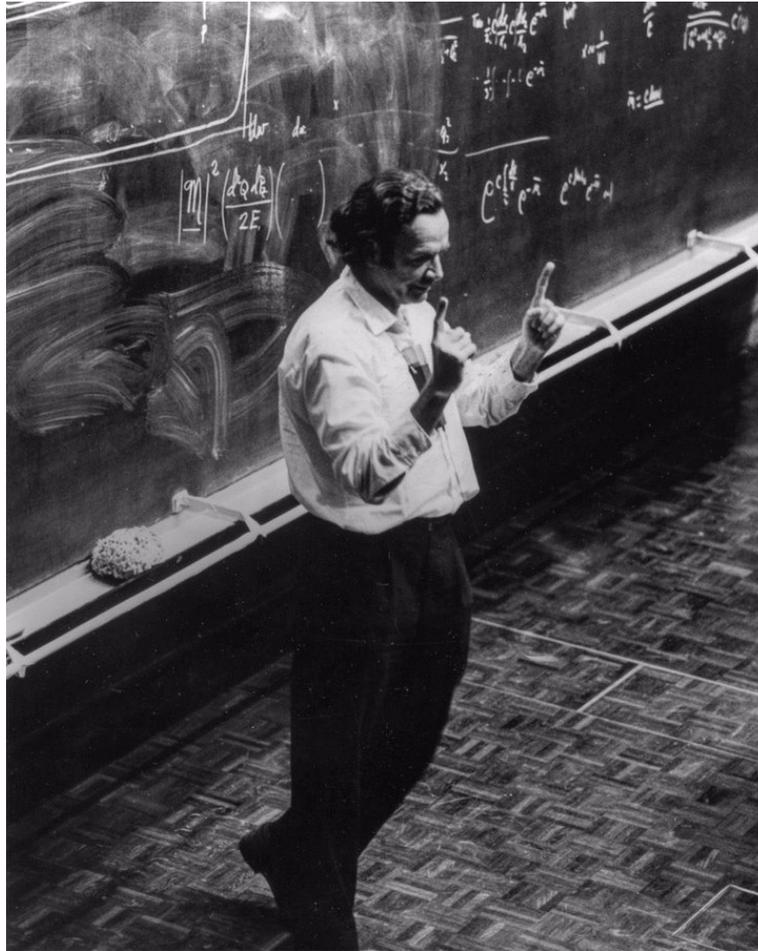


Cahier d'entraînement

— en physique-chimie —



Richard FEYNMAN (1918–1988)

Cette photo a été prise alors que Richard FEYNMAN donnait un cours au CERN en 1970.

Feynman est un physicien américain, l'un des plus influents de la seconde moitié du XX^e siècle, en raison notamment de ses travaux sur l'électrodynamique quantique, les quarks et l'hélium superfluide.

Il a notamment marqué l'histoire de la physique par ses cours, réputés passionnants.

Page web du *Cahier d'entraînement*,
dernières versions



Ce cahier d'entraînement a été écrit collectivement par des professeurs en classes préparatoires scientifiques.

Coordination

Colas BARDAVID et Jimmy ROUSSEL

Équipe des participants

Stéphane BARGOT, Claire BOGGIO, Cécile BONNAND, Alexis BRÈS, Geoffroy BURGUNDER, Erwan CAPITAINE, Caroline CHEVALIER, Maxime DEFOSSEUX, Raphaëlle DELAGRANGE, Alexis DROUARD, Gaëlle DUMAS, Alexandre FAFIN, Jean-Julien FLECK, Aéla FORTUN, Florence GOUTVERG, Chahira HAJLAOUI, Mathieu HEBDING, Lucas HENRY, Didier HÉRISSON, Jean-Christophe IMBERT, Fanny JOSPITRE, Tom KRISTENSEN, Emmanuelle LAAGE, Catherine LAVAINNE, Maxence MIGUEL-BREBION, Anne-Sophie MOREAU, Louis PÉAULT, Isabelle QUINOT, Valentin QUINT, Alain ROBICHON, Caroline ROSSI-GENDRON, Nancy SAUSSAC, Anthony YIP

Le pictogramme 🕒 de l'horloge a été créé par Ralf SCHMITZER (The Noun Project).

Le pictogramme 🚧 du bulldozer a été créé par Ayub IRAWAN (The Noun Project).

La photographie de la couverture vient de TWITTER. L'illustration est utilisée à des fins pédagogiques et les droits restent réservés.

Sommaire

Mode d'emploi du cahier d'entraînement v

Généralités

Fiche 1. Conversions 1

Fiche 2. Signaux 7

Électricité

Fiche 3. Étude des circuits électriques I 13

Fiche 4. Étude des circuits électriques II 19

Fiche 5. Étude des filtres 30

Fiche 6. Énergie et puissance électriques 39

Fiche 7. Amplificateurs linéaires intégrés 50

Optique

Fiche 8. Sources lumineuses et lois de Snell-Descartes 62

Fiche 9. Lentilles 66

Mécanique

Fiche 10. Cinématique 74

Fiche 11. Principe fondamental de la dynamique 81

Fiche 12. Approche énergétique en mécanique 88

Fiche 13. Moment cinétique 95

Électromagnétisme

Fiche 14. Champ électrique 101

Fiche 15. Particule dans un champ électromagnétique 107

Fiche 16. Champ magnétique 114

Fiche 17. Induction 123

Thermodynamique

- Fiche 18. Gaz parfaits 131
- Fiche 19. Premier principe.....136
- Fiche 20. Second principe et machines thermiques 143
- Fiche 21. Statique des fluides 150

Chimie

- Fiche 22. Fondamentaux de la chimie des solutions 159
- Fiche 23. Fondamentaux de la chimie en phase gazeuse 167
- Fiche 24. Réactions chimiques 174
- Fiche 25. Cinétique chimique 182

Chiffres significatifs et incertitudes

- Fiche 26. Chiffres significatifs et incertitudes.....191

Mode d'emploi

Qu'est-ce que le cahier d'entraînement ?

Le *cahier d'entraînement en physique-chimie* est un outil destiné à renforcer l'acquisition de **réflexes utiles en physique et en chimie**.

Il ne se substitue en aucun cas aux TD donnés par votre professeur ; travailler avec ce cahier d'entraînement vous permettra en revanche d'aborder avec plus d'aisance les exercices de physique-chimie.

Pour donner une analogie, on pourrait dire que ce cahier d'entraînement est comparable aux **exercices de musculation** d'un athlète : ils sont nécessaires pour mieux réussir le jour J lors de la compétition, mais ils ne sont pas suffisants. Un coureur de sprint fait de la musculation, mais il fait également tout un tas d'autres exercices.

Ce cahier a été conçu par une large équipe de professeurs en classes préparatoires, tous soucieux de vous apporter l'aide et les outils pour réussir.

Comment est-il organisé ?

Le cahier est organisé en *fiches d'entraînement*, chacune correspondant à un thème issu du programme de première année d'enseignement supérieur.

Les thèmes choisis sont dans l'ensemble au programme de toutes les CPGE. De rares thèmes sont spécifiques à la filière PCSI, mais les intitulés sont suffisamment clairs pour que vous puissiez identifier facilement les fiches qui vous concernent.

Chaque fiche est composée d'une suite de petits exercices, appelés *entraînements*, dont le temps de résolution estimé est indiqué par une (🕒🕒🕒), deux (🕒🕒), trois (🕒🕒🕒) ou quatre (🕒🕒🕒🕒) horloges.

Les exercices « bulldozer »

Certains entraînements sont accompagnés d'un pictogramme représentant un bulldozer.



Ces entraînements sont **basiques et transversaux**.

Les compétences qu'ils mettent en jeu ne sont pas forcément spécifiques au thème de la fiche et peuvent être transversales.

Ce pictogramme a été choisi parce que le bulldozer permet de construire les fondations et que c'est sur des fondations solides que l'on bâtit les plus beaux édifices. Ces entraînements sont donc le gage pour vous d'acquérir un socle solide de savoir-faire.

Comment utiliser ce cahier ?

Le cahier d'entraînement ne doit pas remplacer vos TD. Il s'agit d'un outil à utiliser en complément de votre travail « normal » en physique-chimie (apprentissage du cours, recherche de TD, recherche des DM).

Un travail personnalisé.

Le cahier d'entraînement est prévu pour être **utilisé en autonomie**.

Choisissez vos entraînements en fonction des difficultés que vous rencontrez, des chapitres que vous étudiez, ou bien en fonction des conseils de votre professeur.

Ne cherchez pas à faire linéairement ce cahier : les fiches ne sont pas à faire dans l'ordre, mais en fonction des points que vous souhaitez travailler.

Un travail régulier.

Pratiquez l'entraînement à un rythme régulier : **une dizaine de minutes par jour** par exemple. Privilégiez un travail régulier sur le long terme plutôt qu'un objectif du type « faire dix fiches par jour pendant les vacances ».

Un travail efficace.

Utilisez les réponses et les corrigés de façon appropriée : il est important de chercher suffisamment par vous-même avant d'aller les regarder. Il faut vraiment **persévérer** dans votre raisonnement et vos calculs avant d'aller voir le corrigé si vous voulez que ces entraînements soient efficaces.

Une erreur ? Une remarque ?

Si jamais vous voyez une erreur d'énoncé ou de corrigé, ou bien si vous avez une remarque à faire, n'hésitez pas à écrire à l'adresse cahier.entrainement@gmail.com.

Si vous pensez avoir décelé une erreur, merci de donner aussi l'identifiant de la fiche, écrit en gris en haut à gauche de chaque fiche.

Conversions

Prérequis

Unités du Système international. Écriture scientifique.

Unités et multiples

 **Entraînement 1.1 — Multiples du mètre (I).**



Écrire les longueurs suivantes en mètres et en écriture scientifique.

- | | | | | | |
|----------------|----------------------|----------------|----------------------|----------------|----------------------|
| a) 1 dm | <input type="text"/> | c) 3 mm | <input type="text"/> | e) 5,2 pm | <input type="text"/> |
| b) 2,5 km | <input type="text"/> | d) 7,2 nm | <input type="text"/> | f) 13 fm | <input type="text"/> |

 **Entraînement 1.2 — Multiples du mètre (II).**



Écrire les longueurs suivantes en mètres et en écriture scientifique.

- | | | | | | |
|----------------|----------------------|----------------|----------------------|----------------|----------------------|
| a) 150 km | <input type="text"/> | c) 234 cm | <input type="text"/> | e) 0,23 mm .. | <input type="text"/> |
| b) 0,7 pm | <input type="text"/> | d) 120 nm | <input type="text"/> | f) 0,41 nm ... | <input type="text"/> |

 **Entraînement 1.3 — Vitesse d'un électron.**



La vitesse d'un électron est $v = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}}$, où $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C est la charge d'un électron, $U = 0,150$ kV est une différence de potentiel et $m_e = 9,1 \cdot 10^{-28}$ g est la masse d'un électron.

- | | |
|-------------------------------|----------------------|
| a) Calculer v en m/s | <input type="text"/> |
| b) Calculer v en km/h | <input type="text"/> |

 **Entraînement 1.4 — Avec des joules.**



On considère la grandeur $T = 0,67$ kWh. On rappelle que $1 \text{ J} = 1 \text{ Ws}$.

Convertir T en joules, en utilisant le multiple le mieux adapté

 **Entraînement 1.5 — Valeur d'une résistance.**



La résistance d'un fil en cuivre est donnée par la formule $R = \frac{\ell}{\gamma S}$, où $\gamma = 59 \text{ MS/m}$ est la conductivité du cuivre, où $\ell = 1,0 \cdot 10^3 \text{ cm}$ est la longueur du fil et où $S = 3,1 \text{ mm}^2$ est sa section.

L'unité des résistances est l'ohm, notée « Ω ». L'unité notée « S » est le siemens ; on a $1 \Omega = 1 \text{ S}^{-1}$.

Calculer R (en ohms)

 **Entraînement 1.6 — Ronna, ronto, quetta et quecto.**



En novembre 2022, lors de la 27^e réunion de la Conférence générale des poids et mesures, a été officialisée l'existence de quatre nouveaux préfixes dans le système international :

Facteur multiplicatif	Préfixe	Symbole
10^{27}	ronna	R
10^{-27}	ronto	r
10^{30}	quetta	Q
10^{-30}	quecto	q

On donne les masses de quelques objets :

Soleil	Jupiter	Terre	proton	électron
$1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$	$1,90 \cdot 10^{27} \text{ kg}$	$5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	$1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$	$9,10 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

Convertir ces masses en utilisant ces nouveaux préfixes (en écriture scientifique).

a) Soleil (en Rg)

f) Terre (en Qg)

b) Soleil (en Qg)

g) proton (en rg)

c) Jupiter (en Rg)

h) proton (en qg)

d) Jupiter (en Qg)

i) électron (en rg)

e) Terre (en Rg)

j) électron (en qg)

Règle de trois et pourcentages

Entraînement 1.7 — Un peu de cuisine.



Les ingrédients pour un gâteau sont : 4 œufs, 200 g de farine, 160 g de beurre, 100 g de sucre et 4 g de sel. On décide de faire la recette avec 5 œufs. Combien de grammes faut-il de :

- | | | | |
|------------------|----------------------|-----------------|----------------------|
| a) farine? | <input type="text"/> | c) sucre? | <input type="text"/> |
| b) beurre? | <input type="text"/> | d) sel? | <input type="text"/> |

Entraînement 1.8 — Pourcentages.



Convertir en pourcentage :

- | | | | |
|------------------------|----------------------|-------------------------|----------------------|
| a) 0,1 | <input type="text"/> | d) $\frac{1}{20}$ | <input type="text"/> |
| b) 0,007 | <input type="text"/> | e) $\frac{9}{5}$ | <input type="text"/> |
| c) $\frac{1}{2}$ | <input type="text"/> | f) un quart de 2% | <input type="text"/> |

Entraînement 1.9 — Énergie en France (I).



Les origines de l'énergie primaire consommée en France (en 2020) sont : nucléaire 40,0 %, pétrole 28,1 %, gaz 15,8 %, biomasse 4,4 %, charbon 2,5 % hydraulique 2,4 %, éolien 1,6 %.

Quel pourcentage occupent les autres énergies (solaire, biocarburants, etc.)?

Entraînement 1.10 — Énergie en France (II).



La consommation primaire totale en France est de 2 571 TWh.

À l'aide des données de l'entraînement précédent, calculer (en « TWh ») les quantités d'énergie créées par les sources suivantes :

- | | | | |
|--------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| a) nucléaire | <input type="text"/> | e) charbon | <input type="text"/> |
| b) pétrole | <input type="text"/> | f) hydraulique | <input type="text"/> |
| c) gaz | <input type="text"/> | g) éolien | <input type="text"/> |
| d) biomasse | <input type="text"/> | h) autre | <input type="text"/> |



Entraînement 1.11 — Abondance des éléments dans la croûte terrestre.



L'abondance chimique d'un élément peut être exprimée en « parties par centaine » (notée ‰, on parle communément de « pourcentage »), en « parties par millier » (notée ‰, on parle aussi de « pour mille ») ou encore en « parties par million » (notée « ppm »).

Les abondances de quelques éléments chimiques constituant la croûte terrestre sont :

Silicium	Or	Hydrogène	Fer	Oxygène	Cuivre
275 ‰	$1,0 \times 10^{-7} \%$	1,4 ‰	50 000 ppm	46 %	50 ppm

Quel est l'élément le moins abondant ?

Longueurs, surfaces et volumes



Entraînement 1.12 — Taille d'un atome.



La taille d'un atome est de l'ordre de 0,1 nm.

a) Quelle est sa taille en m (écriture scientifique) ?

b) Quelle est sa taille en m (écriture décimale) ?



Entraînement 1.13 — Alpha du centaure.



La vitesse de la lumière dans le vide est $c = 3,00 \cdot 10^8$ m/s. Une année dure 365,25 jours. Alpha du centaure est à une distance de 4,7 années-lumière de la Terre.

a) Quelle est cette distance en m (écriture scientifique) ?

b) Quelle est cette distance en km (écriture scientifique) ?



Entraînement 1.14 — Avec des hectares.



La superficie de la France est de 672 051 km². L'île danoise de Bornholm (au nord de la Pologne) a une superficie de 589 km². Un hectare (ha) est la surface d'un carré de 100 m de côté.

Donner les superficies suivantes :

a) un hectare (en m²)

d) la France (en ha)

b) un hectare (en km²)

e) Bornholm (en m²)

c) la France (en m²)

f) Bornholm (en ha)

 **Entraînement 1.15 — Volume.**



a) Peut-on faire tenir 150 mL d'huile dans un flacon de $2,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$?

b) Peut-on faire tenir 1,5 L d'eau dans un flacon de $7,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$?

Masse volumique, densité et concentration

 **Entraînement 1.16 — Masse volumique.**



Si on néglige la masse du contenant, une bouteille d'eau de 1 L a une masse de 1 kg. Un verre doseur rempli indique, pour la même graduation, eau : 40 cL et farine : 250 g.

a) Quelle est la masse volumique de l'eau en kg/m^3 ?

b) Quelle est la masse volumique de la farine ?

 **Entraînement 1.17 — Densité.**



La densité d'un corps est le rapport $\frac{\rho_{\text{corps}}}{1\,000 \text{ kg}/\text{m}^3}$, où ρ_{corps} est la masse volumique du corps en question.

a) Une barre de fer de volume 100 mL pèse 787 g. Quelle est la densité du fer ?

b) Un cristal de calcium a une densité de 1,6. Quelle est sa masse volumique (en kg/m^3) ?

 **Entraînement 1.18 — Un combat de masse.**



On possède un cube de 10 cm en plomb de masse volumique $11,20 \text{ g}/\text{cm}^3$ et une boule de rayon 15 cm en or de masse volumique $19\,300 \text{ kg}/\text{m}^3$. On rappelle que le volume d'une boule de rayon R est $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Lequel possède la plus grande masse ?

 **Entraînement 1.19 — Prendre le volant ?**



Le taux maximal d'alcool dans le sang pour pouvoir conduire est de 0,5 g d'alcool pour 1 L de sang.

A-t-on le droit de conduire avec 2 mg d'alcool dans $1\,000 \text{ mm}^3$ de sang ?

Autour de la vitesse



Entraînement 1.20 — Le guépard ou la voiture ?



Un guépard court à 28 m/s et un automobiliste conduit une voiture à 110 km/h sur l'autoroute.

Lequel est le plus rapide?



Entraînement 1.21 — Classement de vitesses.



On considère les vitesses suivantes : 20 km/h, 10 m/s, 1 année-lumière/an, 22 mm/ns, 30 dm/s et 60 cm/ms.

a) Laquelle est la plus petite?

b) Laquelle est la plus grande?



Entraînement 1.22 — Vitesses angulaires.



La petite aiguille d'une montre fait un tour en 1 h, la Terre effectue le tour du Soleil en 365,25 j.

Quelles sont leurs vitesses angulaires :

a) en tours/min (l'aiguille)?

c) en tours/min (la Terre)?

b) en rad/s (l'aiguille)?

d) en rad/s (la Terre)?

Réponses mélangées

10 000 m ²	30 dm/s	625 kg/m ³	0,017 tour/min	62 TWh	1 · 10 ⁻¹ m		
oui	1,90 · 10 ³ Rg	7,87	722 TWh	1,99 · 10 ³ Qg	7,2 · 10 ⁻⁹ m	1,90 Qg	
134 TWh	0,000 000 000 1 m	406 TWh	7 · 10 ⁻¹³ m	4,33 · 10 ¹³ km	113 TWh		
9,10 · 10 ² qg	l'or	2,6 · 10 ⁷ km/h	200 g	9,10 · 10 ⁻¹ rg	1,67 · 10 ⁶ qg	3 · 10 ⁻³ m	
5,89 · 10 ⁴ ha	La voiture	1,99 · 10 ⁶ Rg	4,43 · 10 ¹⁶ m	0,001 7 rad/s	2,3 · 10 ⁻⁴ m		
180 %	10 %	1,20 · 10 ⁻⁷ m	250 g	1,50 · 10 ⁵ m	125 g	6,72 · 10 ⁷ ha	
La boule en or	5 %	64 TWh	1,67 · 10 ³ rg	0,01 km ²	1,99 · 10 ⁻⁷ rad/s		
5,5 · 10 ⁻² Ω	1 · 10 ⁻¹⁰ m	oui	1,6 × 10 ³ kg/m ³	5,97 · 10 ⁻³ Qg	6,72 · 10 ¹¹ m ²		
1 année-lumière/an	50 %	1,90 · 10 ⁻⁶ tour/min	2,34 m	5,2 %	1 · 10 ³ kg/m ³		
5,97 Rg	0,7 %	41 TWh	5 g	4,1 · 10 ⁻¹⁰ m	5,2 · 10 ⁻¹² m	0,5 %	non
2,4 MJ	1,03 × 10 ³ TWh	5,89 · 10 ⁸ m ²	7,3 · 10 ⁶ m/s	2,5 · 10 ³ m	1,3 · 10 ⁻¹⁴ m		

Signaux

Prérequis

Fonctions trigonométriques.
Signaux périodiques (fréquence, période, pulsation, longueur d'onde, phase).

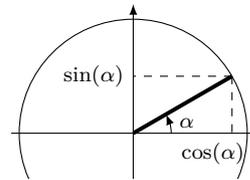
Autour des fonctions trigonométriques

Entraînement 2.1 — Cercle trigonométrique.



Sur le cercle trigonométrique ci-contre, $\cos(\alpha)$ se lit sur l'axe des abscisses et $\sin(\alpha)$ se lit sur l'axe des ordonnées.

Exprimer les fonctions suivantes en fonction de $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$.



a) $\sin(\alpha + \pi)$

c) $\sin(\alpha + \pi/2)$

b) $\cos(\alpha + \pi/2)$

d) $\sin(\pi/2 - \alpha)$

Entraînement 2.2 — Dérivée de signaux.



Pour chaque signal ci-dessous, calculer sa dérivée par rapport à t .

a) $\sin(2t)$

c) $\cos(t) \times \sin(t)$

b) $\cos^2(t + 4)$

Entraînement 2.3 — Transformer des sommes de signaux en produits.



On rappelle les formules trigonométriques :

$$\begin{aligned} \cos(a + b) &= \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b) & \sin(a + b) &= \sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b) \\ \cos(a - b) &= \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b) & \sin(a - b) &= \sin(a) \cos(b) - \cos(a) \sin(b). \end{aligned}$$

Mettre les signaux suivants sous la forme $C \cos(\Omega t) \cos(\omega t)$ ou $C \sin(\Omega t) \sin(\omega t)$ (où les constantes C , Ω et ω s'exprimeront en fonction de A , ω_1 et ω_2).

a) $A \cos(\omega_1 t) + A \cos(\omega_2 t)$

b) $A \cos(\omega_1 t) - A \cos(\omega_2 t)$

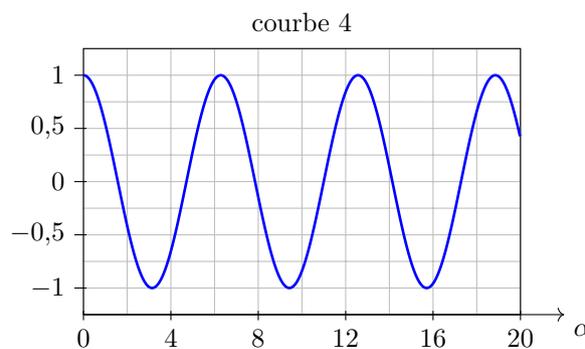
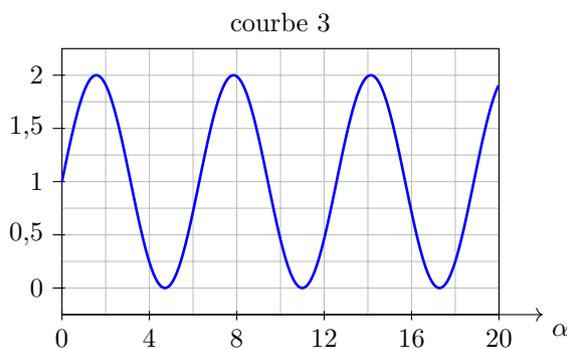
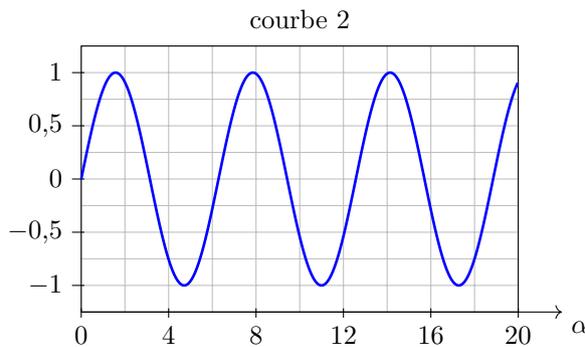
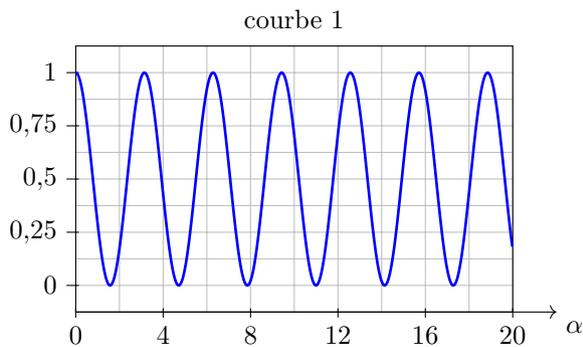
Entraînement 2.4 — Formules d'addition.



Mettre le signal $A \sin(\omega t + \varphi)$ sous la forme $B \cos(\omega t) + C \sin(\omega t)$, où B et C sont des constantes à exprimer en fonction de A et φ .

.....

Entraînement 2.5 — Représentations graphiques.



Pour les quatre graphiques ci-dessus, α est exprimé en radians.

Associer chaque fonction à sa courbe représentative.

a) $\sin(\alpha)$

c) $1 + \sin(\alpha)$

b) $\cos(\alpha)$

d) $\cos^2(\alpha)$

Entraînement 2.6 — Formules trigonométriques.



Le signal $\cos(\omega t) + \sin(\omega t)$ peut s'écrire sous la forme :

(a) $\cos^2(\omega t + \pi/4)$

(b) $2 \cos(\omega t + \pi/4)$

(c) $\sqrt{2} \sin(\omega t + \pi/4)$

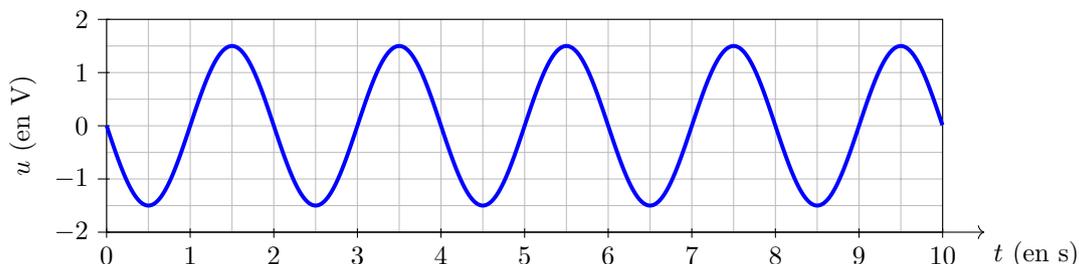
.....

