne autour d'un de ses côtés ... ☐

b) Le cadre pénètre dans une zone où règne $\vec{B}$ uniforme. $\vec{B}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires ..... ☐

c) Le champ $\vec{B}(t)$ dépend du temps et est perpendiculaire à $\vec{n}$. Le cadre est fixe et indéformable.

..... ☐

d) Le cadre est animé d'un mouvement de translation rectiligne dans $\vec{B}$ uniforme et constant.

..... ☐

e) La surface du cadre diminue. Le champ $\vec{B}$ est uniforme, colinéaire de sens opposé à $\vec{n}$.

..... ☐

f) Le cadre est fixe. Le champ $\vec{B}$ est colinéaire à $\vec{n}$, non uniforme et indépendant du temps.

..... ☐

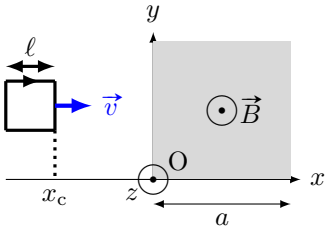
Flux du champ magnétique

Entraînement 5.4 — Flux à travers un circuit mobile (I).

On considère un circuit carré de côté ℓ se déplaçant à la vitesse $\vec{v} = v\vec{e_x}$ et dont le côté droit est repéré par l'abscisse x_c.

Un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{e_z}$ règne dans la zone comprise entre $x = 0$ et $x = a > \ell$.

On oriente le circuit tel que $\vec{n} = -\vec{e_z}$.



Exprimer le flux du champ magnétique $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{dS}$ en fonction de B, x_c, ℓ et a si :

a) $x_c < 0$ .....

b) $0 < x_c < \ell$ .....

c) $\ell < x_c < a$ .....

d) $a < x_c < a + \ell$ .....

En déduire la dérivée du flux par rapport au temps en fonction de B, v et ℓ si :

e) $x_c < 0$ .....

f) $0 < x_c < \ell$ .....

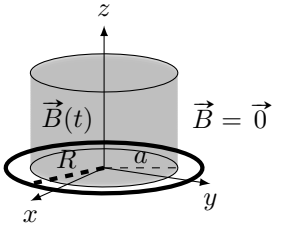
g) $\ell < x_c < a$ .....

h) $a < x_c < a + \ell$ .....

Entraînement 5.5 — Flux à travers un disque.

On considère le système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) de base $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$. Soit un champ magnétique uniforme

$$\vec{B} = B_m \cos(\omega t)\vec{e_z} \text{ si } r < a \quad \text{et} \quad \vec{B} = \vec{0} \text{ si } r > a.$$



Déterminer le flux Φ du champ magnétique à travers un disque de rayon R d'axe z et de vecteur normal $\vec{e_z}$ si :

a) $R < a$ .....

b) $R > a$ .....

On considère maintenant un champ magnétique $\vec{B'}$ défini par

$$\vec{B'}(\mathrm{M}) = B_0\left(1 - \frac{r}{a}\right)\vec{e_z} \text{ si } r < a \qquad \text{et} \qquad \vec{B'} = \vec{0} \text{ si } r > a.$$

On désire exprimer son flux Φ' aussi à travers le disque de rayon R d'axe z et de vecteur normal $\vec{e_z}$.

c) Quelle sera l'expression de l'élément de surface dS du disque à considérer pour calculer le flux de $\vec{B'}$?

.....

Déterminer Φ' si :

d) $R < a$ .....

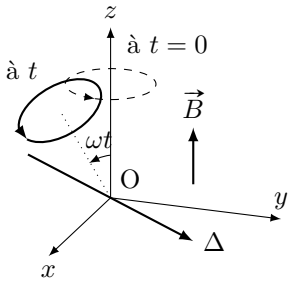
e) $R > a$ .....

Entraînement 5.6 — Flux à travers un circuit mobile (II).

Dans une zone de champ magnétique uniforme

$$\vec{B} = B\vec{e_z},$$

on considère une spire orientée de rayon R en rotation autour d'un axe Δ perpendiculaire à l'axe $(\mathrm{O}z)$ avec une vitesse angulaire constante ω.



a) Quelle est l'expression du flux de $\vec{B}$ à travers la spire à t quelconque ? .....

Exprimer le flux en fonction de B et R pour les différentes valeurs de ωt suivantes :

b) $\frac{\pi}{2}$ .... c) $\frac{2\pi}{3}$ ... d) $\frac{11\pi}{6}$ .. e) 2π ...

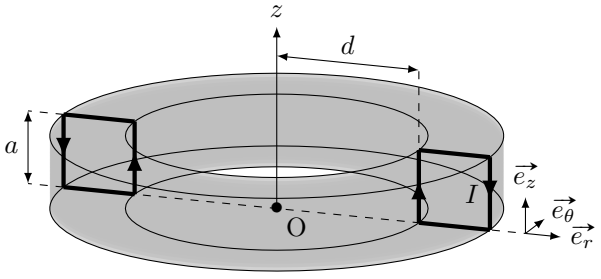
Entraînement 5.7 — Flux propre d'un tore.

Soit un tore d'axe $(\mathrm{O}z)$, constitué de N spires carrées de côté a. Le champ magnétique créé par ce dispositif est tel que

$$\vec{B}(\mathrm{M}) = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}\vec{e_\theta}$$

pour $0 < z < a$ ou $d < r < d + a$, et nul sinon.

On désire, dans un premier temps, calculer le flux de ce champ à travers une seule des spires. Le vecteur normal à la spire est le vecteur $\vec{e_\theta}$.



a) Quelle sera la surface élémentaire $\mathrm{d}S$ à utiliser pour le calcul du flux $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}S\vec{e_\theta}$?

(a) $\mathrm{d}S = \mathrm{d}r\,\mathrm{d}z$ (b) $\mathrm{d}S = r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r$ (c) $\mathrm{d}S = r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$ (d) $\mathrm{d}S = \mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$

.....

b) Quelle sera l'expression du flux à travers une spire ?

(a) $\Phi = \int_{r=d}^{a+d}\int_{z=0}^{a} \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}\,\mathrm{d}r \times \mathrm{d}z$

(b) $\Phi = \int_{r=0}^{a}\int_{z=0}^{a} \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}\,\mathrm{d}r \times \mathrm{d}z$

(c) $\Phi = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{a} \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} r\,\mathrm{d}\theta \times \mathrm{d}z$

(d) $\Phi = \int_{r=d}^{a+d}\int_{z=0}^{a} \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} r\,\mathrm{d}\theta \times \mathrm{d}z$

.....

c) En réalisant le calcul intégral, calculer Φ .....

d) En déduire l'expression du coefficient d'auto-induction L défini par $\Phi_{\text{tore}} = LI$, où Φ_{tore} désigne le flux du champ créé par le tore à travers ses N spires (aussi appelé *flux propre*).

.....

Lien avec l'équation de Maxwell-Faraday

Entraînement 5.8

Soit $\vec{E}$ un champ électrique d'expression $E(r)\vec{e_\theta}$ et soit $\vec{B}$ un champ magnétique d'expression $B_0\cos(\omega t)\vec{e_z}$.

Ils sont reliés par l'équation de Maxwell-Faraday $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

On rappelle l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{e_r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e_z}.$$

a) Quelle est l'équation vérifiée par $E(r)$?

(a) $\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}(rE(r))}{\mathrm{d}r} = -B_0\sin(\omega t)$

(b) $-\dfrac{\mathrm{d}(E(r))}{\mathrm{d}r} = B_0\omega\sin(\omega t)$

(c) $\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}(rE(r))}{\mathrm{d}r} = B_0\omega\sin(\omega t)$

(d) $\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}E(r)}{\mathrm{d}\theta} = B_0\omega\cos(\omega t)$

.....

b) En déduire $E(r)$.

On prendra $E(r=0)=0$.

.....

Systèmes d'équations couplées

Entraînement 5.9

Après écriture de la loi des mailles et de la relation fondamentale de la dynamique, un étudiant obtient ce système d'équations à résoudre :

$$\begin{cases} Ri + aBv = 0 \\ m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - iBa = mg. \end{cases}$$

a) Quelle est l'équation différentielle vérifiée par v ?

(a) $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - \dfrac{a^2B^2v}{Rm} = g$

(b) $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{a^2B^2v}{R} = g$

(c) $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{a^2B^2v}{Rm} = g$

.....

b) Quelle est la dimension du coefficient $\dfrac{a^2B^2}{Rm}$?

On note T *la dimension d'un temps et* M *la dimension d'une masse.*

(a) T^{-1}

(b) 1

(c) T

(d) $\mathrm{T}\cdot\mathrm{M}^{-1}$

.....

Entraînement 5.10 — Passage en complexe.

On considère un dispositif dont les équations mécaniques et électriques permettent d'établir le système suivant, où u est une tension :

$$\begin{cases} Ri + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - \alpha B v = u \\ m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -iB\alpha - kz - hv \\ v = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}. \end{cases}$$

Les grandeurs i, u et v sont sinusoïdales donc du type $x(t) = X_\mathrm{m}\cos(\omega t + \varphi)$.

Leur grandeur complexe associée est du type $\underline{x}(t) = X_\mathrm{m}\exp(\mathrm{j}\omega t + \varphi)$ et leur amplitude complexe associée $\underline{X} = X_\mathrm{m}\exp(\mathrm{j}\varphi)$ (où $\mathrm{j}^2 = -1$).

a) Comment s'écrit le système après passage en complexe ?

(a) $\begin{cases} R\underline{I} + \dfrac{L}{\mathrm{j}\omega}\underline{I} - \alpha B\underline{V} = \underline{U} \\ \mathrm{j}m\omega\underline{V} = -B\alpha\underline{I} - \mathrm{j}k\omega\underline{V} - h\underline{V} \\ \underline{V} = \mathrm{j}\omega\underline{Z} \end{cases}$

(b) $\begin{cases} R\underline{I} + \mathrm{j}L\omega\underline{I} - \alpha B\underline{V} = U_\mathrm{m}\cos(\omega t) \\ \dfrac{m}{\mathrm{j}\omega}\underline{V} = -B\alpha\underline{I} - k\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega}\underline{V} - h\underline{V} \\ \underline{V} = \mathrm{j}\omega\underline{Z} \end{cases}$

(c) $\begin{cases} R\underline{I} + \mathrm{j}L\omega\underline{I} - \alpha B\underline{V} = \underline{U} \\ \mathrm{j}m\omega\underline{V} = -B\alpha\underline{I} - k\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega}\underline{V} - h\underline{V} \\ \underline{V} = \mathrm{j}\omega\underline{Z} \end{cases}$

.....

b) Exprimer l'amplitude complexe $\underline{V}$ en fonction de $\underline{I}$.

.....

c) En éliminant $\underline{V}$ dans les deux premières équations du système, déterminer la bonne expression de l'impédance complexe $\underline{Z_\mathrm{eq}} = \dfrac{\underline{U}}{\underline{I}}$ parmi les expressions suivantes.

(a) $\underline{Z_\mathrm{eq}} = R + \dfrac{L}{\mathrm{j}\omega} + \dfrac{\alpha^2 B^2}{h + \mathrm{j}(k\omega - \frac{m}{\omega})}$

(b) $\underline{Z_\mathrm{eq}} = R + \mathrm{j}L\omega + \alpha^2 B^2\left(h + \mathrm{j}\left(m\omega - \dfrac{k}{\omega}\right)\right)$

(c) $\underline{Z_\mathrm{eq}} = R + \mathrm{j}L\omega + \dfrac{\alpha^2 B^2}{h + \mathrm{j}(m\omega - \frac{k}{\omega})}$

(d) $\underline{Z_\mathrm{eq}} = \dfrac{R + \mathrm{j}L\omega + \alpha^2 B^2}{\left(h + \mathrm{j}\left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)\right)}$

.....

Entraînement 5.11 — Bilan de puissance.

On considère le système d'équations électrique (EE) et mécanique (EM) suivant avec la force électromotrice induite $e = -Bav$, avec la force de Laplace de valeur $f_\mathrm{L} = Bai$ et où f est une force exercée par un opérateur extérieur :

$$\begin{cases} e = Ri & \text{(EE)} \\ m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = f + f_\mathrm{L} & \text{(EM).} \end{cases}$$

On rappelle que l'énergie cinétique de la barre est $E_c = \dfrac{1}{2}mv^2$ *et que la puissance dissipée par effet Joule est* $\mathcal{P}_J = Ri^2$.

a) Exprimer, en fonction de R et i, le terme $Bavi$ à partir de e dans (EE) ...

b) Exprimer, en fonction de m, v et f, le terme $Bavi$ à partir de f_L dans (EM).

.....

c) Égaliser les expressions obtenues en a) et b) pour exprimer la puissance fournie par l'opérateur fv en fonction de E_c et $\mathcal{P}_\mathrm{J}$.

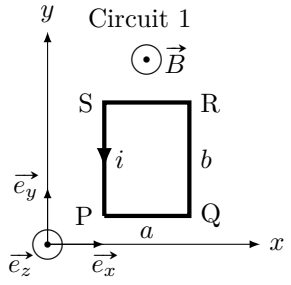
On rappelle que $\left(f^2(x)\right)' = 2f'(x)f(x)$.

.....

Force de Laplace

Entraînement 5.12 — Force de Laplace sur une spire rectangulaire.

On considère un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme ainsi qu'un circuit rectangulaire (appelé « circuit 1 »), parcouru par un courant i.



Quelle est l'expression de la force de Laplace s'exerçant sur chaque portion du circuit 1 en fonction de B, a, i et des vecteurs unitaires du repère ?

a) PQ .....

b) QR .....

c) RS .....

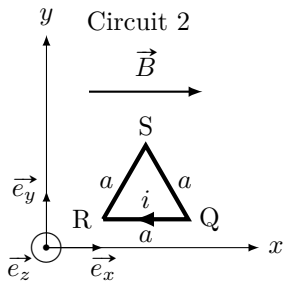
d) SP .....

e) Quelle est la résultante des forces de Laplace exercées sur le circuit 1 ? ....

Entraînement 5.13 — Force de Laplace sur une spire triangulaire.

On considère un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme et un circuit triangulaire (appelé « circuit 2 »), parcouru par un courant i.

Quelle est l'expression de la force de Laplace s'exerçant sur chaque portion du circuit 2 en fonction de B, a, i et des vecteurs unitaires du repère ?

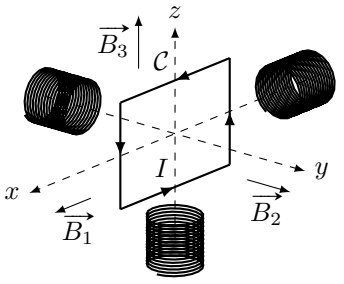


a) QR. ... b) RS .... c) SQ ....

Entraînement 5.14 — Couple des forces de Laplace sur une spire.

Un circuit mobile $\mathcal{C}$ de surface S dans lequel circule un courant d'intensité I est soumis à différents champs magnétiques uniformes et constants produits par trois bobines tels que :

$\vec{B_1} = B\vec{e_x}$; $\vec{B_2} = B\vec{e_y}$; $\vec{B_3} = B\vec{e_z}$.



On rappelle que le moment magnétique d'une spire $\vec{\mathcal{M}}$ est défini par $\vec{\mathcal{M}} = I\vec{S}$ avec $\vec{S}$ son vecteur surface.

a) Exprimer le vecteur surface $\vec{S}$ en fonction de S et de la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ .....

Exprimer le couple des forces de Laplace $\vec{\Gamma}_{\mathrm{L}} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$ que subit la spire $\mathcal{C}$ en fonction de S, I et B pour :

b) $\vec{B_1}$ ... c) $\vec{B_2}$ ... d) $\vec{B_3}$ ...

Les couples des forces de Laplace mettent la spire en rotation. Parmi les champs produits par les bobines, déterminer à l'aide de la règle de la main droite celui qui provoque les rotations du circuit $\mathcal{C}$ données ci-dessous.

e) La rotation de la spire autour de l'axe (Ox) dans le sens direct.

(a) $\vec{B_1}$ (b) $\vec{B_2}$ (c) $\vec{B_3}$ (d) aucun

.....

f) La rotation de la spire autour de l'axe (Oy) dans le sens direct ?

(a) $\vec{B_1}$ (b) $\vec{B_2}$ (c) $\vec{B_3}$ (d) aucun

.....

g) La rotation de la spire autour de l'axe (Oz) dans le sens direct ?

(a) $\vec{B_1}$ (b) $\vec{B_2}$ (c) $\vec{B_3}$ (d) aucun

.....

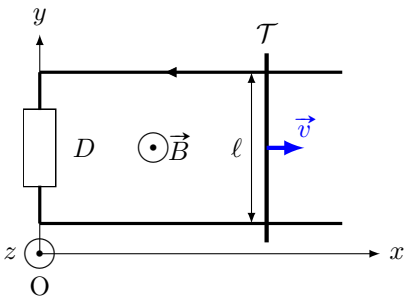
Autour du rail de Laplace

Le rail de Laplace est un circuit constitué de deux rails conducteurs parallèles horizontaux espacés d'une distance $\ell = 10$ cm sur lesquels repose une tige conductrice $\mathcal{T}$ de masse $m = 10$ g.

Celle-ci glisse sans frottement sur les rails tout en leur restant perpendiculaire.

On repère la position x de la tige sur l'axe (Ox). On suppose que les rails conducteurs et la tige ont une résistance nulle.

L'ensemble est soumis à un champ magnétique uniforme permanent $\vec{B} = B\vec{e_z}$, avec $B = 1$ T. À l'instant initial, la tige est lancée à une vitesse $\vec{v}(t=0) = v_0\vec{e_x}$.



Le composant D est un dipôle dont la nature sera indiquée dans les exercices suivants.

Entraînement 5.15 — Rail de Laplace (I).

Dans cet entraînement, le dipôle D est une résistance R. On peut établir l'équation électrique (EE) et l'équation mécanique (EM) suivantes :

$$\begin{cases} B\ell v = Ri & \text{(EE)} \\ m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -B\ell i & \text{(EM).} \end{cases}$$

a) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$ .....

b) Quelle est l'expression de la vitesse $v(t)$?

(a) $v_0 \exp\left(-\dfrac{mR}{B^2\ell^2}t\right)$

(b) $v_0 \exp\left(-\dfrac{B\ell}{mR}t\right)$

(c) $v_0 \exp\left(-\dfrac{B^2\ell^2}{mR}t\right)$

(d) $v_0 \exp\left(-\dfrac{B^2\ell^2}{R}t\right)$

.....

Entraînement 5.16 — Rail de Laplace (II).

Dans cet entraînement, le dipôle D est un générateur de tension non idéal (constitué d'un générateur de tension idéal de force électromotrice E en série avec sa résistance interne r). On peut établir l'équation électrique (EE) et l'équation mécanique (EM) suivantes :

$$\begin{cases} B\ell v(t) + E = ri & \text{(EE)} \\ m\dfrac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = -B\ell i & \text{(EM).} \end{cases}$$

a) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$ .....

b) Quelle est l'expression de la vitesse limite v_{lim} atteinte par la tige ? .....

Entraînement 5.17 — Rail de Laplace (III).

Dans cet entraînement, le dipôle D est une bobine d'inductance $L = 0{,}5\,\mathrm{H}$ et de résistance $r = 1\,\Omega$.

On peut établir l'équation électrique (EE) et l'équation mécanique (EM) suivantes :

$$\begin{cases} B\ell v = L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + ri(t) & \text{(EE)} \\ m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -B\ell i(t) & \text{(EM).} \end{cases}$$

a) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$ .....

b) Quelle est l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$?

(a) $x^2 + \dfrac{r}{L}x + \dfrac{B^2\ell^2}{mL} = 0$

(b) $x^2 + \dfrac{L}{r}x + \dfrac{B^2\ell^2}{mL} = 0$

(c) $x^2 + \dfrac{L}{r}x + \dfrac{B^2\ell^2}{mL}x = 0$

.....

c) Comment peut-on qualifier le discriminant associé à l'équation caractéristique ?

(a) Il est strictement positif.

(b) Il est nul.

(c) Il est strictement négatif.

.....

d) Quelle est l'expression de $i(t)$?

Les nombres α et β sont réels.

(a) $\alpha \mathrm{e}^{\left(-\frac{r}{2L}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r^2}{L^2}-4\frac{B^2\ell^2}{mL}}\right)t} + \beta \mathrm{e}^{\left(-\frac{r}{2L}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r^2}{L^2}-4\frac{B^2\ell^2}{mL}}\right)t}$

(b) $\mathrm{e}^{-\frac{r}{2L}t}\left(\alpha\cos\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{r^2}{L^2}-4\dfrac{B^2\ell^2}{mL}}t\right) + \beta\sin\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{r^2}{L^2}-4\dfrac{B^2\ell^2}{mL}}t\right)\right)$

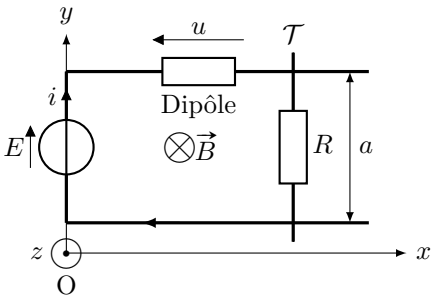
(c) $(\alpha + \beta t)\mathrm{e}^{-\frac{r}{2L}t}$

(d) $\mathrm{e}^{-\frac{r}{2L}t}\left(\alpha\cos\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{4\dfrac{B^2\ell^2}{mL}-\dfrac{r^2}{L^2}}t\right) + \beta\sin\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{4\dfrac{B^2\ell^2}{mL}-\dfrac{r^2}{L^2}}t\right)\right)$

.....

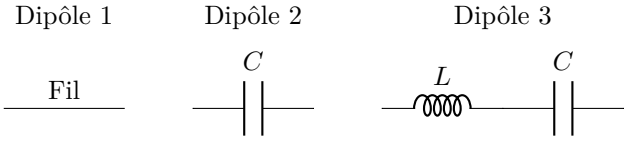
Entraînement 5.18 — Équations différentielles.

On considère un circuit constitué d'un générateur de force électromotrice constante E, d'un dipôle et d'une tige mobile $\mathcal{T}$ de résistance R repérée par la coordonnée x sur l'axe $(\mathrm{O}x)$, plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$. On oriente le circuit dans le sens horaire.

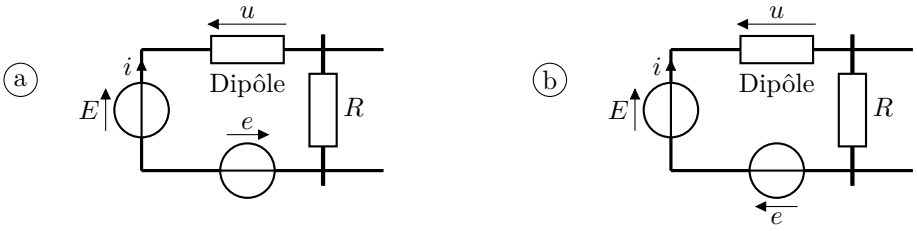


On admet que le principe fondamental de la dynamique appliqué à la tige $\mathcal{T}$ selon l'axe $(\mathrm{O}x)$ permet d'écrire la relation $m\ddot{x} = iaB$. De plus, la force électromotrice induite est $e = -Ba\dot{x}$.

On étudie les cas où le dipôle correspond à ces trois montages suivants.



a) Quel sera le montage complet en tenant compte de la force électromotrice induite e ?



.....

b) Exprimer la tension u à partir de la loi des mailles en fonction de E, i, R, B, a et $\dot{x}$.

.....

c) Exprimer $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ en fonction de B, a, m, R, i et de $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ .....

d) Donner l'équation différentielle vérifiée par i pour le dipôle 1.

.....

e) Donner l'équation différentielle vérifiée par i pour le dipôle 2.

.....

f) Donner l'équation différentielle vérifiée par i pour le dipôle 3.

.....

Autres entraînements

Entraînement 5.19 — Vitesse limite.

L'expression de la vitesse $v(t)$ d'une tige sur des rails de Laplace a pour expression

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{e}{Ba}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$

a) Comment s'écrit la dimension du coefficient τ ?

On note T *la dimension d'un temps et* M *la dimension d'une masse.*

(a) 1
(b) T
(c) T^{-1}
(d) $\mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-1}$

b) En supposant que, à $t = 0$, $x(t = 0) = x_0$, déterminer $x(t)$.

Entraînement 5.20 — Un système couplé.

Après écriture de la loi des mailles et de la relation fondamentale de la dynamique, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} Ri + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + aBv = 0 \\ m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - iBa = mg. \end{cases}$$

a) Quelle est l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$?

(a) $\dfrac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{aBv}{Lm} = \dfrac{Rg}{L}$

(b) $\dfrac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{a^2B^2v}{Lm} = \dfrac{Rg}{L}$

(c) $\dfrac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - \dfrac{a^2B^2v}{Lm} = \dfrac{Rg}{L}$

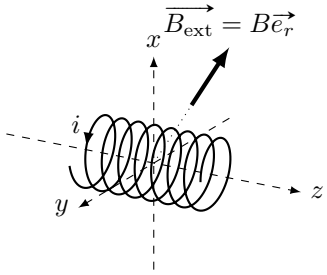
b) Quelle est la dimension du coefficient $\dfrac{Rg}{L}$?

On note T *la dimension d'un temps et* M *la dimension d'une masse.*

(a) 1
(b) $\mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-3}$
(c) $\mathrm{L}^{-1} \cdot \mathrm{T}^{3}$
(d) $\mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-2}$

Entraînement 5.21 — Force de Laplace.

Soit une bobine de N spires de rayon R d'axe (Oz) et soumise à un champ magnétique extérieur radial $\overrightarrow{B_{\text{ext}}} = B\overrightarrow{e_r}$ dans le système de coordonnées cylindriques.



a) Donner l'expression d'un élément de longueur dℓ de la bobine.

(a) dr (b) dz (c) dx (d) $R\,\mathrm{d}\theta$

.....

b) Déterminer l'expression de la force de Laplace s'exerçant sur la bobine.

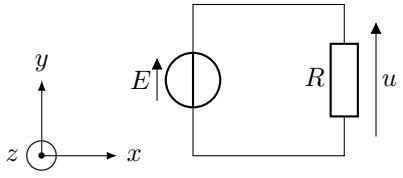
.....

Entraînement 5.22 — Choix du sens du courant induit.

Soit un circuit électrique de surface $S = 500\,\mathrm{cm}^2$, composé d'un générateur idéal délivrant une tension $E = 200\,\mathrm{mV}$ et un résistor de résistance $R = 5\,\mathrm{k\Omega}$.

Il est plongé dans un champ magnétique tel que $\vec{B} = B\dfrac{t}{\tau}\overrightarrow{e_z}$ avec $B = 2\,\mathrm{T}$.

On prendra $\tau = 1\,\mathrm{s}$.



On choisit d'orienter le courant induit i_{ind} dans le sens horaire.

a) Dans quel sens est orientée la flèche de tension de la fém e induite par rapport à E ?

(a) dans le même sens (b) dans le sens opposé

.....

b) À partir de la règle de la main droite, exprimer le vecteur surface du circuit $\vec{S}$ en fonction de S et des vecteur de la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$.

.....

c) Exprimer le flux magnétique ϕ traversant le circuit en fonction de B, t, τ et S.

.....

d) Exprimer la fém e apparaissant dans le circuit en fonction de B, τ et S .....

e) Quelle est la valeur de la tension u aux bornes du résistor ? .....

On choisit d'orienter le courant induit i_{ind} dans le sens anti-horaire.

f) Dans quel sens est orientée la flèche de tension de la fém e induite par rapport à E ?

(a) dans le même sens (b) dans le sens opposé

.....

g) À partir de la règle de la main droite, exprimer le vecteur surface du circuit $\vec{S}$ en fonction de S et des vecteur de la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$.

.....

h) Exprimer le flux magnétique ϕ traversant le circuit en fonction de B, t, τ et S.

.....

i) Exprimer la fém e apparaissant dans le circuit en fonction de B, τ et S .....

j) Calculer la valeur de la tension u aux bornes du résistor .....

Entraînement 5.23 — Un bilan de puissance.

On considère le système d'équations électrique (EE) et mécanique (EM) suivant, avec la force électromotrice induite $e = -Bav$, la force de Laplace de valeur $f_{\text{L}} = Bai$, la force de rappel d'un ressort de valeur $-kx$ et une force de frottement fluide de valeur $-\alpha v$:

$$\begin{cases} E + e = Ri & \text{(EE)} \\ m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = f_{\text{L}} - kx - \alpha v & \text{(EM).} \end{cases}$$

On rappelle que l'énergie cinétique de la barre est $E_c = \dfrac{1}{2}mv^2$; que la puissance dissipée par effet Joule est $\mathcal{P}_J = Ri^2$; que l'énergie potentielle de la barre est $E_p = \dfrac{1}{2}kx^2$; enfin, que la puissance dissipée par frottements est $\mathcal{P}_f = \alpha v^2$.

a) Exprimer, en fonction de E, R et i, le terme $Bavi$ à partir de e dans (EE).

.....

b) Exprimer, en fonction de m, v, k, x et α le terme $Bavi$ à partir de f_{L} dans (EM).

.....

c) Égaliser les expressions obtenues en a) et b) pour exprimer la puissance fournie Ei en fonction des grandeurs E_{c}, $\mathcal{P}_{\text{J}}$, E_{p} et $\mathcal{P}_{\text{f}}$.

On rappelle que $v = \dot{x}$.

.....

Réponses mélangées

$\vec{e_y}$ 300 mV $\pi a^2 B_\mathrm{m}\cos(\omega t)$ (c) $B\pi R^2$ $i\frac{\sqrt{3}}{2}aB\vec{e_x}$ (b)

$2\pi B_0\frac{a^2}{6}$ (b) $\vec{0}$ $-B(a-(x_\mathrm{c}-\ell))\ell$ oui (c) $R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{(Ba)^2}{m}i=0$

$2\pi B_0\left(\frac{R^2}{2}-\frac{R^3}{3a}\right)$ $Ei-Ri^2$ 0 $\frac{\sqrt{3}}{2}B\pi R^2$ $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{B^2\ell^2}{mR}v=0$

300 mV $R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\left(\frac{(Ba)^2}{m}+\frac{1}{C}\right)i=0$ (a) $\pi R^2 B_\mathrm{m}\cos(\omega t)$ $S\vec{e_y}$

$L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2}+R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\left(\frac{(Ba)^2}{m}+\frac{1}{C}\right)i=0$ $-S\vec{e_z}$ (b) $-B\frac{t}{\tau}S$ (b) $-\frac{B\pi R^2}{2}$

$-i\frac{\sqrt{3}}{2}aB\vec{e_z}$ (c) $iaB\vec{e_y}$ $\frac{\mu_0 NIa}{2\pi}\ln\left(\frac{d+a}{d}\right)$ $mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+kxv+\alpha v^2$ $mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}-fv$

$\vec{0}$ oui $\frac{-\alpha B\underline{I}}{h+\mathrm{j}(m\omega-\frac{k}{\omega})}$ $-\vec{e_z}$ (d) $\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{B^2\ell^2}{mr}v(t)=-\frac{B\ell E}{mr}$ 0

$-ibB\vec{e_x}$ $-\frac{(Ba)^2}{m}i-R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ $\vec{0}$ non $\mathrm{d}S=r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r$ oui $-iB2\pi RN\vec{e_z}$

0 $\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e_y}+\vec{e_z})$ (a) $\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t}+\mathcal{P}_\mathrm{J}$ non (c) $-Ri^2$ $E-Ba\dot{x}-Ri$

(a) $S\vec{e_z}$ (b) $-Bv\ell$ (a) (c) $\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}t}+\mathcal{P}_\mathrm{f}+\mathcal{P}_\mathrm{J}$ $\frac{BSt}{\tau}$

$B_0\omega\sin(\omega t)\frac{r}{2}$ $\frac{\mathrm{d}^2 i(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{r}{L}\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{B^2\ell^2}{mL}i(t)=0$ $-B\ell^2$ (d) (a) $-\frac{E}{B\ell}$

$\frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi}\ln\left(\frac{d+a}{d}\right)$ $\frac{BS}{\tau}$ 0 $-iaB\vec{e_y}$ $-Bx_\mathrm{c}\ell$ $B\pi R^2\cos(\omega t)$ (b)

$IBS\vec{e_x}$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e_y}+\vec{e_z})$ $-\frac{BS}{\tau}$ $Bv\ell$ $\vec{e_z}$ (c) $x_0+\frac{e}{Ba}\left(t+\tau\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}-\tau\right)$

(d) (c) non $\vec{e_y}$ aucune (d) $-IBS\vec{e_z}$ (a) (d) $ibB\vec{e_x}$

► Réponses et corrigés page 173

Ondes électromagnétiques I

Prérequis

Pour une onde plane progressive monochromatique : $\lambda = c/f$ et $f = 1/T$.
Équations de Maxwell dans un espace vide de charges et de courants :

$$\operatorname{div}\vec{E} = 0 \qquad \text{(Maxwell-Gauss)}$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \qquad \text{(Maxwell-Thomson)}$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{(Maxwell-Faraday)}$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \text{(Maxwell-Ampère)}$$

Formules d'analyse vectorielle, en coordonnées cartésiennes :

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e_x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{e_y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{e_z}$$

$$\vec{\Delta}\vec{A} = \Delta A_x\vec{e_x} + \Delta A_y\vec{e_y} + \Delta A_z\vec{e_z}$$

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

Constantes utiles

→ Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3{,}00 \times 10^8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$
→ Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{H\cdot m^{-1}}$
→ Permittivité du vide : $\varepsilon_0 = 9 \times 10^{-12}\,\mathrm{F\cdot m^{-1}}$

Calculs numériques

Entraînement 6.1 — Fréquence, longueur d'onde, vitesse de propagation.

Calculer, avec un chiffre significatif, les grandeurs suivantes :

a) la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide $c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$ ..

b) La fréquence f d'une onde de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 600\,\mathrm{nm}$ .....

c) La longueur d'onde dans le vide d'une onde de fréquence $f = 3\,\mathrm{GHz}$ .....

d) La période d'une onde de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 3\,\mathrm{pm}$ .....

Entraînement 6.2 — Combat de grandeurs (I).

On considère un pointeur laser émettant une onde représentée par son champ électromagnétique

$$\vec{E}(M,t) = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{e_z} \quad \text{et} \quad \vec{B}(M,t) = -\frac{E_0}{c}\cos(\omega t - kx)\vec{e_y},$$

avec $E_0 = 100\,\mathrm{V}\cdot\mathrm{m}^{-1}$ et une ampoule classique à filament de puissance lumineuse égale à 100 W.

Le faisceau laser est un cylindre de section $S = 1{,}0\,\mathrm{mm}^2$.

a) Expliciter la puissance moyenne surfacique $\langle P\rangle = \left\langle \iint \vec{\Pi}\cdot\vec{\mathrm{d}S}\right\rangle$, avec $\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$.

On rappelle que $\langle\cos^2(\alpha)\rangle = 1/2$ *si* α *dépend du temps* .....

b) Calculer numériquement la puissance moyenne du laser .....

c) Qui de l'ampoule classique ou du laser est le plus puissant en moyenne ? .....

Entraînement 6.3 — Combat de grandeurs (II).

On souhaite comparer le champ magnétique terrestre égal à 5×10^{-5} T à une onde radiofréquence représentée par son champ magnétique $\vec{B}(M,t) = B_0\cos(\omega t - kx)\vec{e_z}$, de puissance moyenne 1 W.

Le faisceau a une section $S = 1\,\mathrm{m}^2$. On rappelle que dans ce cas $B_0 = \dfrac{E_0}{c}$ où E_0 est la norme du champ électrique de l'onde plane.

a) Exprimer B_0 en fonction de la puissance moyenne rayonnée $\langle P\rangle = \dfrac{E_0^2 S}{2\mu_0 c}$ .....

b) Que dire du champ magnétique de l'onde radiofréquence ?

(a) Il est plus intense que le champ terrestre.

(b) Il est moins intense que le champ terrestre.

(c) Il est du même ordre de grandeur que le champ terrestre.

.....

Dérivées partielles et opérateurs

Entraînement 6.4 — Calcul de dérivées partielles (I).

On considère le champ électrique suivant : $\vec{E}(M,t) = E_0\cos(\omega t - kx)\vec{e_z}$. Calculer :

a) $\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ .....

b) $\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial x}$ .....

c) $\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial z}$ .....

d) $\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial x^2}$ .....

e) $\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$ .....

Entraînement 6.5 — Calcul de dérivées partielles (II).

On considère le champ magnétique suivant : $\vec{B}(M,t) = B_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kx)\vec{e_z}$. Calculer :

a) $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ .....

b) $\frac{\partial \vec{B}}{\partial x}$ .....

c) $\frac{\partial \vec{B}}{\partial y}$ .....

d) $\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$ .....

e) $\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2}$ .....

f) $\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial y^2}$ .....

Entraînement 6.6 — Calcul d'opérateurs vectoriels (I).

On considère le champ électrique suivant : $\vec{E}(M,t) = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{e_z}$. Calculer :

a) $\operatorname{div} \vec{E}$ .....

b) $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{E}$ .....

c) $\vec{\Delta}\vec{E}$ .....

Entraînement 6.7 — Calcul d'opérateurs vectoriels (II).

On considère le champ $\vec{A}(M,t)$ dont les composantes sont données par :

$$\begin{cases} A_x &= 0 \\ A_y &= A_0 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kz) \\ A_z &= \alpha A_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kz). \end{cases}$$

Calculer :

a) $\operatorname{div} \vec{A}$ .....

b) $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{A}$ .....

c) $\vec{\Delta}\vec{A}$ .....

Entraînement 6.8 — Équation de propagation.

On cherche dans cet entraînement à démontrer l'équation de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide. On rappelle pour cela la formule du double rotationnel d'un vecteur $\vec{A}$:

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\,\vec{A}) - \vec{\Delta}\vec{A}.$$

a) En utilisant l'équation de Maxwell-Faraday puis celle de Maxwell-Ampère, on montre que :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}) = \alpha\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}.$$

Quelle est l'expression de α ?

(a) $\alpha = \mu_0\varepsilon_0$ (b) $\alpha = \dfrac{1}{\mu_0\varepsilon_0}$ (c) $\alpha = -\mu_0\varepsilon_0$

.....

b) En utilisant l'équation de Maxwell-Gauss et la formule du double rotationnel, établir une seconde expression de $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E})$ .....

c) En égalisant les expressions de $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E})$ obtenues aux questions précédentes, on obtient l'équation de d'Alembert $\vec{\Delta}\vec{E} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$.

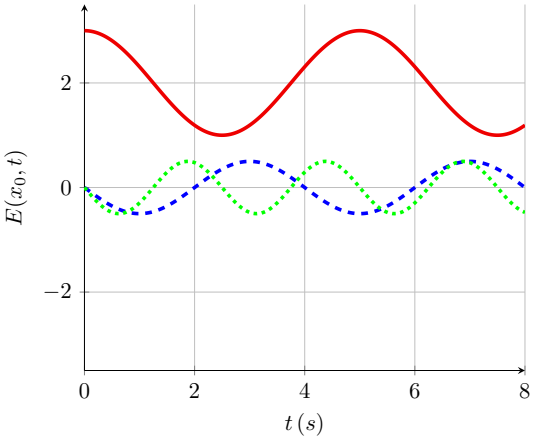
Exprimer c en fonction de ε_0 et μ_0 .....

Solutions de l'équation de propagation

Entraînement 6.9 — Représentation d'un signal.

On considère trois signaux :

- signal n° 1 :
$$E(x_0,t) = 2 + \cos\left(2\pi\frac{t}{T_1}\right) \text{ avec } T_1 = 5\,\text{s}$$
- signal n° 2 :
$$E(x_0,t) = 0{,}5\cos\left(2\pi\frac{t}{T_2} + \frac{\pi}{2}\right) \text{ avec } T_2 = 4\,\text{s}$$
- signal n° 3 :
$$E(x_0,t) = 0{,}5\cos\left(2\pi\frac{t}{T_3} + \frac{\pi}{2}\right) \text{ avec } T_3 = 2{,}5\,\text{s}$$



On donne ci-contre leurs représentations graphiques (à x_0 fixé, en fonction du temps).

a) À quel signal la courbe en trait plein est-elle associée ? .....

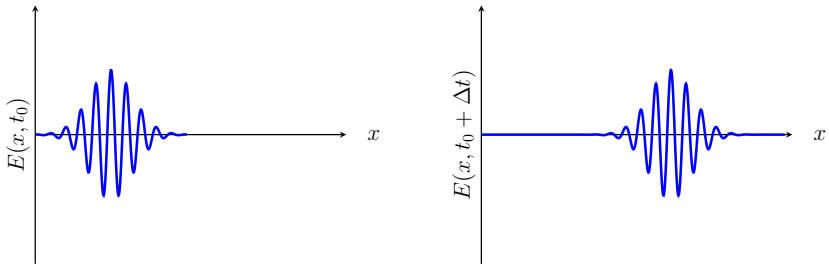
b) À quel signal la courbe en tirets est-elle associée ? .....

c) À quel signal la courbe en pointillés est-elle associée ? .....

Entraînement 6.10 — Caractérisation d'une onde.

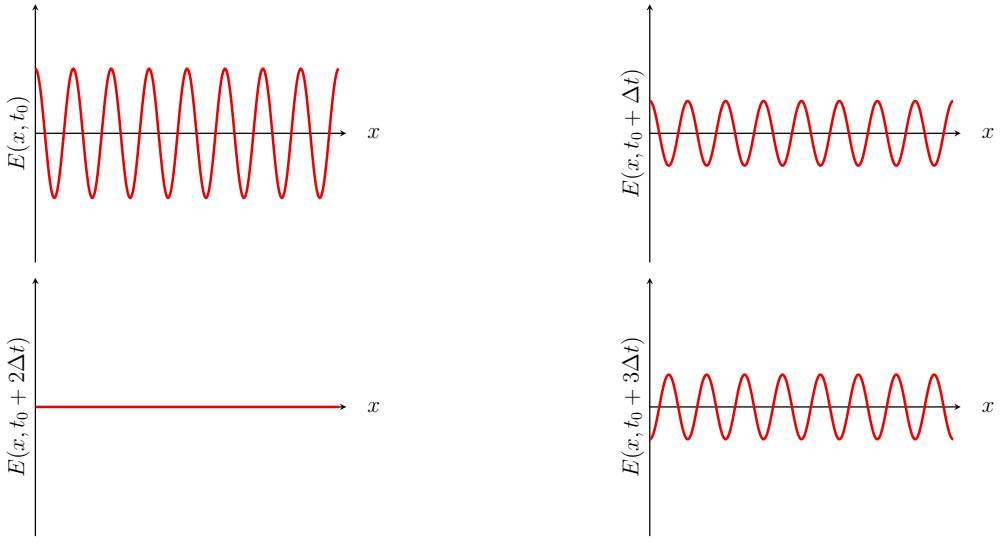
Dans chaque cas, dire si l'onde représentée est progressive (c'est-à-dire de la forme $f(x-ct)$ ou $g(x+ct)$) et/ou harmonique (dont la dépendance temporelle est sinusoïdale).

a)



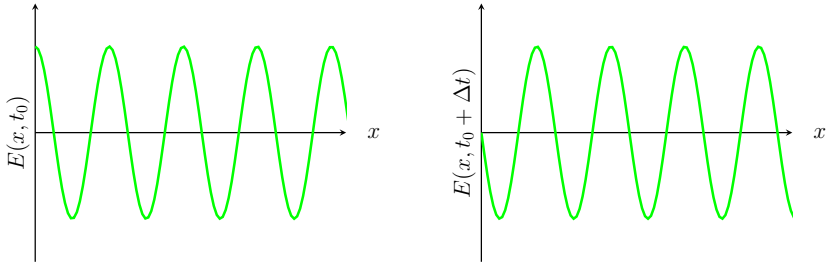
.....

b)



.....

c)



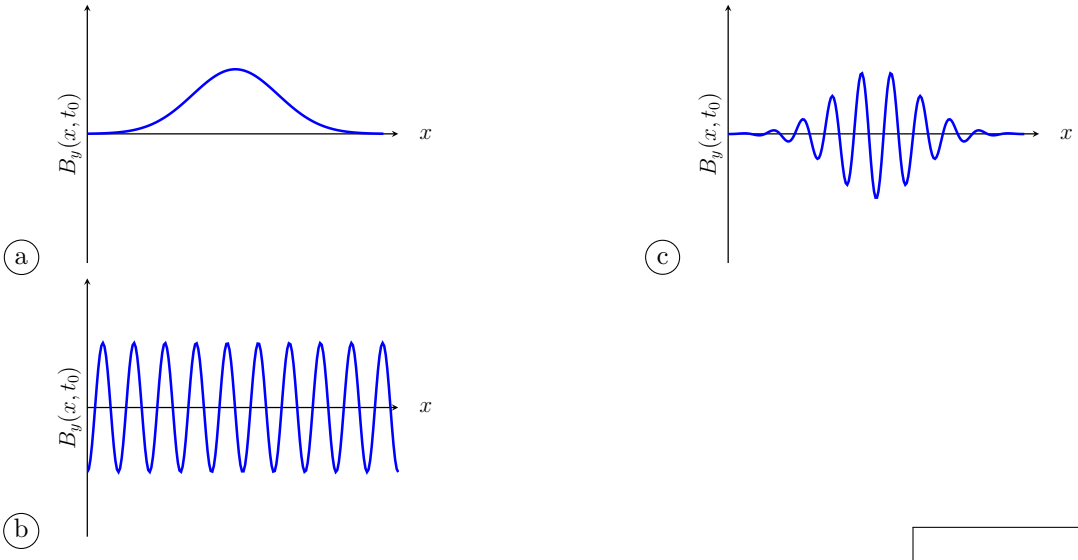
.....

Entraînement 6.11 — Onde représentée par son champ magnétique.

On étudie une onde électromagnétique dont le champ magnétique s'écrit :

$$\vec{B}(M,t) = B_0 \exp\big(-(t/\tau - x/\delta)^2\big)\vec{u_y}.$$

Choisir la représentation qui convient :



.....

Entraînement 6.12 — Onde électromagnétique dans un guide d'ondes.

Soit une onde électromagnétique, dont le champ électrique est donné par :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\alpha z)\sin(\omega t - kx)\vec{e_y},$$

où E_0 et α sont des constantes. On rappelle l'équation de propagation d'une onde électromagnétique dans le vide, aussi appelée équation de d'Alembert :

$$\vec{\Delta}\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

a) Calculer $\vec{\Delta}\vec{E}$ .....

b) Calculer $\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$, sans utiliser l'équation de d'Alembert .....

c) En utilisant l'équation de d'Alembert, exprimer k en fonction de ω, α et c .....

On rappelle qu'il y a dispersion si la vitesse de phase $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k}$ de l'onde dépend de ω.

d) Y a-t-il dispersion ici ? .....

Entraînement 6.13 — Onde sphérique progressive.

On considère le champ électrique sphérique suivant : $\vec{E}(r,t) = \dfrac{a}{r}\cos(\omega t - kr)\,\vec{e_\theta}$.

On rappelle l'expression du rotationnel en coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \frac{1}{r\sin(\theta)}\left(\frac{\partial(\sin\theta A_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\vec{e_r} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{e_\varphi}.$$

a) Calculer le rotationnel du champ $\vec{E}$.

.....

b) En déduire le champ $\vec{B}$ associé à l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday.

.....

c) Indiquer les caractéristiques de la structure de ce champ électromagnétique :

(a) L'onde est transverse.
(b) L'onde est longitudinale.
(c) Les vecteurs $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ forment un trièdre direct.
(d) Les vecteurs $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ forment un trièdre indirect.
(e) Les vecteurs $(\vec{B}, \vec{k}, \vec{E})$ forment un trièdre direct.

.....

On attend plusieurs réponses.

Entraînement 6.14 — Onde dans un guide d'ondes.

On considère le champ électrique suivant :

$$\vec{E}(x,z,t) = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - kz)\vec{e_y}.$$

a) Exprimer les valeurs de z pour lesquelles le champ $\vec{E}$ s'annule.

.....

b) Exprimer les valeurs de x pour lesquelles le champ $\vec{E}$ s'annule.

.....

Entraînement 6.15 — Onde plane en notation complexe.

On considère le champ électrique complexe polarisé rectilignement suivant :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{E}_0 \exp\Big(\mathrm{j}(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)\Big)\vec{e_x} \qquad \text{et} \qquad \vec{k} = k_x\vec{e_x} + k_y\vec{e_y} + k_z\vec{e_z}.$$

Calculer :

a) la dérivée temporelle de $\underline{\vec{E}}$ .....

b) la divergence de $\underline{\vec{E}}$ .....

c) le rotationnel de $\underline{\vec{E}}$ .....

d) le laplacien vectoriel de $\underline{\vec{E}}$ .....

Attribuer alors à chaque opération de dérivation ci-dessous l'expression qui lui est associée.

(a) $-\mathrm{j}\vec{k}\cdot\underline{\vec{E}}$ (b) $-k^2\underline{\vec{E}}$ (c) $-\mathrm{j}\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}$ (d) $\mathrm{j}\omega\underline{\vec{E}}$

e) $\dfrac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t}$ .....

f) $\mathrm{div}\,\underline{\vec{E}}$ .....

g) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\underline{\vec{E}}$ .....

h) $\vec{\Delta}\,\underline{\vec{E}}$ .....

Entraînement 6.16 — Vitesse de phase et vitesse de groupe.

On considère une onde plane progressive harmonique pour laquelle la pulsation ω et le vecteur d'onde k vérifient la relation de dispersion $k^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_0^2}{c^2}$, où ω_0 est une constante positive telle que $\omega_0 < \omega$.

a) Exprimer la vitesse de phase $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k}$ de cette onde.

.....

b) En différentiant l'expression de k^2, exprimer la vitesse de groupe $v_\mathrm{g} = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$ de cette onde.

.....

Puissance et énergie des ondes électromagnétiques

Le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ et l'énergie volumique du champ w_{em} sont respectivement définis par :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \qquad \text{et} \qquad w_{\text{em}} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

Entraînement 6.17 — Puissance d'une onde plane progressive.

On considère le champ électromagnétique plan progressif monochromatique suivant :

$$\vec{E}(y,t) = E_0 \cos(\omega t - ky)\vec{e_z} \qquad \text{et} \qquad \vec{B}(y,t) = \frac{E_0}{c}\cos(\omega t - ky)\vec{e_x}.$$

a) Calculer le vecteur de Poynting .....

b) Calculer l'énergie volumique électromagnétique .....

Entraînement 6.18 — Puissance d'une onde sphérique progressive.

On considère le champ électromagnétique sphérique suivant :

$$\vec{E}(r,t) = \frac{a}{r}\cos(\omega t - kr)\vec{e_\theta} \quad \text{et} \quad \vec{B}(r,t) = \frac{a}{cr}\cos(\omega t - kr)\vec{e_\varphi}.$$

a) Calculer le vecteur de Poynting .....

b) Calculer l'énergie volumique électromagnétique .....

c) Calculer la puissance rayonnée $P = \iint \vec{\Pi} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$ à travers une sphère de centre O et de rayon r.

.....

Entraînement 6.19 — Puissance d'une onde dans un guide d'ondes.

Pour un certain champ électromagnétique dans le vide, on a : $\vec{E}(x,z,t) = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - kz)\vec{e_y}$.

a) Calculer le champ $\vec{B}$ associé à l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday.

.....

b) Calculer le vecteur de Poynting .....

c) Donner la moyenne temporelle du vecteur de Poynting.

On rappelle que $\langle \cos^2(\alpha) \rangle = \frac{1}{2}$ *si* α *dépend du temps* .....

Autour de la polarisation

Entraînement 6.20 — Polarisation rectiligne et circulaire.

On considère les champs électriques, de période T, en représentation réelle ou complexe, suivants :

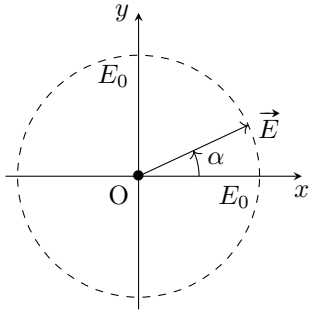
$$\overrightarrow{E_1} = \begin{cases} E_0 \cos\alpha \cos(\omega t - kz)\overrightarrow{e_x} \\ E_0 \sin\alpha \cos(\omega t - kz)\overrightarrow{e_y} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{E_2} = \begin{cases} E_0 \cos(\omega t + kz + \alpha)\overrightarrow{e_x} \\ E_0 \sin(\omega t + kz + \alpha)\overrightarrow{e_y} \end{cases}$$

$$\underline{\overrightarrow{E_3}} = E_0 \exp[\mathrm{j}(\omega t - kz + \alpha)]\,(\overrightarrow{e_x} - \mathrm{j}\overrightarrow{e_y})$$

$$\overrightarrow{E_4} = \begin{cases} E_0 \cos(\omega t + kz - \alpha)\overrightarrow{e_x} \\ -E_0 \sin(\omega t + kz - \alpha)\overrightarrow{e_y} \end{cases}$$

où E_0 est un réel positif.



Ces champs sont tous représentés à $t = 0$ et $z = 0$ par la figure ci-dessus.

Indiquer, pour chaque champ, le type de polarisation et la direction de propagation parmi les cas suivants :

(a) Rectiligne se propageant selon $+z$
(b) Rectiligne se propageant selon $-z$
(c) Circulaire gauche se propageant selon $+z$
(d) Circulaire gauche se propageant selon $-z$
(e) Circulaire droite se propageant selon $+z$
(f) Circulaire droite se propageant selon $-z$

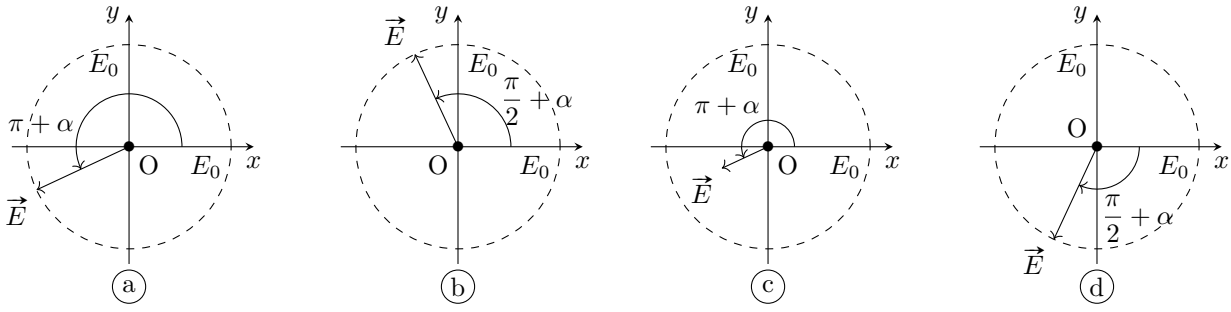
a) Pour $\overrightarrow{E_1}$ .....

b) Pour $\overrightarrow{E_2}$ .....

c) Pour $\underline{\overrightarrow{E_3}}$ .....

d) Pour $\overrightarrow{E_4}$ .....

Parmi les représentations suivantes, en $z = 0$, laquelle représente :



e) le champ $\overrightarrow{E_1}\left(t = \frac{T}{3}, z = 0\right)$? ...

f) le champ $\overrightarrow{E_2}\left(t = \frac{T}{2}, z = 0\right)$? ...

g) le champ $\underline{\overrightarrow{E_3}}\left(t = \frac{T}{4}, z = 0\right)$? ...

h) le champ $\overrightarrow{E_4}\left(t = \frac{T}{4}, z = 0\right)$? ...

Réponses mélangées

$\frac{\pi}{a}B_0\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos(\omega t-kx)\vec{e_z}$ signal n° 2 (c) $\mathrm{j}\omega\underline{\vec{E}}$ $-kE_0\sin(\omega t-kx)\vec{e_y}$

$1\times10^{-5}\,\mathrm{W}$ $\frac{ak}{\omega r}\cos(\omega t-kr)\vec{e_\varphi}$ $B_0=\sqrt{\frac{2\mu_0\langle P\rangle}{cS}}$ $v_\mathrm{g}=c\sqrt{1-\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}$

$-\left(\frac{\pi}{a}\right)^2B_0\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos(\omega t-kx)\vec{e_z}$ oui $\varepsilon_0cE_0^2\cos^2(\omega t-ky)\vec{e_y}$ (b)

(a), (c) et (e) $-\omega^2\vec{E}$ $\frac{\varepsilon_0cE_0^2}{2}\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\vec{e_z}$ $A_0\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\left(\frac{\pi}{a}\alpha\cos(\omega t-kz)-k\sin(\omega t-kz)\right)\vec{e_x}$

$-\vec{\Delta}\vec{E}$ (c) Ampoule classique (a) (b) $\frac{ak}{r}\sin(\omega t-kr)\vec{e_\varphi}$ Progressive

$\frac{E_0^2}{\mu_0}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\left[\frac{1}{c}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos^2(\omega t-kz)\vec{e_z}-\frac{\pi}{a\omega}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t-kz)\sin(\omega t-kz)\vec{e_x}\right]$ (b) $\vec{0}$ (d) $-(\alpha^2+k^2)\vec{E}$ (c)

$v_\varphi=\frac{c}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$ $1\times10^{-20}\,\mathrm{s}$ $-\omega^2B_0\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos(\omega t-kx)\vec{e_z}$ $k^2=\frac{\omega^2}{c^2}-\alpha^2$

$kB_0\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\sin(\omega t-kx)\vec{e_z}$ (a) (a) (d) $\frac{\varepsilon_0ca^2}{r^2}\cos^2(\omega t-kr)\vec{e_r}$ $\frac{E_0^2S}{2\mu_0c}$

0 $z=ct-(2p+1)\frac{\lambda}{4}$ $1\times10^{-1}\,\mathrm{m}$ $-k^2\underline{\vec{E}}$ $-\omega B_0\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\sin(\omega t-kx)\vec{e_z}$ (a)

$-k^2\vec{E}$ $-\mathrm{j}k_x\underline{E}_x$ $\frac{\varepsilon_0a^2}{r^2}\cos^2(\omega t-kr)$ $-k^2B_0\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos(\omega t-kx)\vec{e_z}$ $3\times10^8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

$kE_0\sin(\omega t-kx)\vec{e_z}$ (f) $x=qa$ Progressive et harmonique $-\mathrm{j}k_z\underline{E}_x\vec{e_y}+\mathrm{j}k_y\underline{E}_x\vec{e_z}$

(c) $5\times10^{14}\,\mathrm{Hz}$ $\frac{E_0}{\omega}\left[-k\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t-kz)\vec{e_x}-\frac{\pi}{a}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin(\omega t-kz)\vec{e_z}\right]$ $A_0\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\left(-\frac{\pi}{a}\cos(\omega t-kz)+k\alpha\sin(\omega t-kz)\right)$

Stationnaire, donc non progressive et harmonique signal n° 1 $-k^2E_0\cos(\omega t-kx)\vec{e_z}$ $c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$

$-A_0\cos(\omega t-kz)\left(\left(\frac{\pi}{a}\right)^2+k^2\right)\times\left(\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\vec{e_y}+\alpha\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\vec{e_z}\right)$ $4\pi\varepsilon_0ca^2\cos^2(\omega t-kr)$ signal n° 3

(d) $-\omega^2E_0\cos(\omega t-kx)\vec{e_z}$ $\varepsilon_0E_0^2\cos^2(\omega t-ky)$ $-\omega E_0\sin(\omega t-kx)\vec{e_z}$

► Réponses et corrigés page 181

Ondes électromagnétiques II

Prérequis

Maxwell-Gauss (M-G) $\operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$	Maxwell-Thomson (M-T) $\operatorname{div}\vec{B} = 0$
Maxwell-Faraday (M-F) $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$	Maxwell-Ampère (M-A) $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j} + \varepsilon_0\,\mu_0\,\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$
Relation entre c, μ_0 et ε_0 $\varepsilon_0\,\mu_0 c^2 = 1$	Loi d'Ohm locale $\vec{j} = \gamma\vec{E}$

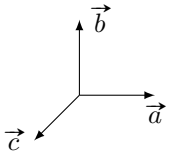
Pour bien commencer

Entraînement 7.1 — Vecteurs orthogonaux ou colinéaires.

Dans chaque cas, déterminer si les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont cohérents avec les équations fournies.

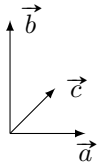
Répondre simplement par « oui » ou « non ».

a) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ et $\vec{a}\cdot\vec{c} = 0$



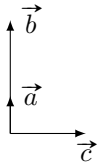
.....

b) $\vec{a}\wedge\vec{b} = \vec{c}$



.....

c) $\vec{a}\wedge\vec{b} = \vec{0}$ et $\vec{a}\cdot\vec{c} = 0$



.....

Entraînement 7.2 — Dériver des exponentielles complexes.

Établir une relation de dispersion liant $\underline{k}$ à ω pour chaque équation différentielle.

On s'appuiera sur un champ électrique de la forme :

$$\underline{\vec{E}}(z,t) = E_0 \exp[\mathrm{i}(\omega t - \underline{k}z)]\vec{e_x}.$$

a) $\dfrac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t} + \alpha\dfrac{\partial^2\underline{\vec{E}}}{\partial z^2} = \vec{0}$ .....

b) $\dfrac{\partial^3\underline{\vec{E}}}{\partial t^3} + \alpha\dfrac{\partial^3\underline{\vec{E}}}{\partial z^3} + \beta\dfrac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t} = \vec{0}$ .....

c) $\dfrac{\partial^2\underline{\vec{E}}}{\partial t^2} + \alpha\dfrac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial z} + \beta\underline{\vec{E}} = \vec{0}$ .....

Entraînement 7.3 — Conservation de la charge.

On considère dans un plasma « dilué » une onde électromagnétique de fréquence suffisamment élevée, ce qui simplifie l'écriture de la densité volumique de courant en notation complexe $\underline{\vec{j}} = \underline{\alpha}(\omega)\,\underline{\vec{E}}$.

En régime sinusoïdal forcé, l'équation de conservation de la charge s'écrit $\mathrm{i}\omega\underline{\rho} + \mathrm{div}\,\underline{\vec{j}} = 0$.

a) Établir une relation entre $\underline{\rho}$, $\underline{\alpha}$ et ω .....

b) En tenant compte de l'expression de la conductivité complexe $\underline{\alpha} = \dfrac{N\,e^2}{\mathrm{i}\,m\,\omega}$ et en introduisant la pulsation plasma $\omega_p = \sqrt{\dfrac{N\,e^2}{m\,\varepsilon_0}}$, établir une relation liant ω, ω_p et $\underline{\rho}$ .....

Entraînement 7.4 — Expression du vecteur d'onde.

On considère une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement et caractérisée par le champ électrique complexe $\underline{\vec{E}} = E_0\,\exp[\mathrm{i}\,(\omega\,t - \underline{k}\,z)]\,\vec{e_x}$. On pose $\alpha_0 = \omega_p^2\tau\varepsilon_0 = \dfrac{\omega_p^2\,\tau}{\mu_0\,c^2}$.

Cette onde se propage dans un métal réel de conductivité α. On admet que la relation de dispersion est :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 + \mathrm{i}\frac{\omega_p^2\,\tau^2}{\omega\,\tau\,(1 - \mathrm{i}\,\omega\,\tau)}\right].$$

Dans les différents cas, déterminer l'expression de $\underline{k}$.

a) $\omega \ll \dfrac{1}{\tau} \ll \omega_p$ .....

b) $\dfrac{1}{\tau} \ll \omega < \omega_p$ .....

c) $\dfrac{1}{\tau} \ll \omega_p < \omega$ .....

d) $\dfrac{1}{\tau} \ll \omega_p \ll \omega$ .....

Entraînement 7.5 — Vitesse de phase.

Dans un milieu de propagation, les vitesses de phase v_φ et de groupe v_g d'une onde sont définies par

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k'} \quad \text{et} \quad v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k'},$$

où k' est la partie réelle positive du vecteur d'onde $\underline{\vec{k}}$. Dans un plasma, la relation de dispersion s'écrit :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2},$$

où ω_p est une constante.

a) Exprimer la vitesse de phase v_φ lorsque $\omega > \omega_p$ .....

b) Exprimer la vitesse de groupe v_g lorsque $\omega > \omega_p$ .....

Énergie et puissance

Entraînement 7.6 — Vecteur de Poynting et énergie du champ.

On considère un champ électromagnétique dans un milieu d'indice réel n défini par

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz)\vec{e_x}$$
$$\text{et} \quad \vec{B} = \frac{n}{c} E_0 \cos(\omega t - kz)\vec{e_y}.$$

Le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ et l'énergie volumique du champ w_{em} sont définis par

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \quad \text{et} \quad w_{em} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

a) Exprimer le vecteur de Poynting .....

b) Exprimer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting .....

c) Déterminer l'énergie volumique associée à l'onde .....

d) Exprimer la moyenne temporelle de l'énergie .....

Entraînement 7.7 — Puissance dans un conducteur.

On considère une onde dans un conducteur d'épaisseur de peau δ, de conductivité réelle γ, vérifiant

$$\vec{E} = E_0 \mathrm{e}^{-\frac{x}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\vec{e_y}$$
$$\text{et} \quad \vec{B} = \frac{E_0}{\omega\delta} \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\left[\sin\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) + \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\right]\vec{e_z}.$$

Le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ et la puissance volumique perdue par effet Joule p_J sont définis par

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \quad \text{et} \quad p_J = \vec{j} \cdot \vec{E}.$$

a) Exprimer la moyenne du vecteur de Poynting.

.....

b) Exprimer la puissance moyenne perdue par effet Joule.

.....

Entraînement 7.8 — Vecteur de Poynting en notation complexe.

En notation complexe, la moyenne temporelle du vecteur de Poynting pour des ondes planes progressives monochromatiques est donnée par

$$\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle = \frac{\mathrm{Re}(\underline{\vec{E}}^* \wedge \underline{\vec{B}})}{2\mu_0},$$

où le symbole * désigne la conjugaison complexe. On considère un champ électromagnétique dans un milieu d'indice complexe $\underline{n}$ défini par

$$\underline{\vec{E}} = \underline{E}_0 \exp[\mathrm{i}(\omega t - kz)]\vec{e_x} \qquad \text{et} \qquad \underline{\vec{B}} = \frac{n\,\underline{E}_0}{c} \exp[\mathrm{i}(\omega t - kz)]\vec{e_y}.$$

Déterminer la moyenne du vecteur de Poynting .....

Manipuler les équations de Maxwell

Entraînement 7.9 — Relation de dispersion.

On considère l'équation de propagation complexe dans un plasma :

$$\Delta\underline{\vec{E}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \underline{\vec{j}}}{\partial t}.$$

Le champ électrique qui se propage dans le plasma vaut : $\underline{\vec{E}} = E_0 \exp[\mathrm{i}\,(\omega\, t - \underline{k}\, z)]\,\vec{e_x}$ avec $\underline{\vec{k}} = \underline{k}\,\vec{e_z}$.

En tenant compte de l'expression du vecteur densité de courant $\underline{\vec{j}} = \underline{\alpha}\,\underline{\vec{E}} = \dfrac{n\,e^2}{\mathrm{i}\,\omega\, m}\,\underline{\vec{E}}$, établir l'équation de dispersion, liant k, ω, c et $\omega_p^2 = \dfrac{n\,e^2}{m\varepsilon_0}$.

.....

Entraînement 7.10 — Établir une équation d'onde.

On considère un milieu ohmique localement neutre tel que : $\rho = 0$ et $\vec{j} = \gamma\vec{E}$. On pourra utiliser la relation

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\,\vec{E}) - \Delta\vec{E}.$$

a) Exprimer l'équation de Maxwell-Gauss modifiée.

.....

b) Exprimer l'équation de Maxwell-Ampère modifiée.

.....

c) Déterminer l'équation différentielle à laquelle $\vec{E}$ obéit.

.....

Entraînement 7.11 — Vérification des équations de Maxwell (I).

Nous nous plaçons dans le vide ($\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$) et nous supposons que $\vec{E}$ et $\vec{B}$ s'écrivent

$$\vec{E}(z,t) = E_0 \cos(\omega t - kz)\vec{e_z}$$

$$\text{et} \quad \vec{B}(z,t) = \frac{kE_0}{\omega} \cos(\omega t - kz)\vec{e_x} \quad \text{avec} \quad k = \omega/c.$$

a) Le champ électrique vérifie-t-il l'équation de Maxwell-Gauss ? .....

b) Les champs électrique et magnétique vérifient-ils l'équation de Maxwell-Faraday ? .....

c) Les champs électrique et magnétique vérifient-ils l'équation de Maxwell-Ampère ? .....

d) Le champ magnétique vérifie-t-il l'équation de Maxwell-Thomson ? .....

Entraînement 7.12 — Vérification des équations de Maxwell (II).

On se place dans un plasma où l'on a

$$\underline{\vec{j}}(z,t) = -\mathrm{i}\frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{\omega} \underline{\vec{E}}(z,t), \qquad \underline{\rho}(z,t) = \underline{0} \qquad \text{et} \qquad \vec{k} = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}\,\vec{e_z} \quad \text{avec} \quad \omega > \omega_p.$$

On suppose que

$$\underline{\vec{E}}(z,t) = E_0 \exp[\mathrm{i}(\omega t - kz)]\vec{e_x}$$

$$\text{et} \quad \underline{\vec{B}}(z,t) = \frac{kE_0}{\omega} \exp[\mathrm{i}(\omega t - kz)]\vec{e_y} \quad \text{avec} \quad k = \omega/c.$$

a) Le champ électrique vérifie-t-il l'équation de Maxwell-Gauss ? .....

b) Les champs électrique et magnétique vérifient-ils l'équation de Maxwell-Faraday ? .....

c) Les champs électrique et magnétique vérifient-ils l'équation de Maxwell-Ampère ? .....

d) Le champ magnétique vérifie-t-il l'équation de Maxwell-Thomson ? .....

Différentes familles d'ondes

Entraînement 7.13 — Onde progressive ou onde évanescente.

Nous nous intéressons à un champ électrique de la forme

$$\underline{\vec{E}}(x,t) = E_0 \exp[\mathrm{i}(\omega t - \underline{k}x)]\vec{e_z},$$

avec $\underline{k} = k' + \mathrm{i}k"$ et où $k" \leqslant 0$.

Pour chaque relation de dispersion, déterminer si le champ électrique se présente sous la forme d'une onde

(a) progressive $\underline{\vec{E}}(x,t) = E_0 \exp[\mathrm{i}(\omega t - k'x)]\vec{e_z}$

(b) évanescente $\underline{\vec{E}}(x,t) = E_0 \exp(k"x) \exp(\mathrm{i}\omega t)\vec{e_z}$

(c) progressive atténuée $\underline{\vec{E}}(x,t) = E_0 \exp(k"x) \exp[\mathrm{i}(\omega t - k'x)]\vec{e_z}$

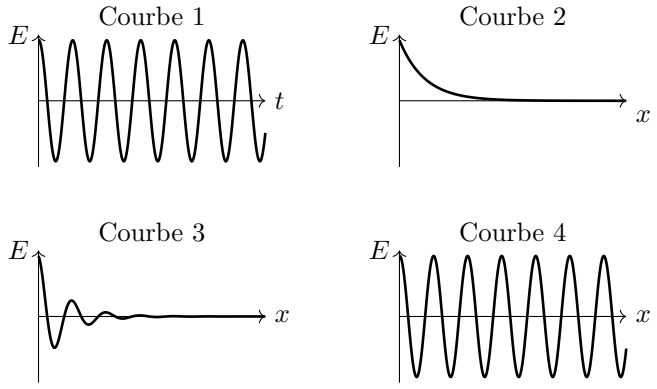
a) $\underline{k}^2 = -i\dfrac{\omega}{c}$ .....

b) $\underline{k}^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$ avec $\omega > \omega_p$ .....

c) $\underline{k}^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$ avec $\omega < \omega_p$ .....

Entraînement 7.14 — Courbes et expressions.

Dans chaque cas, indiquer la ou les courbes qui correspondent à chaque expression de $\vec{E}$ fournie.



a) $\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{e_z}$ .....

b) $\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(\omega t) \exp(-kx)\vec{e_z}$ avec $k > 0$ .....

c) $\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(\omega t - k'x) \exp(-k"x)\vec{e_z}$ avec $k" > 0$ .....

Réflexion et transmission

Entraînement 7.15 — Coefficients de réflexion et transmission en amplitude.

On considère les champs $\{\vec{E}_i, \vec{B}_i\}$ dans le milieu d'indice n_1 en incidence normale sur un dioptre en $x = 0$ produisant les champs réfléchis $\{\vec{E}_r, \vec{B}_r\}$ dans le milieu d'indice n_1 et transmis $\{\vec{E}_t, \vec{B}_t\}$ dans le milieu d'indice n_2 tels que :

$$\begin{cases} \vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - k_1 x)\vec{e_y} \\ \vec{B}_i = \dfrac{n_1 E_0}{c} \cos(\omega t - k_1 x)\vec{e_z} \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{E}_r = r E_0 \cos(\omega t + k_1 x)\vec{e_y} \\ \vec{B}_r = -\dfrac{n_1 r E_0}{c} \cos(\omega t + k_1 x)\vec{e_z} \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{E}_t = t E_0 \cos(\omega t - k_2 x)\vec{e_y} \\ \vec{B}_t = \dfrac{n_2 t E_0}{c} \cos(\omega t - k_2 x)\vec{e_z}. \end{cases}$$

a) Les relations de continuité des champs entre les milieux 1 et 2 en $x = 0$ imposent :

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_2 \quad \text{et} \quad \vec{B}_1 = \vec{B_2}.$$

En déduire deux relations entre r, t, n_1 et n_2 .....

b) En déduire l'expression des coefficients r et t .....

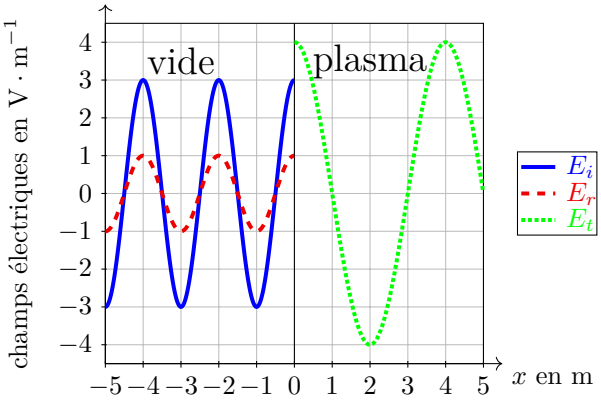
Entraînement 7.16 — Coefficients de réflexion et transmission.

Un dioptre en $x = 0$ sépare du vide d'indice $n_1 = 1$ pour $x < 0$ d'un plasma d'indice réel n_2 pour $x > 0$. On rappelle les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude (r, t) :

$$\begin{cases} r = \dfrac{E_r(x=0)}{E_i(x=0)} = \dfrac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \\ t = \dfrac{E_t(x=0)}{E_i(x=0)} = \dfrac{2n_1}{n_1 + n_2}, \end{cases}$$

et en puissance (R, T) :

$$R = |r|^2 \quad \text{et} \quad T = |t|^2 \frac{n_2}{n_1}.$$



a) Donner la longueur d'onde dans chaque domaine .....

b) À l'aide du graphique, évaluer r et t .....

c) En déduire l'indice n_2 du plasma .....

d) Calculer les coefficients R et T .....

Entraînement 7.17 — Coefficients de réflexion et transmission en puissance.

En notation complexe, pour des ondes planes progressives monochromatiques de vecteur d'onde $\vec{\underline{k}}_1$ perpendiculaire au champ électrique $\vec{\underline{E}}$, le champ magnétique $\vec{\underline{B}}$ associé est

$$\vec{\underline{B}} = \frac{\vec{\underline{k}}_1 \wedge \vec{\underline{E}}}{\omega},$$

et la moyenne temporelle du vecteur de Poynting est donnée par $\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle = \dfrac{\mathrm{Re}(\vec{\underline{E}}^* \wedge \vec{\underline{B}})}{2\mu_0}$.

On rappelle la relation d'analyse vectorielle $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$.

a) Calculer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting .....

Ce champ, en incidence normale sur un dioptre, donne lieu à un champ réfléchi de coefficient d'amplitude $\underline{r}$ de vecteur d'onde $-\vec{\underline{k}}_1$ ainsi qu'à un champ transmis de coefficient d'amplitude $\underline{t}$ de vecteur d'onde $\vec{\underline{k}}_2$.

b) Exprimer les puissances réfléchie et transmise.

.....

c) En déduire l'expression de $R = -\dfrac{\langle \Pi_r \rangle}{\langle \Pi \rangle}$ et $T = \dfrac{\langle \Pi_t \rangle}{\langle \Pi \rangle}$ .....

Réponses mélangées

$\underline{k}^2 = \dfrac{\mathrm{i}\omega}{\alpha}$ $\quad \pm\dfrac{1+\mathrm{i}}{\delta}$ avec $\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\mu_0\,\alpha\,\omega}}$ $\quad$ oui $\quad \pm\mathrm{i}\dfrac{\omega}{c}\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}$ $\quad \dfrac{1}{9}$ et $\dfrac{8}{9}$ $\quad$ a

$\Delta\vec{E} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0\gamma\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ $\quad \underline{\rho}\left(\dfrac{\underline{\alpha}}{\varepsilon_0} + \mathrm{i}\,\omega\right)$ $\quad \dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{4}{3}$ $\quad$ oui $\quad$ 1 et 2 $\quad \begin{cases} r+1 = t \\ n_1 - rn_1 = tn_2 \end{cases}$

non $\quad \underline{k}^3 = \dfrac{\omega^3}{\alpha} - \dfrac{\beta}{\alpha}\omega$ $\quad \dfrac{E_0^2}{2\mu_0\omega\delta}\mathrm{e}^{-\frac{2x}{\delta}}\vec{e_x}$ $\quad v_g = c\sqrt{1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega_p}}$ $\quad k^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$

1 et 3 $\quad \mathrm{i}\,\omega\,\underline{\rho}\left(1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) = 0$ $\quad$ b $\quad$ non $\quad \dfrac{1}{2}$ $\quad v_\varphi = \dfrac{c}{\sqrt{1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$ $\quad \underline{k} = \dfrac{\beta - \omega^2}{\mathrm{i}\alpha}$

2 m et 4 m $\quad \dfrac{nE_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t - kz)\vec{e_z}$ $\quad |\underline{r}|^2$ et $|\underline{t}|^2\,\mathrm{Re}\left(\dfrac{\underline{k}_2}{\underline{k}_1}\right)$ $\quad \dfrac{\gamma E_0^2}{2}\mathrm{e}^{-\frac{2x}{\delta}}$ $\quad \dfrac{\varepsilon_0 E_0^2}{4}(1+n^2)$

1 et 4 $\quad \pm\dfrac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$ $\quad \dfrac{|\underline{E}|^2}{2\mu_0\omega}\mathrm{Re}\left(\vec{\underline{k}}_1\right)$ $\quad$ oui $\quad$ oui $\quad \mathrm{div}\,\vec{E} = 0$ $\quad$ oui

$\begin{cases} r = \dfrac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \\ t = \dfrac{2n_1}{n_1 + n_2} \end{cases}$ $\quad$ oui $\quad \dfrac{nE_0^2}{2\mu_0 c}\vec{e_z}$ $\quad$ non $\quad \dfrac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}(1+n^2)\cos^2(\omega t - kz)$ $\quad$ c

non $\quad$ oui $\quad \pm\dfrac{\omega}{c}$ $\quad -\dfrac{|\underline{E}|^2|\underline{r}|^2}{2\mu_0\omega}\mathrm{Re}\left(\vec{\underline{k}}_1\right)$ $\quad \dfrac{|\underline{E}|^2|\underline{t}|^2}{2\mu_0\omega}\mathrm{Re}\left(\vec{\underline{k}}_2\right)$ $\quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\gamma\vec{E} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ $\quad \dfrac{|\underline{E}_0|^2}{2\mu_0 c}\mathrm{Re}(\underline{n})\vec{e_z}$

► Réponses et corrigés page 188

Modèle scalaire de la lumière

Prérequis
Optique géométrique (rayons, indice optique, lentilles, lois de Snell-Descartes). Trigonométrie. Longueurs d'onde dans le vide et dans un milieu, période, fréquence et pulsation.

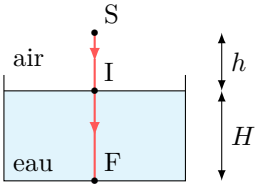
Constantes utiles
→ Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3{,}00 \times 10^8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

Exprimer un chemin optique

Dans un milieu homogène, le chemin optique entre deux points A et B est défini comme le produit de l'indice optique n du milieu par la distance géométrique AB parcourue par un rayon lumineux : $(\mathrm{AB}) = n \times \mathrm{AB}$.

Entraînement 8.1 — De l'eau dans un verre.

Un rayon issu d'une source ponctuelle arrive sous incidence normale à la surface de l'eau contenue dans un verre. Les indices optiques de l'air et de l'eau sont respectivement notés n_{air} et n_{eau}.



a) Exprimer le chemin optique (SI) en fonction de n_{air} et h .....

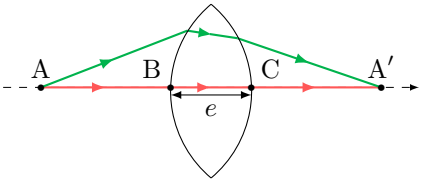
b) Exprimer le chemin optique (IF) en fonction de n_{eau} et H .....

c) En déduire l'expression du chemin optique (SF) .....

d) Comment se réexprime cette expression si l'air est assimilé au vide ? .....

Entraînement 8.2 — Points conjugués par une lentille.

Deux points A et A′ sont conjugués par une lentille convergente : tous les rayons issus de A et arrivant en A′ ont des chemins optiques identiques. Pour simplifier, ces points sont choisis sur l'axe optique de la lentille. L'air est assimilé au vide.



On note e l'épaisseur maximale de la lentille et n l'indice optique du verre.

En travaillant avec le rayon confondu avec l'axe optique, exprimer :

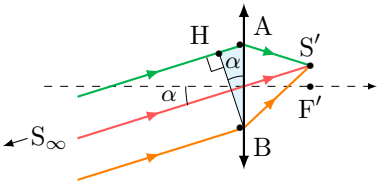
a) le chemin optique dans le verre (BC), en fonction de e et n .....

b) le chemin optique dans l'air $(\mathrm{AB}) + (\mathrm{CA'})$ en fonction de la distance AA′ et e ...

c) l'expression générale du chemin optique (AA′) qu'on peut en déduire .....

Entraînement 8.3 — Lentille éclairée avec un angle d'incidence non nul.

Des rayons, provenant d'une source S à l'infini, éclairent une lentille sous un angle d'incidence α. Ils convergent en un point S′ du plan focal image de la lentille. Les points A et B sont situés à gauche, juste avant la lentille. L'indice optique du verre est n. L'air est assimilé au vide.



a) En sachant que le plan passant par H et B est une surface d'onde pour la source S, exprimer la différence de chemin optique (SA) − (SB) en fonction de la distance AB et de l'angle α.

.....

b) Les points S et S′ sont conjugués donc les chemins optiques (SAS′) et (SBS′) sont égaux.

En déduire la différence de chemin optique (AS′) − (BS′) en fonction de la distance AB et de l'angle α.

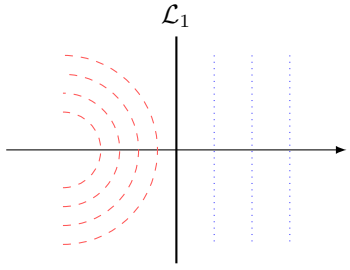
.....

Surfaces d'onde et théorème de Malus

D'après le théorème de Malus, les rayons lumineux issus d'un point source S sont perpendiculaires aux surfaces d'onde relatives à cette source, la surface d'onde étant le lieu des points d'égal chemin optique par rapport à la source.

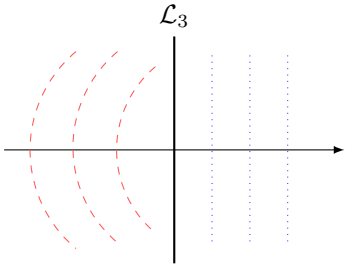
Entraînement 8.4 — Action d'une lentille inconnue sur des surfaces d'onde.

On considère ici des surfaces d'onde issues d'un point objet (en tirets) et celles de son image (en pointillés) par une lentille inconnue. Pour chaque situation, déterminer si la lentille est « convergente » ou « divergente ».



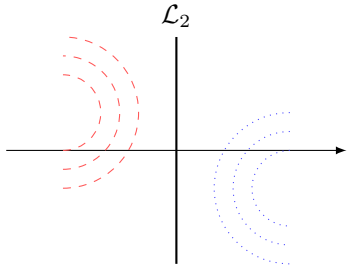
a)

.....



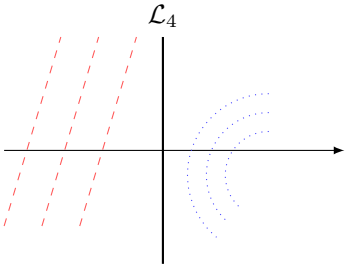
c)

.....



b)

.....



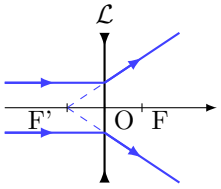
d)

.....

Entraînement 8.5 — Action d'une lentille divergente sur des surfaces d'onde.

On construit l'image, par une lentille divergente $\mathcal{L}$, d'une source lumineuse placée à l'infini sur l'axe optique.

Une ou plusieurs réponses sont possibles.



a) En amont de la lentille, les surfaces d'onde sont :

(a) perpendiculaires à l'axe optique

(b) des cercles concentriques centrés sur F

(c) des plans parallèles entre eux

.....

b) En aval de la lentille, les surfaces d'onde sont :

(a) des cercles concentriques centrés sur F

(b) des plans perpendiculaires à l'axe optique

(c) des cercles concentriques centrés sur F'

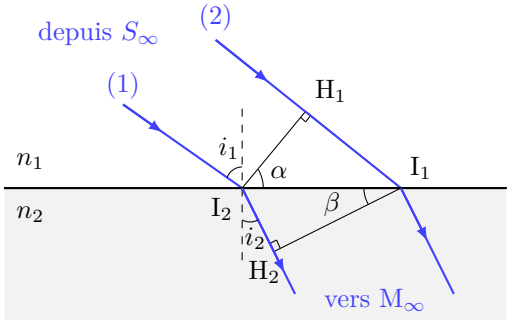
.....

Entraînement 8.6 — Une loi bien connue...

Une onde plane arrive sur un dioptre plan séparant deux milieux d'indices n_1 et n_2.

On note H_1 le projeté orthogonal de I_2 sur le rayon (2) et H_2 le projeté orthogonal de I_1 sur le rayon (1).

On note $I_1I_2 = a$.



a) Quels couples de points appartiennent à la même surface d'onde ?

(a) I_2 et I_1 (b) I_2 et H_1 (c) I_1 et H_2

.....

b) Que vaut l'angle α ?

(a) $\frac{\pi}{2} - i_1$ (b) i_1 (c) $\frac{\pi}{2} + i_1$

.....

c) Exprimer le chemin optique (H_1I_1) en fonction de n_1, a et α.

.....

d) Que vaut l'angle β ?

(a) i_2 (b) $\frac{\pi}{2} - i_2$ (c) $\frac{\pi}{2} + i_1$

.....

e) Exprimer le chemin optique (I_2H_2) en fonction de n_2, a et β .....

f) À partir des questions c) et e), déduire une relation entre n_1, $\sin(i_1)$, n_2 et $\sin(i_2)$.

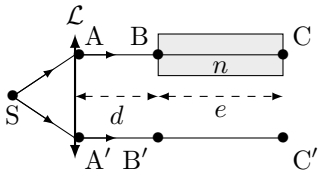
.....

Retard de phase

Le *retard de phase* (ou, plus simplement, la *phase*) d'un rayonnement en un point M par rapport à sa source au point S est défini par $\phi(\mathrm{M}) = \dfrac{2\pi}{\lambda_0}(\mathrm{SM})$, où (SM) est le chemin optique entre les deux points.

Entraînement 8.7 — Surface d'onde et déphasage.

Un point source S émettant un rayonnement monochromatique de longueur d'onde λ_0 est placé au foyer objet d'une lentille mince convergente. Une lame d'indice n et d'épaisseur e est placée à une distance d de la lentille et recouvre une partie du faisceau. On considère que les points A et A′, à équidistance de S, se situent juste après la lentille. On prendra l'indice de l'air égal à 1.



a) Quels couples de points appartiennent à la même surface d'onde ?

(a) A et A′ (b) B et B′ (c) C et C′

b) Exprimer la phase $\phi(\mathrm{C}')$ en fonction de λ_0, (SA'), d et e.

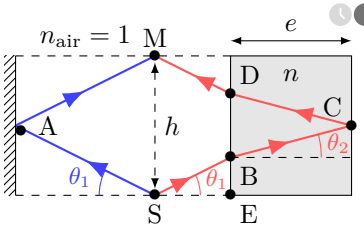
c) Exprimer la phase $\phi(\mathrm{C})$ en fonction de λ_0, (SA), d, n et e.

d) En déduire le déphasage $\Delta\phi = \phi(\mathrm{C}) - \phi(\mathrm{C}')$ en fonction de λ_0, n et e.

Entraînement 8.8 — Phases et déphasage.

Un signal lumineux de longueur d'onde dans le vide λ_0 est émis depuis une source en S. On considère que le point d'incidence A se situe juste avant le miroir, et on rappelle qu'une réflexion sur un miroir métallique produit un retard de phase de π.

Exprimer la phase ϕ_1 du rayon 1 réfléchi par le miroir de gauche en fonction de h et θ_1 aux points de l'espace suivants :



a) $\phi_1(\mathrm{A})$ ..... b) $\phi_1(\mathrm{M})$ .....

c) Exprimer la distance BD en fonction de e et θ_2 .....

d) Exprimer la distance EB en fonction de e, h et θ_2 .....

e) Quelle est l' expression correcte de $\phi_2(\mathrm{B})$, la phase du rayon de droite au point B ?

(a) $\dfrac{2\pi}{\lambda_0}\left(\dfrac{h}{2n\sin(\theta_1)} - \dfrac{e}{\cos(\theta_2)}\right)$ (b) $\dfrac{2\pi}{\lambda_0}\left(\dfrac{h}{2\sin(\theta_1)} - \dfrac{e}{n\cos(\theta_2)}\right)$ (c) $\dfrac{2\pi}{\lambda_0}\left(\dfrac{e}{\cos(\theta_2)} - \dfrac{h}{2n\sin(\theta_1)}\right)$

f) Exprimer la phase de ce rayon en M, $\phi_2(\mathrm{M})$, en fonction de h, e, n, θ_1 et $\cos(\theta_2)$.

.....

g) Exprimer le déphasage $\Delta\phi = \phi_2(\mathrm{M}) - \phi_1(\mathrm{M})$ en fonction de e, n et $\cos(\theta_2)$.

.....

h) Quelle est l'expression correcte de $\Delta\phi$? *On rappelle que* $\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1$.

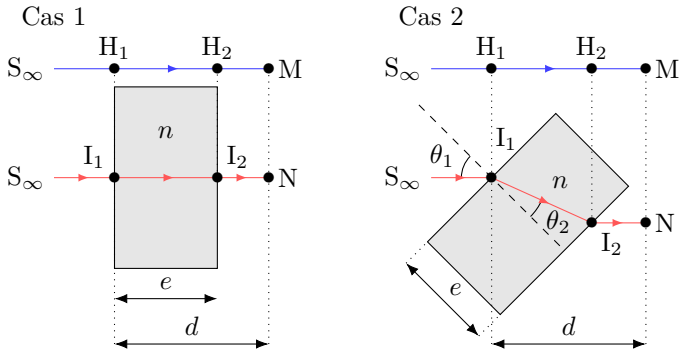
(a) $\dfrac{4\pi}{\lambda_0}\dfrac{e\left(n^2-1\right)}{\sqrt{n^2-\sin^2(\theta_1)}} - \pi$ (b) $\dfrac{4\pi}{\lambda_0}\dfrac{e\left(n^2-1\right)}{\sqrt{n^2-\sin^2(\theta_1)}} + \pi$ (c) $\dfrac{2\pi}{\lambda_0}\dfrac{e\left(n^2-1\right)}{\sqrt{n^2-\sin^2(\theta_1)}} + \pi$

.....

Entraînement 8.9 — Déphasage dû à une lame.

On souhaite exprimer les différences de phase $\Delta\phi = \phi(\mathrm{N}) - \phi(\mathrm{M})$ entre le rayon passant par N et le rayon passant par M issus de la même source à l'infini S de longueur d'onde dans le vide λ_0.

L'indice de l'air est pris égal à 1.



a) Pour le cas 1, exprimer le déphasage $\Delta\phi = \phi(\mathrm{N}) - \phi(\mathrm{M})$ selon e, λ_0 et n.

.....

On considère maintenant le cas 2.

b) Exprimer la distance $\mathrm{I_1I_2}$ en fonction de e et θ_2 .....

c) Exprimer la distance $\mathrm{H_1H_2}$ en fonction de $\mathrm{I_1I_2}$ et $\theta_1 - \theta_2$ .....

d) Exprimer le déphasage $\Delta\phi = \phi(\mathrm{N}) - \phi(\mathrm{M})$ en fonction de e, λ_0, n, θ_2 et $\theta_1 - \theta_2$.

.....

e) Quelle est l'expression correcte de $\cos(\theta_1 - \theta_2)$?

On rappelle que $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$ *et que* $\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1$.

(a) $\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - n + n\sin^2(\theta_2)$ (c) $\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) + n - n\cos^2(\theta_2)$

(b) $\sin(\theta_1)\sin(\theta_2) + n - n\sin^2(\theta_2)$

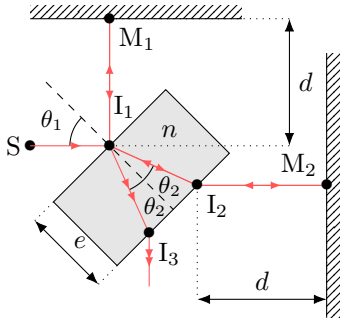
.....

f) En déduire une expression de $\Delta\phi$ fonction de e, λ_0, n, $\cos(\theta_2)$ et $\cos(\theta_1)$.

.....

Entraînement 8.10 — Lame séparatrice.

Cas 3



Un signal lumineux de longueur d'onde dans le vide λ_0 est émis depuis une source en S. Il est séparé en deux rayons par une lame semi-réfléchissante inclinée d'un angle $\theta_1 = 45°$. On cherche à déterminer le déphasage $\Delta\phi$ entre les deux rayons en sortie de la lame après réflexion sur les deux miroirs en M$_1$ et M$_2$. On rappelle qu'un rayon subit un déphasage de π après réflexion sur un miroir métallique, ou sur un dioptre si le rayon incident se propage dans le milieu le moins réfringent (celui d'indice de réfraction le plus faible).

a) Déterminer le déphasage du rayon réfléchi par M$_1$ dû aux différentes réflexions ..

b) Déterminer le déphasage du rayon réfléchi par M$_2$ dû aux différentes réflexions ..

c) Exprimer la distance I$_1$I$_2$ en fonction de e et θ_2 .....

d) Exprimer la différence de phase $\Delta\phi$ entre le rayon réfléchi par M$_2$ et le rayon réfléchi par M$_1$ au point I$_3$ en fonction e, λ_0, n et θ_2 .....

Largeur spectrale et cohérence temporelle

Entraînement 8.11 — Différentes sources.

Une onde lumineuse est émise par des trains d'onde successifs de durée individuelle moyenne τ_c (temps de cohérence) et de longueur individuelle moyenne $\ell_c = c \times \tau_c$ (longueur de cohérence) dans le vide. D'après l'analyse de Fourier, à cette onde de durée finie correspond un spectre de largeur $\Delta f \simeq \dfrac{1}{\tau_c}$ (en fréquence).

On considère trois sources :

- une lampe spectrale basse pression à vapeur de mercure telle que $\tau_c \simeq 10\,\text{ps}$ (source 1),
- un laser de TP tel que $\tau_c \simeq 0{,}1\,\mu\text{s}$ (source 2),
- et une source de lumière blanche munie d'un filtre ayant une bande passante $\Delta\lambda = 50\,\text{nm}$ autour de la longueur d'onde $\lambda = 820\,\text{nm}$ (source 3).

On rappelle que la cohérence temporelle d'une source est d'autant meilleure que son temps de cohérence est important.

a) Estimer Δf en hertz pour la source 1 .....

b) Estimer Δf en hertz pour la source 2 .....

c) En utilisant la relation $\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda} = \dfrac{\Delta f}{f}$, estimer τ_c en picosecondes pour la source 3 .....

d) Classer les sources, de celle possédant la meilleure cohérence temporelle à la moins bonne.

.....

Photométrie

Entraînement 8.12 — Intensité lumineuse.

Un signal $s(t) = S_0 \cos(\omega t)$ de période T est détecté par deux capteurs de temps de réponse $\tau = 1\,\text{ns}$.

Les capteurs A et B délivrent des signaux de tension u_1 et u_2 respectivement proportionnels à la moyenne de s et au carré de la moyenne de s^2 : on a

$$u_1 = K_1 \langle s(t) \rangle \qquad \text{et} \qquad u_2 = K_2 \langle s^2(t) \rangle,$$

où K_1 et K_2 sont des constantes.

On considère que les signaux u_1 et u_2 émergent du bruit de mesure lorsque leur valeur absolue est respectivement supérieure à $\dfrac{K_1 S_0}{2\pi \times 100}$ et $\dfrac{K_2 S_0^2}{2}$.

On indique que la moyenne temporelle d'un signal $f(t)$ mesuré pendant une durée τ est

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t)\,\mathrm{d}t.$$

a) Exprimer u_1 en fonction de K_1, S_0, τ et T.

.....

b) Quelle est la valeur maximale de u_1 fonction de $\dfrac{\tau}{T}$?

(a) $2\pi K_1 S_0 \dfrac{T}{\tau}$

(b) $2\pi K_1 S_0 \dfrac{\tau}{T}$

(c) $K_1 S_0 \dfrac{\tau}{2\pi T}$

(d) $K_1 S_0 \dfrac{T}{2\pi\tau}$

.....

c) En déduire la fréquence maximale du signal exploitable par le capteur A.

.....

d) Exprimer u_2 en fonction de K_2, S_0, τ et T.

On rappelle que $\cos^2 a = \dfrac{1 + \cos(2a)}{2}$.

.....

e) Quelle est la valeur maximale de u_2 fonction de $\dfrac{\tau}{T}$?

(a) $\dfrac{K_2 S_0^2}{2\tau}\left(T + \dfrac{\tau}{4\pi}\right)$

(b) $\dfrac{K_2 S_0^2}{2\tau}\left(\tau + \dfrac{T}{4\pi}\right)$

(c) $\dfrac{K_2 S_0^2}{\tau}\left(\tau + \dfrac{T}{4\pi}\right)$

.....

f) Existe-t-il une fréquence maximale du signal exploitable par le capteur B ?

.....

Entraînement 8.13 — Choix d'une photodiode.

La *sensibilité* d'une photodiode s est, au cours d'une mesure de durée τ, le rapport de proportionnalité entre l'intensité du courant électrique produit I_{mes} et la puissance lumineuse mesurée $\mathcal{P}_{\text{mes}}$: on a

$$s = I_{\text{mes}}/\mathcal{P}_{\text{mes}}.$$

De plus, l'intensité du courant d'obscurité I_{obs} d'une photodiode correspond à l'intensité électrique minimale que doit dépasser le courant produit au cours d'une mesure.

On dispose de trois photodiodes détectant respectivement trois radiations de longueurs d'onde dans le vide différentes. Les caractéristiques des photodiodes et des radiations sont données ci-dessous.

photodiode 1	$\lambda_1 = 470\,\text{nm}$	$s_1 = 0{,}300\,\text{A}\cdot\text{W}^{-1}$	$I_{\text{obs }1} = 3{,}00\times10^{-5}\,\mu\text{A}$	$\tau_1 = 2{,}00\times10^{-4}\,\text{ms}$
photodiode 2	$\lambda_2 = 550\times10^{3}\,\text{pm}$	$s_2 = 200\,\text{mA}\cdot\text{W}^{-1}$	$I_{\text{obs }2} = 150\,\text{pA}$	$\tau_2 = 0{,}450\,\mu\text{s}$
photodiode 3	$\lambda_3 = 0{,}660\,\mu\text{m}$	$s_3 = 300\,\text{A}\cdot\text{kW}^{-1}$	$I_{\text{obs }3} = 2{,}00\,\text{nA}$	$\tau_3 = 50{,}0\,\text{ns}$

Calculer en watts les puissances lumineuses minimales détectables par les photodiodes.

a) $\mathcal{P}_{\text{min }1}$ .... ☐ b) $\mathcal{P}_{\text{min }2}$ .... ☐ c) $\mathcal{P}_{\text{min }3}$ .... ☐

Calculer en joules les énergies minimales détectables au cours d'une durée τ par les photodiodes.

d) $E_{\text{min }1}$ .... ☐ e) $E_{\text{min }2}$ .... ☐ f) $E_{\text{min }3}$ .... ☐

g) Sachant que l'énergie d'un photon est donnée par $E = h\nu$, où $h = 6{,}63\times10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}$ est la constante de Planck, quelle photodiode permet de mesurer le plus petit nombre de photons ?

(a) Photodiode 1 (b) Photodiode 2 (c) Photodiode 3 ☐

Réponses mélangées

$n_1 a\sin(\alpha)$ $2e\tan(\theta_2)$ non $\frac{2\pi}{\lambda_0}e(n-1)$ (a) et (b) $7{,}50\times10^{-10}\,\text{W}$

(a) $-\text{AB}\sin(\alpha)$ $\Delta f = 1{,}0\times10^{11}\,\text{Hz}$ $1{,}00\times10^{-10}\,\text{W}$ $\Delta f = 1{,}0\times10^{7}\,\text{Hz}$

$\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{e}{\cos(\theta_2)}(n-\cos(\theta_1-\theta_2))$ $\frac{2\pi}{\lambda_0}((\text{SA})+d+ne)$ $\text{AB}\sin(\alpha)$ (d) π

$1\times(\text{AA}'-e)$ Convergente $3{,}38\times10^{-16}\,\text{J}$ (b) $n_{\text{air}}\times h$ (b)

(a) $n\times e$ $3{,}33\times10^{-16}\,\text{J}$ $\frac{2\pi}{\lambda_0}((\text{SA}')+d+e)$ Divergente (c)

$1\times h + n_{\text{eau}}\times H$ $6{,}67\times10^{-9}\,\text{W}$ $\frac{4\pi}{\lambda_0}\frac{ne}{\cos(\theta_2)}-\pi$ $\frac{4\pi}{\lambda_0}\frac{e}{\cos(\theta_2)}\left(n-\frac{1}{n}\right)-\pi$

$\frac{4\pi}{\lambda_0}\left(\frac{h}{2\sin\theta_1}+\left(n-\frac{1}{n}\right)\frac{e}{\cos(\theta_2)}\right)$ (a) $K_1S_0\frac{T}{2\pi\tau}\sin\left(2\pi\frac{\tau}{T}\right)$ (b)

$\text{AA}'+(n-1)e$ (2), (1) puis (3) (a) et (c) $\frac{2\pi}{\lambda_0}e(n\cos(\theta_2)-\cos(\theta_1))$

$\frac{\pi}{\lambda_0}\frac{h}{\sin(\theta_1)}$ $\frac{K_2S_0^2}{2\tau}\left(\tau+\frac{T}{4\pi}\sin\left(4\pi\frac{\tau}{T}\right)\right)$ 100 GHz $\frac{e}{\cos(\theta_2)}$ $\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{h}{\sin(\theta_1)}+\pi$

Convergente $\text{I}_1\text{I}_2\cos(\theta_1-\theta_2)$ (b) et (c) $\tau_c = 45\times10^{3}\,\text{ps}$ $2\times10^{-17}\,\text{J}$

$\frac{2\pi}{\lambda_0}(n-1)e$ $n_2 a\sin(\beta)$ $n_1\sin(i_1)=n_2\sin(i_2)$ Convergente

$\frac{h}{2}-e\tan(\theta_2)$ $n_{\text{air}}\times h + n_{\text{eau}}\times H$ 2π $\frac{e}{\cos(\theta_2)}$ (c) $n_{\text{eau}}\times H$

► Réponses et corrigés page 194

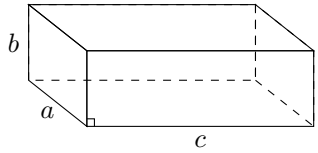
Outils mathématiques pour la diffusion

Prérequis
Expression des surfaces usuelles (disque, sphère, ...).
Expression des volumes usuels (parallélépipède, cylindre, sphère, ...).

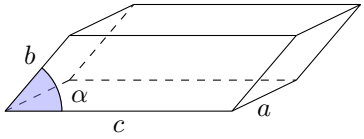
Pour bien commencer

Entraînement 9.1 — Calcul de volumes.

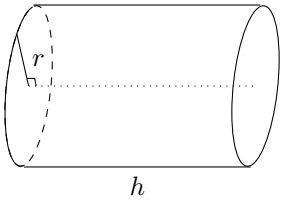
Dans chacun des cas suivants, exprimer le volume du solide en fonction des données.



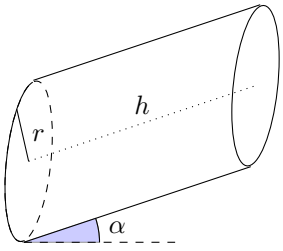
Volume a)



Volume b)



Volume c)

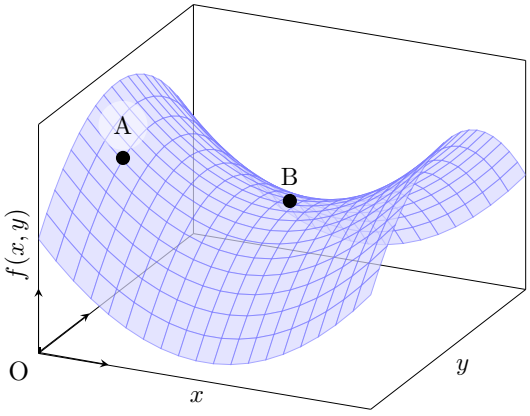


Volume d)

a) b) c) d)

Entraînement 9.2 — Signe des dérivées partielles.

On considère la fonction de deux variables $f(x, y)$ représentée ci-contre. On étudie le signe des dérivées partielles au niveau des points A et B.



a) Quel est le signe de la dérivée partielle d'ordre 1 de f par rapport à x au point A, notée $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{A})$? .....

b) Quel est le signe de la dérivée partielle d'ordre 1 de f par rapport à y au point A, notée $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\mathrm{A})$? .....

On s'intéresse maintenant au comportement de f au voisinage du point B. Pour chacune des questions suivantes, choisir la bonne réponse.

c)

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{B}) > 0$ (c) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{B}) < 0$

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{B}) = 0$

.....

d)

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\mathrm{B}) > 0$ (c) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\mathrm{B}) < 0$

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\mathrm{B}) = 0$

.....

e)

(a) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathrm{B}) > 0$ (c) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathrm{B}) < 0$

(b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathrm{B}) = 0$

.....

f)

(a) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathrm{B}) > 0$ (c) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathrm{B}) < 0$

(b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathrm{B}) = 0$

.....

Entraînement 9.3 — Volume d'un cône.

Le volume d'un cône de hauteur h et dont le rayon de la base est r vaut $V(r, h) = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$.

a) Quelle est l'expression de $\dfrac{\partial V}{\partial r}(r, h)$? .....

b) Quelle est l'expression de $\dfrac{\partial V}{\partial h}(r, h)$? .....

On souhaite comparer l'influence d'une même variation $\mathrm{d}\ell$ de h ou de r sur la valeur du volume V.

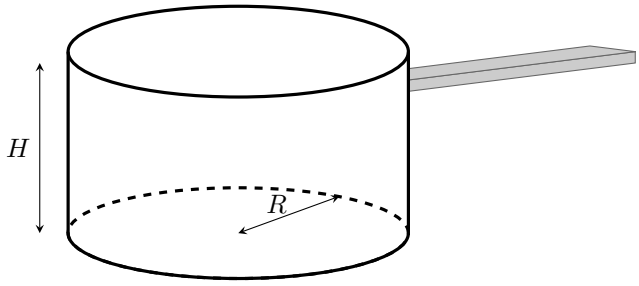
c) À quelle condition sur h et r a-t-on $\dfrac{\partial V}{\partial h}(r, h) > \dfrac{\partial V}{\partial r}(r, h)$?

(a) $h/3 < r$ (b) $h < r$ (c) $2h < r$ (d) $3h < r$

.....

Entraînement 9.4 — Fabrication d'une casserole.

Les questions de cet entraînement ne concernent pas le manche de la casserole et ne concernent donc que la partie principale de la casserole. L'épaisseur de la tôle utilisée pourra être négligée.



Un industriel souhaite fabriquer une casserole à partir de plaques de métal d'épaisseur constante.

a) Pour cela, quelle surface de tôle $S(R, H)$ doit-il utiliser ?

(a) $S(R, H) = 2\pi R^2 + \pi RH$

(b) $S(R, H) = \pi H^2 + 2\pi RH$

(c) $S(R, H) = \pi R^2 + 2\pi RH$

(d) $S(R, H) = 2\pi H^2 + \pi RH$

.....

b) Que vaut le volume utile $V(R, H)$?

(a) $V(R, H) = 2\pi R^2 H$

(b) $V(R, H) = \pi R^2 H$

.....

c) Exprimer $S(R, V)$ la surface de tôle que l'on doit utiliser pour fabriquer la casserole en fonction du rayon R et du volume V.

.....

Le fabricant souhaite fabriquer une casserole de volume $V = V_0$ donné, tout en minimisant la quantité de tôle utilisée.

d) Il cherche donc une géométrie qui vérifie :

(a) $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}R}(R, V_0) = 0$

(b) $\dfrac{\partial S}{\partial R}(R, V_0) = 0$

.....

e) Déterminer l'expression de V_0 en fonction de R, puis celle de H en fonction de R permettant de minimiser la surface de tôle utilisée.

(a) $V_0 = \pi R^3$ (b) $V_0 = 2\pi R^3$ (c) $H = R$ (d) $H = 2R$

.....

Entraînement 9.5 — Quelques équations différentielles (I).

Résoudre les équations différentielles suivantes en tenant compte des conditions aux limites.

Les quantités n_0, n_1, j_0 et p sont des constantes.

a) $\dfrac{\partial^2 n}{\partial x^2}(x,t) = 0$ avec $\begin{cases} n(0,t) & = n_0 \\ \dfrac{\partial n}{\partial x}(0,t) & = j_0 \end{cases}$ .....

b) $\dfrac{\partial^2 n}{\partial x^2}(x,t) = 0$ avec $\begin{cases} n(0,t) & = n_0 \\ n(L,t) & = n_1 \end{cases}$ .....

c) $\dfrac{\partial^2 n}{\partial x^2}(x,t) = p$ avec $\begin{cases} n(0,t) & = n_0 \\ n(L,t) & = n_0 \end{cases}$ .....

Entraînement 9.6 — Quelques équations différentielles (II).

Résoudre les équations différentielles suivantes en tenant compte des conditions initiales (τ, n_0, n_c, p et L sont des constantes) :

a) $\dfrac{\partial n}{\partial t}(x,t) = \dfrac{n}{\tau}$ avec $n(x,0) = n_0$ .....

b) $\dfrac{\partial n}{\partial t}(x,t) = -\dfrac{n^2}{n_c \tau}$ avec $n(x,0) = n_0$ .....

c) $\dfrac{\partial n}{\partial t}(x,t) = -\dfrac{n}{\tau} + p$ avec $n(x,0) = n_0\left(1 - \dfrac{x}{L}\right)$ .....

Réponses mélangées

$\dfrac{2\pi r h}{3}$ $\quad \pi r^2 h$ $\quad n(x,t) = \dfrac{n_1 - n_0}{L}x + n_0$ $\quad$ b $\quad n(x,t) = n_0 \exp\left(\dfrac{t}{\tau}\right)$

$abc\sin(\alpha)$ $\quad n(t) = \dfrac{n_0}{1 + \dfrac{n_0 t}{n_c \tau}}$ $\quad \dfrac{p}{2}x(x-L) + n_0$ $\quad n_0\left(1 - \dfrac{x}{L}\right)\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right) + p\tau\left(1 - \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\right)$

c $\quad n(x,t) = j_0 x + n_0$ $\quad abc$ $\quad \dfrac{\pi r^2}{3}$ $\quad$ a et c $\quad$ négatif $\quad$ c

positif $\quad \pi R^2 + 2\dfrac{V}{R}$ $\quad \pi r^2 h\cos(\alpha)$ $\quad$ b $\quad$ a $\quad$ c $\quad$ b $\quad$ b

► Réponses et corrigés page 201

Diffusion thermique

Prérequis
Premier principe et deuxième principe de la thermodynamique.
Loi de Fourier : $\overrightarrow{j} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}\, T$.

Dans toute la fiche, les caractéristiques du matériau homogène et isotrope étudié seront notées :

- D, le coefficient de diffusivité thermique ($\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$),
- μ, la masse volumique ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$),
- c, la capacité thermique massique du matériau ($\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$),
- λ, la conductivité thermique du matériau ($\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$).

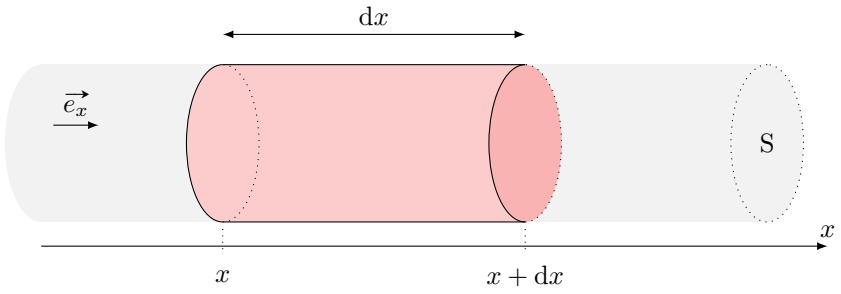
Pour évaluer les ordres de grandeur caractéristiques du phénomène, on notera :

- τ, la durée caractéristique (s),
- L, la longueur caractéristique (m).

Étude de flux thermique

Entraînement 10.1 — Bilan thermique en géométrie cartésienne.

On se place dans le cas d'une diffusion unidimensionnelle telle que les isothermes sont des plans $x = \text{cste}$.



On note S la section du conducteur et ℓ le périmètre de la section.

a) Le vecteur densité de flux thermique $\overrightarrow{j_Q} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T)$ a pour unité possible :

(a) $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ (b) $\text{J} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}$ (c) $\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$ (d) $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$

.....

b) Dans le cadre de cet entraînement, le vecteur densité de flux thermique $\overrightarrow{j_Q} = j_Q \overrightarrow{e_x}$ peut s'écrire :

(a) $\overrightarrow{j_Q} = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial t} \overrightarrow{e_x}$ (b) $\overrightarrow{j_Q} = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial x} \overrightarrow{e_x}$

.....

On étudie un élément de volume du conducteur thermique de section S, et compris entre x et $x + \mathrm{d}x$.

c) L'énergie interne $U(t)$ de la tranche considérée à l'instant t est :

(a) $cS\,\mathrm{d}xT(x,t) + \mathrm{C}$ (c) $\mu cS\,\mathrm{d}xT(x,t) + \mathrm{C}$

(b) $cS\,\mathrm{d}tT(x,t) + \mathrm{C}$ (d) $\mu cS\,\mathrm{d}tT(x,t) + \mathrm{C}$

où C est une constante .....

d) En déduire la variation d'énergie interne $\mathrm{d}U$ entre t et $t + \mathrm{d}t$.

.....

On souhaite maintenant évaluer les transferts thermiques entre la tranche et l'extérieur.

e) En x, le transfert thermique algébriquement reçu par la tranche entre t et $t + \mathrm{d}t$ s'écrit :

(a) $-j_Q(x,t)S\,\mathrm{d}t$ (b) $j_Q(x,t)S\,\mathrm{d}t$ (c) 0

.....

f) En $x + \mathrm{d}x$, le transfert thermique algébriquement reçu par la tranche entre t et $t + \mathrm{d}t$ s'écrit :

(a) $-j_Q(x+\mathrm{d}x,t)S\,\mathrm{d}t$ (b) $j_Q(x+\mathrm{d}x,t)S\,\mathrm{d}t$ (c) 0

.....

g) Au niveau de la paroi latérale, le transfert thermique algébriquement reçu par la tranche entre t et $t + \mathrm{d}t$ s'écrit, en notant ℓ le périmètre de la section :

(a) $j_Q(x,t)\ell\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ (c) 0 (e) $-j_Q(x+\mathrm{d}x,t)\ell\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$

(b) $-j_Q(x,t)\ell\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ (d) $j_Q(x+\mathrm{d}x,t)\ell\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$

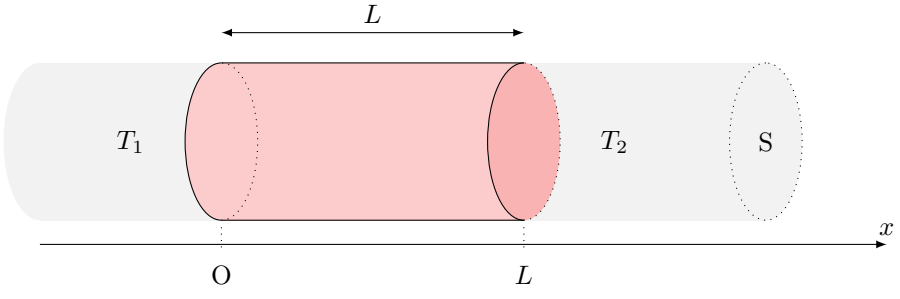
.....

h) En déduire le transfert thermique total δQ algébriquement reçu par la tranche.

.....

Entraînement 10.2 — Équation de la chaleur.

On étudie une barre homogène de section S, de longueur L, dont la surface latérale est calorifugée et dont les extrémités gauche et droite sont mises en contact thermique parfait avec des thermostats de températures respectives T_1 et T_2. On se place en coordonnées cartésiennes.



Initialement, l'ensemble de la barre est à la température T_0.

a) Le champ de température est de la forme :

(a) $T = T(x,t)$ (c) $T = T(x)$ (e) $T = T(y,t)$
(b) $T = T(x,y,t)$ (d) $T = T(x,y)$ (f) $T = T(x,y,z,t)$

.....

b) Le vecteur de densité volumique de courant thermique $\overrightarrow{j_Q}$ est de la forme :

(a) $\overrightarrow{j_Q} = j_Q(x,t)\overrightarrow{e_x}$ (d) $\overrightarrow{j_Q} = j_Q(x)\overrightarrow{e_x}$
(b) $\overrightarrow{j_Q} = j_Q(x,y,t)\overrightarrow{e_x}$ (e) $\overrightarrow{j_Q} = j_Q(y,t)\overrightarrow{e_y}$
(c) $\overrightarrow{j_Q} = j_{Qx}(x,y)\overrightarrow{e_x} + j_{Qy}(x,y)\overrightarrow{e_y}$ (f) $\overrightarrow{j_Q} = j_Q(x,y,z,t)\overrightarrow{e_x}$

.....

c) L'équation de la chaleur $\dfrac{\partial T}{\partial t} = D\Delta T$ s'écrit ici :

(a) $\dfrac{\partial T}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ (c) $\dfrac{\partial T}{\partial t} = D\left[\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right]$
(b) $\dfrac{\partial T}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ (d) $0 = D\dfrac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}x^2}$

.....

La diffusion : un processus lent

Entraînement 10.3 — Étude qualitative.

L'équation de diffusion caractérise l'évolution temporelle du profil de température dans un matériau. En raisonnant en ordre de grandeur, cette équation fait le lien entre un temps caractéristique τ et une longueur caractéristique de diffusion L : $L = \sqrt{D\tau}$ où $D = \dfrac{\lambda}{\mu c}$ est le coefficient de diffusion thermique.

Par combien est multipliée la longueur caractéristique de diffusion lorsque l'on double :

a) la conductivité du matériau ? .....

b) la capacité thermique du matériau ? .....

Par combien est multiplié le temps caractéristique de diffusion si on double :

c) la longueur du matériau L ? .....

d) la masse volumique μ ? .....

Entraînement 10.4 — Nombre de Fourier : transformation adiabatique ?

Le nombre de Fourier $\mathrm{Fo} = \dfrac{D\Delta t}{L^2}$ est un nombre sans dimension utilisé couramment en transfert thermique, avec $D = \dfrac{\lambda}{\mu c}$ ($\mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$) le coefficient de diffusion thermique, Δt (s) la durée étudiée et L (m) la longueur caractéristique d'étude.

Il se définit également comme le rapport entre la durée Δt d'un processus et un temps caractéristique de diffusion (qui est le temps nécessaire au transfert thermique pour diffuser sur une distance L).

a) Dans quel cas un processus peut-il être considéré comme adiabatique ?

(a) $\mathrm{Fo} \ll 1$ (b) $\mathrm{Fo} \gg 1$

.....

On considère la compression du mélange {air + carburant} dans un cylindre d'un moteur 4 temps en acier. Avec un régime moteur d'environ $2\,000\,\mathrm{tr \cdot min^{-1}}$, la durée de la compression est de $1{,}5 \times 10^{-2}$ s. On considère que l'épaisseur du cylindre est de 5 mm.

On donne $\lambda_{\text{acier}} = 13\,\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$, $\mu_{\text{acier}} = 7\,800\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ et $c_{\text{acier}} = 480\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$.

b) En exploitant les données ci-dessus, calculer la valeur du nombre de Fourier .....

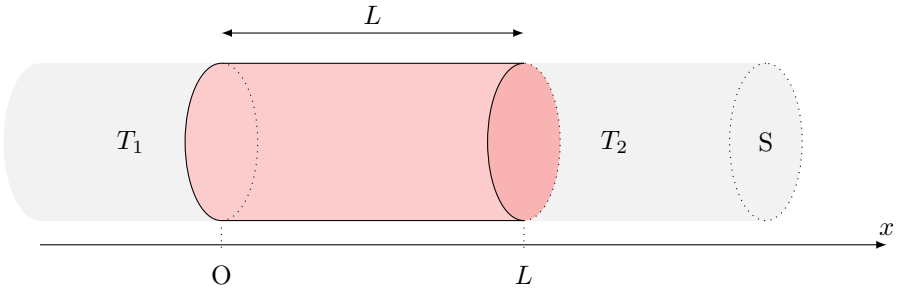
c) L'hypothèse d'une compression adiabatique habituellement utilisée est-elle valide ? ..

En régime permanent : utilisation des résistances thermiques

Entraînement 10.5 — Champ de température en géométrie cartésienne.

On étudie une barre homogène de section S, de longueur L, dont la surface latérale est calorifugée et dont les extrémités gauche et droite sont mises en contact thermique parfait avec des thermostats de températures respectives T_1 et T_2.

On se place en coordonnées cartésiennes et on étudie le régime permanent.



a) Le champ de température vérifie $\dfrac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} = 0$. Exprimer $T(x)$.

.....

b) Quelle(s) hypothèse(s) de l'énoncé assure(nt) que le flux thermique $\Phi(x) = \iint_S \overrightarrow{j_Q} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$ soit uniforme, c'est-à-dire ne dépendant pas de x ?

(a) barre homogène

(b) régime permanent

(c) parois latérales calorifugées

.....

c) En déduire le flux thermique $\Phi(x)$ traversant une section S de barre située à l'abscisse x.

(a) $\dfrac{\lambda S}{L}(T_1 - T_2)$

(b) $\dfrac{\lambda S}{L}(T_2 - T_1)$

(c) $\dfrac{\lambda L}{S}(T_1 - T_2)$

(d) $\dfrac{\lambda L}{S}(T_2 - T_1)$

.....

Entraînement 10.6 — Analogie thermique/électrique.

Une inhomogénéité spatiale de température $T_1 - T_2$ se traduit par un transport d'énergie caractérisé par le flux Φ. Ceci est analogue au transport de charges caractérisé par une intensité I causé par une inhomogénéité de potentiel électrique $V_1 - V_2$. Ainsi un conducteur électrique élémentaire de section S, de longueur ℓ et de conductivité électrique γ est caractérisé par une résistance $R = \dfrac{\ell}{\gamma S}$ permettant grâce à la loi d'Ohm $V_1 - V_2 = RI$ de déterminer I à partir de $V_1 - V_2$.

Le flux thermique Φ est proportionnel à $T_1 - T_2$ en régime permanent. En utilisant l'analogie électrique, on peut définir une « résistance thermique ».

a) La contrainte imposée au conducteur thermique $T_1 - T_2$ est l'analogue de celle imposée à un conducteur électrique :

(a) γ (b) $V_1 - V_2$ (c) I (d) R

.....

b) Quelle grandeur, dans la liste suivante, est l'analogue électrique du flux thermique Φ ?

(a) γ (b) $V_1 - V_2$ (c) I (d) R

.....

c) Pour caractériser le conducteur thermique, on introduit une « résistance thermique », analogue de :

(a) γ (b) $V_1 - V_2$ (c) I (d) R

.....

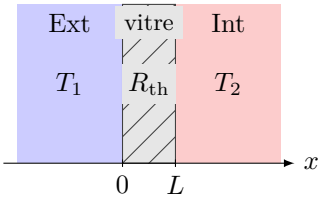
d) Quelle grandeur, dans la liste suivante, est l'analogue électrique de λ ?

(a) γ (b) $V_1 - V_2$ (c) I (d) R

.....

Entraînement 10.7 — Conducto-convectif en une dimension (I).

Soit une vitre (surface $S = 1\,\mathrm{m}^2$, épaisseur $L = 5\,\mathrm{mm}$) fabriquée en verre, de conductivité thermique $\lambda = 1\,\mathrm{W \cdot K^{-1} \cdot m^{-1}}$. Celle-ci sépare l'extérieur (à la température $T_1 = 9\,°\mathrm{C}$) de l'intérieur (à la température $T_2 = 19\,°\mathrm{C}$) d'une maison.



La situation est étudiée en régime permanent. La conduction thermique envisagée est telle que la résistance thermique de la vitre est $R_{\mathrm{th,v}} = \dfrac{L}{\lambda S}$.

a) La résistance thermique de la vitre vaut :

(a) $5 \times 10^{-3}\,\mathrm{K \cdot W^{-1}}$ (b) $5 \times 10^{-3}\,\mathrm{W \cdot K^{-1}}$ (c) $2 \times 10^{3}\,\mathrm{K \cdot W^{-1}}$ (d) $2 \times 10^{3}\,\mathrm{W \cdot K^{-1}}$

.....

On rappelle que le flux thermique est relié à l'inhomogénéité de température par la relation $\Delta T = R_{\mathrm{th}}\Phi$.

b) Le flux thermique Φ à travers la vitre vaut :

(a) $5 \times 10^{-3}\,\mathrm{W}$ (b) $5 \times 10^{-2}\,\mathrm{W}$ (c) $2 \times 10^{3}\,\mathrm{W}$ (d) $2 \times 10^{2}\,\mathrm{W}$

.....

c) En réalité la température n'est pas totalement uniforme dans l'air à proximité des surfaces de contact avec la vitre. Les transferts thermiques à l'interface avec les thermostats sont régis alors par la relation de Newton : $\Phi = h_1 S(T_1 - T(0))$ et $\Phi = h_2 S(T(L) - T_2)$, où h_1 et h_2 sont les coefficients de transfert conducto-convectifs dans les deux couches limites.

Les résistances thermiques $R_{\mathrm{th},i}$ correspondantes sont de la forme :

(a) $R_{\mathrm{th},i} = \dfrac{h_i}{S}$ (b) $R_{\mathrm{th},i} = \dfrac{S}{h_i}$ (c) $R_{\mathrm{th},i} = \dfrac{1}{h_i S}$ (d) $R_{\mathrm{th},i} = h_i S$

.....

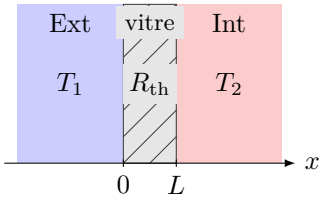
d) Les résistances $R_{\mathrm{th,v}}$, $R_{\mathrm{th},1}$ et $R_{\mathrm{th},2}$ sont-elles en série ou en parallèle ? ....

e) Évaluer le flux thermique Φ' à travers la vitre en tenant compte des pertes conducto-convectives si $h_1 = h_2 = 5 \times 10^{2}\,\mathrm{W \cdot K^{-1} \cdot m^{-2}}$ .....

Entraînement 10.8 — Conducto-convectif en une dimension (II).

On considère une vitre de section S et de résistance thermique R_{th} séparant l'extérieur de température T_1 et l'intérieur d'une maison (température T_2).

Les échanges thermiques aux interfaces en $x = 0$ et $x = L$ sont régis par la relation de Newton. Avec une convection plus importante à l'extérieur due au vent, on peut considérer que $T(0) = T_1$.

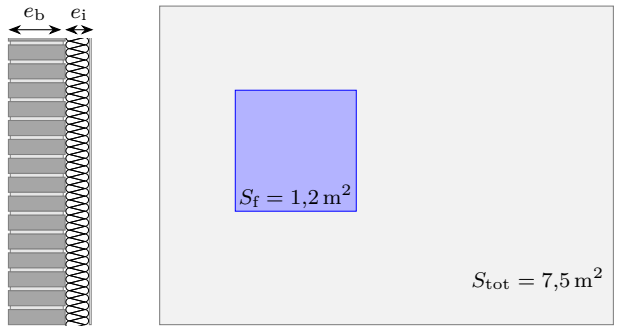


Les températures et le flux thermique vérifient alors le système :

$$\begin{cases} \phi = h_2 S(T(L) - T_2) \\ T_1 - T(L) = R_{\mathrm{th}}\phi. \end{cases}$$

Quelle est l'expression de $T(L)$? .....

Entraînement 10.9 — Isolation thermique d'un mur.



Vue en coupe Vue de face

Un pan de mur de surface totale $S_{tot} = 7{,}5\,m^2$ est composé d'un mur de brique d'épaisseur $e_b = 20\,cm$, de conductivité thermique $\lambda_b = 0{,}70\,W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$, et d'un isolant en fibre de bois d'épaisseur $e_i = 12\,cm$, de conductivité thermique $\lambda_i = 0{,}036\,W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$.

Une fenêtre de surface $S_f = 1{,}2\,m^2$, de résistance thermique $R_f = 0{,}70\,K \cdot W^{-1}$, est percée dans le mur.

La température intérieure est $T_{int} = 20\,°C$, la température extérieure vaut $T_{ext} = 5\,°C$.

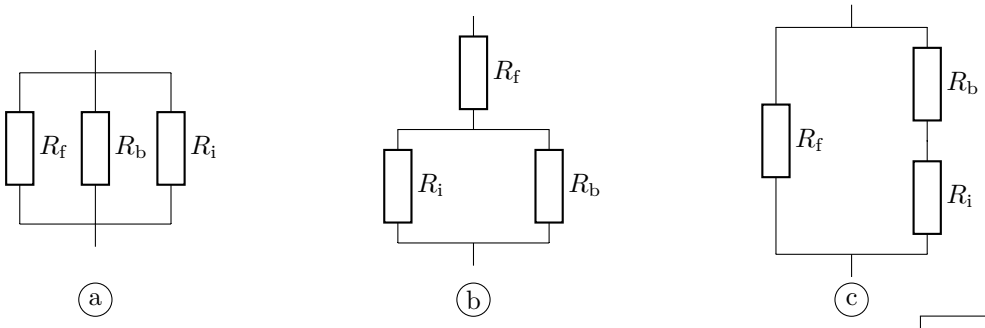
La résistance thermique d'une surface S plane d'épaisseur e est $R_{th,\ plan} = \dfrac{e}{\lambda S}$.

Quelle est la valeur de la résistance thermique :

a) R_b de la brique ? .....

b) R_i de l'isolant ? .....

c) Parmi les montages suivants, lequel correspond à la situation étudiée ?



.....

d) Quelle est la résistance thermique globale $R_{th,tot}$ du mur ? .....

e) En considérant que les échanges thermiques ne peuvent se faire qu'à travers cette paroi, quelle puissance thermique ϕ doit développer le système de chauffage pour maintenir cet écart de température ?

(a) 47,5 W (b) 475 W (c) 4,75 kW

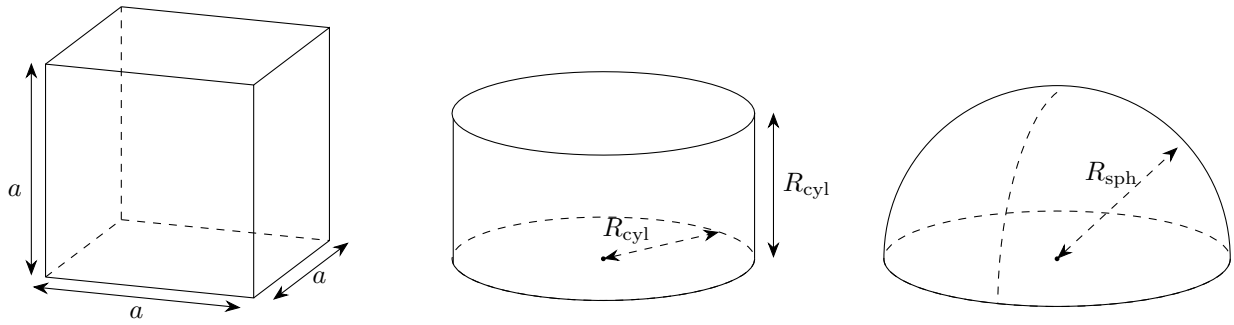
.....