Étude graphique

Entraînement 2.7 — Paramètres d'un signal sinusoïdal.



En travaux pratiques, vous faites l'acquisition d'une tension sinusoïdale $u(t) = U_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$ et obtenez l'oscillogramme ci-dessous.



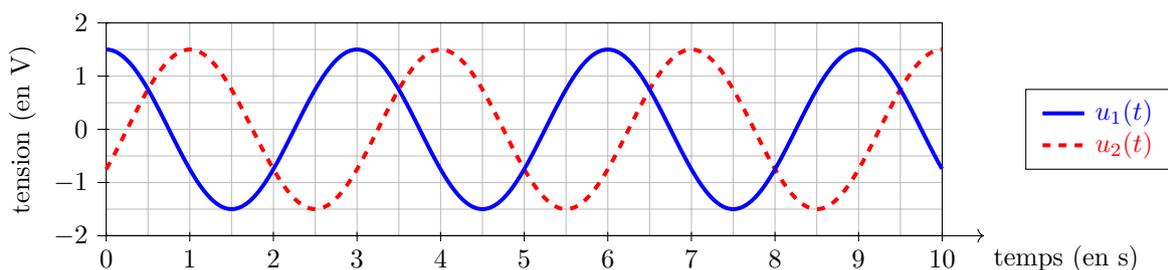
Par lecture graphique ou par le calcul, déterminer :

- | | | | |
|---|----------------------|--------------------------------|----------------------|
| a) l'amplitude U_0 | <input type="text"/> | d) la fréquence f | <input type="text"/> |
| b) la phase à l'origine φ | <input type="text"/> | e) la pulsation ω | <input type="text"/> |
| c) la période T | <input type="text"/> | | |

Entraînement 2.8 — Différence de phase.



La figure ci-dessous donne les représentations graphiques de deux signaux : le signal $u_1(t) = U_0 \cos(\omega t)$ et le signal $u_2(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$, où on a $\omega = \frac{2\pi}{3} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.



- | | |
|--|----------------------|
| a) Le signal $u_2(t)$ est-il en avance ou en retard sur $u_1(t)$? | <input type="text"/> |
| b) En déduire le signe de φ | <input type="text"/> |
| c) Déterminer graphiquement φ | <input type="text"/> |

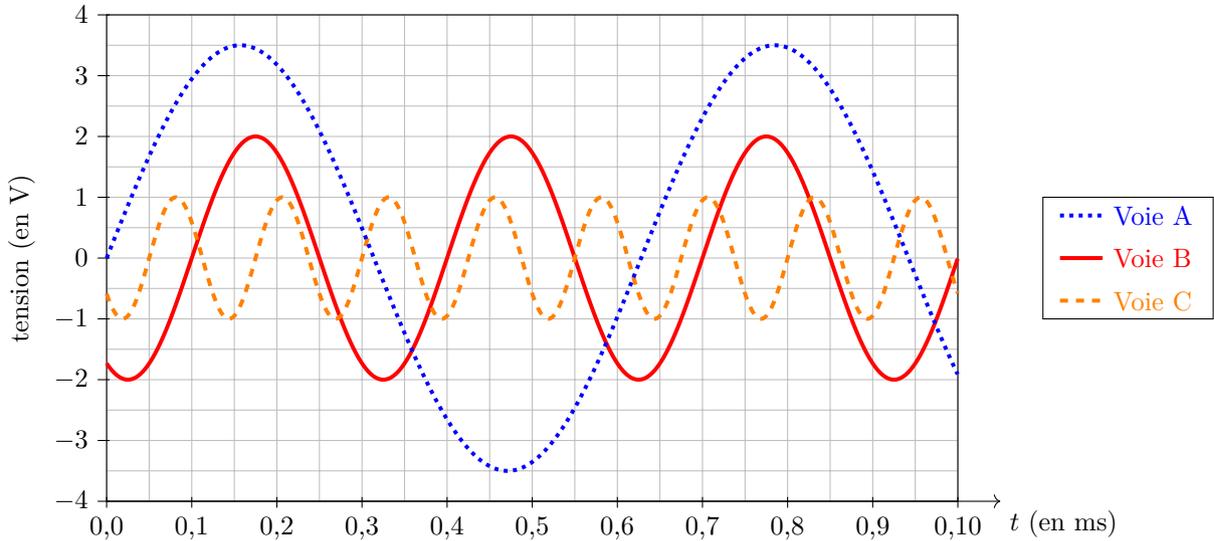
Entraînement 2.9 — Qui est qui ?



En travaux pratiques, vous faites l'acquisition de trois signaux périodiques : $u_1(t)$, $u_2(t)$ et $u_3(t)$.

Malheureusement, vous ne vous souvenez pas quelle voie d'acquisition vous avez utilisée pour chaque signal !

Vous savez que la tension $u_1(t)$ a pour période 300 μs , que la tension $u_2(t)$ a pour fréquence 8,0 kHz et que la tension $u_3(t)$ a pour pulsation $1 \times 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.



Attribuer chacun des graphes au signal qui lui correspond.

- a) Voie A b) Voie B c) Voie C

Valeur moyenne et valeur efficace

La valeur moyenne U_{moy} et la valeur efficace U_{eff} d'un signal $u(t)$ périodique de période T sont définies par les formules :

$$U_{\text{moy}} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt \quad \text{et} \quad U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u(t)^2 dt}.$$

Entraînement 2.10 — Signal sinusoïdal.



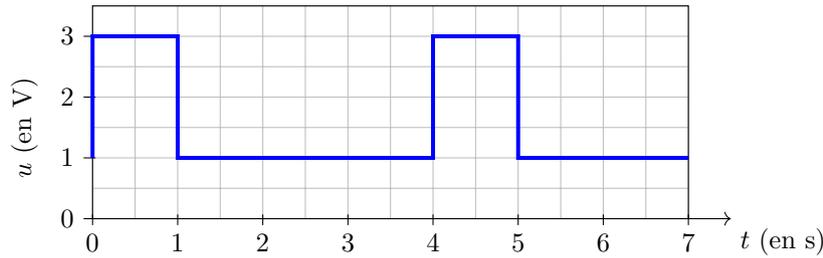
On considère le signal sinusoïdal $u(t) = U_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$.

- a) Calculer la valeur moyenne de $u(t)$
- b) Calculer la valeur efficace de $u(t)$

Entraînement 2.11 — Un signal carré.



On considère le signal périodique carré dissymétrique $u(t)$ représenté ci-dessous.



Calculer :

a) la valeur moyenne de $u(t)$

b) la valeur efficace de $u(t)$

Entraînement 2.12 — Un signal carré, sans son dessin.



On considère le signal périodique carré défini par $u(t) = \begin{cases} U_0 & \text{si } 0 < t \leq T/2 \\ 0 & \text{si } T/2 < t \leq T. \end{cases}$

Calculer :

a) la valeur moyenne de $u(t)$

b) la valeur efficace de $u(t)$

Propagation d'un signal

Une onde progressive se propageant dans le sens des x croissants est un signal $s(x, t)$ qui peut se mettre sous la forme :

$$s(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right),$$

où f est une fonction mathématique quelconque. La grandeur c est la célérité de l'onde, c'est-à-dire sa vitesse de propagation.

Entraînement 2.13 — Éclair et tonnerre.



La foudre est une décharge électrique qui se produit pendant les orages et qui entraîne une lumière intense (l'éclair) et un grondement sourd (le tonnerre).

La lumière se propage à la vitesse $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et le son se propage à la vitesse $c_s = 344 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Vous mesurez à l'aide d'un chronomètre la durée entre le moment où vous voyez l'éclair et le moment où vous entendez le tonnerre : vous trouvez $\Delta t = 5,0 \pm 0,5 \text{ s}$.

a) On considère que la lumière se propage instantanément entre le lieu de l'éclair et votre position.

Déterminer la distance à laquelle la foudre a frappé

b) En déduire la durée de propagation de la lumière entre l'endroit où la foudre a frappé et votre position.

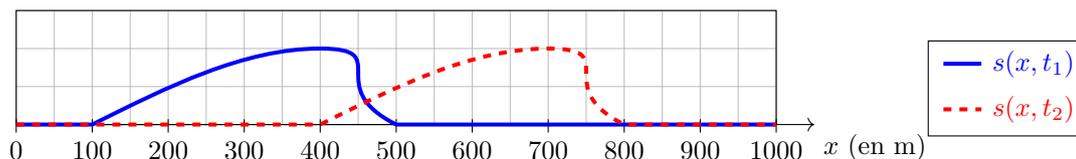
.....

c) L'hypothèse faite à la première question est-elle justifiée?

Entraînement 2.14 — Vitesse de propagation.



Une vague $s(x, t)$ se propage en direction des côtes. Ci-dessous, on représente l'allure de la surface de l'eau aux instants $t_1 = 0$ min et $t_2 = 1$ min.



Déterminer la vitesse de propagation de la vague en km/h

Entraînement 2.15 — Onde progressive sinusoïdale.



Une onde progressive sinusoïdale a pour expression, en $x = 0$:

$$s(0, t) = 2 \sin(3,9 t + 0,3 \pi),$$

le temps t étant exprimé en secondes.

Elle se propage dans le sens des x croissants à la vitesse $c = 30 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$.

a) Déterminer la période T du signal

b) Déterminer la longueur d'onde λ du signal

c) Donner l'expression générale de $s(x, t)$

Réponses mélangées

$\cos(\alpha)$	$-2 \sin(t + 4) \cos(t + 4) = -\sin(2t + 8)$	$u_1(t)$	oui	48 cm	$-\sin(\alpha)$
1,7 km	Courbe 4	$\cos^2(t) - \sin^2(t) = \cos(2t)$	$2A \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right)$		
ⓐ	$u_2(t)$	$-\frac{2\pi}{3} \text{ rad}$	$\frac{\pi}{2} \text{ rad}$	$\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$	$A \sin(\varphi) \cos(\omega t) + A \cos(\varphi) \sin(\omega t)$
1,6 s	$2 \cos(2t)$	Courbe 1	0	En retard	$-\sin(\alpha)$ 1,5 V $\sqrt{3} \text{ V}$ $\frac{U_0}{\sqrt{2}}$
$\frac{U_0}{\sqrt{2}}$	18 km/h	$\varphi < 0$	1,5 V	$u_3(t)$	$\cos(\alpha)$ $2 \sin(3,9t - 13x + 0,3\pi)$ $\frac{U_0}{2}$
2 s	0,5 Hz	Courbe 3	$2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right)$	Courbe 2	5,7 μs

Étude des circuits électriques I

Prérequis
 Lois des nœuds. Loi des mailles. Loi d'Ohm. Montages diviseurs.

Constantes utiles
 → nombre d'Avogadro : $N_A = 6,0 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
 → charge élémentaire : $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Autour du courant électrique

 **Entraînement 3.1 — Une bataille de courants.** ⦿⦿⦿⦿

Lequel de ces trois courants électriques présente la plus forte intensité ?

- (a) 5 000 électrons durant 1 ms
- (c) 20 milliards d'électrons durant 1 min
- (b) 0,2 mol d'électrons durant 1 an

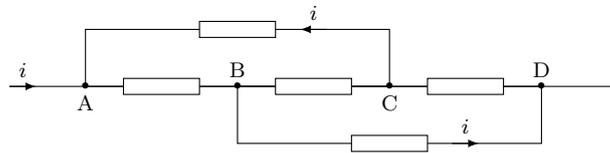
.....

 **Entraînement 3.2** ⦿⦿⦿⦿

L'intensité du courant traversant un fil de cuivre vaut $I = 4,0 \text{ mA}$.

Combien d'électrons traversent la section du fil pendant 10 s ?

Entraînement 3.3 — Loi des nœuds (I). ⦿⦿⦿⦿

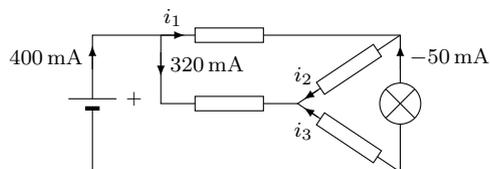


Les courants indiqués sur le schéma ci-dessus sont algébriques.

En utilisant la loi des nœuds, déterminer en fonction de i les courants suivants (on note i_{AB} le courant qui va de A vers B, etc.) :

- a) i_{AB}
- b) i_{BC}
- c) i_{CD}

Entraînement 3.4 — Loi des nœuds (II).



On considère le circuit électrique représenté ci-dessus.

À partir de la loi des nœuds, calculer l'intensité des courants sans utiliser la calculatrice.

- a) i_1 b) i_2 c) i_3

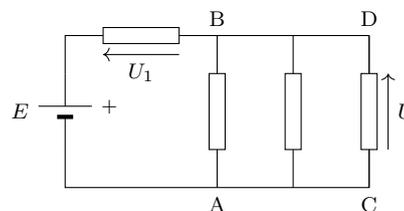
Autour de la tension électrique

Entraînement 3.5 — Loi des mailles.



Un circuit électrique est formé d'une pile de f.é.m E et de quatre dipôles. Certaines tensions sont indiquées.

À partir de la loi des mailles, exprimer en fonction de E et U_1 les tensions suivantes :



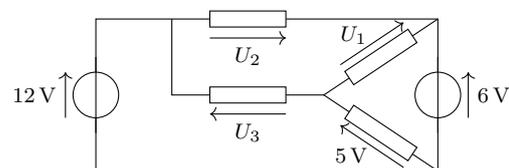
- a) U
- b) $U_{AB} = V(A) - V(B)$
- c) U_{DA}

Entraînement 3.6 — Calculer une tension.



On considère le circuit électrique formé de deux sources idéales de tension et de quatre dipôles, comme représenté ci-contre.

À partir de la loi des mailles, calculer les tensions :



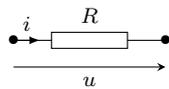
- a) U_1
- b) U_2
- c) U_3

Loi d'Ohm

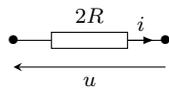
Entraînement 3.7 — Caractéristiques.



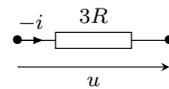
On considère les cas suivants :



Résistance 1



Résistance 2



Résistance 3

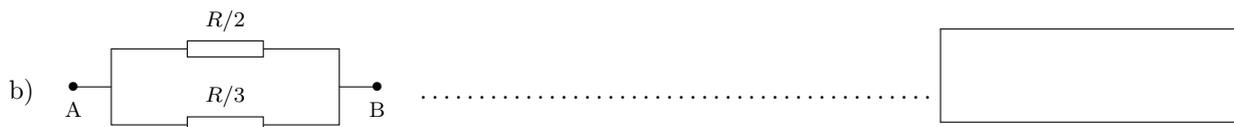
Dans chaque cas, exprimer i en fonction de u et R .

- a) Résistance 1
- b) Résistance 2
- c) Résistance 3

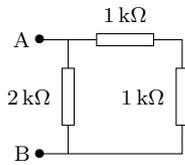
Entraînement 3.8 — Résistances associées.



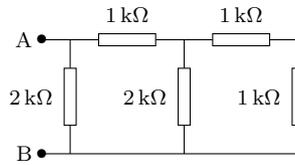
Exprimer la résistance équivalente des dipôles AB suivants :



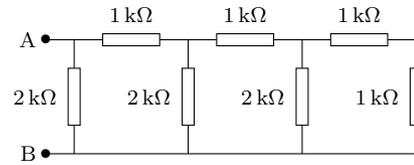
Entraînement 3.9 — Trois résistances équivalentes.



dipôle 1



dipôle 2



dipôle 3

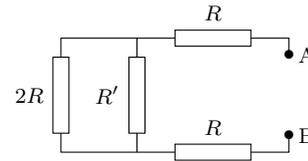
Sans utiliser la calculatrice, calculer la résistance équivalente :

- a) du dipôle 1 b) du dipôle 2 c) du dipôle 3

Entraînement 3.10 — Une autre résistance équivalente.



On considère le dipôle AB constitué uniquement de conducteurs ohmiques.



Exprimer la résistance équivalente du dipôle AB en fonction de R et R'

Entraînement 3.11 — Quelle résistance choisir ?



La résistance équivalente d'un dipôle s'écrit :

$$R_{\text{eq}} = \frac{4R(R + R')}{2R + R'}$$

Déterminer la valeur de R' pour que :

- a) $R_{\text{eq}} = 3R$ b) $R_{\text{eq}} = \frac{8}{3}R$ c) $R_{\text{eq}} = 2R$

Résoudre une équation électrique



Entraînement 3.12 — Une équation de maille.



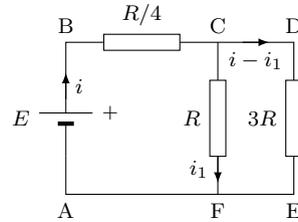
Dans un circuit, la loi des mailles se traduit par la relation $R_1 I + R_2(I_0 + I) = 2R_2 I_0$.

- a) On suppose que $R_1 = 2R_2$. Exprimer I en fonction de I_0
- b) Exprimer I en fonction de R_1 , R_2 et I_0

Entraînement 3.13 — Circuit à 2 mailles.



On forme un circuit avec une pile et trois conducteurs ohmiques. On définit les courants algébriques i et i_1 comme indiqué ci-contre.



a) (ABCF)

b) (ABDE)

 **Entraînement 3.14**



Dans l'entraînement précédent, les grandeurs i et i_1 vérifient le système $\begin{cases} Ri + 4Ri_1 = 4E \\ 13Ri - 12Ri_1 = 4E. \end{cases}$

a) Déterminer i en fonction de E et R

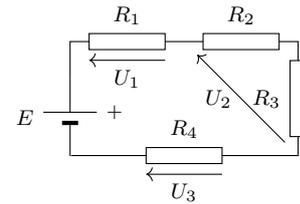
b) Déterminer i_1 en fonction de E et R

Diviseurs

Entraînement 3.15 — Un diviseur de tension.



On forme un circuit avec une pile de f.é.m E et quatre conducteurs ohmiques. On définit les tensions U_1 , U_2 et U_3 comme indiqué ci-contre.



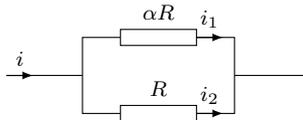
Exprimer en fonction de E , R_1 , R_2 , R_3 et R_4 , les tensions :

a) U_1

b) U_2

c) U_3

Entraînement 3.16 — Un diviseur de courant.



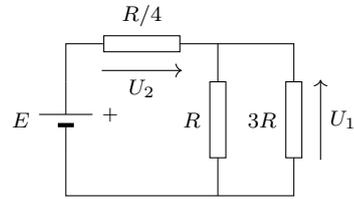
a) Pour quelle valeur de α a-t-on $i_1 = i/3$?

b) Pour quelle valeur de α a-t-on $i_2 = 3i_1$?

Entraînement 3.17 — Exercice de synthèse (I).



On forme un circuit avec une pile et trois conducteurs ohmiques. On définit les tensions U_1 et U_2 comme indiqué ci-contre.

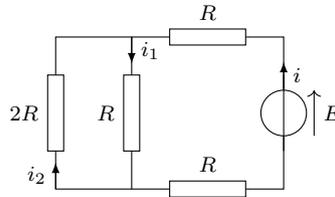


a) Calculer la résistance équivalente aux deux conducteurs ohmiques en parallèle

b) À l'aide de la formule du diviseur de tension, exprimer U_1 en fonction de E et R ...

c) Faire la même chose pour U_2

Entraînement 3.18 — Exercice de synthèse (II).



a) Après avoir simplifié le circuit, calculer i en fonction de E et R

b) En déduire i_1 à partir de la formule du diviseur de courant

c) En déduire i_2

Réponses mélangées

$\frac{3}{4}R$	$\frac{3}{4}E$	$\frac{R_2}{R_1 + R_2} I_0$	$\frac{ER_1}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$	$2R$	$\frac{3E}{4R}$	R	
$\frac{I_0}{3}$		$\frac{-ER_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$	1 V	2	-6 V	$-u/R$	$u/3R$
$\frac{5}{6}R$	(b)	$\frac{13}{4} Ri - 3Ri_1$	$\frac{4R(R + R')}{2R + R'}$	0	0	$E - U_1$	$1\text{ k}\Omega$
7 V	80 mA	30 mA	$2,5 \cdot 10^{17}$	$U_1 - E$	$\frac{E}{4R}$	$u/2R$	$-\frac{E}{4}$
$R \left(\frac{1 - a^2}{3 - a^2} \right)$	$\frac{R}{N}$	$-\frac{E}{8R}$	$\frac{R}{5}$	$\frac{E(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$	3	$2i$	
i	$\frac{3E}{8R}$	$\frac{E}{R}$	$1\text{ k}\Omega$	-350 mA	$1\text{ k}\Omega$	$E - U_1$	$\frac{1}{4} Ri + Ri_1$

Étude des circuits électriques II

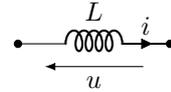
Prérequis

La fiche **Étude des circuits électriques I** et les équations différentielles.

Bobines

En convention récepteur, l'inductance L d'une bobine vérifie l'équation différentielle :

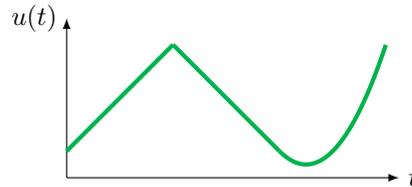
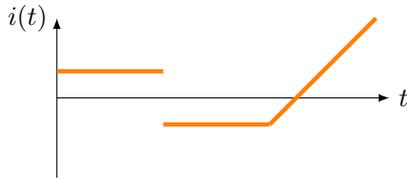
$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$



Entraînement 4.1 — Bobine ou pas ?



On donne l'évolution de l'intensité $i(t)$ et de la tension $u(t)$ aux bornes d'un dipôle inconnu.



Ce dipôle inconnu se comporte-t-il comme une bobine ?

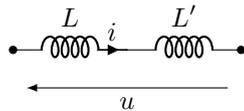
(a) oui

(b) non

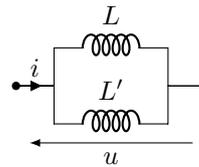
Entraînement 4.2 — Inductances équivalentes.



On considère deux bobines, d'inductances L et L' , regroupées dans les montages suivants :



montage (a)



montage (b)

a) Donner la relation entre u et i dans le montage (a)

b) En déduire l'inductance équivalente du montage (a)

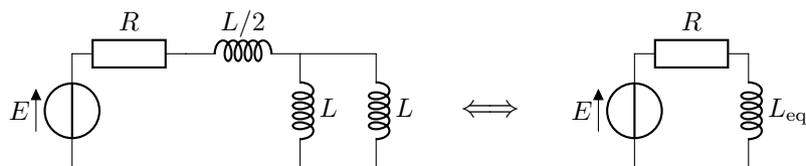
c) Donner la relation entre u et i dans le montage (b)

d) En déduire l'inductance équivalente du montage (b)

Entraînement 4.3 — Simplifions !



On souhaite remplacer les bobines par un dipôle équivalent.

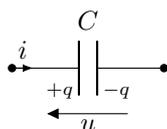


Déterminer L_{eq}

Condensateurs

En convention récepteur, la capacité C d'un condensateur vérifie l'équation différentielle :

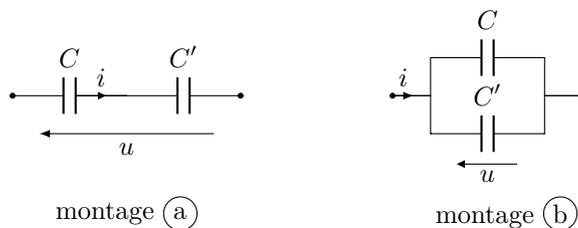
$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \frac{du(t)}{dt}.$$



Entraînement 4.4 — Condensateurs équivalents.



On considère deux condensateurs, de capacités C et C' , regroupés dans les montages suivants :



a) Donner la relation entre u et i dans le montage (a)

b) En déduire la capacité équivalente du montage (a)

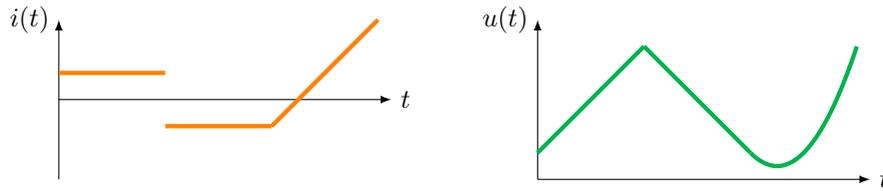
c) Donner la relation entre u et i dans le montage (b)

d) En déduire la capacité équivalente du montage (b)

Entraînement 4.5 — Condensateur ou pas ?



On donne l'évolution de l'intensité $i(t)$ et de la tension $u(t)$ aux bornes d'un dipôle inconnu.



Ce dipôle inconnu se comporte-t-il comme un condensateur ?

(a) oui

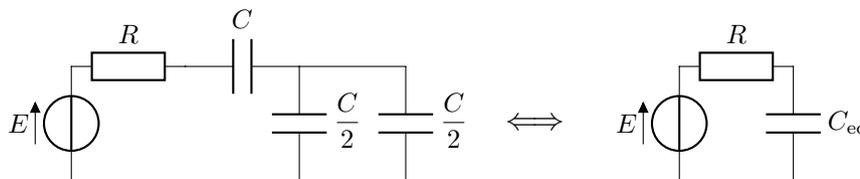
(b) non

.....

Entraînement 4.6 — Simplifions !



On considère le montage suivant, constitué de plusieurs condensateurs, d'un générateur et d'un conducteur ohmique. On souhaite remplacer les condensateurs par un dipôle équivalent.



Déterminer C_{eq}

Conditions initiales et régime stationnaire

On utilisera dans cette partie les notations suivantes pour une grandeur donnée x :

• $x(0^-) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t < 0}} x(t)$

• $x(0^+) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} x(t)$

• $x(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$.

Entraînement 4.7 — Condensateurs et bobines en régime stationnaire.