Entraînement 10.10 — Igloo de survie.

Un alpiniste, surpris par le mauvais temps, décide de construire un igloo de survie.

Le volume de son igloo doit valoir $1\,\mathrm{m}^3$; il le construit avec des blocs de neige d'épaisseur $e = 10\,\mathrm{cm}$ et de conductivité thermique $\lambda_{\text{neige}} = 0{,}2\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1}$.

Il hésite entre trois formes d'igloo : un igloo cubique, un igloo cylindrique dont la hauteur est égale à son rayon et un igloo hémisphérique.



Igloo cubique — Igloo cylindrique — Igloo hémisphérique

Pour les calculs numériques, on prendra : $\dfrac{1}{\sqrt[3]{\pi}} \approx 0{,}7$ et $\sqrt[3]{\dfrac{3}{2\pi}} \approx 0{,}8$.

Pour que le volume intérieur des igloos soit de $1\,\mathrm{m}^3$,

a) quel doit être le rayon de l'igloo cylindrique ?

.....

b) quel doit être le rayon de l'igloo hémisphérique ?

.....

c) On souhaite déterminer la résistance thermique de chaque igloo. Associer à chaque igloo l'expression de sa résistance thermique.

$$I_{\text{a}} = \int_{0{,}7}^{0{,}8} \frac{\mathrm{d}r}{3\pi\lambda r^2} \qquad I_{\text{b}} = \int_{0{,}8}^{0{,}9} \frac{\mathrm{d}r}{2\pi\lambda r^2} \qquad I_{\text{c}} = \int_{1}^{1{,}1} \frac{\mathrm{d}r}{5\lambda r^2}$$

.....

d) Après avoir calculé chacune des intégrales précédentes, quel igloo présente une résistance thermique approximative de $\dfrac{1}{8{,}9}\mathrm{K}\cdot\mathrm{W}^{-1}$?

.....

e) L'alpiniste dégage une puissance thermique de $\phi = 100\,\mathrm{W}$.

En déduire la différence de température entre l'intérieur de l'igloo hémisphérique et l'extérieur en régime permanent.

.....

Entraînement 10.11 — Analogie électrique d'une habitation (I).

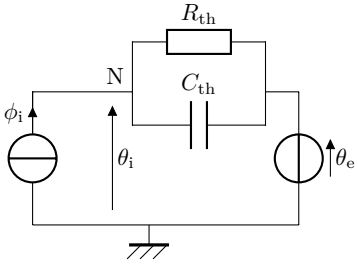
L'objectif de cet entraînement est d'approfondir l'analogie entre les phénomènes de conduction thermique et les phénomènes électriques en étudiant une habitation dans sa globalité.

On constate que :

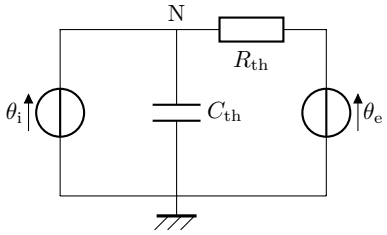
- le flux thermique ϕ est l'analogue de l'intensité du courant électrique (flux de charge électrique) ;
- la température θ est l'équivalent du potentiel électrique ;
- un matériau ayant une capacité thermique C_{th} peut être modélisé par un condensateur électrique ;
- tout comme la résistance électrique traduit une relation de proportionnalité entre la différence de potentiel et le courant électrique, la résistance thermique traduit la relation de proportionnalité entre la différence de température et le flux thermique : $\Delta\theta = R_{\text{th}}\phi$.

Une habitation est isolée de l'extérieur où règne une température $\theta_{\text{e}}(t)$ par une enveloppe isolante de résistance thermique R_{th}. À l'intérieur de l'habitation, un système de chauffage apporte un flux thermique ϕ_{i} permettant d'atteindre une température intérieure $\theta_{\text{i}}(t)$. L'intérieur de la maison possède une capacité thermique C_{th}.

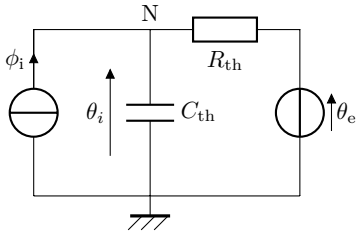
Parmi les circuits ci-dessous, lequel correspond à la situation étudiée ? .....



Circuit (a)



Circuit (b)



Circuit (c)

Entraînement 10.12 — Analogie électrique d'une habitation (II).

a) Établir l'équation différentielle sur θ_i dans le cas du circuit (c) de l'entraînement précédent.

.....

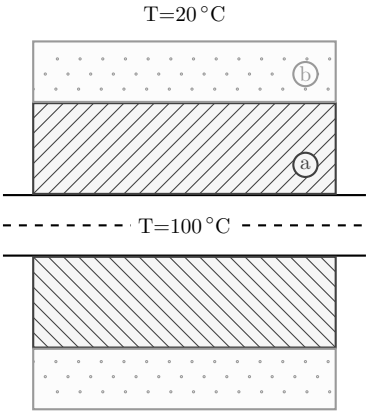
Du fait de l'alternance jour/nuit, la température extérieure θ_{e} peut s'écrire :

$$\theta_{\text{e}}(t) = \theta_{\text{e0}} + \theta_{\text{e1}}\cos(\omega t).$$

b) Quelle doit être l'expression du flux ϕ_{i} fourni par le système de chauffage pour maintenir une température intérieure constante égale à θ_{i0} ?

.....

Entraînement 10.13 — Une résistance thermique en géométrie cylindrique.



Vue en coupe

Un mince tuyau métallique d'une longueur L et de rayon 1 cm transporte de la vapeur à 100 °C. Celui-ci est couvert par deux couches d'isolants :

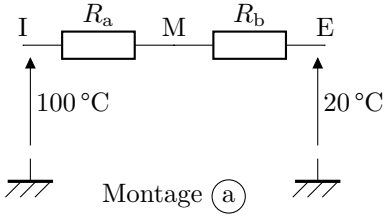
- une couche (a) intérieure d'une épaisseur de 4 cm et de conductivité thermique $0{,}1\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$,
- une couche (b) extérieure d'une épaisseur de 2 cm et de conductivité thermique $0{,}3\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$.

La température extérieure est de 20 °C.

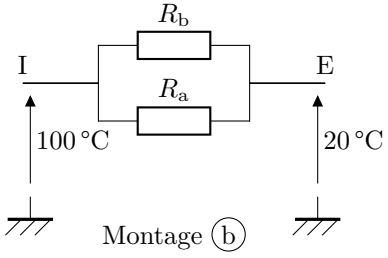
La résistance thermique dans le cas d'un flux radial est de la forme $R_{\mathrm{th}} = \dfrac{1}{2\pi\lambda L}\ln(r_2/r_1)$.

a) Parmi les deux montages électriques ci-dessous, lequel correspond au système étudié ?

.....



Montage (a)



Montage (b)

b) Quelle est la température à l'interface entre les deux isolants ?

(a) 25,2 °C (b) 30,2 °C (c) 30,2 °C (d) 35,2 °C (e) 40,2 °C

On prendra $\dfrac{\ln(7)}{\ln(5)} \approx 1{,}21$ .....

Plus de diffusion thermique

Entraînement 10.14 — Choix d'un isolant.

La résistance thermique surfacique r d'un matériau traduit sa capacité à résister à un flux thermique. Elle dépend de l'épaisseur du matériau e et de sa conductivité thermique λ, selon la relation

$$r = e/\lambda.$$

Le déphasage thermique $\Delta\tau$ définit le temps que met un front de chaleur pour traverser une épaisseur donnée de matériau. Cette grandeur dépend de la masse volumique et de la capacité thermique massique du matériau, selon la relation

$$\Delta\tau = e\sqrt{\frac{\mu c}{2\omega\lambda}},$$

où ω est la pulsation excitatrice associée au front de chaleur.

La prise en compte du déphasage thermique est notamment utile pour le confort l'été, en décalant au cœur de la nuit plus fraîche l'arrivée de la chaleur reçue par les parois extérieures durant la journée. Dans le cas de l'alternance jour/nuit, on a $\omega = 7{,}3 \times 10^{-5}\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$.

La consommation totale d'énergie primaire non renouvelable, communément appelée *énergie grise*, permet de quantifier assez bien l'impact environnemental global d'un produit. L'énergie grise surfacique $\mathcal{E}_\mathrm{S}$ d'un isolant peut se calculer par la relation $\mathcal{E}_\mathrm{S} = \mu e \mathcal{E}$ où $\mathcal{E}$ est l'énergie grise massique.

Isolants	Conductivité thermique λ ($\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$)	Masse volumique μ ($\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$)	Capacité thermique c ($\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$)	Énergie grise massique $\mathcal{E}$ ($\mathrm{kWh \cdot kg^{-1}}$)
Fibre de bois	0,037	150	2 000	2
Bottes de paille	0,052	100	1 550	0,1
Laine minérale	0,030	30	900	8
Vermiculite	0,050	300	950	0,8
Polystyrène expansé	0,032	20	1 300	32
Polyuréthane	0,022	35	1 000	30

Un maître d'œuvre doit choisir un isolant pour fabriquer un mur avec comme contrainte d'avoir

$$r \geqslant 7{,}0\,\mathrm{m^2 \cdot K \cdot W^{-1}}$$

et un déphasage

$$\Delta\tau \geqslant 8\,\mathrm{h}.$$

Après avoir calculé l'épaisseur nécessaire pour vérifier la contrainte sur r et le déphasage correspondant, le maître d'œuvre choisira l'isolant ayant l'énergie grise surfacique la plus faible parmi ceux qui vérifient les contraintes ci-dessus.

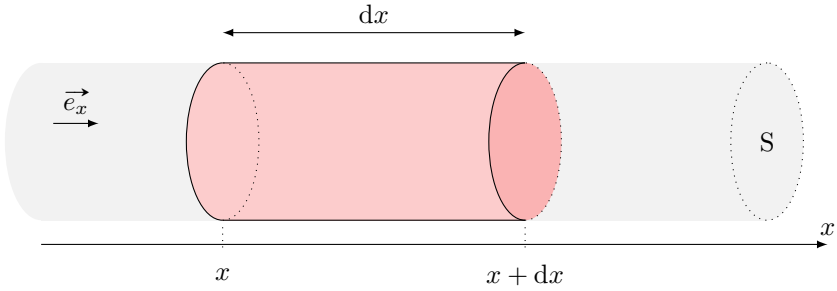
Quel isolant choisira-t-il ? .....

Entraînement 10.15 — En présence de source.

On se place dans le cas d'une diffusion unidimensionnelle telle que les isothermes sont des plans $x = \text{cste}$. On a alors :

$$\overrightarrow{j_Q} = -\lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} \overrightarrow{e_x}.$$

On étudie un élément de volume du conducteur thermique de section S, et compris entre x et $x + \mathrm{d}x$:



Le conducteur thermique est le siège d'une production algébrique volumique d'énergie de puissance p_{prod} (effet Joule, réaction chimique, etc.).

a) Donner l'expression de la variation d'énergie interne $\mathrm{d}U$ de la tranche $\mathrm{d}x$ du conducteur entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$.

.....

b) Exprimer le transfert thermique algébriquement reçu par la tranche dû aux transferts conductifs.

.....

c) Donner l'expression de l'énergie produite dans la tranche entre t et $t + \mathrm{d}t$.

.....

d) En déduire l'équation aux dérivées partielles vérifiée par T.

.....

Entraînement 10.16 — Transfert conducto-convectif latéral.

On se place dans le cas d'une diffusion unidimensionnelle telle que les isothermes sont des plans $x = \text{cste}$. On a alors $\overrightarrow{j_Q} = -\lambda \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} \overrightarrow{e_x}$. On étudie un élément de volume du conducteur thermique de section S, et compris entre x et $x + \mathrm{d}x$.

La paroi latérale du volume de section S est en contact avec un thermostat à la température T_{ext}. Le flux thermique surfacique au niveau de la surface latérale vérifie la loi de Newton, *i.e.* est proportionnel à $T(x,t) - T_{\text{ext}}$ (facteur de proportionnalité noté h). On note p le périmètre de la tranche de section S.

a) Donner l'expression de $\mathrm{d}U$ en fonction de la variation de température .....

b) Exprimer le transfert thermique algébriquement reçu par la tranche dû aux transferts conductifs.

.....

c) Quelle est l'expression de l'énergie algébriquement reçue au niveau de la paroi latérale dans la tranche entre t et $t + \mathrm{d}t$?

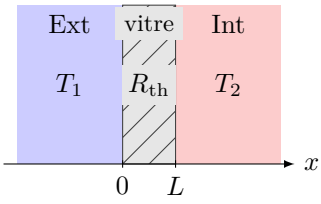
(a) $h(T(x,t) - T_{\text{ext}})p\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$
(b) $h(T(x,t) - T_{\text{ext}})S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$
(c) $-h(T(x,t) - T_{\text{ext}})p\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$
(d) $h(T(x,t) - T_{\text{ext}})S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$
(e) 0
(f) $-h(T(x,t) - T_{\text{ext}})p$

.....

d) En déduire l'équation aux dérivées partielles vérifiée par T .....

Entraînement 10.17 — Conducto-convectif en une dimension (III).

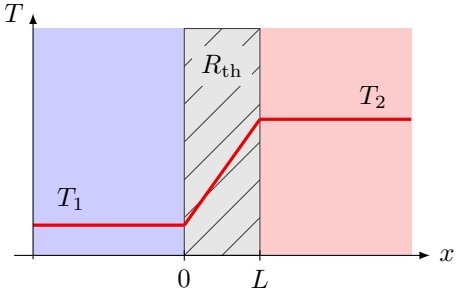
On considère une vitre de section S et de résistance thermique R_{th} séparant l'extérieur de température T_1 et l'intérieur d'une maison (température T_2).

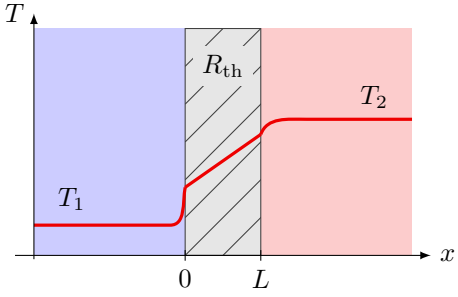


Les échanges thermiques aux interfaces en $x = 0$ et $x = L$ sont régis par la relation de Newton. Si l'on prend en compte les effets conducto-convectifs aux deux interfaces, on obtient le système :

$$\begin{cases} \phi = h_1 S(T_1 - T(0)) \\ T(0) - T(L) = R_{\text{th}}\phi \\ \phi = h_2 S(T(L) - T_2). \end{cases}$$

a) Le profil de température est de la forme :

(a)


(b)


.....

Quelle est l'expression de :

b) $T(0)$? .....

c) $T(L)$? .....

Réponses mélangées

$\mu c \dfrac{\partial T}{\partial t} = \lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + p_{\text{prod}}$ $\quad$ 0,8 m $\quad$ $\dfrac{\mathrm{d}\theta_\mathrm{i}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\theta_i}{R_\text{th} C_\text{th}} = \dfrac{1}{R_\text{th} C_\text{th}} (R_\text{th} \phi_\mathrm{i} + \theta_\mathrm{e})$

(c) $\quad$ (c) $\quad$ $\dfrac{R_\text{th} h_1 S + \dfrac{h_1}{h_2}}{1 + \dfrac{h_1}{h_2} + R_\text{th} h_1 S} T_1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{h_1}{h_2} + R_\text{th} h_1 S} T_2$ $\quad$ $1/\sqrt{2}$ $\quad$ (a)

(a) $\quad$ $\mu c \dfrac{\partial T}{\partial t} = \lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} - h \dfrac{p}{S} (T(x,t) - T_\text{ext})$ $\quad$ (a) $\quad$ $1{,}1 \times 10^3$ W

$\mathrm{d}U = \mu c \dfrac{\partial T}{\partial t} S \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t$ $\quad$ $\dfrac{1}{R_\text{th}} (\theta_\text{i0} - \theta_\text{e0} - \theta_\text{e1} \cos(\omega t))$ $\quad$ (d) $\quad$ (c) $\quad$ $-\dfrac{\partial j_Q}{\partial x} S \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t$

$\dfrac{1}{1 + \dfrac{h_2}{h_1} + R_\text{th} h_2 S} T_1 + \dfrac{\dfrac{h_2}{h_1} + R_\text{th} h_2 S}{1 + \dfrac{h_2}{h_1} + R_\text{th} h_2 S} T_2$ $\quad$ 4 $\quad$ (c) $\quad$ (c) $\quad$ (c) $\quad$ $4{,}5 \times 10^{-2}\,\mathrm{K \cdot W^{-1}}$

(a) $\quad$ (b) $\quad$ en série $\quad$ $\lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} S \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t$ $\quad$ (a) $\quad$ (d) $\quad$ 2×10^{-3} $\quad$ (c) $\quad$ Sphérique

(b) et (c) $\quad$ $T(x) = \dfrac{T_2 - T_1}{L} x + T_1$ $\quad$ 11 °C $\quad$ (a) $\quad$ $0{,}53\,\mathrm{K \cdot W^{-1}}$ $\quad$ (b) $\quad$ (a)

(b) $\quad$ 2 $\quad$ 0,7 m $\quad$ (b) $\quad$ Les bottes de paille $\quad$ (cub., (c)) (cyl., (a)) (sph., (b))

(a) $\quad$ $\dfrac{T_1 + R_\text{th} h_2 S T_2}{1 + R_\text{th} h_2 S}$ $\quad$ $\lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} S \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t$ $\quad$ (c) $\quad$ $p_\text{prod} S \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t$ $\quad$ oui $\quad$ (b) $\quad$ (a)

$3{,}2 \times 10^{-1}\,\mathrm{K \cdot W^{-1}}$ $\quad$ (a) $\quad$ $\mathrm{d}U = \mu c \dfrac{\partial T}{\partial t} S \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t$ $\quad$ $\sqrt{2}$ $\quad$ $\mathrm{d}U = \mu c \dfrac{\partial T}{\partial t} S \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t$

► Réponses et corrigés page 203

Tables et diagrammes thermodynamiques

Prérequis
Notions d'additivité et d'extensivité de fonctions d'état. Transition de phase.

Tables thermodynamiques

Entraînement 11.1 — Table de vapeur sèche (à double entrée).

La table ci-dessous liste les propriétés de la vapeur d'eau sèche.

Le volume massique v est exprimé en $\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{kg}^{-1}$, l'enthalpie massique h en $\mathrm{kJ} \cdot \mathrm{kg}^{-1}$ et l'entropie massique s en $\mathrm{kJ} \cdot \mathrm{K}^{-1} \cdot \mathrm{kg}^{-1}$.

p en kPa (T_{sat} en °C)		T en °C				
		100	150	200	250	300
100 (99,606)	v	1,696 0	1,936 7	2,172 5	2,406 2	2,638 9
	h	2 675,77	2 776,59	2 875,48	2 974,54	3 074,54
	s	7,361 0	7,614 7	7,835 6	8,034 6	8,217 1
200 (120,21)	v		0,969 89	1,080 5	1,198 9	1,316 2
	h		2 769,09	2 870,78	2 971,26	3 072,08
	s		7,280 9	7,508 1	7,710 0	7,894 0
500 (151,84)	v			0,425 03	0,474 43	0,522 60
	h			2 855,90	2 961,13	3 064,60
	s			7,061 1	7,272 6	7,461 4

a) En arrondissant le volume massique v à deux chiffres significatifs, calculer la masse volumique ρ en $\mathrm{g} \cdot \mathrm{mL}^{-1}$ de la vapeur d'eau soumise à une pression de 200 kPa et à une température de 200 °C.

.....

b) Que vaut la température de saturation T_{sat} pour une pression de 200 kPa ?

(a) 200 °C
(b) 120,21 °C
(c) 99,606 °C
(d) 151,84 °C

.....

c) Quel est l'état d'équilibre du système à une température de 100 °C et soumis à une pression de 200 kPa ?

(a) état liquide
(b) état vapeur
(c) état diphasé

.....

Entraînement 11.2 — Table de vapeur saturante (à entrée unique).

Les propriétés de l'eau sous forme diphasée sont données dans la table de vapeur saturante ci-dessous :

T (°C)	p_{sat} (MPa)	Liquide saturant ①	②	③	Vapeur saturante ①	②	③
20	0,002 339	83,9	0,296 5	0,001 002	2 537,4	8,666 0	57,757
40	0,007 385	167,5	0,572 4	0,001 008	2 573,5	8,255 5	19,515
60	0,019 946	251,2	0,831 3	0,001 017	2 608,8	7,908 1	7,667 2
80	0,047 414	335,0	1,075 6	0,001 029	2 643,0	7,611 1	3,405 2
100	0,101 420	419,2	1,307 2	0,001 043	2 675,6	7,354 1	1,671 8

Les colonnes ①, ②, ③ sont respectivement exprimées en $\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$, $\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ et $\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$.

À l'aide d'une analyse des unités, attribuer chaque colonne à une de ces trois grandeurs : volume massique v, enthalpie massique h et entropie massique s.

a) h ..... b) v ..... c) s .....

d) Exprimer la valeur de la pression de saturation p_{sat} à 100 °C en millimètres de mercure (mmHg) en sachant que 1 mmHg = 133,3 Pa .....

e) Le volume massique de l'eau contenue dans un ballon d'eau chaude à 60 °C est de $v = 1{,}03\,\text{cm}^3 \cdot \text{g}^{-1}$.

Quel est l'état du système : liquide, diphasé ou vapeur ? .....

Déterminer, par une lecture de la table à 60 °C, la valeur du volume massique de liquide saturant v_{l} et celle du volume massique de vapeur saturante v_{g}.

f) v_{l} ..... g) v_{g} .....

h) Le théorème des moments donne la fraction massique de vapeur d'un mélange diphasé : $x_{\text{g}} = \dfrac{v - v_{\text{l}}}{v_{\text{g}} - v_{\text{l}}}$.

En raisonnant en termes d'ordres de grandeur, laquelle des propositions ci-dessous correspond à une approximation raisonnable de l'expression de x_{g} si $v = 1\,030\,\text{cm}^3 \cdot \text{g}^{-1}$ à 60 °C ?

(a) v/v_{l} (b) $v_{\text{l}}/v_{\text{g}}$ (c) v/v_{g}

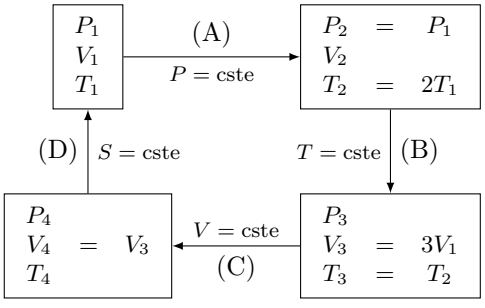
.....

Diagramme de Clapeyron (P, v) et diagramme de Watt (P, V)

Entraînement 11.3 — Schéma synoptique d'un cycle thermodynamique.

Soit n moles de gaz parfait qui décrivent le cycle ci-contre.

Attribuer aux transformations trois des quatre adjectifs suivants : isobare, adiabatique, isochore, isotherme.



a) Transformation (A) .....

b) Transformation (B) .....

c) Transformation (C) .....

d) À l'aide de la relation $PV = nRT$, exprimer V_2 en fonction de V_1 .....

Entraînement 11.4 — Un cycle dans le diagramme (P, V).

Les données nécessaires aux questions suivantes sont disponibles dans l'entraînement **11.3**.

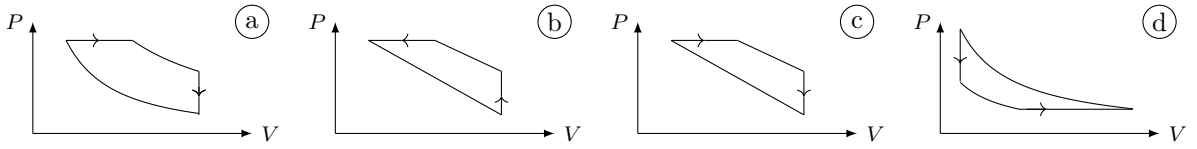
Pour rappel, un gaz parfait subissant une transformation isentropique vérifie la loi de Laplace : $PV^\gamma = \text{cste}$.

a) Laquelle de ces relations est valable pour la transformation (B) ?

(a) $\dfrac{P}{V} = \text{cste}$ (b) $PV = \text{cste}$ (c) $P^\gamma V^\gamma = \text{cste}$ (d) $T^{1-\gamma}V^\gamma = \text{cste}$

.....

b) Les échelles étant linéaires, déterminer lequel de ces tracés représente le cycle.



.....

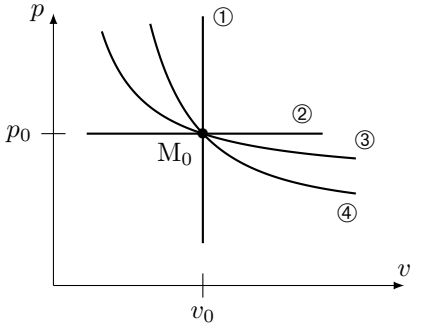
c) Sachant que le travail des actions de pression reçu au cours du cycle est $W = \oint_{\text{cycle}} -P\,\mathrm{d}V$, déterminer laquelle de ces affirmations est correcte.

(a) $W > 0$ donc le cycle est récepteur.
(b) $W < 0$ donc le cycle est récepteur.
(c) $W = 0$ car la transformation est un cycle.
(d) $W < 0$ donc le cycle est moteur.

.....

Entraînement 11.5 — Courbes iso d'un GP dans le diagramme (p, v).

Une courbe isochore, une courbe isotherme, une courbe adiabatique réversible (donc isentrope) et une courbe isobare ont été représentées ci-contre dans le diagramme (p, v) d'un gaz parfait.



Toutes ces courbes passent par le même état décrit par le point M_0 ayant pour coordonnées la pression p_0 et le volume massique v_0.

Pour un gaz parfait :

- l'équation d'état massique est $pv = rT$, avec $r = R/M$ la constante massique des gaz parfaits ;
- la loi de Laplace dans le cas d'une transformation adiabatique réversible peut s'écrire $pv^\gamma = \text{cste}$, avec $\gamma > 1$ le coefficient adiabatique.

Exprimer la pente $\dfrac{\partial p}{\partial v}$ au point M_0 pour chaque courbe iso en fonction de p_0, v_0 et γ :

a) iso-p .....

b) iso-T .....

c) iso-v .....

d) iso-s .....

À l'aide d'une comparaison des pentes des courbes au point M_0, déterminer l'adjectif adapté à chaque courbe parmi la liste suivante : isobare, isotherme, isochore, isentrope.

e) ① .....

f) ② .....

g) ③ .....

h) ④ .....

Diagramme entropique (T, s)

Entraînement 11.6 — Courbes isobares d'un diagramme (T, s).

La 2e identité thermodynamique est : $\mathrm{d}h = T\,\mathrm{d}s + v\,\mathrm{d}p$. La seconde loi de Joule énonce que $\mathrm{d}h = c_P\,\mathrm{d}T$.

a) Établir l'équation différentielle vérifiée par $T(s)$ le long d'une courbe isobare.

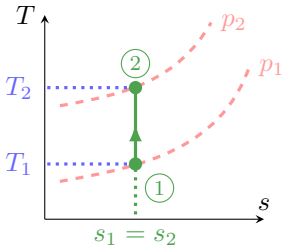
.....

b) En déduire l'expression de $T(s)$ vérifiée le long d'une courbe isobare parmi les relations suivantes :

(a) $T_0 \cos(\omega s + \varphi)$ (b) $T_0 \exp\left(\dfrac{s - s_0}{c_p}\right)$ (c) $T_0 \exp\left(\dfrac{s_0 - s}{c_p}\right)$ (d) $T_0 \cos(s/c_p)$

.....

La suite vise à déterminer la position relative de deux courbes isobares. Pour cela, la compression isentropique d'un gaz parfait, passant d'un état (1) à un état (2), est représentée par un trait plein dans le diagramme (T, s) ci-contre. Les courbes en tirets représentent deux courbes isobares p_1 et p_2.



c) La transformation vérifie une des lois de Laplace : $p^{1-\gamma}T^{\gamma} = \text{cste}$. En déduire laquelle des relations suivantes est une expression de p_2 valide.

(a) $p_1^{1-\gamma}\left(\dfrac{T_1}{T_2}\right)^{\gamma}$ (b) $p_1\left(\dfrac{T_1}{T_2}\right)^{\gamma/(1-\gamma)}$ (c) $p_1\left(\dfrac{T_1}{T_2}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}$

.....

d) Sachant que $\gamma > 1$, que dire de la position relative d'une courbe isobare haute pression (HP) relativement à une courbe isobare basse pression (BP) ?

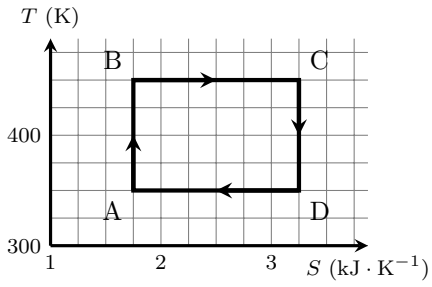
(a) Les HP sont au-dessus des BP. (b) Les HP sont en dessous des BP.

.....

Entraînement 11.7 — Estimation d'un transfert thermique.

Les transformations étudiées ici sont réversibles si bien qu'un transfert thermique reçu entre un état I et un état F est $Q_{\mathrm{IF}} = \displaystyle\int_{\mathrm{I}}^{\mathrm{F}} T\,\mathrm{d}S$.

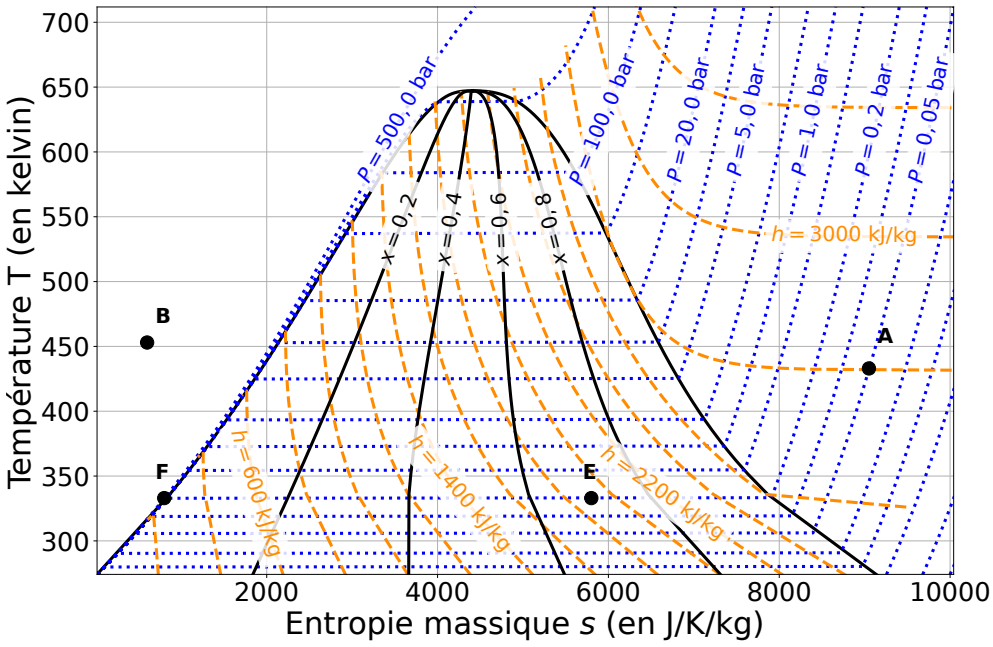
Estimer le transfert thermique reçu lors du cycle donné ci-contre.



(a) $Q_{\mathrm{ABCDA}} = 1{,}5 \times 10^5$ J
(b) $Q_{\mathrm{ABCDA}} = -1{,}5 \times 10^5$ J
(c) $Q_{\mathrm{ABCDA}} = -1{,}5 \times 10^2$ J
(d) $Q_{\mathrm{ABCDA}} = 2{,}25 \times 10^2$ J
(e) $Q_{\mathrm{ABCDA}} = 2{,}25 \times 10^5$ J
(f) $Q_{\mathrm{ABCDA}} = -2{,}25 \times 10^2$ J

.....

Entraînement 11.8 — Diagramme entropique de l'eau.



Pour rappel, un gaz parfait vérifie la seconde loi de Joule : $\mathrm{d}h = c_p\,\mathrm{d}T$. Pour un liquide, cette loi s'écrit sous la forme $\mathrm{d}h = c\,\mathrm{d}T$.

a) Quelles sont les propositions vraies au point A ?

(a) La pression est de 0,05 bar.

(b) L'enthalpie massique est de 2 800 J.

(c) Le corps pur est sous forme gazeuse et le modèle du gaz parfait est valable.

(d) Le corps pur est sous forme liquide.

.....

b) Quelles sont les propositions vraies au point B ?

(a) Le corps pur est sous forme liquide.

(b) Le corps pur est un mélange de liquide et de vapeur.

(c) La température est de 450 °C.

(d) L'entropie massique vaut $600\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$.

.....

c) Quelles sont les propositions vraies au point E ?

(a) Le titre massique en liquide est de 0,7.

(b) Le titre massique en vapeur est de 0,7.

(c) Le titre massique en liquide est de 0,3.

(d) L'enthalpie massique est de $1{,}9\times10^3\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}}$.

.....

d) Quels termes est-il possible d'associer à la transformation d'un système passant de l'état E à l'état F ?

(a) vaporisation (b) fusion (c) liquéfaction (d) isobare

.....

e) Quelle est la valeur de l'entropie massique au point F ? .....

f) Déterminer, à l'aide d'une lecture graphique, la valeur de la variation d'entropie massique d'un système passant de l'état E à l'état F.

.....

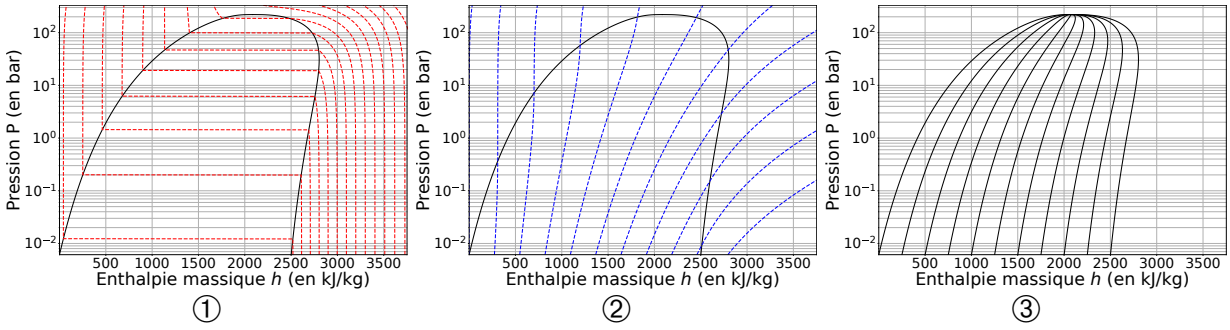
g) Déterminer, à l'aide d'une lecture graphique, la valeur de la variation d'enthalpie massique d'un système passant de l'état E à l'état F.

.....

Diagramme des frigoristes (P, h)

Entraînement 11.9 — Réseaux de courbes.

Différents réseaux de courbes sont tracés dans les diagrammes (P, h) ci-dessous.



La 1re et la 2e identités thermodynamiques sont respectivement $\mathrm{d}u = T\,\mathrm{d}s - p\,\mathrm{d}v$ et $\mathrm{d}h = T\,\mathrm{d}s + v\,\mathrm{d}p$. Les phases condensées incompressibles et indilatables, dont l'équation d'état est $v = \text{cste}$, et les gaz parfaits vérifient les lois de Joule qui, écrites en relations différentielles, donnent $\mathrm{d}u = c_V\,\mathrm{d}T$ et $\mathrm{d}h = c_p\,\mathrm{d}T$.

Pour chacun des trois diagrammes, choisir quel adjectif parmi la liste suivante correspond au réseau de courbes tracé :

(a) isobare (c) isotitre (e) isenthalpe

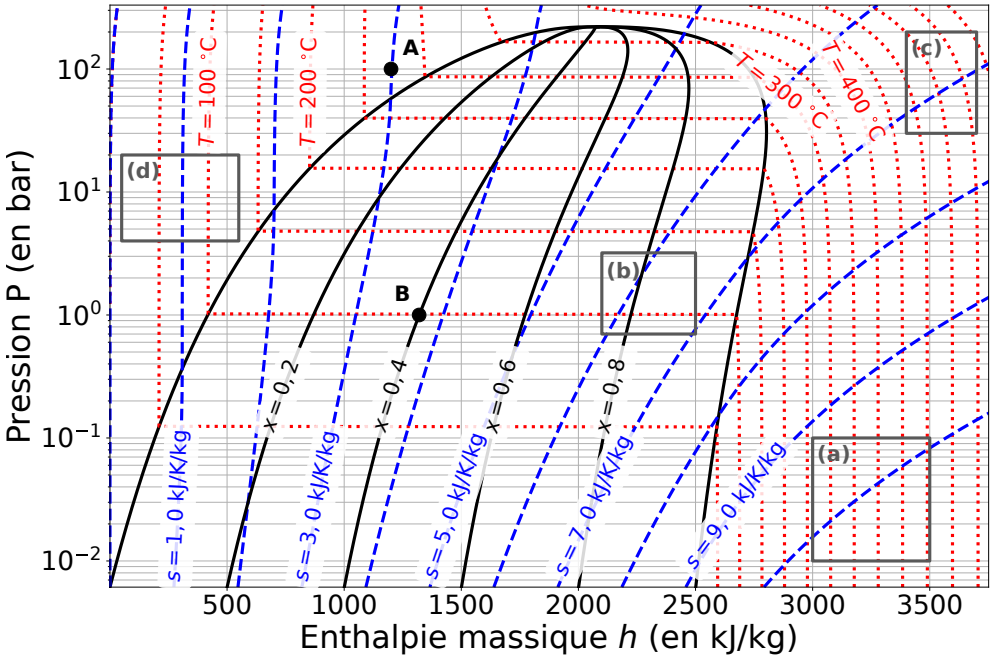
(b) isotherme (d) isentrope

a) Diagramme ① .....

b) Diagramme ② .....

c) Diagramme ③ .....

Entraînement 11.10 — Diagramme des frigoristes de l'eau.



a) Au point A, quelles sont les propositions vraies ?

(a) La pression est de $1{,}00 \times 10^7$ Pa.

(b) La température est de 275 K.

(c) Le corps pur est sous forme gazeuse.

(d) Le corps pur est sous forme liquide.

.....

b) Au point B, quelles sont les propositions vraies ?

(a) La pression est de 1 Pa.

(b) La température est de 100 °C.

(c) Le corps pur est sous forme de mélange diphasé contenant du liquide et de la vapeur.

(d) Le titre massique en liquide est de 0,6.

.....

c) Pour rappel, un gaz parfait vérifie la seconde loi de Joule : $\mathrm{d}h = c_p\,\mathrm{d}T$. En déduire quelles sont les propositions valides en phase vapeur si le fluide est assimilé à un gaz parfait :

(a) Les courbes isothermes sont des segments horizontaux.

(b) Les courbes isothermes sont des demi-droites verticales.

(c) Les courbes isothermes sont confondues avec les courbes isenthalpes.

(d) Les courbes isothermes sont confondues avec les courbes isobares.

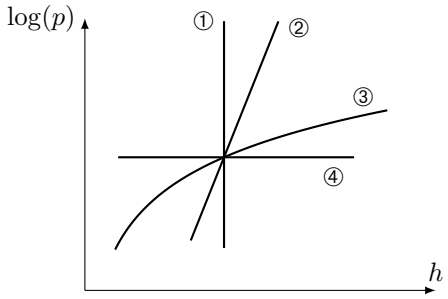
.....

d) En déduire dans quelle(s) zone(s) (a), (b), (c) ou (d) représentée(s) sur l'abaque le gaz peut être considéré comme un gaz parfait.

.....

Entraînement 11.11 — Courbes iso d'un GP dans le diagramme $(\log(p), h)$.

Quatre courbes iso ont été tracées dans le diagramme $(\log(p), h)$ ci-contre. Le fluide étudié est assimilé à un gaz parfait qui vérifie l'équation d'état $pvM = RT$ et la 2nde loi de Joule $\mathrm{d}h = c_p\,\mathrm{d}T$.



a) Le long d'une courbe isochore, la pente est $\dfrac{\mathrm{d}\log(p)}{\mathrm{d}h} = \dfrac{A}{p}$ avec A une constante. Exprimer A en fonction de R, M, c_p et v.

.....

Par une étude qualitative des pentes des courbes, déterminer l'adjectif adapté à chaque courbe parmi la liste suivante : isobare, isotherme, isochore, isentrope.

b) ① ..... c) ② ..... d) ③ ..... e) ④ .....

Entraînement 11.12 — Vaporisation de l'eau.

Le diagramme des frigoristes de l'eau est donné ci-dessus, dans l'entraînement **11.10**.

a) À l'aide d'une analyse visuelle, c'est-à-dire sans lecture de valeurs ni calculs, utiliser la position du point B sous la courbe de saturation pour déterminer laquelle de ces propositions est valide.

On rappelle que l'échelle des abscisses est linéaire.

(a) Il y a davantage de liquide que de vapeur.
(b) Il y a davantage de vapeur que de liquide.
(c) Il y a autant de vapeur que de liquide.
(d) Il n'y a que du liquide.

.....

À l'aide de lectures graphiques, attribuer, parmi les valeurs de 2 650, 1 320, 420 et 1 000 kJ · kg^{-1} celles correspondant aux enthalpies massiques caractérisant l'état du fluide au point B.

b) Enthalpie massique (moyenne) h_{B} du fluide diphasé : .....

c) Enthalpie massique $h_{\mathrm{v,B}}$ de la vapeur saturante : .....

d) Enthalpie massique $h_{\mathrm{l,B}}$ du liquide saturant : .....

e) Quelle est l'écriture correcte du théorème des moments donnant x_{B}, le titre en vapeur au point B ?

(a) $x_{\mathrm{B}} = \dfrac{h_{\mathrm{v,B}} - h_{\mathrm{B}}}{h_{\mathrm{v,B}} - h_{\mathrm{l,B}}}$ (b) $x_{\mathrm{B}} = \dfrac{h_{\mathrm{B}} - h_{\mathrm{l,B}}}{h_{\mathrm{v,B}} - h_{\mathrm{l,B}}}$ (c) $x_{\mathrm{B}} = \dfrac{h_{\mathrm{v,B}} - h_{\mathrm{B}}}{h_{\mathrm{l,B}} - h_{\mathrm{v,B}}}$ (d) $x_{\mathrm{B}} = \dfrac{h_{\mathrm{l,B}} - h_{\mathrm{B}}}{h_{\mathrm{B}} - h_{\mathrm{v,B}}}$

.....

f) En déduire la valeur du titre vapeur au point B en prenant $2230 \approx 2250$ .....

g) Par analyse de la forme de la courbe de saturation, comment évolue l'enthalpie de vaporisation $\Delta_{\mathrm{vap}}h = h_{\mathrm{v}} - h_{\mathrm{l}}$ lorsque la pression augmente ?

(a) elle reste constante (b) elle diminue (c) elle augmente

.....

Encore plus de tables thermodynamiques

Entraînement 11.13 — Volume massique d'une vapeur sèche.

Les données nécessaires aux questions suivantes sont disponibles dans la table de vapeur sèche de l'entraînement **11.1**.

a) Si R est la constante des gaz parfaits exprimée en $\mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$ et M la masse molaire, quelle est l'unité usuelle de $r = R/M$?

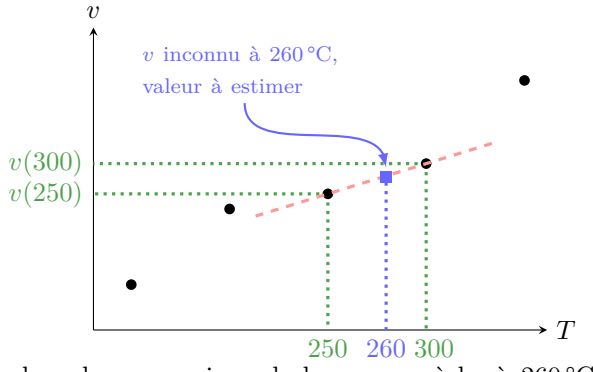
(a) $\mathrm{J/mol \cdot g^{-1}}$ (b) $\mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$ (c) $\mathrm{kg \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$

b) Laquelle des expressions suivantes est l'équation d'état massique des gaz parfaits, si v est le volume massique, p la pression, T la température et r la constante massique des gaz parfaits ?

(a) $pvr = T$ (b) $pv = T/r$ (c) $pv = r/T$ (d) $pv = rT$

c) À l'aide de l'équation d'état massique des gaz parfaits où $r = R/M = 0{,}46\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$ pour l'eau, estimer la valeur du volume massique de la vapeur sèche à 260 °C sous 100 kPa.

L'objectif de ce qui suit est d'évaluer le volume massique d'une vapeur sèche à 260 °C à partir des valeurs connues du volume massique à 250 °C et 300 °C. Pour cela, il est supposé que la représentation graphique du volume massique en fonction de la température est une droite passant par les points 250 °C et 300 °C.



d) Quelle expression permet d'estimer la valeur du volume massique de la vapeur sèche à 260 °C sous 100 kPa ?

(a) $v(260) = v(250) + \dfrac{v(300) - v(250)}{300 - 250} \times (300 - 250)$

(b) $v(260) = \dfrac{v(300) - v(260)}{300 - 250} \times (260 - 250)$

(c) $v(260) = v(250) + \dfrac{v(300) - v(260)}{300 - 260} \times (250 - 260)$

(d) $v(260) = v(250) + \dfrac{v(300) - v(250)}{300 - 250} \times (260 - 250)$

e) En déduire une estimation numérique de la valeur de $v(T = 260\,°\mathrm{C}, p = 100\,\mathrm{kPa})$.

Entraînement 11.14 — Transfert thermique avec changement d'état.

Les données nécessaires aux questions suivantes sont disponibles dans la table de vapeur saturante de l'entraînement **11.2**.

a) Quelle est l'enthalpie h_g de la vapeur saturante soumise à une pression de 1,0142 bar ?

.....

b) Quelle est l'enthalpie h_ℓ du liquide saturant à une température de 100 °C ? .....

De l'eau, contenant initialement 90 % de vapeur, subit une liquéfaction totale sous une pression de 1,0142 bar au sein d'un condenseur sans parties mobiles.

c) Quelle relation permet de calculer l'enthalpie initiale h_i du mélange diphasé ?

(a) $h_i = 10\,h_\ell + 90\,h_g$

(b) $h_i = 0{,}10\,h_\ell - 0{,}90\,h_g$

(c) $h_i = 0{,}10\,h_\ell + 0{,}90\,h_g$

(d) $h_i = 0{,}90\,h_\ell + 0{,}10\,h_g$

.....

d) Calculer le transfert thermique massique q reçu par le fluide en utilisant le 1er principe industriel, qui établit que $q = h_f - h_i$ avec h_f l'enthalpie massique du fluide après liquéfaction totale.

.....

Et encore plus de diagrammes thermodynamiques

Entraînement 11.15 — Un cycle dans le diagramme (V, T).

Les données nécessaires aux questions suivantes sont disponibles dans l'entraînement **11.3**.

Pour rappel, un gaz parfait subissant une transformation isentropique vérifie la loi de Laplace : $PV^\gamma = \text{cste}$.

a) Laquelle des relations suivantes est valable pour la transformation (D) ?

(a) $\dfrac{T}{V} = \text{cste}$

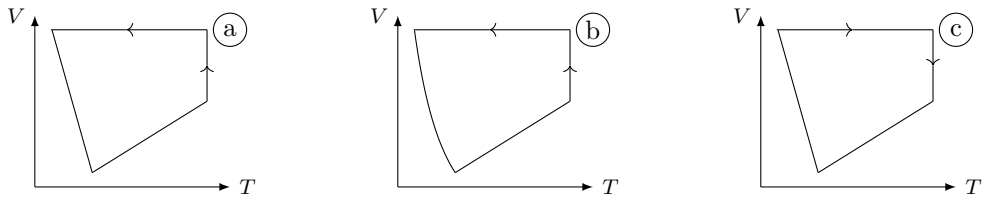
(b) $TV = \text{cste}$

(c) $TV^{\gamma-1} = \text{cste}$

(d) $T^{1-\gamma}V^\gamma = \text{cste}$

.....

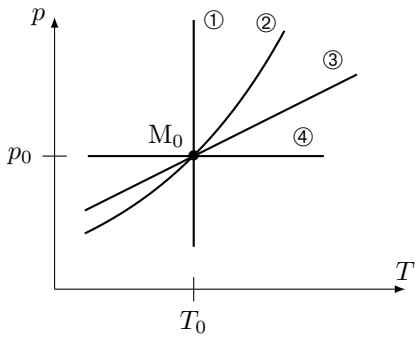
b) Les échelles étant linéaires, déterminer lequel de ces tracés représente le cycle.



.....

Entraînement 11.16 — Courbes iso d'un GP dans le diagramme (p, T).

Une courbe isochore, une courbe isotherme, une courbe adiabatique réversible (donc isentrope) et une courbe isobare ont été représentées ci-contre dans le diagramme (p, T) d'un gaz parfait.



Toutes ces courbes passent par le même état décrit par le point M_0.

Pour un gaz parfait :

- l'équation d'état est $pv = rT$;
- la loi de Laplace dans le cas d'une transformation isentropique peut s'écrire $T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{cste}$, avec $\gamma > 1$ le coefficient adiabatique.

a) Que dire de la pente $\dfrac{\partial p}{\partial T}$ de la courbe isochore $v = v_0$ passant par le point M_0 ?

(a) Elle décroît avec T. (b) Elle est constante avec T. (c) Elle croît avec T.

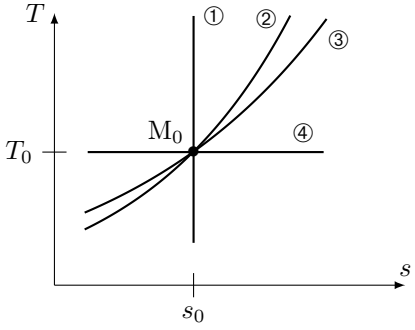
.....

À l'aide d'une comparaison des pentes des courbes, déterminer l'adjectif adapté à chaque courbe parmi la liste suivante : isobare, isotherme, isochore, isentrope.

b) ① c) ② d) ③ e) ④

Entraînement 11.17 — Courbes iso d'un GP dans le diagramme (T, s).

Une courbe isochore, une courbe isotherme, une courbe adiabatique réversible (donc isentrope) et une courbe isobare ont été représentées ci-dessous dans le diagramme (T, s) d'un gaz parfait.



Toutes ces courbes passent par le même état décrit par le point M_0 ayant pour coordonnées la température T_0 et l'entropie massique s_0.

Pour rappel, le coefficient adiabatique est défini comme le quotient de la capacité thermique (massique) par la capacité thermique à volume constant : $\gamma = \dfrac{c_p}{c_v}$ avec $\gamma > 1$.

De plus, pour un gaz parfait, les points de la courbe isobare vérifient la relation $T(s) = T_\mathrm{a} \mathrm{e}^{s/c_p}$ quand ceux de la courbe isochore vérifient la relation $T(s) = T_\mathrm{b} \mathrm{e}^{s/c_v}$ avec T_a et T_b des constantes.

Exprimer la pente $\dfrac{\partial T}{\partial s}$ au point M_0 pour chaque courbe iso en fonction de T_0, c_v et c_p :

a) iso-p ..... c) iso-v .....

b) iso-T ..... d) iso-s .....

À l'aide d'une comparaison des pentes des courbes au point M_0, déterminer l'adjectif adapté à chaque courbe parmi la liste suivante : isobare, isotherme, isochore, isentrope.

e) ① f) ② g) ③ h) ④

Entraînement 11.18 — Un cycle dans le diagramme (P, T).

Les données nécessaires aux questions suivantes sont disponibles dans l'entraînement **11.3**.

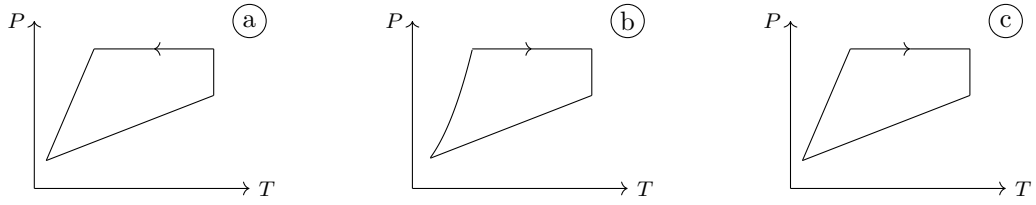
Pour rappel, un gaz parfait subissant une transformation isentropique vérifie la loi de Laplace : $PV^\gamma = \text{cste}$.

a) Laquelle des relations suivantes est valable pour la transformation (D) ?

(a) $PT = \text{cste}$ (b) $P^\gamma T^{\gamma-1} = \text{cste}$ (c) $P^{1-\gamma}T^\gamma = \text{cste}$ (d) $\dfrac{P}{T} = \text{cste}$

.....

b) Les échelles étant linéaires, déterminer lequel de ces tracés représente le cycle.



.....

Entraînement 11.19 — Compression : irréversibilités et élévation de température.

Du fluide R718 se trouve à l'entrée d'un compresseur sous une pression de 250 mbar à 100 °C (état I).

a) En plaçant le point I dans le diagramme des frigoristes de l'entraînement **11.10**, déterminer la valeur de l'enthalpie massique initiale h_I .....

b) Dans quel état se trouve le fluide à l'état I ?

(a) liquide saturant (b) vapeur saturante (c) vapeur sèche (d) mélange diphasé

.....

c) Quelle est la valeur de l'entropie s_I du fluide à l'état I ? .....

d) Le fluide est comprimé de manière adiabatique et réversible ($s_\mathrm{I} = s_\mathrm{F}$) jusqu'à la pression $p_\mathrm{F} = 1\,\mathrm{bar}$ par le compresseur, qui fournit le travail $w = h_\mathrm{F} - h_\mathrm{I}$. Calculer w en $\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$ .....

e) Quelle est la température finale T_F du fluide après compression réversible ? .....

f) Le fluide est désormais comprimé à $p_\mathrm{F} = 1\,\mathrm{bar}$ de manière irréversible si bien que son entropie a augmenté de 6 %. En plaçant le point F′ entre deux courbes isentropes, déterminer la valeur de la température finale $T_{\mathrm{F}'}$ .....

g) L'augmentation de la température du fluide est due à sa compression, mais aussi aux irréversibilités qui ont lieu lors de celle-ci. Laquelle de ces relations permet d'évaluer la proportion de l'élévation de température strictement due aux irréversibilités par rapport à l'élévation totale de température $T_{\mathrm{F}'} - T_\mathrm{I}$?

On rappelle que, pour une quantité $X_{tot} = X_1 + X_2$, la proportion ***relative*** *de X_1 au sein de X_{tot} s'exprime comme X_1/X_{tot}.*

(a) $\dfrac{T_{\mathrm{F}'} - T_\mathrm{F}}{T_{\mathrm{F}'} - T_\mathrm{I}}$ (b) $\dfrac{T_{\mathrm{F}'} - T_\mathrm{F}}{T_\mathrm{I}}$ (c) $\dfrac{T_{\mathrm{F}'} - T_\mathrm{I}}{T_{\mathrm{F}'}}$ (d) $\dfrac{T_{\mathrm{F}'} - T_\mathrm{I}}{T_\mathrm{F} - T_\mathrm{I}}$

.....

Réponses mélangées

(a) b, c et d isochore $250\,°\mathrm{C}$ $2{,}45\,\mathrm{m^3\cdot kg^{-1}}$ isochore b, c et d

$2\,650\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$ $-\dfrac{p_0}{v_0}$ isochore isotherme $x_\mathrm{B}=40\,\%$ a $\dfrac{R}{\ln(10)Mvc_p}$

$8\,\mathrm{kJ\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$ $2{,}45\,\mathrm{m^3\cdot kg^{-1}}$ diphasé d isochore isobare d

b isotherme $-2\,031\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$ 0 b d c ③ isentrope

$\dfrac{T_0}{c_p}$ $800\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$ 0 d a isotherme $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}-\dfrac{T}{c_p}=0$ isobare

c $7{,}6672\,\mathrm{m^3\cdot kg^{-1}}$ a et c c b $\dfrac{T_0}{c_v}$ $760{,}8\,\mathrm{mmHg}$ c

c a et d isentrope ① $2V_1$ ∞ b isentrope isobare

c ∞ isobare $1{,}017\times10^{-3}\,\mathrm{m^3\cdot kg^{-1}}$ $9{,}1\times10^{-4}\,\mathrm{g\cdot mL^{-1}}$ isotherme

b b $-5\,000\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$ $1\,320\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$ b isobare $420\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$

a $400\,°\mathrm{C}$ a $2\,675{,}6\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$ a et d b a $2\,680\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$

isentrope $300\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$ ② b isotherme b $419{,}2\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$

$-\gamma\dfrac{p_0}{v_0}$ $-1\,650\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$ b c et d isochore a b et c

► Réponses et corrigés page 209

Thermodynamique industrielle

Fiche du « Cahier d'entraînement 1re année » pour se préparer
⟶ *Thermodynamique*

Prérequis
Lois de Laplace. Principes sous forme industrielle. Diagramme (P, h).

Dans l'ensemble de la fiche, on se place en régime permanent.

Principes industriels

Entraînement 12.1 — Composants des machines thermiques.

En négligeant les variations d'énergie mécanique, les premier et second principes industriels par unité de masse s'écrivent :

$$\Delta h = q + w_\mathrm{i} \qquad \text{et} \qquad \Delta s = s_\mathrm{e} + s_\mathrm{c}\,, \tag{1}$$

où q est le transfert thermique massique, w_i est le travail indiqué massique, s_e est l'entropie massique échangée et s_c est l'entropie massique créée. Rappelons que l'entropie massique échangée avec un thermostat de température T_0 constante est égale à $s_\mathrm{e} = q/T_0$.

Pour chacun des composants suivants, on souhaite savoir comment ces deux principes se réécrivent.

Choisissez la bonne réponse à chaque fois.

a) Un compresseur fonctionnant de manière adiabatique réversible avec des pièces mobiles.

(a) $\Delta h = w_\mathrm{i}$; $\Delta s = 0$
(b) $\Delta h = w_\mathrm{i}$; $\Delta s = s_\mathrm{e}$
(c) $\Delta h = 0$; $\Delta s = s_\mathrm{c}$
(d) $\Delta h = q$; $\Delta s = s_\mathrm{e} + s_\mathrm{c}$

b) Un échangeur thermique dans lequel le fluide se liquéfie (condenseur).

(a) $\Delta h = w_\mathrm{i}$; $\Delta s = 0$
(b) $\Delta h = w_\mathrm{i}$; $\Delta s = s_\mathrm{e}$
(c) $\Delta h = 0$; $\Delta s = s_\mathrm{c}$
(d) $\Delta h = q$; $\Delta s = s_\mathrm{e} + s_\mathrm{c}$

c) Un détendeur idéal calorifugé et sans pièce mobile.

(a) $\Delta h = w_\mathrm{i}$; $\Delta s = 0$
(b) $\Delta h = w_\mathrm{i}$; $\Delta s = s_\mathrm{e}$
(c) $\Delta h = 0$; $\Delta s = s_\mathrm{c}$
(d) $\Delta h = q$; $\Delta s = s_\mathrm{e} + s_\mathrm{c}$

d) Une turbine idéale réalisant une détente adiabatique réversible au travers de parties mobiles.

(a) $\Delta h = w_\mathrm{i}$; $\Delta s = 0$
(b) $\Delta h = w_\mathrm{i}$; $\Delta s = s_\mathrm{e}$
(c) $\Delta h = 0$; $\Delta s = s_\mathrm{c}$
(d) $\Delta h = q$; $\Delta s = s_\mathrm{e} + s_\mathrm{c}$

Entraînement 12.2 — Comparaison des différentes formes d'énergie d'un système.

Un gaz de capacité thermique massique à pression constante $c_\mathrm{p} = 1\,\mathrm{kJ \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$, allant à la vitesse $v = 10\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, traverse une turbine. La température du gaz diminue de 10 °C entre l'entrée et la sortie, où la différence d'altitude est de l'ordre du mètre. Toutes les énergies considérées sont massiques, c'est-à-dire exprimées par kg d'air.

a) Estimer la variation d'enthalpie du système constitué des gaz à l'intérieur de la turbine.

(a) $10\,\mathrm{J \cdot kg^{-1}}$ (b) $50\,\mathrm{J \cdot kg^{-1}}$ (c) $10\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$ (d) $50\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$

b) Même question pour son énergie cinétique dans le cas extrême où la vitesse de sortie est nulle.

(a) $10\,\mathrm{J \cdot kg^{-1}}$ (b) $10\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$ (c) $50\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$ (d) $50\,\mathrm{J \cdot kg^{-1}}$

c) Même question pour son énergie potentielle en prenant le champ de pesanteur terrestre $g = 10\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

(a) $10\,\mathrm{J \cdot kg^{-1}}$ (b) $50\,\mathrm{J \cdot kg^{-1}}$ (c) $10\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$ (d) $50\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$

d) Comparer les termes et indiquer celui qui prédomine.

(a) la variation d'enthalpie Δh
(b) la variation d'énergie cinétique Δe_c
(c) la variation d'énergie potentielle Δe_p
(d) les trois sont comparables

Entraînement 12.3 — Étude d'une tuyère.

L'air d'un réservoir $\mathcal{R}$ se détend dans une tuyère horizontale, isolée thermiquement du milieu extérieur, et ne contenant aucune pièce mobile. L'air est assimilable à un gaz parfait de masse molaire $M = 29\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$, d'indice adiabatique $\gamma = 1{,}4$ et de capacité thermique massique $c_\mathrm{p} = \dfrac{1}{M}\dfrac{\gamma R}{\gamma - 1}$.

L'air entre dans la tuyère avec une vitesse c_1 supposée négligeable, sous la pression p_1 à la température $T_1 = 273\,\mathrm{K}$. Il en sort animé d'une vitesse c_2 sous la pression p_2 à la température $T_2 = 200\,\mathrm{K}$.

a) Quelle est la forme du premier principe par unité de masse pour le système étudié ?

(a) $\Delta h + \Delta e_\mathrm{c} = w_\mathrm{i}$
(b) $\Delta h + \Delta e_\mathrm{c} = q$
(c) $\Delta h + \Delta e_\mathrm{c} = 0$
(d) $\Delta h = w_\mathrm{i}$
(e) $\Delta h = q$
(f) $\Delta h = w_\mathrm{i} + q$

b) En utilisant la seconde loi de Joule, déterminer l'expression de la variation d'enthalpie massique Δh de l'air à la sortie de la tuyère en fonction des températures T_1, T_2, de la masse molaire M de l'air, de γ et de la constante R des gaz parfaits.

c) En déduire l'expression de la vitesse c_2 d'éjection de l'air à la sortie de la tuyère en fonction des températures T_1, T_2, de la masse molaire M de l'air, de γ et de la constante R des gaz parfaits.

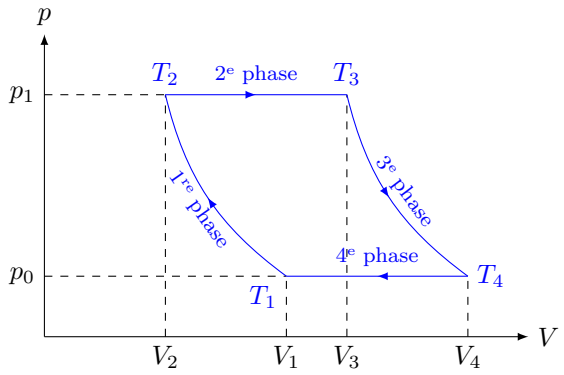
d) Calculer numériquement la vitesse c_2 d'éjection de l'air à la sortie de la tuyère en utilisant les données.

Modèle du gaz parfait : exemple d'un turbopropulseur

On considère un gaz parfait décrivant le cycle de Joule ci-dessous dans lequel la première et la troisième phases sont isentropiques.

La deuxième phase (combustion) et la quatrième phase (refroidissement) se font sans travail indiqué.

On néglige les variations d'énergies cinétique Δe_c et potentielle Δe_p.



Entraînement 12.4 — Températures.

a) En utilisant la loi de Laplace sous la forme $T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{cste}$, exprimer le température T_2.

(a) $T_2 = T_1 \left(\dfrac{p_1}{p_2}\right)^{1-2\gamma}$

(b) $T_2 = T_1 \left(\dfrac{p_1}{p_2}\right)^{(1-\gamma)/\gamma}$

(c) $T_2 = T_1^\gamma \left(\dfrac{p_1}{p_2}\right)^{(1-\gamma)\gamma}$

(d) $T_2 = \left(\dfrac{T_1 p_1}{p_2}\right)^{(1-\gamma)/\gamma}$

.....

b) En utilisant maintenant la forme $TV^{\gamma-1} = \text{cste}$, exprimer T_4.

(a) $T_4 = T_3 \left(\dfrac{V_3}{V_4}\right)^{\gamma-1}$

(b) $T_4 = T_3^{1-\gamma} \dfrac{V_3}{V_4}$

(c) $T_4 = T_3 \left(\dfrac{V_3}{V_4}\right)^{1-\gamma}$

(d) $T_4 = T_3 \left(\dfrac{V_3}{V_4}\right)^{1/(\gamma-1)}$

.....

Entraînement 12.5 — Rendement.

Le cycle précédent est utilisé dans une machine, fonctionnant sans travail indiqué pendant la deuxième et la quatrième phase. La première phase est une compression, la troisième phase une détente. On les suppose isentropiques, donc adiabatiques réversibles. Les travaux sont algébriques, de signe positif lorsqu'ils sont réellement reçus par le fluide.

a) Indiquer si le cycle est moteur ou récepteur.

(a) moteur (b) récepteur

b) Quelle est l'expression du travail indiqué total reçu lors de ce cycle ?

(a) $w_1 + w_3$ (d) $-w_1 - w_3$ (g) $w_2 - w_4$
(b) $-w_1 + w_3$ (e) $w_2 + w_4$ (h) $-w_2 - w_4$
(c) $w_1 - w_3$ (f) $-w_2 + w_4$

c) Quelle est l'expression du transfert thermique reçu de la part de la source chaude ?

(a) $c_\mathrm{p}(T_2 - T_1)$ (c) $c_\mathrm{p}(T_4 - T_3)$
(b) $c_\mathrm{p}(T_3 - T_2)$ (d) $c_\mathrm{p}(T_1 - T_4)$

d) Quelle est l'expression du transfert thermique reçu de la part de la source froide ?

(a) $c_\mathrm{p}(T_2 - T_1)$ (c) $c_\mathrm{p}(T_4 - T_3)$
(b) $c_\mathrm{p}(T_3 - T_2)$ (d) $c_\mathrm{p}(T_1 - T_4)$

e) Quelle est l'expression du travail indiqué w_1 reçu dans la première phase ?

(a) $c_\mathrm{p}(T_2 - T_1)$ (c) $c_\mathrm{p}(T_4 - T_3)$
(b) $c_\mathrm{p}(T_3 - T_2)$ (d) $c_\mathrm{p}(T_1 - T_4)$

f) Quelle est l'expression du travail indiqué w_3 reçu dans la troisième phase ?

(a) $c_\mathrm{p}(T_2 - T_1)$ (c) $c_\mathrm{p}(T_4 - T_3)$
(b) $c_\mathrm{p}(T_3 - T_2)$ (d) $c_\mathrm{p}(T_1 - T_4)$

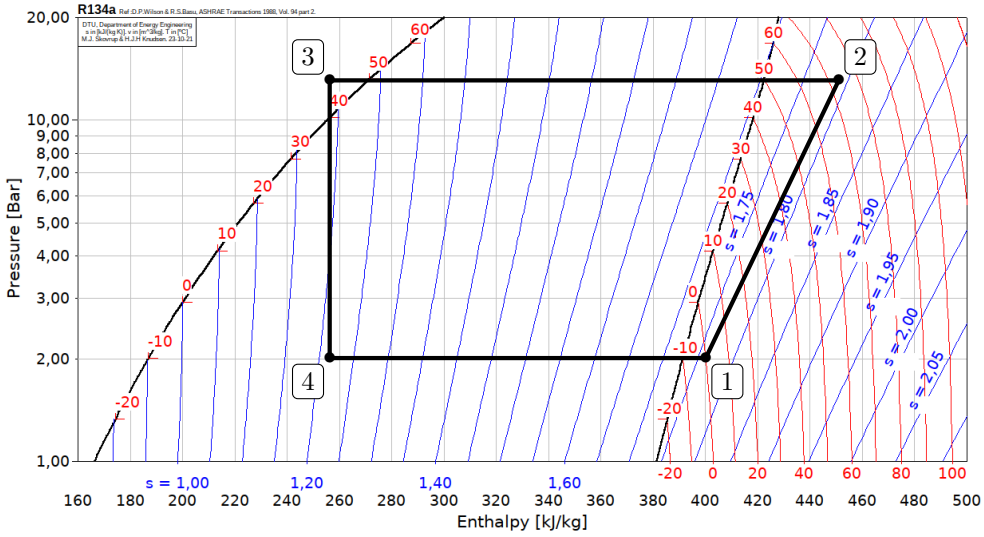
g) Exprimer le rendement de ce cycle moteur en fonction de w_1, w_3 et q_2.

h) Exprimer le rendement en fonction des températures T_1, T_2, T_3 et T_4.

Exploitation de diagrammes enthalpiques

Entraînement 12.6 — Efficacité d'une pompe à chaleur.

Considérons une pompe à chaleur dont le cycle est représenté ci-dessous.



a) Le fluide reçoit du travail dans le compresseur, ce qui a pour effet d'augmenter la pression ainsi que la température à une température supérieure à celle de la source chaude.

Quelle transformation du cycle correspond au compresseur ? .....

b) Calculer numériquement le travail massique algébrique w_{compr} reçu par le fluide dans le compresseur.

.....

c) L'échange avec la source chaude a lieu dans le condenseur, où le fluide se liquéfie totalement.

Quelle transformation du cycle correspond au condenseur ? .....

d) Calculer numériquement le transfert thermique algébrique q_{cond} reçu par le fluide dans le condenseur.

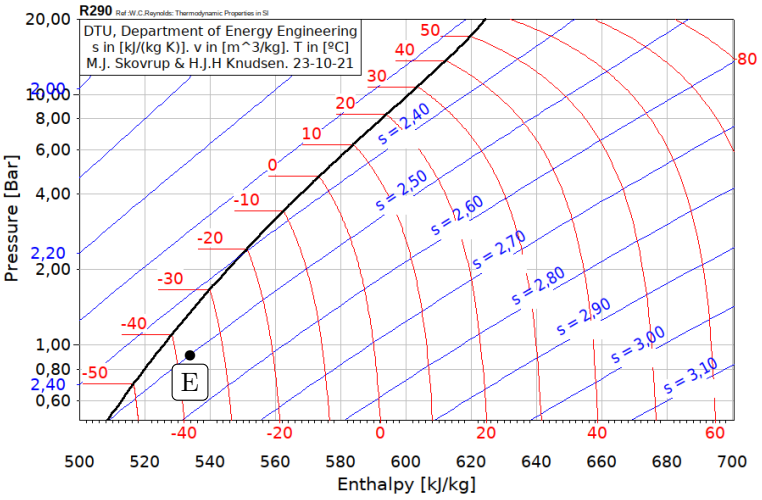
.....

e) Calculer l'efficacité de la machine $e = -\dfrac{q_{\text{cond}}}{w_{\text{compr}}}$ .....

Entraînement 12.7 — Rendement isentropique d'un compresseur.

Dans cet entraînement, on considère un compresseur adiabatique destiné à augmenter la pression d'une vapeur de propane de 1 à 10 bar.

Le fluide est dans l'état initial E indiqué sur le diagramme des frigoristes ci-contre en entrée du compresseur, on note S son état de sortie. Les valeurs lues sur le diagramme seront données avec deux chiffres significatifs ; les entropies y sont données en $\mathrm{kJ \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$.



a) On suppose la compression réversible. Donner la valeur de $s_{\mathrm{S,rév}}$ en sortie ....

b) Déterminer graphiquement la température du fluide $T_{\mathrm{S,rév}}$ en sortie .....

c) Calculer le travail massique $w_{\mathrm{rév}}$ fourni à la vapeur .....

d) En réalité, la compression est irréversible, et la valeur de la température réelle en sortie du compresseur est $T_{\mathrm{S}} = 65\,°\mathrm{C}$. Déterminer le travail massique w réellement fourni lors du processus.

.....

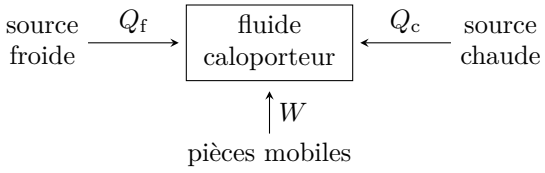
e) Calculer le rendement isentropique du compresseur $\eta = \dfrac{w_{\mathrm{rév}}}{w}$ .....

f) Calculer l'entropie massique créée lors de la compression .....

Autres entraînements

Entraînement 12.8 — Machines thermiques.

On donne ci-dessous le schéma conventionnel d'une machine ditherme, les énergies reçues par le fluide étant algébriques.



a) S'il s'agit d'un moteur, indiquer le signe de chaque transfert énergétique W, Q_f et Q_c.

(a) $W > 0$; $Q_f > 0$; $Q_c < 0$
(b) $W > 0$; $Q_f < 0$; $Q_c > 0$
(c) $W > 0$; $Q_f < 0$; $Q_c < 0$
(d) $W < 0$; $Q_f > 0$; $Q_c > 0$
(e) $W < 0$; $Q_f > 0$; $Q_c < 0$
(f) $W < 0$; $Q_f < 0$; $Q_c > 0$

b) Comment le rendement est-il alors défini ?

(a) $-W/Q_c$
(b) $+Q_f/W$
(c) $-Q_c/W$
(d) $+W/Q_f$
(e) $-Q_f/W$
(f) $+W/Q_c$

c) Même question pour un réfrigérateur.

(a) $W > 0$; $Q_f > 0$; $Q_c < 0$
(b) $W > 0$; $Q_f < 0$; $Q_c > 0$
(c) $W > 0$; $Q_f < 0$; $Q_c < 0$
(d) $W < 0$; $Q_f > 0$; $Q_c > 0$
(e) $W < 0$; $Q_f > 0$; $Q_c < 0$
(f) $W < 0$; $Q_f < 0$; $Q_c > 0$

d) Comment l'efficacité est-elle alors définie ?

(a) $-W/Q_c$
(b) $+Q_f/W$
(c) $-Q_c/W$
(d) $+W/Q_f$
(e) $-Q_f/W$
(f) $+W/Q_c$

e) Même question pour une pompe à chaleur.

(a) $W > 0$; $Q_f > 0$; $Q_c < 0$
(b) $W > 0$; $Q_f < 0$; $Q_c > 0$
(c) $W > 0$; $Q_f < 0$; $Q_c < 0$
(d) $W < 0$; $Q_f > 0$; $Q_c > 0$
(e) $W < 0$; $Q_f > 0$; $Q_c < 0$
(f) $W < 0$; $Q_f < 0$; $Q_c > 0$

.....

f) Comment l'efficacité est-elle alors définie ?

(a) $-W/Q_c$
(b) $+Q_f/W$
(c) $-Q_c/W$
(d) $+W/Q_f$
(e) $-Q_f/W$
(f) $+W/Q_c$

.....

g) Même question pour un climatiseur.

(a) $W > 0$; $Q_f > 0$; $Q_c < 0$
(b) $W > 0$; $Q_f < 0$; $Q_c > 0$
(c) $W > 0$; $Q_f < 0$; $Q_c < 0$
(d) $W < 0$; $Q_f > 0$; $Q_c > 0$
(e) $W < 0$; $Q_f > 0$; $Q_c < 0$
(f) $W < 0$; $Q_f < 0$; $Q_c > 0$

.....

h) Comment l'efficacité est-elle alors définie ?

(a) $-W/Q_c$
(b) $+Q_f/W$
(c) $-Q_c/W$
(d) $+W/Q_f$
(e) $-Q_f/W$
(f) $+W/Q_c$

.....

Entraînement 12.9 — Échangeurs thermiques.

Les machines dithermes possèdent deux échangeurs thermiques : un condenseur, dans lequel le fluide se liquéfie, et un évaporateur, où il se vaporise.

a) Le fluide caloporteur d'une centrale thermique doit céder de l'énergie à l'environnement extérieur avant de retourner vers la chaudière. L'échangeur est-il un évaporateur ou un condenseur ?

.....

b) Le fluide caloporteur d'un réfrigérateur doit recevoir de l'énergie de la part du compartiment réfrigéré. S'agit-il d'un évaporateur ou d'un condenseur ?

.....

c) Le fluide caloporteur d'une pompe à chaleur doit céder de l'énergie dans une maison.

S'agit-il d'un évaporateur ou d'un condenseur ?

.....

Entraînement 12.10 — Mélangeur.

Un mélangeur calorifugé à deux entrées et une sortie fonctionne avec deux liquides identiques, de l'eau par exemple, de capacité thermique massique à pression constante c_p constante. Le premier fluide a un débit massique D_m1 et une température T_1 tandis que le second a un débit massique D_m2 et une température $T_2 < T_1$. En sortie, le débit massique du mélange est D_m et sa température T.

a) Exprimer la conservation du débit massique avec les données de l'exercice.

.....

b) En ne considérant que le sous-système « fluide 1 » qui reçoit de la part du fluide 2 le transfert thermique $q_{2\to1}$, déduire du premier principe industriel la relation entre $q_{2\to1}$, c_p, T_1 et T.

.....

c) Même question pour le sous-système « fluide 2 », en fonction de $q_{1\to2}$, c_p, T_2 et T.

.....

d) L'échange thermique est supposé parfait entre les deux liquides : $D_\mathrm{m1}\, q_{2\to1} + D_\mathrm{m2}\, q_{1\to2} = 0$. En déduire l'équation reliant les différents débits et températures.

.....

e) Exprimer la température T en sortie .....

f) Faire l'application numérique avec $T_1 = 80\,°\mathrm{C}$, $T_2 = 20\,°\mathrm{C}$, $D_\mathrm{m1} = 3{,}0\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}}$ et $D_\mathrm{m2} = 7{,}0\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}}$ et exprimer la température en degrés Celsius.

.....

Entraînement 12.11 — Étude d'une turbine.

À l'entrée d'une turbine horizontale, isolée thermiquement, de l'air possède une pression p_1, une température T_1 et une vitesse c_1. À la sortie, il a mêmes pression et température, sa vitesse est négligeable.

a) Simplifier le premier principe par unité de masse pour les écoulements en régime permanent.

(a) $\Delta e_\mathrm{c} = w_\mathrm{i}$ (c) $\Delta h + \Delta e_\mathrm{c} = 0$ (e) $\Delta h = q_\mathrm{e}$

(b) $\Delta h + \Delta e_\mathrm{c} = w_\mathrm{i}$ (d) $\Delta h = w_\mathrm{i}$ (f) $\Delta h = w_\mathrm{i} + q_\mathrm{e}$

.....

b) Exprimer le travail W_f récupéré sur l'arbre de la turbine pour le passage d'une masse m d'air.

(a) $W_\mathrm{f} = \dfrac{1}{2}c_1^2$ (b) $W_\mathrm{f} = -\dfrac{1}{2}c_1^2$ (c) $W_\mathrm{f} = -\dfrac{1}{2}mc_1^2$ (d) $W_\mathrm{f} = \dfrac{1}{2}mc_1^2$

.....

c) Déterminer la valeur numérique du travail échangé pendant 1 heure avec un débit de $0{,}5\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}}$ en prenant $c_1 = 100\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

.....

Entraînement 12.12 — Étude d'une pompe.

De l'eau liquide est refoulée à l'aide d'une pompe d'un point A vers un point B. Les vitesses à l'entrée et à la sortie sont négligeables, de même que la variation d'altitude. En amont, l'eau est à pression $p_1 = 0{,}10\,\text{bar}$ et en aval à $p_2 = 20\,\text{bar}$. On suppose la compression adiabatique réversible.

a) Indiquer les hypothèses à prendre en compte dans l'expression du bilan enthalpique.

(a) $q_\text{e} = 0$, $e_\text{c} = \text{cste}$, $e_\text{p} = \text{cste}$
(b) $w_\text{i} = 0$, $e_\text{c} = \text{cste}$, $e_\text{p} = \text{cste}$
(c) $\Delta h = 0$, $e_\text{c} = \text{cste}$, $e_\text{p} = \text{cste}$
(d) $q_\text{e} = 0$, $w_\text{i} = 0$, $e_\text{c} = \text{cste}$, $e_\text{p} = \text{cste}$

.....

b) Pour des écoulements en régime permanent appliqués à la pompe étudiée, comment s'exprime le premier principe pour une unité de masse de fluide ?

(a) $\Delta h + \Delta e_\text{c} = w_\text{i}$
(b) $\Delta h + \Delta e_\text{c} = q$
(c) $\Delta h + \Delta e_\text{c} = 0$
(d) $\Delta h = w_\text{i}$
(e) $\Delta h = q$
(f) $\Delta h = w_\text{i} + q$

.....

c) En utilisant la deuxième identité thermodynamique $\mathrm{d}h = T\,\mathrm{d}s + v\,\mathrm{d}p$, exprimer la variation d'enthalpie Δh de l'eau en fonction des pressions p_1, p_2 et du volume massique v de l'eau.

.....

d) En déduire l'expression du travail indiqué massique w_i, en fonction du volume massique v et des pressions p_1 et p_2.

.....

e) Déterminer numériquement ce travail, en $\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ .....

Réponses mélangées

(f) $D_{\text{m}1}(T - T_1) + D_{\text{m}2}(T - T_2) = 0$ (c) $38\,°\text{C}$ (a) (a) (a)

$383\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ $D_{\text{m}1} + D_{\text{m}2} = D_\text{m}$ (b) (a) $50\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ $2{,}50\,\text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$

$c_\text{p}(T - T_2) = q_{1\to2}$ (c) $9\times10^6\,\text{J}$ $-\dfrac{w_1 + w_3}{q_2}$ (a) (b) (a)

$T = \dfrac{D_{\text{m}1}T_1 + D_{\text{m}2}T_2}{D_m}$ $c_\text{p}(T - T_1) = q_{2\to1}$ (d) (c) (c) $1{,}99\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ (c)

$140\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ (a) (b) condenseur (a) $\Delta h = v(p_2 - p_1)$ $100\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$

4 (d) (a) condenseur (a) $1 \to 2$ $2 \to 3$ 0,78 $-200\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$

(a) (d) évaporateur $110\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ $50\,°\text{C}$ $c_2 = \sqrt{\dfrac{2}{M}\dfrac{\gamma R}{\gamma - 1}(T_1 - T_2)}$ (a)

$1 - \dfrac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$ (a) $v(p_2 - p_1)$ $\dfrac{1}{M}\dfrac{\gamma R}{\gamma - 1}(T_2 - T_1)$ (b) (d) (a) (d)

► Réponses et corrigés page 216

Bilans en mécanique des fluides

Prérequis
Débits massique et volumique. Forces pressantes. Moment de force. Puissance d'une force.

Constantes utiles

→ Masse volumique de l'eau liquide dans les conditions standard de pression et température : $\mu = 1{,}0 \times 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$

→ Accélération de la pesanteur : $g = 9{,}81\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$

Bilans d'énergie

Entraînement 13.1 — Quelle est la bonne formule ?

Dans ces expressions, w_i représente un travail indiqué massique, $\mathcal{P}_i$ une puissance indiquée, ΔP une perte de charge en pression et Δh une perte de charge en hauteur.

Les équations suivantes sont-elles homogènes ?

a) $\left(\frac{v_\mathrm{s}^2}{2}\right) = \rho w_i$ .....

b) $D_\mathrm{m}\left(\frac{P_\mathrm{s}}{\rho}\right) = \mathcal{P}_i$ .....

c) $D_\mathrm{m}\left(\frac{P_\mathrm{s}}{\rho} + \frac{v_\mathrm{s}^2}{2} + gz_s\right) - D_\mathrm{m}\left(\frac{P_\mathrm{e}}{\rho} + \frac{v_\mathrm{e}^2}{2} + gz_e\right) = -D_\mathrm{m}\Delta P$ .....

d) $\left(\frac{P_\mathrm{s}}{\rho g} + \frac{v_\mathrm{s}^2}{2g} + z_s\right) - \left(\frac{P_\mathrm{e}}{\rho g} + \frac{v_\mathrm{e}^2}{2g} + z_e\right) = -\Delta h$ .....

Entraînement 13.2 — Perte de charge et conversion.

On rappelle la relation de Bernoulli généralisée :

$$\frac{1}{2}\Delta v^2 + \frac{\Delta P}{\mu_0} + g\Delta z = w_u - gh_\mathrm{pc}.$$

a) On donne $h_\mathrm{pc} = 3{,}0\,\mathrm{m}$. Sachant que $\mu_0 = 2{,}0 \times 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, $g = 9{,}8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, calculer la perte de pression ΔP_pc correspondant à cette perte de charge.

.....

b) La perte de charge précédente est due à la montée du fluide dans un tuyau vertical de hauteur $L = 10\,\mathrm{m}$. Au milieu de ce tuyau se situe une pompe qui fournit un travail massique utile w_u au fluide.

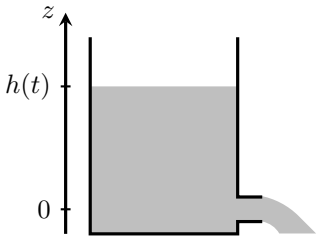
Quelle doit être la valeur de ce travail massique pour qu'il n'y ait ni variation de vitesse ni variation de pression du fluide entre l'entrée et la sortie du tuyau ?

.....

Entraînement 13.3 — Hypothèses sur l'écoulement.

Étudions la vidange d'un réservoir rempli d'eau. Le liquide, s'écoule par un orifice de section s très inférieure à la section S du réservoir. La hauteur de fluide, comptée à partir de l'orifice de sortie, est notée $h(t)$ à l'instant t.

À l'instant initial, elle vaut h_0. On négligera toute perte de charge.



Indiquer si les caractéristiques ci-dessous conviennent à la situation.

a) Écoulement incompressible .....

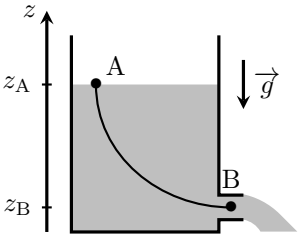
b) Écoulement quasi stationnaire ..

c) Écoulement parfait .....

d) Fluide homogène .....

Entraînement 13.4 — Vidange d'un réservoir.

On étudie la vidange d'un réservoir rempli d'eau. Le liquide s'écoule par un orifice de section s très inférieure à la section S du réservoir. On négligera toute perte de charge. On considère une ligne de courant passant par les points A et B représentés sur le schéma. La relation de Bernoulli s'écrit sur cette ligne de courant :



$$\frac{P_A}{\mu} + \frac{v_A^2}{2} + gz_A = \frac{P_B}{\mu} + \frac{v_B^2}{2} + gz_B.$$

a) Que peut-on dire des pressions aux points A et B ?

(a) $P_A < P_B$ (c) $P_A = P_B$

(b) $P_A > P_B$ (d) $P_B = P_A + \mu g(z_A - z_B)$

.....

b) Le débit volumique au point A s'écrit :

(a) $D_{v,A} = \mu S v_A$ (b) $D_{v,A} = S v_A$ (c) $D_{v,A} = \dfrac{S v_A}{\mu}$

.....

c) Le débit volumique au point B s'écrit :

(a) $D_{v,B} = \mu s v_B$ (b) $D_{v,B} = s v_B$ (c) $D_{v,B} = \dfrac{s v_B}{\mu}$

.....

d) Le fluide étant incompressible, il y a conservation du débit volumique. Que peut-on en déduire sur les vitesses en A et en B ?

(a) $v_A = v_B$ (b) $v_A \gg v_B$ (c) $v_A \ll v_B$

.....

e) On donne $h(t) = z_A - z_B$. En utilisant la relation de Bernoulli et les résultats précédents, quelle expression de v_B est correcte ?

(a) $v_B = \sqrt{2\dfrac{P_A}{\mu} + 2gh(t)}$ (b) $v_B = \sqrt{2gh(t)}$ (c) $v_B = v_A + \sqrt{2gh(t)}$

.....

Entraînement 13.5 — Simplifier la relation de Bernoulli.

On donne l'expression usuelle de la formule de Bernoulli $\frac{v^2}{2} + gz + \frac{P}{\mu} = \text{cste}$.

a) Comment se simplifie-t-elle si l'écoulement est horizontal ?

.....

b) Comment se simplifie-t-elle si l'écoulement est lent ?

.....

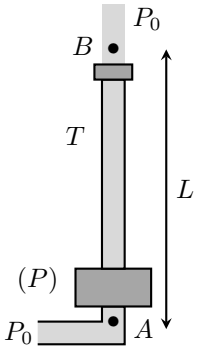
c) On admet qu'elle s'écrit $\frac{v^2}{2} = gh$ à la sortie d'une citerne de hauteur $h = 5\,\text{cm}$.

À quelle vitesse v le fluide est-il éjecté ?

.....

Entraînement 13.6 — Quelle pompe choisir ?

On étudie une fontaine dont le circuit d'eau est présenté ci-contre. Il comprend une pompe (P) fournissant un travail utile massique w_u, reliée à un tube T de longueur $L = 10\,\text{m}$ et de diamètre $D = 10\,\text{mm}$. Lors de son passage dans le tube, le fluide subit une perte de charge régulière correspondant à une perte d'énergie massique $\Delta e_{\text{pcr}} = \frac{1}{2}\xi\frac{L}{D}U^2$ où U est la vitesse débitante du fluide dans le tube et $\xi = 0,022$.



On suppose que, avant la pompe, le fluide est à une pression P_0 et de vitesse négligeable.

On rappelle que le débit volumique s'écrit $D_v = SU$, avec S la section de l'écoulement, et que l'expression de la relation de Bernoulli généralisée est :

$$\frac{1}{2}\Delta v^2 + \frac{\Delta P}{\mu} + g\Delta z = w_u - \Delta e_{\text{pcr}}.$$

a) On souhaite une vitesse $U = 7{,}0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, calculer le débit volumique nécessaire D_v en $\text{L}\cdot\text{s}^{-1}$.

.....

b) Choisir la bonne façon d'appliquer la relation de Bernoulli généralisée au fluide parcourant ce circuit le long d'une ligne de courant AB, A étant avant la pompe et B après le robinet :

(a) $\frac{1}{2}U^2 + gL = w_u - \frac{1}{2}\xi\mu g\frac{L}{D}U^2$

(b) $\frac{1}{2}U^2 + \frac{P_0}{\mu} + gL = w_u - \frac{1}{2}\mu g\xi\frac{L}{D}U^2$

(c) $\frac{1}{2}U^2 + gL = w_u - \frac{1}{2}\xi\frac{L}{D}U^2$

(d) $\frac{1}{2}U^2 + \frac{P_0}{\mu} + gL = w_u - \frac{1}{2}\xi\frac{L}{D}U^2$

.....

c) Pour obtenir un bilan de puissance à partir de la relation précédente, il faut la multiplier par :

(a) D_v (b) μD_v (c) μ

.....

d) Quelle puissance la pompe doit-elle fournir pour atteindre le débit volumique souhaité ?

.....

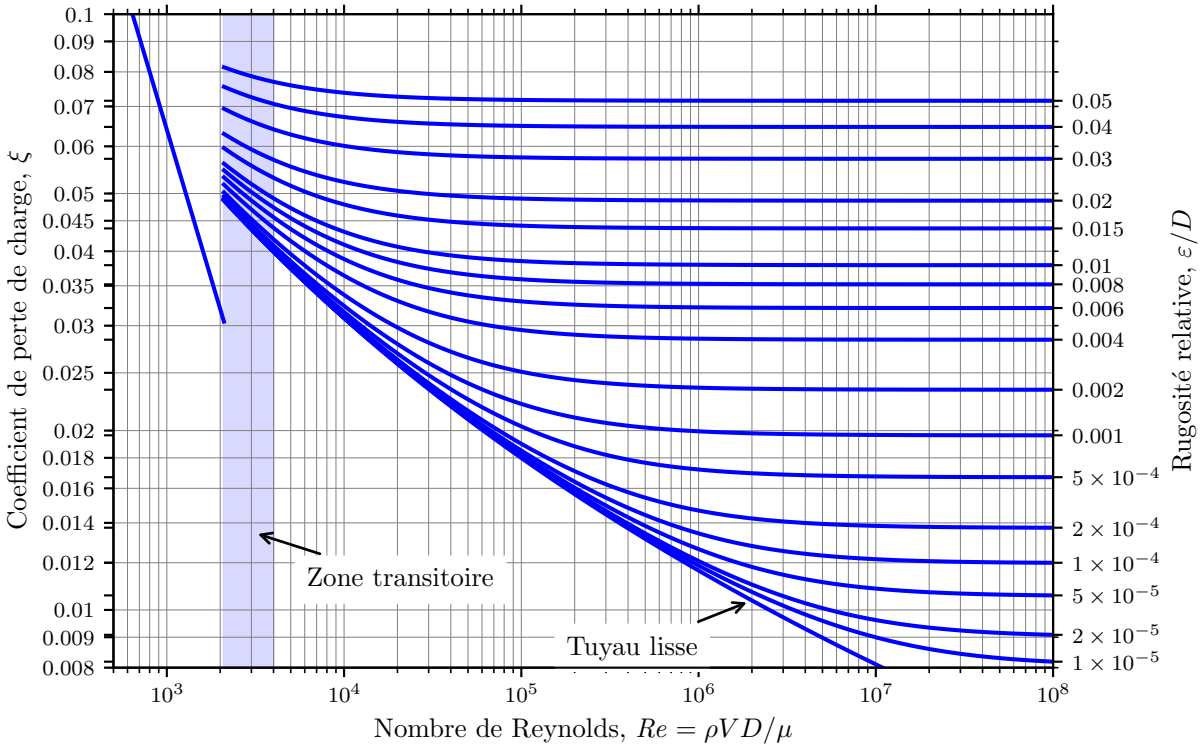
e) Pour atteindre le débit volumique souhaité, on a le choix entre plusieurs pompes de différentes puissances $\mathcal{P}_i$. Laquelle choisir ?

(a) $\mathcal{P}_1 = 100\,\text{W}$ (b) $\mathcal{P}_2 = 300\,\text{W}$ (c) $\mathcal{P}_3 = 500\,\text{W}$ (d) $\mathcal{P}_4 = 700\,\text{W}$

.....

Entraînement 13.7 — Lecture d'un diagramme de Moody.

On donne ci-dessous le diagramme de Moody d'un fluide en écoulement de pleine section dans une conduite cylindrique de longueur ℓ et de diamètre D.



a) On donne $\mathrm{Re} = 2 \times 10^4$ le nombre de Reynolds de l'écoulement, $D = 20\,\mathrm{cm}$ le diamètre de la canalisation et $\varepsilon = 4\,\mathrm{mm}$ la rugosité absolue de la conduite.

En déduire, par lecture graphique, le coefficient de perte de charge ξ dans la canalisation.

.....

b) On donne $\rho = 1 \times 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ la masse volumique du fluide.

Calculer la perte de charge $\Delta P = \dfrac{1}{2}\rho U^2 \xi \dfrac{\ell}{D}$ dans la canalisation pour une vitesse débitante $U = 0{,}5\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ et une longueur $\ell = 10\,\mathrm{m}$.

.....

c) Pour un autre écoulement, de nombre de Reynolds $\mathrm{Re} = 8 \times 10^5$ et de coefficient de perte de charge $\xi = 0{,}015$, déterminer la rugosité relative ε/D par lecture graphique.

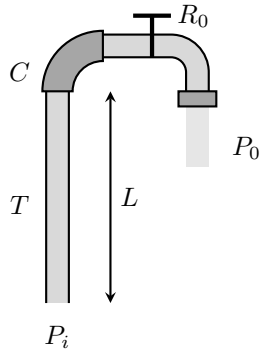
.....

d) En déduire la rugosité absolue ε de la conduite si son diamètre est $D = 30\,\mathrm{cm}$.

.....

Entraînement 13.8 — Pression dans un immeuble.

On étudie le circuit d'eau d'un immeuble. Il comprend un tuyau T de longueur $L = 19\,\mathrm{m}$ permettant d'amener de l'eau jusqu'au dernier étage. Son diamètre est $D = 10\,\mathrm{mm}$. À l'extrémité de ce tube se trouve un coude C permettant l'accès à un robinet R_0.



Au passage dans le coude et dans le robinet, le fluide subit les pertes de charge singulières $\Delta P_C = \frac{1}{2}k_1\mu U_1^2$ et $\Delta P_{R_0} = \frac{1}{2}k_2\mu U_2^2$ correspondant à des pertes de pression. On note U_1 et U_2 les vitesses débitantes respectivement en amont du coude et du robinet. On donne $k_1 = 1{,}3$ et $k_2 = 1{,}5$.

On rappelle que le débit volumique s'écrit : $D_v = SU$ avec S la section de l'écoulement. On donne la relation de Bernoulli généralisée permettant de prendre en compte les chutes de pression liées à la dissipation d'énergie mécanique au sein d'un écoulement réel (pertes de charge) :

$$\frac{1}{2}\Delta v^2 + \frac{\Delta P}{\mu} + g\Delta z = w_u - \frac{\Delta P_{\mathrm{pc}}}{\mu}.$$

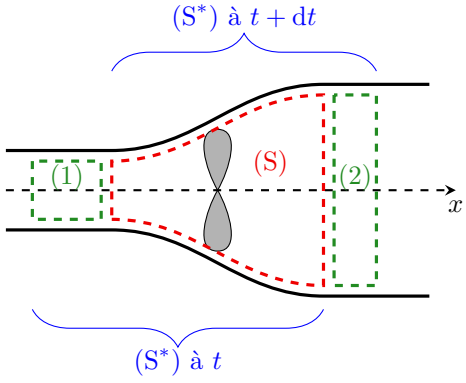
a) Le débit volumique voulu est de $0{,}25\,\mathrm{L\cdot s^{-1}}$, calculer les vitesses U_1 et U_2 .....

b) Quelle pression P_i faut-il imposer en amont du circuit d'eau, sachant que $P_0 = 1{,}0\,\mathrm{bar}$?

.....

Entraînement 13.9 — Puissance d'une installation.

Une hélice d'hydrolienne est placée dans un écoulement d'eau unidimensionnel à symétrie cylindrique. On note (S*) le système fermé représenté sur le schéma. Dans la suite, P_1, P_2, S_1 et S_2 représentent les pressions et sections des systèmes (1) et (2). On a, de plus, $P_1 = P_2$.



a) La pression autour du tube de courant est supposée uniforme. Que vaut la résultante des forces pressantes qui s'exercent sur (S*) ?

(a) $\vec{F} = (P_1S_1 - P_2S_2)\vec{u}_x$ (c) $\vec{F} = \vec{0}$

(b) $\vec{F} = (P_2S_2 - P_1S_1)\vec{u}_x$

.....

b) Quelle puissance développe cette force ?

(a) $\mathcal{P}(\vec{F}_P) = P_1S_1v_1 - P_2S_2v_2$ (b) $\mathcal{P}(\vec{F}_P) = P_2S_2v_2 - P_1S_1v_1$ (c) $\mathcal{P}(\vec{F}_P) = 0$

.....

c) On note $\mathcal{P}$ la puissance reçue par l'hélice. Quelle puissance est reçue par (S*) ? .....

d) On note D_{m} le débit massique, l'écoulement étant stationnaire.

Exprimer l'énergie cinétique qui sort de (S*) pendant une durée élémentaire $\mathrm{d}t$.

.....

e) Exprimer l'énergie cinétique qui entre dans (S*) pendant une durée élémentaire dt.

.....

f) Par application du théorème de la puissance cinétique $\dfrac{\mathrm{d}E_c^*}{\mathrm{d}t} = \sum \mathcal{P}_{\text{ext}}$ à (S*), exprimer $\mathcal{P}$ si l'écoulement est horizontal.

On rappelle que les actions intérieures ne travaillent pas lorsqu'on suppose l'écoulement parfait et incompressible.

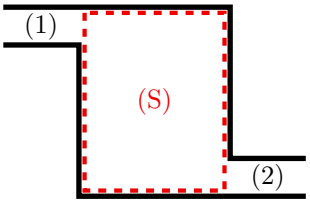
.....

g) On suppose $v_2 \ll v_1$ et on donne $v_1 = 1{,}00\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ et $D_\mathrm{m} = 200\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, calculer $\mathcal{P}$ .....

Bilans de masse

Entraînement 13.10 — Effectuer un bilan de masse sur un système ouvert et fixe.

Soit (S) une surface de contrôle, délimitant un système ouvert et fixe de masse m. Un fluide s'écoule à travers, depuis la canalisation d'entrée (1) jusqu'à la canalisation de sortie (2).



a) Exprimer la masse de fluide dm_1 qui entre dans (S) pendant la durée élémentaire dt, à l'aide du débit massique entrant D_{m1}.

.....

b) Exprimer la masse de fluide dm_2 qui sort de (S) pendant la durée élémentaire dt à l'aide du débit massique sortant D_{m2}.

.....

c) Exprimer la variation de masse dm de (S) en fonction de dm_1 et dm_2 .....

d) En régime stationnaire, on a d$m = 0$. En déduire la relation entre D_{m1} et D_{m2}.

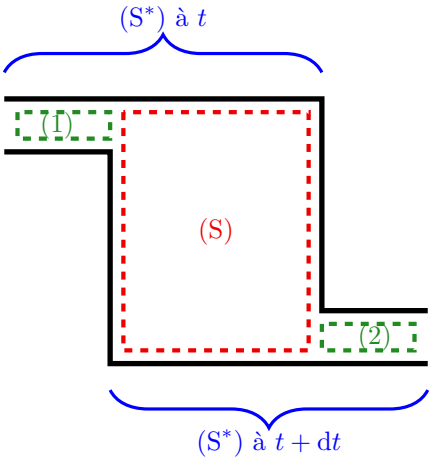
.....

Entraînement 13.11 — Effectuer un bilan de masse sur un système fermé et mobile.

On définit le système (S*) fermé et mobile constitué :

- de (S) et de la masse $\mathrm{d}m_1$ qui y entre, à l'instant t ;
- de (S) et de la masse $\mathrm{d}m_2$ qui en sort, à l'instant $t + \mathrm{d}t$.

On note $m(t)$ la masse de (S) à l'instant t.



a) Exprimer la masse de fluide $m^*(t)$ de (S*) en fonction de $m(t)$ et $\mathrm{d}m_1$.

.....

b) Exprimer la masse de fluide $m^*(t + \mathrm{d}t)$ de (S*) en fonction de $m(t + \mathrm{d}t)$ et $\mathrm{d}m_2$.

.....

c) Exprimer la variation de masse $\mathrm{d}m^*$ de (S*).

.....

d) En régime stationnaire, on a $m(t) = m(t + \mathrm{d}t)$. En déduire la relation entre $\mathrm{d}m_1$ et $\mathrm{d}m_2$.

.....

Réponses mélangées

non homogène | oui | $\mathrm{d}m^* = 0$ | $5{,}9 \times 10^4\,\mathrm{Pa}$ | $\mathrm{d}m_1 = \mathrm{d}m_2$ | $m^*(t) = m(t) + \mathrm{d}m_1$

$U_1 = U_2 = 3{,}2\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ | b | b | $D_v = 0{,}55\,\mathrm{L \cdot s^{-1}}$ | oui | oui

non homogène | $\mathrm{d}m_1 = D_{m1}\,\mathrm{d}t$ | c | $-\mathcal{P}$ | c | $m^*(t + \mathrm{d}t) = m(t + \mathrm{d}t) + \mathrm{d}m_2$

$\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\mu} = \text{cste}$ | $\frac{1}{2} D_\mathrm{m} v_2^2\,\mathrm{d}t$ | $\mathrm{d}m_2 = D_{m2}\,\mathrm{d}t$ | 3,0 bar | $\frac{1}{2} D_\mathrm{m} v_1^2\,\mathrm{d}t$ | $3{,}1 \times 10^2\,\mathrm{Pa}$

$1{,}3 \times 10^2\,\mathrm{J/kg}$ | $gz + \frac{P}{\mu} = \text{cste}$ | homogène | 60 µm | $\xi = 0{,}05$ | c

$\mathrm{d}m = \mathrm{d}m_1 - \mathrm{d}m_2$ | c | $\mathcal{P} = \frac{1}{2} D_\mathrm{m}(v_1^2 - v_2^2)$ | $v = 1\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ | b | 2×10^{-4}

c | $D_{m1} = D_{m2}$ | $\mathcal{P} = 100\,\mathrm{W}$ | $\mathcal{P} = 3{,}6 \times 10^2\,\mathrm{W}$ | homogène | oui | b | c

► Réponses et corrigés page 221

Réponses et corrigés

Fiche n° 1. Opérateurs vectoriels

Réponses

1.1 ..... d

1.2 a) .... $\left(z+y+\frac{yz}{a}\right)\vec{e_x}+\left(x+z+\frac{xz}{a}\right)\vec{e_y}+\left(x+y+\frac{yx}{a}\right)\vec{e_z}$

1.2 b) ..... $6x\vec{e_x}+2a\vec{e_y}-2a\vec{e_z}$

1.2 c) ..... $(2xy+z^2)\vec{e_x}+(2yz+x^2)\vec{e_y}+(2xz+y^2)\vec{e_z}$

1.2 d) ..... $2y\vec{e_x}+2x\vec{e_y}+4\frac{a^2}{b}\mathrm{e}^{z/(2b)}\vec{e_z}$

1.2 e) ..... $16xy\vec{e_x}+\left(8x^2-\frac{6a^4}{y^2}\right)\vec{e_y}-5b^2\vec{e_z}$

1.3 a) ..... $\left(-\frac{2r}{a}-2\theta\right)\vec{e_r}-2\vec{e}_\theta+3\vec{e_z}$

1.3 b) ..... $-\frac{2a^2}{r^3}\mathrm{e}^{5\theta}\vec{e_r}+\frac{5a^2}{r^3}\mathrm{e}^{5\theta}\vec{e}_\theta$

1.3 c) ..... $\frac{r}{\sqrt{r^2-a^2}}\vec{e_r}$

1.3 d) ..... $28\frac{\theta r^3}{a^4}\vec{e_r}+7\frac{r^3}{a^4}\vec{e}_\theta+\frac{1}{z}\vec{e_z}$

1.3 e) ..... $-\frac{z\sin(\theta)}{r^2}\vec{e_r}+\frac{z\cos\theta}{r^2}\vec{e}_\theta+\frac{\sin(\theta)}{r}\vec{e_z}$

1.4 ..... a

1.5 a) 16

1.5 b) c

1.5 c) ..... b

1.5 d) ..... a

1.5 e) c

1.5 f) ..... $2\sqrt{17}$

1.6 a) ..... a

1.6 b) ..... b

1.6 c) ..... a

1.6 d) ..... b

1.6 e) ..... a

1.7 a) ..... $6x+2a-2b$

1.7 b) ..... $2x+4\frac{a^2}{b}\mathrm{e}^{\frac{z}{2b}}$

1.7 c) ..... $16xy-\frac{6x^4}{y^2}$

1.7 d) 0

1.7 e) ..... $x(2y-x)$

1.8 a) ..... $-3\frac{r}{a}+1$

1.8 b) 0

1.9 ..... b

1.10 a) 3

1.10 b) 3

1.10 c) ..... b

1.11 a) ..... $\vec{0}$

1.11 b) ..... $-4c\mathrm{e}^{\frac{z}{2c}}\vec{e_x}-2x\vec{e_z}$

1.11 c) ..... $\frac{8x^2}{y}(3x-y)\vec{e_z}$

1.11 d) ..... $2\vec{e_y}$

1.11 e) ..... $x^2\vec{e_x}-2xy(\vec{e_y}+\vec{e_z})-x^2\vec{e_z}.$

1.12 a) ..... $-4\theta\vec{e_z}$

1.12 b) ..... $2\vec{e_z}$

1.13 a) ..... b

1.13 b) ..... $\boxed{0{,}80\,\mathrm{UA/m}}$

1.13 c) ..... $\boxed{\text{a}}$

1.13 d) ..... $\boxed{2}$

1.14 a) ..... $\boxed{\dfrac{2y}{a}}$

1.14 b) ..... $\boxed{2}$

1.14 c) ..... $\boxed{6-\dfrac{b^2}{z^2}}$

1.15 ..... $\boxed{\begin{pmatrix} \dfrac{2y}{a} \\ 2 \\ 6-\dfrac{b^2}{z^2} \end{pmatrix}}$

1.16 a) ..... $\boxed{\text{c}}$

1.16 b) ..... $\boxed{\text{b}}$

1.16 c) ..... $\boxed{\text{d}}$

1.16 d) ..... $\boxed{\text{a}}$

1.16 e) ..... $\boxed{\text{d}}$

1.17 a) ..... $\boxed{\overrightarrow{e_r}+\dfrac{2a}{r}\overrightarrow{e_\theta}+\dfrac{-6b}{r\sin\theta\varphi^2}\overrightarrow{e_\varphi}}$

1.17 b) .... $\boxed{3r^2\begin{pmatrix} \sin^3(\theta-\varphi) \\ \cos(\theta-\varphi)\sin^2(\theta-\varphi) \\ -\dfrac{1}{\sin\theta}\cos(\theta-\varphi)\sin^2(\theta-\varphi) \end{pmatrix}}$

1.17 c) ..... $\boxed{r\sqrt{\varphi}\begin{pmatrix} 2\sin\theta \\ \cos\theta \\ \dfrac{1}{2\varphi} \end{pmatrix}}$

1.17 d) ..... $\boxed{\dfrac{1}{r\cos^2\theta}\overrightarrow{e_\theta}}$

1.18 a) ..... $\boxed{3+\dfrac{4a\cos\theta}{r}-\dfrac{6}{\varphi^2\sin\theta}\dfrac{a}{r}}$

1.18 b) ..... $\boxed{4r\sin\theta\sqrt{\varphi}+2r\cos\theta\sqrt{\varphi}+\dfrac{r}{2\sqrt{\varphi}}}$

1.18 c) ..... $\boxed{1/\tan(\theta)}$

1.19 a) ..... $\boxed{\dfrac{6b}{r\varphi\tan\theta}\overrightarrow{e_r}-\dfrac{6b}{r\varphi}\overrightarrow{e_\theta}+\dfrac{2a\theta}{r}\overrightarrow{e_\varphi}}$

1.19 b) ..... $\boxed{\dfrac{r}{2\sqrt{\varphi}}\overrightarrow{e_\theta}-r\sqrt{\varphi}\cos(\theta)\overrightarrow{e_\varphi}}$

1.19 c) ..... $\boxed{2\overrightarrow{e_\varphi}}$

Corrigés

1.1 Calculons les trois composantes du vecteur gradient dans le système de coordonnées cartésiennes (x, y, z).

On a

$$\frac{\partial V}{\partial x}=yz,\quad \frac{\partial V}{\partial y}=xz \quad \text{et} \quad \frac{\partial V}{\partial z}=xy.$$

Parmi les solutions proposées, la (c) est donc exclue.

Les solutions (a), (b) et (d) sont possibles (termes de droite corrects) mais les notations des gradients (termes de gauche) ne sont pas tous valables.

La notation $\vec{\nabla}$ comme $\overrightarrow{\mathrm{grad}}$ doit être surmontée d'une flèche pour qualifier la nature vectorielle de l'opérateur gradient, donc les réponses (a) et (b) sont exclues. Précisons que le gradient s'applique à un champ scalaire donc un champ dont la notation ne doit pas être surmontée d'une flèche : deuxième manière d'exclure la réponse (b).

La réponse (d) est l'ultime solution restante, on constate bien qu'elle ne comporte aucune erreur de notation.

.....

1.2 a) Posons $f(x,y,z) = xy + yz + zx + \dfrac{xyz}{a}$. Calculons les dérivées partielles : on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + z + \frac{yz}{a}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x + z + \frac{xz}{a} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = y + x + \frac{xy}{a}.$$

Donc le vecteur gradient de f s'écrit $\left(z + y + \dfrac{yz}{a}\right)\vec{e_x} + \left(x + y + \dfrac{xz}{a}\right)\vec{e_y} + \left(x + y + \dfrac{yx}{a}\right)\vec{e_z}$.

La réponse attendue est bien un vecteur !

.....

1.2 b) Posons $f(x,y,z) = 3x^2 + 2a(y-z) + b^2$. Calculons les dérivées partielles : on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2a \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -2a.$$

Donc le vecteur gradient de f s'écrit $6x\vec{e_x} + 2a\vec{e_y} - 2a\vec{e_z}$.

.....

1.2 c) Posons $f(x,y,z) = x^2y + y^2z + z^2x + a^3$. Calculons les dérivées partielles : on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + z^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2yz \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = y^2 + 2zx.$$

Donc le vecteur gradient de f s'écrit $(2xy + z^2)\vec{e_x} + (2yz + x^2)\vec{e_y} + (2xz + y^2)\vec{e_z}$.

.....

1.2 d) Posons $f(x,y,z) = 2xy + 8a^2\mathrm{e}^{z/(2b)} - 6c^2$. Calculons les dérivées partielles : on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 4\frac{a^2}{b}\mathrm{e}^{z/(2b)}.$$

Donc le vecteur gradient de f s'écrit $2y\vec{e_x} + 2x\vec{e_y} + 4\dfrac{a^2}{b}\mathrm{e}^{z/(2b)}\vec{e_z}$.

.....

1.2 e) Posons $f(x,y,z) = 8x^2y + \dfrac{6a^4}{y} - 5b^2z$. Calculons les dérivées partielles : on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 16xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = (8x^2 - \frac{6a^4}{y^2}) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -5b^2.$$

Donc le vecteur gradient de f s'écrit $16xy\vec{e_x} + \left(8x^2 - \dfrac{6a^4}{y^2}\right)\vec{e_y} - 5b^2\vec{e_z}$.

.....

1.3 a) Posons $f(r,\theta,z) = 3z - \dfrac{r^2}{a} - 2r\theta$. Calculons les dérivées partielles : on a

$$\frac{\partial f}{\partial r} = -\frac{2r}{a} - 2\theta, \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = -2r \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 3.$$

Donc le vecteur gradient de f s'écrit $-\left(\dfrac{2r}{a} + 2\theta\right)\vec{e_r} - 2\vec{e}_\theta + 3\vec{e_z}$.

.....

1.3 b) Posons $f(r,\theta,z) = \dfrac{a^2}{r^2}\mathrm{e}^{5\theta}$. Calculons les dérivées partielles : on a

$$\frac{\partial f}{\partial r} = -\frac{2a^2}{r^3}\mathrm{e}^{5\theta}, \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{5a^2}{r^2}\mathrm{e}^{5\theta} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Donc le vecteur gradient de f s'écrit $-\dfrac{2a^2}{r^3}\mathrm{e}^{5\theta}\vec{e_r} + \dfrac{5a^2}{r^3}\mathrm{e}^{5\theta}\vec{e}_\theta$.

.....

1.3 c) Posons $f(r,\theta,z)=\sqrt{r^2-a^2}$. Calculons les dérivées partielles : on a

$$\frac{\partial f}{\partial r}=\frac{r}{\sqrt{r^2-a^2}},\quad \frac{\partial f}{\partial \theta}=0\quad \text{et}\quad \frac{\partial f}{\partial z}=0.$$

Donc le vecteur gradient de f s'écrit $\dfrac{r}{\sqrt{r^2-a^2}}\vec{e_r}$.

.....

1.3 d) Posons $f(r,\theta,z)=7\left(\dfrac{r}{a}\right)^4\theta+\ln(z/b)$. Calculons les dérivées partielles : on a

$$\frac{\partial f}{\partial r}=28\frac{\theta r^3}{a^4},\quad \frac{\partial f}{\partial \theta}=7\frac{r^2}{a^4}\quad \text{et}\quad \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{z}.$$

Donc le vecteur gradient de f s'écrit $28\dfrac{\theta r^3}{a^4}\vec{e_r}+7\dfrac{r^3}{a^4}\vec{e}_\theta+\dfrac{1}{z}\vec{e_z}$.

.....

1.3 e) Posons $f(r,\theta,z)=\dfrac{z}{r}\sin(\theta)$. Calculons les dérivées partielles : on a

$$\frac{\partial f}{\partial r}=-\frac{z\sin(\theta)}{r^2},\quad \frac{\partial f}{\partial \theta}=\frac{z\cos\theta}{r}\quad \text{et}\quad \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\sin(\theta)}{r}.$$

Donc le vecteur gradient de f s'écrit $-\dfrac{z\sin(\theta)}{r^2}\vec{e_r}+\dfrac{z\cos\theta}{r^2}\vec{e}_\theta+\dfrac{\sin(\theta)}{r}\vec{e_z}$.

.....

1.4 Considérons la notation du gradient (terme de gauche des équations proposées). La réponse (d) est exclue car la notation nabla d'un gradient ne fait pas intervenir le produit scalaire. La réponse (c) est exclue car le couple de variables ne correspond à aucun de ceux proposés par l'énoncé. Considérons donc la formule cartésienne du gradient (terme de droite des équations proposées) pour les deux options restantes. La réponse (b) fait une interversion des coordonnées de dérivation et de celles de direction, elle est donc exclue. La bonne réponse est (a).

.....

1.5 a) On a $g(A)=g(-1,1,2)=(-1-2)^2+(1+1)^2+2^2-1=9+4+4-1=16$.

.....

1.5 b) Exprimons le gradient de la fonction scalaire g. On a

$$\overrightarrow{\text{grad}}(g(x,y,z))=\frac{\partial g}{\partial x}\vec{e_x}+\frac{\partial g}{\partial y}\vec{e_y}+\frac{\partial g}{\partial z}\vec{e_z}=(2(x-2))\vec{e_x}+(2y+2)\vec{e_y}+2z\vec{e_z}.$$

Par projection sur l'axe de direction $\vec{e_z}$, on obtient la quantité $2z$. Réponse (c).

.....

1.5 c) Exprimons le gradient de la fonction scalaire g. On a

$$\overrightarrow{\text{grad}}(g(x,y,z))=\frac{\partial g}{\partial x}\vec{e_x}+\frac{\partial g}{\partial y}\vec{e_y}+\frac{\partial g}{\partial z}\vec{e_z}=(2(x-2))\vec{e_x}+(2y+2)\vec{e_y}+2z\vec{e_z}.$$

Par projection sur l'axe de direction $\vec{e_y}$ on obtient la quantité $2y+2$. Réponse (c).

.....

1.5 d) Exprimons le gradient de la fonction scalaire g. On a

$$\overrightarrow{\text{grad}}(g(x,y,z))=\frac{\partial g}{\partial x}\vec{e_x}+\frac{\partial g}{\partial y}\vec{e_y}+\frac{\partial g}{\partial z}\vec{e_z}=(2(x-2))\vec{e_x}+(2y+2)\vec{e_y}+2z\vec{e_z}.$$

Par projection sur l'axe de direction $\vec{e_x}$ on obtient la quantité $2x-4$. Réponse (a).

.....

1.5 e) Exprimons le gradient de la fonction scalaire g. On a

$$\overrightarrow{\text{grad}}(g(x,y,z)) = \frac{\partial g}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial g}{\partial y}\overrightarrow{e_y} + \frac{\partial g}{\partial z}\overrightarrow{e_z} = (2(x-2))\overrightarrow{e_x} + (2y+2)\overrightarrow{e_y} + 2z\overrightarrow{e_z}.$$

Cette notation est équivalente au vecteur colonne de la réponse (c).

.....

1.5 f) Connaissant les composantes du gradient d'après les réponses précédentes, on peut exprimer la norme du vecteur gradient $\left\|\vec{\nabla} g(x,y,z)\right\|$ en un point quelconque. On a

$$\left\|\vec{\nabla} g(x,y,z)\right\| = \sqrt{(2x-4)^2 + (2y+2)^2 + 4z^2}.$$

On réalise l'application numérique au point $\mathrm{A}(-1,1,2)$: on a

$$\left\|\vec{\nabla} g(\mathrm{A})\right\| = \left\|\vec{\nabla} g(-1,1,2)\right\| = \sqrt{(-2-4)^2 + (2+2)^2 + 4\times 2^2} = \sqrt{36+16+16} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}.$$

.....

1.6 a) Rappelons l'expression du gradient en coordonnées cartésiennes : on a

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f(x,y,z)) = \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{e_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{e_z}.$$

Or, ici $\overrightarrow{\text{grad}}\, f = 2xy\overrightarrow{e_x} + x^2\overrightarrow{e_y} + a^2\overrightarrow{e_z}$; donc, par identification : $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z} = a^2$. Réponse (a).

.....

1.6 b) On a $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy$ donc, par intégration par rapport à la variable x, il vient $f(x,y,z) = x^2y + \text{cste}$ avec $\text{cste} = g(y,z)$ une fonction des coordonnées y et z car $\dfrac{\partial g(y,z)}{\partial x} = 0$. Réponse (b)

.....

1.6 c) On a $f(x,y,z) = x^2y + g(y,z)$ donc $\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = x^2 + \dfrac{\partial g(y,z)}{\partial y}$. Or, d'après l'énoncé, on a

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = x^2.$$

On déduit de ces deux équations que l'on a nécessairement $\dfrac{\partial g}{\partial y} = 0$. Réponse (a).

.....

1.6 d) On a $\dfrac{\partial g(y,z)}{\partial y} = 0$ donc, par intégration par rapport à la variable y, il vient $g(y,z) = \text{cste}$ avec $\text{cste} = h(z)$ une fonction de la seule coordonnée z car $\dfrac{\partial h(z)}{\partial y} = 0$.

On a $f(x,y,z) = x^2y + g(y,z) = x^2y + h(z)$ donc $\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = \dfrac{\partial h}{\partial z}$. Or, on sait d'après l'énoncé que $\dfrac{\partial f}{\partial z} = a^2$. On déduit de ces deux équations que l'on a nécessairement $\dfrac{\partial h}{\partial z} = a^2$ donc $h(z) = a^2z + \text{cste}$, soit finalement $g = a^2z + \text{cste}$. Réponse (b).

.....

1.6 e) On a $f(x,y,z) = x^2y + g(y,z) = x^2y + h(z) = x^2y + a^2z + \text{cste}$. On a donc $f(0,0,0) = \text{cste}$, or $f(0,0,0) = 0$ donc $\text{cste} = 0$. Réponse (a).

.....

1.7 a) Pour éviter les étourderies, vous pouvez vérifier que les trois termes de la somme ont bien la même dimension et que cette dimension correspond à la dimension de l'argument de l'opérateur divergence divisée par une longueur.

.....

1.7 b) On a $0 + 2x + 8\dfrac{a^2}{2b}\mathrm{e}^{\frac{z}{2b}} = 2x + 4\dfrac{a^2}{b}\mathrm{e}^{\frac{z}{2b}}$.

1.7 c) On a $8 \times 2xy - \dfrac{6x^4}{y^2} + 0 = 16xy - \dfrac{6x^4}{y^2}$.

1.7 d) On a $0 + 0 = 0$.

1.7 e) On a $2xy - x^2 = x(2y - x)$.

1.8 a) On a $-3\dfrac{r}{a} - 2 + 3 = -3\dfrac{r}{a} + 1$.

1.8 b) La composante A_θ ne dépend pas de θ !

1.9 Il faut calculer chacune des divergences au point A.

- Cas (a) : on a $\mathrm{div}\big(x^2\overrightarrow{e_x} + y^2\overrightarrow{e_y} + z^2\overrightarrow{e_z}\big) = 2x + 2y + 2z$ donc la valeur de divergence en A vaut
$$2 \times (-1) + 2 \times (-1) + 2 \times 1 = -2.$$
- Cas (b) : on a $\mathrm{div}\big(y^2\overrightarrow{e_x} + x^2\overrightarrow{e_y} + z^2\overrightarrow{e_z}\big) = 2z$ donc la valeur de divergence en A vaut $2 \times 1 = +2$.
- Cas (c) : on a $\mathrm{div}\big(z^2\overrightarrow{e_x} + x^2\overrightarrow{e_y} + y^2\overrightarrow{e_z}\big) = 0$ donc la valeur de divergence en A vaut 0.
- Cas (d) : on a $\mathrm{div}\big(y^2\overrightarrow{e_x} + x^2\overrightarrow{e_z} + z^2\overrightarrow{e_y}\big) = 0$ donc la valeur de divergence en A vaut 0.

La valeur de divergence maximale est dans le cas (b).

1.10 a) On a $1 + 1 + 1 = 3$.

1.10 b) On a $\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial(r^2.r)}{\partial r} + 0 + 0 = \dfrac{3r^2}{r^2} = 3$.

1.10 c) On a $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(r.r)}{\partial r} + 0 + 0 = \dfrac{2r}{r} = 2$. Réponse (b).

1.11 a) On a $(0-0)\overrightarrow{e_x} + (0-0)\overrightarrow{e_y} + (0-0)\overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{0}$.

1.11 b) On a $\left(0 - \dfrac{8c^2}{2c}\mathrm{e}^{\frac{z}{2c}}\right)\overrightarrow{e_x} + (0-0)\overrightarrow{e_y} + (0-2x)\overrightarrow{e_z} = -4c\mathrm{e}^{\frac{z}{2c}}\overrightarrow{e_x} - 2x\overrightarrow{e_z}$.

1.11 c) On a $(0-0)\overrightarrow{e_x} + (0-0)\overrightarrow{e_y} + \left(\dfrac{24x^3}{y} - 8x^2\right)\overrightarrow{e_z} = \dfrac{8x^2}{y}(3x - y)\overrightarrow{e_z}$.

1.11 d) On a $(0-0)\overrightarrow{e_x} + (1-(-1))\overrightarrow{e_y} + (0-0)\overrightarrow{e_z} = 2\overrightarrow{e_y}$.

1.11 e) On a $(x^2-0)\overrightarrow{e_x} + (0-2xy)\overrightarrow{e_y} + (-2xy - x^2)\overrightarrow{e_z} = x^2\overrightarrow{e_x} - 2xy(\overrightarrow{e_y} + \overrightarrow{e_z}) - x^2\overrightarrow{e_z}$.

1.12 a) On a $\left(\dfrac{1}{r} \times (0) - 0\right)\overrightarrow{e_r} + (0-0)\overrightarrow{e_\theta} + \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(-2r^2\theta)}{\partial r} - 0\right)\overrightarrow{e_z} = -4\theta\overrightarrow{e_z}$.

1.12 b) On a $\left(\frac{1}{r}\times(0)-0\right)\vec{e_r}+(0-0)\vec{e_\theta}+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r^2)}{\partial r}-0\right)\vec{e_z}=2\vec{e_z}$.

.....

1.13 a) Par définition du potentiel, on a $\mathrm{d}\Phi = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\Phi\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}$. Cette quantité étant nulle sur une équipotentielle par définition, le vecteur $\vec{v}$ doit être nécessairement orthogonal au vecteur $\mathrm{d}\vec{\ell}$ en tout point de l'équipotentielle. Réponse (b).

.....

1.13 b) Au premier ordre, on peut écrire que $v(\mathrm{C})\approx\frac{\Delta\Phi}{\Delta\ell}$. Graphiquement, au niveau du point C, on a :

$$\Delta\Phi = 1{,}60\,\mathrm{UA}-1{,}20\,\mathrm{UA}=0{,}40\,\mathrm{UA}\qquad\text{et}\qquad\Delta\ell=\mathrm{AC}=0{,}50\,\mathrm{m}\quad\text{donc}\quad v(\mathrm{C})\approx 0{,}80\,\mathrm{UA/m}.$$

.....

1.13 c) Le champ demandé est orienté dans le sens du gradient de Φ, c'est-à-dire dans le sens des potentiels croissants. Réponse (a).

.....

1.13 d) Les deux points C et D sont sur une même ligne de champ. En considérant un tube de champ centré sur cette ligne de champ commune et qui s'appuie sur les deux autres lignes de champ de la figure, on peut écrire que : $S_\mathrm{C}v_\mathrm{C}=S_\mathrm{D}v_\mathrm{D}$. Les valeurs de S sont proportionnelles à la distance sur le graphe entre les deux lignes de champ délimitant le tube ; donc, en mesurant ces distances au niveau des points C et D, on a : $\frac{S_\mathrm{D}}{S_\mathrm{C}}\approx\frac{1{,}6\,\mathrm{cm}}{0{,}8\,\mathrm{cm}}=2{,}0$. L'intensité du champ $\vec{v}$ est environ 2 fois plus importante en C qu'en D. On retrouve le fait que plus les lignes de champ sont resserrées, plus le champ est intense.

.....

1.14 a) Posons $f(x,y,z)=\frac{x^2y}{a}+bz+c^2$. Calculons les dérivées partielles secondes : on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{2y}{a},\quad\frac{\partial f}{\partial y}=0\quad\text{et}\quad\frac{\partial f}{\partial z}=0.$$

Donc le laplacien scalaire de f s'écrit $\frac{2y}{a}$.

.....

1.14 b) Posons $f(x,y,z)=y^2-5az$. Calculons les dérivées partielles secondes : on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0,\quad\frac{\partial f}{\partial y}=2\quad\text{et}\quad\frac{\partial f}{\partial z}=0.$$

Donc le laplacien scalaire de f s'écrit 2.

.....

1.14 c) Posons $f(x,y,z)=b^2\ln(\frac{z}{a})+3x^2$. Calculons les dérivées partielles secondes : on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6,\quad\frac{\partial f}{\partial y}=0\quad\text{et}\quad\frac{\partial f}{\partial z}=-\frac{b^2}{z^2}.$$

Donc le laplacien scalaire de f s'écrit $6-\frac{b^2}{z^2}$.

.....

1.15 Posons $A_x(x,y,z)=\frac{x^2y}{a}+bz+c^2$ puis $A_y=y^2-5az$ et $A_z=b^2\ln(\frac{z}{a})+3x^2$. On calcule les laplaciens scalaires de ces trois fonctions selon la formule : $\Delta(f(x,y,z))=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

On obtient $\Delta A_x=\frac{2y}{a}$, $\Delta A_y=2$ et $\Delta A_z=6-\frac{b^2}{z^2}$. Le laplacien vectoriel s'écrit donc : $\frac{2y}{a}\vec{e_x}+2\vec{e_y}+6-\frac{b^2}{z^2}\vec{e_z}$, que l'on peut aussi mettre sous la forme du vecteur colonne proposé en réponse.

.....

1.16 a) Ne pas oublier d'indiquer qu'il s'agit d'un opérateur vectoriel : $\overrightarrow{\text{grad}}\,A$ et non $\text{grad}(A)$! !

.....

1.16 b) L'argument est un vecteur, pensez à choisir la base de projection de façon à faciliter le calcul.

.....

1.16 c) Ne pas oublier d'indiquer qu'il s'agit d'un opérateur vectoriel : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}$ et non $\text{rot}(\vec{A})$! !

.....

1.16 d) Vérifiez l'homogénéité des trois termes : homogénéité de l'argument du laplacien divisé par le carré d'une longueur !

.....

1.16 e) Neuf termes à calculer ! Heureusement souvent beaucoup sont nuls du fait des symétries et invariances...

.....

1.17 a) Posons $f(r,\theta,\varphi) = r + 2a\theta + \dfrac{6b}{\varphi}$. Calculons les dérivées partielles : on a

$$\frac{\partial f}{\partial r} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = 2a \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{-6b}{\varphi^2}.$$

Donc le vecteur gradient de f s'écrit $1\overrightarrow{e_r} + \dfrac{2a}{r}\overrightarrow{e_\theta} + \dfrac{-6b}{r\sin\theta\varphi^2}\overrightarrow{e_\varphi}$.

.....

1.17 b) Posons $f(r,\theta,\varphi) = (r\sin(\theta-\varphi))^3$. Calculons les dérivées partielles : on a

$$\frac{\partial f}{\partial r} = 3r^2\sin^3(\theta-\varphi), \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = 3r^3\cos(\theta-\varphi)\sin^2(\theta-\varphi) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = -\cos(\theta-\varphi)\sin^2(\theta-\varphi)\sin\theta.$$

Donc, le vecteur gradient de f s'écrit bien sous la forme du vecteur colonne proposé en réponse.

.....

1.17 c) Posons $f(r,\theta,\varphi) = r^2\sqrt{\varphi}\sin\theta$. Calculons les dérivées partielles : on a

$$\frac{\partial f}{\partial r} = 2\sin\theta, \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = r\cos\theta \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{r\sin\theta}{2\varphi}.$$

Donc, le vecteur gradient de f s'écrit bien sous la forme du vecteur colonne proposé en réponse.

.....

1.17 d) La seule dérivée partielle non nulle est celle par rapport à la coordonnée θ. On peut soit utiliser la dérivation de la fonction tangente, soit développer grâce à l'identité $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$.