En régime stationnaire, toutes les grandeurs électriques sont indépendantes du temps.

a) Dans ce cas, un condensateur se comporte comme :

(a) un interrupteur fermé

(b) une source de tension

(c) un interrupteur ouvert

.....

b) Quant à la bobine, elle se comporte comme :

(a) un interrupteur fermé

(b) une source de courant

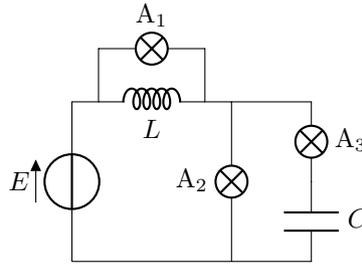
(c) un interrupteur ouvert

.....

Entraînement 4.8 — Éclairage en régime permanent.



On considère le circuit suivant, constitué de lampes (symbolisées par \otimes) que l'on peut assimiler à des résistances qui brillent quand elles sont parcourues par un courant électrique :



Le régime permanent étant établi, la ou les ampoules qui brillent sont :

- (a) l'ampoule A_1 (b) l'ampoule A_2 (c) l'ampoule A_3

.....

Entraînement 4.9 — Relations de continuité.



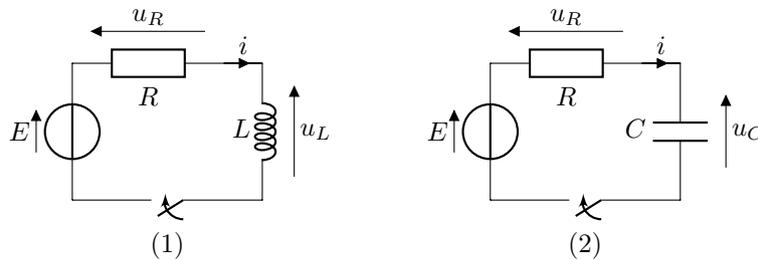
Dans ce QCM, plusieurs réponses sont possibles pour chaque question.

a) Aux bornes de quel(s) dipôle(s) la tension est-elle toujours continue ?

- (a) une résistance (c) un condensateur
 (b) une bobine (d) un interrupteur fermé

.....

On considère les deux circuits (1) et (2) pour lesquels l'opérateur ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$.
 On suppose de plus que le condensateur est initialement déchargé.



b) Quelles sont les grandeurs continues à $t = 0$ pour le circuit (1) ?

- (a) i (b) u_L (c) u_R

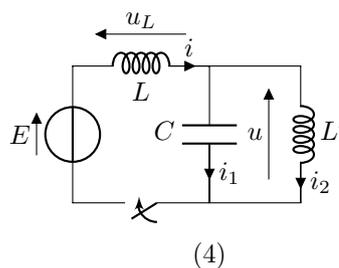
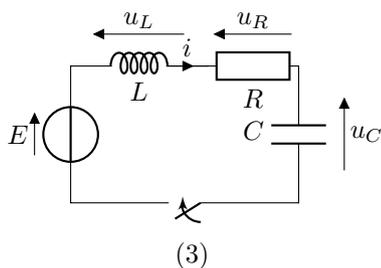
.....

c) Quelles sont les grandeurs continues à $t = 0$ pour le circuit (2) ?

- (a) i (b) u_C (c) u_R

.....

On considère à présent les deux circuits (3) et (4) pour lesquels l'opérateur ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$. On suppose de plus que les condensateurs sont initialement déchargés.



d) Quelles sont les grandeurs continues à $t = 0$ pour le circuit (3) ?

- a) i b) u_L c) u_R d) u_C
-

e) Quelles sont les grandeurs continues à $t = 0$ pour le circuit (4) ?

- a) i b) i_1 c) u d) u_L
-

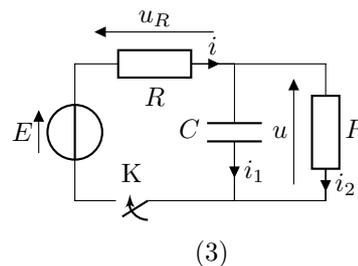
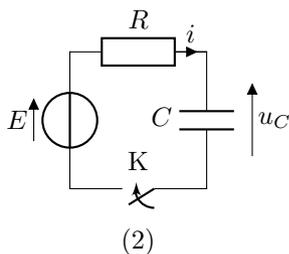
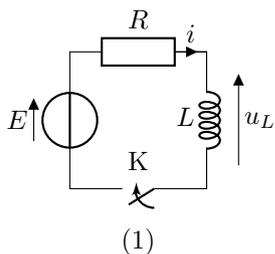
Entraînement 4.10 — Conditions initiales pour circuits du premier ordre.



On considère trois circuits constitués de générateurs de tension de f.é.m. constante E , de conducteurs de résistance R ainsi que de condensateurs de capacité C et d'une bobine d'inductance L .

L'interrupteur K est ouvert pour $t < 0$ et fermé pour $t > 0$.

Tous les condensateurs sont initialement déchargés.



On considère dans un premier temps le circuit (1).

- a) Exprimer $i(0^+)$ b) Exprimer $u_L(0^+)$

On considère à présent le circuit (2).

- c) Exprimer $i(0^+)$

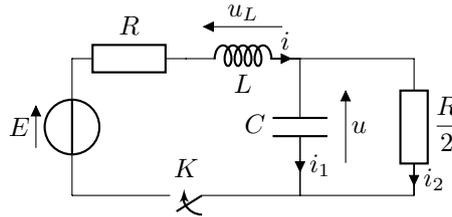
On considère finalement le circuit (3).

- d) Exprimer $u_R(0^+)$ e) En déduire $i_1(0^+)$

Entraînement 4.11 — Circuit à deux mailles.



Le circuit suivant, constitué de deux mailles indépendantes, est alimenté par un générateur de tension de f.é.m. E constante :



Pour ce circuit, on considère de plus que :

- l'interrupteur K est ouvert pour $t < 0$ et fermé pour $t > 0$;
- le condensateur est initialement déchargé.

Exprimer :

- a) $u(0^+)$
- b) $\frac{du}{dt}(0^+)$
- c) $i(+\infty)$
- d) $u(+\infty)$

Circuits du premier ordre

On dit qu'un circuit est *du premier ordre* quand il est régi par une équation différentielle qui se met sous la forme canonique suivante :

$$\frac{dx(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}x(t) = f(t), \quad (*)$$

où τ est la constante de temps représentative de la durée du régime transitoire.

Quand l'équation différentielle est écrite comme dans (*), on dit qu'elle est *sous forme canonique*.



Entraînement 4.12 — Constantes de temps.



On donne des exemples d'équations différentielles régissant des grandeurs électriques d'un circuit.

Dans chaque cas, déterminer l'expression de la constante de temps τ .

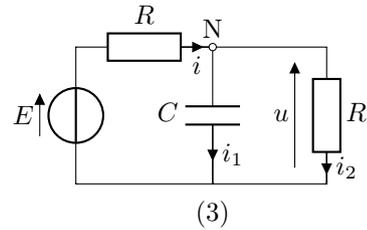
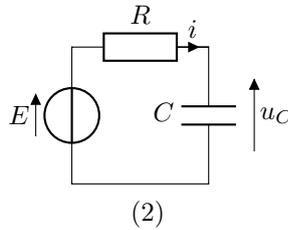
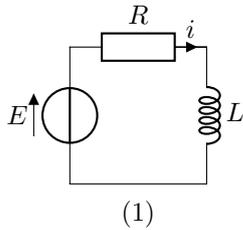
- a) $L \frac{di(t)}{dt} = E - Ri(t)$
- b) $RC \frac{du_C(t)}{dt} = E - 2u_C(t)$

Entraînement 4.13 — Des mises en équations.



On cherche à obtenir l'équation différentielle qui régit le comportement d'une grandeur électrique dans chacun des circuits suivants.

Cette équation devra être donnée sous forme canonique.



On considère le circuit (1).

- a) À partir de la loi des mailles, déterminer l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$

.....

On considère maintenant le circuit (2). Déterminer :

- b) l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$

- c) l'équation différentielle pour le courant $i(t)$

On considère enfin le circuit (3), qui comporte deux mailles. En appliquant la loi des nœuds au point N, déterminer :

- d) la relation entre le courant $i(t)$, la tension $u(t)$ et $\frac{du(t)}{dt}$..

- e) En déduire l'équation différentielle pour la tension $u(t)$...

Entraînement 4.14 — Allez, on s'entraîne !



N'oubliez pas d'exprimer une solution particulière avant d'appliquer les conditions initiales !

- a) Résoudre $\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}u_C(t) = \frac{E}{\tau}$ avec $u_C(0) = 0$

- b) Résoudre $\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}i(t) = 0$ avec $i(0) = \frac{E}{R}$

- c) Résoudre $\frac{du(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}u(t) = \frac{E}{2\tau}$ avec $u(0) = \frac{E}{2}$

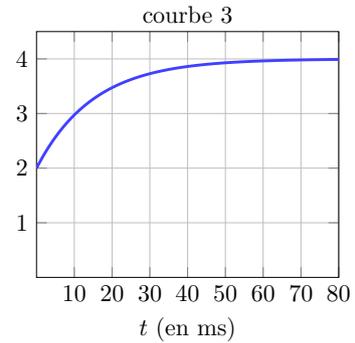
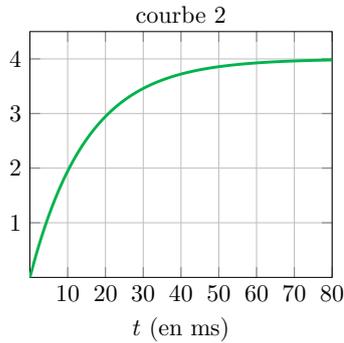
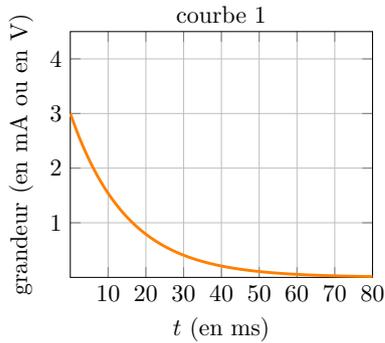


Entraînement 4.15 — Analyse de courbes.



Les graphes ci-dessous représentent l'évolution de trois grandeurs au cours du temps :

- deux tensions $u_1(t)$ et $u_2(t)$;
- une intensité $i(t)$.



a) On a :

$$u_1(t) = E_1 \left(1 - e^{-t/\tau} \right).$$

Quelle est la courbe correspondante ?

(a) courbe 1

(b) courbe 2

(c) courbe 3

.....

b) On a :

$$u_2(t) = E_2 \left(1 - \frac{e^{-t/\tau}}{2} \right).$$

Quelle est la courbe correspondante ?

(a) courbe 1

(b) courbe 2

(c) courbe 3

.....

c) On a :

$$i(t) = \frac{E_1}{R} e^{-t/\tau}.$$

Quelle est la courbe correspondante ?

(a) courbe 1

(b) courbe 2

(c) courbe 3

.....

Déterminer les valeurs numériques de :

d) E_1

e) E_2

f) R

Circuits du second ordre

Entraînement 4.16 — Équation canonique.



De nombreux circuits du second ordre sont en fait des oscillateurs dont l'équation canonique est de la forme :

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = f(t),$$

où ω_0 est appelée *pulsation propre* et Q *facteur de qualité*.

Donner la dimension de :

- a) ω_0 b) Q

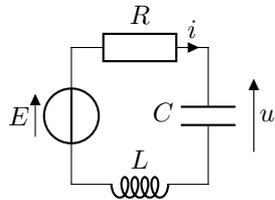
On considère l'équation $RC \frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}i(t) = 0$. Exprimer :

- c) ω_0 d) Q

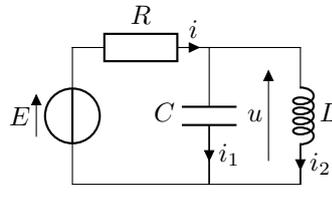
Entraînement 4.17 — Mise en équation.



On considère les deux circuits suivants, pour lesquels les f.é.m. des générateurs de tension E sont constantes.



montage 1



montage 2

À l'aide de la loi des mailles et des nœuds, établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u :

- a) Dans le montage 1
- b) Dans le montage 2

Entraînement 4.18 — Équations du type « oscillateur harmonique ».



a) Résoudre $\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + \omega_0^2(u_C(t) - E) = 0$ avec $\begin{cases} u_C(0) = 0 \\ \frac{du_C}{dt}(0) = 0 \end{cases}$

b) Résoudre $\frac{d^2i(t)}{dt^2} + \omega_0^2 i(t) = 0$ avec $\begin{cases} i(0) = 0 \\ \frac{di}{dt}(0) = \frac{E}{L} \end{cases}$

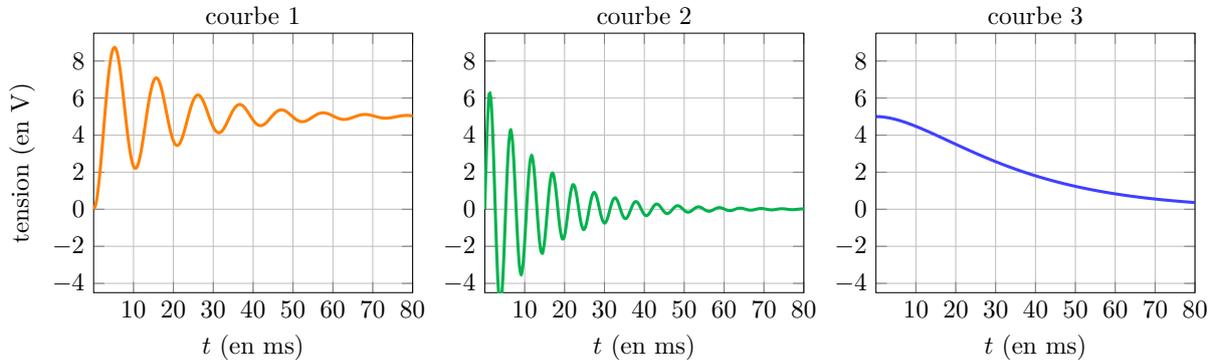
Entraînement 4.19 — Réponses d'un circuit du second ordre.



Les graphes ci-dessous représentent l'évolution de trois tensions $u_1(t)$, $u_2(t)$ et $u_3(t)$ au cours du temps.

Toutes ces grandeurs évoluent suivant une équation différentielle du type :

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = C^{te}.$$



a) Quelle courbe est associée au plus grand facteur de qualité Q ?

(a) courbe 1

(b) courbe 2

(c) courbe 3

.....

b) On a :

$$u_1(t) = ae^{-t/\tau_1} - be^{-t/\tau_2}.$$

Quelle est la courbe correspondante ?

(a) courbe 1

(b) courbe 2

(c) courbe 3

.....

c) On a :

$$u_2(t) = E \sin(\Omega t) e^{-t/\tau}.$$

Quelle est la courbe correspondante ?

(a) courbe 1

(b) courbe 2

(c) courbe 3

.....

d) On a :

$$u_3(t) = E \left[1 - (\cos(\Omega' t) + a \sin(\Omega' t)) e^{-t/\tau'} \right].$$

Quelle est la courbe correspondante ?

(a) courbe 1

(b) courbe 2

(c) courbe 3

.....

e) Déterminer la valeur numérique de la pseudo-pulsation Ω qui intervient dans $u_2(t)$.

.....

Réponses mélangées

$\frac{1}{3}E$ (a), (b) et (c) Q est sans dimension $i = (C + C') \frac{du}{dt}$ $\frac{RC}{2}$ (a), (c) et (d)

$\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{RC}i(t) = 0$ 4 V (b) $\frac{E}{R}$ $u_C(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$ $u_C(t) = \frac{1}{2}E$

(a) $E \times (1 - \cos(\omega_0 t))$ $1,2 \times 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ $\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}u = 0$

(c) $\frac{LL'}{L+L'}$ (c) $\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}u = \frac{E}{LC}$ $C + C'$ 0 (b)

$\frac{du}{dt} = \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C'}\right)i$ (c) $L + L'$ (c) et (d) (b) $\frac{C}{2}$ $\frac{E}{R}$

$u = L \frac{di}{dt} + L' \frac{di}{dt}$ 4 V $\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = \frac{1}{RC}E$ (b) $i(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$

$\frac{CC'}{C+C'}$ 0 L $\frac{du}{dt} + \frac{2}{RC}u = \frac{E}{RC}$ $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ 1,3 kΩ (a) E

$[\omega_0] = T^{-1}$ $R\sqrt{\frac{C}{L}}$ (a) (a) et (c) (b) $\frac{di}{dt} = \frac{u}{L} + \frac{u}{L'}$ $\frac{2E}{3R}$

$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}$ 0 E $i = \frac{u}{R} + C \frac{du}{dt}$ $\frac{E}{L\omega_0} \sin(\omega_0 t)$ (a) $\frac{L}{R}$ (b)

Étude des filtres

Prérequis

Trigonométrie. Nombres complexes. Association de dipôles. Signaux périodiques. Spectres de Fourier.

Nombres complexes et association de dipôles



Entraînement 5.1 — Un entraînement fondamental.



Un nombre complexe peut se mettre sous les formes suivantes :

- $\underline{Z} = a + jb$ avec a sa partie réelle et b sa partie imaginaire ;
- $\underline{Z} = Z_0 \exp(j\varphi) = Z_0 (\cos(\varphi) + j \sin(\varphi))$ avec $Z_0 \geq 0$ son module et $\varphi \in \mathbb{R}$ un argument.

a) Exprimer Z_0 en fonction de a et b

b) On suppose $a \neq 0$. Exprimer $\tan(\varphi)$ en fonction de a et b

On suppose que $\varphi \in] - \pi, \pi]$.

c) Si $a \geq 0$, que peut-on dire de φ ?

(a) $\varphi \in [0, \pi]$

(c) $\varphi \in [\pi/2, \pi]$

(e) $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$

(b) $\varphi \in [0, \pi/2]$

(d) $\varphi \in] - \pi, 0]$

(f) $\varphi \in] - \pi/2, 0]$

.....

d) Si $a > 0$ et $b \leq 0$, que peut-on dire de φ ?

(a) $\varphi \in [0, \pi]$

(c) $\varphi \in [\pi/2, \pi]$

(e) $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$

(b) $\varphi \in [0, \pi/2]$

(d) $\varphi \in] - \pi, 0]$

(f) $\varphi \in] - \pi/2, 0]$

.....



Entraînement 5.2 — Impédances complexes des composants de base.



Les impédances complexes d'un résistor de résistance R , d'une bobine d'inductance L et d'un condensateur de capacité C auxquels on impose une pulsation ω sont respectivement :

$$\underline{Z}_R = R, \quad \underline{Z}_L = jL\omega \quad \text{et} \quad \underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}.$$

Calculer le module Z_0 et l'argument $\varphi \in] - \pi, \pi]$ de chacune de ces impédances :

a) Z_0 de \underline{Z}_R ...

c) Z_0 de \underline{Z}_L

e) Z_0 de \underline{Z}_C ...

b) φ de \underline{Z}_R

d) φ de \underline{Z}_L

f) φ de \underline{Z}_C

Entraînement 5.3 — Associations de dipôles.

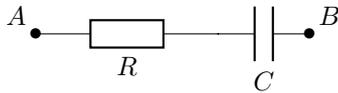


On rappelle la règle pour déterminer l'impédance complexe équivalente à celle de dipôles associés :

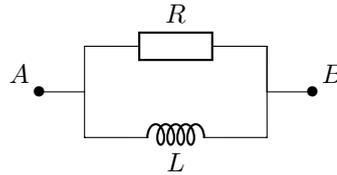
- ▶ si les dipôles sont en série : $Z_{eq} = \sum_i Z_i$;
- ▶ si les dipôles sont en parallèle : $Z_{eq} = \frac{1}{\sum_i 1/Z_i}$.

À l'aide de ces règles, déterminer l'impédance complexe Z_{AB} des associations de dipôles suivantes :

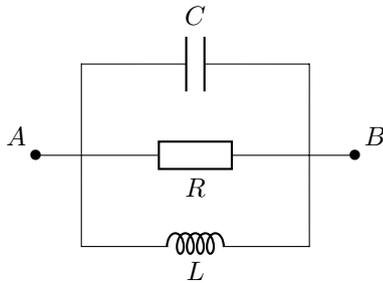
a)



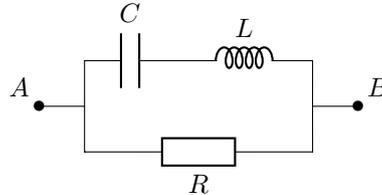
b)



c)



d)



a) $Z_{AB} = \dots\dots\dots$

b) $Z_{AB} = \dots\dots\dots$

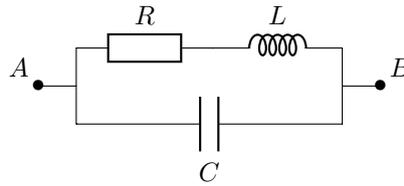
c) $Z_{AB} = \dots\dots\dots$

d) $Z_{AB} = \dots\dots\dots$

Entraînement 5.4 — À la recherche de la bonne impédance.



Un groupe d'étudiants doit trouver l'impédance Z_{AB} du dipôle AB ci-dessous :



Quelle proposition correspond à l'impédance du dipôle AB ?

(a) $Z_{AB} = \frac{R + jL\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$

(b) $Z_{AB} = \frac{R + jL\omega}{1 + LC\omega^2 + jRC\omega}$

(c) $Z_{AB} = \frac{R + jL\omega}{1 + LC\omega^2 - jRC\omega}$

.....

Signaux périodiques

Entraînement 5.5 — Analyse du signal provenant d'un GBF.

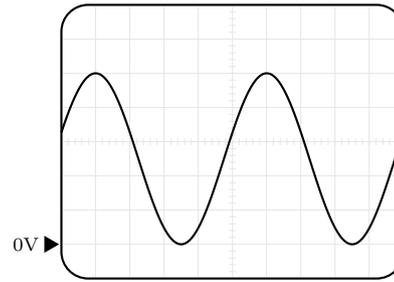


En TP, un élève observe à l'oscilloscope la tension délivrée par un générateur de basses fréquences (GBF).

Aider cet élève à analyser le signal de tension mesuré ci-contre en déterminant sa fréquence f_0 et son amplitude U_0 .

a) f_0

b) U_0



base de temps : 20 μ s/division
calibre vertical : 1 V/division

 **Entraînement 5.6 — Expression d'une tension.**



Nous disposons d'une tension sinusoïdale $u(t)$ de période $T_0 = 1$ ms, d'amplitude $U_0 = 2$ V et de phase à l'origine $\varphi = 0$ rad.

Parmi les propositions ci-dessous, laquelle correspond à l'expression littérale de cette tension $u(t)$?

(a) $u(t) = U_0 \cos\left(\frac{t}{T_0}\right)$

(c) $u(t) = \frac{U_0}{2} \cos\left(\frac{t}{T_0}\right)$

(b) $u(t) = \frac{U_0}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$

(d) $u(t) = U_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$

.....

 **Entraînement 5.7 — Modulation d'amplitude.**



On considère un signal modulé, de la forme :

$$s(t) = S_0 \cos(2\pi f_p t) \times (1 + m \cos(2\pi f_0 t)) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} 0 < m < 1 \\ f_p > f_0. \end{cases}$$

a) On rappelle que :

$$\begin{cases} \cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b) \\ \cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b). \end{cases}$$

En calculant $\cos(a + b) + \cos(a - b)$, trouver une formule pour $\cos(a) \cos(b)$.

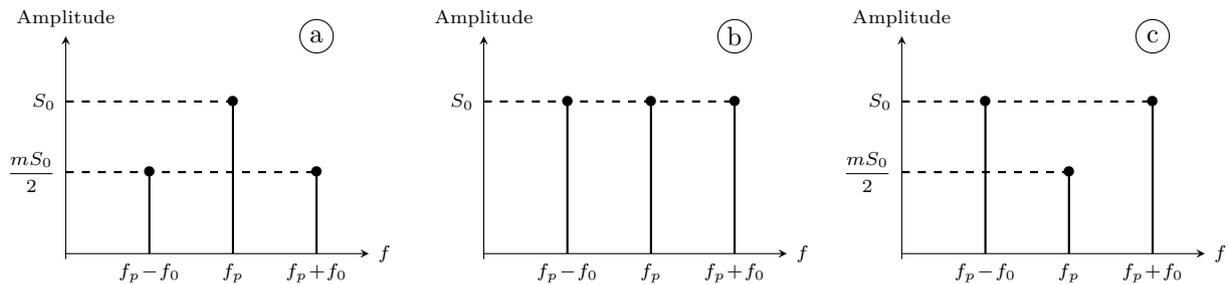
.....

b) Développer $s(t)$ et faire apparaître des sommes de cosinus.

.....

On constate que le signal $s(t)$ peut s'écrire comme la somme de trois signaux sinusoïdaux d'amplitudes et de fréquences spécifiques. On représente les différentes amplitudes des composantes de $s(t)$ en fonction de leur fréquence. Cette représentation est appelée spectre en amplitude de $s(t)$.

Le but de cet entraînement est de déterminer lequel des spectres ci-dessous ((a), (b) ou (c)) est celui du signal $s(t)$:



c) Donner l'amplitude de la composante de fréquence f_p de $s(t)$

d) Donner l'amplitude de la composante de fréquence $f_p + f_0$ de $s(t)$..

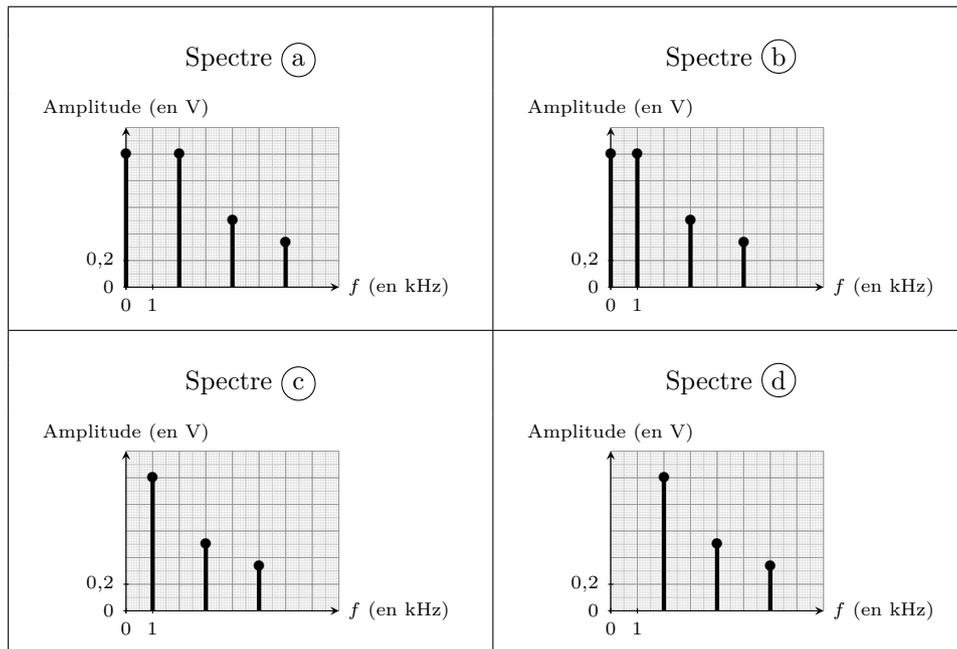
e) Donner l'amplitude de la composante de fréquence $f_p - f_0$ de $s(t)$..

f) Déterminer le spectre ((a), (b) ou (c)) correspondant à $s(t)$

Entraînement 5.8 — Pêle-mêle.