.....

1.18 a) On calcule $3\dfrac{r^2}{r^2} + \dfrac{2a}{r\sin\theta}2\sin\theta\cos\theta + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{-6a}{\varphi^2} = 3 + \dfrac{4a\cos\theta}{r} - \dfrac{6}{\varphi^2\sin\theta}\dfrac{a}{r}$.

.....

1.18 b) On calcule

$$\frac{4r^3}{r^2}\sin\theta\sqrt{\varphi} + \frac{1}{r\sin\theta}2\sin\theta\cos\theta r^2\sqrt{\varphi} + \frac{1}{r\sin\theta}r^2\sin\theta\frac{1}{2\sqrt{\varphi}} = 4r\sin\theta\sqrt{\varphi} + 2r\cos\theta\sqrt{\varphi} + \frac{r}{2\sqrt{\varphi}}.$$

.....

1.18 c) La composante A_θ ne dépend que de r.

.....

1.19 a) On calcule $\dfrac{1}{r\sin\theta}\left(\dfrac{6b}{\varphi}\cos\theta - 0\right)\overrightarrow{e_r} + \left(\dfrac{1}{r\sin\theta}\times 0 - \dfrac{1}{r}\dfrac{6b}{\varphi}\right)\overrightarrow{e}_\theta + \dfrac{1}{r}(2a\theta - 0)\overrightarrow{e_\varphi}$.

.....

1.19 b) On a

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(r^2\sin(\theta)\sqrt{\varphi}\overrightarrow{e_r}\right)\\
&= \frac{1}{r\sin\theta}(0-0)\overrightarrow{e_r} + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\times\frac{\partial}{\partial\varphi}(r^2\sin(\theta)\sqrt{\varphi}) - \frac{1}{r}\times 0\right)\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(0 - \frac{\partial}{\partial\theta}(r^2\sin(\theta)\sqrt{\varphi})\right)\overrightarrow{e_\varphi}\\
&= \frac{1}{r\sin\theta}\times\frac{\partial}{\partial\varphi}(r^2\sin(\theta)\sqrt{\varphi})\overrightarrow{e_\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(r^2\sin(\theta)\sqrt{\varphi})\overrightarrow{e_\varphi}\\
&= \frac{r}{2\sqrt{\varphi}}\overrightarrow{e_\theta} - r\sqrt{\varphi}\cos(\theta)\overrightarrow{e_\varphi}.
\end{aligned}$$

1.19 c) On calcule $\frac{1}{r\sin\theta}(0-0)\overrightarrow{e_r} + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\times 0 - \frac{1}{r}\times 0\right)\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r^2) - 0\right)\overrightarrow{e_\varphi} = 2\overrightarrow{e_\varphi}$.

Fiche n° 2. Électrostatique

Réponses

2.1 a) ..... $R\,\mathrm{d}\theta$

2.1 b) ..... $2\pi R$

2.1 c) ..... $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$

2.1 d) ..... πR^2

2.1 e) ..... $\frac{4}{3}\pi R^3$

2.2 a) ..... $\lambda_0 \ell$

2.2 b) ..... $2\pi^2 q_0$

2.3 a) ..... $+1\,000 \times e$

2.3 b) ..... $L \times \ell$

2.3 c) ..... $2{,}57 \times 10^{-15}\,\mathrm{C \cdot m^{-2}}$

2.4 a) ..... $(\mathrm{O}, \vec{e_x} + \vec{e_y}, \vec{e_z})$, $(\mathrm{O}, \vec{e_x} - \vec{e_y}, \vec{e_z})$ et $(\mathrm{O}, \vec{e_x}, \vec{e_y})$

2.4 b) ..... $(\mathrm{O}, \vec{e_x}, \vec{e_z})$ et $(\mathrm{O}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$

2.5 a) ..... $6{,}5 \times 10^{-2}\,\mathrm{m^3}$

2.5 b) ..... $3{,}3 \times 10^{-9}\,\mathrm{C}$

2.5 c) ..... $7{,}9 \times 10^{-1}\,\mathrm{m^2}$

2.5 d) ..... $6 \times 10^{-6}\,\mathrm{C}$

2.6 a) ..... b

2.6 b) c

2.6 c) 0

2.7 a) ..... b

2.7 b) ..... b

2.7 c) ..... d

2.7 d) ..... b et c

2.8 a) ..... $-2\vec{e_x} + 8\vec{e_y}$

2.8 b) ..... $5\vec{e_y}$

2.8 c) ..... b et c

2.9 a) ..... $\vec{e_y}$

2.9 b) ..... $\vec{e_z}$

2.9 c) ..... d

2.10 ..... b et d

2.11 a) ..... c et d

2.11 b) ..... a et d

2.12 c

2.13 a) ..... d

2.13 b) c

2.13 c) ..... b

2.13 d) ..... $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \sqrt{\frac{z^2}{z^2 + R^2}}\right)$

2.13 e) ..... $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

2.13 f) ..... $\frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 z^2}$

2.14 a) ..... a et f

2.14 b) 0

2.15 a) ..... d

2.15 b) c

2.15 c) ..... $\underbrace{\frac{q}{2\varepsilon_0}}_{K}(1 - \cos\alpha)$

2.15 d) ..... $1{,}8 \times 10^{-8}\,\mathrm{V \cdot m}$

2.16 a) ..... $4\pi r^2 E(r)$

2.16 b) c

2.16 c) ..... q et 0

2.17 a) ..... nulle

2.17 b) ..... négative

2.17 c) ..... nulle

2.17 d) ..... positive

2.18 a) ..... a

2.18 b) c

2.19 a) ..... b

2.19 b) ..... $V(a)$

2.19 c) ..... $E_0 a(1 + \mathrm{e}^{-2} - \mathrm{e}^{-1})$

2.20 a) c

2.20 b) ..... $\dfrac{1}{r}\left(1 + \dfrac{a\cos(\theta)}{2r}\right)$

2.20 c) ..... $\dfrac{1}{r}\left(1 - \dfrac{a\cos(\theta)}{2r}\right)$

2.20 d) ..... $\dfrac{qa\cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

2.21 a) ..... a

2.21 b) ..... positif

2.21 c) ..... $1 \times 10^2\ \mathrm{V \cdot m^{-1}}$

2.21 d) ..... b

2.22 a) ..... $Q = 4\rho_0 \mathcal{A} H/3,\ \rho_\mathrm{m} = 2\rho_0/3$

2.22 b) ..... $Q = \rho_0 \pi R^2 H/2,\ \rho_\mathrm{m} = \rho_0/2$

2.22 c) ..... $Q = \rho_0 4\pi R^3,\ \rho_\mathrm{m} = 0$

2.23 ..... a

2.24 0

2.25 ..... a

2.26 a) ..... d

2.26 b) ..... b

2.27 a) ..... Courbe 3

2.27 b) ..... Courbe 1

2.27 c) ..... Courbe 2

2.28 ..... $\dfrac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\dfrac{h}{R(R+h)}$

Corrigés

2.1 a) Comme r et z sont constants, $\mathrm{d}r$ et $\mathrm{d}z$ sont nuls ; ainsi $\mathrm{d}\mathcal{C} = R\,\mathrm{d}\theta$.

2.1 b) On a $\mathcal{C} = \displaystyle\int_0^{2\pi} R\,\mathrm{d}\theta = R\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = R[\theta]_0^{2\pi} = 2\pi R$.

2.1 d) On a $\mathcal{S} = \displaystyle\int_{r=0}^{r=R}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^R r\,\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R [\theta]_0^{2\pi} = \frac{R^2}{2}\times 2\pi = \pi R^2$.

2.1 e) On a

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \int_{r=0}^{r=R}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} r^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^R r^2\,\mathrm{d}r\int_0^\pi \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\\ &= \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R \times \big[-\cos(\theta)\big]_0^\pi \times \big[\varphi\big]_0^{2\pi} = \frac{R^3}{3}\times\big(-(-1-1)\big)\times 2\pi = \frac{4}{3}\pi R^3.\end{aligned}$$

2.2 a) On a $Q = \int_0^\ell \lambda_0 \,\mathrm{d}x = \lambda_0 \int_0^\ell \mathrm{d}x = \lambda_0 \big[x\big]_0^\ell = \lambda_0 \ell$.

.....

2.2 b) On a $Q = \int_0^{2\pi} \lambda(\theta) a \,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} q_0 \frac{\theta}{a} a \,\mathrm{d}\theta = q_0 \int_0^{2\pi} \theta \,\mathrm{d}\theta = q_0 \left[\frac{\theta^2}{2}\right]_0^{2\pi} = 2\pi^2 q_0$.

.....

2.3 a) Chaque électron porte la charge (négative) $-e$. En arrachant N électrons de la feuille, celle-ci se charge positivement : on a $Q = +N \times e$, avec $N = 1\,000$.

.....

2.3 b) La feuille est modélisée par un rectangle d'aire $S = L \times \ell$.

.....

2.3 c) Il suffit de faire l'application numérique : $\sigma = 2{,}57 \times 10^{-15}\,\mathrm{C \cdot m^{-2}}$.

.....

2.5 a) On a $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 6{,}5 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}^3$, en écriture scientifique, et en gardant deux chiffres significatifs.

.....

2.5 b) La densité volumique de charge est uniforme donc la charge totale est donnée par

$$Q = \rho_0 V = 3{,}3 \times 10^{-9}\,\mathrm{C},$$

en écriture scientifique, et en ne gardant que deux chiffres significatifs.

.....

2.5 c) On a $\mathcal{A} = 4\pi R^2 = 7{,}9 \times 10^{-1}\,\mathrm{m}^2$, en écriture scientifique, et en gardant deux chiffres significatifs.

.....

2.5 d) La densité surfacique de charge étant uniforme, $Q = \sigma\mathcal{A} = 6 \times 10^{-6}\,\mathrm{C}$, en écriture scientifique, et en ne gardant qu'un chiffre significatif (autant que la donnée qui possède le moins de chiffres significatifs).

.....

2.6 a) L'élément de surface $\mathrm{d}S = R\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$ est la multiplication du déplacement élémentaire $R\,\mathrm{d}\theta$ le long de la circonférence d'un cercle de rayon R et d'axe $(\mathrm{O}z)$ du tube par le déplacement élémentaire $\mathrm{d}z$ le long de l'axe $(\mathrm{O}z)$.

.....

2.6 b) On a $Q = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{H} \sigma(\theta) R \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$.

.....

2.6 c) On a $Q = \sigma_0 R H \int_{\theta=0}^{2\pi} \cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta = 0$. Le tube n'est globalement pas chargé. Ce résultat était attendu puisque la densité surfacique de charge est $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos(\theta)$ (les charges positives et négatives se répartissent de manière égale sur sa surface).

.....

2.7 d) Le cylindre étant désormais infini, la distribution devient invariante par translation suivant $(\mathrm{O}z)$.

.....

2.8 a) Le principe de superposition assure que le champ électrostatique total en M_1 est la somme des champs produits par les deux sources.

.....

2.8 c) Le point M_3 est le symétrique du point M_1 par rapport au plan $\mathcal{P}$. Ainsi, le vecteur-champ en M_3 est le symétrique du vecteur-champ en M_1 par rapport au plan $\mathcal{P}$. Enfin, le point M_2 appartient à ce plan de symétrie donc le vecteur-champ au point M_2 appartient également à ce plan de symétrie.

.....

2.9 a) La projection du vecteur $\vec{e_y}$ est nulle sur le plan (Π_1), donc $\vec{e_y}$ est normal à ce plan.

.....

2.9 b) La projection du vecteur $\vec{e_z}$ est nulle sur le plan (Π_2), donc $\vec{e_z}$ est normal à ce plan.

.....

2.9 c) En un point M d'un plan d'antisymétrie de la distribution de charge, le champ électrostatique est perpendiculaire à ce plan. Par exemple, si le point M est sur l'axe $(\mathrm{O}x)$, appartenant au plan (Π_2), le champ électrostatique est suivant l'axe $(\mathrm{O}z)$: $\vec{E}(\mathrm{M}) = E(\mathrm{M})\vec{e_z}$.

.....

2.10 Le plan $(\mathrm{M}, \vec{e_x}, \vec{e_y})$ est un plan de symétrie donc $\vec{E}(\mathrm{M}) = E_x(x,y,z)\vec{e_x} + E_y(x,y,z)\vec{e_y}$. Enfin, l'invariance par translation selon $\vec{e_z}$ permet d'affirmer que les composantes E_x et E_y, et donc la norme $\left\|\vec{E}\right\|$, de $\vec{E}(\mathrm{M})$ ne dépendent pas de z.

.....

2.13 a) En repérage cylindrique, le déplacement élémentaire est $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mathrm{d}r\vec{e_r} + r\,\mathrm{d}\theta\vec{e_\theta} + \mathrm{d}z\vec{e_z}$. Sur le disque, z est fixé (à 0) donc l'aire s'obtient en multipliant les deux composantes non nulles du vecteur déplacement élémentaire $\mathrm{d}S = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$.

.....

2.13 b) Par relation de Chasles, on a $\overrightarrow{\mathrm{PM}} \cdot \vec{e_z} = (\overrightarrow{\mathrm{PO}} + \overrightarrow{\mathrm{OM}}) \cdot \vec{e_z} = r\vec{e_r} \cdot \vec{e_z} + z\vec{e_z} \cdot \vec{e_z} = 0 + z$.

.....

2.13 c) On a $\overrightarrow{\mathrm{PM}} = \overrightarrow{\mathrm{PO}} + \overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\vec{e_r} + z\vec{e_z}$ donc $\mathrm{PM} = \sqrt{\overrightarrow{\mathrm{PM}}^2} = \sqrt{\overrightarrow{\mathrm{PM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PM}}} = \sqrt{z^2 + r^2}$.

.....

2.13 d) En séparant les variables et en effectuant le changement de variable $u = r^2$ (d'où $\mathrm{d}u = 2r\,\mathrm{d}r$), il vient :

$$E_z = \frac{\sigma z}{8\pi\varepsilon_0} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \mathrm{d}\theta \times \int_{u=0}^{u=R^2} (u+z^2)^{-3/2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sigma z}{4\varepsilon_0}\left[-2(u+z^2)^{-1/2}\right]_{u=0}^{u=R^2} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+R^2/z^2}}\right).$$

.....

2.13 e) On a $\sqrt{1+R^2/z^2} \xrightarrow[R/z\to+\infty]{} \infty$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{1+R^2/z^2}} \xrightarrow[R/z\to\infty]{} 0$. Ainsi, $E_z \xrightarrow[R/z\to\infty]{} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.

.....

2.13 f) Le développement limité fourni permet d'écrire :

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{R^2}{z^2}}} = \left(1+\frac{R^2}{z^2}\right)^{-1/2} \underset{R/z\to 0}{=} 1 - \frac{R^2}{2z^2} \quad \text{d'où} \quad E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - 1 + \frac{R^2}{2z^2}\right] = \overbrace{\pi R^2 \sigma}^{Q_0} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 z^2},$$

ce qui correspond bien au champ créé par une charge ponctuelle Q_0, distante de z du point d'observation.

.....

2.15 a) L'aire d'un élément de surface d'une sphère de rayon r est $\mathrm{d}S = r^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$. Ici, le rayon de la calotte est R donc la variable r est fixée à R. En conclusion, $\mathrm{d}S = R^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$.

.....

2.15 b) Pour rappel, la colatitude θ est définie sur $[0,\pi]$ quand la longitude φ est décrite sur $[0,2\pi]$.
Pour décrire/paramétrer la calotte, on peut procéder de la sorte : on considère un point $\mathrm{M}(R,\theta,\varphi)$ sur la calotte, et on lui fait faire un tour complet autour de l'axe $(\mathrm{O}z)$; φ a alors parcouru l'intervalle $[0,2\pi]$ en décrivant un cercle. Ensuite, la calotte peut être vue comme un « accolage » de cercles de rayon allant de $R\sin\alpha$ à 0 (le cercle de rayon nul étant confondu avec un point de l'axe $(\mathrm{O}z)$). En d'autres termes, cela implique que $\theta \in [\pi-\alpha, \pi]$.
Ainsi, pour totalement parcourir la calotte, il faut $\varphi \in [0,2\pi]$ et $\theta \in [\pi-\alpha,\pi]$. Il vient

$$\phi = \int_{\theta=\pi-\alpha}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \vec{E} \cdot R^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{e}_r.$$

.....

2.15 c) Le champ $\vec{E}$ est celui sur la calotte sphérique, soit en $r = R$. Ainsi, on a

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \times R^2 \int_{\theta=\pi-\alpha}^{\pi} \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta \int_{\varphi=0}^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \qquad \text{donc} \qquad \phi = \underbrace{\frac{q}{2\varepsilon_0}}_{K}(1-\cos\alpha).$$

.....

2.15 d) Pour $\alpha = \pi$ et $q = e$, on a $\phi = \dfrac{e}{\varepsilon_0}$. Donc, après calcul, $\phi = 1{,}8 \times 10^{-8}\ \mathrm{V \cdot m}$.

.....

2.16 a) On a $\phi(\vec{E}) = \oiint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 4\pi r^2 E(r)$.

.....

2.16 b) Le théorème de Gauss assure que $\phi(\vec{E}) = Q/\varepsilon_0$ donc $Q = \varepsilon_0\phi(\vec{E}) = \varepsilon_0 4\pi r^2 E(r) = q\left(1+\dfrac{r}{a}\right)\mathrm{e}^{-r/a}$.

.....

2.18 a) Le gradient est dirigé dans le sens des potentiels croissants, orthogonalement aux équipotentielles.

.....

2.18 b) Comme $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$, la direction du champ est opposée à celle du gradient.

.....

2.19 a) Le segment AB a une pente constante $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{2a-0}{2a-a} = 2$. Or, cette dernière correspond à $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Ainsi, $\mathrm{d}y = 2\,\mathrm{d}x$.

.....

2.19 b) Pour $x > 0$, le champ $\vec{E}$ est orienté suivant $+\vec{e_x}$. Il s'agit donc du sens des potentiels décroissants. Comme $2a > a$, $V(2a) < V(a)$. $V(a)$ est donc le potentiel le plus élevé.

.....

2.19 c) Le champ étant porté par $\vec{e_x}$, on a $\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = E_x dx$. On a alors

$$V(\mathrm{A}) - V(\mathrm{B}) = \int_a^{2a} E_0\left(1-\mathrm{e}^{-x/a}\right)dx = E_0\left[x + a\mathrm{e}^{-x/a}\right]_a^{2a} = E_0 a(1+\mathrm{e}^{-2}-\mathrm{e}^{-1}).$$

.....

2.20 a) On a $\mathrm{AM}^2 = \|\overrightarrow{\mathrm{OM}} + \overrightarrow{\mathrm{AO}}\|^2 = \|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\|^2 + \|\overrightarrow{\mathrm{AO}}\|^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{OM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AO}} = r^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 - ar\cos(\theta)$.

.....

2.20 b) On a $\dfrac{1}{\mathrm{AM}} = \dfrac{1}{r}\left(1 + \left(\dfrac{a}{2r}\right)^2 - \dfrac{a\cos(\theta)}{r}\right)^{-1/2}$. On utilise ensuite l'approximation $(1+\varepsilon)^\alpha = 1 + \alpha\varepsilon$ à l'ordre 1 en ε autour de 0. À l'ordre 1 en $\dfrac{a}{r}$, on trouve $\dfrac{1}{\mathrm{AM}} \simeq \dfrac{1}{r}\left(1 + \dfrac{a\cos(\theta)}{2r}\right)$.

.....

2.20 c) De manière similaire, $\mathrm{BM}^2 = r^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + ar\cos(\theta)$ donc $\dfrac{1}{\mathrm{BM}} = \dfrac{1}{r}\left(1 + \left(\dfrac{a}{2r}\right)^2 + \dfrac{a\cos(\theta)}{r}\right)^{-1/2}$ et, à l'ordre 1 en $\dfrac{a}{r}$, on trouve $\dfrac{1}{\mathrm{BM}} \simeq \dfrac{1}{r}\left(1 - \dfrac{a\cos(\theta)}{2r}\right)$.

.....

2.20 d) On a $V(\mathrm{M}) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{\mathrm{AM}} - \dfrac{1}{\mathrm{BM}}\right) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(1 + \dfrac{a\cos(\theta)}{2r} - 1 + \dfrac{a\cos(\theta)}{2r}\right) = \dfrac{qa\cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$.

.....

2.21 a) Les lignes de champ électrostatique sont orientées vers les charges négatives.

.....

2.21 b) Sachant que $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$, le champ électrostatique pointe vers les valeurs de potentiel décroissantes, d'où le signe $+$.

.....

2.21 c) En appelant A_{100} et A_{200} les projetés respectifs de A sur les équipotentielles de 100 V et 200 V, alors la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V = -\dfrac{\partial V}{\partial z}\vec{e_z}$ (car ici $\vec{E}(\text{A})$ est selon $\vec{e_z}$) permet d'approximer la norme du champ en A :

$$E(\text{A}) = \frac{V(\text{A}_{200}) - V(\text{A}_{100})}{z_{\text{A}_{200}} - z_{\text{A}_{100}}} = \frac{200 - 100}{2{,}5\,\text{division} \times 40\,\text{cm} \cdot \text{division}^{-1}} = 1 \times 10^2\,\text{V} \cdot \text{m}^{-1}.$$

.....

2.21 d) Du fait de la verticalité de l'individu par rapport à l'horizontalité du sol, les équipotentielles sont davantage resserrées en B qu'en A ; ainsi, le champ électrostatique est plus intense en B qu'en A : c'est l'effet de pointe.

.....

2.22 a) Sachant que $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, une séparation des variables conduit à :

$$Q = \rho_0 \iint_{\mathcal{A}} \mathrm{d}S \int_{z=-H}^{z=H} \left(1 - \frac{z^2}{H^2}\right) \mathrm{d}z = \rho_0 \mathcal{A} \left[z - \frac{z^3}{3H^2}\right]_{-H}^{H} = 4\rho_0 \mathcal{A} H/3\,.$$

Le volume du pavé est $2H\mathcal{A}$ donc la charge volumique moyenne s'exprime comme : $\rho_\text{m} = 2\rho_0/3$.

.....

2.22 b) Sachant que $\mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$, une séparation des variables conduit à :

$$Q = \rho_0 \int_{r=0}^{r=R} \left(r - \frac{r^3}{R^2}\right) \mathrm{d}r \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \mathrm{d}\theta \int_{z=0}^{z=H} \mathrm{d}z = \rho_0 \left[\frac{r}{2} - \frac{r^4}{4R^2}\right]_0^R \big[\theta\big]_0^{2\pi} \big[z\big]_0^H = \rho_0 \pi R^2 H/2.$$

Le volume du cylindre est $\pi R^2 H$ donc la charge volumique moyenne s'exprime comme : $\rho_\text{m} = \rho_0/2$.

.....

2.22 c) Sachant que $\mathrm{d}V = r^2 \sin(\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$, une séparation des variables conduit à :

$$Q = \rho_0 R^2 \int_{r=0}^{r=+\infty} \mathrm{e}^{-r/R}\,\mathrm{d}r \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \mathrm{d}\varphi = \rho_0 R^2 \big[-R\mathrm{e}^{-r/R}\big]_0^{+\infty} \big[-\cos(\theta)\big]_0^{\pi} \big[\varphi\big]_0^{2\pi} = \rho_0 4\pi R^3.$$

Le volume de l'espace étant infini mais la charge totale finie, la charge volumique moyenne est nulle : $\rho_\text{m} = 0$.

.....

2.24 On a $\text{div}\,\vec{E}_1 = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(r\frac{\alpha}{r})}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial 0}{\partial \theta} + \dfrac{\partial 0}{\partial z} = 0 + 0 + 0.$

.....

2.26 a) Le gradient est dirigé dans le sens des potentiels croissants, orthogonalement aux équipotentielles.

.....

2.26 b) Comme $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$, la direction du champ est opposée à celle du gradient.

.....

2.27 a) Le potentiel s'annule en $r = r_0$, est positif pour $r < r_0$ et négatif pour $r > r_0$.

.....

2.27 b)

- Pour $0 \leqslant r \leqslant R$, l'expression fournie est celle d'un polynôme de degré 2 en r dont la représentation graphique est une parabole. Ici, le coefficient devant r^2 est négatif donc la parabole est orientée vers les valeurs négatives.
- Pour $r \geqslant R$, l'expression fournie est une fonction inverse dont la représentation graphique est une branche d'hyperbole.

Les deux expressions prennent la même valeur en $r = R$: la fonction est continue.

.....

2.27 c) L'équation fournie est celle d'une droite décroissante dont l'ordonnée à l'origine est non nulle : le potentiel décroît de manière affine. Seule la courbe (2) correspond à un tel cas.

.....

2.28 Sachant que $\mathrm{d}\tau = r^2 \sin(\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$, une séparation des variables conduit à :

$$\mathcal{E} = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0}\int_{r=R}^{r=R+h}\frac{\mathrm{d}r}{r^2}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\mathrm{d}\varphi = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_R^{R+h}\big[-\cos(\theta)\big]_0^{\pi}\big[\varphi\big]_0^{2\pi} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{h}{R(R+h)}.$$

.....

Fiche n° 3. Magnétostatique

Réponses

3.1 a) ..... a et d

3.1 b) ..... d

3.1 c) ..... a

3.2 ..... $2j_0 S \frac{b}{a}$

3.3 ..... $j_{s,0}\ell$

3.4 a) ..... d

3.4 b) ..... $4\pi R^2 j_r(R)$

3.5 ..... b et c

3.6 a) ..... a, c et d

3.6 b) ..... b, c et d

3.6 c) ..... a, c et d

3.7 a) ..... $4d\ell j_0$

3.7 b) ..... a et c

3.7 c) ..... b

3.8 a) ..... $-\mu_0 n_2 I_2 \vec{e_y}$

3.8 b) ..... d

3.9 ..... d

3.10 2

3.11 a) 2

3.11 b) ..... b

3.12 a) ..... $4Bd$

3.12 b) ..... $-2Bd$

3.12 c) ..... $\frac{7\pi}{2}Bd$

3.13 a) I

3.13 b) 0

3.13 c) ..... $-I$

3.13 d) ..... $4I$

3.14 a) ..... a et e

3.14 b) 0

3.15 a) 0

3.15 b) ..... $-Bax$

3.15 c) ..... $-Ba^2$

3.16 a) ..... b

3.16 b) ..... $\frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$

3.16 c) ..... $\frac{\mu_0 N I a}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a/2}{R-a/2}\right)$

3.17 a) ..... 1×10^1 T

3.17 b) ..... 4×10^2 Wb

3.17 c) ..... 3×10^2 Wb

3.18 a) c

3.18 b) ..... $\frac{\mu_0 \vec{\mathcal{M}}}{2\pi z^3}$

3.19 ..... d

3.20 a) ..... mB_{ext}

3.20 b) ..... $\frac{mB_{\text{ext}}}{Mg}$

3.21 a) ..... $-\vec{e_z}$

3.21 b) ..... $+\vec{e_z}$

3.21 c) ..... $+\vec{e_z}$

3.21 d) ..... $+\vec{e_z}$

3.22 a) ..... $\boxed{-\dfrac{\mu_0 I m}{2\pi r^2}\overrightarrow{e_r}}$

3.22 b) ..... (b)

3.23 ..... (c)

3.24 ..... (a)

3.25 a) ..... (d)

3.25 b) ..... $\boxed{-\dfrac{e}{T}\underbrace{\pi r^2 \overrightarrow{e_z}}_{\vec{S}}}$

3.25 c) ..... $\boxed{-\dfrac{e}{2m_\mathrm{e}}}$

3.25 d) ..... (b)

3.26 a) ..... $\boxed{\dfrac{\mu_0 I \ell}{2\pi}\ln\dfrac{R_2}{R_1}}$

3.26 b) ..... $\boxed{\dfrac{\mu_0}{2\pi}\ln\dfrac{R_2}{R_1}}$

3.26 c) ..... $\boxed{\dfrac{\mu_0 I^2 \ell}{4\pi}\ln\dfrac{R_2}{R_1}}$

3.26 d) ..... $\boxed{\dfrac{\mu_0}{2\pi}\ln\dfrac{R_2}{R_1}}$

Corrigés

3.1 a) L'intensité du courant s'exprime en fonction des densités surfacique et volumique de courant grâce aux relations $I = \iint \vec{j}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ et $I = \int \vec{j_\mathrm{s}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$.

.....

3.1 b) On note j la norme du vecteur $\vec{j}$. On a $I = \iint \vec{j}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ donc $\mathrm{I} = [j]\times\mathrm{L}^2$ et donc $[j] = \mathrm{I}\cdot\mathrm{L}^{-2}$.

.....

3.1 c) On note j_s la norme du vecteur $\vec{j_\mathrm{s}}$. On a $I = \int \vec{j_\mathrm{s}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ donc $\mathrm{I} = [j_\mathrm{s}]\times\mathrm{L}$ et donc $[j_\mathrm{s}] = \mathrm{I}\cdot\mathrm{L}^{-1}$.

.....

3.2 On a $I = \iint \vec{j}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iint j_0\overrightarrow{e_z}\cdot\mathrm{d}S\overrightarrow{e_z} = \int_0^a j_0\dfrac{b}{r}2\pi r\,\mathrm{d}r = 2\pi j_0 b\times a$, soit $I = 2j_0 S\dfrac{b}{a}$, avec $S = \pi a^2$.

.....

3.3 On a $I = \int \vec{j_\mathrm{s}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \int_0^\ell j_{\mathrm{s},0}\overrightarrow{e_\theta}\cdot\mathrm{d}z\overrightarrow{e_\theta} = \int_0^\ell j_{\mathrm{s},0}\,\mathrm{d}z = j_{\mathrm{s},0}\ell$.

.....

3.4 a) Le courant de particules chargées est radial : le vecteur densité de courant électrique $\vec{j}$ est radial, c'est-à-dire porté par $\overrightarrow{e_r}$: $\vec{j} = j_r(r,\theta,\varphi)$. Aussi, l'émission est isotrope donc il y a invariance de la distribution de courant électrique par rotation autour du point O : la composante j_r n'est une fonction que de r. Il vient : $\vec{j} = j_r(r)\overrightarrow{e_r}$.

.....

3.4 b) L'intensité du courant électrique traversant une surface élémentaire de vecteur surface élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}S} = r^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\overrightarrow{e_r}$ est $\mathrm{d}I_r = \vec{j}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = j_r(r)r^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$. Cette grandeur est uniforme sur une sphère de rayon R (de surface $4\pi R^2$) donc $I_R = 4\pi R^2 j_r(R)$.

.....

3.5 Les plans $(x\mathrm{O}y)$ et $(x\mathrm{O}z)$ sont des plans d'antisymétrie de la distribution car les courants de la distribution sont répartis de manière strictement opposée de part et d'autre de chacun de ces plans. Par ailleurs, la longueur du solénoïde n'intervient pas dans l'étude des symétries d'une distribution, mais doit être considérée lors d'une étude de ses invariances.

.....

3.6 a) En tout point M du plan $(x\mathrm{O}y)$, plan d'antisymétrie pour la distribution, le champ magnétostatique appartient à ce plan. C'est bien le cas pour le point O et les différents points P_i. Il est alors possible d'écrire : $\vec{B}(\mathrm{M}) = B_x(\mathrm{M})\vec{e_x} + B_y(\mathrm{M})\vec{e_y}$. Par ailleurs, le vecteur $\vec{e_z}$ est bien normal au plan $(x\mathrm{O}y)$.

.....

3.6 b) Le vecteur $\vec{e_x}$ est bien normal au plan $(y\mathrm{O}z)$. En tout point M du plan $(y\mathrm{O}z)$, plan de symétrie pour la distribution, le champ magnétostatique est perpendiculaire à ce plan, donc est selon $\pm\vec{e_x}$. Il est alors possible d'écrire : $\vec{B}(\mathrm{M}) = B_x(\mathrm{M})\vec{e_x}$. Les différents points P_i n'appartiennent pas à ce plan, donc rien ne peut en être déduit sur le champ en ces points.

.....

3.6 c) Il faut bien préciser que c'est en tout point M du plan $(x\mathrm{O}z)$, plan de symétrie pour la distribution, que le champ magnétostatique est perpendiculaire à ce plan. C'est bien le cas pour le point O mais pas pour les différents points P_i (qui n'appartiennent pas à ce plan). Il est alors possible d'écrire : $\vec{B}(\mathrm{M}) = B(\mathrm{M})\vec{e_y}$.

Le point O appartient aux plans de symétrie $(x\mathrm{O}z)$ et $(y\mathrm{O}z)$ donc le champ en ce point doit être perpendiculaire à ces deux plans : il est nécessairement nul.

Puisque le plan $(x\mathrm{O}y)$ est un plan d'antisymétrie pour la distribution, en tout point de ce plan le champ magnétostatique appartient à ce plan. C'est bien le cas pour les différents points P_i. Il est alors possible d'écrire :

$$\vec{B}(\mathrm{P}_i) = B_x(\mathrm{P}_i)\vec{e_x} + B_y(\mathrm{P}_i)\vec{e_y}.$$

De plus, puisque le plan $(y\mathrm{O}z)$ est un plan de symétrie pour la distribution, c'est un plan d'antisymétrie pour le champ magnétostatique. Tout cela permet alors d'écrire : $B_y(\mathrm{P}_2) = -B_y(\mathrm{P}_1)$ et $B_x(\mathrm{P}_2) = B_x(\mathrm{P}_1)$, mais pas $\vec{B}(\mathrm{P}_2) = -\vec{B}(\mathrm{P}_1)$! En bref, il est aussi possible d'écrire : $\vec{B}(\mathrm{P}_2) = -\mathrm{sym}\big(\vec{B}(\mathrm{P}_1)\big)$, où « sym » représente l'opération de symétrie par rapport au plan $(y\mathrm{O}z)$.

.....

3.7 a) On a $I = \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_{S} j_0\vec{e_x} \cdot \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\vec{e_x} = j_0 \times 2\ell \times 2d = 4j_0\ell d$.

.....

3.7 b) Le vecteur densité volumique de courant est $\vec{j} = j_0\vec{e_x}$ et j_0 est constant donc la distribution est invariante par translation suivant $(\mathrm{O}x)$ et $(\mathrm{O}y)$. La couche étant finie, elle n'est pas invariante par translation suivant $(\mathrm{O}z)$, et encore moins par rotation autour de cet axe, le vecteur $\vec{j}$ étant porté par $\vec{e_x}$.

.....

3.7 c) La distribution est invariante par translation suivant les axes $(\mathrm{O}x)$ et $(\mathrm{O}y)$, donc la composante B_y du champ ne dépend que de z.

.....

3.8 a) En tenant compte du sens du courant, on a $\vec{B_2}(\mathrm{O}) = -\mu_0 n_2 I_2\vec{e_y}$, où n_2 est le nombre de spires par unité de longueur du solénoïde (2).

.....

3.8 b) D'après le théorème de superposition, on a $\vec{B}(\mathrm{O}) = \vec{B_1}(\mathrm{O}) + \vec{B_2}(\mathrm{O})$ donc $\vec{B}(\mathrm{O}) = \mu_0(n_1 I_1\vec{e_x} - n_2 I_2\vec{e_y})$.

.....

3.9 Sachant que la force magnétique s'exprime comme $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ alors le produit qvB est homogène à une force. Si l'égalité $B = \dfrac{mv}{qR}$ est vraisemblable alors $qv \times B = qv \times \dfrac{mv}{qR} = \dfrac{mv^2}{R}$ serait homogène à une force. Or, mv^2 est homogène à une énergie puisque l'énergie cinétique s'exprime comme $\dfrac{mv^2}{2}$. De plus, d'après l'expression du travail élémentaire $\delta W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$ d'une force $\vec{F}$, une énergie divisée par une longueur correspond à une force. Finalement, le rapport $\dfrac{mv^2}{R}$ est donc bien homogène à une force et la relation $B = \dfrac{mv}{qR}$ est vraisemblable du point de vue de l'analyse dimensionnelle. Bien sûr, d'autres raisonnements sont possibles en se fondant sur d'autres relations !

.....

3.10 Le champ magnétique est linéaire pour $0 < r < a$ et hyperbolique pour $r > a$.

.....

3.11 a) Sachant que $B_y = kx \neq 0$ pour tout $\mathrm{M}(x, y, z)$ alors le vecteur champ magnétostatique ne peut pas être constamment parallèle à $\overrightarrow{e_x}$, ce qui élimine la carte de champ 3. En prenant les points de l'espace où $x = 0$, le vecteur champ magnétostatique doit s'écrire comme $\overrightarrow{B}(\mathrm{M}) = ky\overrightarrow{e_x}$: les vecteurs champs le long de cette ligne doivent être perpendiculaires à cette ligne. Parmi les cartes de champ 1, 2 et 4 restantes, seule la 2 possède cette propriété.

Autre méthode possible : En prenant les points de l'espace où $y = 0$, le vecteur champ magnétostatique doit s'écrire comme $\overrightarrow{B}(\mathrm{M}) = kx\overrightarrow{e_y}$: les vecteurs champs le long de cette ligne doivent être perpendiculaires à cette ligne. Seule la carte de champ 2 possède cette propriété.

.....

3.11 b) Le flux magnétostatique est conservatif donc le resserrement des lignes de champ constaté de M à N permet d'affirmer que le champ magnétostatique est plus intense au point N qu'au point M.

.....

3.12 a) Le calcul de la circulation du champ magnétostatique de A à C se décompose en deux.

- D'une part, sur [AB] : on a $\mathcal{C}_{\mathrm{AB}} = \displaystyle\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = 0$ (chemin perpendiculaire aux lignes de champ).
- D'autre part, sur [BC] : on a
$$\mathcal{C}_{\mathrm{BC}} = \int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = 4Bd \text{ (chemin parallèle aux lignes de champ).}$$

.....

3.12 b) D'une part, sur [AB] : $\mathcal{C}_{\mathrm{AB}} = \displaystyle\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = -8Bd$. Seule la projection de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ sur la ligne de champ doit être prise en compte. Le signe moins provient du sens de $\overrightarrow{B}$ par rapport à celui de la projection de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$. D'autre part, sur [BC] : $\mathcal{C}_{\mathrm{BC}} = \displaystyle\int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = 6Bd$.

.....

3.12 c) D'une part, sur [AB] : $\mathcal{C}_{\mathrm{AB}} = \displaystyle\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \frac{7\pi d}{2}B$. Le chemin [AB] est un demi-cercle de longueur $\dfrac{7\pi d}{2}$. D'autre part, sur [BC] : $\mathcal{C}_{\mathrm{BC}} = \displaystyle\int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = 0$ (chemin perpendiculaire aux lignes de champ).

.....

3.13 a) Le contour enlace le fil. L'orientation du contour et le sens de I sont tels que $I_{\mathrm{enl}} = +I$.

.....

3.13 b) Le contour n'enlace pas le fil donc $I_{\mathrm{enl}} = 0$, quels que soient l'orientation du contour et le sens de I.

.....

3.13 c) Le contour enlace le fil. L'orientation du contour et le sens de I sont tels que $I_{\mathrm{enl}} = -I$.

.....

3.13 d) Le fil est positionné de façon telle que le courant passe quatre fois « à l'intérieur » du contour. L'orientation du contour et le sens de I sont tels que $I_{\mathrm{enl}} = +4I$.

.....

3.14 a) Le produit scalaire $\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$ est positif lorsque le champ $\overrightarrow{B}$ et le vecteur surface élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ (donné par l'orientation de la surface) pointent globalement dans la même direction (ils forment ainsi un angle aigu, c'est-à-dire compris entre 0 et 90°).

Pour le cas a, le champ $\overrightarrow{B}$ est vertical et vers le haut. De même, le vecteur surface élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ est vertical et orienté vers le haut (d'après l'orientation du contour). Finalement : $\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} > 0$, soit $\phi > 0$.

Pour le cas (b), le champ $\vec{B}$ est vertical et vers le bas. Par contre, le vecteur surface élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ est vertical et orienté vers le haut (d'après l'orientation du contour). Finalement : $\vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} < 0$, soit $\phi < 0$.

Pour le cas (c), le champ $\vec{B}$ est vertical et vers le haut. Par contre, le vecteur surface élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ est vertical et orienté vers le bas (d'après l'orientation du contour). Finalement : $\vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} < 0$, soit $\phi < 0$.

Pour le cas (e), le champ $\vec{B}$ pointe globalement vers le bas. Par ailleurs, le vecteur surface élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ est vertical et orienté vers le bas (d'après l'orientation du contour). Finalement : $\vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} > 0$, soit $\phi > 0$.

Pour le cas (f), le champ $\vec{B}$ pointe globalement vers le haut. Par ailleurs, le vecteur surface élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ est vertical et orienté vers le bas (d'après l'orientation du contour). Finalement : $\vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} < 0$, soit $\phi < 0$.

3.14 b) Pour le cas (d), le champ $\vec{B}$ est horizontal. Par contre, le vecteur surface élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ est vertical. Finalement : $\vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = 0$, soit $\phi = 0$. Aucune ligne de champ ne passe à travers la surface orientée, donc le flux est nécessairement nul.

3.15 a) À ce sens de parcours de la spire est associé le vecteur normal $\vec{n}$ opposé au champ magnétostatique. D'où $\phi(\vec{B}) = \iint_\Sigma \vec{B} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S = -\iint_\Sigma B\,\mathrm{d}S$ en notant Σ l'intersection entre le plan de la spire et la zone de champ.

Pour $x < 0$, on a donc $\phi(\vec{B}) = 0$.

3.15 b) Le champ $\vec{B}$ est uniforme donc on a $\phi(\vec{B}) = -B\Sigma = -Bax$.

3.15 c) Ici, on a $\phi(\vec{B}) = -B\Sigma = -Ba^2$.

3.16 a) Les N spires du tore traversent la surface délimitée par le cercle de centre O et de rayon $R - \dfrac{a}{2} < r < R + \dfrac{a}{2}$. Le courant enlacé vaut donc $I_{\mathrm{enl}} = NI$.

3.16 b) Sur le contour fermé choisi, r et $B(r)$ sont constants. Il vient :

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{\mathrm{d}l} = \oint B(r)\vec{e_\theta} \cdot r\,\mathrm{d}\theta\vec{e_\theta} = 2\pi r B(r).$$

D'après le théorème d'Ampère, on a $2\pi r B(r) = \mu_0 I_{\mathrm{enl}}$ et donc $B(r) = \dfrac{\mu_0 NI}{2\pi r}$.

3.16 c) On a $\phi(\vec{B}) = \iint \vec{B} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S = \displaystyle\int_{R-a/2}^{R+a/2} \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}\,\mathrm{d}r \int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}z = \frac{\mu_0 NIa}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a/2}{R-a/2}\right)$.

3.17 a) On a $B = \mu_0\mu_\mathrm{r}\dfrac{N}{\ell}I$. Donc, $B = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{H \cdot m^{-1}} \times 4\,000 \times \dfrac{1\,000}{10 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}} \times 200 \times 10^{-3}\,\mathrm{A} \approx 1 \times 10^1\,\mathrm{T}$.

3.17 b) On a $\phi = NBS$. Donc, $\phi = 1000 \times 1 \times 10^1\,\mathrm{T} \times (20 \times 10^{-2}\,\mathrm{m})^2 = 4 \times 10^2\,\mathrm{Wb}$.

3.17 c) Le champ magnétostatique est un champ à flux conservatif. Or, le circuit magnétique joue le rôle d'un tube de champ, donc la « loi des nœuds magnétique » appliquée à la jonction qui surmonte (S_1) donne : $\phi = \phi_1 + \phi_2$, soit $\phi_1 = \phi - \phi_2 = \phi - \dfrac{1}{4}\phi = \dfrac{3}{4}\phi$. Donc, $\phi_1 = \dfrac{3}{4} \times 4 \times 10^2\,\mathrm{Wb} = 3 \times 10^2\,\mathrm{Wb}$.

3.18 a) Pour une boucle de courant plane, de surface S et parcourue par un courant d'intensité I (ce qui permet de définir le vecteur surface $\vec{S}$), le moment magnétique est défini par la relation $\vec{\mathcal{M}} = I\vec{S}$. Pour une spire de rayon R et d'axe (Oz), le vecteur surface a alors pour expression $\vec{S} = S\vec{e_z} = \pi R^2\vec{e_z}$, donc $\vec{\mathcal{M}} = \pi R^2 I\vec{e_z}$.

.....

3.18 b) Dans le cadre de l'approximation dipolaire : $z \gg R$ donc $R^2 + z^2 = z^2$. Le champ magnétostatique s'écrit alors : $\vec{B}(\mathrm{M}) = \dfrac{\mu_0 I R^2}{2z^3}\vec{e_z}$ ou encore $\vec{B}(\mathrm{M}) = \dfrac{\mu_0\vec{\mathcal{M}}}{2\pi z^3}$.

.....

3.19 Des valeurs particulières de θ, telles $\theta = 0$ ou $\theta = \pi/2$, et l'étude de l'orientation du champ magnétostatique pour ces angles, permettent de conclure que $\vec{B}(\mathrm{M}) = \dfrac{\mu_0 m}{4\pi r^3}(2\cos(\theta)\vec{e_r} + \sin(\theta)\vec{e_\theta})$.

.....

3.20 a) Le moment du couple magnétique s'exprime comme $\Gamma_z = +mB_{\text{ext}}$ à l'équilibre, car $\vec{m}$ et $\overrightarrow{B_{\text{ext}}}$ sont orthogonaux.

.....

3.20 b) À l'équilibre, le théorème du moment cinétique donne : $0 = mB_{\text{ext}} - dMg$, soit $d = \dfrac{mB_{\text{ext}}}{Mg}$.

.....

3.21 a) D'après la relation $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$, le moment $\vec{\Gamma}$ est colinéaire à $-\vec{e_z}$ et de même sens.

.....

3.21 b) D'après la relation $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$, le moment $\vec{\Gamma}$ est colinéaire à $+\vec{e_z}$ et de même sens.

.....

3.21 c) D'après la relation $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$, le moment $\vec{\Gamma}$ est colinéaire à $+\vec{e_z}$ et de même sens.

.....

3.21 d) D'après la relation $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$, le moment $\vec{\Gamma}$ est colinéaire à $+\vec{e_z}$ et de même sens.

.....

3.22 a) Lorsque le dipôle est aligné sur le champ (même direction et même sens) : $\vec{m} \cdot \overrightarrow{B_{\text{ext}}} = m\left\|\overrightarrow{B_{\text{ext}}}\right\|$, soit $\vec{F} = +\overrightarrow{\text{grad}}\left(\dfrac{\mu_0 I m}{2\pi r}\right) = -\dfrac{\mu_0 I m}{2\pi r^2}\vec{e_r}$.

.....

3.22 b) La force $\vec{F}$ est dirigée dans la direction et le sens du gradient de la norme du champ magnétostatique. Le dipôle est donc attiré vers les régions de champ plus intense. On peut aussi remarquer que le dipôle a tendance à se déplacer de manière à minimiser son énergie potentielle.

.....

3.23 La circulation du champ magnétostatique le long d'un cercle de rayon R au sein duquel passe par son centre une ligne infinie parcourue par un courant électrique stationnaire est $2\pi RB$. Le théorème d'Ampère appliqué au cercle permet d'écrire $2\pi RB = \mu_0 I$: la circulation du champ magnétostatique est homogène au produit d'une intensité électrique par une perméabilité magnétique (du vide). Ainsi, seule l'expression $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi R}$ est valide.

.....

3.24 Le flux magnétique traversant un solénoïde comportant N spires de section S est $\phi = NBS$. Or, l'inductance propre L permet d'exprimer le flux en fonction de l'intensité : $\phi = LI$. Il vient : $B = \dfrac{LI}{NS}$.

.....

3.25 a) En un point de l'orbite circulaire, la charge $-e$ de l'électron passe à chaque période de révolution T, d'où le débit de charge $I = -e/T$.

.....

3.25 b) La norme du vecteur surface $\vec{S}$ est l'aire du disque de rayon r et de centre O : $\left\|\vec{S}\right\| = \pi r^2$. De plus, le vecteur surface $\vec{S}$ est orienté par la règle de la main droite, selon le sens du vecteur vitesse de l'électron (c'est aussi le sens choisi algébriquement pour l'intensité I). Il vient : $\vec{m} = -\dfrac{e}{T}\underbrace{\pi r^2 \vec{e_z}}_{\vec{S}}$.

.....

3.25 c) Par comparaison des expressions $\vec{m} = -\dfrac{e}{T}\vec{S}$ et $\vec{\sigma} = \dfrac{2m_\mathrm{e}}{T}\vec{S}$, il vient : $\vec{m} = \gamma\vec{\sigma}$, avec $\gamma = -\dfrac{e}{2m_\mathrm{e}}$.

.....

3.25 d) On a $\|\vec{m}\| = \underbrace{|\gamma|}_{+\frac{e}{2m_\mathrm{e}}}\underbrace{\|\vec{\sigma}\|}_{n\hbar}$, soit $\|\vec{m}\| = n\underbrace{\dfrac{e\hbar}{2m_\mathrm{e}}}_{\mu_\mathrm{B}}$. Donc,

$$\mu_\mathrm{B} = \frac{1{,}602\times10^{-19}\,\mathrm{C}\times\frac{6{,}63\times10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}}{2\pi}}{2\times9{,}11\times10^{-31}\,\mathrm{kg}} = 9{,}28\times10^{-24}\,\mathrm{A\cdot m^2}.$$

Attention : la réponse (a) n'est pas correcte car $\gamma = -\dfrac{e}{2m_\mathrm{e}}$, donc $\mu_\mathrm{B} = -\hbar\gamma$, et non pas $\mu_\mathrm{B} = +\hbar\gamma$. Par ailleurs, la réponse (c) n'est pas correcte car l'unité indiquée correspond à une énergie, et non pas à un moment magnétique !

.....

3.26 a) Le flux propre est $\Phi_\mathrm{p} = \iint \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \displaystyle\int_{R_1}^{R_2} B\vec{e_\theta}\cdot\ell\,\mathrm{d}r\vec{e_\theta} = \int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\ell\,\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ell\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mu_0 I\ell}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$.

.....

3.26 b) L'inductance propre par unité de longueur est $\Lambda = \dfrac{L}{\ell} = \dfrac{\Phi_\mathrm{p}}{\ell I} = \dfrac{\mu_0}{2\pi}\ln\dfrac{R_2}{R_1}$.

.....

3.26 c) La composante du champ ne dépendant que de r, on peut découper le volume en portions d'espace comprises entre 2 cylindres, le premier de rayon r, le deuxième de rayon $r + \mathrm{d}r$, tous les deux de hauteur ℓ. Le volume élémentaire vaut alors : $\mathrm{d}\tau = 2\pi\ell r\,\mathrm{d}r$. L'énergie magnétique correspondant à une portion de longueur ℓ du câble est alors :

$$W_\mathrm{m} = \frac{1}{2\mu_0}\iiint B^2\,\mathrm{d}\tau = \frac{\ell}{2\mu_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu_0^2 I^2}{4\pi^2 r^2}2\pi r\,\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I^2\ell}{4\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}.$$

.....

3.26 d) L'inductance propre par unité de longueur est $\Lambda = \dfrac{L}{\ell} = \dfrac{2W_\mathrm{m}}{\ell I^2} = \dfrac{\mu_0}{2\pi}\ln\dfrac{R_2}{R_1}$.

.....

Fiche n° 4. Équations de Maxwell

Réponses

4.1 a) ..... d

4.1 b) ..... $I \cdot T$

4.1 c) ..... $\dfrac{M}{I \cdot T^2}$

4.1 d) ..... $\dfrac{M \cdot L}{I \cdot T^3}$

4.1 e) ..... $\dfrac{M \cdot L}{I \cdot T^3}$

4.2 a) ..... b

4.2 b) c

4.2 c) ..... $1{,}1 \times 10^{12}$

4.2 d) ..... $1{,}1 \times 10^{1}$

4.2 e) ..... $1{,}1 \times 10^{-8}$

4.3 a) .... $E_0 \cos[\omega t - kx]\overrightarrow{e_y} + E_0 \sin[\omega t - kx]\overrightarrow{e_z}$

4.3 b) ..... $-E_0 \exp[\mathrm{i}(\omega t + kz)]\overrightarrow{e_x}$ $+\mathrm{i}E_0 \exp[\mathrm{i}(\omega t + kz)]\overrightarrow{e_y}$

4.4 a) ..... Nulle

4.4 b) ..... Positive

4.4 c) ..... Négative

4.4 d) ..... Negative

4.4 e) ..... Nulle

4.4 f) ..... Positive

4.5 a) ..... Nulle

4.5 b) ..... Positive

4.5 c) ..... Négative

4.5 d) ..... Nulle

4.5 e) ..... Positive

4.5 f) ..... Négative

4.6 a) ..... $\mu_0 \operatorname{div} \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \operatorname{div} \vec{E}}{\partial t}$

4.6 b) ..... $\mu_0 \operatorname{div} \vec{j} + \mu_0 \dfrac{\partial \rho}{\partial t}$

4.6 c) ..... b

4.7 a) ..... m

4.7 b) 0

4.7 c) ..... Oui

4.7 d) ..... d

4.7 e) ..... $\vec{0}$

4.8 a) ..... $r\omega\overrightarrow{e_\theta}$

4.8 b) ..... $-\omega y\overrightarrow{e_x} + \omega x\overrightarrow{e_y}$

4.8 c) ..... $2\omega\overrightarrow{e_z}$

4.8 d) ..... $r\omega$

4.8 e) ..... $\dfrac{a^2}{r}\omega$

4.9 a) ..... $3a - 5br^2$

4.9 b) ..... b

4.9 c) ..... $4\pi R^3(a - bR^2)$

4.9 d) c

4.9 e) ..... $4\pi R^3(a - bR^2)$

4.10 a) ..... oui

4.10 b) ..... non

4.10 c) ..... oui

4.11 a) ..... $E_0 \dfrac{k}{\omega} \cos(\omega t - kz + \varphi)\overrightarrow{e_y}$

4.11 b) .... $E_0\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \sinh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha z) \exp(-\alpha t)\overrightarrow{e_y}$

4.11 c) ..... $-\dfrac{2E_0}{k^2r^3} \displaystyle\int \cos(\omega t)\overrightarrow{e_\theta}\,\mathrm{d}t$

4.12 a) ..... $\boxed{B_0 \dfrac{k}{\varepsilon_0 \mu_0 \omega} \sin(\omega t - kz + \varphi)\vec{e_x}}$

4.12 b) ..... $\boxed{\dfrac{B_0}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \cosh(\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}\alpha z) \exp(-\alpha t)\vec{e_x}}$

4.12 c) ..... $\boxed{\dfrac{c^3 B_0}{k^2 \omega r^3} \cos(\omega t)\vec{e_z}}$

4.13 a) ..... $\boxed{\text{a}}$

4.13 b) ..... $\boxed{-\mu_0 n \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \dfrac{r}{2}\vec{e_\theta}}$

4.13 c) ..... $\boxed{-\mu_0 n \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \dfrac{R^2}{2r}\vec{e_\theta}}$

4.13 d) ..... $\boxed{\text{c}}$

4.13 e) ..... $\boxed{-\mu_0 n \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \dfrac{r}{2}\vec{e_\theta}}$

4.13 f) ..... $\boxed{-\mu_0 n \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \dfrac{R^2}{2r}\vec{e_\theta}}$

4.14 a) .... $\boxed{\dfrac{E_0 B_0}{\mu_0} \cos(\omega t - kz + \varphi) \sin(\omega t - kz + \varphi)\vec{e_z}}$

4.14 b) .... $\boxed{-\dfrac{E_0 B_0}{\mu_0} \cosh(\beta z) \sinh(\beta z) \exp(-2\alpha t)\vec{e_x}}$

4.15 a) ..... $\boxed{-\dfrac{E_{0y}}{c} \cos(k\,z - \omega\,t + \psi_2)\,\vec{e_x} + \dfrac{E_{0x}}{c} \cos(k\,z - \omega\,t + \psi_1)\,\vec{e_y}}$

4.15 b) ..... $\boxed{\dfrac{E_x^2 + E_y^2}{\mu_0\,c}\,\vec{e_z}}$

4.15 c) ..... $\boxed{E_{0x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\,z - \omega\,t + \psi_1)}\,\vec{e_x} + E_{0y}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\,z - \omega\,t + \psi_2)}\,\vec{e_y}}$

4.15 d) ..... $\boxed{\dfrac{1}{c}\Big(E_{0x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\,z - \omega\,t + \psi_1)}\,\vec{e_y} - E_{0y}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\,z - \omega\,t + \psi_2)}\,\vec{e_x}\Big)}$

4.15 e) ..... $\boxed{\dfrac{1}{c}\Big(E_{0x}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k\,z - \omega\,t + \psi_1)}\,\vec{e_y} - E_{0y}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k\,z - \omega\,t + \psi_2)}\,\vec{e_x}\Big)}$

4.15 f) ..... $\boxed{\dfrac{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}{2\,\mu_0\,c}\,\vec{e_z}}$

4.15 g) ..... $\boxed{\text{a}}$

4.16 a) ..... $\boxed{\dfrac{LQ^2}{2\varepsilon_0 S}}$

4.16 b) ..... $\boxed{-\dfrac{R}{2\varepsilon_0 S^2} Q \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\vec{e_r}}$

4.16 c) ..... $\boxed{-\dfrac{L}{\varepsilon_0 S} Q \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}}$

4.16 d) ..... $\boxed{\text{c}}$

4.16 e) ..... $\boxed{\text{b}}$

Corrigés

4.1 a) Les trois premières équations correspondent aux équations de Maxwell-Gauss, Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère. La dernière est une formulation de l'équation de conservation de la charge, qui n'est pas une des équations de Maxwell mais une conséquence de deux d'entre elles.

.....

4.1 b) La définition de l'intensité du courant électrique est : $i(t) = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$, donc $\dim(q) = I \cdot T$.

.....

4.1 c) Par analyse dimensionnelle de la force de Lorentz, on a :

$$\dim(\vec{B}) = \frac{\dim(\vec{F})}{\dim(q)\dim(\vec{v})} = \frac{M \cdot L \cdot T^{-2}}{I \cdot T \cdot L \cdot T^{-1}} = \frac{M}{I \cdot T^2}.$$

.....

4.1 d) Par analyse dimensionnelle de la force de Lorentz, on a : $\dim(\vec{E}) = \dfrac{\dim(\vec{F})}{\dim(q)} = \dfrac{M \cdot L \cdot T^{-2}}{I \cdot T} = \dfrac{M \cdot L}{I \cdot T^3}$.

.....

4.1 e) Par analyse dimensionnelle de l'équation de Maxwell-Faraday, on a :

$$\dim(\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E})) = \frac{\dim(\vec{E})}{L} = \frac{\dim(\vec{B})}{T} \qquad \text{donc} \qquad \dim(\vec{E}) = \frac{\dim(\vec{B})\cdot L}{T} = \frac{M\cdot I^{-1}\cdot T^{-2}\cdot L}{T} = \frac{M\cdot L}{I\cdot T^3}.$$

4.2 a) On a $\left\|\vec{j}_{\text{cond}}\right\| = \|\sigma E_0\cos(\omega t+\varphi)\| < \|\sigma E_0\|$ et $\left\|\vec{j}_{\text{dépl}}\right\| = \|-\varepsilon_0\omega E_0\sin(\omega t+\varphi)\| < \|\varepsilon_0\omega E_0\|$. Donc,

$$\alpha \text{ a pour ordre de grandeur } \frac{\sigma E_0}{\varepsilon_0\omega E_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega}.$$

4.2 b) On a $\alpha \gg 1 \iff f \ll \dfrac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0} = \dfrac{1\times 10^7\,\mathrm{S\cdot m^{-1}}}{2\pi\times 8{,}8\times 10^{-12}\,\mathrm{F\cdot m^{-1}}} = 1{,}8\times 10^{17}\,\mathrm{Hz}$.

4.2 c) On a $\alpha = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0\omega} = \dfrac{1{,}0\times 10^7\,\mathrm{S\cdot m^{-1}}}{8{,}8\times 10^{-12}\,\mathrm{F\cdot m^{-1}}\times 1{,}0\times 10^6\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}} = 1{,}1\times 10^{12} \gg 1$.

4.2 d) On a $\alpha = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0\omega} = \dfrac{1{,}0\times 10^{-4}\,\mathrm{S\cdot m^{-1}}}{8{,}8\times 10^{-12}\,\mathrm{F\cdot m^{-1}}\times 1{,}0\times 10^6\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}} = 1{,}1\times 10^{1}$, dont l'ordre de grandeur est 10.

4.2 e) On a $\alpha = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0\omega} = \dfrac{1{,}0\times 10^{-13}\,\mathrm{S\cdot m^{-1}}}{8{,}8\times 10^{-12}\,\mathrm{F\cdot m^{-1}}\times 1{,}0\times 10^6\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}} = 1{,}1\times 10^{-8} \ll 1$.

4.3 a) On a :

$$\begin{aligned}\underline{\vec{E}}_1 &= E_0\exp[\mathrm{i}(\omega t-kx)]\vec{e_y} - \mathrm{i}E_0\exp[\mathrm{i}(\omega t-kx)]\vec{e_z}\\ &= E_0(\cos(\omega t-kx)+\mathrm{i}\sin(\omega t-kx))\vec{e_y} - \mathrm{i}E_0(\cos(\omega t-kx)+\mathrm{i}\sin(\omega t-kx))\vec{e_z}.\end{aligned}$$

Donc, $\vec{E}_1 = \mathsf{Re}(\underline{\vec{E}}_1) = E_0\cos[\omega t-kx]\vec{e_y} + E_0\sin[\omega t-kx]\vec{e_z}$.

4.5 a) On peut estimer le rotationnel selon un axe en observant si le champ de vecteurs « tourne » dans le sens direct ou indirect. Si le champ de vecteurs ne « tourne » pas autour d'un axe alors le rotationnel est nul. Si le champ de vecteurs semble « tourner » dans le sens direct alors le rotationnel est positif ; dans le cas contraire, il est négatif.

4.6 a) Avec la relation de Maxwell-Ampère et le théorème de Schwarz, on a :

$$\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}) = \mathrm{div}\left(\mu_0\,\vec{j} + \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = \mu_0\ \mathrm{div}\ \vec{j} + \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial\,\mathrm{div}\,\vec{E}}{\partial t}.$$

4.6 b) Avec la relation de Maxwell-Gauss, on a :

$$\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}) = \mu_0\ \mathrm{div}\ \vec{j} + \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial(\frac{\rho}{\varepsilon_0})}{\partial t} = \mu_0\left(\mathrm{div}\ \vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t}\right).$$

4.6 c) Comme $\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}) = 0$, on obtient : $\mathrm{div}\ \vec{j} + \dfrac{\partial\rho}{\partial t} = 0$.

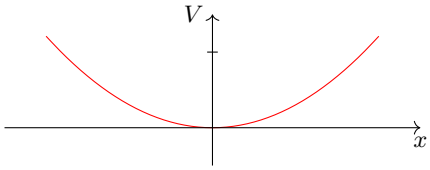
4.7 a) En utilisant l'homogénéité, on voit que a est une longueur, en mètres (m).

4.7 b) On a $\Delta V = \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \dfrac{V_0}{a^2}(2+4-6) = 0$.

4.7 c) L'équation de Poisson $\Delta V = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ est vérifiée en prenant $\rho = 0$ car l'énoncé impose un espace vide de charge.

.....

4.7 d) On a $V(x,0,0) = \dfrac{V_0}{a^2}x^2$: c'est une parabole.
L'allure en est donnée ci-contre :



.....

4.7 e) Le champ électrique est donné par :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{e_x} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{e_y} - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e_z} = 2\frac{V_0}{a^2}(-x\vec{e_x} - 2y\vec{e_y} + 3z\vec{e_z}).$$

En O, origine du repère, ce champ est nul.

.....

4.8 a) On a $\vec{v} = \omega\vec{e_z} \wedge (r\vec{e_r} + z\vec{e_z}) = r\omega\vec{e_\theta}$.

.....

4.8 b) On a $\vec{v} = \omega\vec{e_z} \wedge (x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}) = -\omega y\vec{e_x} + \omega x\vec{e_y}$.

.....

4.8 c) En coordonnées cartésiennes, on obtient : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = 2\omega\vec{e_z}$.

.....

4.8 d) On simplifie l'expression $\oint_\Gamma \vec{v}_{(\text{M})} \cdot \vec{\mathrm{d}\ell}_{(\text{M})} = \iint_\Sigma \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v})_{(\text{M})} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S_{(\text{M})}$ en considérant $\vec{\mathrm{d}\ell} = r\,\mathrm{d}\theta\vec{e_\theta}$ et $\vec{n}\,\mathrm{d}S_{(\text{M})} = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\vec{e_z}$; d'où $v2\pi r = \displaystyle\int_0^r 4\omega\pi r\,\mathrm{d}r$, soit $v = r\omega$.

.....

4.8 e) On simplifie l'expression $\oint_\Gamma \vec{v}_{(\text{M})} \cdot \vec{\mathrm{d}\ell}_{(\text{M})} = \iint_\Sigma \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v})_{(\text{M})} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S_{(\text{M})}$ en considérant $\vec{\mathrm{d}\ell} = r\,\mathrm{d}\theta\vec{e_\theta}$ et $\vec{n}\,\mathrm{d}S_{(\text{M})} = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\vec{e_z}$; d'où $v2\pi r = \displaystyle\int_0^a 4\omega\pi r\,\mathrm{d}r + \int_a^r 0 \times 2\pi r\,\mathrm{d}r$, soit $v = \dfrac{a^2}{r}\omega$.

.....

4.9 a) On a $\text{div}\,\vec{A} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} = \dfrac{1}{r^2}(3ar^2 - 5br^4) = 3a - 5br^2$.

.....

4.9 c) On a :

$$\begin{aligned}
\oiint_{\text{sphère}} \vec{A} \cdot \vec{\mathrm{d}S} &= \iiint_{\text{boule}} \text{div}\,\vec{A}\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{r=0}^{r=R}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} (3a - 5br^2)r^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta \\
&= \big[\varphi\big]_0^{2\pi} \times \big[-\cos(\theta)\big]_0^{\pi} \times \big[ar^3 - br^5\big]_0^R \\
&= 4\pi R^3(a - bR^2).
\end{aligned}$$

.....

4.9 e) On a :

$$\oiint_{\text{sphère}} \vec{A} \cdot \vec{\mathrm{d}S} = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} (aR - bR^3)R^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta = 4\pi R^3(a - bR^2).$$

On retrouve bien le résultat de la question c).

.....

4.10 a) Il faut vérifier que les équations de Maxwell sont respectées les unes après les autres. On a :

- $\operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{\partial E_x}{\partial x} + \dfrac{\partial E_y}{\partial y} + \dfrac{\partial E_z}{\partial z} = 0$
- $\operatorname{div}\vec{B} = \dfrac{\partial B_x}{\partial x} + \dfrac{\partial B_y}{\partial y} + \dfrac{\partial B_z}{\partial z} = 0$
- $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = \left(\dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{e_x} + \left(\dfrac{\partial E_x}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial x}\right)\vec{e_y} + \left(\dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{e_z} = \dfrac{\partial E_y}{\partial x}\vec{e_z} = E_0 k \sin(\omega t - kx + \varphi_0)\vec{e_z}$

  et $\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -E_0 k \sin(\omega t - kx + \varphi_0)\vec{e_z}$
- Enfin,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} &= \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right)\vec{e_x} + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right)\vec{e_y} + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\vec{e_z}\\ &= -\frac{\partial B_z}{\partial x}\vec{e_y} = -\frac{E_0 k^2}{\omega}\sin(\omega t - kx + \varphi_0)\vec{e_y}\end{aligned}$$

et $\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -E_0\omega \sin(\omega t - kx + \varphi_0)\vec{e_y}$ donc $\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\dfrac{E_0 k^2}{\omega}\sin(\omega t - kx + \varphi_0)\vec{e_y}$

Les quatre équations de Maxwell sont respectées donc le champ électromagnétique peut exister.

.....

4.10 b) On a :

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\partial E_y}{\partial y} = -E_0 k \sin(\omega t + ky).$$

L'équation de Maxwell-Gauss dans le vide n'est pas respectée donc ce champ électromagnétique ne peut pas exister.

.....

4.10 c) On a :

- $\operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{\partial E_x}{\partial x} + \dfrac{\partial E_y}{\partial y} + \dfrac{\partial E_z}{\partial z} = 0$
- $\operatorname{div}\vec{B} = \dfrac{\partial B_x}{\partial x} + \dfrac{\partial B_y}{\partial y} + \dfrac{\partial B_z}{\partial z} = 0$
- $$\begin{aligned}\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} &= \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{e_x} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\vec{e_y} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{e_z} = -\frac{\partial E_y}{\partial z}\vec{e_x} + \frac{\partial E_x}{\partial z}\vec{e_y}\\ &= E_2 k \sin(\omega t + kz + \varphi_2)\vec{e_x} - E_1 k \sin(\omega t + kz + \varphi_1)\vec{e_y}\end{aligned}$$

  et $\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -E_2 k \sin(\omega t + kz + \varphi_2)\vec{e_x} + E_1 k \sin(\omega t + kz + \varphi_1)\vec{e_y}$
- Enfin,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} &= \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right)\vec{e_x} + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right)\vec{e_y} + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\vec{e_z} = -\frac{\partial B_y}{\partial z}\vec{e_x} + \frac{\partial B_x}{\partial z}\vec{e_y}\\ &= -\frac{E_1 k^2}{\omega}\sin(\omega t + kz + \varphi_1)\vec{e_x} + \frac{E_2 k^2}{\omega}\sin(\omega t + kz + \varphi_2)\vec{e_y}\end{aligned}$$

et $\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -E_1\omega \sin(\omega t + kz + \varphi_1)\vec{e_x} - \omega E_2 \sin(\omega t + kz + \varphi_2)\vec{e_y}$ donc

$$\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{E_1 k^2}{\omega}\sin(\omega t + kz + \varphi_1)\vec{e_x} - \frac{E_2 k^2}{\omega}\sin(\omega t + kz + \varphi_2)\vec{e_y}$$

Les quatre équations de Maxwell sont respectées donc le champ électromagnétique peut exister.

.....

4.11 a) Le champ électrique est de la forme $\vec{E} = E_x(z,t)\vec{e_x}$ avec $E_x(z,t) = E_0\cos(\omega t - kz + \varphi)$.

D'après l'expression du rotationnel en coordonnées cartésiennes, on a :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = \frac{\partial E_x}{\partial z}\vec{e_y} = E_0 k\sin(\omega t - kz + \varphi)\vec{e_y}.$$

D'après l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\vec{B} = \int -\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E})\,\mathrm{d}t = -E_0 k\vec{e_y}\int \sin(\omega t - kx + \varphi)\,\mathrm{d}t = E_0\frac{k}{\omega}\cos(\omega t - kz + \varphi)\vec{e_y} + \overrightarrow{\mathrm{cste}}.$$

Comme le milieu est vide de charge et de courant, il n'y a aucun champ statique donc $\overrightarrow{\mathrm{cste}} = \vec{0}$.

.....

4.11 b) Le champ électrique est de la forme $\vec{E} = E_x(z,t)\vec{e_x}$ avec $E_x(z,t) = E_0\cosh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha z)\exp(-\alpha t)$.

D'après l'expression du rotationnel en coordonnées cartésiennes, on a :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = \frac{\partial E_x}{\partial z}\vec{e_y} = E_0\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha\sinh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha z)\exp(-\alpha t)\vec{e_y}.$$

D'après l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\vec{B} = \int -\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E})\,\mathrm{d}t = -E_0\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha\sinh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha z)\vec{e_y}\int \exp(-\alpha t)\,\mathrm{d}t = E_0\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\sinh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha z)\exp(-\alpha t)\vec{e_y} + \overrightarrow{\mathrm{cste}}.$$

Comme le milieu est vide de charge et de courant, il n'y a aucun champ statique donc $\overrightarrow{\mathrm{cste}} = \vec{0}$.

.....

4.11 c) Le champ électrique est de la forme $\vec{E} = E_z(r,t)\vec{e_z}$ avec :

$$E_x(z,t) = \frac{E_0}{(kr)^2}\cos(\omega t).$$

D'après l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques, on a :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial E_z}{\partial r}\vec{e_\theta} = \frac{2E_0}{k^2r^3}\cos(\omega t)\vec{e_\theta}.$$

D'après l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\vec{B} = \int -\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E})\,\mathrm{d}t = -\frac{2E_0}{k^2r^3}\int \cos(\omega t)\vec{e_\theta}\,\mathrm{d}t.$$

Comme $\vec{e_\theta}$ est un vecteur dont l'orientation dépend du temps (base cylindrique), on ne peut développer davantage le calcul car on ne connaît pas l'évolution temporelle de l'angle θ.

.....

4.12 a) Le champ magnétique est de la forme $\vec{B} = B_y(z,t)\vec{e_y}$ avec $B_y(z,t) = B_0\sin(\omega t - kz + \varphi)$.

D'après l'expression du rotationnel en coordonnées cartésiennes, on a :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{B}) = -\frac{\partial B_y}{\partial z}\vec{e_x} = B_0 k\cos(\omega t - kz + \varphi)\vec{e_x}.$$

D'après l'équation de Maxwell-Ampère vide de courant ($\vec{j} = \vec{0}$) :

$$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\int \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{B})\,\mathrm{d}t = \frac{B_0 k}{\varepsilon_0\mu_0}\vec{e_x}\int \cos(\omega t - kz + \varphi)\,\mathrm{d}t = \frac{B_0 k}{\varepsilon_0\mu_0\omega}\sin(\omega t - kz + \varphi)\vec{e_x} + \overrightarrow{\mathrm{cste}}.$$

Comme le milieu est vide de charge et de courant, il n'y a aucun champ statique donc $\overrightarrow{\mathrm{cste}} = \vec{0}$.

.....

4.12 b) Le champ magnétique est de la forme $\vec{B} = B_y(z,t)\vec{e_y}$ avec $B_y(z,t) = B_0 \sinh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha z)\exp(-\alpha t)$.

D'après l'expression du rotationnel en coordonnées cartésiennes, on a :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{B}) = -\frac{\partial B_y}{\partial z}\vec{e_x} = -B_0\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha\cosh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha z)\exp(-\alpha t)\vec{e_x}.$$

D'après l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\int \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{B})\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}B_0\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha\cosh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha z)\vec{e_x}\int \exp(-\alpha t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{B_0}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\cosh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha z)\exp(-\alpha t)\vec{e_x} + \overrightarrow{\mathrm{cste}}.\end{aligned}$$

Comme le milieu est vide de charge et de courant, il n'y a aucun champ statique donc $\overrightarrow{\mathrm{cste}} = \vec{0}$.

Ce champ électromagnétique $(\vec{E},\vec{B})$ est le même que celui de la question b) de l'entraînement précédent, en posant $E_0 = \dfrac{B_0}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$.

.....

4.12 c) Le champ magnétique est de la forme $\vec{B} = B_\theta(r,t)\vec{e_\theta}$ avec $B_\theta(r,t) = \dfrac{cB_0}{(kr)^2}\sin(\omega t)$.

D'après l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques, on a :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{B}) = \frac{1}{r}\frac{\partial rB_\theta}{\partial r}\vec{e_z} = -\frac{cB_0}{k^2r^3}\sin(\omega t)\vec{e_z}.$$

D'après l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\int \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{B})\,\mathrm{d}t = -\frac{cB_0}{\varepsilon_0\mu_0k^2r^3}\vec{e_z}\int \sin(\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{c^3B_0}{k^2\omega r^3}\cos(\omega t)\vec{e_z} + \overrightarrow{\mathrm{cste}}.$$

Comme le milieu est vide de charge et de courant, il n'y a aucun champ statique donc $\overrightarrow{\mathrm{cste}} = \vec{0}$. Contrairement aux cas précédents, on ne retrouve pas le champ de la question c) de l'entraînement précédent : ces champs électromagnétiques $(\vec{E},\vec{B})$ ne sont solutions ni d'une seule équation de Maxwell, ni de l'ensemble (équation de propagation !) donc il ne s'agit pas de champs électromagnétiques qui se propagent.

.....

4.13 a) Le solénoïde étant invariant par rotation autour de l'axe (Oz) et par translation le long du même axe, la norme du champ électrique ne dépend que de r.

.....

4.13 b) L'équation de Maxwell-Faraday est $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$. On calcule d'abord le rotationnel de $\vec{E}$. Le champ magnétique étant porté par (Oz), il reste : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial rE_\theta}{\partial r}\vec{e_z}$.

On calcule la dérivée du champ magnétique par rapport au temps pour $r < R$: $\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \mu_0 n\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\vec{e_z}$.

Enfin, on a $rE_\theta = -\mu_0 n\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\dfrac{r^2}{2}$ donc $E_\theta = -\mu_0 n\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\dfrac{r}{2}$.

.....

4.13 c) Le champ magnétique étant nul à l'extérieur du solénoïde, on a :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial rE_\theta}{\partial r} = 0 \qquad \text{donc} \qquad E_\theta = \frac{C}{r}$$

avec C une constante. Il reste à déterminer cette constante. Par continuité du champ électrique en $r = R$, on a :

$$\frac{C}{R} = -\mu_0 n\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\frac{R}{2} \qquad \text{donc} \qquad C = -\mu_0 n\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\frac{R^2}{2}.$$

Ainsi, on a $\vec{E} = -\mu_0 n\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\dfrac{R^2}{2r}\vec{e_\theta}$.

.....

4.13 d) La forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday est $\oint_\Gamma \vec{E} \cdot \vec{\mathrm{d}\ell} = -\iint_\Sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{\mathrm{d}S}$.

Nous sommes donc amenés à calculer la circulation de $\vec{E}$ sur le contour délimitant la surface Σ que l'on va choisir et à calculer le flux de $\vec{B}$ à travers cette même surface.

Pour que le calcul de la circulation soit simple, il faut trouver une surface dont le contour ne dépend pas de r, ainsi le champ électrique sera constant sur ce contour.

Pour que le calcul du flux soit simple, il faut dans un premier temps trouver une surface dont la surface élémentaire ne s'exprime pas en fonction des variables de B : B étant constant ici, la question ne se pose pas. Dans un deuxième temps, on choisit une surface telle que $\vec{B}$ et le vecteur normal à la surface soient colinéaires afin que le produit scalaire se calcule facilement : on choisit une surface perpendiculaire à $\vec{e_z}$.

On souhaite donc une surface de rayon constant r, perpendiculaire à $\vec{e_z}$: il s'agit donc d'un disque de rayon r et d'axe (Oz).

.....

4.13 e) La forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday est $\oint_\Gamma \vec{E} \cdot \vec{\mathrm{d}\ell} = -\iint_\Sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{\mathrm{d}S}$.

On choisit comme surface Σ le disque de rayon r et donc comme contour Γ le cercle de rayon r. La circulation de $\vec{E}$ donne :

$$\oint_\Gamma \vec{E} \cdot \mathrm{d}\ell = 2\pi r E(r,t).$$

Le flux de la dérivée du champ magnétique donne : $\iint_\Sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{\mathrm{d}S} = \pi r^2 \mu_0 n \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$. Finalement, $\vec{E} = -\mu_0 n \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \frac{r}{2} \vec{e_\theta}$.

.....

4.13 f) La forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday est $\oint_\Gamma \vec{E}\, \mathrm{d}\ell = -\iint_\Sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{\mathrm{d}S}$.

On choisit comme surface Σ le disque de rayon r et donc comme contour Γ le cercle de rayon r. La circulation de $\vec{E}$ donne :

$$\oint_\Gamma \vec{E}\, \mathrm{d}\ell = 2\pi r E(r,t).$$

Le flux de la dérivée du champ magnétique donne : $\iint_\Sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{\mathrm{d}S} = \pi R^2 \mu_0 n \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$. Finalement, $\vec{E} = -\mu_0 n \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \frac{R^2}{2r} \vec{e_\theta}$.

.....

4.14 a) On a :

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} E_0 \cos(\omega t - kz + \varphi) \vec{e_x} \wedge B_0 \sin(\omega t - kz + \varphi) \vec{e_y} = \frac{E_0 B_0}{\mu_0} \cos(\omega t - kz + \varphi) \sin(\omega t - kz + \varphi) \vec{e_z}.$$

L'énergie se propage dans une direction orthogonale à celles des champs électrique et magnétique.

.....

4.14 b) On a :

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} E_0 \cosh(\beta z) \exp(-\alpha t) \vec{e_z} \wedge B_0 \sinh(\beta z) \exp(-\alpha t) \vec{e_y} = -\frac{E_0 B_0}{\mu_0} \cosh(\beta z) \sinh(\beta z) \exp(-2\alpha t) \vec{e_x}.$$

L'énergie se propage dans une direction orthogonale à celles des champs électrique et magnétique.

.....

4.15 a) Pour une onde plane progressive, on a la relation de structure :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{\vec{e_z} \wedge \vec{E}}{c} = \frac{1}{c} \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right. \wedge \left| \begin{array}{c} E_x \\ E_y \\ E_z \end{array} \right. = \frac{1}{c} \left| \begin{array}{c} -E_y \\ E_x \\ 0 \end{array} \right. .$$

On en déduit : $\vec{B} = -\frac{E_{0y}}{c} \cos(k\,z - \omega\,t + \psi_2)\, \vec{e_x} + \frac{E_{0x}}{c} \cos(k\,z - \omega\,t + \psi_1)\, \vec{e_y}$.

.....

4.15 b) Le vecteur de Poynting est donné par :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0\, c} \left| \begin{array}{c} E_x \\ E_y \\ 0 \end{array} \right. \wedge \left| \begin{array}{c} -E_y \\ E_x \\ 0 \end{array} \right. = \frac{1}{\mu_0\, c} \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ E_x^2 + E_y^2 \end{array} \right. = \frac{E_x^2 + E_y^2}{\mu_0\, c}\, \vec{e_z}.$$

.....

4.15 c) En notation complexe, avec $\vec{r} = \overrightarrow{\mathrm{OM}}$ et $\vec{k}$ le vecteur d'onde, le champ électrique peut s'écrire :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 \exp\left[\mathrm{i}\left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega\, t\right)\right] = \underline{\vec{E}}_0 \exp[\mathrm{i}(k\, z - \omega\, t)],$$

avec $\underline{\vec{E}_0} = E_{0x}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\psi_1}\, \vec{e_x} + E_{0y}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\psi_2}\, \vec{e_y}$; $\underline{\vec{E}_0}$ est l'amplitude complexe du champ électrique.

.....

4.15 d) L'équation de Maxwell-Faraday $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \underline{\vec{E}} = -\dfrac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t}$ donne : $\mathrm{i}\, \vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = +\mathrm{i}\, \omega\, \underline{\vec{B}}$. Donc,

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \underline{\vec{E}} = \frac{\vec{e_z}}{c} \wedge \left(E_{0x}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\, z - \omega\, t + \psi_1)}\, \vec{e_x} + E_{0y}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\, z - \omega\, t + \psi_2)}\, \vec{e_y}\right) = \frac{1}{c}\left(E_{0x}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\, z - \omega\, t + \psi_1)}\, \vec{e_y} - E_{0y}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\, z - \omega\, t + \psi_2)}\, \vec{e_x}\right).$$

.....

4.15 e) On en déduit le conjugué : $\underline{\vec{B}}^* = \dfrac{1}{c}\left(E_{0x}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k\, z - \omega\, t + \psi_1)}\, \vec{e_y} - E_{0y}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k\, z - \omega\, t + \psi_2)}\, \vec{e_x}\right)$.

.....

4.15 f) Le produit vectoriel $\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*$ vaut :

$$\begin{aligned} \underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^* &= \left(E_{0x}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\, z - \omega\, t + \psi_1)}\, \vec{e_x} + E_{0y}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\, z - \omega\, t + \psi_2)}\, \vec{e_y}\right) \wedge \left(\frac{1}{c}\left(E_{0x}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k\, z - \omega\, t + \psi_1)}\, \vec{e_y} - E_{0y}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k\, z - \omega\, t + \psi_2)}\, \vec{e_x}\right)\right) \\ &= \frac{E_{0x}^2}{c}\vec{e_z} + \frac{E_{0y}^2}{c}\vec{e_z} = \frac{\left(E_{0x}^2 + E_{0y}^2\right)\vec{e_z}}{c}. \end{aligned}$$

On en déduit le vecteur complexe $\dfrac{1}{2\,\mu_0}\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^* = \dfrac{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}{2\,\mu_0\, c}\, \vec{e_z}$.

.....

4.15 g) Avec $\langle \cos^2 \rangle = \dfrac{1}{2}$, la valeur moyenne du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ vaut :

$$\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle = \left\langle \frac{(E_{0x}\, \cos(k\, z - \omega\, t + \psi_1))^2 + (E_{0y}\, \cos(k\, z - \omega\, t + \psi_2))^2}{\mu_0\, c}\, \vec{e_z} \right\rangle = \frac{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}{2\,\mu_0\, c}\, \vec{e_z}.$$

La valeur moyenne du vecteur $\left\langle \dfrac{\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*}{2\,\mu_0} \right\rangle$ est identique : on peut donc choisir l'une ou l'autre des deux méthodes.

.....

4.16 a) On intègre la densité volumique d'énergie électromagnétique dans tout le volume $\mathcal{V}$ séparant les deux armatures :

$$\mathcal{E} = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\, \mathrm{d}\tau = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S^2}\, \mathrm{d}\tau = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S^2} LS = \frac{LQ^2}{2\varepsilon_0 S}.$$

.....

4.16 b) On a $\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \dfrac{\frac{Q}{\varepsilon_0 S}\vec{e_z} \cdot \frac{\mu_0}{2S}\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} R\vec{e_\theta}}{\mu_0} = -\dfrac{R}{2\varepsilon_0 S^2} Q \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\vec{e_r}$.

.....

4.16 c) On cherche le flux sortant du vecteur de Poynting à travers la surface Σ du cylindre de rayon R et de hauteur L formé par les deux armatures du condensateur, soit :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{\Pi} \cdot \vec{\mathrm{d}S} = -\frac{R}{2\varepsilon_0 S^2} Q \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \times 2\pi RL = -\frac{L\pi R^2}{\varepsilon_0 S^2} Q \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\frac{L}{\varepsilon_0 S} Q \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}.$$

.....

4.16 d) On a $\dfrac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \dfrac{\partial\left(\dfrac{LQ(t)^2}{2\varepsilon_0 S}\right)}{\partial t} = \dfrac{L}{2\varepsilon_0 S} 2Q(t)\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}(t) = \dfrac{L}{\varepsilon_0 S} Q \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\phi.$

.....

4.16 e) On a $\dfrac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \phi = 0.$

En utilisant le théorème de Green-Ostrogradski, qui dit $\oiint_\Sigma \vec{\Pi}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iiint_\mathcal{V} \operatorname{div}\vec{\Pi}\,\mathrm{d}\tau$, et en utilisant que $\mathcal{E} = \iiint_\mathcal{V} e\,\mathrm{d}\tau$, on obtient :

$$\iiint_\mathcal{V} \frac{\partial e}{\partial t}\,\mathrm{d}\tau + \iiint_\mathcal{V} \operatorname{div}\vec{\Pi}\,\mathrm{d}\tau = 0 \qquad \text{donc} \qquad \frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{\Pi} = 0,$$

ce qui correspond au théorème de Poynting en l'absence de courant de conduction.

.....

Fiche n° 5. Induction

Réponses

5.1 a) ..... $\boxed{\vec{e_z}}$

5.1 b) ..... $\boxed{-\vec{e_z}}$

5.1 c) ..... $\boxed{\vec{e_y}}$

5.1 d) ..... $\boxed{\vec{e_y}}$

5.1 e) ..... $\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e_y}+\vec{e_z})}$

5.1 f) ..... $\boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e_y}+\vec{e_z})}$

5.2 a) ..... (d)

5.2 b) ..... aucune

5.2 c) ..... (b)

5.2 d) ..... (a)

5.3 a) ..... oui

5.3 b) ..... oui

5.3 c) ..... non

5.3 d) ..... non

5.3 e) ..... oui

5.3 f) ..... non

5.4 a) ..... $\boxed{0}$

5.4 b) ..... $\boxed{-Bx_{\mathrm{c}}\ell}$

5.4 c) ..... $\boxed{-B\ell^2}$

5.4 d) ..... $\boxed{-B(a-(x_{\mathrm{c}}-\ell))\ell}$

5.4 e) ..... $\boxed{0}$

5.4 f) ..... $\boxed{-Bv\ell}$

5.4 g) ..... $\boxed{0}$

5.4 h) ..... $\boxed{Bv\ell}$

5.5 a) ..... $\boxed{\pi R^2 B_{\mathrm{m}}\cos(\omega t)}$

5.5 b) ..... $\boxed{\pi a^2 B_{\mathrm{m}}\cos(\omega t)}$

5.5 c) ..... $\boxed{\mathrm{d}S = r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r}$

5.5 d) ..... $\boxed{2\pi B_0\left(\frac{R^2}{2}-\frac{R^3}{3a}\right)}$

5.5 e) ..... $\boxed{2\pi B_0\frac{a^2}{6}}$

5.6 a) ..... $\boxed{B\pi R^2\cos(\omega t)}$

5.6 b) ..... $\boxed{0}$

5.6 c) ..... $\boxed{-\frac{B\pi R^2}{2}}$

5.6 d) ..... $\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}B\pi R^2}$

5.6 e) ..... $\boxed{B\pi R^2}$

5.7 a) ..... (a)

5.7 b) ..... (a)

5.7 c) ..... $\boxed{\frac{\mu_0 N I a}{2\pi}\ln\left(\frac{d+a}{d}\right)}$

5.7 d) ..... $\boxed{\frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi}\ln\left(\frac{d+a}{d}\right)}$

5.8 a) ..... (c)

5.8 b) ..... $\boxed{B_0\omega\sin(\omega t)\frac{r}{2}}$

5.9 a) ..... (c)

5.9 b) ..... (a)

5.10 a) ..... (c)

5.10 b) ..... $\boxed{\frac{-\alpha B\underline{I}}{h+\mathrm{j}(m\omega-\frac{k}{\omega})}}$

5.10 c) ..... (c)

5.11 a) ..... $\boxed{-Ri^2}$

5.11 b) ..... $\boxed{mv\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - fv}$

5.11 c) ..... $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} + \mathcal{P}_\mathrm{J}}$

5.12 a) ..... $\boxed{-iaB\overrightarrow{e_y}}$

5.12 b) ..... $\boxed{ibB\overrightarrow{e_x}}$

5.12 c) ..... $\boxed{iaB\overrightarrow{e_y}}$

5.12 d) ..... $\boxed{-ibB\overrightarrow{e_x}}$

5.12 e) ..... $\boxed{\overrightarrow{0}}$

5.13 a) ..... $\boxed{\overrightarrow{0}}$

5.13 b) ..... $\boxed{-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}aB\overrightarrow{e_z}}$

5.13 c) ..... $\boxed{i\dfrac{\sqrt{3}}{2}aB\overrightarrow{e_x}}$

5.14 a) ..... $\boxed{S\overrightarrow{e_y}}$

5.14 b) ..... $\boxed{-IBS\overrightarrow{e_z}}$

5.14 c) ..... $\boxed{\overrightarrow{0}}$

5.14 d) ..... $\boxed{IBS\overrightarrow{e_x}}$

5.14 e) ..... ⓒ

5.14 f) ..... ⓓ

5.14 g) ..... ⓓ

5.15 a) ..... $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{B^2\ell^2}{mR}v = 0}$

5.15 b) ..... ⓒ

5.16 a) ..... $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + \dfrac{B^2\ell^2}{mr}v(t) = -\dfrac{B\ell E}{mr}}$

5.16 b) ..... $\boxed{-\dfrac{E}{B\ell}}$

5.17 a) ..... $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2i(t)}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{r}{L}\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \dfrac{B^2\ell^2}{mL}i(t) = 0}$

5.17 b) ..... ⓐ

5.17 c) ..... ⓒ

5.17 d) ..... ⓓ

5.18 a) ..... ⓑ

5.18 b) ..... $\boxed{E - Ba\dot{x} - Ri}$

5.18 c) ..... $\boxed{-\dfrac{(Ba)^2}{m}i - R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}}$

5.18 d) ..... $\boxed{R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{(Ba)^2}{m}i = 0}$

5.18 e) ..... $\boxed{R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \left(\dfrac{(Ba)^2}{m} + \dfrac{1}{C}\right)i = 0}$

5.18 f) ..... $\boxed{L\dfrac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \left(\dfrac{(Ba)^2}{m} + \dfrac{1}{C}\right)i = 0}$

5.19 a) ..... ⓑ

5.19 b) ..... $\boxed{x_0 + \dfrac{e}{Ba}\left(t + \tau\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} - \tau\right)}$

5.20 a) ..... ⓑ

5.20 b) ..... ⓑ

5.21 a) ..... ⓓ

5.21 b) ..... $\boxed{-iB2\pi RN\overrightarrow{e_z}}$

5.22 a) ..... ⓐ

5.22 b) ..... $\boxed{-S\overrightarrow{e_z}}$

5.22 c) ..... $\boxed{-B\dfrac{t}{\tau}S}$

5.22 d) ..... $\boxed{\dfrac{BS}{\tau}}$

5.22 e) ..... $\boxed{300\,\mathrm{mV}}$

5.22 f) ..... ⓑ

5.22 g) ..... $\boxed{S\overrightarrow{e_z}}$

5.22 h) ..... $\boxed{\dfrac{BSt}{\tau}}$

5.22 i) ..... $\boxed{-\dfrac{BS}{\tau}}$

5.22 j) ..... $\boxed{300\,\mathrm{mV}}$

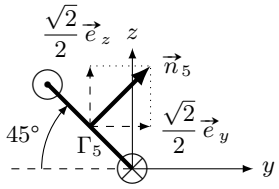
5.23 a) ..... $\boxed{Ei - Ri^2}$

5.23 b) ..... $\boxed{mv\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + kxv + \alpha v^2}$

5.23 c) ..... $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}t} + \mathcal{P}_\mathrm{f} + \mathcal{P}_\mathrm{J}}$

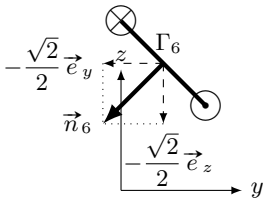
Corrigés

5.1 e)



.....

5.1 f)



.....

5.3 a) Il y a trois façons de modifier un flux : modifier la surface, modifier le champ, changer l'angle entre le vecteur normal à la surface et le champ. Ici, comme $\vec{B} \wedge \vec{n} = \vec{0}$ à $t = 0$, les deux vecteurs sont colinéaires. Comme le cadre tourne autour d'un de ses côtés, l'angle entre $\vec{n}$ et $\vec{B}$ varie au cours du temps.

.....

5.3 b) La surface où le champ est non nul augmente au cours du temps tant que le cadre n'est pas entièrement dans la zone où règne le champ.

.....

5.3 c) Le produit scalaire entre $\vec{B}(t)$ et $\vec{n}$ est nul.

.....

5.3 d) Ni la surface ni l'angle entre $\vec{B}$ et $\vec{n}$ ne varie.

.....

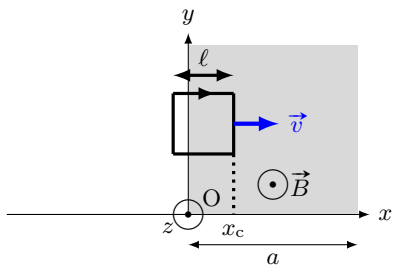
5.3 e) La surface varie.

.....

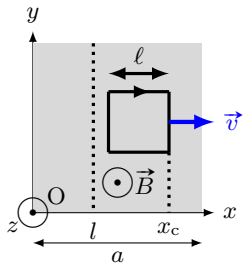
5.3 f) Il ne faut pas confondre les termes « uniforme » (ne varie pas dans l'espace) et « constant » (ne varie pas dans le temps).

.....

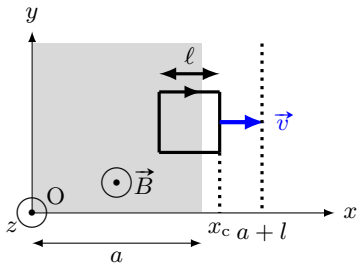
5.4 b)



5.4 c)



5.4 d)



5.5 a) On a $\Phi = \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi} B_m \cos(\omega t) r\,\mathrm{d}r \times \mathrm{d}\theta = B_m \cos(\omega t) \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi} r\,\mathrm{d}r \times \mathrm{d}\theta.$

5.5 b) On a $\Phi = \int_{r=0}^{a}\int_{\theta=0}^{2\pi} B_m \cos(\omega t) r\,\mathrm{d}r \times \mathrm{d}\theta = B_m \cos(\omega t) \int_{r=0}^{a}\int_{\theta=0}^{2\pi} r\,\mathrm{d}r \times \mathrm{d}\theta.$

5.5 d) On a $\Phi' = \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi} B_0\left(1-\frac{r}{a}\right) r\,\mathrm{d}r \times \mathrm{d}\theta = B_0 \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi} \left(r - \frac{r^2}{a}\right) \mathrm{d}r \times \mathrm{d}\theta = 2\pi B_0 \left[\frac{R^2}{2} - \frac{R^3}{3a}\right].$

5.5 e) On a $\Phi' = \int_{r=0}^{a}\int_{\theta=0}^{2\pi} B_0\left(1-\frac{r}{a}\right) r\,\mathrm{d}r \times \mathrm{d}\theta = B_0 \int_{r=0}^{a}\int_{\theta=0}^{2\pi} \left(r - \frac{r^2}{a}\right) \mathrm{d}r \times \mathrm{d}\theta = 2\pi B_0 \frac{a^2}{6}.$

5.6 a) L'angle entre la normale à la spire et le champ magnétique $\vec{B}$ étant ωt, le calcul du flux s'écrit :

$$\Phi = \iint_S \vec{B}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = \iint_S B\cos(\omega t)\,\mathrm{d}S = B\cos(\omega t)\iint_S \mathrm{d}S = B\pi R^2\cos(\omega t).$$

5.7 d) Le flux propre à travers les N spires sera $\dfrac{\mu_0 N^2 I a}{2\pi}\ln\left(\dfrac{d+a}{d}\right) = LI$.

5.8 b) On a $\dfrac{\mathrm{d}(rE(r))}{\mathrm{d}r} = B_0 r\omega\sin(\omega t)$. Donc, $E = \displaystyle\int_{r'=0}^{r} B_0 r'\omega\sin(\omega t)\,\mathrm{d}r' = B_0\omega\sin(\omega t)\int_{r'=0}^{r} r'\,\mathrm{d}r'$.

5.9 b) Chaque terme de l'équation doit avoir même dimension. Or $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ a pour dimension $\dfrac{\mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-1}}{\mathrm{T}}$, donc $\dfrac{a^2B^2v}{Rm}$ a pour dimension $\mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-2}$. On déduit la dimension de $\dfrac{a^2B^2}{Rm}$ en divisant $\mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-2}$ par la dimension de la vitesse $\mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-1}$. Donc $\dfrac{a^2B^2}{Rm}$ a pour dimension T^{-1}.

5.11 a) On a $e\times i = Ri\times i$ donc $-Bav\times i = Ri^2$ donc $Bavi = -Ri^2$.

5.11 b) On a $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\times v = f\times v + f_\mathrm{L}\times v$ donc $mv\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = f\times v + Bai\times v$ donc $Bavi = mv\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - fv$.

5.11 c) D'après les questions précédentes, on peut égaliser les deux expressions de $Bavi$; on a donc :

$$-Ri^2 = mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - fv \qquad \text{donc} \qquad fv = mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + Ri^2 = \frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} + \mathcal{P}_\mathrm{J} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) + \mathcal{P}_\mathrm{J} = \frac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} + \mathcal{P}_\mathrm{J}.$$

5.12 e) Dans le cas d'un champ uniforme (égal à la même valeur en tout point de l'espace), la résultante des forces de Laplace s'exerçant sur un circuit fermé est nulle.

5.13 a) Le champ magnétique $\vec{B}$ et le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ sont tous deux portés par $\vec{e_x}$. Le produit vectoriel $\overrightarrow{\mathrm{QR}}\wedge\vec{B}$ étant nul, on a $\vec{F_\mathrm{L}} = \vec{0}$.

5.13 b) Le courant étant uniforme, la force de Laplace s'écrit : $\vec{F_\mathrm{L}} = i\overrightarrow{\mathrm{RS}}\wedge\vec{B}$. On a :

$$\overrightarrow{\mathrm{RS}} = a\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\vec{e_y} + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\vec{e_z}\right) = \frac{a}{2}\left(\vec{e_y} + \sqrt{3}\vec{e_z}\right) \qquad \text{donc} \qquad \vec{F_\mathrm{L}} = i\frac{a}{2}\left(\vec{e_y} + \sqrt{3}\vec{e_z}\right)\wedge(B\vec{e_y}) = -i\frac{\sqrt{3}}{2}aB\vec{e_z}.$$

5.13 c) Le courant étant uniforme, la force de Laplace s'écrit : $\vec{F_\mathrm{L}} = i\overrightarrow{\mathrm{SQ}}\wedge\vec{B}$. On a :

$$\overrightarrow{\mathrm{SQ}} = a\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\vec{e_y} - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\vec{e_z}\right) = \frac{a}{2}\left(\vec{e_y} + \sqrt{3}\vec{e_z}\right) \qquad \text{donc} \qquad \vec{F_\mathrm{L}} = i\frac{a}{2}\left(\vec{e_y} - \sqrt{3}\vec{e_z}\right)\wedge(B\vec{e_y}) = i\frac{\sqrt{3}}{2}aB\vec{e_x}.$$

5.14 a) D'après la règle de la main droite, le sens de circulation du courant d'intensité I impose que $\vec{S} = S\vec{e_y}$.

5.14 b) D'après l'expression du couple des forces de Laplace, on a $\vec{\Gamma}_\mathrm{L} = \vec{\mathcal{M}}\wedge\vec{B_1} = IS\vec{e_y}\wedge B\vec{e_x} = -IBS\vec{e_z}$.

5.14 c) D'après l'expression du couple des forces de Laplace, on a $\vec{\Gamma}_\mathrm{L} = \vec{\mathcal{M}}\wedge\vec{B_1} = IS\vec{e_y}\wedge B\vec{e_y} = \vec{0}$.

5.14 d) D'après l'expression du couple des forces de Laplace, on a $\vec{\Gamma}_\mathrm{L} = \vec{\mathcal{M}}\wedge\vec{B_1} = IS\vec{e_y}\wedge B\vec{e_z} = IBS\vec{e_x}$.

5.14 e) Le couple des forces de Laplace produit par $\overrightarrow{B_3}$ est orienté selon les $x > 0$, d'après la règle de la main droite, la spire va donc tourner autour de l'axe (Ox) dans le sens direct.

.....

5.14 f) Aucun couple calculé plus tôt n'est orienté selon $\overrightarrow{e_y}$, il n'y a donc pas de champ magnétique qui provoque une rotation de la spire autour de l'axe (Oy).

.....

5.14 g) Le couple des forces de Laplace produit par $\overrightarrow{B_1}$ est orienté selon les $z < 0$, d'après la règle de la main droite, la spire va donc tourner autour de l'axe (Oz) dans le sens indirect. Il n'y a donc pas de champ magnétique qui provoque une rotation de la spire autour de l'axe (Oz) dans le sens direct.

.....

5.15 a) L'équation électrique permet d'établir que $i(t) = \dfrac{B\ell v}{R}$. En injectant cette relation dans l'équation mécanique, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{B^2\ell^2}{mR}v = 0.$$

.....

5.15 b) La résolution de l'équation différentielle sur v donne $v(t) = A\exp\left(-\dfrac{B^2\ell^2}{mR}t\right)$. À l'instant $t = 0$, on a $v(t = 0) = v_0$, donc $A\exp(0) = v_0$ et donc $A = v_0$. Ainsi, on a $v(t) = v_0\exp\left(-\dfrac{B^2\ell^2}{mR}t\right)$.

.....

5.16 a) On isole $i(t)$ dans l'équation électrique pour obtenir $i = \dfrac{B\ell v(t)}{r} + \dfrac{E}{r}$. En injectant ce résultat dans l'équation mécanique, on obtient :

$$m\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{B^2\ell^2}{r}v(t) - \frac{B\ell E}{r} \qquad \text{donc} \qquad \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{B^2\ell^2}{mr}v(t) = -\frac{B\ell E}{mr}.$$

.....

5.16 b) La vitesse limite v_{lim} correspond à la vitesse atteinte en régime permanent, soit quand $\dfrac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = 0$.

On a donc $\dfrac{B^2\ell^2}{r}v_{\text{lim}} = -\dfrac{B\ell E}{r}$. On en déduit $v_{\text{lim}} = -\dfrac{E}{B\ell}$.

.....

5.17 a) À partir de l'équation électrique, on a $v = \dfrac{1}{B\ell}\left(L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + ri(t)\right)$, qu'on injecte dans l'équation mécanique.

On obtient $\dfrac{m}{B\ell}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + ri\right) = -B\ell i$, et ainsi $\dfrac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{r}{L}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{B^2\ell^2}{mL}i = 0$.

.....

5.17 c) On calcule son discriminant $\Delta = \dfrac{r^2}{L^2} - 4\dfrac{B^2\ell^2}{mL} = \dfrac{1}{0{,}25} - 4 \times \dfrac{1 \times 10^{-2}}{0{,}01 \times 0{,}5} = 4 - 4 \times 2 = -4$.

.....

5.17 d) Le discriminant étant négatif, les racines complexes sont :

$$\rho_{1/2} = -\frac{r}{2L} \pm \mathrm{j}\frac{1}{2}\sqrt{4\frac{B^2\ell^2}{mL} - \frac{r^2}{L^2}} = -\frac{r}{2L} \pm \mathrm{j}\omega,$$

avec $\omega = \dfrac{1}{2}\sqrt{4\dfrac{B^2\ell^2}{mL} - \dfrac{r^2}{L^2}}$. On obtient $i(t) = \mathrm{e}^{-\frac{r}{2L}t}(\alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t))$.

.....

5.18 a) Avec la règle de la main droite, en utilisant l'orientation du contour, on oriente la surface pour le calcul du flux (suivant $-\overrightarrow{e_z}$). La source de tension induite de fém e a une polarité (sa flèche tension) dans le même sens que l'orientation du contour.

.....

5.18 b) D'après la loi des mailles, on a $E + e = u + Ri$, donc $E - Ba\dot{x} = u + Ri$, et donc $u = E - Ba\dot{x} - Ri$.

5.18 c) D'après la question précédente, $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E - Ba\dot{x} - Ri) = -Ba\ddot{x} - R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$. Comme $\ddot{x} = \dfrac{Ba}{m}i$, on a :

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\frac{(Ba)^2}{m}i - R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}.$$

5.18 d) Le dipôle 1 est un fil, sa tension u est donc nulle, ainsi $-\dfrac{(Ba)^2}{m}i - R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$, ou $R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{(Ba)^2}{m}i = 0$.

5.18 e) Le dipôle 2 est un condensateur traversé par un courant d'intensité $i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$, soit $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \dfrac{i}{C}$. D'où :

$$\frac{i}{C} = -\frac{(Ba)^2}{m}i - R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \qquad \text{et donc} \qquad R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{(Ba)^2}{m} + \frac{1}{C}\right)i = 0.$$

5.18 f) Le dipôle 4 est une association série d'une bobine et d'un condensateur. La tension à ses bornes est donc $u = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + u_C$, avec u_C la tension aux bornes du condensateur. Donc $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = L\dfrac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = L\dfrac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{i}{C}$. D'où :

$$L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{i}{C} = -\frac{(Ba)^2}{m}i - R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \qquad \text{et donc} \qquad L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{(Ba)^2}{m} + \frac{1}{C}\right)i = 0.$$

5.19 a) L'argument $-\dfrac{t}{\tau}$ de l'exponentielle doit être sans dimension. Donc τ a la même dimension que t, soit T.

5.20 b) Chaque terme de l'équation doit avoir même dimension.

On pouvait aussi exploiter le fait que $\left[\dfrac{R}{L}\right] = \mathrm{T}^{-1}$ *et* $[g] = \mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-2}$.

5.21 b) On a $\overrightarrow{F_\mathrm{L}} = \displaystyle\int_{\theta=0}^{2\pi N} iR\,\mathrm{d}\theta\overrightarrow{e_\theta} \wedge (B\overrightarrow{e_r}) = -iRB\int_{\theta=0}^{2\pi N} d\theta\overrightarrow{e_z} = -iB2\pi RN\overrightarrow{e_z}$.

5.22 a) La flèche de tension de la fém e induite est orientée dans le même sens que le courant induit i_ind, soit horaire, donc elle est orientée dans le même sens que E.

5.22 b) D'après la règle de la main droite, le vecteur surface du circuit $\overrightarrow{S}$ est orienté selon $-\overrightarrow{e_z}$; comme S est positif, il vient que $\overrightarrow{S} = -S\overrightarrow{e_z}$.

5.22 c) Le flux magnétique traversant le circuit est tel que $\phi = \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{S} = B\dfrac{t}{\tau}\overrightarrow{e_z}\cdot(-S\overrightarrow{e_z}) = -B\dfrac{t}{\tau}S$.

5.22 d) La fém apparaissant dans le circuit est telle que $e = -\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{\tau}\dfrac{\mathrm{d}(-BtS)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{BS}{\tau}$.

5.22 e) D'après la loi des mailles, $u = E + e = E + \dfrac{BS}{\tau}$. D'où :

$$u = 2{,}00\times10^{-3}\,\mathrm{V} + \frac{2\,\mathrm{T}}{1\,\mathrm{s}}\times500\times10^{-4}\,\mathrm{m}^2 = 300\,\mathrm{mV}.$$

5.22 f) La flèche de tension de la fém e induite est orientée dans le même sens que le courant induit i_{ind}, soit anti-horaire, donc elle est orientée dans le sens opposé à E.

.....

5.22 g) D'après la règle de la main droite, le vecteur surface du circuit $\vec{S}$ est orienté selon $\vec{e_z}$; comme S est positif, il vient que $\vec{S} = S\vec{e_z}$.

.....

5.22 h) Le flux magnétique traversant le circuit est tel que $\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B\dfrac{t}{\tau}\vec{e_z} \cdot S\vec{e_z} = \dfrac{BSt}{\tau}$.

.....

5.22 i) La fém apparaissant dans le circuit est telle que $e = -\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{\tau}\dfrac{\mathrm{d}(BtS)}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{BS}{\tau}$.

.....

5.22 j) D'après la loi des mailles, $u = E - e = E + \dfrac{BS}{\tau}$. D'où :

$$u = 2{,}00 \times 10^{-3}\,\mathrm{V} + \frac{2\,\mathrm{T}}{1\,\mathrm{s}} \times 500 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}^2 = 300\,\mathrm{mV}.$$

.....

5.23 a) On a $E \times i + e \times i = Ri \times i$ donc $Ei - Bav \times i = Ri^2$ et donc $Bavi = Ei - Ri^2$.

.....

5.23 b) On a $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \times v = f_{\mathrm{L}} \times v - kx \times v - \alpha v \times v$ donc $mv\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = Bai \times v - kxv - \alpha v^2$. Finalement, on a :

$$Bavi = mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + kxv + \alpha v^2.$$

.....

5.23 c) D'après les questions précédentes, on peut égaliser les deux expressions de $Bavi$.

On a donc $Ei - Ri^2 = mv\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + kxv + \alpha v^2$ et donc :

$$Ei = mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + kxv + \alpha v^2 + Ri^2 = \frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2}k\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t} + \mathcal{P}_{\mathrm{f}} + \mathcal{P}_{\mathrm{J}} = \frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) + \mathcal{P}_{\mathrm{f}} + \mathcal{P}_{\mathrm{J}} = \frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}t} + \mathcal{P}_{\mathrm{f}} + \mathcal{P}_{\mathrm{J}}.$$

.....

Fiche n° 6. Ondes électromagnétiques I

Réponses

6.1 a) ..... $3 \times 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$

6.1 b) ..... $5 \times 10^{14}\,\mathrm{Hz}$

6.1 c) ..... $1 \times 10^{-1}\,\mathrm{m}$

6.1 d) ..... $1 \times 10^{-20}\,\mathrm{s}$

6.2 a) ..... $\dfrac{E_0^2 S}{2\mu_0 c}$

6.2 b) ..... $1 \times 10^{-5}\,\mathrm{W}$

6.2 c) ..... Ampoule classique

6.3 a) ..... $B_0 = \sqrt{\dfrac{2\mu_0 \langle P \rangle}{cS}}$

6.3 b) ..... b

6.4 a) ..... $-\omega E_0 \sin(\omega t - kx)\vec{e_z}$

6.4 b) ..... $kE_0 \sin(\omega t - kx)\vec{e_z}$

6.4 c) ..... $\vec{0}$

6.4 d) ..... $-k^2 E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{e_z}$

6.4 e) ..... $-\omega^2 E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{e_z}$

6.5 a) ..... $-\omega B_0 \sin\left(\dfrac{\pi y}{a}\right) \sin(\omega t - kx)\vec{e_z}$

6.5 b) ..... $kB_0 \sin\left(\dfrac{\pi y}{a}\right) \sin(\omega t - kx)\vec{e_z}$

6.5 c) ..... $\dfrac{\pi}{a} B_0 \cos\left(\dfrac{\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kx)\vec{e_z}$

6.5 d) ..... $-\omega^2 B_0 \sin\left(\dfrac{\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kx)\vec{e_z}$

6.5 e) ..... $-k^2 B_0 \sin\left(\dfrac{\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kx)\vec{e_z}$

6.5 f) ..... $-\left(\dfrac{\pi}{a}\right)^2 B_0 \sin\left(\dfrac{\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kx)\vec{e_z}$

6.6 a) 0

6.6 b) ..... $-kE_0 \sin(\omega t - kx)\vec{e_y}$

6.6 c) ..... $-k^2\vec{E}$

6.7 a) ..... $A_0 \sin\left(\dfrac{\pi y}{a}\right)\left(-\dfrac{\pi}{a}\cos(\omega t - kz) + k\alpha \sin(\omega t - kz)\right)$

6.7 b) ..... $A_0 \cos\left(\dfrac{\pi y}{a}\right)\left(\dfrac{\pi}{a}\alpha \cos(\omega t - kz) - k \sin(\omega t - kz)\right)\vec{e_x}$

6.7 c) ..... $-A_0 \cos(\omega t - kz)\left(\left(\dfrac{\pi}{a}\right)^2 + k^2\right) \times \left(\cos\left(\dfrac{\pi y}{a}\right)\vec{e_y} + \alpha \sin\left(\dfrac{\pi y}{a}\right)\vec{e_z}\right)$

6.8 a) c

6.8 b) ..... $-\vec{\Delta}\vec{E}$

6.8 c) ..... $c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$

6.9 a) ..... signal n° 1

6.9 b) ..... signal n° 2

6.9 c) ..... signal n° 3

6.10 a) ..... Progressive

6.10 b) ..... Stationnaire, donc non progressive et harmonique

6.10 c) ..... Progressive et harmonique

6.11 ..... a

6.12 a) ..... $-(\alpha^2 + k^2)\vec{E}$

6.12 b) ..... $-\omega^2\vec{E}$

6.12 c) ..... $k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2$

6.12 d) ..... oui

6.13 a) ..... $\dfrac{ak}{r} \sin(\omega t - kr)\vec{e_\varphi}$

6.13 b) ..... $\boxed{\dfrac{ak}{\omega r}\cos(\omega t - kr)\vec{e_\varphi}}$

6.13 c) ..... (a), (c) et (e)

6.14 a) ..... $\boxed{z = ct - (2p+1)\dfrac{\lambda}{4}}$

6.14 b) ..... $\boxed{x = qa}$

6.15 a) ..... $\boxed{\mathrm{j}\omega\underline{\vec{E}}}$

6.15 b) ..... $\boxed{-\mathrm{j}k_x\underline{E}_x}$

6.15 c) ..... $\boxed{-\mathrm{j}k_z\underline{E}_x\vec{e_y} + \mathrm{j}k_y\underline{E}_x\vec{e_z}}$

6.15 d) ..... $\boxed{-k^2\underline{\vec{E}}}$

6.15 e) ..... (d)

6.15 f) ..... (a)

6.15 g) ..... (c)

6.15 h) ..... (b)

6.16 a) ..... $\boxed{v_\varphi = \dfrac{c}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}}$

6.16 b) ..... $\boxed{v_\mathrm{g} = c\sqrt{1-\left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$

6.17 a) ..... $\boxed{\varepsilon_0 c E_0^2\cos^2(\omega t - ky)\vec{e_y}}$

6.17 b) ..... $\boxed{\varepsilon_0 E_0^2\cos^2(\omega t - ky)}$

6.18 a) ..... $\boxed{\dfrac{\varepsilon_0 c a^2}{r^2}\cos^2(\omega t - kr)\vec{e_r}}$

6.18 b) ..... $\boxed{\dfrac{\varepsilon_0 a^2}{r^2}\cos^2(\omega t - kr)}$

6.18 c) ..... $\boxed{4\pi\varepsilon_0 c a^2\cos^2(\omega t - kr)}$

6.19 a) ..... $\boxed{\dfrac{E_0}{\omega}\left[-k\sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - kz)\vec{e_x} - \dfrac{\pi}{a}\cos\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\sin(\omega t - kz)\vec{e_z}\right]}$

6.19 b) ..... $\boxed{\dfrac{E_0^2}{\mu_0}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\left[\dfrac{1}{c}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos^2(\omega t - kz)\vec{e_z} - \dfrac{\pi}{a\omega}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - kz)\sin(\omega t - kz)\vec{e_x}\right]}$

6.19 c) ..... $\boxed{\dfrac{\varepsilon_0 c E_0^2}{2}\sin^2\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\vec{e_z}}$

6.20 a) ..... (a)

6.20 b) ..... (f)

6.20 c) ..... (c)

6.20 d) ..... (d)

6.20 e) ..... (c)

6.20 f) ..... (a)

6.20 g) ..... (b)

6.20 h) ..... (d)

Corrigés

6.2 a) La puissance rayonnée par le laser a alors pour expression $P = \iint \vec{\Pi}\cdot\vec{dS} = \Pi S$. Le vecteur de Poynting vaut

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = -\frac{E_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t - kx)\vec{e_z}\wedge\vec{e_y} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t - kx)\vec{e_x}.$$

En moyenne, puisque $\langle\cos^2\rangle = \dfrac{1}{2}$, on a alors : $\langle P\rangle = \dfrac{E_0^2 S}{2\mu_0 c}$.

.....

6.2 b) Numériquement, on a $\langle P\rangle = \dfrac{1\times10^2\,\mathrm{V^2\cdot m^{-1}}\cdot 1\times10^{-6}\,\mathrm{mm^2}}{2(4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{H\cdot m^{-1}})(3\times10^8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})} = \dfrac{10^{-4}}{750}\mathrm{W} = 1\times10^{-5}\,\mathrm{W}$.

.....

6.2 c) Contrairement à ce que l'on pourrait penser, c'est l'ampoule classique à filament qui est la plus puissante.

.....

6.3 a) La puissance moyenne de l'onde s'exprime en fonction de la norme de B_0 :

$$\langle P\rangle = \frac{E_0^2 S}{2\mu_0 c} = \frac{cB_0^2 S}{2\mu_0} \qquad \text{donc} \qquad B_0 = \sqrt{\frac{2\mu_0\langle P\rangle}{cS}}.$$

.....

6.3 b) Numériquement, on a $B_0 = \sqrt{\dfrac{2(4\pi\times 10^{-7}\,\mathrm{H\cdot m^{-1}})(1\,\mathrm{W})}{1\,\mathrm{m^2}\cdot 3\times 10^8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}} = 1\times 10^{-8}\,\mathrm{T}$. Le champ terrestre est plus intense que le champ de l'onde radiofréquence.

.....

6.6 a) L'unique composante de $\vec{E}$, ici suivant $\vec{e_z}$, ne dépend pas de z, donc :

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 + 0 + 0 = 0.$$

.....

6.6 b) On a $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \left(\dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{e_x} + \left(\dfrac{\partial E_x}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial x}\right)\vec{e_y} + \left(\dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{e_z}$, ce qui donne :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = (0-0)\vec{e_x} + \left(0 - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\vec{e_y} + (0-0)\vec{e_z} = -kE_0\sin(\omega t - kx)\vec{e_y}.$$

.....

6.6 c) On a $\vec{\Delta}\vec{E} = \Delta E_x\vec{e_x} + \Delta E_y\vec{e_y} + \Delta E_z\vec{e_z}$. Ici, comme $E_y = E_x = 0$, il reste donc :

$$\vec{\Delta}\vec{E} = \Delta E_z\vec{e_z} = \left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}\right)\vec{e_z} = \left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + 0 + 0\right)\vec{e_z}.$$

Enfin, comme on a $\dfrac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = -(-k)^2 E_0\cos(\omega t - kx) = -k^2 E_0\cos(\omega t - kx)$, on a $\vec{\Delta}\vec{E} = -k^2 E_0\cos(\omega t - kx)\vec{e_z} = -k^2\vec{E}$.

.....

6.7 a) On a :

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = -\frac{\pi}{a}A_0\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kz) + k\alpha A_0\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\sin(\omega t - kz)\\ &= A_0\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\left(-\frac{\pi}{a}\cos(\omega t - kz) + k\alpha\sin(\omega t - kz)\right).\end{aligned}$$

.....

6.7 b) On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e_x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{e_y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{e_z}\\ &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e_x} + (0-0)\vec{e_y} + (0-0)\vec{e_z} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e_x}.\end{aligned}$$

En calculant les dérivées partielles, on trouve :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} &= \left(\frac{\pi}{a}\alpha A_0\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kz) + kA_0\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\sin(\omega t - kz)\right)\vec{e_x}\\ &= A_0\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\left(\frac{\pi}{a}\alpha\cos(\omega t - kz) + k\sin(\omega t - kz)\right)\vec{e_x}.\end{aligned}$$

.....

6.7 c) On a $\vec{\Delta}\vec{A} = \Delta A_x\vec{e_x} + \Delta A_y\vec{e_y} + \Delta A_z\vec{e_z}$. Ici, $A_x = 0$, il reste donc :

$$\begin{aligned}\vec{\Delta}\vec{A} = \Delta A_y\vec{e_y} + \Delta A_z\vec{e_z} &= \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}\right)\vec{e_y} + \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right)\vec{e_z} \\ &= \left(0 + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}\right)\vec{e_y} + \left(0 + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right)\vec{e_z} = \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}\right)\vec{e_y} + \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right)\vec{e_z}.\end{aligned}$$

En calculant les dérivées partielles,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} &= -\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 A_0 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kz) - k^2 A_0 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kz) \\ &= -\left(\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + k^2\right) A_0 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kz) \\ \text{et} \quad \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} &= -\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \alpha A_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kz) - k^2 \alpha A_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kz) \\ &= -\left(\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + k^2\right) \alpha A_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kz),\end{aligned}$$

on obtient $\vec{\Delta}\vec{A} = -A_0\cos(\omega t - kz)\left(\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + k^2\right)\left(\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\vec{e_y} + \alpha\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\vec{e_z}\right)$.

6.8 a) L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. En lui appliquant le rotationnel, on obtient :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2},$$

où l'on a utilisé l'équation de Maxwell-Ampère dans le vide. Ainsi, $\alpha = -\mu_0\varepsilon_0$.

6.8 b) Grâce à la formule du double rotationnel, on obtient : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\,\vec{E}) - \vec{\Delta}\vec{E}$. Or, d'après l'équation de Maxwell-Gauss dans le vide, on a $\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$. Donc, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}) = -\vec{\Delta}\vec{E}$.

6.8 c) Les deux formules obtenues précédemment donnent :

$$-\vec{\Delta}\vec{E} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{soit} \quad \vec{\Delta}\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{c^2} = \mu_0\varepsilon_0 \quad \text{d'où} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}.$$

6.12 a) Le champ électrique n'a qu'une composante selon $\vec{e_y}$, qui dépend de x et de z.

Ainsi, le laplacien vectoriel s'écrit :

$$\vec{\Delta}\vec{E} = \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}\vec{e_y} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}\vec{e_y} = E_0\cos(\alpha z)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(\sin(\omega t - kx))\vec{e_y} + E_0\sin(\omega t - kx)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}(\cos(\alpha z))\vec{e_y},$$

avec $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(\sin(\omega t - kx)) = -k^2\sin(\omega t - kx)$ et $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}(\cos(\alpha z)) = -\alpha^2\cos(\alpha z)$. Ainsi, $\Delta\vec{E} = (-k^2 - \alpha^2)\vec{E} = -(k^2 + \alpha^2)\vec{E}$.

6.12 b) On a : $\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = E_0\cos(\alpha z)\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}(\sin(\omega t - kx))\vec{e_y} = -\omega^2 E_0\cos(\alpha z)\sin(\omega t - kx)\vec{e_y} = -\omega^2\vec{E}$.

6.12 c) On utilise l'équation de d'Alembert avec les deux termes calculés précédemment, on obtient :

$$-(\alpha^2 + k^2)\vec{E} = -\frac{\omega^2}{c^2}\vec{E} \quad \text{soit} \quad \alpha^2 + k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad \text{d'où} \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2.$$

6.12 d) La relation de dispersion précédente se réécrit : $\dfrac{\omega^2}{k^2} = \dfrac{\omega^2 c^2}{\omega^2 - c^2\alpha^2}$; d'où $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k} = c\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{c\alpha}{\omega}\right)^2}}$.

La vitesse de phase v_φ dépend ici de la pulsation ω : il y a donc dispersion.

.....

6.13 a) On a $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(rE_\theta)}{\partial r}\overrightarrow{e_\varphi} = \dfrac{a}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\cos(\omega t - kr)\overrightarrow{e_\varphi} = \dfrac{a}{r}k\sin(\omega t - kr)\overrightarrow{e_\varphi}$.

.....

6.13 b) Avec Maxwell-Faraday, on a $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = \dfrac{a}{r}k\sin(\omega t - kr)\overrightarrow{e_\varphi} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$. Donc, $\vec{B} = \dfrac{ak}{\omega r}\cos(\omega t - kr)\overrightarrow{e_\varphi}$.

.....

6.13 c) Les vecteurs $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ sont respectivement colinéaires aux vecteurs $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$ donc le champ est transverse électromagnétique et forme un trièdre direct.

.....

6.14 a) Pour que $\cos(\omega t - kz) = 0$, il faut que $\omega t - kz = (2p+1)\dfrac{\pi}{2}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et donc que $z = \dfrac{\omega}{k}t - (2p+1)\dfrac{\pi}{2k}$. Or, dans le vide, $k = \dfrac{\omega}{c} = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ d'où $z = ct - (2p+1)\dfrac{\lambda}{4}$. La structure est analogue à une onde progressive selon z.

.....

6.14 b) Pour que $\sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right) = 0$, il faut que $\dfrac{\pi x}{a} = q\pi$, avec $q \in \mathbb{Z}$, et donc que $x = qa$. Ces plans sont indépendants du temps comme une onde stationnaire selon x.

.....

6.15 a) On a $\dfrac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t} = \mathrm{j}\omega\underline{\vec{E}}$.

.....

6.15 b) La seule composante non nulle de $\vec{E}$ est la composante E_x sur l'axe x. On a donc :

$$\text{div}\,\underline{\vec{E}} = \frac{\partial\underline{E}_0\exp[\mathrm{j}(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)]}{\partial x} = -\mathrm{j}k_x\underline{E}_x.$$

.....

6.15 c) Seule la composante E_x de $\vec{E}$ est non nulle. Donc, $\overrightarrow{\text{rot}}\,\underline{\vec{E}} = -\mathrm{j}k_z\underline{E}_x\overrightarrow{e_y} + \mathrm{j}k_y\underline{E}_x\overrightarrow{e_z}$.

.....

6.15 d) La seule composante non nulle de $\vec{E}$ est la composante E_x sur l'axe x. Donc,

$$\begin{aligned}\Delta\underline{\vec{E}} &= \Delta(\exp[-\mathrm{j}(k_x x + k_y y + k_z z)])\,\underline{E}_0\exp(\mathrm{j}\omega t)\overrightarrow{e_x}\\ &= [(-\mathrm{j}k_x)^2 + (-\mathrm{j}k_y)^2 + (-\mathrm{j}k_z)^2]\exp[-\mathrm{j}(k_x x + k_y y + k_z z)]\,\underline{E}_0\exp(\mathrm{j}\omega t)\overrightarrow{e_x} = -k^2\underline{\vec{E}}.\end{aligned}$$

.....

6.15 e) On a $\dfrac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t} = \mathrm{j}\omega\underline{\vec{E}}$.

.....

6.15 f) On a $\text{div}\,\underline{\vec{E}} = -\mathrm{j}\vec{k}\cdot\underline{\vec{E}}$.

.....

6.15 g) On a $\overrightarrow{\text{rot}}\,\underline{\vec{E}} = -\mathrm{j}\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}$.

.....

6.15 h) On a $\vec{\Delta}\,\underline{\vec{E}} = -k^2\underline{\vec{E}}$.

.....

6.16 a) On divise la relation de dispersion par ω^2 : on obtient $\dfrac{k^2}{\omega^2} = \dfrac{1-\left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}{c^2}$ donc $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{c}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$.

.....

6.16 b) On différentie la relation de dispersion donnée : on a $\mathrm{d}(k^2) = \mathrm{d}\left(\dfrac{\omega^2 - \omega_0^2}{c^2}\right)$, donc $2k\,\mathrm{d}k = \dfrac{2\omega}{c^2}\,\mathrm{d}\omega$, donc $\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = c^2\dfrac{k}{\omega} = \dfrac{c^2}{v_\varphi}$. On en déduit ainsi, grâce à la vitesse de phase trouvée précédemment : $v_\mathrm{g} = c\sqrt{1 - \left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}$.

.....

6.17 a) On a $\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \dfrac{E_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t - ky)\vec{e_z} \wedge \vec{e_x} = \varepsilon_0 c E_0^2 \cos^2(\omega t - ky)\vec{e_y}$, avec $\mu_0\varepsilon_0 c^2 = 1$.

.....

6.17 b) On a $w_\mathrm{em} = \dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \dfrac{B^2}{2\mu_0} = \dfrac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}\cos^2(\omega t - ky) + \dfrac{E_0^2}{2\mu_0 c^2}\cos^2(\omega t - ky) = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - ky)$, avec $\mu_0\varepsilon_0 c^2 = 1$.

.....

6.18 a) On a $\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \dfrac{a^2}{\mu_0 c r^2}\cos^2(\omega t - kr)\vec{e_\theta} \wedge \vec{e_\varphi} = \dfrac{\varepsilon_0 c a^2}{r^2}\cos^2(\omega t - kr)\vec{e_r}$, avec $\mu_0\varepsilon_0 c^2 = 1$.

.....

6.18 b) On a $w_\mathrm{em} = \dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \dfrac{B^2}{2\mu_0} = \dfrac{\varepsilon_0 a^2}{2r^2}\cos^2(\omega t - kr) + \dfrac{a^2}{2\mu_0 c^2 r^2}\cos^2(\omega t - kr) = \dfrac{\varepsilon_0 a^2}{r^2}\cos^2(\omega t - kr)$, avec $\mu_0\varepsilon_0 c^2 = 1$.

.....

6.18 c) On calcule la puissance rayonnée, avec $\overrightarrow{\mathrm{d}S} = r^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{e_r}$:

$$\begin{aligned} P &= \iint \frac{\varepsilon_0 c a^2}{r^2}\cos^2(\omega t - kr)\vec{e}_r \cdot r^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{e_r} = \iint \frac{\varepsilon_0 c a^2}{r^2}\cos^2(\omega t - kr) r^2 \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{\varepsilon_0 c a^2}{r^2}\cos^2(\omega t - kr) r^2 \iint \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\varepsilon_0 c a^2}{r^2}\cos^2(\omega t - kr) r^2 \int_0^\pi \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi. \end{aligned}$$

La double intégrale donne 4π, donc l'expression de la puissance est :

$$P = 4\pi\frac{\varepsilon_0 c a^2}{r^2}\cos^2(\omega t - kr) r^2 = 4\pi\varepsilon_0 c a^2 \cos^2(\omega t - kr).$$

.....

6.19 a) Avec l'équation de Maxwell-Faraday, on a :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial E_y}{\partial z}\vec{e_x} + \frac{\partial E_y}{\partial x}\vec{e_z} = -kE_0\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin(\omega t - kz)\vec{e_x} + \frac{\pi}{a}E_0\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - kz)\vec{e_z} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

donc $\vec{B} = -\dfrac{k}{\omega}E_0\sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - kz)\vec{e_x} - \dfrac{\pi}{a\omega}E_0\cos\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\sin(\omega t - kz)\vec{e_z}$.

.....

6.19 b) On a :

$$\begin{aligned} \vec{\Pi} &= \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_y\vec{e_y}}{\mu_0} \wedge (B_x\vec{e_x} + B_z\vec{e_z}) = -\frac{E_y B_x}{\mu_0}\vec{e_z} + \frac{E_y B_z}{\mu_0}\vec{e_x} \\ &= \frac{E_0^2}{\mu_0}\left[\frac{1}{c}\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos^2(\omega t - kz)\vec{e_z} - \frac{\pi}{a\omega}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - kz)\sin(\omega t - kz)\vec{e_x}\right] \\ &= \frac{E_0^2}{\mu_0}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\left[\frac{1}{c}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos^2(\omega t - kz)\vec{e_z} - \frac{\pi}{a\omega}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - kz)\sin(\omega t - kz)\vec{e_x}\right]. \end{aligned}$$

.....