Un étudiant dispose de quatre spectres en amplitude et de quatre signaux. Malheureusement, l'ensemble est mélangé. Pouvez-vous l'aider à associer le bon signal au bon spectre ((a), (b), (c) ou (d)) ?



<p>Signal n° 1</p> $A_1 \left(\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{2} \cos(3\omega_0 t) + \frac{1}{3} \cos(5\omega_0 t) \right)$ <p>avec $A_1 = 1$ V et $f_0 = 1$ kHz</p>	<p>Signal n° 2</p> $A_2 \left(1 + \sin(\omega_0 t) + \frac{1}{2} \sin(2\omega_0 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_0 t) \right)$ <p>avec $A_2 = 1$ V et $f_0 = 2$ kHz</p>
<p>Signal n° 3</p> $A_3 \left(\cos((\omega_0 - \omega_1)t) + \frac{1}{2} \cos((\omega_0 + \omega_1)t) + \frac{1}{3} \cos((\omega_0 + 3\omega_1)t) \right)$ <p>avec $A_3 = 1$ V, $f_0 = 3$ kHz et $f_1 = 1$ kHz</p>	<p>Signal n° 4</p> $A_4 \left(1 + \sin(\omega_0 t) + \frac{1}{2} \sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{3} \sin(5\omega_0 t) \right)$ <p>avec $A_4 = 1$ V et $f_0 = 1$ kHz</p>

- | | |
|--|--|
| a) Spectre du signal n° 1 <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/> | c) Spectre du signal n° 3 <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/> |
| b) Spectre du signal n° 2 <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/> | d) Spectre du signal n° 4 <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/> |

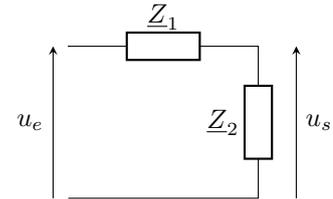
Fonctions de transfert

Entraînement 5.9 — Filtre passe-bande.



Nous disposons du filtre ci-contre, constitué de deux dipôles dont les impédances complexes sont :

$$\underline{Z}_1 = R + \frac{1}{jC\omega} \quad \text{et} \quad \underline{Z}_2 = \frac{R}{1 + jRC\omega} \quad \text{avec} \quad C = 47 \text{ nF} \quad \text{et} \quad R = 1 \text{ k}\Omega.$$



Nous souhaitons écrire la fonction de transfert du filtre $\underline{H}(j\omega) = \frac{u_s}{u_e}$ sous sa forme canonique :

$$\underline{H}(jx) = \frac{H_0}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

- a) À l'aide d'un pont diviseur de tension, exprimer $\underline{H}(j\omega)$
- b) Identifier H_0
- c) Identifier Q
- d) Identifier et calculer ω_0 .

Entraînement 5.10 — Filtre du second ordre.



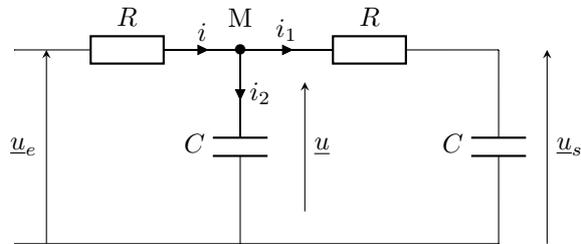
Nous disposons d'un filtre passe-bas de fonction de transfert :

$$\underline{H}(jx) = \frac{u_s}{u_e} = \frac{H_0}{1 + \frac{jx}{Q} - x^2}$$

avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$. On a $C = 10 \mu\text{F}$ et $R = 220 \Omega$.

Un étudiant obtient les trois égalités suivantes :

$$R\underline{i} = \underline{u}_e - \underline{u}, \quad R\underline{i}_1 = \underline{u} - \underline{u}_s \quad \text{et} \quad R\underline{i}_2 = jRC\omega\underline{u}.$$



- a) À l'aide de la loi des nœuds, exprimer \underline{i} en fonction de \underline{i}_1 et \underline{i}_2
- b) Utiliser la réponse précédente et les trois égalités fournies pour exprimer \underline{u}_e en fonction de \underline{u} et \underline{u}_s .
.....

L'étudiant montre, grâce à un pont diviseur de tension, que $\underline{u} = (1 + jRC\omega)\underline{u}_s$.

- c) En déduire la fonction de transfert simplifiée $\underline{H}(j\omega)$

En comparant la réponse précédente à la forme canonique de $\underline{H}(j\omega)$ donnée, identifier :

- d) H_0
- e) ω_0
- f) Q

De la fonction de transfert au diagramme de Bode

Entraînement 5.11 — Calcul de gain en décibels.



On considère les fonctions de transfert suivantes : $\underline{H}_1 = 3,0$; $\underline{H}_2 = j\frac{\omega}{\omega_0}$ et $\underline{H}_3 = 1 + j\frac{\omega}{\omega_1}$.

Le gain en décibels G_{dB} d'un filtre se détermine à partir de la relation :

$$G_{dB} = 20 \log (|\underline{H}|).$$

Déterminer le gain en décibels associé aux différentes fonctions de transfert ou combinaisons de fonctions de transfert ci-dessous :

- | | | | |
|----------------------------|----------------------|--|----------------------|
| a) \underline{H}_1 | <input type="text"/> | d) $\underline{H}_1 - \underline{H}_2$ | <input type="text"/> |
| b) \underline{H}_2 | <input type="text"/> | e) $\frac{\underline{H}_2}{\underline{H}_3}$ | <input type="text"/> |
| c) \underline{H}_3 | <input type="text"/> | f) $\underline{H}_2 \times \underline{H}_3$ | <input type="text"/> |

Entraînement 5.12 — Calcul de phase.



On reprend les mêmes fonctions de transfert que précédemment : $\underline{H}_1 = 3,0$; $\underline{H}_2 = j\frac{\omega}{\omega_0}$ et $\underline{H}_3 = 1 + j\frac{\omega}{\omega_1}$.

Le déphasage φ introduit par un filtre entre les signaux d'entrée et de sortie se détermine à partir de la relation :

$$\varphi = \arg(\underline{H}) = \arctan\left(\frac{\text{Im}(\underline{H})}{\text{Re}(\underline{H})}\right).$$

Déterminer le déphasage associé aux différentes fonctions de transfert ou combinaisons de fonctions de transfert ci-dessous :

- | | | | |
|----------------------------|----------------------|--|----------------------|
| a) \underline{H}_1 | <input type="text"/> | d) $\underline{H}_1 - \underline{H}_2$ | <input type="text"/> |
| b) \underline{H}_2 | <input type="text"/> | e) $\frac{\underline{H}_2}{\underline{H}_3}$ | <input type="text"/> |
| c) \underline{H}_3 | <input type="text"/> | f) $\underline{H}_2 \times \underline{H}_3$ | <input type="text"/> |

Entraînement 5.13 — Diagramme de Bode en phase.



On utilise un filtre passe-haut de fonction de transfert $\underline{H}(jx) = \frac{jx}{1 + jx}$ avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$.

Déterminer la valeur du déphasage $\varphi(x) = \arg(\underline{H}(jx))$ du filtre pour des signaux tels que :

- | | |
|--|----------------------|
| a) $\omega = \omega_0$ (la pulsation propre du filtre) | <input type="text"/> |
| b) $\omega \gg \omega_0$ (en hautes fréquences) | <input type="text"/> |
| c) $\omega \ll \omega_0$ (en basses fréquences) | <input type="text"/> |

Entraînement 5.14 — Calcul de gain.



Pour les fonctions de transfert suivantes, évaluer le gain $G(x) = |\underline{H}(jx)|$ pour $x = 1$.

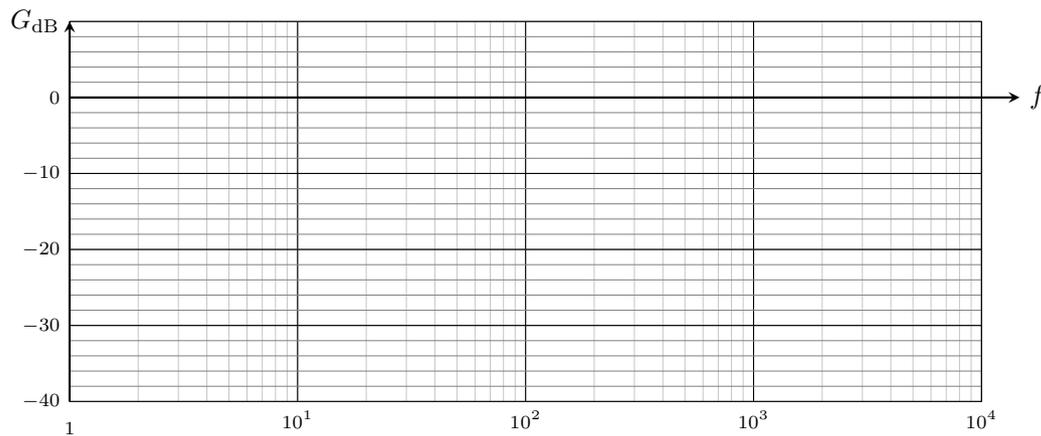
- a) $\underline{H}(jx) = \frac{1 - jx}{1 + jx}$
- b) $\underline{H}(jx) = -\frac{jx}{1 + jx}$
- c) $\underline{H}(jx) = \frac{1}{1 + 2jmx + (jx)^2}$ avec $m = 2$

Entraînement 5.15 — Tracé sur papier semi-logarithmique.



Un élève souhaite étudier le comportement d'un filtre passe-haut en basses fréquences. Pour cela, il relève les amplitudes des tensions d'entrée et de sortie pour différentes fréquences bien inférieures à la fréquence de coupure du filtre.

Fréquence (en Hz)	200	700	2 000
Amplitude du signal d'entrée ($U_{\text{entrée}}$ en V)	1	1	1
Amplitude du signal de sortie (U_{sortie} en V)	0,04	0,14	0,40



Le gain en décibels est donné par la relation $G_{\text{dB}} = 20 \log\left(\frac{U_{\text{sortie}}}{U_{\text{entrée}}}\right)$.

Calculer le gain en décibels pour chacune des fréquences et placer le point correspondant sur le graphe ci-dessus.

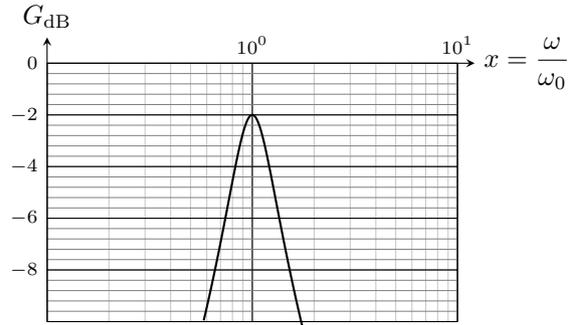
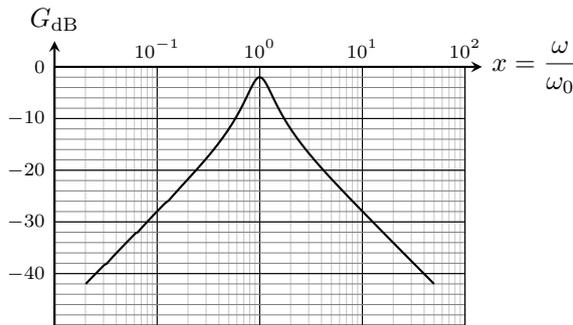
- a) Point A : $f = 200$ Hz
- b) Point B : $f = 700$ Hz
- c) Point C : $f = 2000$ Hz
- d) Déterminer la pente de la droite passant les points A, B et C

Entraînement 5.16 — Bande passante et facteur de qualité d'un filtre.



On dispose d'un filtre passe-bande de fréquence propre $f_0 = 15$ kHz, dont les deux fréquences de coupure à -3 dB sont f_{c1} et f_{c2} (avec $f_{c1} < f_{c2}$), et dont la fréquence de résonance est f_r .

Le diagramme de Bode en gain du filtre en fonction de $x = f/f_0$ et un agrandissement sont fournis.



À partir des graphiques donnés ci-dessus, déterminer les différentes grandeurs caractéristiques du filtre :

- a) f_r b) f_{c1} c) f_{c2}

Réponses mélangées

	0	$\frac{1}{2} \cos(a+b) + \frac{1}{2} \cos(a-b)$	$\frac{RjL\omega}{R + jL\omega - RLC\omega^2}$	(e)	
$20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - 10 \log\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right)$	$\frac{u(2 + jRC\omega) - u_s}{\pi/2}$	$1/3$	$\pi/2 + \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)$		
$\frac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3jRC\omega} + \frac{jRC\omega}{3}}$	10 kHz	$\sqrt{a^2 + b^2}$	$\frac{R(1 - LC\omega^2)}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$	(f)	$-\arctan\left(\frac{\omega}{3\omega_0}\right)$
19,2 kHz	-8,0 dB	$1/\sqrt{2}$	$i_1 + i_2$	$10 \log\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right)$	(d)
(a)	$R + \frac{1}{jC\omega}$	1	$\frac{1}{C\omega}$	$-\pi/2$	$20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) + 10 \log\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right)$
1/3	(d)	(a)	1/3	b/a	+20 dB/décade
			$2,1 \times 10^4$ rad/s	1	
		$S_0 \cos(2\pi f_p t)$			
$\pi/2$	$\pi/2$	$+\frac{mS_0}{2} \left(\cos(2\pi(f_p + f_0)t) + \cos(2\pi(f_p - f_0)t) \right)$	0	$\frac{1}{1 + 3jRC\omega - (RC\omega)^2}$	
$\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)$	(c)	$\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)$	9,5 dB	15,0 kHz	-28,0 dB
$mS_0/2$	11,7 kHz	$\frac{RjL\omega}{R + jL\omega}$	$20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$	$mS_0/2$	$\pi/4$
		(b)	R		
0	$L\omega$	2,5 V	-17,1 dB	$\frac{1}{RC}$	1/4
		S_0	(a)	$10 \log\left(9 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)$	

Énergie et puissance électriques

Prérequis

Puissance électrique. Relation puissance-énergie. Expression des énergies stockées dans une bobine et dans un condensateur. Effet Joule.

Pour commencer

 **Entraînement 6.1 — Puissance et énergie.**



Le chargeur d'un téléphone portable consomme une puissance de 5 W. La charge complète de la batterie (à partir d'une batterie vide) prend 55 min.

Calculer l'énergie E contenue dans la batterie :

a) en joules

b) en watts-heures (Wh)

 **Entraînement 6.2 — Voiture de série contre Formule 1.**



Les voitures de course « Formule 1 » sont des véhicules hybrides : elles possèdent à la fois un moteur thermique et un moteur électrique. On souhaite comparer le moteur électrique d'une Formule 1 à celui d'une simple voiture électrique de série.

On donne les informations suivantes :

	Hyundai Ioniq 6	Formule 1
Capacité batterie	77,4 kWh	4 MJ
Puissance moteur	239 kW	160 cv
Consommation moyenne	15,1 kWh/100km	

On indique que $1 \text{ cv} = 0,735 \text{ kW}$.

a) Calculer l'autonomie en km de la batterie de la Hyundai Ioniq 6

b) Quel véhicule possède la batterie de plus grande capacité?

c) Quel véhicule possède le moteur électrique le plus puissant?

Entraînement 6.3 — Identification de courbes.



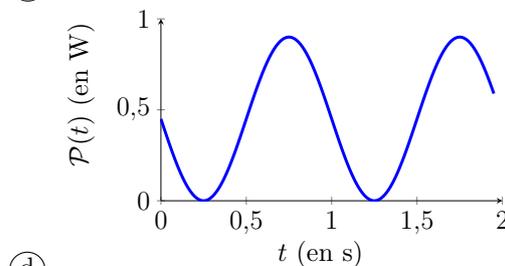
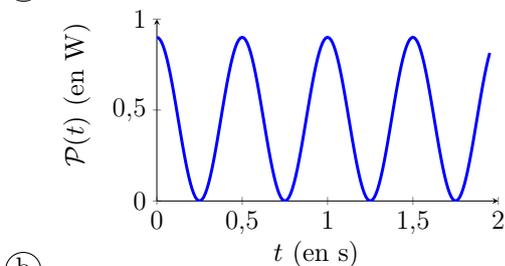
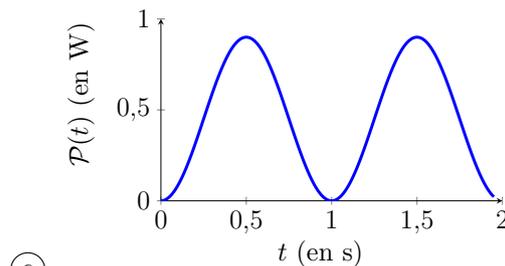
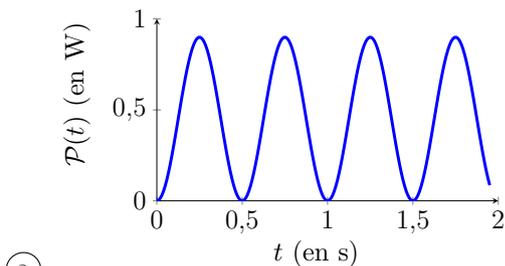
Une tension $u(t)$ est appliquée aux bornes d'un conducteur ohmique de résistance $R = 10\ \Omega$.

Identifier parmi les courbes proposées celle correspondant à la puissance

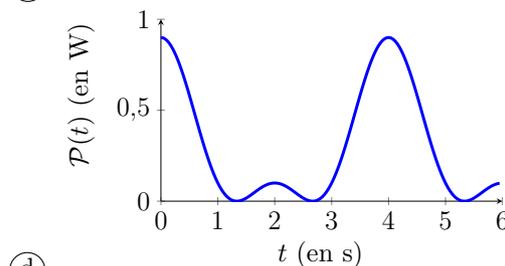
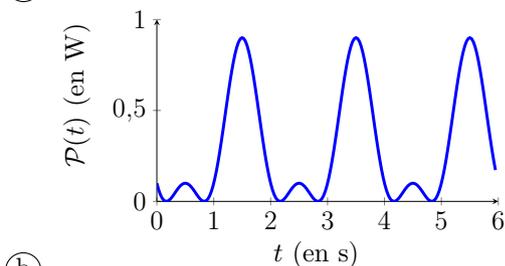
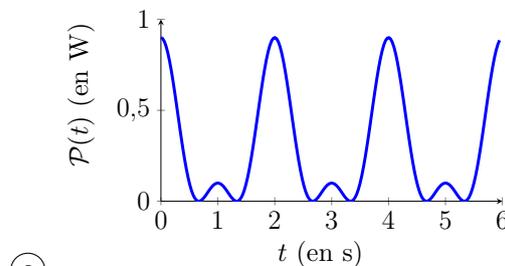
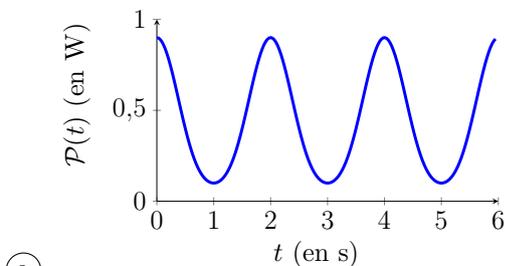
$$\mathcal{P}(t) = \frac{u^2(t)}{R}$$

dissipée par effet Joule dans la résistance.

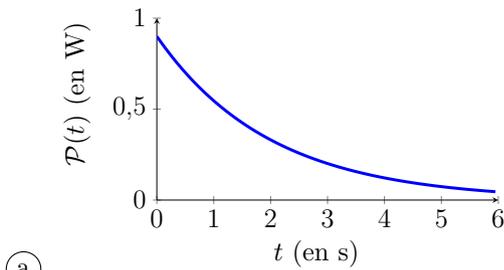
a) Pour $u(t) = 3 \sin(\omega t)$ avec $\omega = 2\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.



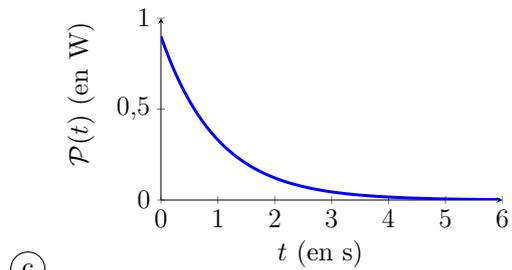
b) Pour $u(t) = 1 + 2 \cos(\omega t)$ avec $\omega = \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.



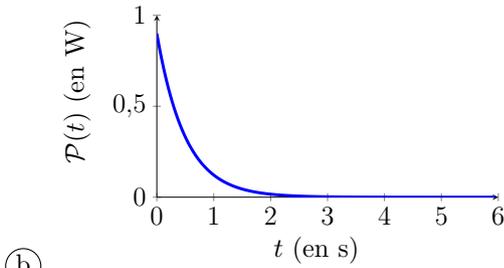
c) Pour $u(t) = 3 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ avec $\tau = 2$ s.



(a)



(c)



(b)

Entraînement 6.4 — Un calcul graphique.

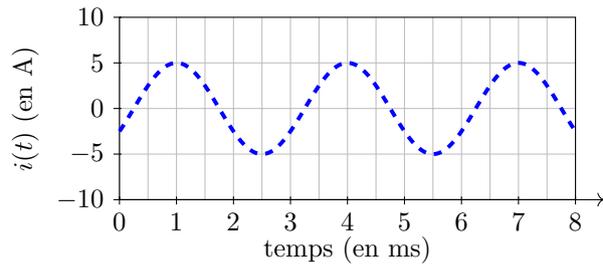
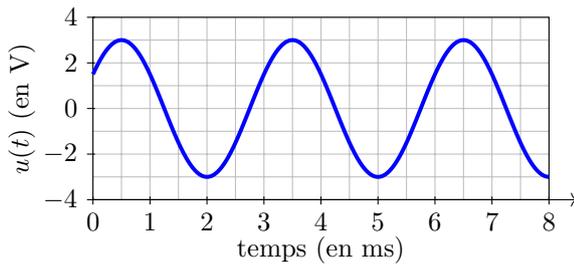


Pour un dipôle soumis à un signal alternatif harmonique, la puissance moyenne vaut :

$$\mathcal{P}_{\text{moy}} = \frac{U_0 I_0}{2} \cos(\varphi),$$

où U_0 et I_0 sont respectivement l'amplitude de la tension et du courant et où φ représente la valeur du déphasage angulaire entre la tension et l'intensité du courant.

Les figures ci-dessous donnent les représentations graphiques de la tension $u(t)$ et de l'intensité $i(t)$ en convention récepteur.



Déterminer la puissance moyenne reçue par ce dipôle

 **Entraînement 6.5 — Des calculs de puissance.**



On souhaite calculer la puissance reçue par un dipôle. Quand celui-ci est alimenté par une tension $u(t)$ et parcouru par un courant $i(t)$, la puissance moyenne reçue est donnée par la formule :

$$\mathcal{P}_{\text{moy}} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \times i(t) dt,$$

où T est la période du signal.

Dans un premier temps, on considère les signaux $u(t) = u_0 \cos(\omega t + \psi)$ et $i(t) = i_0 \cos(\omega t + \psi)$.

a) Combien vaut la période T pour ces signaux?

b) Calculer \mathcal{P}_{moy} pour ces signaux.

On pourra utiliser la formule $\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$

Maintenant, on considère les signaux $u(t) = u_0 \cos(\omega t)$ et $i(t) = i_0 \cos(\omega t + \varphi)$.

c) Calculer \mathcal{P}_{moy} pour ces signaux.

On pourra utiliser la formule $\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} (\cos(a + b) + \cos(a - b))$

Enfin, on considère les signaux $u(t) = u_0 \times (1 + \cos(\omega t))$ et $i(t) = i_0 \times (2 + \sin(\omega t + \psi))$.

d) Calculer \mathcal{P}_{moy} pour ces signaux

 **Entraînement 6.6 — Calcul de puissance en RSF.**



En régime sinusoïdal forcé, un générateur idéal de tension \underline{u} alimente un dipôle inconnu en délivrant un courant \underline{i} . Dans ce cas, la puissance moyenne peut être calculée à l'aide de la formule :

$$\mathcal{P}_{\text{moy}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\underline{u} \cdot \underline{i}^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\underline{u}^* \cdot \underline{i}),$$

où \underline{x}^* est le complexe conjugué de \underline{x} .

Exprimer la puissance moyenne reçue par le dipôle quand :

a) $\underline{u} = U e^{j\omega t}$ et $\underline{i} = jC\omega \underline{u}$

b) $\underline{i} = I e^{j\omega t + \varphi}$ et $\underline{u} = jL\omega \underline{i}$

c) $\underline{u} = \sqrt{2}(1 - j)e^{j\omega t}$ et $\underline{i} = 3 \left(\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) e^{j\omega t}$

d) $\underline{u} = 4\sqrt{2}e^{j(\omega t + \pi/4)}$ et $\underline{i} = (3 + 5j)e^{j\omega t}$

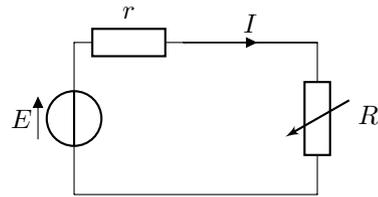
Régime permanent

Entraînement 6.7 — Puissance consommée.



Soit un générateur réel de f.é.m. E constante et de résistance interne r .

On branche à ses bornes un conducteur ohmique de résistance variable R .



a) Déterminer l'intensité du courant qui circule dans le circuit

b) Déterminer la puissance \mathcal{P} dissipée dans le conducteur ohmique en fonction de E , r et R .

.....

Entraînement 6.8 — Optimisation de puissance échangée.



Dans un certain circuit, la puissance dissipée dans un conducteur ohmique de résistance R vaut :

$$\mathcal{P} = E^2 \frac{R}{(r + R)^2},$$

où r est un paramètre.

On souhaite déterminer quelle valeur de R permet d'optimiser la puissance reçue par la résistance R , étant donné les caractéristiques de la source.

a) Calculer $\frac{d\mathcal{P}}{dR}$

b) Trouver la valeur R_{\max} pour laquelle $\mathcal{P}(R)$ est maximale :

Ⓐ $R_{\max} = R$

Ⓒ $R_{\max} = R + r$

Ⓔ $R_{\max} = \frac{1}{\frac{1}{r} + \frac{1}{R}}$

Ⓕ $R_{\max} = R \times e^{r/R}$

Ⓑ $R_{\max} = r$

Ⓓ $R_{\max} = \frac{R^2}{r + R}$

.....