6.19 c) On a $\left\langle\vec{\Pi}\right\rangle = \dfrac{E_0^2}{2\mu_0 c}\sin^2\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\vec{e_z} = \dfrac{\varepsilon_0 c E_0^2}{2}\sin^2\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\vec{e_z}$ avec $\mu_0\varepsilon_0 c^2 = 1$.

.....

6.20 a) L'onde associée à $\vec{E_1}$ est rectiligne et se propage selon $+z$.

.....

6.20 b) L'onde associée à $\overrightarrow{E_2}$ est circulaire droite et se propage selon $-z$.

.....

6.20 c) L'onde associée à $\underline{\overrightarrow{E}}_3$ est circulaire gauche et se propage selon $+z$.

.....

6.20 d) L'onde associée à $\overrightarrow{E_4}$ est circulaire gauche et se propage selon $-z$.

.....

6.20 e) On a $\overrightarrow{E_1}\left(t=\frac{T}{3}, z=0\right) = \begin{cases} E_0\cos\alpha\cos\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{3}\right)\overrightarrow{e_x} \\ E_0\sin\alpha\cos\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{3}\right)\overrightarrow{e_y} \end{cases} = E_0\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\begin{cases}\cos\alpha\overrightarrow{e_x} \\ \sin\alpha\overrightarrow{e_y}\end{cases} = -\frac{E_0}{2}\begin{cases}\cos\alpha\overrightarrow{e_x} \\ \sin\alpha\overrightarrow{e_y}.\end{cases}$

Le vecteur est opposé au cas initial donc d'angle $\alpha+\pi$ et la norme est réduite de moitié, d'où le cas (c).

.....

6.20 f) On a $\overrightarrow{E_2}\left(t=\frac{T}{2}, z=0\right) = \begin{cases} E_0\cos\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}+\alpha\right)\overrightarrow{e_x} \\ E_0\sin\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}+\alpha\right)\overrightarrow{e_y} \end{cases} = \begin{cases} E_0\cos(\pi+\alpha)\overrightarrow{e_x} \\ E_0\sin(\pi+\alpha)\overrightarrow{e_y} \end{cases} = \begin{cases} -E_0\cos(\alpha)\overrightarrow{e_x} \\ -E_0\sin(\alpha)\overrightarrow{e_y}. \end{cases}$

Le vecteur est opposé au cas initial donc d'angle $\alpha+\pi$, d'où le cas (a).

.....

6.20 g) On a :

$$\begin{aligned}\underline{\overrightarrow{E}}_3\left(t=\frac{T}{4}, z=0\right) &= E_0\exp\left[\mathrm{j}\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{4}+\alpha\right)\right](\overrightarrow{e_x}-\mathrm{j}\overrightarrow{e_y}) = E_0\exp\left(\mathrm{j}\frac{\pi}{2}\right)\exp(\mathrm{j}\alpha)\,(\overrightarrow{e_x}-\mathrm{j}\overrightarrow{e_y}) \\ &= E_0\,\mathrm{j}\,\exp(\mathrm{j}\alpha)\,(\overrightarrow{e_x}-\mathrm{j}\overrightarrow{e_y}) = E_0[\cos(\alpha)+\mathrm{j}\sin(\alpha)]\,(\mathrm{j}\overrightarrow{e_x}+\overrightarrow{e_y}) \\ &= \begin{cases} -E_0\sin(\alpha)\overrightarrow{e_x} \\ E_0\cos(\alpha)\overrightarrow{e_y}. \end{cases}\end{aligned}$$

Le champ est déphasé de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à l'angle initial, d'où le cas (b).

.....

6.20 h) On a $\overrightarrow{E_4}\left(t=\frac{T}{4}, z=0\right) = \begin{cases} E_0\cos\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{4}+\alpha\right)\overrightarrow{e_x} \\ -E_0\sin\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{4}-\alpha\right)\overrightarrow{e_y} \end{cases} = \begin{cases} E_0\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\overrightarrow{e_x} \\ -E_0\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\overrightarrow{e_y} \end{cases} = \begin{cases} -E_0\sin(\alpha)\overrightarrow{e_x} \\ -E_0\cos(\alpha)\overrightarrow{e_y}. \end{cases}$

Le vecteur fait un angle α avec le vecteur $-\overrightarrow{e_y}$ et $\frac{\pi}{2}+\alpha$ avec $\overrightarrow{e_x}$, d'où le cas (d).

.....

Fiche n° 7. Ondes électromagnétiques II

Réponses

7.1 a) ..... oui

7.1 b) ..... non

7.1 c) ..... oui

7.2 a) ..... $\underline{k}^2 = \dfrac{\mathrm{i}\omega}{\alpha}$

7.2 b) ..... $\underline{k}^3 = \dfrac{\omega^3}{\alpha} - \dfrac{\beta}{\alpha}\omega$

7.2 c) ..... $\underline{k} = \dfrac{\beta - \omega^2}{\mathrm{i}\alpha}$

7.3 a) ..... $\underline{\rho}\left(\dfrac{\underline{\alpha}}{\varepsilon_0} + \mathrm{i}\,\omega\right)$

7.3 b) ..... $\mathrm{i}\,\omega\,\underline{\rho}\left(1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) = 0$

7.4 a) ..... $\pm\dfrac{1+\mathrm{i}}{\delta}$ avec $\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\mu_0\,\alpha\,\omega}}$

7.4 b) ..... $\pm\mathrm{i}\dfrac{\omega}{c}\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}$

7.4 c) ..... $\pm\dfrac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$

7.4 d) ..... $\pm\dfrac{\omega}{c}$

7.5 a) ..... $v_\varphi = \dfrac{c}{\sqrt{1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$

7.5 b) ..... $v_g = c\sqrt{1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega_p}}$

7.6 a) ..... $\dfrac{nE_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t - kz)\overrightarrow{e_z}$

7.6 b) ..... $\dfrac{nE_0^2}{2\mu_0 c}\overrightarrow{e_z}$

7.6 c) ..... $\dfrac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}\left(1 + n^2\right)\cos^2(\omega t - kz)$

7.6 d) ..... $\dfrac{\varepsilon_0 E_0^2}{4}\left(1 + n^2\right)$

7.7 a) ..... $\dfrac{E_0^2}{2\mu_0\omega\delta}\mathrm{e}^{-\frac{2x}{\delta}}\overrightarrow{e_x}$

7.7 b) ..... $\dfrac{\gamma E_0^2}{2}\mathrm{e}^{-\frac{2x}{\delta}}$

7.8 ..... $\dfrac{|\underline{E}_0|^2}{2\mu_0 c}\,\mathrm{Re}(\underline{n})\overrightarrow{e_z}$

7.9 ..... $k^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$

7.10 a) ..... $\mathrm{div}\,\overrightarrow{E} = 0$

7.10 b) ..... $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{B} = \mu_0\gamma\overrightarrow{E} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}$

7.10 c) ..... $\Delta\overrightarrow{E} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} = \mu_0\gamma\dfrac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}$

7.11 a) ..... non

7.11 b) ..... non

7.11 c) ..... non

7.11 d) ..... oui

7.12 a) ..... oui

7.12 b) ..... oui

7.12 c) ..... oui

7.12 d) ..... oui

7.13 a) c

7.13 b) ..... a

7.13 c) ..... b

7.14 a) ..... 1 et 4

7.14 b) ..... 1 et 2

7.14 c) ..... 1 et 3

7.15 a) ..... $\boxed{\begin{cases} r+1 = t \\ n_1 - rn_1 = tn_2 \end{cases}}$

7.15 b) ..... $\boxed{\begin{cases} r = \dfrac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \\ t = \dfrac{2n_1}{n_1 + n_2} \end{cases}}$

7.16 a) ..... $\boxed{2\,\mathrm{m} \text{ et } 4\,\mathrm{m}}$

7.16 b) ..... $\boxed{\dfrac{1}{3} \text{ et } \dfrac{4}{3}}$

7.16 c) ..... $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

7.16 d) ..... $\boxed{\dfrac{1}{9} \text{ et } \dfrac{8}{9}}$

7.17 a) ..... $\boxed{\dfrac{|\underline{E}|^2}{2\mu_0\omega}\,\mathrm{Re}\left(\vec{\underline{k}}_1\right)}$

7.17 b) ..... $\boxed{\begin{array}{c} -\dfrac{|\underline{E}|^2|\underline{r}|^2}{2\mu_0\omega}\,\mathrm{Re}\left(\vec{\underline{k}}_1\right) \\ \dfrac{|\underline{E}|^2|\underline{t}|^2}{2\mu_0\omega}\,\mathrm{Re}\left(\vec{\underline{k}}_2\right) \end{array}}$

7.17 c) ..... $\boxed{|\underline{r}|^2 \text{ et } |\underline{t}|^2\,\mathrm{Re}\left(\dfrac{\underline{k}_2}{\underline{k}_1}\right)}$

Corrigés

7.1 a) La première équation indique que $\vec{a}$ et $\vec{b}$ doivent être orthogonaux. Les deux équations suivantes indiquent que $\vec{a}$ et $\vec{c}$ sont orthogonaux et de même pour $\vec{b}$ et $\vec{c}$.

.....

7.1 b) Les trois vecteurs doivent être orthogonaux et le sens de $\vec{c}$ doit respecter la règle de la main droite, ce qui n'est pas le cas ici.

.....

7.1 c) Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ doivent être colinéaires et orthogonaux à $\vec{c}$.

.....

7.2 a) On a $\dfrac{\partial \vec{\underline{E}}}{\partial t} = \mathrm{i}\omega\vec{\underline{E}}$ et $\dfrac{\partial^2 \vec{\underline{E}}}{\partial z^2} = -\underline{k}^2\vec{\underline{E}}$.

.....

7.2 b) On peut écrire $\dfrac{\partial^3 \vec{\underline{E}}}{\partial t^3} = -\mathrm{i}\omega^3\vec{\underline{E}}$ et $\dfrac{\partial^3 \vec{\underline{E}}}{\partial z^3} = -\mathrm{i}\underline{k}^3\vec{\underline{E}}$.

.....

7.2 c) On a $\dfrac{\partial^2 \vec{\underline{E}}}{\partial t^2} = -\omega^2\vec{\underline{E}}$.

.....

7.3 a) En régime sinusoïdal forcé, l'équation de conservation de la charge devient, en tenant compte de la loi d'Ohm locale, $\mathrm{i}\,\omega\underline{\rho} + \underline{\alpha}\,\mathrm{div}\,\vec{\underline{E}} = 0$. Avec l'équation de Maxwell-Gauss, on a $\underline{\rho}\left(\dfrac{\underline{\alpha}}{\varepsilon_0} + \mathrm{i}\,\omega\right)$.

.....

7.3 b) En injectant l'expression de la conductivité complexe, l'équation précédente devient :

$$\underline{\rho}\left(\frac{N\,e^2}{\mathrm{i}\,m\,\omega\,\varepsilon_0} + \mathrm{i}\,\omega\right) = \mathrm{i}\,\omega\,\underline{\rho}\left(1 - \frac{N\,e^2}{m\,\varepsilon_0\,\omega^2}\right) = \mathrm{i}\,\omega\,\underline{\rho}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) = 0.$$

.....

7.4 a) Si $\omega \ll \dfrac{1}{\tau} \ll \omega_p$, alors :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 + \mathrm{i}\frac{\omega_p^2\,\tau^2}{\omega\,\tau\,(1-\mathrm{i}\,\omega\,\tau)}\right] \sim \frac{\omega^2}{c^2}\,\mathrm{i}\,\frac{\omega_p^2\,\tau}{\omega} = \mathrm{i}\,\frac{\omega_p^2\,\tau}{c^2}\,\omega = \mathrm{i}\,\alpha_0\,\mu_0\,\omega.$$

En utilisant $\mathrm{i} = \dfrac{(1+\mathrm{i})^2}{2}$, on en déduit $\underline{k} = \pm\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\sqrt{\alpha_0\,\mu_0\,\omega} = \pm\dfrac{1+\mathrm{i}}{\delta}$.

.....

7.4 b) Si $\dfrac{1}{\tau} \ll \omega < \omega_p$, alors :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 + \mathrm{i}\frac{\omega_p^2\,\tau^2}{\omega\,\tau\,(1-\mathrm{i}\,\omega\,\tau)}\right] \sim \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 + \mathrm{i}\frac{\omega_p^2\,\tau^2}{-\mathrm{i}\,\omega^2\,\tau^2}\right] = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right].$$

Il vient ainsi $\underline{k} = \pm\mathrm{i}\dfrac{\omega}{c}\sqrt{-1 + \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}}$.

.....

7.4 c) Si $\dfrac{1}{\tau} \ll \omega_p < \omega$, alors :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 + \mathrm{i}\frac{\omega_p^2\,\tau^2}{\omega\,\tau\,(1-\mathrm{i}\,\omega\,\tau)}\right] \sim \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 + \mathrm{i}\frac{\omega_p^2\,\tau^2}{-\mathrm{i}\,\omega^2\,\tau^2}\right] = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right] = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}.$$

Il vient ainsi : $\underline{k} = \pm\dfrac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$.

.....

7.4 d) Si $\dfrac{1}{\tau} \ll \omega_p \ll \omega$, alors :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 + \mathrm{i}\frac{\omega_p^2\,\tau^2}{\omega\,\tau\,(1-\mathrm{i}\,\omega\,\tau)}\right] \sim \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 + \mathrm{i}\frac{\omega_p^2\,\tau^2}{-\mathrm{i}\,\omega^2\,\tau^2}\right] \sim \frac{\omega^2}{c^2}.$$

Il vient ainsi : $\underline{k} = \pm\dfrac{\omega}{c}$.

.....

7.5 a) Si $\omega > \omega_p$, alors $\underline{k}^2 > 0$: le nombre d'onde est réel. On a $k'' = 0$ et $k' = \dfrac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$.

Le champ en notation réelle a pour expression $\vec{E} = E_0\,\cos\!\big(\omega\,t - k'\,z\big)\,\vec{e_x}$. L'onde est progressive et sa vitesse de phase vaut :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k'} = \frac{c}{\sqrt{1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}}}.$$

.....

7.5 b) La vitesse de groupe est définie par $v_g = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k'}$. En dérivant la relation de dispersion, on obtient :

$$v_g = c^2\,\frac{k'}{\omega} = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}.$$

.....

7.6 a) On a $\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \dfrac{nE_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t - kz)\vec{e_z}$.

.....

7.6 b) On peut écrire $\big\langle\vec{\Pi}\big\rangle = \dfrac{nE_0^2}{\mu_0 c}\big\langle\cos^2(\omega t - kz)\big\rangle\vec{e_z} = \dfrac{nE_0^2}{2\mu_0 c}\vec{e_z}$.

.....

7.6 c) On a $w_{EM} = \dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \dfrac{B^2}{2\mu_0} = \left(\dfrac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} + \dfrac{n^2 E_0^2}{2\mu_0 c^2}\right)\cos^2(\omega t - kz) = \dfrac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}\big(1 + n^2\big)\cos^2(\omega t - kz)$.

.....

7.6 d) On peut écrire $\langle w_{EM}\rangle = \dfrac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}\left(1+n^2\right)\left\langle\cos^2(\omega t - kz)\right\rangle = \dfrac{\varepsilon_0 E_0^2}{4}\left(1+n^2\right)$.

7.7 a) On a :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0\omega\delta}\mathrm{e}^{-\frac{2x}{\delta}}\left[\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\sin\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) + \cos^2\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\right]\vec{e_x}.$$

Donc, on a $\left\langle\vec{\Pi}\right\rangle = \dfrac{E_0^2}{2\mu_0\omega\delta}\mathrm{e}^{-\frac{2x}{\delta}}\vec{e_x}$.

7.7 b) On peut écrire $\langle p_J\rangle = \left\langle\vec{j}\cdot\vec{E}\right\rangle = \left\langle\gamma|\vec{E}|^2\right\rangle = \gamma E_0^2\mathrm{e}^{-\frac{2x}{\delta}}\left\langle\cos^2\left(\omega t - \dfrac{x}{\delta}\right)\right\rangle = \dfrac{\gamma E_0^2}{2}\mathrm{e}^{-\frac{2x}{\delta}}$.

7.8 On a $\left\langle\vec{\Pi}\right\rangle = \dfrac{1}{2\mu_0}\,\mathsf{Re}\left(\underline{E}_0^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-kz)}\vec{e_x}\wedge\dfrac{nE_0}{c}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-kz)}\vec{e_y}\right) = \dfrac{1}{2\mu_0 c}\,\mathsf{Re}(|\underline{E}_0|^2\,\underline{n}\vec{e_z}) = \dfrac{|\underline{E}_0|^2}{2\mu_0 c}\,\mathsf{Re}(\underline{n})\vec{e_z}$.

7.9 Le laplacien $\Delta\underline{\vec{E}}$ se réduit ici à $\dfrac{\partial^2\underline{\vec{E}}}{\partial z^2}$. La dérivée partielle de $\underline{\vec{E}}$ par rapport à z vaut $-\underline{k}^2\,\underline{\vec{E}}$. La dérivée partielle de $\underline{\vec{E}}$ par rapport à t vaut $-\omega^2\,\underline{\vec{E}}$. La dérivée partielle $\dfrac{\partial\vec{j}}{\partial t}$ vaut $\mathrm{i}\,\omega\,\underline{\alpha}\,\underline{\vec{E}}$.
Il vient ainsi : $-\underline{k}^2\,\underline{\vec{E}} + \dfrac{1}{c^2}\,\omega^2\,\underline{\vec{E}} = \mathrm{i}\,\omega\,\underline{\alpha}\,\mu_0\,\underline{\vec{E}} = \dfrac{n\,e^2}{m}\,\underline{\alpha}\,\mu_0\,\underline{\vec{E}}$. En posant $\omega_p^2 = \dfrac{n\,e^2}{m}\,\underline{\alpha}\,\mu_0\,c^2 = \dfrac{n\,e^2}{m}\,\underline{\alpha}\,\dfrac{1}{\varepsilon_0}$ et avec $\underline{\vec{E}}$ non nul, on obtient :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}.$$

7.10 a) Les équations de Maxwell s'écrivent $\operatorname{div}\vec{E} = 0$ et $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\gamma\vec{E} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$.

7.10 c) On exprime le rotationnel $\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E}) = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div}\vec{E}) - \Delta\vec{E} = -\Delta\vec{E}$. On peut alors écrire :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E}) = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\gamma\vec{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right).$$

Donc, $\Delta\vec{E} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0\gamma\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$.

7.11 a) On a $\operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{\partial E}{\partial z} \neq 0$.

7.11 b) On a $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = \vec{0} \neq -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$.

7.11 c) On peut écrire $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = -\dfrac{\omega E_0}{c^2}\cos(\omega t - kz)\vec{e_y}$ et $\mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \dfrac{\omega E_0}{c^2}\cos(\omega t - kz)\vec{e_z}$.

7.11 d) On a $\operatorname{div}\vec{B} = \dfrac{\partial B}{\partial x} = 0$.

7.12 a) On a $\operatorname{div}\underline{\vec{E}} = \dfrac{\partial\underline{E}}{\partial x} = 0$.

7.12 b) On peut écrire $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\underline{\vec{E}} = -kE_0\exp[\mathrm{i}(\omega t - kz)]\vec{e_y}$ et $-\dfrac{\partial\underline{\vec{B}}}{\partial t} = -kE_0\exp[\mathrm{i}(\omega t - kz)]\vec{e_y}$.

7.12 c) On a $\overrightarrow{\text{rot}}\,\underline{\vec{B}} = \dfrac{\omega E_0}{c^2}\exp[\mathrm{i}(\omega t - kz)]\overrightarrow{e_x}$ et $\mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t} = \dfrac{\omega E_0}{c^2}\exp[\mathrm{i}(\omega t - kz)]\overrightarrow{e_x}$.

.....

7.12 d) On a $\text{div}\,\underline{\vec{B}} = \dfrac{\partial \underline{B}}{\partial y} = 0$.

.....

7.13 a) On a $\underline{k}^2$ complexe donc $\underline{k} = k + \mathrm{i}k''$.

.....

7.13 b) On a $\underline{k}^2 > 0$ donc $\underline{k}$ est réel et $\underline{k} = k'$.

.....

7.13 c) On a $\underline{k}^2 < 0$ donc $\underline{k}$ est un imaginaire pur et $\underline{k} = \mathrm{i}k''$.

.....

7.14 a) La norme de $\vec{E}$ est une fonction sinusoïdale de x et de t.

.....

7.14 b) La norme de $\vec{E}$ est une fonction sinusoïdale de t et décroît exponentiellement avec x.

.....

7.14 c) La norme de $\vec{E}$ est une fonction sinusoïdale de t. Elle décroît exponentiellement avec x mais en présentant des oscillations.

.....

7.15 a) La continuité du champ électrique impose :

$$\vec{E}_i(0,t) + \vec{E}_r(0,t) = \vec{E}_t(0,t) \qquad \text{donc} \qquad E_0\cos(\omega t) + rE_0\cos(\omega t) = tE_0\cos(\omega t) \qquad \text{donc} \qquad 1 + r = t.$$

La continuité du champ magnétique impose :

$$\vec{B}_i(0,t) + \vec{B}_r(0,t) = \vec{B}_t(0,t) \quad \text{donc} \quad \frac{n_1E_0}{c}\cos(\omega t) - \frac{n_1rE_0}{c}\cos(\omega t) = \frac{n_2tE_0}{c}\cos(\omega t) \quad \text{donc} \quad n_1 - rn_1 = tn_2.$$

.....

7.15 b) On déduit de la question précédente :

$$n_1 - rn_1 = tn_2 = n_2 + rn_2 \qquad \text{donc} \qquad n_1 - n_2 = r(n_1 + n_2) \qquad \text{donc} \qquad r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

et

$$t = 1 + r = \frac{n_1 + n_2 + n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}.$$

.....

7.16 a) Dans le vide, $\lambda_1 = 2\,\text{m}$ et, dans le plasma, $\lambda_2 = 4\,\text{m}$.

.....

7.16 b) On lit sur la figure $r = \dfrac{E_r}{E_i} = \dfrac{1}{3}$ et $t = \dfrac{E_t}{E_i} = \dfrac{4}{3}$.

.....

7.16 c) On peut écrire :

$$r = \frac{1 - n_2}{1 + n_2} = \frac{1}{3} \qquad \text{donc} \qquad 3 - 3n_2 = 1 + n_2 \qquad \text{donc} \qquad 2 = 4n_2 \qquad \text{donc} \qquad n_2 = \frac{1}{2}.$$

On peut aussi écrire :

$$t = \frac{2}{1 + n_2} = \frac{4}{3} \qquad \text{donc} \qquad 6 = 4 + 4n_2 \qquad \text{donc} \qquad n_2 = \frac{1}{2}.$$

.....

7.16 d) On écrit $R = |r|^2 = \dfrac{1}{9}$ et $T = |t|^2 n_2 = \dfrac{16}{9} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{8}{9}$.

.....

7.17 a) On a :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \mathsf{Re}(\underline{\vec{E}}^* \wedge \underline{\vec{B}}) = \frac{1}{2\mu_0} \mathsf{Re}\left[\underline{\vec{E}}^* \wedge \left(\frac{\underline{\vec{k}}_1 \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega}\right)\right] = \frac{1}{2\mu_0\omega} \mathsf{Re}\left[(\underline{\vec{E}}^* \cdot \underline{\vec{E}})\underline{\vec{k}}_1 - (\underline{\vec{E}}^* \cdot \underline{\vec{k}}_1)\underline{\vec{E}}\right].$$

On en déduit $\langle \vec{\Pi} \rangle = \dfrac{|\underline{E}|^2}{2\mu_0\omega} \mathsf{Re}\left(\underline{\vec{k}}_1\right)$.

.....

7.17 b) On écrit $\langle \vec{\Pi}_r \rangle = -\dfrac{|\underline{E}|^2 |\underline{r}|^2}{2\mu_0\omega} \mathsf{Re}\left(\underline{\vec{k}}_1\right)$ et $\langle \vec{\Pi}_t \rangle = \dfrac{|\underline{E}|^2 |\underline{t}|^2}{2\mu_0\omega} \mathsf{Re}\left(\underline{\vec{k}}_2\right)$.

.....

7.17 c) On a $R = |\underline{r}|^2$ et $T = |\underline{t}|^2 \, \mathsf{Re}\left(\dfrac{\underline{k}_2}{\underline{k}_1}\right)$.

.....

Fiche n° 8. Modèle scalaire de la lumière

Réponses

8.1 a) ..... $\boxed{n_{\text{air}} \times h}$

8.1 b) ..... $\boxed{n_{\text{eau}} \times H}$

8.1 c) ..... $\boxed{n_{\text{air}} \times h + n_{\text{eau}} \times H}$

8.1 d) ..... $\boxed{1 \times h + n_{\text{eau}} \times H}$

8.2 a) ..... $\boxed{n \times e}$

8.2 b) ..... $\boxed{1 \times (\text{AA}' - e)}$

8.2 c) ..... $\boxed{\text{AA}' + (n-1)e}$

8.3 a) ..... $\boxed{\text{AB}\sin(\alpha)}$

8.3 b) ..... $\boxed{-\text{AB}\sin(\alpha)}$

8.4 a) ..... $\boxed{\text{Convergente}}$

8.4 b) ..... $\boxed{\text{Convergente}}$

8.4 c) ..... $\boxed{\text{Divergente}}$

8.4 d) ..... $\boxed{\text{Convergente}}$

8.5 a) ..... $\boxed{\text{a et c}}$

8.5 b) ..... $\boxed{\text{c}}$

8.6 a) ..... $\boxed{\text{b et c}}$

8.6 b) ..... $\boxed{\text{b}}$

8.6 c) ..... $\boxed{n_1 a \sin(\alpha)}$

8.6 d) ..... $\boxed{\text{a}}$

8.6 e) ..... $\boxed{n_2 a \sin(\beta)}$

8.6 f) ..... $\boxed{n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)}$

8.7 a) ..... $\boxed{\text{a et b}}$

8.7 b) ..... $\boxed{\frac{2\pi}{\lambda_0}((\text{SA}') + d + e)}$

8.7 c) ..... $\boxed{\frac{2\pi}{\lambda_0}((\text{SA}) + d + ne)}$

8.7 d) ..... $\boxed{\frac{2\pi}{\lambda_0}(n-1)e}$

8.8 a) ..... $\boxed{\frac{\pi}{\lambda_0}\frac{h}{\sin(\theta_1)}}$

8.8 b) ..... $\boxed{\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{h}{\sin(\theta_1)} + \pi}$

8.8 c) ..... $\boxed{2e\tan(\theta_2)}$

8.8 d) ..... $\boxed{\frac{h}{2} - e\tan(\theta_2)}$

8.8 e) ..... $\boxed{\text{b}}$

8.8 f) ..... $\boxed{\frac{4\pi}{\lambda_0}\left(\frac{h}{2\sin\theta_1} + \left(n - \frac{1}{n}\right)\frac{e}{\cos(\theta_2)}\right)}$

8.8 g) ..... $\boxed{\frac{4\pi}{\lambda_0}\frac{e}{\cos(\theta_2)}\left(n - \frac{1}{n}\right) - \pi}$

8.8 h) ..... $\boxed{\text{a}}$

8.9 a) ..... $\boxed{\frac{2\pi}{\lambda_0}e(n-1)}$

8.9 b) ..... $\boxed{\frac{e}{\cos(\theta_2)}}$

8.9 c) ..... $\boxed{\text{I}_1\text{I}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)}$

8.9 d) ..... $\boxed{\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{e}{\cos(\theta_2)}(n - \cos(\theta_1 - \theta_2))}$

8.9 e) ..... $\boxed{\text{c}}$

8.9 f) ..... $\boxed{\frac{2\pi}{\lambda_0}e(n\cos(\theta_2) - \cos(\theta_1))}$

8.10 a) ..... $\boxed{2\pi}$

8.10 b) ..... $\boxed{\pi}$

8.10 c) ..... $\boxed{\frac{e}{\cos(\theta_2)}}$

8.10 d) ..... $\boxed{\frac{4\pi}{\lambda_0}\frac{ne}{\cos(\theta_2)} - \pi}$

8.11 a) ..... $\boxed{\Delta f = 1{,}0 \times 10^{11}\,\text{Hz}}$

8.11 b) ..... $\boxed{\Delta f = 1{,}0 \times 10^{7}\,\text{Hz}}$

8.11 c) ..... $\boxed{\tau_c = 45 \times 10^{3}\,\text{ps}}$

8.11 d) ..... $\boxed{\text{2, 1 puis 3}}$

8.12 a) ..... $\boxed{K_1 S_0 \dfrac{T}{2\pi\tau} \sin\left(2\pi \dfrac{\tau}{T}\right)}$

8.12 b) ..... $\boxed{\text{d}}$

8.12 c) ..... $\boxed{100\,\text{GHz}}$

8.12 d) ..... $\boxed{\dfrac{K_2 S_0^2}{2\tau}\left(\tau + \dfrac{T}{4\pi}\sin\left(4\pi\dfrac{\tau}{T}\right)\right)}$

8.12 e) ..... $\boxed{\text{b}}$

8.12 f) ..... $\boxed{\text{non}}$

8.13 a) ..... $\boxed{1{,}00 \times 10^{-10}\,\text{W}}$

8.13 b) ..... $\boxed{7{,}50 \times 10^{-10}\,\text{W}}$

8.13 c) ..... $\boxed{6{,}67 \times 10^{-9}\,\text{W}}$

8.13 d) ..... $\boxed{2 \times 10^{-17}\,\text{J}}$

8.13 e) ..... $\boxed{3{,}38 \times 10^{-16}\,\text{J}}$

8.13 f) ..... $\boxed{3{,}33 \times 10^{-16}\,\text{J}}$

8.13 g) ..... $\boxed{\text{a}}$

Corrigés

8.1 a) L'air a pour indice optique n_{air}. Du point S au point I, le rayon lumineux parcourt la distance h.

.....

8.1 b) L'eau a pour indice optique n_{eau}. Du point I au point F, le rayon lumineux parcourt la distance H.

.....

8.1 c) Les chemins optiques se somment : $(\text{SF}) = (\text{SI}) + (\text{IF}) = n_{\text{air}} \times h + n_{\text{eau}} \times H$.

.....

8.1 d) L'indice optique du vide est égal à 1.

.....

8.2 a) Entre les points B et C, le rayon confondu avec l'axe optique parcourt la distance géométrique e.

.....

8.2 b) L'indice optique du vide est égal à 1. De plus, à la distance totale AA', il faut retrancher l'épaisseur e de la lentille pour obtenir la distance géométrique parcourue par le rayon lumineux dans l'air.

.....

8.2 c) Les chemins optiques se somment : $(\text{AA}') = n \times e + 1 \times (\text{AA}' - e) = \text{AA}' + (n-1)e$. Cette expression est valable quel que soit le rayon issu de A et arrivant en A' puisque les points A et A' sont conjugués !

.....

8.3 a) En décomposant le chemin optique de la source S jusqu'au point A, la différence de chemin optique demandée s'écrit : $(\text{SA}) - (\text{SB}) = (\text{SH}) + (\text{HA}) - (\text{SB})$. Par ailleurs, le plan passant par H et B étant une surface d'onde issue de S, il vient : $(\text{SA}) - (\text{SB}) = (\text{HA})$. Dans l'air, cela donne : $(\text{SA}) - (\text{SB}) = \text{HA} = \text{AB}\sin(\alpha)$.

.....

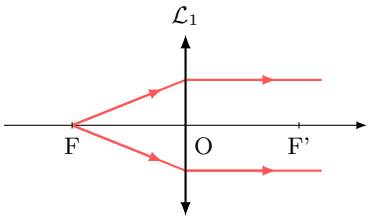
8.3 b) Il y a égalité des chemins optiques : $(\text{SAS}') = (\text{SBS}')$, c'est-à-dire $(\text{SA}) + (\text{AS}') = (\text{SB}) + (\text{BS}')$.

On en déduit : $(\text{AS}') - (\text{BS}') = (\text{SB}) - (\text{SA}) = -\text{AB}\sin(\alpha)$.

.....

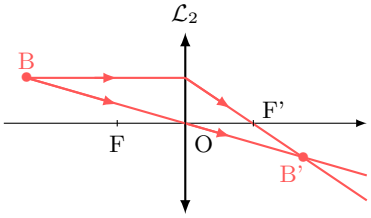
8.4 a)

En vertu du théorème de Malus, les rayons en aval de la lentille sont parallèles à l'axe optique. En amont, les surfaces d'onde sont des cercles concentriques centrés sur un point (lui aussi en amont), qui est donc le conjugué d'une image à l'infini sur l'axe optique, à savoir le foyer principal objet. Ainsi, $\mathcal{L}_1$ est convergente.



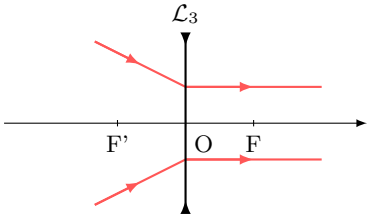
8.4 b)

Les surfaces d'onde permettent de voir qu'il y a conjugaison entre un objet réel et une image réelle (de même taille, et renversée) : $\mathcal{L}_2$ est donc nécessairement convergente.



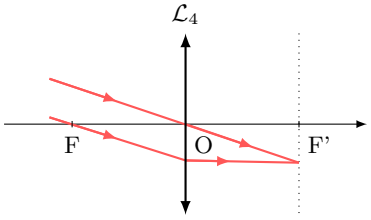
8.4 c)

Les surfaces d'onde incidentes sont des cercles concentriques centrés sur un point en aval de la lentille. De plus, en vertu du théorème de Malus, les rayons émergents sont parallèles à l'axe optique. Le point en question est donc le foyer objet de la lentille, situé après son centre optique : $\mathcal{L}_3$ est donc divergente.



8.4 d)

En vertu du théorème de Malus, les rayons incidents, parallèles entre eux, proviennent d'un objet à l'infini, qui est conjugué par la lentille d'un point hors de l'axe optique : il s'agit d'un foyer image secondaire, situé après le centre optique. $\mathcal{L}_4$ est donc convergente.



8.5 a) Les rayons incidents étant parallèles à l'axe optique, d'après le théorème de Malus, les surfaces d'onde sont perpendiculaires à l'axe optique.

8.5 b) Tout se passe comme si F' était une source ponctuelle émettant une onde sphérique : les surfaces d'onde sont donc des cercles concentriques centrés sur F'.

8.6 a) Le point H_1 est le projeté orthogonal de I_2 : d'après le théorème de Malus, ils se situent donc sur la même surface d'onde. De même, H_2 et I_1 appartiennent à un même front d'onde issu de M_∞ (principe du retour inverse de la lumière).

8.6 b) On voit sur le schéma que $i_1 + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\pi}{2}$; d'où, directement, $\alpha = i_1$.

8.6 c) Dans le triangle $H_1I_1I_2$, on a $\sin(\alpha) = \frac{H_1I_1}{a}$. De plus, $(H_1I_1) = n_1 H_1I_1$, d'où $(H_1I_1) = n_1 a \sin(\alpha)$.

8.6 d) Dans le triangle $H_2I_1I_2$, on a $\beta + \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - i_2\right) = \pi$; d'où $\beta = i_2$.

.....

8.6 e) Dans le triangle $H_2I_1I_2$, on a $\sin(\beta) = \frac{I_2H_2}{a}$. De plus, $(I_2H_2) = n_2 I_2H_2$, d'où $(I_2H_2) = n_2 a \sin(\beta)$.

.....

8.6 f) Les chemins optiques (H_1I_1) et (I_2H_2) étant identiques, on retrouve la loi de la réfraction de Snell-Descartes : $n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$.

.....

8.7 a) L'indice de la lame étant différent de celui de l'air, C et C′ ne sont pas sur la même surface d'onde.

.....

8.7 b) On a $\phi(C') = \frac{2\pi}{\lambda_0}(SC') = \frac{2\pi}{\lambda_0}(SA') + \frac{2\pi}{\lambda_0}(A'B') + \frac{2\pi}{\lambda_0}(B'C') = \frac{2\pi}{\lambda_0}(\left(SA'\right) + d + e)$.

.....

8.7 c) On a $\phi(C) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(SC) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(SA) + \frac{2\pi}{\lambda_0}(AB) + \frac{2\pi}{\lambda_0}(BC) = \frac{2\pi}{\lambda_0}((SA) + d + ne)$.

.....

8.7 d) Les points A et A′ appartenant à la même surface d'onde, les chemins optiques (SA) et $\left(SA'\right)$ sont égaux donc le déphasage est $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n-1)e$.

.....

8.8 a) D'après la loi de la réflexion de Snell-Descartes, au niveau du point d'incidence A, l'angle réfléchi est égal à l'angle incident en valeur absolue. Le triangle SAM est donc un triangle isocèle qu'on peut subdiviser en deux triangles rectangles. Ainsi, en se plaçant dans celui d'hypoténuse SA et de côté $h/2$, le chemin optique (SA) est tel que :

$$(SA) = n_{\text{air}} \times SA = 1 \times \frac{h}{2\sin(\theta_1)} = \frac{h}{2\sin(\theta_1)}$$

donc la phase $\phi_1(A)$ vérifie $\phi_1(A) = \frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{h}{2\sin(\theta_1)} = \frac{\pi}{\lambda_0}\frac{h}{\sin(\theta_1)}$.

.....

8.8 b) Le chemin optique (AM) est égal au chemin optique (SA), ainsi $(SM) = 2\times(SA)$. Donc, avec le déphasage induit par la réflexion, la phase est telle que $\phi_1(M) = 2 \times \phi_1(A) + \pi = \frac{4\pi}{\lambda_0}\frac{h}{2\sin(\theta_1)} + \pi = \frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{h}{\sin(\theta_1)} + \pi$.

.....

8.8 c) En se plaçant dans le triangle rectangle d'hypoténuse BC, on constate que :

$$\tan(\theta_2) = \frac{BD/2}{e} \qquad \text{donc} \qquad BD = 2e\tan(\theta_2).$$

.....

8.8 d) La distance EB est telle que $EB = \frac{h - BD}{2} = \frac{h}{2} - e\tan(\theta_2)$.

.....

8.8 e) En se plaçant dans le triangle rectangle SEB, le chemin optique (SB) est tel que :

$$(SB) = n_{\text{air}} \times SB = 1 \times \frac{EB}{\sin(\theta_1)} = \frac{h}{2\sin(\theta_1)} - \frac{e\tan(\theta_2)}{\sin(\theta_1)} = \frac{h}{2\sin(\theta_1)} - \frac{e\sin(\theta_2)}{\cos(\theta_2)\sin(\theta_1)} = \frac{h}{2\sin(\theta_1)} - \frac{e}{n\cos(\theta_2)}$$

donc la phase $\phi_2(B)$ vérifie $\phi_2(B) = \frac{2\pi}{\lambda_0}\left(\frac{h}{2\sin(\theta_1)} - \frac{e}{n\cos(\theta_2)}\right)$.

.....

8.8 f) En se plaçant dans le triangle rectangle d'hypoténuse BC, le chemin optique (BC) est tel que :

$$(\mathrm{BC}) = n \times \mathrm{BC} = \frac{ne}{\cos(\theta_2)}.$$

Le chemin optique (SC) est donc tel que :

$$(\mathrm{SC}) = (\mathrm{SB}) + (\mathrm{BC}) = \frac{h}{2\sin\theta_1} - \frac{e}{n\cos(\theta_2)} + \frac{ne}{\cos(\theta_2)} = \frac{h}{2\sin\theta_1} + \left(n - \frac{1}{n}\right)\frac{e}{\cos(\theta_2)}.$$

Le chemin optique (SM) est égal au double de (SC). Ainsi la phase est $\phi_2(\mathrm{M}) = \dfrac{4\pi}{\lambda_0}\left(\dfrac{h}{2\sin\theta_1} + \left(n - \dfrac{1}{n}\right)\dfrac{e}{\cos(\theta_2)}\right)$.

.....

8.8 g) On a :

$$\Delta\phi = \phi_2(\mathrm{M}) - \phi_1(\mathrm{M}) = \frac{4\pi}{\lambda_0}\left(\frac{h}{2\sin\theta_1} + \left(n - \frac{1}{n}\right)\frac{e}{\cos(\theta_2)}\right) - \frac{4\pi}{\lambda_0}\frac{h}{2\sin(\theta_1)} - \pi = \frac{4\pi}{\lambda_0}\frac{e}{\cos(\theta_2)}\left(n - \frac{1}{n}\right) - \pi.$$

.....

8.8 h) On a :

$$\Delta\phi = \frac{4\pi}{\lambda_0}\frac{e}{\cos(\theta_2)}\left(n - \frac{1}{n}\right) - \pi = \frac{4\pi}{\lambda_0}\frac{e}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta_2)}} - \pi.$$

Or, d'après la loi de la réflexion de Snell-Descartes, il vient que :

$$\Delta\phi = \left(n - \frac{1}{n}\right) = \frac{4\pi}{\lambda_0}\frac{ne}{\sqrt{n^2 - \sin^2(\theta_1)}}\left(n - \frac{1}{n}\right) - \pi = \frac{4\pi}{\lambda_0}\frac{e\left(n^2 - 1\right)}{\sqrt{n^2 - \sin^2(\theta_1)}} - \pi.$$

.....

8.9 a) Les chemins optiques (SI_1) et (SH_1), ainsi que $(\mathrm{I}_2\mathrm{N})$ et $(\mathrm{H}_2\mathrm{M})$ sont égaux, on peut donc écrire :

$$\Delta\phi = \phi(\mathrm{N}) - \phi(\mathrm{M}) = \frac{2\pi}{\lambda_0}((\mathrm{SM}) - (\mathrm{SN})) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n\mathrm{I}_1\mathrm{I}_2 - \mathrm{H}_1\mathrm{H}_2) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(ne + d - e) - \frac{2\pi}{\lambda_0}d = \frac{2\pi}{\lambda_0}e(n-1).$$

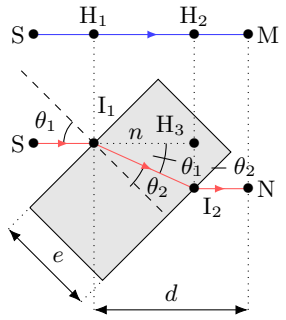
.....

8.9 b) Dans le triangle rectangle d'hypoténuse $\mathrm{I}_1\mathrm{I}_2$, on a $\cos(\theta_2) = \dfrac{e}{\mathrm{I}_1\mathrm{I}_2}$.

.....

8.9 c) On identifie un triangle rectangle $\mathrm{I}_1\mathrm{I}_2\mathrm{H}_3$ d'hypoténuse $\mathrm{I}_1\mathrm{I}_2$ avec un angle $\theta_1 - \theta_2$ de côté adjacent $\mathrm{H}_1\mathrm{H}_2$. Il vient que $\mathrm{H}_1\mathrm{H}_2 = \mathrm{I}_1\mathrm{I}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)$.

Cas 2



.....

8.9 d) Les chemins optiques (SI_1) et (SH_1), ainsi que (I_2N) et (H_2M) sont égaux, on peut donc écrire :

$$\Delta\phi = \phi(N) - \phi(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0}((SM) - (SN)) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(nI_1I_2 - H_1H_2).$$

En utilisant les expressions obtenues précédemment, on a :

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0}(nI_1I_2 - I_1I_2\cos(\theta_1 - \theta_2)) = \frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{e}{\cos(\theta_2)}(n - \cos(\theta_1 - \theta_2)).$$

.....

8.9 e) En utilisant l'identité trigonométrique, il vient que $\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) + \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)$. De plus, la loi de Snell-Descartes de la réfraction nous permet d'écrire $\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) + n\sin^2(\theta_2)$. Enfin, en utilisant l'identité trigonométrique $1 = \sin^2(\theta_2) + \cos^2(\theta_2)$, il vient que :

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) + n - n\cos^2(\theta_2).$$

.....

8.9 f) En utilisant les expressions obtenues précédemment, on a :

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= \frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{e}{\cos(\theta_2)}(n - \cos(\theta_1 - \theta_2)) = \frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{e}{\cos(\theta_2)}\big(n - \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - n + \cos^2(\theta_2)\big)\\ &= \frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{e}{\cos(\theta_2)}\big(-\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) + n\cos^2(\theta_2)\big).\end{aligned}$$

Donc, $\Delta\phi = \dfrac{2\pi}{\lambda_0}e(n\cos(\theta_2) - \cos(\theta_1))$.

.....

8.10 a) Le rayon est d'abord réfléchi par la lame semi-réfléchissante. L'indice de réfraction de la lame est supérieur à celui de l'air, il y a donc un déphasage de π. Puis, le rayon est réfléchi par le miroir et est donc, de nouveau, déphasé de π.

.....

8.10 b) Le rayon passe une première fois dans la lame, puis est réfléchi par M_2 : le rayon est déphasé de π. Il traverse une deuxième fois la lame et est réfléchi une seconde fois par la lame. Dans ce cas, le milieu de propagation du rayon incident est le plus réfringent : il n'y a pas de déphasage supplémentaire.

.....

8.10 c) On considère le triangle rectangle d'hypoténuse I_1I_2 et on utilise la relation trigonométrique $\cos(\theta_2) = \dfrac{e}{I_2I_2}$.

.....

8.10 d) Le rayon réfléchi par M_1 traverse la lame entre I_1 et I_3 après la réflexion par M_1. Le rayon réfléchi par M_2 traverse la lame entre I_1 et I_2 avant la réflexion par M_2, puis entre I_2 et I_1 après la réflexion par M_2, puis entre I_1 et I_3. En tenant compte du déphasage dû aux réflexions, et comme $I_1I_2 = I_1I_3$, il vient que :

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0}(3nI_1I_2) + \pi - \frac{2\pi}{\lambda_0}(nI_1I_2 + 2\pi) = \frac{4\pi}{\lambda_0}nI_1I_2 - \pi = \frac{4\pi}{\lambda_0}\frac{ne}{\cos(\theta_2)} - \pi.$$

.....

8.11 a) Attention à la conversion des picosecondes en secondes : on a $1\,\text{ps} = 1 \times 10^{-12}\,\text{s}$.

.....

8.11 b) Attention à la conversion des microsecondes en secondes : on a $1\,\mu\text{s} = 1 \times 10^{-6}\,\text{s}$.

.....

8.11 c) La relation $\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda} = \dfrac{\Delta f}{f}$ se réécrit $\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda} = \dfrac{1}{\tau_c f}$, soit $\tau_c = \dfrac{\lambda^2}{c\Delta\lambda}$. Ainsi, on a :

$$\tau_c = \frac{\left(820 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}\right)^2}{3 \times 10^8\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1} \times 50 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}} = 45 \times 10^{-15}\,\mathrm{s} = 45 \times 10^3\,\mathrm{ps}.$$

8.11 d) Une source possède une cohérence temporelle d'autant plus forte que le temps de cohérence est long (trains d'onde avec une durée importante). Parmi les trois sources, c'est le laser qui possède la meilleure cohérence temporelle. La source de lumière blanche munie du filtre possède la moins bonne cohérence temporelle.

8.12 a) La tension u_1 vérifie :

$$u_1 = K_1\langle s(t)\rangle = \frac{K_1}{\tau}\int_0^\tau s(t)\,\mathrm{d}t = \frac{K_1}{\tau}\int_0^\tau S_0\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{K_1 S_0}{\tau}\left[\frac{\sin(\omega t)}{\omega}\right]_0^\tau$$
$$= K_1 S_0 \frac{1}{\omega\tau}\sin(\omega\tau) = K_1 S_0 \frac{T}{2\pi\tau}\sin\left(2\pi\frac{\tau}{T}\right).$$

8.12 b) La valeur maximale de la fonction $\sin\left(2\pi\dfrac{\tau}{T}\right)$ est 1, donc la valeur maximale de u_1 est $K_1 S_0 \dfrac{T}{2\pi\tau}$.

8.12 c) La valeur maximale du signal u_1 est $K_1 S_0 \dfrac{T}{2\pi\tau}$. Ce signal est exploitable lorsque

$$K_1 S_0 \frac{T}{2\pi\tau} \geqslant \frac{K_1 S_0}{2\pi \times 100} \qquad \text{soit} \qquad T \geqslant \frac{\tau}{100} \qquad \text{soit} \qquad f \leqslant \frac{100}{\tau}.$$

Ainsi la fréquence maximale du signal exploitable par le capteur A est $f = \dfrac{100}{1 \times 10^{-9}\,\mathrm{s}} = 1 \times 10^{11}\,\mathrm{Hz} = 100\,\mathrm{GHz}$.

8.12 d) La tension u_2 vérifie :

$$u_2 = K_2\left\langle s^2(t)\right\rangle = \frac{K_2}{\tau}\int_0^\tau s^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{K_2 S_0^2}{\tau}\int_0^\tau \cos^2(\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{K_2 S_0^2}{2\tau}\left(\int_0^\tau \mathrm{d}t + \int_0^\tau \cos(2\omega t)\,\mathrm{d}t\right)$$
$$= \frac{K_2 S_0^2}{2\tau}\left(\tau + \frac{T}{4\pi}\sin\left(4\pi\frac{\tau}{T}\right)\right).$$

8.12 e) La valeur maximale de la fonction $\sin\left(4\pi\dfrac{\tau}{T}\right)$ est 1, donc la valeur maximale de u_2 est $\dfrac{K_2 S_0^2}{2\tau}\left(\tau + \dfrac{T}{4\pi}\right)$.

8.12 f) La valeur maximale du signal u_2 est $\dfrac{K_2 S_0^2}{2\tau}\left(\tau + \dfrac{T}{4\pi}\right)$. Ce signal est exploitable lorsque

$$\frac{K_2 S_0^2}{2\tau}\left(\tau + \frac{T}{4\pi}\right) \geqslant \frac{K_2 S_0^2}{2} \qquad \text{soit} \qquad K_2 S_0^2 \frac{T}{8\pi\tau} \geqslant 0 \qquad \text{soit} \qquad f < +\infty.$$

Ainsi, théoriquement, il n'y a pas de limite à la fréquence du signal exploitable par le capteur B.

8.13 a) On a $\mathcal{P}_{\min\,1} = \dfrac{I_{\mathrm{obs}\,1}}{s_1} = \dfrac{3 \times 10^{-11}\,\mathrm{A}}{0{,}3\,\mathrm{A}\cdot\mathrm{W}^{-1}} = 1{,}00 \times 10^{-10}\,\mathrm{W}$.

8.13 d) On a $E_{\min\,1} = \mathcal{P}_{\min\,1} \times \tau = 1{,}00 \times 10^{-10}\,\mathrm{W} \times 2{,}00 \times 10^{-7}\,\mathrm{s} = 2{,}00 \times 10^{-17}\,\mathrm{J}$.

8.13 g) Le nombre minimal de photons reçus par une photodiode $N_{\min}$ vérifie $N_{\min} = \dfrac{E_{\min}}{h\nu} = \dfrac{E_{\min}\lambda_0}{hc}$.
Ainsi, on a $N_{\min\,1} = 47$, $N_{\min\,2} = 935$ et $N_{\min\,3} = 1\,104$.

Fiche n° 9. Outils mathématiques pour la diffusion

Réponses

9.1 a) ..... $\boxed{abc}$

9.1 b) ..... $\boxed{abc\sin(\alpha)}$

9.1 c) ..... $\boxed{\pi r^2 h}$

9.1 d) ..... $\boxed{\pi r^2 h\cos(\alpha)}$

9.2 a) ..... négatif

9.2 b) ..... positif

9.2 c) ..... (b)

9.2 d) ..... (b)

9.2 e) ..... (c)

9.2 f) ..... (a)

9.3 a) ..... $\boxed{\dfrac{2\pi rh}{3}}$

9.3 b) ..... $\boxed{\dfrac{\pi r^2}{3}}$

9.3 c) ..... (c)

9.4 a) ..... (c)

9.4 b) ..... (b)

9.4 c) ..... $\boxed{\pi R^2 + 2\dfrac{V}{R}}$

9.4 d) ..... (b)

9.4 e) ..... (a) et (c)

9.5 a) ..... $\boxed{n(x,t) = j_0 x + n_0}$

9.5 b) ..... $\boxed{n(x,t) = \dfrac{n_1 - n_0}{L}x + n_0}$

9.5 c) ..... $\boxed{\dfrac{p}{2}x(x-L) + n_0}$

9.6 a) ..... $\boxed{n(x,t) = n_0 \exp\left(\dfrac{t}{\tau}\right)}$

9.6 b) ..... $\boxed{n(t) = \dfrac{n_0}{1 + \dfrac{n_0 t}{n_c \tau}}}$

9.6 c) ..... $\boxed{n_0\left(1 - \dfrac{x}{L}\right)\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right) + p\tau\left(1 - \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\right)}$

Corrigés

9.2 e) Le point B est au niveau d'un col de la fonction $f(x,y)$. À partir du point B, en se déplaçant dans la direction y croissant et en gardant x fixe à $x = x_\mathrm{B}$, la quantité $f(x_\mathrm{B}, y)$ décroît de plus en plus. La dérivée seconde par rapport à y est donc négative.

.....

9.2 f) De même, en se déplaçant dans la direction x croissant à y fixe à $y = y_\mathrm{B}$, la quantité $f(x, y_\mathrm{B})$ croît de plus en plus. La dérivée seconde par rapport à x est donc positive.

.....

9.3 c) On a les équivalences suivantes :

$$\frac{\partial V}{\partial h} > \frac{\partial V}{\partial r} \iff \frac{\pi r^2}{3} > \frac{2\pi rh}{3} \iff r > 2h.$$

.....

9.4 a) Il faut sommer la surface du fond de la casserole et la surface latérale.

.....

9.4 b) C'est le volume d'un cylindre de rayon R et de hauteur H.

.....

9.4 c) Il faut utiliser les deux résultats précédents.

.....

9.4 d) On fait varier le rayon R pour une valeur de V fixée à V_0. La notation $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}R}(R, V_0)$ n'est pas adéquate, la notation « d » étant réservée aux fonctions d'une seule variable.

.....

9.4 e) Pour minimiser la surface, on cherche : $\left(\dfrac{\partial S}{\partial R}\right)_{V_0} = 2\pi R + 2V(-\dfrac{1}{R^2}) = 0$, soit $V = \pi R^3$. Or $V = \pi R^2 H$, on en déduit donc $R = H$ par identification. On peut vérifier dans sa cuisine que cela correspond bien au choix « standard » des industriels.

.....

9.5 c) Par intégrations successives, on obtient :

$$\frac{\partial n}{\partial x}(x,t) = px + A \quad \text{donc} \quad n(x,t) = \frac{px^2}{2} + Ax + B.$$

Les conditions aux limites imposent :

$$\begin{cases} n(0,t) = B & = n_0 \\ n(L,t) = \dfrac{pL^2}{2} + AL + B & = n_0 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} B & = n_0 \\ A & = -\dfrac{pL}{2}. \end{cases}$$

La fonction n s'écrit alors :

$$n(x,t) = \frac{px^2}{2} - \frac{pL}{2}x + n_0 = \frac{p}{2}x(x-L) + n_0.$$

.....

9.6 b) On a une fonction qui ne dépend que de t. On sépare les variables, en écrivant :

$$-\frac{\mathrm{d}n}{n^2} = \frac{\mathrm{d}t}{n_c\tau} \quad \text{donc} \quad \mathrm{d}\left(\frac{1}{n}\right) = \mathrm{d}\left(\frac{t}{n_c T}\right).$$

On intègre :

$$\frac{1}{n(t)} - \frac{1}{n_0} = \frac{t}{n_c\tau} \quad \text{donc} \quad n(t) = \frac{n_0}{1 + \dfrac{n_0 t}{n_c\tau}}.$$

.....

9.6 c) On a une équation différentielle sur t : $\dfrac{\partial n}{\partial t}(x,t) + \dfrac{n(x,t)}{\tau} = p$. C'est une équation linéaire dont la solution est de la forme $n(x,t) = A\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right) + p\tau$. La condition initiale impose $n(x,0) = n_0\left(1 - \dfrac{x}{L}\right)$. On a donc :

$$A = n_0\left(1 - \frac{x}{L}\right) - p\tau = A(x).$$

La solution est donc de la forme :

$$n(x,t) = n_0\left(1 - \frac{x}{L}\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + p\tau\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right).$$

.....

Fiche n° 10. Diffusion thermique

Réponses

10.1 a) ..... d

10.1 b) ..... b

10.1 c) c

10.1 d) ..... $\mathrm{d}U = \mu c \dfrac{\partial T}{\partial t} S \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$

10.1 e) ..... b

10.1 f) ..... a

10.1 g) c

10.1 h) ..... $-\dfrac{\partial j_Q}{\partial x} S \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$

10.2 a) ..... a

10.2 b) ..... a

10.2 c) ..... b

10.3 a) ..... $\sqrt{2}$

10.3 b) ..... $1/\sqrt{2}$

10.3 c) 4

10.3 d) 2

10.4 a) ..... a

10.4 b) ..... 2×10^{-3}

10.4 c) ..... oui

10.5 a) ..... $T(x) = \dfrac{T_2 - T_1}{L} x + T_1$

10.5 b) ..... b et c

10.5 c) ..... a

10.6 a) ..... b

10.6 b) c

10.6 c) ..... d

10.6 d) ..... a

10.7 a) ..... a

10.7 b) c

10.7 c) c

10.7 d) ..... en série

10.7 e) ..... $1{,}1 \times 10^3\,\mathrm{W}$

10.8 ..... $\dfrac{T_1 + R_{\mathrm{th}} h_2 S T_2}{1 + R_{\mathrm{th}} h_2 S}$

10.9 a) ..... $4{,}5 \times 10^{-2}\,\mathrm{K \cdot W^{-1}}$

10.9 b) ..... $0{,}53\,\mathrm{K \cdot W^{-1}}$

10.9 c) c

10.9 d) ..... $3{,}2 \times 10^{-1}\,\mathrm{K \cdot W^{-1}}$

10.9 e) ..... a

10.10 a) ..... 0,7 m

10.10 b) ..... 0,8 m

10.10 c) ..... (cub., c) (cyl., a) (sph., b)

10.10 d) ..... Sphérique

10.10 e) ..... 11 °C

10.11 c

10.12 a) .. $\dfrac{\mathrm{d}\theta_{\mathrm{i}}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\theta_i}{R_{\mathrm{th}} C_{\mathrm{th}}} = \dfrac{1}{R_{\mathrm{th}} C_{\mathrm{th}}} (R_{\mathrm{th}} \phi_{\mathrm{i}} + \theta_{\mathrm{e}})$

10.12 b) ..... $\dfrac{1}{R_{\mathrm{th}}} (\theta_{\mathrm{i0}} - \theta_{\mathrm{e0}} - \theta_{\mathrm{e1}} \cos(\omega t))$

10.13 a) ..... a

10.13 b) ..... a

10.14 ..... Les bottes de paille

10.15 a) ..... $\mathrm{d}U = \mu c \dfrac{\partial T}{\partial t} S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$

10.15 b) ..... $\lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$

10.15 c) ..... $p_{\text{prod}} S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$

10.15 d) ..... $\mu c \dfrac{\partial T}{\partial t} = \lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + p_{\text{prod}}$

10.16 a) ..... $\mathrm{d}U = \mu c \dfrac{\partial T}{\partial t} S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$

10.16 b) ..... $\lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$

10.16 c) c

10.16 d) ... $\mu c \dfrac{\partial T}{\partial t} = \lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} - h \dfrac{p}{S}(T(x,t) - T_{\text{ext}})$

10.17 a) ..... b

10.17 b) . $\dfrac{R_{\text{th}} h_1 S + \dfrac{h_1}{h_2}}{1 + \dfrac{h_1}{h_2} + R_{\text{th}} h_1 S} T_1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{h_1}{h_2} + R_{\text{th}} h_1 S} T_2$

10.17 c) .. $\dfrac{1}{1 + \dfrac{h_2}{h_1} + R_{\text{th}} h_2 S} T_1 + \dfrac{\dfrac{h_2}{h_1} + R_{\text{th}} h_2 S}{1 + \dfrac{h_2}{h_1} + R_{\text{th}} h_2 S} T_2$

Corrigés

10.1 a) On utilise l'analyse dimensionnelle.

.....

10.1 c) Il faut utiliser la première loi de Joule, en supposant la tranche suffisamment fine pour considérer la température uniforme. À l'instant t, l'énergie interne de l'élément de volume de section S et de longueur $\mathrm{d}x$ peut s'écrire : $U(t) = \mu(S\,\mathrm{d}x)cT(x,t)$.

.....

10.1 d) On exprime l'énergie interne à l'instant $t + \mathrm{d}t$: $U(t+\mathrm{d}t) = \mu c S\,\mathrm{d}x T(t+\mathrm{d}t)$ puis on calcule la différence $\mathrm{d}U = U(t+\mathrm{d}t) - U(t)$.

.....

10.1 e) On considère $\mathrm{d}t$ suffisamment court pour considérer $\overrightarrow{j_Q}$ constant entre t et $t + \mathrm{d}t$. Le vecteur $\overrightarrow{S}$ entrant est orienté suivant $\overrightarrow{e_x}$.

.....

10.1 f) Attention aux conventions de signe ! Le vecteur $\overrightarrow{S}$ entrant est orienté dans le sens $-\overrightarrow{e_x}$.

.....

10.1 g) Il n'y a pas de transfert thermique au niveau de la surface latérale du fait des orientations réciproques de $\overrightarrow{j_Q}$ et de la surface considérée.

.....

10.1 h) On a $j_Q(x,t)S\,\mathrm{d}t - j_Q(x+\mathrm{d}x,t)S\,\mathrm{d}t = -\dfrac{\partial j_Q}{\partial x} S\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x$. On peut vérifier qualitativement le signe pour éviter les étourderies.

.....

10.2 a) La situation est unidimensionnelle : la température ne dépend spatialement que de x.

.....

10.2 b) Le courant thermique $\overrightarrow{j_Q} = -\lambda\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,T$ est donc dirigé seulement selon $\overrightarrow{e_x}$.

.....

10.2 c) La variation d'énergie interne pendant $\mathrm{d}t$ est $\mathrm{d}U = \mu(S\,\mathrm{d}x)c\dfrac{\partial T}{\partial t}\,\mathrm{d}t$. Cette variation est due au flux thermique $\Phi\,\mathrm{d}t = j_Q(x,t)S\,\mathrm{d}t - j_Q(x+\mathrm{d}x,t)S\,\mathrm{d}t = -\dfrac{\partial j_Q}{\partial x}S\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x$. Comme $j_Q = -\lambda\dfrac{\partial T}{\partial x}$, on a :

$$\mu(S\,\mathrm{d}x)c\frac{\partial T}{\partial t}\,\mathrm{d}t = \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}S\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x,$$

qui se simplifie en $\dfrac{\partial T}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ avec $D = \dfrac{\lambda}{\mu c}$. On vérifie donc l'équation de diffusion libre à une dimension sans source.

.....

10.4 a) Lorsque $\mathrm{Fo} \ll 1$, il ne s'est pas écoulé suffisamment de temps pour que la diffusion ait eu lieu : le processus peut être considéré comme adiabatique.

Lorsque $\mathrm{Fo} \gg 1$, suffisamment de temps s'est écoulé pour que la diffusion ait eu lieu.

.....

10.4 c) Le nombre de Fourier vaut :

$$\mathrm{Fo} = \frac{13\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1}\times 1{,}5\times 10^{-2}\,\mathrm{s}}{7\,800\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}\times 480\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}\cdot\mathrm{kg}^{-1}\times\left(5\times 10^{-3}\,\mathrm{m}\right)^2} = 2\times 10^{-3} \ll 1.$$

L'hypothèse d'une transformation adiabatique est donc valide.

.....

10.5 a) L'équation de la diffusion devient $\dfrac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} = 0$, soit $T(x) = Ax + B$. On utilise enfin les conditions limites $T(0) = T_1$ et $T(L) = T_2$. Le profil de température est donc linéaire dans la barre en régime permanent.

.....

10.5 b) L'hypothèse de barre homogène permet d'affirmer que la conductivité est identique dans toute la barre. L'hypothèse de régime permanent permet d'affirmer que $\overrightarrow{j_Q}$ est à flux conservatif. L'hypothèse des parois latérales calorifugées permet d'affirmer que le flux n'est orienté que suivant $\overrightarrow{e_x}$.

.....

10.5 c) On a $\Phi(x) = \displaystyle\iint_S \overrightarrow{j_Q}(x)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = j(x)S = -\lambda S\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = \frac{\lambda S}{L}(T_1 - T_2)$.

.....

10.6 a) La contrainte est due à l'inhomogénéité spatiale d'une grandeur intensive.

.....

10.6 b) La réponse correspond au flux d'une grandeur, le processus tendant à diminuer l'inhomogénéité spatiale liée à la contrainte.

.....

10.6 c) Le modèle proposé correspond donc au cas où l'on fait l'hypothèse d'une réponse linéaire du système.

.....

10.6 d) C'est donc une propriété intrinsèque du milieu.

.....

10.7 a) On a $R_{\mathrm{th,v}} = \dfrac{L}{\lambda S} = \dfrac{5\times 10^{-3}\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{K}^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-1}\times 1\,\mathrm{m}^2} = 5\times 10^{-3}\,\mathrm{K}\cdot\mathrm{W}^{-1}$.

.....

10.7 b) On a $\Delta T = 19\,°\mathrm{C} - 9\,°\mathrm{C} = 10\,°\mathrm{C}$. Le flux Φ vaut donc $\Phi = \dfrac{\Delta T}{R_{\mathrm{th}}} = \dfrac{10}{5\times 10^{-3}}\mathrm{W} = 2\times 10^3\,\mathrm{W}$.

.....

10.7 c) On a $\Phi = \dfrac{T_1 - T(0)}{R_{\mathrm{th},1}} = h_1 S(T_1 - T(0))$ et $\Phi = \dfrac{T(L) - T_2}{R_{\mathrm{th},2}} = h_2 S(T(L) - T_2)$.

.....

10.7 d) Les couches sont traversées par le même flux thermique : ainsi, les résistances thermiques sont en série.

.....

10.7 e) On a $\Phi' = \dfrac{1}{R'_{\text{th}}}(T_1 - T_2)$. Les résistances thermiques sont en série ; donc

$$R'_{\text{th}} = R_{\text{th}} + R_{\text{th},1} + R_{\text{th},2} = \frac{L}{\lambda S} + 2 \times \frac{1}{hS} = 9 \times 10^{-3}\,\text{K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

On a donc $\Phi' = \dfrac{10\,\text{K}}{9 \times 10^{-3}\,\text{K} \cdot \text{W}^{-1}} \approx 1{,}1 \times 10^3\,\text{W}$. Les pertes sont presque deux fois plus faibles que dans le cas du premier modèle : des conditions limites peu réalistes peuvent conduire à surestimer fortement les pertes thermiques.

.....