Entraînement 6.9 — Un peu de calcul algébrique.



On considère une résistance R définie par :

$$R = R_0 \times e^{r/R_0}.$$

Déterminer, en fonction de R_0 , la valeur du paramètre r pour que $R = 2R_0$.

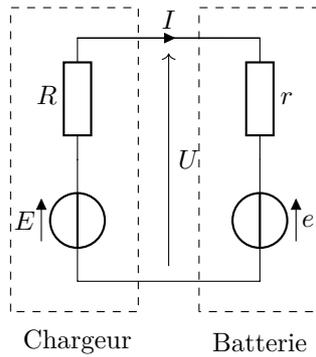
.....

Entraînement 6.10 — Charge d'une batterie.



Une batterie de voiture est déchargée. Pour recharger cette batterie, de f.é.m. $e = 12\text{ V}$ et de résistance interne $r = 0,2\ \Omega$, on la branche sur un chargeur de f.é.m. $E = 13\text{ V}$ et de résistance interne $R = 0,3\ \Omega$.

On a alors le circuit suivant :



On lit sur la batterie qu'elle a une capacité de $50\text{ A} \cdot \text{h}$ (ampères-heures).

a) Exprimer le courant I circulant dans la batterie en fonction de E , e , R et r .

.....

b) Exprimer la tension U aux bornes de la batterie lors de la charge en fonction de E , e , R et r .

.....

c) Exprimer la puissance délivrée par la source de f.é.m. E en fonction de E , e , R et r .

.....

d) Exprimer la puissance dissipée par effet Joule dans le circuit en fonction de E , e , R et r .

.....

e) Exprimer la puissance reçue par la batterie en fonction de E , e , R et r .

.....

Le rendement η de la charge est égal au rapport de la puissance reçue par la batterie par la puissance fournie par la source E .

f) Déterminer l'expression du rendement η en fonction de E et e .

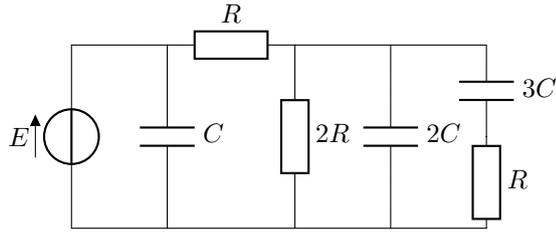
.....

g) Calculer la valeur numérique du rendement η

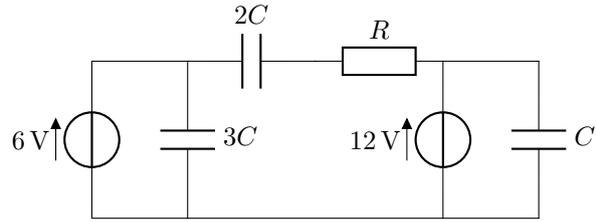
Entraînement 6.11 — Énergie d'un condensateur en régime permanent.



En régime permanent, l'énergie stockée dans un condensateur de capacité C est $\mathcal{E} = \frac{1}{2}Cu^2$, où u est la tension à ses bornes.



Circuit n° 1



Circuit n° 2

a) On considère que le régime permanent est établi dans le circuit n° 1.

Dans quel condensateur l'énergie stockée est-elle la plus importante ?

- (a) C (b) $2C$ (c) $3C$

.....

b) Même question pour le circuit n° 2.

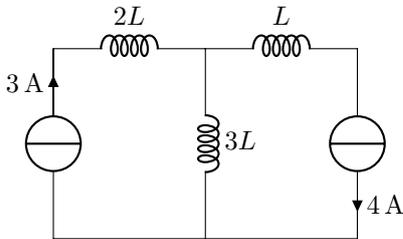
- (a) C (b) $2C$ (c) $3C$

.....

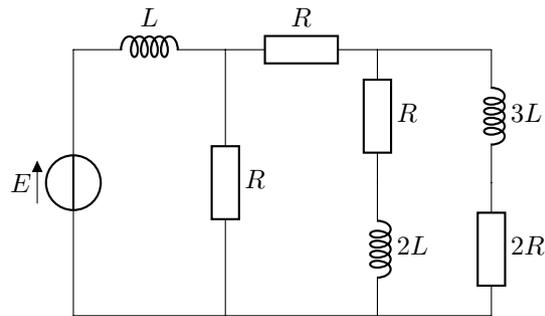
Entraînement 6.12 — Énergie d'une bobine en régime permanent.



En régime permanent, l'énergie stockée dans une bobine d'inductance L est $\mathcal{E} = \frac{1}{2}Li^2$ où i est le courant qui la traverse.



Circuit n° 3



Circuit n° 4

a) On considère que le régime permanent est établi dans le circuit n° 3.

Dans quelle bobine l'énergie stockée est-elle la plus importante ?

- (a) L (b) $2L$ (c) $3L$

.....

b) Même question pour le circuit n° 4.

- (a) L (b) $2L$ (c) $3L$

.....

Bilans d'énergie pour des circuits soumis à des échelons de tension

Prérequis

L'énergie \mathcal{E} fournie à un dipôle entre les temps t_0 et t_1 est égale à

$$\mathcal{E} = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{P}(t) dt,$$

où $\mathcal{P}(t)$ est la puissance instantanée fournie à ce dipôle.

Entraînement 6.13 — Charge d'un condensateur.



Soit le circuit ci-contre dans lequel le condensateur C est initialement déchargé.

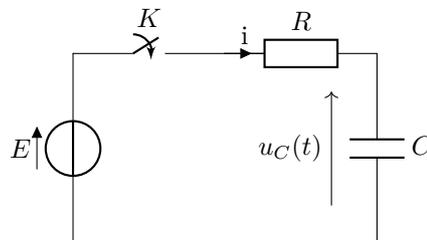
À $t = 0$, on ferme l'interrupteur K .

Dans ces conditions, la tension aux bornes du condensateur vaut :

$$u_C(t) = E(1 - \exp(-t/\tau)),$$

avec $\tau = RC$. L'intensité dans le circuit vaut :

$$i(t) = \frac{CE}{\tau} \exp(-t/\tau).$$



Exprimer, en fonction des grandeurs introduites :

a) la puissance instantanée $\mathcal{P}_E(t)$ délivrée par la source de f.é.m. E

b) la puissance instantanée $\mathcal{P}_J(t)$ dissipée par effet Joule dans le circuit

c) la puissance instantanée $\mathcal{P}_C(t)$ reçue par le condensateur

d) l'énergie totale \mathcal{E}_E fournie par la source de tension que l'on calculera grâce à la formule :

$$\mathcal{E}_E = \int_0^{\infty} \mathcal{P}_E(t) dt.$$

.....

e) l'énergie totale \mathcal{E}_J dissipée par effet Joule que l'on calculera grâce à la formule :

$$\mathcal{E}_J = \int_0^{\infty} \mathcal{P}_J(t) dt.$$

.....

f) l'énergie totale \mathcal{E}_C fournie au condensateur que l'on calculera grâce à la formule :

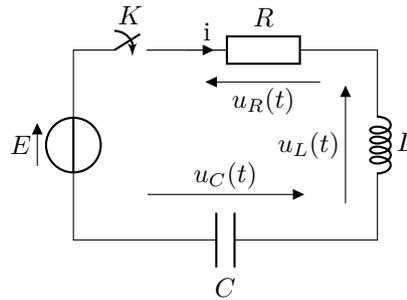
$$\mathcal{E}_C = \int_0^{\infty} \mathcal{P}_C(t) dt.$$

.....

Entraînement 6.14 — Aspects énergétiques du circuit *RLC*.



On considère le montage ci-dessous dans lequel le condensateur est initialement déchargé.



À $t = 0$, on ferme l'interrupteur K .

À $t = 0^+$, on a $u_C(t = 0^+) = 0$ et $i(t = 0^+) = 0$.

En régime permanent, on a $u_C(t \rightarrow +\infty) = E$ et $i(t \rightarrow +\infty) = 0$.

a) Exprimer la puissance instantanée $\mathcal{P}_E(t)$ fournie par la source en fonction de E et $u_C(t)$.

On pourra s'aider de la relation $i(t) = C \frac{du_C}{dt}$.

.....

b) Exprimer la puissance instantanée $\mathcal{P}_C(t)$ reçue par le condensateur en fonction de $u_C(t)$ et C .

.....

c) Exprimer la puissance instantanée $\mathcal{P}_L(t)$ reçue par la bobine en fonction de $i(t)$ et L .

.....

En intégrant les expressions des puissances instantanées aux bornes de chaque dipôle, exprimer en fonction des grandeurs introduites :

d) l'énergie totale fournie par la source de tension

e) l'énergie totale fournie au condensateur

f) l'énergie totale fournie à la bobine

g) En exploitant les résultats précédents, exprimer l'énergie totale dissipée par effet Joule.

.....

Bilan d'énergie en régime sinusoïdal forcé

Entraînement 6.15 — Adaptation d'impédance.



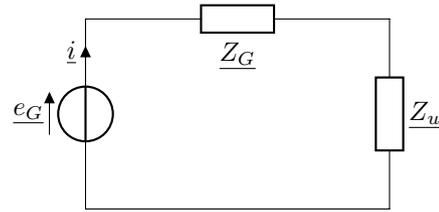
On considère un dipôle d'impédance \underline{Z}_u branché aux bornes d'un générateur de f.é.m. $e_G(t)$ et d'impédance interne \underline{Z}_G .

On notera : $\underline{Z}_u = R_u + jX_u$ et $\underline{Z}_G = R_G + jX_G$.

Le dipôle \underline{Z}_u est traversé par le courant d'intensité $i(t)$.

On écrit, en notation complexe :

$$\underline{e}_G = E\sqrt{2}e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{i} = I\sqrt{2}e^{j(\omega t + \varphi)}.$$



La puissance moyenne reçue par l'impédance \underline{Z}_u vaut :

$$\mathcal{P}_m = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\underline{Z}_u \times \underline{i} \times \underline{i}^*).$$

a) Exprimer la puissance \mathcal{P}_m en fonction de I et R_u

b) Grâce à une loi des mailles, exprimer I en fonction de E , R_G , R_u , X_G et X_u .

.....

Des résultats précédents, on déduit l'expression de \mathcal{P}_m en fonction de E :

$$\mathcal{P}_m = \frac{R_u E^2}{(R_G + R_u)^2 + (X_G + X_u)^2}.$$

On cherche à déterminer les conditions sur R_u et X_u pour que \mathcal{P}_m soit maximale. On dit alors qu'il y a *adaptation d'impédance*.

c) Calculer la dérivée de \mathcal{P}_m par rapport à X_u

d) Calculer la dérivée de \mathcal{P}_m par rapport à R_u

e) Choisir parmi les quatre propositions suivantes quelle est la condition pour que \mathcal{P}_m soit maximale :

- (a) $X_u = -X_G$ et $R_u = -R_G$
- (b) $X_u = X_G$ et $R_u = -R_G$
- (c) $X_u = -X_G$ et $R_u = R_G$
- (d) $X_u = X_G$ et $R_u = R_G$

.....

Réponses mélangées

0	$\frac{1}{2}CE^2$	3,75 W	16,5 kJ	$\frac{u_0 i_0}{2} \cos(\varphi)$	$\frac{E}{\sqrt{(R_G + R_u)^2 + (X_G + X_u)^2}}$
	$E \frac{E - e}{R + r}$	$\frac{u_0 i_0}{2}$	$EC \frac{du_C}{dt}$	513 km	$\frac{1}{2}CE^2$
16 W	0	(c)	(b)	4,6 Wh	$E^2 \frac{R}{(r + R)^2}$
	$\frac{CE^2}{\tau} \exp(-t/\tau)$	(a)	$\frac{CE^2}{\tau} (\exp(-t/\tau) - \exp(-2t/\tau))$	$3 \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) W$	$\frac{E - e}{R + r}$
	(a)	$\frac{CE^2}{\tau} \exp(-2t/\tau)$	$u_0 i_0 \left(2 + \frac{1}{2} \sin(\psi)\right)$	$\frac{e}{E}$	$\frac{(E - e)^2}{R + r}$
	$-\frac{R_u E^2}{2(X_G + X_u)}$		(b)	$\frac{1}{2}CE^2$	92 %
	$\frac{E^2}{(r + R)^3}$	(c)	$\frac{d(\frac{1}{2}Cu_C^2(t))}{dt}$	$E^2 \frac{(R_G^2 - R_u^2) + (X_G + X_u)^2}{((R_G + R_u)^2 + (X_G + X_u)^2)^2}$	CE^2
Hyundai Ioniq 6	$\frac{d(\frac{1}{2}Li^2(t))}{dt}$	(a)	(c)	$e \frac{E - e}{R + r}$	$\frac{1}{2}CE^2$
				0	CE^2

Amplificateurs linéaires intégrés

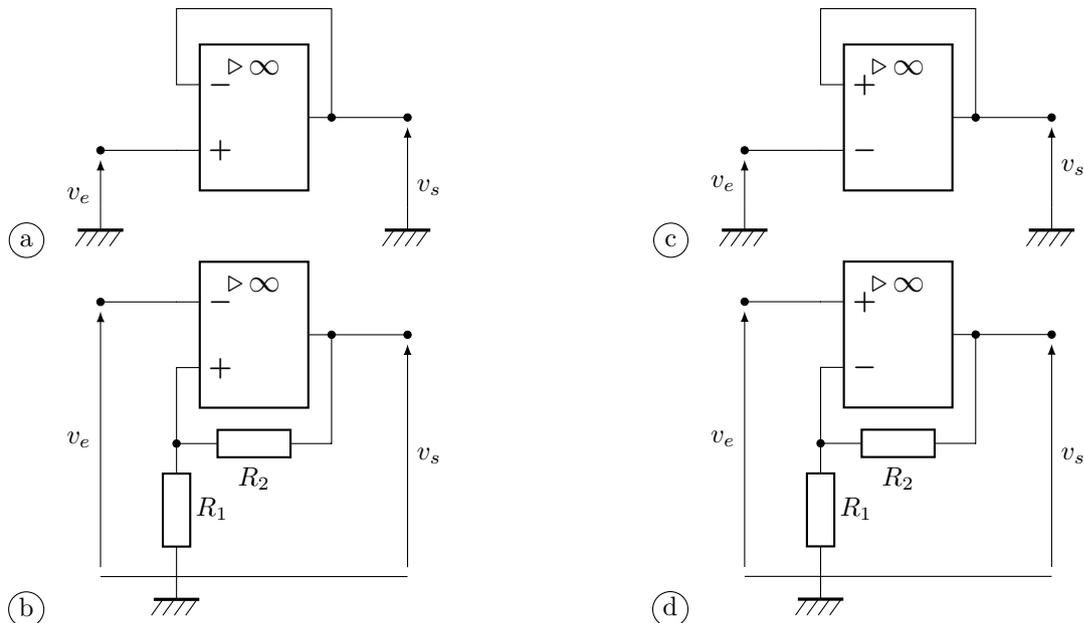
Prérequis
 Loi des nœuds. Loi des mailles. Loi d'Ohm. Impédance complexe. Diviseur de tension.

Les fondamentaux

Entraînement 7.1 — Régime linéaire ?



Parmi les circuits suivants, lesquels peuvent fonctionner en régime linéaire ?

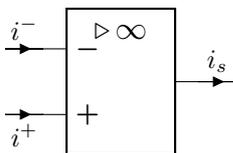


.....

Entraînement 7.2 — Modèle de l'ALI idéal de gain infini.



Pour chaque affirmation, répondre par vrai ou faux.

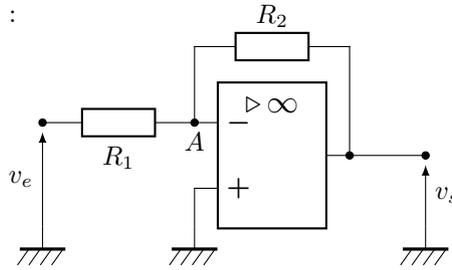


- a) L'impédance d'entrée de l'ALI idéal est infinie
- b) Les courants d'entrée i^+ et i^- de l'ALI idéal sont nuls
- c) Le courant de sortie i_s de l'ALI est toujours nul
- d) Les potentiels V^+ et V^- des entrées sont nuls en régime linéaire.

Entraînement 7.3



On considère le montage suivant :



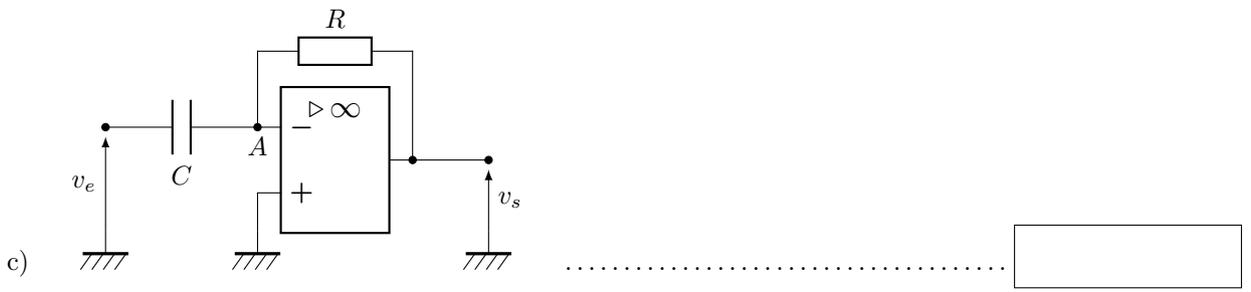
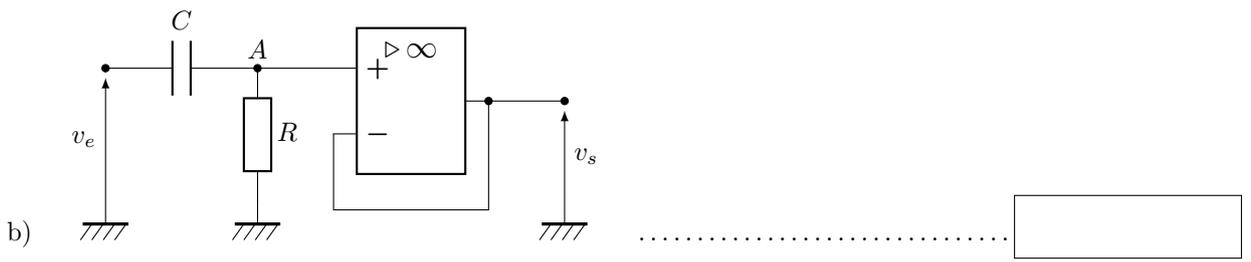
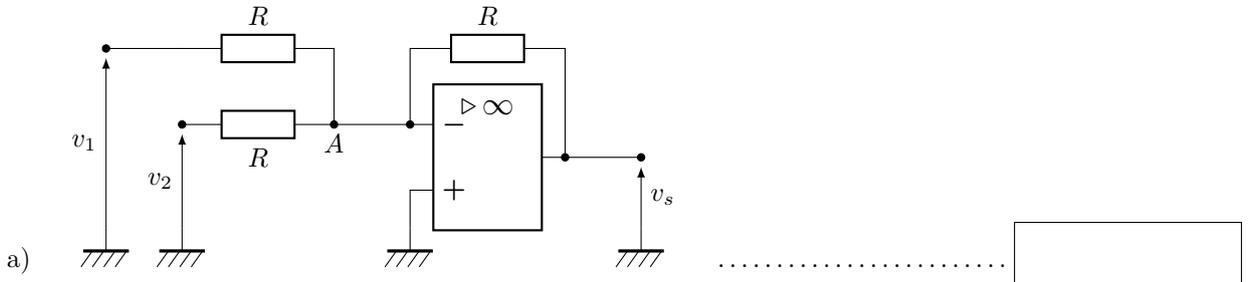
- a) L'ALI peut-il fonctionner en régime linéaire ?
- b) Dans le cas du régime linéaire, quelle est la relation entre les potentiels V^+ et V^- des entrées inverseuse et non inverseuse ?
.....
- c) Donner, en régime linéaire, le potentiel V_A du point A

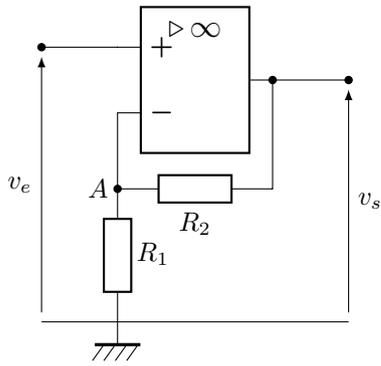
Entraînement 7.4 — Détermination de potentiels électriques.



Tous les ALI de cet exercice sont supposés fonctionner en régime linéaire.

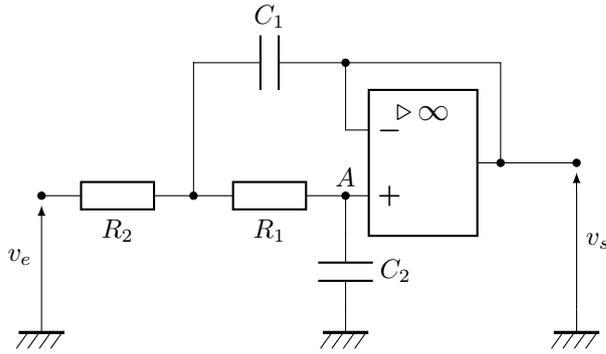
Donner, pour chaque montage, le potentiel V_A du point A en fonction de v_e ou de v_s . Le potentiel peut également être nul.





d)

.....



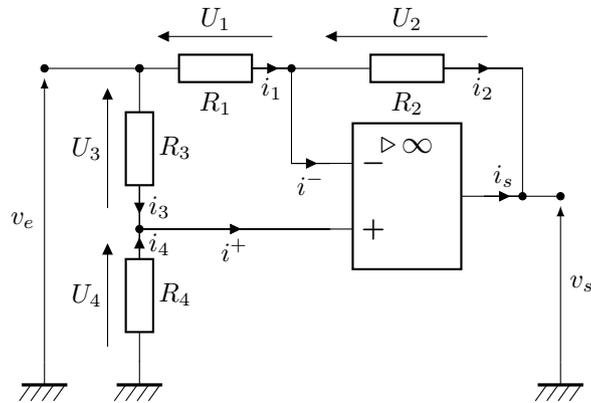
e)

.....

Entraînement 7.5 — Vrai ou faux ?



On considère le montage ci-dessous dans lequel l'ALI est idéal et fonctionne en régime linéaire.



Pour chaque affirmation, répondre par vrai ou faux.

- a) Toutes les résistances sont orientées en convention récepteur
- b) La loi des nœuds assure $i_1 = i_2$
- c) La loi des nœuds assure $i_3 = i_4$
- d) Les tensions U_1 et U_3 sont égales
- e) Les tensions U_2 et U_4 sont égales

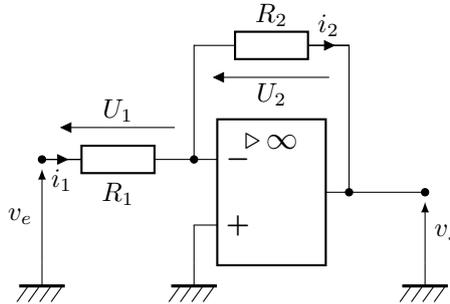
Circuits usuels

Entraînement 7.6 — Autour de l'amplificateur inverseur.



On considère le montage amplificateur inverseur ci-dessous.

L'ALI est idéal et on suppose qu'il fonctionne en régime linéaire.



- a) Quelle est la relation entre i_1 et i_2 ?
- b) Exprimer U_1 en fonction de v_e
- c) Exprimer U_2 en fonction de v_s
- d) Exprimer l'intensité i_1 en fonction de v_e
- e) Exprimer l'intensité i_2 en fonction de v_s
- f) Déterminer l'amplification $G = \frac{v_s}{v_e}$ de ce montage
- g) Parmi les couples de résistances suivants, lequel permet d'obtenir l'amplification la plus importante ?
 - Ⓐ le couple ($R_1 = 3,3 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 8,2 \text{ k}\Omega$)
 - Ⓑ le couple ($R_1 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 3,3 \text{ k}\Omega$)

Entraînement 7.7 — Amplificateur inverseur.



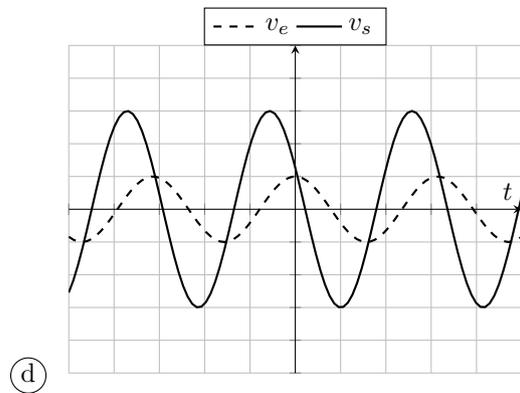
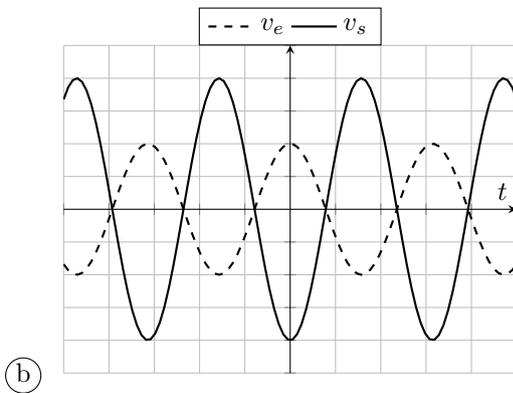
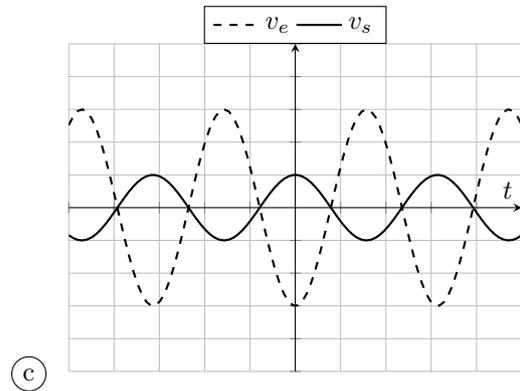
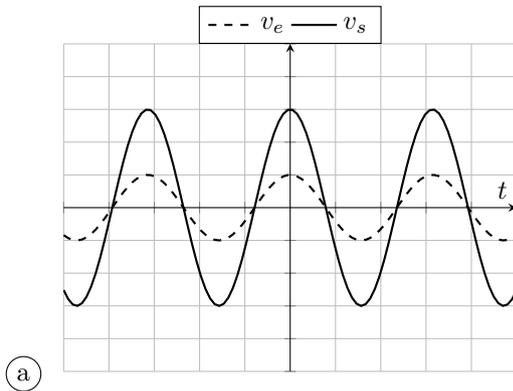
Un montage amplificateur inverseur produit un gain :

$$G = -\frac{R_2}{R_1},$$

avec $R_1 = 1,2\text{ k}\Omega$ et $R_2 = 200\ \Omega$.

Les courbes ci-dessous représentent des allures temporelles de v_e (en pointillés) et v_s (en trait plein) en fonction du temps.

Le calibre est de 1 V/division pour v_e et $0,5\text{ V/division}$ pour v_s .



Quelles sont les courbes pouvant correspondre au montage amplificateur inverseur étudié ?

.....

Entraînement 7.8 — Un petit intermède.



On considère une résistance R et une capacité C .

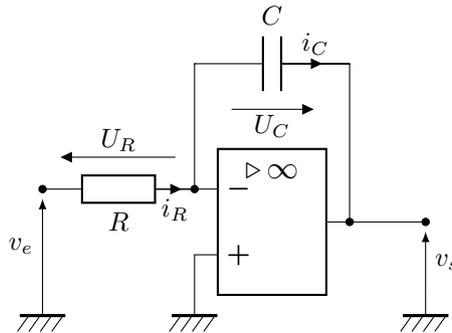
Quelle est la dimension de la grandeur RC ?

Entraînement 7.9 — Montage intégrateur inverseur (I).



On considère le montage ci-dessous.

L'ALI est idéal.



a) En régime stationnaire, l'ALI peut-il fonctionner en régime linéaire?

Dans toutes les questions suivantes, on suppose que l'ALI fonctionne en régime linéaire et on se place en régime sinusoïdal.

b) Exprimer la tension U_R en fonction de v_e et/ou v_s

c) Exprimer la tension U_C en fonction de v_e et/ou v_s

d) Donner la relation entre i_R et i_C

e) Quelle est la relation entre les grandeurs complexes $\underline{i_C}$ et $\underline{U_C}$?

f) Donner la fonction de transfert \underline{H} du montage

g) Donner la relation entre $v_e(t)$ et $v_s(t)$

Entraînement 7.10 — Montage intégrateur inverseur en régime sinusoïdal.



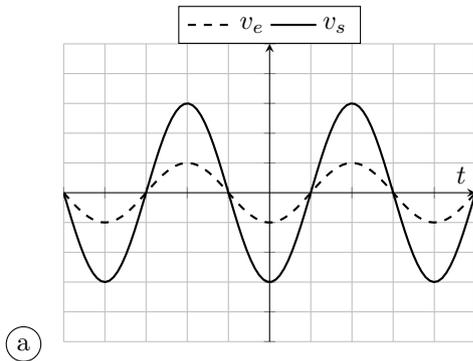
Un montage intégrateur inverseur a pour fonction de transfert :

$$\underline{H} = -\frac{1}{jRC\omega}$$

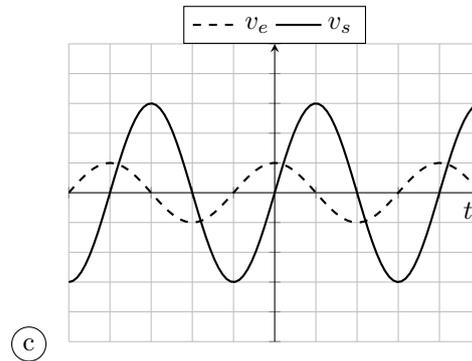
avec $R = 11 \text{ k}\Omega$ et $C = 4,7 \text{ nF}$.

Les courbes suivantes représentent des allures temporelles de v_e (en pointillés) et v_s (en trait plein) en fonction du temps. Les réglages de l'oscilloscope sont les suivants :

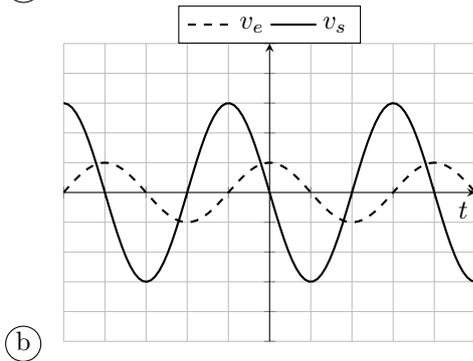
- calibre vertical : 1 V/division pour les deux voies,
- calibre horizontal : 250 μs /division.



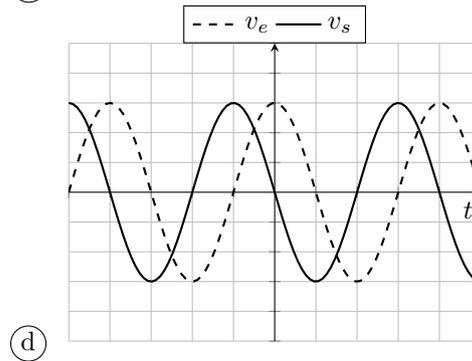
(a)



(c)



(b)



(d)

- a) Quel est le gain du montage intégrateur inverseur ?
- b) Quel est le déphasage de la tension de sortie v_s par rapport à v_e ?
- c) Pour $v_e = E \cos(\omega t)$, donner l'expression de v_s
- d) Quelle est la fréquence de fonctionnement ?
- e) Quelle est la valeur numérique du gain à cette fréquence ?
- f) Quelle courbe est compatible avec les valeurs numériques données ci-dessus ?

Entraînement 7.11 — Montage intégrateur inverseur (II).



Un montage intégrateur inverseur a pour fonction de transfert :

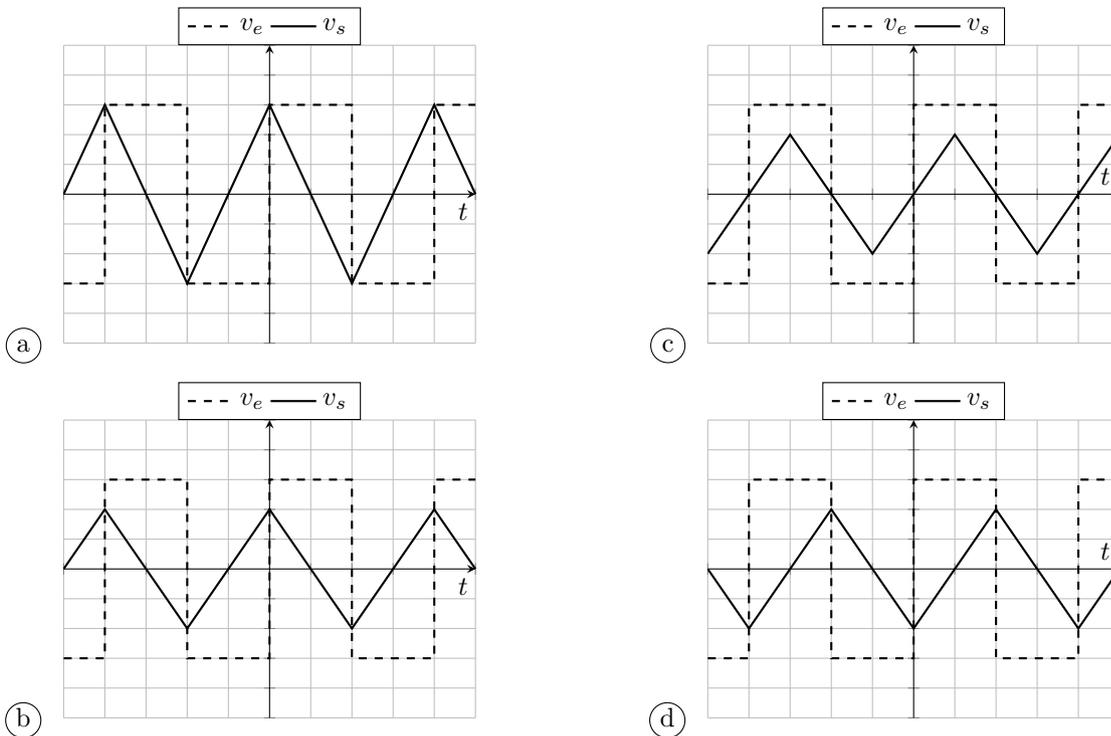
$$\underline{H} = -\frac{1}{jRC\omega}$$

avec $R = 15 \text{ k}\Omega$ et $C = 25 \text{ nF}$.

Les courbes suivantes représentent des allures temporelles de v_e (en pointillés) et v_s (en trait plein) en fonction du temps.

Les réglages de l'oscilloscope sont les suivants :

- calibre vertical : 1 V/division pour les deux voies,
- calibre horizontal : 250 μs /division.



a) Donner l'équation différentielle reliant v_s et v_e

b) Pour une tension constante $v_e = E$, donner l'expression temporelle de v_s .

On ne se préoccupera pas de déterminer les éventuelles constantes d'intégration.

.....

c) Quelle est la courbe compatible avec les valeurs numériques ci-dessus ?

.....

Entraînement 7.12 — Un petit intermède.



On considère deux montages dont les gains valent respectivement :

$$G_1 = 1 + \frac{R_2}{R_1} \quad \text{et} \quad G_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1^2 + R_2^2},$$

où R_1 et R_2 sont des résistances.

a) On suppose que $\frac{R_1}{R_2} = \alpha$. Exprimer $\frac{1}{G_2}$ en fonction de α

b) On suppose encore que $\frac{R_1}{R_2} = \alpha$. Exprimer G_2 en fonction de α

c) À quelle condition a-t-on $G_1 = \frac{1}{G_2}$?

d) Pour quelle valeur de $\alpha > 0$ la quantité $\alpha + \frac{1}{\alpha}$ est-elle minimale ?

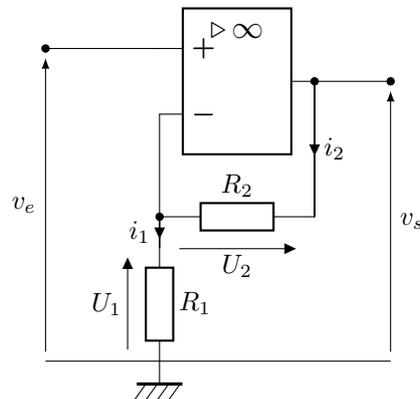
On pourra introduire une fonction et la dériver

Entraînement 7.13 — Montage non inverseur.



On considère le montage ci-dessous.

L'ALI est idéal et on suppose qu'il fonctionne en régime linéaire.



a) Quelle est la relation entre les intensités i_1 et i_2 ?

b) Exprimer la tension U_1 en fonction de v_s , R_1 et R_2

c) Exprimer U_1 en fonction de v_e

d) Exprimer le gain G du montage non inverseur

e) Donner la valeur de G pour $R_1 = 2,2 \text{ k}\Omega$ et $R_2 = 33 \text{ k}\Omega$

Entraînement 7.14 — Montage amplificateur non inverseur.



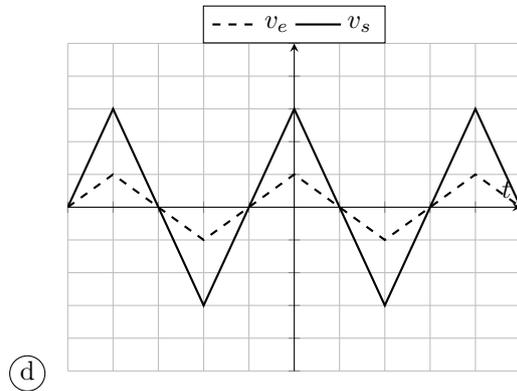
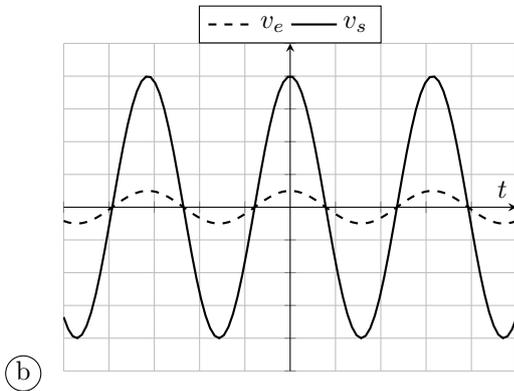
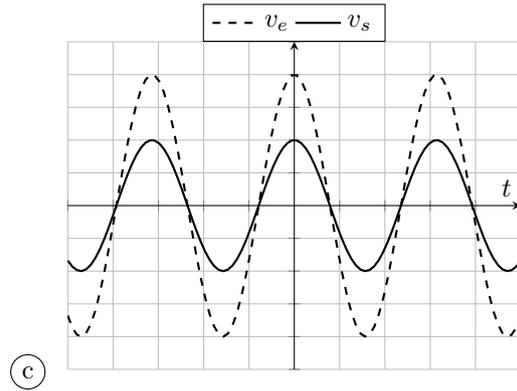
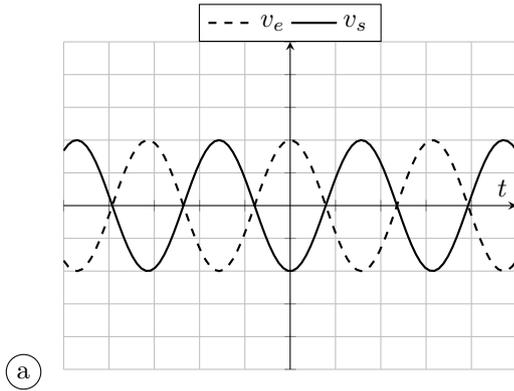
Un montage amplificateur non inverseur possède un gain :

$$G = 1 + \frac{R_2}{R_1},$$

avec $R_1 = 1,5 \text{ k}\Omega$ et $R_2 = 7,5 \text{ k}\Omega$.

Les courbes suivantes représentent des allures temporelles de v_e (en pointillés) et v_s (en trait plein) en fonction du temps.

Le calibre utilisé pour v_e est de 1 V/division alors que le calibre pour v_s est de 2 V/division.



Quelles sont les courbes qui peuvent correspondre au montage non inverseur ?

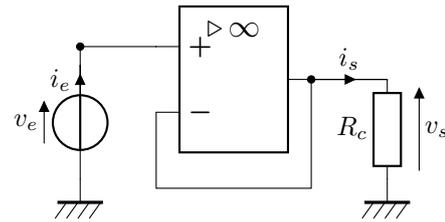
.....

Impédances d'entrée

Entraînement 7.15 — Montage suiveur.



On considère le montage suiveur représenté ci-contre.
 Le suiveur est alimenté par une source idéale de tension v_e de fréquence variable, la charge est une résistance R_c .
 L'ALI est idéal et fonctionne en régime linéaire.

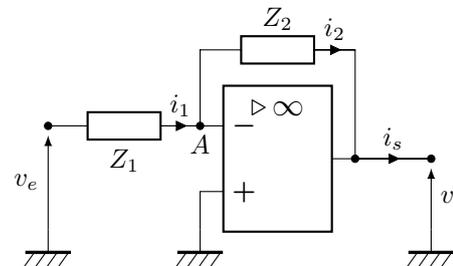


- a) Quelle est la relation entre v_e et v_s ?
- b) Quelle est l'impédance d'entrée d'un ALI idéal?
- c) Exprimer l'intensité i_e traversant la source de tension
- d) Quelle est l'impédance d'entrée du montage suiveur?

Entraînement 7.16 — Circuits inverseurs.



On considère le montage représenté ci-contre.
 Les impédances Z_1 et Z_2 sont quelconques et la tension d'entrée v_e est sinusoïdale, de pulsation ω .
 L'ALI est idéal et fonctionne en régime linéaire.



- a) Exprimer l'intensité i_1 en fonction de v_e et de Z_1
- b) Donner l'impédance d'entrée du circuit

La tension d'entrée est constante, égale à 10 V.

- c) Donner l'impédance d'entrée si Z_1 est un condensateur
- d) Donner l'impédance d'entrée si Z_1 est une bobine

La tension d'entrée est maintenant sinusoïdale, de pulsation $\omega = 6,0 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

- e) Pour quel dipôle Z_1 l'impédance d'entrée a-t-elle le plus grand module :
 un condensateur $C = 10 \text{ nF}$ ou une résistance $R = 15 \text{ k}\Omega$?

Réponses mélangées

Faux	0 V	0	Faux	$C = 10 \text{ nF}$	$\alpha + \frac{1}{\alpha}$	$i_1 = i_2$	0 V
$U_2 = -v_s$	0 A	v_e	(b)	$RC \frac{dv_s}{dt} = -v_e(t)$	Vrai	$G = -\frac{R_2}{R_1}$	
$i_1 = \frac{v_e}{R_1}$	$v_s = v_e$	Vrai	$R_1 = R_2$	$i_R = i_C$	$V^+ = V^-$	$i_C = -jC\omega U_C$	
v_s	Vrai	$\alpha = 1$	Oui	(c)	$\frac{\alpha}{1 + \alpha^2}$	∞	$Z_1 = 3,1$
$RC \frac{dv_s}{dt} = -v_e$	v_e	$U_1 = v_e$	v_s	$-\frac{1}{jRC\omega}$	(d)	$i_2 = -\frac{v_s}{R_2}$	
C'est un temps	v_s	(b)	$\frac{R_1}{R_1 + R_2} v_s$	Non	v_e	(b)	∞
Vrai	$i_1 = i_2$	$\frac{1}{RC\omega}$	0 V	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{v_e}{Z_1}$	∞	$-\frac{E}{RC\omega} \sin(\omega t)$
1 kHz	(a) (d)	$-\frac{E}{RC} t + K$	Faux	16	Faux	Faux	$1 + \frac{R_2}{R_1}$

Sources lumineuses et lois de Snell-Descartes

Prérequis

Lois de Snell-Descartes. Notions de base sur les ondes lumineuses et leur propagation dans un milieu. Notions de base de géométrie concernant les angles.

Constantes utiles

→ célérité de la lumière dans le vide : $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

→ constante de Planck : $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

Lois de Snell-Descartes

Entraînement 8.1 — Conversions d'angles (I).

Soit α_{rad} la mesure d'un angle en radians, α_{deg} sa mesure en degrés et α_{min} sa mesure en minutes d'angle.

a) Exprimer α_{rad} en fonction de α_{deg}

b) Exprimer α_{min} en fonction de α_{deg}

Entraînement 8.2 — Conversions d'angles (II).

a) $\alpha = 35,65^\circ$. Exprimer α en degrés et en minutes d'angle

b) $\beta = 98^\circ 15'$. Exprimer β en radians

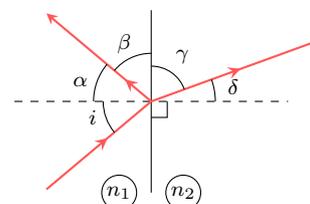
c) $\gamma = 1,053 \text{ rad}$. Exprimer γ en degrés et en minutes d'angle

Entraînement 8.3 — Un rayon incident sur un dioptre.

On considère un rayon incident arrivant sur un dioptre séparant deux milieux d'indices respectifs n_1 et n_2 .

Ce rayon fait un angle i avec la normale au dioptre.

Tous les angles figurant sur le schéma sont non orientés.



Exprimer chacun des angles suivants en fonction de i et/ou de n_1 et n_2 (en radians) :

a) α

c) δ

b) β

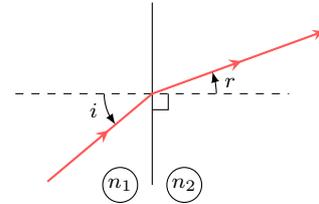
d) γ

Entraînement 8.4 — Un autre rayon incident sur un dioptre.



On considère un rayon incident arrivant sur un dioptre séparant deux milieux d'indices respectifs n_1 et n_2 . Ce rayon fait un angle i avec la normale au dioptre alors que le rayon réfracté fait un angle r .

On donne $n_1 = 1,00$ et $n_2 = 1,45$.



a) Pour $i = 24,0^\circ$, que vaut r en degrés?

b) Pour $i = 6,74 \times 10^{-1}$ rad, que vaut r en degrés?

c) Pour $r = 15,0^\circ$, que vaut i en degrés?

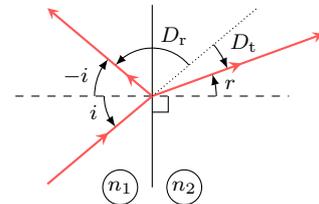
Entraînement 8.5 — Déviation introduite par un dioptre.



On considère un rayon incident arrivant sur un dioptre séparant deux milieux d'indices respectifs n_1 et n_2 .

Les angles définis sur le schéma ci-contre sont tous orientés.

On définit D_r la déviation entre le rayon incident et le rayon réfléchi, et D_t la déviation entre le rayon incident et le rayon réfracté.



a) Exprimer D_t en fonction de i et r

b) Déterminer D_r

 **Entraînement 8.6 — Un peu de géométrie dans un prisme.**

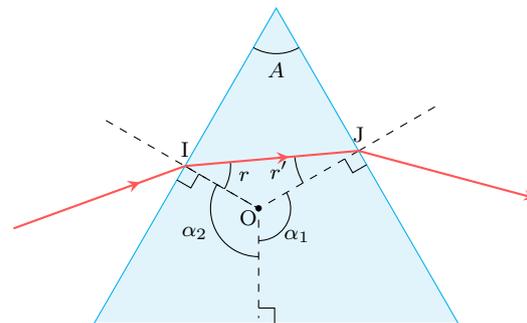


On considère un prisme d'angle au sommet A , représenté ci-contre suivant une de ses faces triangulaires.

Un rayon incident en I sur une face du prisme émerge en J .

On définit les angles α_1 , α_2 , r et r' sur le schéma.

Dans cet entraînement, les angles ne sont pas orientés.



On rappelle que la somme des angles dans un quadrilatère est égale à 2π .

a) Exprimer l'angle A en fonction de α_1 et α_2

b) Exprimer l'angle A en fonction de r et de r'

Autour des réflexions totales

Entraînement 8.7



On considère un dioptre séparant deux milieux d'indices respectifs $n_1 = 1,5$ et $n_2 = 1,3$. Un rayon lumineux arrive sur ce dioptre en formant un angle i par rapport à sa normale.

On rappelle qu'il y a réflexion totale si $\frac{n_1}{n_2} \sin(i) > 1$.

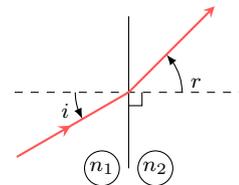
a) Pour $i = 44^\circ$, y a-t-il réflexion totale?

b) Donner, en degrés, l'angle i_ℓ tel qu'il y a réflexion totale si $i > i_\ell$

Entraînement 8.8



On considère un rayon lumineux incident sur le dioptre n_1/n_2 , faisant un angle i avec la normale à ce dioptre, et le rayon réfracté, faisant un angle r avec cette normale.



On donne $n_1 = 1,37$ et on rappelle qu'il y a réflexion totale si $\frac{n_1}{n_2} \sin(i) > 1$.

a) Pour $i = 20,0^\circ$ et $r = 22,0^\circ$, que vaut n_2 ?

b) Pour $i = 60,0^\circ$, quelle est la valeur maximale de n_2 donnant lieu à une réflexion totale? ...

c) On suppose que $i = 40,0^\circ$. Peut-on observer un phénomène de réflexion totale?



Entraînement 8.9 — Condition de propagation dans une fibre optique.



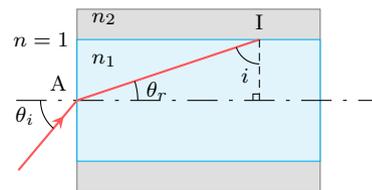
Un rayon lumineux arrive sur un dioptre séparant l'air d'un milieu d'indice n_1 au point A (voir schéma ci-contre). On a donc :

$$\sin(\theta_i) = n_1 \sin(\theta_r). \quad (1)$$

Le rayon se propagera dans la fibre à condition qu'il y ait réflexion totale au point I situé à l'intersection du rayon lumineux et du dioptre n_1/n_2 (avec $n_1 > n_2$).

On donne la relation correspondante :

$$\frac{n_1 \sin(i)}{n_2} > 1 \quad (2)$$



a) À l'aide de (1), exprimer $\cos(\theta_r)$ en fonction de n_1 et de $\sin(\theta_i)$

b) À quelle condition portant sur $\cos(\theta_r)$ équivaut (2)?

c) En déduire à quelle condition sur $\sin(\theta_i)$ équivaut (2)

Lentilles

Prérequis

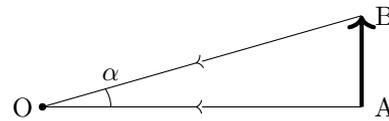
Propriétés des lentilles minces dans les conditions de Gauss. Vergence.
Relations de conjugaison des lentilles minces.

Grandeurs algébriques

Entraînement 9.1 — Diamètre apparent.



On considère le schéma suivant, montrant l'angle α , appelé diamètre apparent, sous lequel est vu un objet AB depuis un point O.



a) Exprimer le diamètre apparent α , en radians, en fonction de OA et AB

b) Exprimer le diamètre apparent α , en degrés, en fonction de OA et AB

Un observateur situé à la surface de la Terre observe des astres, caractérisés par les données suivantes :

	Soleil	Lune
Diamètre	$1,4 \cdot 10^6$ km	$3,5 \cdot 10^3$ km
Distance à la Terre	$150\,600 \cdot 10^3$ km	384 400 km

Pour simplifier les calculs, on pourra utiliser que, quand α est un angle petit et exprimé en radians, on dispose de l'approximation des petits angles : $\alpha \approx \tan(\alpha)$.

c) Calculer le diamètre apparent de la Lune α_L en degrés

d) Calculer le diamètre apparent du Soleil α_S en degrés

e) Que vérifient les valeurs numériques α_S et α_L ?

(a) $\alpha_S > \alpha_L$

(b) $\alpha_S \approx \alpha_L$

(c) $\alpha_S < \alpha_L$

.....

f) Quel phénomène astronomique la comparaison de α_L et α_S permet-elle d'expliquer ?

(a) Les éclipses

(b) Les saisons

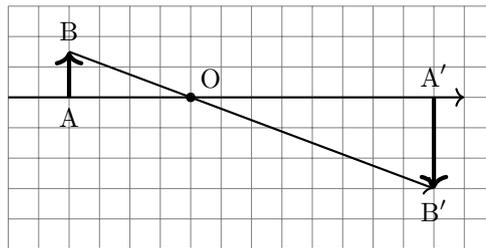
(c) Les marées

.....

Entraînement 9.2 — Configuration de Thalès et grandissement.



On considère la situation représentée sur le schéma ci-dessous.