10.8 Par substitution, on élimine ϕ : on a $T_1 - T(L) = R_{\text{th}} h_2 S(T(L) - T_2)$ puis on isole $T(L)$. Ainsi,

$$T(L) = \frac{T_1 + R_{\text{th}} h_2 S T_2}{1 + R_{\text{th}} h_2 S}.$$

.....

10.9 a) La surface du mur en brique est de $7{,}5\,\text{m}^2 - 1{,}2\,\text{m}^2 = 6{,}3\,\text{m}^2$. La résistance de la brique est :

$$R_{\text{b}} = \frac{e_{\text{b}}}{\lambda_{\text{b}}(S_{\text{tot}} - S_{\text{f}})} = 4{,}53 \times 10^{-2}\,\text{K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

.....

10.9 b) La résistance de l'isolant est $R_{\text{i}} = \dfrac{e_{\text{i}}}{\lambda_{\text{i}}(S_{\text{tot}} - S_{\text{f}})} = 5{,}29 \times 10^{-1}\,\text{K} \cdot \text{W}^{-1}$.

.....

10.9 d) La résistance de la brique et celle de l'isolant sont en série ; d'où $R_{\text{mur}} = R_{\text{b}} + R_{\text{i}} = 5{,}74 \times 10^{-1}\,\text{K} \cdot \text{W}^{-1}$.

Les résistances R_{mur} et R_{f} sont en parallèle. La résistance équivalente du mur est alors :

$$R_{\text{eq}} = \frac{R_{\text{mur}} R_{\text{f}}}{R_{\text{mur}} + R_{\text{f}}} = 3{,}16 \times 10^{-1}\,\text{K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

.....

10.9 e) Pour maintenir cet écart, le système de chauffage doit fournir un flux thermique ϕ tel que :

$$\phi = \frac{\Delta T}{R_{\text{eq}}} = \frac{15\,\text{K}}{3{,}16 \times 10^{-1}\,\text{K} \cdot \text{W}^{-1}} = 47{,}5\,\text{W}.$$

.....

10.10 c) Il faut calculer les surfaces d'échange pour les différents igloos afin d'identifier le dénominateur des intégrales. En notant r la variable d'espace, on a $S_{\text{cub.}} = 5r^2$, $S_{\text{cyl.}} = \pi r^2 + 2\pi r \times r = 3\pi r^2$ et $S_{\text{sph.}} = 2\pi r^2$.

.....

10.10 d) Toutes les résistances thermiques sont de la forme $R_{\text{th}} = \displaystyle\int_a^{a+e} \frac{\text{d}r}{\alpha r^2} = \frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{a+e}\right] = \frac{e}{\alpha a(a+e)}$.

On peut alors facilement calculer les résistances thermiques pour les différents igloos en identifiant pour chacun la valeur de α et a. D'où :

$$R_{\text{th, cub.}} = \frac{0{,}1\,\text{m}}{5 \times 0{,}2\,\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \times 1\,\text{m} \times 1{,}1\,\text{m}} = \frac{1}{55 \times 0{,}2}\text{K} \cdot \text{W}^{-1} = \frac{1}{11}\text{K} \cdot \text{W}^{-1}$$

$$R_{\text{th, cyl.}} = \frac{0{,}1\,\text{m}}{3\pi \times 0{,}2\,\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \times 0{,}7\,\text{m} \times 0{,}8\,\text{m}} = \frac{1}{52{,}1 \times 0{,}2}\text{K} \cdot \text{W}^{-1} = \frac{1}{10{,}4}\text{K} \cdot \text{W}^{-1}$$

$$R_{\text{th, sph.}} = \frac{0{,}1\,\text{m}}{2\pi \times 0{,}2\,\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \times 0{,}8\,\text{m} \times 0{,}9\,\text{m}} = \frac{1}{44{,}6 \times 0{,}2}\text{K} \cdot \text{W}^{-1} = \frac{1}{8{,}9}\text{K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

.....

10.10 e) On a $\Delta T = R_{\text{th,C}}\phi = \dfrac{100\,\text{W}}{8{,}9\,\text{W} \cdot \text{K}^{-1}} = 11{,}2\,°\text{C}$.

.....

10.12 a) La loi des nœuds en termes de potentiels appliquée en N donne :

$$C_{\text{th}}\frac{\mathrm{d}\theta_{\text{i}}}{\mathrm{d}t} = \phi_{\text{i}} + \frac{1}{R_{\text{th}}}(\theta_{\text{e}} - \theta_{\text{i}}) \qquad \text{donc} \qquad \frac{\mathrm{d}\theta_{\text{i}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\theta_{\text{i}}}{R_{\text{th}}C_{\text{th}}} = \frac{1}{R_{\text{th}}C_{\text{th}}}(R_{\text{th}}\phi_{\text{i}} + \theta_{\text{e}}).$$

.....

10.12 b) Si θ_{i} est une constante, l'équation différentielle se simplifie en : $\phi_{\text{i}}(t) = \dfrac{1}{R_{\text{th}}}(\theta_{\text{i0}} - \theta_{\text{e0}} - \theta_{\text{e1}}\cos(\omega t))$.

Le chauffage est donc en opposition de phase avec la température extérieure.

.....

10.13 b) Les résistances thermiques des isolants ⓐ et ⓑ s'écrivent respectivement :

$$R_{\text{a}} = \frac{1}{2\pi\lambda_{\text{a}}L}\ln\left(\frac{5}{1}\right) = \frac{1}{2\pi L}\left(\frac{1}{\lambda_{\text{a}}}\ln(5)\right) \qquad \text{et} \qquad R_{\text{b}} = \frac{1}{2\pi\lambda_{\text{b}}L}\ln\left(\frac{7}{5}\right) = \frac{1}{2\pi L}\left(\frac{1}{\lambda_{\text{b}}}[\ln(7) - \ln(5)]\right).$$

Les deux résistances étant en série et comme on cherche la température à l'interface entre ces deux isolants, la formule du pont diviseur de tension appliquée au potentiel donne :

$$\theta_M = 20\,°\text{C} + \frac{R_{\text{b}}}{R_{\text{a}} + R_{\text{b}}} \times 80\,°\text{C} = 20\,°\text{C} + \frac{80\,°\text{C}}{1 + \dfrac{\lambda_{\text{b}}}{\lambda_{\text{a}}}\dfrac{\ln(5)}{\ln(7) - \ln(5)}} = 20\,°\text{C} + \frac{80\,°\text{C}}{1 + 3\dfrac{1}{\frac{\ln(7)}{\ln(5)} - 1}}$$

$$= 20\,°\text{C} + \frac{80\,°\text{C}}{1 + 3\dfrac{1}{\frac{\ln(7)}{\ln(5)} - 1}} = 20\,°\text{C} + \frac{80\,°\text{C}}{1 + \dfrac{1}{0{,}07}} = 20\,°\text{C} + \frac{7 \times 80\,°\text{C}}{107} \approx 25{,}2\,°\text{C}.$$

.....

10.14

Isolants	Épaisseur pour $r = 7$ e (cm)	Déphasage (pour $r = 7$) $\Delta\tau$	Énergie grise surfacique $\mathcal{E}_{\text{S}}$ (kWh · m^{-2})
Fibre de bois	26	17 h 00	78
Bottes de paille	36	14 h 30	3,6
Laine minérale	21	4 h 30	50
Vermiculite	35	19 h 20	84
Polystyrène expansé	22	4 h 40	140
Polyuréthane	16	4 h 30	160

.....

10.15 a) Il faut utiliser la première loi de Joule, en supposant la tranche suffisamment fine pour considérer la température uniforme. À l'instant t, l'énergie interne de l'élément de volume de section S et de longueur $\mathrm{d}x$ peut s'écrire : $U(t) = \mu(S\,\mathrm{d}x)cT(x,t)$.

.....

10.15 b) Le transfert reçu en x est $\overrightarrow{j_Q}(x,t) \cdot S\overrightarrow{e_x}\,\mathrm{d}t$. Le transfert reçu en $x + \mathrm{d}x$ est $\overrightarrow{j_Q}(x + \mathrm{d}x, t) \cdot S(-\overrightarrow{e_x})\,\mathrm{d}t$, le signe étant dû à l'orientation de $\overrightarrow{S}$. Le flux total reçu est la somme des flux précédents :

$$\Phi(x + \mathrm{d}x, t) = [j_Q(x,t) - j_Q(x + \mathrm{d}x, t)]S\,\mathrm{d}t = -\frac{\partial j_Q}{\partial x}(x + \mathrm{d}x, t)\,\mathrm{d}x S\,\mathrm{d}t = \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

.....

10.15 c) L'énergie produite est proportionnelle au volume de la tranche et vaut $p_{\text{prod}}S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$.

.....

10.16 a) Raisonnement identique à celui de l'entraînement précédent.

.....

10.16 b) Raisonnement identique à celui de l'entraînement précédent.

.....

10.16 d) La surface latérale vaut $p\,\mathrm{d}x$: attention à l'algébrisation.

La variation d'énergie interne de l'élément de volume de section S et de longueur $\mathrm{d}x$ est due aux flux thermiques conductifs suivant l'axe $(\mathrm{O}x)$ et conducto-convectifs en radial :

$$\mathrm{d}U = \mu c \frac{\partial T}{\partial t} S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - h(T(x,t) - T_{ext}) p\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,$$

soit $\mu c \dfrac{\partial T}{\partial t} = \lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} - h \dfrac{p}{S}(T(x,t) - T_{\text{ext}})$.

.....

10.17 a) Le premier graphique correspond au premier modèle ne prenant pas en compte les pertes conducto-convectives.

.....

10.17 b) À partir de la première et de la troisième ligne du système, on obtient :

$$h_1 S(T_1 - T(0)) = h_2 S(T(L) - T_2) \qquad \text{donc} \qquad T(L) = \frac{h_1}{h_2}(T_1 - T(0)) + T_2.$$

En injectant cette expression dans la deuxième équation, on trouve :

$$T(0)\left[1 + \frac{h_1}{h_2}\right] - \left(\frac{h_1}{h_2} T_1 + T_2\right) = R_{\text{th}} h_1 S(T_1 - T(0)) \quad \text{donc} \quad T(0)\left[1 + \frac{h_1}{h_2} + R_{\text{th}} h_1 S\right] = \left(R_{\text{th}} h_1 S + \frac{h_1}{h_2}\right) T_1 + T_2$$

$$\text{donc} \quad T(0) = \frac{R_{\text{th}} h_1 S + \dfrac{h_1}{h_2}}{1 + \dfrac{h_1}{h_2} + R_{\text{th}} h_1 S} T_1 + \frac{1}{1 + \dfrac{h_1}{h_2} + R_{\text{th}} h_1 S} T_2.$$

.....

10.17 c) On fait de même pour obtenir $T(L)$: à partir de la 1re et de la 3e ligne, on a : $T(0) = T_1 - \dfrac{h_2}{h_1}(T(L) - T_2)$. On injecte dans la deuxième équation :

$$T_1 + \frac{h_2}{h_1} T_2 - \left[1 + \frac{h_2}{h_1}\right] T(L) = R_{\text{th}} h_2 S(T(L) - T_2),$$

soit :

$$T(L) = \frac{1}{1 + \dfrac{h_2}{h_1} + R_{\text{th}} h_2 S} T_1 + \frac{\dfrac{h_2}{h_1} + R_{\text{th}} h_2 S}{1 + \dfrac{h_2}{h_1} + R_{\text{th}} h_2 S} T_2.$$

.....

Fiche n° 11. Tables et diagrammes thermodynamiques

Réponses

11.1 a) .. $9{,}1 \times 10^{-4}\,\mathrm{g \cdot mL^{-1}}$

11.1 b) ..... (b)

11.1 c) ..... (a)

11.2 a) ..... ①

11.2 b) ..... ③

11.2 c) ..... ②

11.2 d) ..... 760,8 mmHg

11.2 e) ..... diphasé

11.2 f) $1{,}017 \times 10^{-3}\,\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1}}$

11.2 g) ..... $7{,}6672\,\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1}}$

11.2 h) ..... (c)

11.3 a) ..... isobare

11.3 b) ..... isotherme

11.3 c) ..... isochore

11.3 d) ..... $2V_1$

11.4 a) ..... (b)

11.4 b) ..... (a)

11.4 c) ..... (d)

11.5 a) 0

11.5 b) ..... $-\dfrac{p_0}{v_0}$

11.5 c) ..... ∞

11.5 d) ..... $-\gamma\dfrac{p_0}{v_0}$

11.5 e) ..... isochore

11.5 f) ..... isobare

11.5 g) ..... isotherme

11.5 h) ..... isentrope

11.6 a) ..... $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} - \dfrac{T}{c_p} = 0$

11.6 b) ..... (b)

11.6 c) ..... (b)

11.6 d) ..... (a)

11.7 ..... (a)

11.8 a) ..... (a) et (c)

11.8 b) ..... (a) et (d)

11.8 c) ..... (b), (c) et (d)

11.8 d) ..... (c) et (d)

11.8 e) ..... $800\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$

11.8 f) ... $-5\,000\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$

11.8 g) ..... $-1\,650\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$

11.9 a) ..... (b)

11.9 b) ..... (d)

11.9 c) ..... (c)

11.10 a) ..... (a) et (d)

11.10 b) ..... (b), (c) et (d)

11.10 c) ..... (b) et (c)

11.10 d) ..... (a)

11.11 a) ..... $\dfrac{R}{\ln(10) M v c_p}$

11.11 b) ..... isotherme

11.11 c) ..... isentrope

11.11 d) ..... isochore

11.11 e) ..... isobare

11.12 a) ..... (a)

11.12 b) ..... $1\,320\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$

11.12 c) ..... $2\,650\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$

11.12 d) ..... $420\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$

11.12 e) ..... (b)

11.12 f) ..... $x_\mathrm{B} = 40\,\%$

11.12 g) ..... (b)

11.13 a) ..... (b)

11.13 b) ..... (d)

11.13 c) ..... $2{,}45\,\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1}}$

11.13 d) ..... (d)

11.13 e) ..... $2{,}45\,\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1}}$

11.14 a) ..... $2\,675{,}6\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$

11.14 b) ..... $419{,}2\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$

11.14 c) ..... (c)

11.14 d) .... $-2\,031\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$

11.15 a) ..... (c)

11.15 b) ..... (b)

11.16 a) ..... (b)

11.16 b) ..... isotherme

11.16 c) ..... isentrope

11.16 d) ..... isochore

11.16 e) ..... isobare

11.17 a) ..... $\boxed{\dfrac{T_0}{c_p}}$

11.17 b) ..... $\boxed{0}$

11.17 c) ..... $\boxed{\dfrac{T_0}{c_v}}$

11.17 d) ..... $\boxed{\infty}$

11.17 e) ..... isentrope

11.17 f) ..... isochore

11.17 g) ..... isobare

11.17 h) ..... isotherme

11.18 a) ..... (c)

11.18 b) ..... (b)

11.19 a) ..... $\boxed{2\,680\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}}$

11.19 b) ..... (c)

11.19 c) .... $\boxed{8\,\mathrm{kJ\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}}$

11.19 d) ..... $\boxed{300\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}}$

11.19 e) ..... $\boxed{250\,°\mathrm{C}}$

11.19 f) ..... $\boxed{400\,°\mathrm{C}}$

11.19 g) ..... (a)

Corrigés

11.1 a) On a $v(T = 200\,°\mathrm{C}, p = 200\,\mathrm{kPa}) = 1{,}0805\,\mathrm{m^3\cdot kg^{-1}} = 1{,}0805\times10^6\,\mathrm{mL\cdot kg^{-1}} = 1{,}0805\times10^3\,\mathrm{mL\cdot g^{-1}}$ $\approx 1{,}1\times10^3\,\mathrm{mL\cdot g^{-1}}$ donc $\rho = \dfrac{1}{v} = \dfrac{1}{1{,}1\times10^3} = 0,9090\cdots\times10^{-3}\mathrm{g\cdot mL^{-1}} \approx 9{,}1\times10^{-4}\,\mathrm{g\cdot mL^{-1}}$.

Remarque : La division ci-dessus « se pose à la main ». Il est aussi possible d'utiliser le développement limité autour de 0 de $(1+x)^\alpha = 1+\alpha x$ à l'ordre 1 : $\dfrac{1}{1{,}1\times10^3} = (1+0,1)^{-1}\times10^{-3} \approx (1-0,1)\times10^{-3} = 9\times10^{-4}$.

.....

11.1 b) Par lecture de la table, on a $T_{\mathrm{sat}}(200\,\mathrm{kPa}) = 120{,}21\,°\mathrm{C}$.

.....

11.1 c) Par lecture de la table, on a $100\,°\mathrm{C} < T_{\mathrm{sat}}(200\,\mathrm{kPa}) = 120{,}21\,°\mathrm{C}$: le fluide est donc monophasé sous forme de liquide.

.....

11.2 d) À 100 °C, on a :

$$p_{\mathrm{sat}} = 0{,}10142\,\mathrm{MPa} = 0{,}10142\times10^6\times1\,\mathrm{Pa} = 0{,}10142\times10^6\times\frac{1}{133,3}\mathrm{mmHg} = 760{,}8\,\mathrm{mmHg}.$$

.....

11.2 e) On a $v = 1{,}03\,\mathrm{cm^3\cdot g^{-1}} = 1{,}03\times10^{-3}\,\mathrm{m^3\cdot kg^{-1}}$. Or, par lecture de la table, le volume massique du liquide saturant est $v_\ell(60\,°\mathrm{C}) = 1{,}017\times10^{-3}\,\mathrm{m^3\cdot kg^{-1}}$ et celui de la vapeur saturante est $v_{\mathrm{g}}(60\,°\mathrm{C}) = 7{,}6672\,\mathrm{m^3\cdot kg^{-1}}$. Il vient que $v_\ell(60\,°\mathrm{C}) \leqslant v \leqslant v_{\mathrm{g}}(60\,°\mathrm{C})$: le système est alors diphasé, c'est-à-dire un mélange de vapeur et de liquide.

.....

11.2 h) Le volume massique vaut $v = 1\,030\,\mathrm{cm^3\cdot g^{-1}}$, soit $v = 1{,}030\,\mathrm{m^3\cdot kg^{-1}}$.

Or, $v_{\mathrm{g}} = 7{,}6672\,\mathrm{m^3\cdot kg^{-1}} \approx 7v \approx 7\times10^3 v_{\mathrm{l}}$ donc il est numériquement raisonnable de considérer que $v_{\mathrm{g}} - v_{\mathrm{l}} \approx v_{\mathrm{g}}$ et $v - v_{\mathrm{l}} \approx v$, d'où $x_{\mathrm{g}} \approx v/v_{\mathrm{g}}$. La réponse est donc la (c).

.....

11.3 d) La transformation est isobare donc $V_2 = \dfrac{T_2V_1}{T_1} = 2V_1$.

.....

11.4 a) La transformation est isotherme donc $PV = nRT$ est une constante.

.....

11.4 b)

- Lors de la transformation (A) isobare, le volume augmente donc (b) ne convient pas. Dans le cas de (d), la transformation (C) isochore a lieu au volume minimal, ce qui est en contradiction avec la fiche synoptique où le volume prend sa valeur maximale pendant cette transformation ($V = 3V_1$) : la (d) ne convient donc pas.
- Pour la transformation (B) isotherme, la pression et le volume vérifient la relation $P = \dfrac{\text{cste}}{V}$ donc, en échelle linéaire, la représentation graphique de $P = f(V)$ est une branche d'hyperbole, ce qui ne peut que correspondre à (a).

.....

11.4 c) Le sens de rotation est horaire : le travail total reçu au cours du cycle est négatif, le cycle est moteur.

.....

11.5 h) La courbe isobare est de pente nulle donc il s'agit de la courbe ①.

La courbe isochore est de pente infinie donc il s'agit de la courbe ②.

Il reste deux courbes à identifier : la courbe isotherme vérifiant $p_{\text{iso}-T} = \dfrac{\text{A}}{v}$ et la courbe isentropique vérifiant $p_{\text{iso}-s} = \dfrac{B}{v^\gamma}$, où $A = nrT = p_0 v_0$ et $B = p_0 v_0^\gamma$ sont des constantes. L'identification des courbes se fait par un calcul de dérivée au point M_0 de coordonnées (p_0, v_0) :

$$\left(\frac{\mathrm{d}p_{\text{iso}-T}}{\mathrm{d}v}\right)(v_0) = -\frac{A}{v_0^2} = -\frac{p_0}{v_0} \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}p_{\text{iso}-s}}{\mathrm{d}v}\right)(v_0) = -\gamma\frac{B}{v_0^{\gamma+1}} = -\gamma\frac{p_0}{v_0} = \gamma\left(\frac{\mathrm{d}p_{\text{iso}-T}}{\mathrm{d}v}\right)(v_0)\,.$$

Au point M_0, la courbe isentrope est donc la courbe la plus pentue : la courbe ④ est la courbe isentrope et la courbe ③ est la courbe isotherme.

.....

11.6 a) En combinant la 2e identité thermodynamique et la seconde loi de Joule, il vient : $c_P\,\mathrm{d}T = T\,\mathrm{d}s + v\,\mathrm{d}p$. Le long d'une courbe isobare, $\mathrm{d}p = 0$. L'équation différentielle en $T(s)$ s'obtient en réorganisant les variables s et T de telle sorte qu'une dérivée $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}$ apparaisse : $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} - \dfrac{T}{c_p} = 0$.

.....

11.6 b) L'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} - \dfrac{T}{c_p} = 0$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants et sans second membre dont la solution est de la forme $T(s) = A\exp\left(\dfrac{s}{c_p}\right)$. Le choix (arbitraire) de la constante d'intégration A est ici fait de telle sorte que la courbe isobare passe par un état de référence (s_0, T_0) : $A = T_0\exp\left(-\dfrac{s_0}{c_p}\right)$, d'où $T(s) = T_0\exp\left(\dfrac{s - s_0}{c_p}\right)$.

Conseil : Tester la vraisemblance en remarquant que, d'une part, $T(s = s_0) = T_0$ *et, d'autre part,* $\dim(s - s_0) = \dim(c_p)$ *: l'argument d'exponentielle est bien sans dimension.*

.....

11.6 c) La loi de Laplace donne $p_1^{1-\gamma}T_1^\gamma = p_2^{1-\gamma}T_2^\gamma$, soit $p_2^{1-\gamma} = \left(\dfrac{T_1}{T_2}\right)^\gamma p_1^{1-\gamma}$; d'où $p_1\left(\dfrac{T_1}{T_2}\right)^{\gamma/(1-\gamma)}$.

.....

11.6 d) Graphiquement, $T_1 < T_2$, soit $\dfrac{T_1}{T_2} < 1$. Or, $\dfrac{p_2}{p_1} = \left(\dfrac{T_1}{T_2}\right)^{\gamma/(1-\gamma)}$ avec $\gamma > 1$, c'est-à-dire que $\dfrac{\gamma}{1-\gamma} < 0$. Ainsi, $\dfrac{T_1}{T_2} < 1$ implique que $\left(\dfrac{T_1}{T_2}\right)^{\gamma/(1-\gamma)} > 1$. Autrement dit, $\dfrac{p_2}{p_1} > 1$ donc $p_2 > p_1$.

.....

11.7 Le transfert thermique correspond géométriquement à l'aire du cycle parcouru dans le diagramme entropique. Il est compté positivement si le cycle est parcouru dans le sens horaire (moteur) et négativement si le cycle est parcouru dans le sens trigonométrique (récepteur). Attention ici, l'entropie est donnée en $\text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}$ donc $Q_{\text{ABCDA}} = (T_\text{B} - T_\text{A})(S_\text{C} - S_\text{B}) = 100 \cdot 1{,}5 \times 10^3 = 1{,}5 \times 10^5$ J.

.....

11.8 a) Une enthalpie massique est indiquée en $\mathrm{J \cdot kg^{-1}}$, et non en J. Le point A est à droite de la courbe de saturation et en dessous du point critique donc le fluide est à l'état gazeux. Les courbes isenthalpes ($\mathrm{d}h = 0$) sont quasi horizontales, c'est-à-dire presque confondues avec des courbes isothermes ($\mathrm{d}T = 0$) : le modèle du gaz parfait peut être considéré comme valide au point A car la relation $\mathrm{d}h = c\,\mathrm{d}T$ n'est pas mise en défaut au point A. Enfin, le point A passe par la courbe isobare 0,05 bar représentée en pointillés.

.....

11.8 b) Le point B est à gauche de la courbe de saturation et en dessous du point critique donc le fluide est à l'état liquide. Une lecture graphique, réalisée à l'aide d'une règle graduée, puis l'application d'une « règle de trois », conduit à évaluer l'abscisse du point B comme étant égale à $600\,\mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$.

.....

11.8 c) La grandeur x représente le titre massique en *vapeur* dans le mélange. Le point E se situe à équidistance (le long de la courbe isotherme passant par le point E) des courbes isotitres $x = 0{,}6$ et $x = 0{,}8$. Ainsi, $x_\mathrm{E} = 0{,}7$.

Comme le titre en vapeur est de 0,7, celui en liquide est de 0,3.

.....

11.8 d) En passant de l'état E à l'état F (situé sur la courbe d'ébullition), le système passe d'un état diphasé à un état de liquide juste saturant : la vapeur saturante se liquéfie. De plus, cette transformation est isotherme ; or, l'eau étant un corps pur, elle est également isobare.

.....

11.8 f) Par lecture graphique, $s_\mathrm{F} = 800\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$. Ainsi, $s_\mathrm{F} - s_\mathrm{E} = 800 - 5800 = -5\,000\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$.

.....

11.8 g) L'incrément des courbes isenthalpes est de $200\,\mathrm{J \cdot kg^{-1}}$. Aussi, le point E étant situé à équidistance (le long de la courbe isotherme passant par le point E) des courbes isenthalpes 1800 et $2\,000\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$, il vient que $h_\mathrm{E} = 1\,900\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$. De même, $h_\mathrm{F} = 250\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$, d'où $h_\mathrm{F} - h_\mathrm{E} = 250 - 1900 = -1\,650\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$.

.....

11.9 a) Pour une phase condensée incompressible indilatable (domaine liquide, à gauche de la courbe de saturation), $\mathrm{d}h = c_p\,\mathrm{d}T$ donc, à T constante, h est constante. Une courbe isotherme doit donc être verticale dans cette zone.

Pour un mélange liquide-vapeur d'un corps pur (zone sous la courbe de saturation) à l'équilibre, si T est fixée alors p est fixée aussi. Une courbe isotherme doit donc être horizontale dans cette zone.

Pour un gaz parfait (domaine vapeur, à droite de la courbe de saturation, et pour une faible pression), $\mathrm{d}h = c_p\,\mathrm{d}T$ donc, à T constante, h est constante. Une courbe isotherme doit donc être verticale dans cette zone.

.....

11.9 b) On peut procéder par élimination :

- Il ne s'agit pas d'isobares car nous aurions alors des droites horizontales.
- Il ne s'agit pas d'isenthalpes car nous aurions alors des droites verticales.
- Il ne s'agit pas d'isothermes car, dans la zone gaz à faible pression (domaine de validité de l'hypothèse gaz parfait), nous aurions alors des droites verticales.
- Il ne s'agit pas d'isotitres car certaines courbes sont en dehors du domaine liquide + vapeur.

Il s'agit donc nécessairement d'isentropes.

.....

11.9 c) Ces courbes n'existent que dans le domaine « Liquide + Vapeur » et se rejoignent toutes au point critique, il s'agit donc d'isotitres.

.....

11.10 a) La pression est de 100 bar donc $100 \times 1{,}00 \times 10^5\,\mathrm{Pa} = 1{,}00 \times 10^7\,\mathrm{Pa}$.

La température est indiquée en °C donc la réponse (b) ne convient pas. Le point A est à gauche de la courbe de saturation et en dessous du point critique donc le fluide est à l'état liquide.

.....

11.10 b) Par lecture graphique, la pression est de $10^0\,\text{bar} = 1\,\text{bar} \neq 1\,\text{Pa}$ donc la réponse (a) ne convient pas. Le point B est sous la courbe de saturation donc la réponse (b) convient. La valeur de x indiquée correspond au titre massique en vapeur. Sa valeur est de $0,4$ donc le titre en liquide est $1 - 0{,}4 = 0{,}6$.

.....

11.10 c) Le long d'une isotherme, on a $\mathrm{d}T = 0$; avec la seconde loi de Joule, cela implique : $\mathrm{d}h = 0$.

Les courbes isenthalpes sont donc des portions de droites parallèles à l'axe des ordonnées (puisque h est la grandeur en abscisses).

.....

11.10 d) Le modèle du gaz parfait est une bonne approximation lorsque les courbes isothermes ($\mathrm{d}T = 0$) sont également des courbes isenthalpes ($\mathrm{d}h = c_p\,\mathrm{d}T = 0$), ce qui tend à être le cas en zone (a).

.....

11.11 a) L'équation d'état donne $p = \dfrac{R}{Mv}T$ donc, en différentiant à v fixé, il vient $\mathrm{d}p = \dfrac{R}{Mv}\,\mathrm{d}T$. L'utilisation de la 2nde loi de Joule puis la division par $p\ln(10)$ permet d'écrire :

$$\frac{\mathrm{d}p}{p}\frac{1}{\ln(10)} = \frac{R}{Mv}\frac{1}{p\ln(10)}\frac{\mathrm{d}h}{c_p} \quad \text{soit} \quad \frac{\mathrm{d}(\ln(p)/\ln(10))}{\mathrm{d}h} = \frac{R}{c_p Mv\ln(10)}\frac{1}{p} \quad \text{d'où} \quad \frac{\mathrm{d}\log(p)}{\mathrm{d}h} = \frac{A}{p} \text{ avec } A = \frac{R}{\ln(10)Mvc_p}$$

une constante pour une transformation isochore ($v = \text{cste}$).

.....

11.11 e) La courbe isobare est de pente nulle ; donc il s'agit de la courbe ④.

Du fait de la seconde loi de Joule, la courbe isotherme est également une courbe isenthalpe, c'est-à-dire de pente infinie. Ainsi, la courbe isotherme est la courbe ①.

Pour une courbe isochore, il a été montré que $\dfrac{\mathrm{d}\log(p)}{\mathrm{d}h} = \dfrac{A}{p}$ avec A une constante.

Ainsi, dans un diagramme $(\log(p), h)$, il apparaît que la pente n'est pas constante ; elle tend vers l'infini lorsque h tend vers 0 : la courbe ③ est donc la courbe isochore et, par élimination, la courbe ② est la courbe isentrope.

.....

11.12 a) L'échelle des abscisses étant linéaire, il est possible d'utiliser la position du point B par rapport à la courbe de saturation pour déterminer si le fluide contient plus de liquide ou plus de vapeur. Ici, le point B est plus proche de la courbe de bulle (isotitre $x = 0$ en trait plein) que de la courbe de rosée (isotitre $x = 1$ en trait plein) donc il y a davantage de liquide que de vapeur.

.....

11.12 b) L'enthalpie massique du fluide diphasé correspond à l'abscisse du point B : $h_{\mathrm{B}} = 1\,320\,\mathrm{kJ}\cdot\mathrm{kg}^{-1}$.

.....

11.12 c) L'enthalpie massique de la vapeur saturante de l'état représenté par le point B correspond à l'abscisse du projeté de B sur la courbe de rosée : $h_{\mathrm{v,B}} = 2\,650\,\mathrm{kJ}\cdot\mathrm{kg}^{-1}$.

.....

11.12 d) L'enthalpie massique du liquide saturant de l'état représenté par le point B correspond à l'abscisse du projeté de B sur la courbe de bulle : $h_{\mathrm{l,B}} = 420\,\mathrm{kJ}\cdot\mathrm{kg}^{-1}$.

.....

11.12 f) On a

$$x_{\mathrm{B}} = \frac{h_{\mathrm{B}} - h_{\mathrm{l,B}}}{h_{\mathrm{v,B}} - h_{\mathrm{l,B}}} = \frac{1320 - 420}{2650 - 420} = \frac{900}{2230} \approx \frac{900}{2250} = \frac{9000}{2250} \times 10^{-1} = 0{,}40,$$

ce qui est cohérent avec le fait que le point B soit placé sur la courbe isotitre $x = 0{,}4$.

.....

11.12 g) Pour rappel, l'enthalpie massique du liquide saturant d'un mélange diphasé correspond à l'abscisse du projeté de cet état sur la courbe de bulle tandis que l'enthalpie massique de la vapeur saturante correspond à l'abscisse du projeté sur la courbe de rosée. Dans le diagramme $\big(\log(p), h\big)$, la distance entre ces deux projetés est $h_\mathrm{v} - h_\mathrm{l} = \Delta_\mathrm{vap} h$.

Graphiquement, il apparaît que h_v diminue et que h_l augmente avec la pression, d'où une enthalpie de vaporisation $\Delta_\mathrm{vap} h$ qui diminue lorsque la pression augmente.

.....

11.13 b) L'équation d'état des gaz parfaits est $PV = nRT$ avec n la quantité de matière et V le volume.

Or, $n = m/M$ (m est la masse) donc il vient $PV = mTR/M$, soit $Pv = rT$ avec $v = V/m$.

.....

11.13 c) On a $v = \dfrac{rT}{p} = \dfrac{0{,}46 \times 10^3 \times (260 + 273)}{100 \times 10^3} = 2{,}45\,\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{kg}^{-1}$.

.....

11.13 d) De manière générale, les points $\mathrm{M}(x, y)$ le long d'un segment défini par les points $\mathrm{M}_1(x_1, y_1)$ et $\mathrm{M}_2(x_2, y_2)$ vérifient $y = y_1 + (x - x_1)\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

.....

11.14 c) Par extensivité et additivité de l'enthalpie, $h_\mathrm{i} = x h_\mathrm{g} + (1 - x) h_\ell$ avec x le titre massique de la vapeur saturante. Ici, $x = 90\,\% = 0{,}90$ et $1 - x = 10\,\% = 0{,}10$.

.....

11.14 d) On a $q = \Delta h = h_\ell(P = 1{,}0142\,\mathrm{bar}) - h_\mathrm{i}$ avec h_i l'enthalpie massique initiale du mélange et

$$h_\mathrm{i} = 10\,\% \times h_\ell(P = 1{,}0142\,\mathrm{bar}) + 90\,\% \times h_\mathrm{g}(P = 1{,}0142\,\mathrm{bar}) = 10\,\% \times 419{,}2 + 90\,\% \times 2\,675{,}6 = 2\,450\,\mathrm{kJ} \cdot \mathrm{kg}^{-1}.$$

Ainsi, le transfert thermique massique est $q = 419{,}2 - 2\,450 = -2\,031\,\mathrm{kJ} \cdot \mathrm{kg}^{-1}$.

.....

11.15 a) La transformation (D) étant isentropique, la loi de Laplace est valide : $PV^\gamma = \text{cste}$. De plus, le gaz est parfait donc l'injection de l'équation d'état $PV = nRT$ dans la loi de Laplace aboutit à $TV^{\gamma-1} = \text{cste}$.

.....

11.15 b) Lors de la transformation (D) isentrope, le volume décroît de $3V_1$ à V_1. De plus, le volume et la température ne sont pas reliés par une relation linéaire ($TV^{\gamma-1} = \text{cste}$). Ainsi, seule la réponse (b) vérifie ces deux conditions.

.....

11.16 a) L'équation d'état des gaz parfaits donne $p = \dfrac{nR}{V}T$.

Or, ici, $V = m \times v_0 = nMv_0$. Ainsi, $p = \dfrac{R}{Mv_0}T$, d'où $\dfrac{\partial p}{\partial T} = \dfrac{R}{Mv_0} = \text{cste}$: une courbe isochore est une courbe de pente constante (et positive) dans un diagramme (p, T).

.....

11.16 e) La courbe isobare est de pente nulle donc il s'agit de la courbe ①. La courbe isotherme est de pente infinie donc il s'agit de la courbe ④. La courbe isochore est une courbe de pente constante (finie et non nulle) donc il s'agit de la courbe ③. Par élimination, la courbe ② est la courbe isentrope.

.....

11.17 h) La courbe isotherme est de pente nulle donc il s'agit de la courbe ④.La courbe isentrope est de pente infinie donc il s'agit de la courbe ①.

Il reste deux courbes à identifier : la courbe isobare de pente $\dfrac{T_0}{c_p}$ et la courbe isochore de pente $\dfrac{T_0}{c_v}$. Le rapport

entre la pente de la courbe isochore et celle de la courbe isobare est $\frac{T_0}{c_v} \times \left(\frac{T_0}{c_p}\right)^{-1} = \frac{c_p}{c_v} = \gamma > 1$: au point M_0, la courbe isochore est plus pentue que la courbe isobare donc la courbe ② est la courbe isochore et la courbe ③ est la courbe isobare.

.....

11.18 a) La transformation (D) étant isentropique, la loi de Laplace est valide : $PV^\gamma = \text{cste}$. De plus, le gaz est parfait donc l'injection de l'équation d'état $PV = nRT$ dans la loi de Laplace aboutit à $P^{1-\gamma}T^\gamma = \text{cste}$.

.....

11.18 b) Lors de la transformation (A) isobare, la température augmente donc la réponse (a) est à rejeter. La transformation (C) étant isochore, la relation entre la pression et la température est une relation linéaire $P = \frac{nRT}{V}$, ce qui correspond à une portion de droite. Pour la transformation (D) isentropique, la pression et la température vérifient $P = \frac{\text{cste}}{T^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}}$, ce qui ne peut pas être une portion de droite puisque $\gamma > 1$; la réponse (c) ne convient pas.

.....

11.19 a) Le point I se trouve à l'intersection de la courbe isobare $250\,\text{mbar} = 2{,}5 \times 10^{-1}\,\text{bar}$ et de la courbe isotherme $100\,°\text{C}$. La courbe isobare de $2{,}5 \times 10^{-1}\,\text{bar}$ est la droite horizontale située à peu près à mi-chemin entre la deuxième et la troisième graduation en partant de la graduation associée à 10^{-1}bar. La courbe isotherme de $100\,°\text{C}$ correspond à la courbe en pointillés étiquetée « $T = 100\,°\text{C}$ ».

Par lecture graphique de l'abscisse du point I, on a $h_\text{I} = 2\,680\,\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

.....

11.19 b) Le point I se trouve à droite de la courbe de saturation (et bien en dessous de l'isobare critique, une droite horizontale passant par le sommet de la courbe de saturation). Ainsi, le fluide est initialement une vapeur sèche.

.....

11.19 c) Le point I passe par une courbe isentrope qui est ici représentée à l'aide de tirets. La valeur associée n'est pas indiquée, mais les deux courbes isentropes voisines indiquent $7\,\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ et $9\,\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$. L'incrément du réseau des courbes isentropes est de $1\,\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ donc $s_\text{I} = 8\,\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$.

.....

11.19 d) Le point F est à l'intersection de la courbe isentrope $s_\text{F} = s_\text{I} = 8\,\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ et de la courbe isobare $p_\text{F} = 1\,\text{bar}$, c'est-à-dire la droite passant par l'ordonnée 10^0 bar. Par lecture graphique de l'abscisse du point F, on a $h_\text{F} = 2\,980\,\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ donc $w = 2980 - 2680 = 300\,\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

.....

11.19 e) Le point F passe par la courbe isotherme comprise entres les courbes isothermes de $200\,°\text{C}$ et $300\,°\text{C}$. L'incrément étant de $50\,°\text{C}$, cette isotherme est associée à $250\,°\text{C}$ donc $T_\text{F} = 250\,°\text{C}$.

.....

11.19 f) L'entropie finale est désormais $s_{\text{F}'} = (1 + 6\,\%)s_\text{F} = (1 + 0{,}06) \times 8 = 8 + 0{,}48 \approx 8{,}5\,\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$. Or, il n'y a aucune courbe isentrope tracée pour cette valeur d'entropie massique. Il faut interpoler la position du point F′ dans le diagramme $\big(\log(p), h\big)$. Pour cela, il suffit de tracer un segment horizontal le long de la courbe isobare de $1\,\text{bar}$ qui relie les courbes isentropes de $8\,\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ et $9\,\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$. La position du point F′ est approximativement au milieu du segment tracé. Le point F′ passe par la courbe isotherme de $400\,°\text{C}$ donc $T_{\text{F}'} = 400\,°\text{C}$.

.....

11.19 g) L'élévation totale de température s'exprime comme $T_{\text{F}'} - T_\text{I}$ tandis que celle due à la compression (réversible) est $T_\text{F} - T_\text{I}$. L'élévation de température due aux irréversibilités est donc $T_{\text{F}'} - T_\text{F}$. Sa proportion relativement à l'élévation totale est donc $\frac{T_{\text{F}'} - T_\text{F}}{T_{\text{F}'} - T_\text{I}} \times 100$.

.....

Fiche n° 12. Thermodynamique industrielle

Réponses

12.1 a) ..... a

12.1 b) ..... d

12.1 c) c

12.1 d) ..... a

12.2 a) c

12.2 b) ..... d

12.2 c) ..... a

12.2 d) ..... a

12.3 a) c

12.3 b) ..... $\frac{1}{M}\frac{\gamma R}{\gamma - 1}(T_2 - T_1)$

12.3 c) ..... $c_2 = \sqrt{\frac{2}{M}\frac{\gamma R}{\gamma - 1}(T_1 - T_2)}$

12.3 d) ..... $383\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$

12.4 a) ..... b

12.4 b) ..... a

12.5 a) ..... a

12.5 b) ..... a

12.5 c) ..... b

12.5 d) ..... d

12.5 e) ..... a

12.5 f) c

12.5 g) ..... $-\frac{w_1 + w_3}{q_2}$

12.5 h) ..... $1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$

12.6 a) ..... $1 \to 2$

12.6 b) ..... $50\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$

12.6 c) ..... $2 \to 3$

12.6 d) ..... $-200\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$

12.6 e) 4

12.7 a) ..... $2{,}50\,\mathrm{kJ \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$

12.7 b) ..... $50\,°\mathrm{C}$

12.7 c) ..... $110\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$

12.7 d) ..... $140\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$

12.7 e) 0,78

12.7 f) ..... $100\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$

12.8 a) ..... f

12.8 b) ..... a

12.8 c) ..... a

12.8 d) ..... b

12.8 e) ..... a

12.8 f) c

12.8 g) ..... a

12.8 h) ..... b

12.9 a) ..... condenseur

12.9 b) ..... évaporateur

12.9 c) ..... condenseur

12.10 a) ..... $D_{\mathrm{m1}} + D_{\mathrm{m2}} = D_{\mathrm{m}}$

12.10 b) ..... $c_{\mathrm{p}}(T - T_1) = q_{2\to1}$

12.10 c) ..... $\boxed{c_\mathrm{p}(T - T_2) = q_{1\to 2}}$

12.10 d) ..... $\boxed{D_\mathrm{m1}(T - T_1) + D_\mathrm{m2}(T - T_2) = 0}$

12.10 e) ..... $\boxed{T = \dfrac{D_\mathrm{m1}T_1 + D_\mathrm{m2}T_2}{D_m}}$

12.10 f) ..... $\boxed{38\,°\mathrm{C}}$

12.11 a) ..... $\boxed{\text{a}}$

12.11 b) ..... $\boxed{\text{d}}$

12.11 c) ..... $\boxed{9 \times 10^6\,\mathrm{J}}$

12.12 a) ..... $\boxed{\text{a}}$

12.12 b) ..... $\boxed{\text{d}}$

12.12 c) ..... $\boxed{\Delta h = v(p_2 - p_1)}$

12.12 d) ..... $\boxed{v(p_2 - p_1)}$

12.12 e) ..... $\boxed{1{,}99\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}}$

Corrigés

12.1 a) La transformation est adiabatique donc $q = 0$ et $s_\mathrm{e} = q/T = 0$; la transformation est réversible donc $s_\mathrm{c} = 0$. Finalement, $\Delta h = w_\mathrm{i}$ et $\Delta s = 0$.

12.1 b) Il n'y a pas de pièce mobile donc $w_\mathrm{i} = 0$ et donc $\Delta h = q$; on a $\Delta s = s_\mathrm{e} + s_\mathrm{c}$.

12.1 c) La transformation est adiabatique donc $q = 0$ et $s_\mathrm{e} = q/T = 0$; il n'y a pas de pièce mobile donc $w_\mathrm{i} = 0$ et ainsi $\Delta h = 0$. On a $\Delta s = s_\mathrm{c}$.

12.1 d) La transformation est adiabatique donc $q = 0$ et $s_\mathrm{e} = q/T = 0$; la transformation est réversible donc $s_\mathrm{c} = 0$ et ainsi $\Delta h = w_\mathrm{i}$; $\Delta s = 0$.

12.2 a) On a $\Delta h = c_\mathrm{p}\Delta T \approx 1\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}} \times 10\,\mathrm{K} = 10\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$.

12.2 b) On a $e_\mathrm{c} = \dfrac{1}{2}v^2 \approx 0,5 \times \left(10\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}\right)^2 = 50\,\mathrm{J \cdot kg^{-1}}$.

12.2 c) On a $\Delta e_\mathrm{p} = g\Delta z \approx 10\,\mathrm{m \cdot s^{-2}} \times 1\,\mathrm{m} = 10\,\mathrm{J \cdot kg^{-1}}$.

12.3 a) On a $\Delta h + \Delta e_\mathrm{p} + \Delta e_\mathrm{c} = q_\mathrm{e} + w_\mathrm{i}$. Ici, $\Delta e_\mathrm{p} = 0$, $q_\mathrm{e} = 0$ (adiabatique car isolée thermiquement) et $w_\mathrm{i} = 0$ (tuyère indéformable). On en déduit : $\Delta h + \Delta e_\mathrm{c} = 0$ (donc $h + e_\mathrm{c} = \mathrm{cste}$).

12.3 b) La deuxième loi de Joule s'écrit : $\Delta h = c_\mathrm{p}(T_2 - T_1) = \dfrac{1}{M}\dfrac{\gamma R}{\gamma - 1}(T_2 - T_1)$.

12.3 c) Comme c_1 est négligable, on en déduit des questions précédentes :

$$\frac{1}{2}c_2^2 = -\Delta h = -\frac{1}{M}\frac{\gamma R}{\gamma - 1}(T_2 - T_1) \qquad \text{et} \qquad c_2 = \sqrt{\frac{2}{M}\frac{\gamma R}{\gamma - 1}(T_1 - T_2)}.$$

12.3 d) La vitesse d'éjection est alors $c_2 = 383\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

12.4 a) La première phase étant isentropique, les températures sont liées par la loi de Laplace :

$$T_1^\gamma p_1^{1-\gamma} = \text{cste} = T_2^\gamma p_2^{1-\gamma} \quad \text{donc} \quad T_2^\gamma = T_1^\gamma \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1-\gamma},$$

ce qui conduit au résultat en prenant la puissance $1/\gamma$ de l'ensemble.

.....

12.5 a) Parcouru dans le sens horaire, le cycle est moteur.

.....

12.5 b) Les travaux w_2 et w_4 sont nuls. Les travaux reçus pendant le cycle sont w_1 et w_3.

.....

12.5 c) La deuxième phase est isobare, d'où : $q_2 = \Delta h = c_\mathrm{p}(T_3 - T_2)$.

.....

12.5 d) La quatrième phase est isobare, d'où : $q_4 = \Delta h = c_\mathrm{p}(T_1 - T_4)$.

.....

12.5 e) Le transfert thermique est nul pour cette transformation (isentropique). Le premier principe pour les systèmes en écoulement permanent s'écrit donc ici : $\Delta h = w_1$. d'où : $w_1 = h_2 - h_1 = c_\mathrm{p}(T_2 - T_1) > 0$.

.....

12.5 f) De même, on a $w_3 = h_4 - h_3 = c_\mathrm{p}(T_4 - T_3) < 0$.

.....

12.5 g) Les échanges énergétiques étant algébriques, le rendement du cycle est défini par $\rho = -\dfrac{w_\mathrm{i}}{q_\mathrm{c}} = -\dfrac{w_1 + w_3}{q_2}$.

.....

12.5 h) Le rendement du turbopropulseur est alors : $\rho = -\dfrac{c_\mathrm{p}(T2 - T_1 + T_4 - T_3)}{c_\mathrm{p}(T_3 - T_2)} = 1 - \dfrac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$.

.....

12.6 a) Le compresseur a pour effet d'augmenter la pression et la température du fluide : ici, il s'agit donc de l'étape $1 \to 2$.

.....

12.6 b) D'après le premier principe industriel, on a $w_\mathrm{compr} = h_2 - h_1 = 450 - 400 = 50\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$.

.....

12.6 c) Le domaine de la vapeur est à droite du diagramme, celui du liquide à gauche, la liquéfaction correspond donc à l'étape $2 \to 3$.

.....

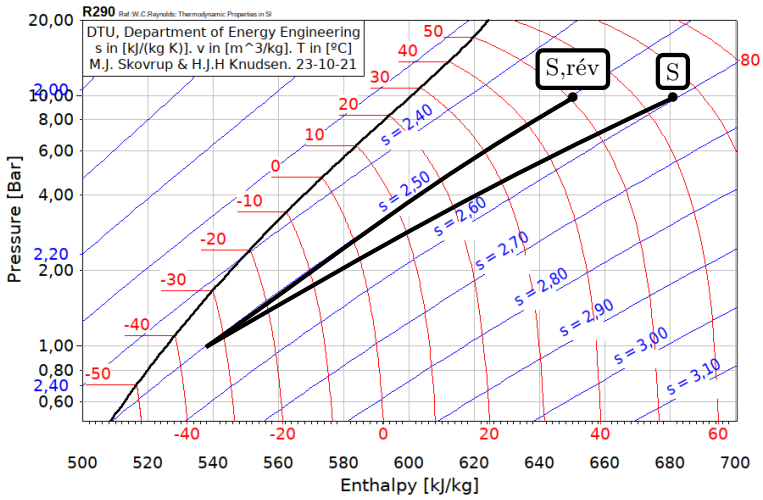
12.6 d) D'après le premier principe industriel, $q_\mathrm{cond} = h_3 - h_2 = 250 - 450 = -200\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$.

.....

12.7 a) La compression étant réversible, et en l'absence d'échange thermique, la compression est isentropique donc $s_\mathrm{S,rév} = s_\mathrm{E} = 2{,}50\,\mathrm{kJ \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$.

.....

12.7 b) L'état de sortie « S,rév » du compresseur se trouve à l'intersection entre l'isentrope passant par E et l'isobare à $P_S = 10\,\text{bar}$, comme schématisé ci-dessous.



.....

12.7 c) D'après le premier principe industriel, on a $w_{\text{rév}} = h_{\text{S,rév}} - h_{\text{E}} = 650 - 540 = 110\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$.

.....

12.7 d) La donnée de la température permet de placer le point S sur le diagramme. D'après le premier principe industriel, on a $w = h_{\text{S}} - h_{\text{E}} = 680 - 540 = 140\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$.

.....

12.7 f) La compression est adiabatique, il n'y a donc pas d'entropie échangée. Toute la variation d'entropie correspond à une création, d'où $s_{\text{créée}} = s_{\text{S}} - s_{\text{E}} = 2{,}60 - 2{,}50 = 0{,}1\,\text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$.

.....

12.8 a) La machine produit du travail ($W < 0$) grâce à un fluide chauffé ($Q_{\text{c}} > 0$) puis refroidi ($Q_{\text{f}} < 0$) : ainsi, on a $W < 0$; $Q_{\text{f}} < 0$; $Q_{\text{c}} > 0$.

.....

12.8 c) La machine reçoit du travail ($W > 0$) pour que le fluide refroidisse un compartiment plus froid (source froide $Q_{\text{f}} > 0$) que l'air ambiant, tout en réchauffant ce dernier ($Q_{\text{c}} < 0$) : on a $W > 0$; $Q_{\text{f}} > 0$; $Q_{\text{c}} < 0$.

.....

12.8 e) La machine reçoit du travail ($W > 0$) pour que le fluide refroidisse un compartiment plus froid (source froide $Q_{\text{f}} > 0$) que l'air ambiant, tout en réchauffant ce dernier ($Q_{\text{c}} < 0$) : on a $W > 0$; $Q_{\text{f}} > 0$; $Q_{\text{c}} < 0$.

.....

12.8 g) La machine reçoit du travail ($W > 0$) pour que le fluide refroidisse un compartiment plus froid (source froide $Q_{\text{f}} > 0$) que l'air ambiant, tout en réchauffant ce dernier ($Q_{\text{c}} < 0$) : on a $W > 0$; $Q_{\text{f}} > 0$; $Q_{\text{c}} < 0$.

.....

12.9 a) Le fluide d'une centrale est chauffé dans la chaudière (source chaude), passe par la turbine pour produire un travail puis est refroidi dans le condenseur (source froide).

.....

12.9 b) Le fluide d'un réfrigérateur refroidit la source froide en se réchauffant grâce à l'évaporateur, puis le fluide est refroidi dans le condenseur en contact avec l'air extérieur (source chaude).

.....

12.9 c) Le fluide d'une pompe à chaleur réchauffe la source chaude en se refroidissant grâce au condenseur, puis le fluide est réchauffé dans l'évaporateur en contact avec l'air extérieur (source froide).

.....

12.10 a) La loi des nœuds sur les fluides donne $D_{\mathrm{m1}} + D_{\mathrm{m2}} = D_{\mathrm{m}}$.

.....

12.10 b) On a $\Delta h_1 = q_{2\to1}$ donc $c_{\mathrm{p}}(T - T_1) = q_{2\to1}$.

.....

12.10 c) On a $\Delta h_2 = q_{1\to2}$ donc $c_{\mathrm{p}}(T - T_2) = q_{1\to2}$.

.....

12.10 e) On a $D_{\mathrm{m}}T = D_{\mathrm{m1}}T_1 - D_{\mathrm{m2}}T_2$ donc $T = \dfrac{D_{\mathrm{m1}}T_1 + D_{\mathrm{m2}}T_2}{D_{\mathrm{m}}}$.

.....

12.10 f) On a $T = \dfrac{3{,}0\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-1} \times 353\,\mathrm{K} + 7{,}0\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-1} \times 293\,\mathrm{K}}{3{,}0\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-1} + 7{,}0\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-1}} = 311\,\mathrm{K} = 38\,°\mathrm{C}$.

.....

12.11 a) La turbine est isolée thermiquement et horizontale, donc $q_{\mathrm{e}} = 0$ et $\Delta e_{\mathrm{p}} = 0$. Les températures sont identiques en entrée et sortie, donc d'après la loi de Joule $\Delta h = 0$. Le premier principe s'écrit donc $\Delta e_{\mathrm{c}} = w_{\mathrm{i}}$.

.....

12.11 b) Comme $\Delta T = 0$, cela signifie que $\Delta H = 0$ (deuxième loi de Joule) et que : $W_{\mathrm{f}} = -W_{\mathrm{i}} = -\Delta E_{\mathrm{c}} = \dfrac{1}{2}mc_1^2$.

.....

12.11 c) La masse traversant la turbine pendant 1 heure est de 1 800 kg, d'où

$$W_{\mathrm{f}} = \frac{1}{2} \times 1\,800\,\mathrm{kg} \times (100\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1})^2 = 9 \times 10^6\,\mathrm{J}\,.$$

.....

12.12 a) Le transfert thermique q_{e} est nul, et on peut supposer $e_{\mathrm{c}} = \mathrm{cste}$ et $e_{\mathrm{p}} = \mathrm{cste}$ (la vitesse est négligeable et la variation d'altitude est faible).

.....

12.12 c) La deuxième identité thermodynamique s'écrit :

$$\mathrm{d}h = T\,\mathrm{d}s + v\,\mathrm{d}p,$$

avec ici $\mathrm{d}s = 0$ car l'écoulement est isentropique. On a donc $\Delta h = v(p_2 - p_1)$.

.....

12.12 d) Finalement, on a $w_{\mathrm{i}} = v(p_2 - p_1)$.

.....

12.12 e) Numériquement, on a $w_{\mathrm{i}} = 1{,}99\,\mathrm{kJ}\cdot\mathrm{kg}^{-1}$.

.....

Fiche n° 13. Bilans en mécanique des fluides

Réponses

13.1 a) ..... non homogène

13.1 b) ..... homogène

13.1 c) ..... non homogène

13.1 d) ..... homogène

13.2 a) ..... $5{,}9 \times 10^4\,\mathrm{Pa}$

13.2 b) ..... $1{,}3 \times 10^2\,\mathrm{J/kg}$

13.3 a) ..... oui

13.3 b) ..... oui

13.3 c) ..... oui

13.3 d) ..... oui

13.4 a) c

13.4 b) ..... b

13.4 c) ..... b

13.4 d) c

13.4 e) ..... b

13.5 a) ..... $\dfrac{v^2}{2} + \dfrac{P}{\mu} = \mathrm{cste}$

13.5 b) ..... $gz + \dfrac{P}{\mu} = \mathrm{cste}$

13.5 c) ..... $v = 1\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$

13.6 a) ..... $D_v = 0{,}55\,\mathrm{L \cdot s^{-1}}$

13.6 b) c

13.6 c) ..... b

13.6 d) ..... $\mathcal{P} = 3{,}6 \times 10^2\,\mathrm{W}$

13.6 e) c

13.7 a) ..... $\xi = 0{,}05$

13.7 b) ..... $3{,}1 \times 10^2\,\mathrm{Pa}$

13.7 c) ..... 2×10^{-4}

13.7 d) ..... $60\,\mu\mathrm{m}$

13.8 a) ..... $U_1 = U_2 = 3{,}2\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$

13.8 b) ..... $3{,}0\,\mathrm{bar}$

13.9 a) c

13.9 b) c

13.9 c) ..... $-\mathcal{P}$

13.9 d) ..... $\dfrac{1}{2} D_\mathrm{m} v_2^2\,\mathrm{d}t$

13.9 e) ..... $\dfrac{1}{2} D_\mathrm{m} v_1^2\,\mathrm{d}t$

13.9 f) ..... $\mathcal{P} = \dfrac{1}{2} D_\mathrm{m}(v_1^2 - v_2^2)$

13.9 g) ..... $\mathcal{P} = 100\,\mathrm{W}$

13.10 a) ..... $\mathrm{d}m_1 = D_{m1}\,\mathrm{d}t$

13.10 b) ..... $\mathrm{d}m_2 = D_{m2}\,\mathrm{d}t$

13.10 c) ..... $\mathrm{d}m = \mathrm{d}m_1 - \mathrm{d}m_2$

13.10 d) ..... $D_{m1} = D_{m2}$

13.11 a) ..... $m^*(t) = m(t) + \mathrm{d}m_1$

13.11 b) ..... $m^*(t + \mathrm{d}t) = m(t + \mathrm{d}t) + \mathrm{d}m_2$

13.11 c) ..... $\mathrm{d}m^* = 0$

13.11 d) ..... $\mathrm{d}m_1 = \mathrm{d}m_2$

Corrigés

13.1 a) Comme le membre de gauche est homogène à une énergie massique, on voit que le terme ρ est en trop dans le membre de droite.

13.1 b) Le membre de gauche est homogène à un débit massique (en kg/s) fois une énergie massique (en J/kg), ce qui revient à une puissance. Le terme de droite étant également une puissance, l'équation est homogène.

13.1 c) Il manque un ρ au dénominateur dans le terme de droite : $-D_{\mathrm{m}}\dfrac{\Delta P}{\rho}$.

13.1 d) Le terme de gauche est homogène à une longueur : il mesure directement la perte de charge en hauteur. L'équation est homogène.

13.2 a) La perte de charge correspond au terme gh_{pc} sauf que, en l'état, elle correspond à une perte d'énergie massique. Pour obtenir une perte de pression, il faut multiplier par μ_0. Ainsi, $\Delta P_{\mathrm{pc}} = \mu_0 g h_{\mathrm{pc}}$.

13.2 b) Sans variation de pression et de vitesse, la relation de Bernoulli généralisée s'écrit :

$$g\Delta z = w_u - gh_{\mathrm{pc}} \qquad \text{donc} \qquad w_u = g(\Delta z + h_{\mathrm{pc}}).$$

13.3 a) Le fluide est ici un liquide. C'est un fluide incompressible donc l'écoulement est également incompressible.

13.3 b) Le fait que $s \ll S$ permet de qualifier l'écoulement de quasi stationnaire car, par conservation du débit volumique, la vitesse de la surface libre de l'eau dans le réservoir est très faible devant la vitesse de sortie ; autrement dit, on a $\dot{h} \ll v_B$.

13.3 c) On néglige toute perte de charge, ce qui revient à dire que l'écoulement est parfait.

13.3 d) Le fluide est de l'eau liquide, qu'on peut considérer comme une phase condensée incompressible et indilatable, c'est-à-dire de masse volumique uniforme.

13.4 a) Le récipient est ouvert sur l'extérieur en A et en B, la pression est donc égale à la pression atmosphérique en ces deux points.

13.4 b) Le débit volumique est défini comme $D_v = \iint_S \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$. La réponse (b) est donc la seule correcte.

13.4 d) À partir de l'égalité des deux débits volumiques, on peut écrire $v_{\mathrm{A}} = \dfrac{s v_{\mathrm{B}}}{S}$. Comme $s \ll S$, on en déduit que $v_{\mathrm{A}} \ll v_{\mathrm{B}}$.

13.4 e) Avec les résultats des questions précédentes (égalité des pressions et vitesse négligeable en A), la relation de Bernoulli devient :

$$g z_{\mathrm{A}} = \frac{v_{\mathrm{B}}^2}{2} + g z_{\mathrm{B}}.$$

On obtient donc la réponse (b) avec $h(t) = z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{B}}$.

13.5 a) La cote z reste constante, les contributions de pesanteur gz se compensent.

.....

13.5 b) La vitesse v est faible, les contributions cinétiques $\dfrac{v^2}{2}$ sont négligées.

.....

13.5 c) On obtient $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9{,}81\,\mathrm{m \cdot s^{-2}} \times 5 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}} = 1\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

.....

13.6 a) Le débit volumique s'écrit : $D_v = SU$ avec S la section de la canalisation. Soit $D_v = U\pi\dfrac{D^2}{4}$, d'où $D_v = 7{,}0\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} \times \pi \times \dfrac{(10 \times 10^{-3}\,\mathrm{m})^2}{4} = 5{,}5 \times 10^{-4}\,\mathrm{m^3 \cdot s^{-1}} = 0{,}55\,\mathrm{L \cdot s^{-1}}$.

.....

13.6 b) La vitesse en A avant la pompe étant négligeable et celle en B valant U, on a $\Delta v^2 = U^2$.

Avant la pompe et après le robinet, la pression vaut P_0, pression atmosphérique, donc $\Delta P = 0$.

Le point B est situé à la distance L au-dessus de A donc $\Delta z = L$. Dans le terme de droite, w_u est le travail massique fourni par la pompe et $gh_{\mathrm{pc}} = \Delta e_{\mathrm{pcr}}$ est la perte d'énergie massique due aux pertes régulières le long du tuyau de longueur L.

La relation de Bernoulli s'écrit donc : $\dfrac{1}{2}U^2 + gL = w_u - \Delta e_{\mathrm{pcr}} = w_u - \dfrac{1}{2}\xi\dfrac{L}{D}U^2$.

.....

13.6 c) La relation de Bernoulli donnée est un bilan d'énergie massique. Il faut le multiplier par une masse et le diviser par un temps pour obtenir une puissance, c'est-à-dire multiplier par un débit massique.

.....

13.6 d) On déduit de la première question : $w_u = \dfrac{1}{2}U^2 + gL + \dfrac{1}{2}\xi\dfrac{L}{D}U^2 = gL + \dfrac{1}{2}U^2\left(1 + \xi\dfrac{L}{D}\right)$.

Or, on a $\mathcal{P} = D_{\mathrm{m}}w_u = \mu D_v w_u$. Donc :

$$\mathcal{P} = \mu D_v\left[\frac{1}{2}U^2 + gL + \frac{1}{2}\xi\frac{L}{D}U^2\right] = \mu D_v\left[gL + \frac{1}{2}U^2\left(1 + \xi\frac{L}{D}\right)\right].$$

L'application numérique donne $\mathcal{P} = 3{,}6 \times 10^2\,\mathrm{W}$.

.....

13.6 e) Il faut que la puissance soit supérieure à $\mathcal{P} = 3{,}6 \times 10^2\,\mathrm{W}$, on prend donc la pompe ayant une puissance immédiatement supérieure.

.....

13.7 a) On calcule la rugosité relative $\dfrac{\varepsilon}{D} = 0{,}02$ et on lit sur l'axe des ordonnées la valeur de ξ.

.....

13.7 b) On a $\Delta P = \dfrac{1}{2}\rho U^2\xi\dfrac{\ell}{D} = \dfrac{1}{2} \times 1 \times 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}} \times \left(0{,}5\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}\right)^2 \times 0{,}05 \times \dfrac{10\,\mathrm{m}}{20 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}} = 3{,}1 \times 10^2\,\mathrm{Pa}$.

.....

13.8 a) Comme le diamètre de tout le circuit est constant, on a : $U_1 = U_2 = \dfrac{D_v}{S} = \dfrac{4D_v}{\pi D^2}$.

.....

13.8 b) Réécrivons la relation de Bernoulli entre le début du tuyau vertical et un point en aval du robinet en la rendant homogène à une pression :

$$\frac{1}{2}\mu\left(U^2 - U^2\right) + P_0 - P_i + g\mu(L - 0) = -\frac{1}{2}\mu U^2(k_1 + k_2).$$

Donc, on a $P_i = P_0 + g\mu L + \dfrac{1}{2}\mu U^2(k_1 + k_2)$.

.....

13.9 a) La force volumique associée à la résultante des forces de pression s'écrit $\vec{f_p} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P$. La pression étant uniforme, la résultante des forces pressantes est nulle.

.....

13.9 b) Les forces pressantes étant nulles, elles ne travaillent pas.

.....

13.9 c) D'un point de vue énergétique, ce qui est fourni par un système est reçu par un autre.

.....

13.9 d) La masse élémentaire $D_\text{m}\,\text{d}t$ sort à la vitesse $\vec{v_2}$ en aval pendant la durée $\text{d}t$.

.....

13.9 e) La masse élémentaire $D_\text{m}\,\text{d}t$ entre à la vitesse $\vec{v_1}$ en amont pendant la durée $\text{d}t$.

.....

13.9 f) En régime stationnaire la variation d'énergie cinétique est $\dfrac{1}{2}D_m(v_2^2 - v_1^2)\,\text{d}t$. Le théorème de la puissance cinétique donne alors $\dfrac{1}{2}D_m(v_2^2 - v_1^2) = -\mathcal{P}$.

.....

13.11 c) Le système (S^*) étant fermé, sa masse ne varie pas, donc $\text{d}m^* = 0$.

.....

13.11 d) On a $\text{d}m^* = m^*(t+dt) - m^*(t) = m(t+dt) + \text{d}m_2 - m(t) - \text{d}m_1 = 0$.

Comme $m(t+dt) = m(t)$ en régime stationnaire, il reste $\text{d}m_1 = \text{d}m_2$.

.....