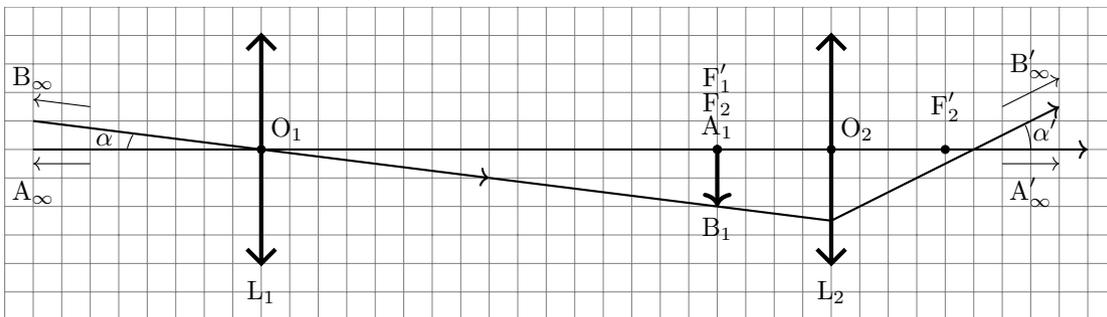
On note \bar{x} la valeur algébrique de la longueur x et on définit le grandissement γ par la relation :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}.$$

a) Donner la relation reliant \overline{OA} , $\overline{OA'}$, \overline{AB} et $\overline{A'B'}$

b) Déterminer la valeur numérique de γ

Entraînement 9.3 — Schéma optique d'une lunette astronomique afocale.



Le schéma ci-dessus modélise une lunette astronomique afocale, où un carreau correspond à une longueur réelle de 2,5 cm.

Calculer les distances algébriques suivantes :

a) $\overline{O_1F'_1}$

b) $\overline{O_2F_2}$

c) $\overline{O_2O_1}$

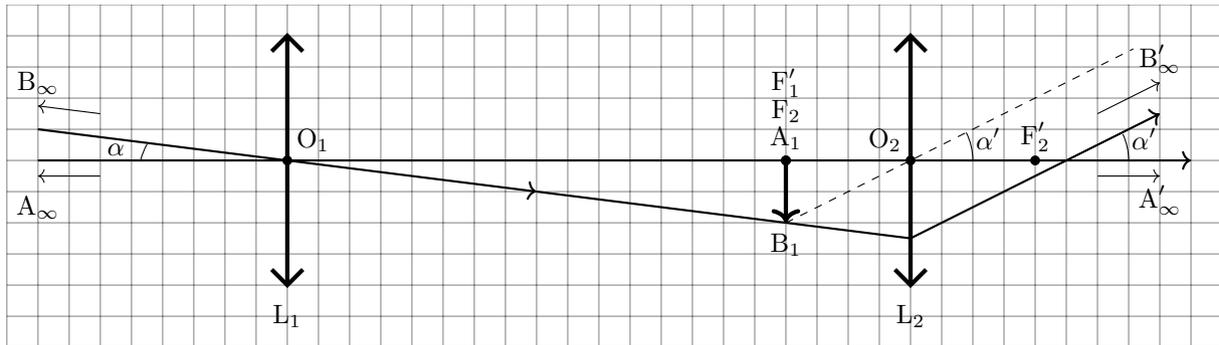
d) $\overline{A_1F'_2}$

Entraînement 9.4 — Grossissement d'une lunette astronomique afocale.



On considère la lunette astronomique afocale schématisée dans l'entraînement précédent.

Elle est constituée d'un objectif (lentille convergente L_1) et d'un oculaire (lentille convergente L_2) alignés sur le même axe optique.



On introduit les grandeurs suivantes :

- la distance focale image de l'objectif, notée f'_1
- la distance focale image de l'oculaire, notée f'_2
- l'objet lointain observé par la lunette, noté $\overline{A_\infty B_\infty}$
- l'image intermédiaire de l'objet par l'objectif, notée $\overline{A_1 B_1}$
- l'image à l'infini de l'image intermédiaire par l'oculaire, notée $\overline{A'_\infty B'_\infty}$
- le diamètre apparent α de l'objet
- le diamètre apparent α' de l'image

On définit le grossissement de la lunette, noté G , comme le rapport du diamètre apparent de l'objet observé à la lunette sur le diamètre apparent réel de l'objet.

Autrement dit, on pose :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha}.$$

Dans cet entraînement, les angles ne seront pas orientés et on travaillera avec des longueurs plutôt que des valeurs algébriques.

a) Exprimer α en fonction de $A_1 B_1$ et d'une distance focale.

.....

b) Exprimer α' en fonction de $A_1 B_1$ et d'une distance focale.

.....

c) Exprimer G en fonction de f'_1 et de f'_2 .

.....

d) Déterminer la valeur de G .

.....

Modèle de la lentille mince

Entraînement 9.5 — Conditions de Gauss.



Parmi les situations suivantes concernant les rayons lumineux issus d'un objet et traversant une lentille mince, indiquer celle qui ne permet pas de se placer dans les conditions de Gauss :

- (a) peu inclinés par rapport à l'axe optique
 (b) passant par les bords de la lentille
 (c) passant près du centre optique

.....

Entraînement 9.6 — Déviation de rayons lumineux.

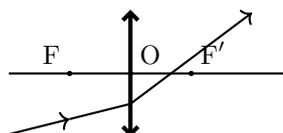


On rappelle les propriétés suivantes :

- Un rayon passant par le centre optique de la lentille n'est pas dévié.
- Un rayon incident dont la direction passe par le foyer objet émerge parallèle à l'axe optique principal.
- Un rayon parallèle à l'axe optique principal émerge avec une direction passant par le foyer image.

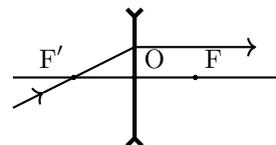
Pour chacun des schémas suivants, préciser s'ils sont corrects ou incorrects.

a)



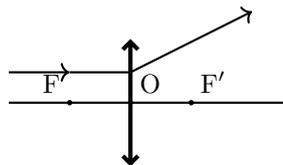
.....

c)



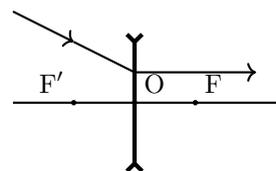
.....

b)



.....

d)

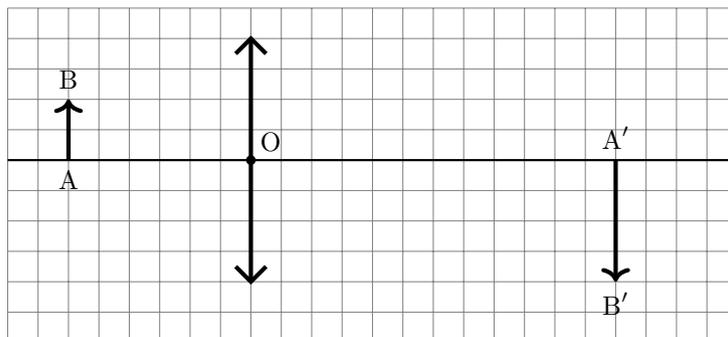


.....

Entraînement 9.7 — Construction de rayons lumineux.



On considère le schéma suivant montrant un objet \overline{AB} et son image $\overline{A'B'}$ par une lentille convergente.



On donne l'échelle du schéma : 8 carreaux sur le schéma correspondent à 10 cm en réalité.

a) Déterminer graphiquement la distance focale de la lentille

b) Calculer la vergence de la lentille

Entraînement 9.8 — Batailles de convergence.



Quelle est la lentille la plus convergente ?

- (a) une lentille de vergence $+8,0 \delta$
- (c) une lentille de focale objet $-10,0 \text{ cm}$
- (b) une lentille de focale image $+8,0 \text{ cm}$
- (d) une lentille de focale image $-8,0 \text{ cm}$

.....

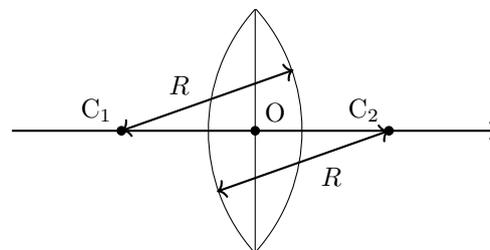
Entraînement 9.9 — Focale d'une lentille biconvexe.



La distance focale d'une lentille biconvexe symétrique de rayon de courbure R , taillée dans un matériau d'indice n et utilisée dans l'air est donnée par la relation suivante :

$$f' = \frac{R}{2(n - n_{\text{air}})},$$

où n_{air} est l'indice optique de l'air.



On souhaite fabriquer une lentille biconvexe de vergence $6,0 \delta$ afin de corriger une hypermétropie forte à partir d'un plastique organique d'indice $n = 1,67$. On donne $n_{\text{air}} = 1,00$.

a) Calculer le rayon de courbure à réaliser

b) Pour quelle valeur de l'indice n la lentille ne dévie pas les rayons lumineux ?

- (a) $n \approx n_{\text{air}}$
- (b) $n = \frac{3}{2}n_{\text{air}}$
- (c) $n = \frac{R}{n_{\text{air}}}$

.....

Conjugaison par une lentille mince

Entraînement 9.10 — Relation de conjugaison au centre optique.



Un objet lumineux est placé au point A, à 15,0 cm devant une lentille mince convergente de centre optique O et de distance focale $f' = 4,0$ cm.

On rappelle la relation de conjugaison aux sommets de Descartes qui permet de faire le lien entre la position \overline{OA} de l'objet et la position $\overline{OA'}$ de l'image :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}}$$

a) Exprimer $\overline{OA'}$ en fonction de \overline{OA} et f'

b) Exprimer \overline{OA} en fonction de $\overline{OA'}$ et f'

c) Exprimer f' en fonction de \overline{OA} et $\overline{OA'}$

d) L'image est-elle située avant ou après le centre optique O?

Entraînement 9.11 — Relation de conjugaison aux foyers.



Dans un dispositif optique convergent de distance focale $f' = 12,0$ cm, on souhaite qu'une image réelle se trouve exactement à 5,0 mm après le foyer image. On cherche la position où l'on doit placer l'objet, dans un premier temps par rapport au foyer objet F, puis par rapport au centre optique O.

On rappelle la relation de conjugaison aux foyers de Newton :

$$\overline{F'A'} \times \overline{FA} = -f'^2$$

a) Exprimer \overline{FA} en fonction de f' et $\overline{F'A'}$

b) Exprimer \overline{OA} en fonction de \overline{FA} et f'

c) Cet objet est-il réel ou virtuel?

Entraînement 9.12 — Grandissement.



Un système optique donne d'un objet une image dont le grandissement est le suivant : $\gamma = -2,0$.

a) Par rapport à l'objet, cette image est :

(a) rétrécie

(b) agrandie

b) Par rapport à l'objet, cette image est :

(a) droite

(b) renversée

.....

.....

Entraînement 9.13 — Projecteur de cinéma.



Un projecteur de cinéma contient une lentille convergente de distance focale $f' = 50,0$ mm.

L'écran se situe à 15,0 m de la lentille et on dispose d'une pellicule dont les vignettes sont de dimensions 36,0 mm \times 24,0 mm.

- a) À quelle distance algébrique de la lentille doit-on placer la pellicule?
- b) Quelles sont les dimensions de l'image d'une vignette sur l'écran?

Entraînement 9.14 — Objets et images à l'infini.



a) Un objet lumineux très éloigné, comme une étoile, peut être considéré comme étant situé à l'infini.

Où se situe l'image d'un tel objet par une lentille?

- (a) dans son plan focal image
- (b) dans son plan focal objet
- (c) à l'infini

.....

b) Un œil « normal » (emmétrope) n'accomode pas lorsqu'il observe une image à l'infini. Dans ce but, on souhaite projeter à l'infini, l'image d'un objet en utilisant une lentille.

Où doit-on placer l'objet?

- (a) dans son plan focal image
- (b) dans son plan focal objet
- (c) à l'infini

.....

Entraînement 9.15 — Loupe.



Une loupe est une lentille convergente utilisée dans des conditions particulières. Dans cet exercice, la lentille utilisée a une distance focale de 10,0 cm. On place un objet $\overline{AB} = 2,0$ cm à une distance de 6,0 cm en avant de la loupe.

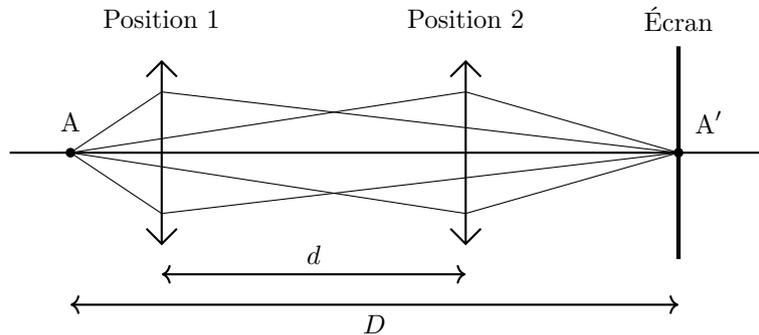
- a) Calculer la position de l'image formée par la loupe
- b) Donner la nature de l'image
- c) Calculer la taille de l'image formée par la loupe
- d) Cette image est-elle droite ou renversée?

Entraînement 9.16 — Méthode de Bessel.



Pour mesurer la distance focale d'une lentille, on peut utiliser la méthode de Bessel.

On considère un objet donné, et on fixe la distance D entre l'objet et l'écran. On s'assure que D soit suffisamment grande pour qu'il existe deux positions où intercaler la lentille entre l'objet et l'écran, pour lesquelles l'image sur l'écran est nette. On note d la distance entre ces deux positions.



On peut alors montrer la relation suivante :

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{\frac{D+d}{2}} - \frac{1}{\frac{-(D-d)}{2}}.$$

- a) Exprimer f' en fonction de D et d
- b) Exprimer f' lorsque $d = \frac{D}{4}$
- c) Exprimer d lorsque $f' = \frac{D}{4}$

Réponses mélangées

réel	virtuelle	-50 cm	droite	(b)	$\frac{\overline{OA} \times \overline{OA'}}{\overline{OA} - \overline{OA'}}$	(b)	$\frac{\overline{OA} \times \overline{OF'}}{\overline{OA} + \overline{OF'}}$
	-10 cm	incorrect	0,22 m	(b)	(b)	$\overline{OA} = -5,02 \text{ cm}$	(b)
$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$	+20 δ	$\arctan\left(\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}}\right)$	correct		10,8 m × 7,2 m	(a)	$\overline{FA} - f'$
$\frac{-f'^2}{\overline{F'A'}}$	$\frac{f'_1}{f'_2}$	5,0 cm	(b)	5,0 cm	(a)	$\frac{\overline{A_1B_1}}{f'_2}$	0,52° 40 cm
après	$\frac{D^2 - d^2}{4D}$	incorrect	20 cm	$\overline{OA'} = -15 \text{ cm}$		$\frac{\overline{OA'} \times f'}{f' - \overline{OA'}}$	(a)
$\arctan\left(\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}}\right) \times \frac{180}{\pi}$	correct	4	$\frac{15D}{64}$	$\frac{\overline{A_1B_1}}{f'_1}$	-2	0,53°	0

Cinématique

Prérequis

Produit scalaire. Équations différentielles d'ordre 1. Projections de vecteurs.

Déplacements rectilignes



Entraînement 10.1 — Distance et temps de parcours.



Une voiture se déplace en ligne droite à $90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Toutes les réponses seront exprimées en « heures-minutes-secondes », par exemple « 2 h 32 min 12 s ».

a) Combien de temps faut-il à cette voiture pour parcourir 100 km ?

b) Quel serait l'allongement du temps de trajet si elle roulait à $80 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$?



Entraînement 10.2 — Distance parcourue.



Une voiture se déplace en ligne droite. Initialement à l'arrêt, elle subit une accélération constante valant a_0 pendant une durée τ_1 , puis continue à vitesse constante pendant une durée τ_2 .

a) Quelle est la vitesse v_1 du véhicule à la date $t = \tau_1$?

b) Quelle est la distance parcourue durant τ_1 ?

c) Quelle est la distance totale parcourue en fonction de a_0 , τ_1 et τ_2 ?



Entraînement 10.3 — Longueur d'une piste de décollage.



Pour décoller, un avion doit atteindre la vitesse $v_d = 180 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ en bout de piste.

Quelle est la longueur minimale L de la piste de décollage si l'avion accélère uniformément à la valeur $a = 2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$?

(a) 300 m

(b) 450 m

(c) 500 m

(d) 650 m

.....



Entraînement 10.4 — Distance de freinage.



Une voiture roule à $110 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ en ligne droite. En supposant que les freins imposent une décélération constante de norme $a = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, déterminer la distance d'arrêt de la voiture.

(a) 37,8 m

(b) 46,7 m

(c) 55,9 m

(d) 63,5 m

.....

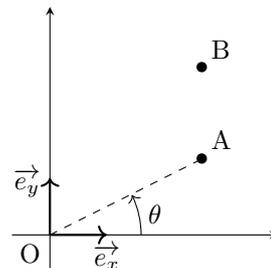
Coordonnées et projections de vecteurs

Entraînement 10.5 — Composantes de vecteurs.



On considère deux points A et B tels que la droite (AB) est parallèle à la droite (Oy). Le vecteur \vec{OA} fait un angle θ avec l'axe (Ox).

Exprimer les composantes des vecteurs suivants dans le repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ en fonction de $a = \|\vec{OA}\|$, $b = \|\vec{AB}\|$ et de l'angle θ .



a) \vec{OA}

b) \vec{OB}

c) $\vec{OA} + \vec{OB}$

d) $\vec{OA} - \vec{OB}$

Entraînement 10.6 — Les coordonnées cylindriques.

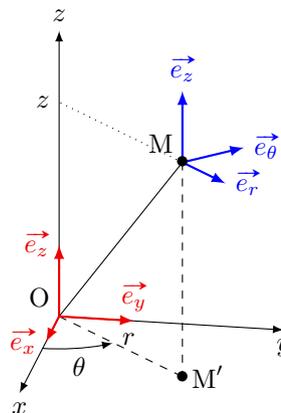


On considère le schéma ci-contre, dans lequel

- la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$
- et la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$

sont définies.

Le point M est repéré par la donnée de r , θ et z .



a) Écrire le vecteur \vec{OM}' dans la base cartésienne

b) Écrire le vecteur \vec{OM}' dans la base cylindrique

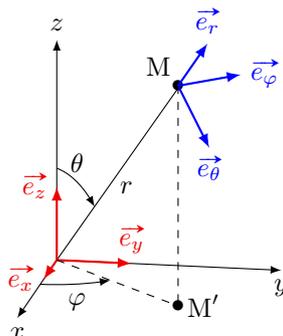
c) Écrire le vecteur \vec{OM} dans la base cartésienne

d) Écrire le vecteur \vec{OM} dans la base cylindrique

Entraînement 10.7 — Les coordonnées sphériques.



On considère le schéma ci-dessous, dans lequel la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et la base sphérique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ sont définies.



Le point M est repéré par la donnée de r , θ et φ .

- a) Écrire la norme de \vec{OM} en fonction de r et θ
- b) Écrire le vecteur \vec{OM} dans la base cartésienne
- c) Écrire le vecteur \vec{OM} dans la base cartésienne
- d) Écrire le vecteur \vec{OM} dans la base sphérique
- e) Écrire le vecteur \vec{e}_z dans la base sphérique

Entraînement 10.8 — Jouons au tennis.



Un élève regarde un match de tennis. Il filme un des échanges et décide d'étudier le mouvement de la balle pour en déduire sa vitesse et son accélération.

Pour cela, il utilise un logiciel d'exploitation de vidéo et remplit le tableau suivant :

t (en s)	0	0,05	0,10	0,15	0,20
x (en m)	0	0,35	0,70	1,05	1,40
y (en m)	1,5	2,09	2,66	3,21	3,74

- a) Déterminer la vitesse v_0 (en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$) de la balle à l'instant initial
- b) Déterminer l'accélération (en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$) de la balle à l'instant initial

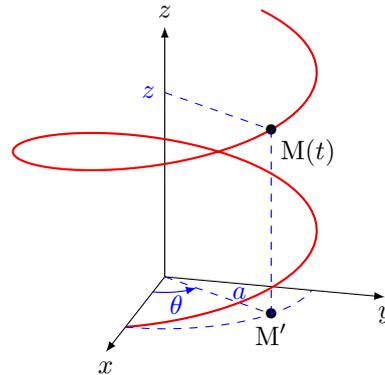
Dérivée de vecteurs

Entraînement 10.9 — Étude d'un mouvement hélicoïdal.



Le point matériel M de coordonnées cartésiennes (x, y, z) décrit une trajectoire hélicoïdale, définie par les équations :

$$\begin{cases} x(t) = a \times \cos(\omega t) \\ y(t) = a \times \sin(\omega t) \\ z(t) = b \times t. \end{cases}$$



a) Déterminer la vitesse $\vec{v}(M)$ dans la base cartésienne

b) Déterminer la norme de la vitesse

c) Déterminer l'accélération $\vec{a}(M)$ dans la base cartésienne

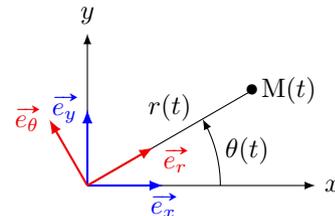
d) Déterminer la norme de l'accélération

Entraînement 10.10 — Dérivation des vecteurs unitaires de la base polaire.



On considère un point $M(t)$ en mouvement dans le plan (xOy) .

On note $r(t)$ et $\theta(t)$ les coordonnées de $M(t)$ dans le repère polaire $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.



a) Exprimer le vecteur \vec{e}_r dans la base cartésienne $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$

b) En déduire la dérivée $\frac{d\vec{e}_r}{dt}$ dans la base cartésienne $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$

c) Exprimer le vecteur \vec{e}_x dans la base polaire $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$

d) Exprimer le vecteur \vec{e}_y dans la base polaire $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$

e) En déduire l'expression de la dérivée $\frac{d\vec{e}_r}{dt}$ dans la base polaire

**Entraînement 10.11 — Calcul d'une vitesse en coordonnées polaires.**

On considère un point M dont les coordonnées polaires sont $\begin{cases} r(t) = a \times t \\ \theta(t) = b \times t^2. \end{cases}$

La vitesse en coordonnées polaires s'écrit :

$$\vec{v}(M) = \dot{r} \vec{e}_r + r\dot{\theta} \vec{e}_\theta,$$

où $\dot{r} \vec{e}_r$ est appelée *vitesse radiale* et $r\dot{\theta} \vec{e}_\theta$ *vitesse orthoradiale*.

- a) Déterminer la dimension de a
- b) Déterminer la dimension de b
- c) Déterminer la vitesse radiale en fonction de a
- d) Déterminer la vitesse orthoradiale en fonction de a, b et t
- e) En déduire l'expression de $\vec{v}(M)$

Entraînement 10.12 — Mouvement en spirale.

Un point M(t) décrit une trajectoire en forme de spirale. Dans le repère polaire (O, $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$), les coordonnées de M(t) sont :

$$\begin{cases} r(t) = r_0 e^{-t/\tau} \\ \theta(t) = \omega t, \end{cases}$$

où r_0, τ et ω sont des constantes positives.

- a) Déterminer la vitesse $\vec{v}(M)$ en coordonnées polaires.
On pourra utiliser la formule donnée dans l'entraînement précédent

L'accélération en coordonnées polaires s'écrit :

$$\vec{a}(M) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{e}_\theta.$$

- b) Déterminer l'accélération $\vec{a}(M)$
- On donne les valeurs suivantes : $\omega = 4,78 \text{ tours} \cdot \text{min}^{-1}$, $\tau = 2,0 \text{ s}$ et $r_0 = 4,0 \text{ cm}$.
- c) Dans ces conditions, l'accélération est-elle radiale ou orthoradiale?
 - d) Le mouvement de M est-il accéléré ou décéléré?
 - e) Déterminer l'équation polaire de la trajectoire de M

Étude de quelques mouvements

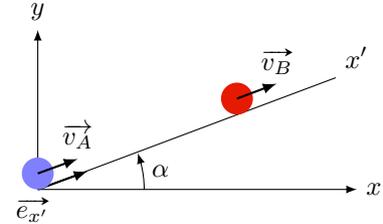
Entraînement 10.13 — Collision sur plan incliné.



Deux billes évoluent sur un plan incliné faisant un angle $\alpha = 20^\circ$ par rapport à l'horizontale.

À $t = 0$, elles sont distantes d'une longueur L .

- La bille A possède une vitesse initiale $v_0 \vec{e}_{x'}$.
Son accélération $\vec{a}(A) = -a \vec{e}_{x'}$ est constante au cours du temps.
Nous noterons $v_A(t) \vec{e}_{x'}$ sa vitesse à l'instant t .
- La bille B, quant à elle, n'a pas de vitesse initiale mais possède une accélération constante $\vec{a}(B) = a \vec{e}_{x'}$.
Nous noterons $v_B(t) \vec{e}_{x'}$ sa vitesse à l'instant t .



On donne $a = 3,35 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et $v_0 = 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

- a) Exprimer $v_A(t)$ en fonction a , t et v_0
- b) Exprimer $v_B(t)$ en fonction a et t
- c) Déterminer la position x'_A de A en fonction du temps
- d) Déterminer la position x'_B de B en fonction du temps
- e) Déterminer la distance L maximale (en cm) pour qu'une collision puisse avoir lieu.
.....

Entraînement 10.14 — Chute libre.



On considère le point M de masse m et de coordonnées (x, y, z) dans la base cartésienne $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Il est lancé avec la vitesse $\vec{v}_0 = v_{0x} \vec{e}_x + v_{0z} \vec{e}_z$ à partir de l'origine O du repère dans le champ de pesanteur uniforme $\vec{g} = -g \vec{e}_z$.

Tout frottement étant négligé, l'accélération de M est égale à \vec{g} à tout instant.

- a) Exprimer $x(t)$ en fonction de v_{0x} et t
- b) Exprimer $z(t)$ en fonction de v_{0z} , g et t
- c) En déduire l'équation cartésienne de la trajectoire z en fonction de x ,
c'est-à-dire une relation entre $x(t)$ et $z(t)$

Entraînement 10.15 — Pauvre gazelle.



Un lion chasse une gazelle. Il court à la vitesse constante de $5,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. La gazelle aperçoit le lion quand il est à 10 m de distance. Elle se met alors en fuite en accélérant à $2,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Pour rattraper la gazelle, le lion se met aussi à accélérer au même instant à $3,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

- a) Combien de temps mettra le lion à rattraper la gazelle?
- b) Quelle distance aura parcourue la gazelle avant de se faire dévorer?

Réponses mélangées

$$\begin{array}{ccccccc}
 a\omega(-\sin(\omega t)\vec{e}_x + \cos(\omega t)\vec{e}_y) + b\vec{e}_z & \textcircled{b} & a\vec{e}_r + 2abt^2\vec{e}_\theta & at & 1 \text{ h } 6 \text{ min } 40 \text{ s} & & \\
 \sqrt{(a\omega)^2 + b^2} & \text{orthoradiale} & \frac{a_0 \times \tau_1^2}{2} & a_0 \times \tau_1 \times \left(\frac{\tau_1}{2} + \tau_2\right) & a(\cos(\theta)\vec{e}_x + \sin(\theta)\vec{e}_y) & & \\
 \frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}(-\sin\theta\vec{e}_x + \cos\theta\vec{e}_y) & r = r_0e^{-\theta} & \frac{1}{T^2} & \cos(\theta)\vec{e}_r - \sin(\theta)\vec{e}_\theta & & & \\
 r(\cos(\theta)\vec{e}_x + \sin(\theta)\vec{e}_y) & \frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta & r\vec{e}_r & r \sin(\theta)(\cos(\varphi)\vec{e}_x + \sin(\varphi)\vec{e}_y) & & & \\
 8,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} & r\vec{e}_r + z\vec{e}_z & 2,9 \text{ m} & \frac{1}{2}at^2 + L & r_0e^{-t/\tau} \left(-\frac{1}{\tau}\vec{e}_r + \omega\vec{e}_\theta\right) & & \\
 -at + v_0 & \vec{e}_x = \cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta & r_0e^{-t/\tau} \left(\left(\frac{1}{\tau^2} - \omega^2\right)\vec{e}_r - \left(2\frac{\omega}{\tau}\right)\vec{e}_\theta\right) & & & & \\
 \cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y & -\frac{1}{2}at^2 + v_0t & v_{0x}t & a\vec{e}_r & a\omega^2 & 67 \text{ cm} & 49,4 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} \\
 r \sin(\theta)(\cos(\varphi)\vec{e}_x + \sin(\varphi)\vec{e}_y) + r \cos(\theta)\vec{e}_z & \vec{e}_y = \sin\theta\vec{e}_r + \cos\theta\vec{e}_\theta & 1,7 \text{ s} & z = -\frac{g}{2v_{0x}^2}x^2 + \frac{v_{0z}}{v_{0x}}x & & & \\
 \text{décélééré} & |r \sin(\theta)| & r\vec{e}_r & -b\vec{e}_y & -a\omega^2(\cos(\omega t)\vec{e}_x + \sin(\omega t)\vec{e}_y) & & \\
 2abt^2\vec{e}_\theta & a\left(\cos(\theta)\vec{e}_x + \left(\sin(\theta) + \frac{b}{a}\right)\vec{e}_y\right) & a\left(2\cos(\theta)\vec{e}_x + \left(2\sin(\theta) + \frac{b}{a}\right)\vec{e}_y\right) & & & & \\
 r(\cos(\theta)\vec{e}_x + \sin(\theta)\vec{e}_y) + z\vec{e}_z & -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t & \frac{L}{T} & a_0 \times \tau_1 & \textcircled{c} & 8 \text{ min } 20 \text{ s} &
 \end{array}$$

Principe fondamental de la dynamique

Prérequis

Projections. Coordonnées polaires. Équations différentielles simples.

Pour commencer

 **Entraînement 11.1 — Une relation algébrique.**



La vitesse v (en régime permanent) d'un mobile vérifie l'équation :

$$m_1(v - v_1) + m_2(v - v_2) = p.$$

Donner l'expression de v (en fonction de m_1, m_2, v_1, v_2 et p)

 **Entraînement 11.2 — Un système de deux équations.**



Un problème de mécanique fait intervenir une force d'intensité F et un angle $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. En projetant la deuxième loi de Newton sur deux axes, on aboutit au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} T + F \sin \alpha = mR\omega^2 \\ F \cos \alpha = mg. \end{cases}$$

a) Déterminer F en fonction des données T, m, R, ω et g

b) Déterminer α en fonction des données T, m, R, ω et g

 **Entraînement 11.3 — Quelques équations différentielles.**



Résoudre les équations différentielles suivantes, sachant que $v = 0$ à $t = t_0$ et que les paramètres a_0 et k sont des constantes.

a) $\frac{dv}{dt} = a_0$

b) $\frac{dv}{dt} = -kv$

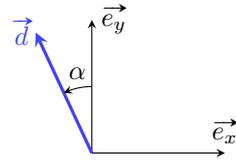
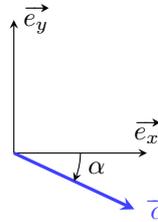
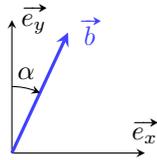
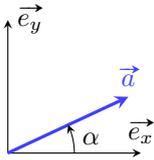
c) $\frac{dv}{dt} = -kv + a_0$

Décomposition de vecteurs

Entraînement 11.4 — Des projections.



On considère les vecteurs unitaires suivants :



Décomposer dans la base (\vec{e}_x, \vec{e}_y) les vecteurs :

a) \vec{a}

c) \vec{c}

b) \vec{b}

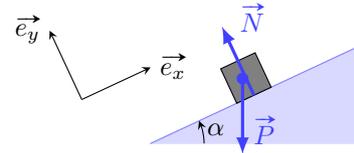
d) \vec{d}

Entraînement 11.5 — Sur un plan incliné.



On considère la situation représentée ci-contre.

Décomposer dans la base (\vec{e}_x, \vec{e}_y) les vecteurs suivants en fonction de α et des normes respectives de \vec{P} et \vec{N} : P et N .



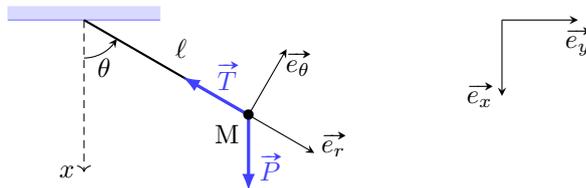
a) \vec{P}

b) \vec{N}

Entraînement 11.6 — Avec un pendule simple (I).



On considère la situation ci-dessous :



Décomposer dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ les vecteurs suivants en fonction de θ et des normes respectives de \vec{P} et \vec{T} : P et T .

a) \vec{P}

c) $\vec{P} + \vec{T}$

b) \vec{T}

 **Entraînement 11.7 — Avec un pendule simple (II).**



On se place dans la même situation que ci-dessus. Décomposer dans la base (\vec{e}_x, \vec{e}_y) :

- a) \vec{P} c) $\vec{P} + \vec{T}$
- b) \vec{T}

Entre accélération et position

Entraînement 11.8 — Du vecteur position au vecteur accélération.



On considère un point M en mouvement dont les coordonnées cartésiennes dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ sont, à chaque instant, $x(t) = \frac{1}{2}a_0t^2 + x_0$, $y(t) = -v_0t$ et $z(t) = z_0$.

Donner l'expression des vecteurs :

- a) position b) vitesse c) accélération ..

Entraînement 11.9 — Du vecteur accélération au vecteur position.



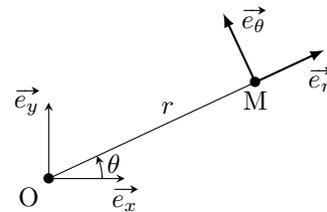
On considère un point M de masse m en chute libre soumis à son poids $\vec{P} = mg\vec{e}_z$. Ce point M a été lancé avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$ et une position initiale $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Donner l'expression des vecteurs :

- a) accélération c) position
- b) vitesse

Autour des coordonnées polaires

Dans ce paragraphe, on considère un point M repéré par la distance r et l'angle θ en coordonnées polaires. La distance r et l'angle θ dépendent du temps t : le point M est mobile.



On représente la situation par le schéma ci-contre.

Entraînement 11.10 — Trois calculs fondamentaux.



Décomposer dans la base (\vec{e}_x, \vec{e}_y) les vecteurs :

- a) \vec{e}_r b) \vec{e}_θ

En déduire (en dérivant) l'expression dans la base (\vec{e}_x, \vec{e}_y) des vecteurs :

- c) $\frac{d\vec{e}_r}{dt}$ d) $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$

En déduire l'expression, dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$, des vecteurs :

- e) $\frac{d\vec{e}_r}{dt}$ f) $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$

Entraînement 11.11 — Vecteur position en coordonnées polaires.



Comment s'exprime le vecteur position \vec{OM} en coordonnées polaires ?

- a) $\vec{OM} = r\vec{e}_r + \theta\vec{e}_\theta$
 b) $\vec{OM} = r\vec{e}_r + \dot{\theta}\vec{e}_\theta$
 c) $\vec{OM} = r\vec{e}_r$
 d) $\vec{OM} = \theta\vec{e}_\theta$

.....

Entraînement 11.12 — Accélération en coordonnées polaires.



Déduire de ce qui précède l'expression, en fonction de \vec{e}_r et de \vec{e}_θ :

- a) du vecteur vitesse \vec{v}
- b) du vecteur accélération \vec{a}

Étude de systèmes en équilibre

Entraînement 11.13 — Tension d'un fil.

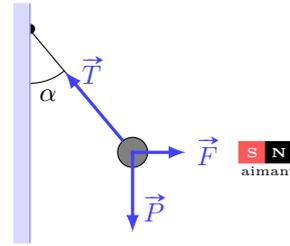


Une bille d'acier de poids $P = \|\vec{P}\| = 2,0\text{ N}$, fixée à l'extrémité d'un fil de longueur $\ell = 50\text{ cm}$, est attirée par un aimant exerçant une force $F = \|\vec{F}\| = 1,0\text{ N}$. À l'équilibre, le fil s'incline d'un angle α et l'on a :

$$\vec{T} + \vec{F} + \vec{P} = \vec{0},$$

où \vec{T} est la tension exercée par le fil.

Calculer les valeurs numériques de :



a) la tension $T = \|\vec{T}\|$ du fil

b) l'angle α (en radians)

Entraînement 11.14 — Masse suspendue.



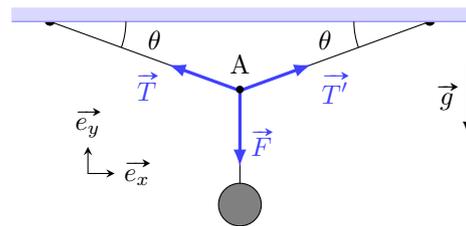
Un objet qui pèse 800 N est suspendu en équilibre à l'aide de deux cordes symétriques qui font un angle $\theta = 20^\circ$ avec la direction horizontale.

Le point A est soumis à trois forces :

$$\vec{T}, \vec{T}' \text{ et } \vec{F},$$

de normes respectives T, T' et F .

On note $\vec{R} = R_x \vec{e}_x + R_y \vec{e}_y$ la résultante des forces.



a) Exprimer la composante horizontale R_x en fonction de T, T' et θ

b) Exprimer la composante verticale R_y en fonction de T, T', F et θ

c) Déterminer la tension T en résolvant l'équation $\vec{R} = \vec{0}$

Mouvements rectilignes

Entraînement 11.15 — Chute avec frottement.



Un corps de masse $m = 2\text{ kg}$ tombe verticalement avec une accélération de $a = 9\text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Lors de sa chute, il subit la force de pesanteur ainsi qu'une force de frottement due à l'air.

On prendra $g = 9,8\text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ pour l'intensité du champ de pesanteur.

Combien vaut l'intensité de la force de frottement ?

Entraînement 11.16 — Contact dans un ascenseur.



Un homme de masse $m = 80 \text{ kg}$ est dans un ascenseur qui monte avec une accélération $a = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. On note \vec{F} la force exercée par l'homme sur le plancher de l'ascenseur.

On prendra $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ pour l'intensité du champ de pesanteur.

Combien vaut l'intensité de \vec{F} ?

Entraînement 11.17 — Calcul d'une action de contact.

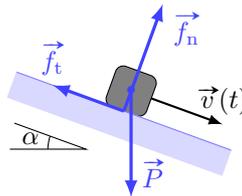


Un bloc de masse m et de poids \vec{P} glisse à une vitesse $v(t)$, variable au cours du temps, sur un support plan qui exerce une action de contact.

Celle-ci se décompose en deux actions :

- une action normale à la surface \vec{f}_n ;
- une action de frottement \vec{f}_t opposée à la vitesse de glissement.

Le plan est incliné d'un angle α , comme figuré ci-dessous :



Déterminer (en fonction d'au moins une des données $P = \|\vec{P}\|$, $v(t)$, m ou α) :

a) l'intensité de l'action normale f_n

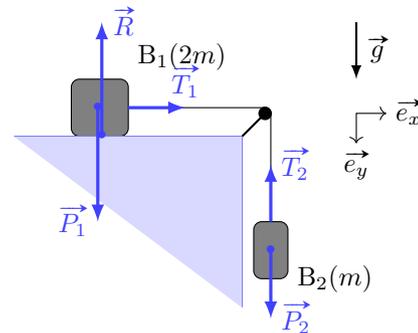
b) l'intensité du frottement f_t

Entraînement 11.18 — Calcul d'une accélération.



Deux blocs B_1 et B_2 de masses respectives $2m$ et m sont reliés par un fil. On passe le fil dans la gorge d'une poulie, puis on maintient le bloc B_1 sur la table alors que l'autre est suspendu dans l'air. On libère le bloc B_1 qui glisse alors sur la table. On note T_1 et T_2 les normes des tensions exercées par le fil sur les blocs, a_1 et a_2 les normes des accélérations respectives des blocs B_1 et B_2 , et g la valeur du champ de pesanteur.

Les frottements sont négligeables.



a) Exprimer a_1 en fonction de m et T_1

b) Exprimer l'accélération a_2 de B_2 en fonction de m , g et T_2

Le fil étant inextensible et sans masse, on a $a_1 = a_2$ et $T_1 = T_2$.

c) En déduire l'accélération en fonction uniquement de g

Réponses mélangées

$$\begin{array}{l}
 \sqrt{(mR\omega^2 - T)^2 + (mg)^2} \quad \arctan\left(\frac{mR\omega^2 - T}{mg}\right) \quad \textcircled{c} \quad \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \\
 -P \sin(\alpha)\vec{e}_x - P \cos(\alpha)\vec{e}_y \quad (P \cos(\theta) - T)\vec{e}_r - P \sin(\theta)\vec{e}_\theta \quad 0 \quad -\dot{\theta} \cos(\theta)\vec{e}_x - \dot{\theta} \sin(\theta)\vec{e}_y \\
 \frac{a_0}{k} [1 - e^{-k(t-t_0)}] \quad \cos(\alpha)\vec{e}_x + \sin(\alpha)\vec{e}_y \quad -T\vec{e}_r \quad -\sin(\theta)\vec{e}_x + \cos(\theta)\vec{e}_y \\
 \cos(\alpha)\vec{e}_x + \sin(\alpha)\vec{e}_y \quad -\sin(\alpha)\vec{e}_x + \cos(\alpha)\vec{e}_y \quad (v_0t + x_0)\vec{e}_x + y_0\vec{e}_y + \frac{1}{2}gt^2\vec{e}_z \\
 P\vec{e}_x \quad (T' - T) \cos \theta \quad -m \frac{dv}{dt} + P \sin \alpha \quad \dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad g - \frac{T_2}{m} \quad g\vec{e}_z \\
 P \cos(\theta)\vec{e}_r - P \sin(\theta)\vec{e}_\theta \quad v_0\vec{e}_x + gt\vec{e}_z \quad 1,17 \text{ kN} \quad 1,6 \text{ N} \quad \frac{g}{3} \quad N\vec{e}_y \quad 0,46 \text{ rad} \\
 (P - T \cos(\theta))\vec{e}_x - T \sin(\theta)\vec{e}_y \quad a_0t\vec{e}_x - v_0\vec{e}_y \quad a_0\vec{e}_x \quad (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta \\
 \frac{T_1}{2m} \quad -T \cos(\theta)\vec{e}_x - T \sin(\theta)\vec{e}_y \quad \left(\frac{1}{2}a_0t^2 + x_0\right)\vec{e}_x - v_0t\vec{e}_y + z_0\vec{e}_z \quad (T' + T) \sin \theta - F \\
 P \cos \alpha \quad 2,2 \text{ N} \quad \frac{p + m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} \quad -\sin(\alpha)\vec{e}_x + \cos(\alpha)\vec{e}_y \quad 864 \text{ N} \\
 \cos(\theta)\vec{e}_x + \sin(\theta)\vec{e}_y \quad a_0(t - t_0) \quad -\dot{\theta}\vec{e}_r \quad -\dot{\theta} \sin(\theta)\vec{e}_x + \dot{\theta} \cos(\theta)\vec{e}_y
 \end{array}$$

Approche énergétique en mécanique

Prérequis

Systèmes de coordonnées. Expression de forces (poids, force de rappel).
Travail d'une force. Théorèmes généraux (dynamique et énergétiques).

Énergies potentielles

Entraînement 12.1 — La juste formule.



On considère un point matériel de masse m plongé dans le champ de pesanteur \vec{g} . On se place dans un repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ tel que $\vec{g} = -g\vec{e}_y$, le point O étant pris comme origine de l'énergie potentielle. Quelle est l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur ?

- (a) mgx (b) $-mgy$ (c) mgz (d) mgz

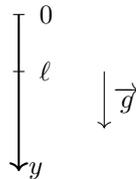


Entraînement 12.2 — Plusieurs expressions de l'énergie potentielle de pesanteur.

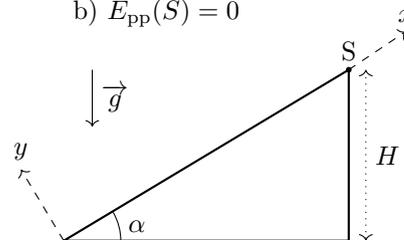


Déterminer la fonction énergie potentielle de pesanteur d'un point matériel de masse m associée aux situations suivantes :

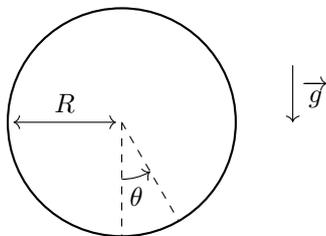
a) $E_{pp}(\ell) = 0$



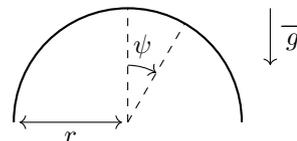
b) $E_{pp}(S) = 0$



c) $E_{pp}(\theta = \pi/2) = 0$



d) $E_{pp}(\psi = 0) = E_0$



a) $E_{pp}(y) = \dots\dots\dots$

c) $E_{pp}(\theta) = \dots\dots\dots$

b) $E_{pp}(x) = \dots\dots\dots$

d) $E_{pp}(\psi) = \dots\dots\dots$

Entraînement 12.3 — La juste formule... le retour.



On considère un point matériel M de masse m astreint à se déplacer selon un axe (Oy) horizontal. Il est attaché à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 . L'autre extrémité du ressort est fixée en O.

Quelle est l'expression de l'énergie potentielle élastique du point M pour que celle-ci soit nulle lorsque l'allongement du ressort est nul ?

- a) $\frac{1}{2}ky^2$
 b) $\frac{1}{2}k(y - \ell_0)^2$
 c) $\frac{1}{2}k(y^2 - \ell_0^2)$
 d) $-\frac{1}{2}k(\ell_0 - y)^2$

.....

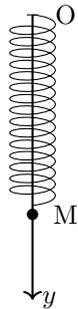


Entraînement 12.4 — Expression de l'énergie potentielle élastique.

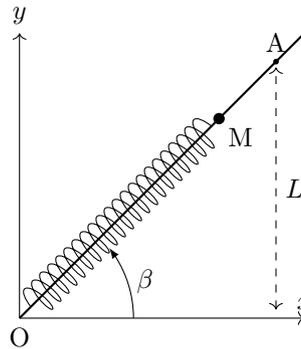


Déterminer la fonction énergie potentielle élastique associée aux situations suivantes, où tous les ressorts sont de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k :

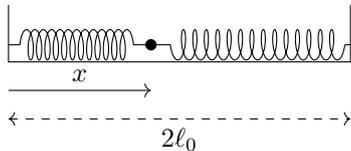
a) $E_{pe}(y = 0) = 0$



b) $E_{pe}(A) = 0$



c) $E_{pe}(x = \ell_0) = E_0$



a) $E_{pe}(y) =$

b) $E_{pe}(x) =$

c) $E_{pe}(x) =$

Travail d'une force

Entraînement 12.5 — Une force de frottement.



On considère le travail $W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$ d'une force de frottement $\vec{F} = -h \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$, où \vec{v} est le vecteur vitesse du point matériel subissant la force et h est une constante.

Déterminer W pour les chemins suivants :

- a) Un segment reliant A(0, 0) et B(ℓ , 0)
- b) Un arc de cercle d'angle α et de rayon R
- c) Un rectangle ABCD de côtés a et b
- d) Un triangle ABC de côtés a, b, c
- e) En comparant les résultats obtenus, peut-on dire que la force est conservative ?
 (a) Oui (b) Non

Théorèmes énergétiques

Entraînement 12.6 — Freinage et variation d'énergie cinétique.



On considère une voiture (assimilée à un point matériel de masse m) se déplaçant le long d'une route rectiligne horizontale et dont la vitesse initiale au début de la phase de freinage vaut $\vec{v} = v_0 \vec{e}_x$.

En freinant, le véhicule est soumis à une force de frottement $\vec{F} = -h \vec{e}_x$.

Quelle est l'expression de la distance d'arrêt d de la voiture ?

(a) $\frac{2mv_0^2}{h}$

(b) $\frac{mv_0^2}{h}$

(c) $\frac{mv_0^2}{2h}$

.....

Entraînement 12.7 — Pendule simple.



Un pendule simple est constitué d'un fil de longueur $\ell = 1,0$ m auquel est accrochée une masse $m = 100$ g.

À $t = 0$, on donne à cette masse une vitesse horizontale $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$, où $v_0 = 2,0$ m · s⁻¹.

On note θ_0 l'angle pour lequel la masse rebrousse chemin.

- a) Exprimer $\cos(\theta_0)$
- b) Calculer θ_0

Entraînement 12.8 — Trampoline simplifié.



Un ressort de longueur à vide $\ell_0 = 30 \text{ cm}$, de raideur $k = 1,0 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, sans masse, est posé sur le sol à la verticale. On lâche d'une hauteur $H = 2,0 \text{ m}$ et sans vitesse initiale une masse ponctuelle $m = 1,0 \text{ kg}$. Après une durée de chute libre sans frottement, la masse atteint le ressort, le comprime jusqu'à ce que celui-ci la propulse vers le haut comme le ferait un trampoline.

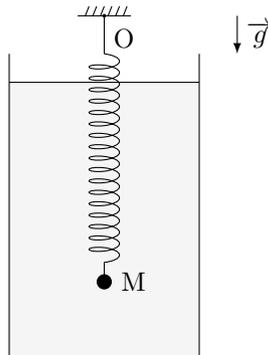
En admettant que la masse quitte le ressort quand $z = \ell_0$, calculer :

- a) La vitesse de la masse lors du contact avec le ressort
- b) L'altitude minimale atteinte par la masse
- c) L'altitude maximale de la masse (en fin de remontée)

Entraînement 12.9 — Oscillateur vertical.



Un point M de masse m est accroché à une paroi horizontale fixe par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 . Son mouvement s'effectue dans un liquide qui produit une force de frottements fluides linéaire $\vec{F} = -\alpha \vec{v}$, où $\alpha > 0$. On néglige la poussée d'Archimède, on ne considère que des mouvements verticaux dans le champ de pesanteur \vec{g} .



- a) On note z la position de M par rapport à O.

Déterminer, par une méthode énergétique, l'équation différentielle vérifiée par z .

.....

- b) On note à présent ζ la position de M par rapport à sa position à l'équilibre.

Déterminer l'équation différentielle vérifiée par ζ .

.....

Mouvements conservatifs et positions d'équilibre

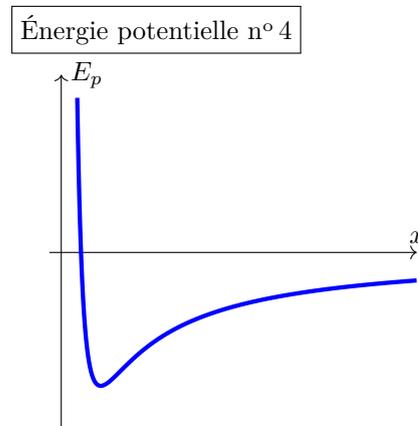
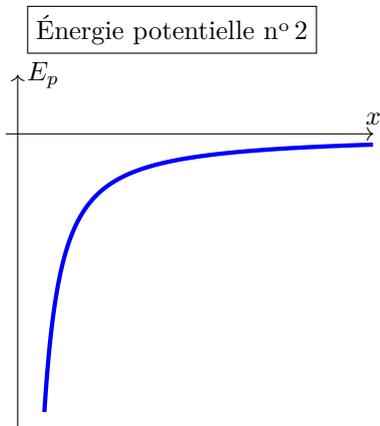
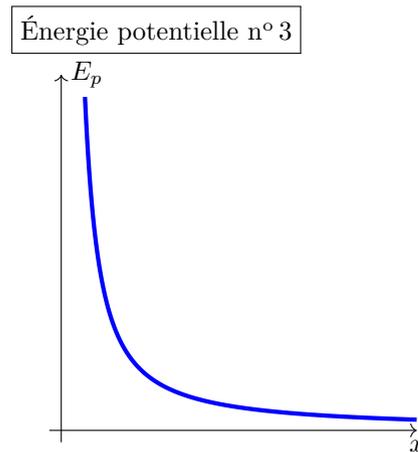
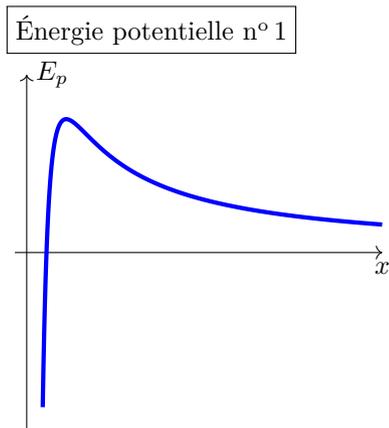
Entraînement 12.10 — Profils d'énergies potentielles.



Les quatre profils ci-après représentent la fonction énergie potentielle suivante :

$$E_p(x) = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2},$$

avec α, β des réels non nuls.



Attribuer à chacune des figures ci-dessus les bons signes pour α et β , en indiquant laquelle des réponses suivantes est la bonne :

(a) $\alpha > 0$ et $\beta > 0$

(c) $\alpha < 0$ et $\beta > 0$

(b) $\alpha > 0$ et $\beta < 0$

(d) $\alpha < 0$ et $\beta < 0$

a) Énergie potentielle n° 1

c) Énergie potentielle n° 3

b) Énergie potentielle n° 2

d) Énergie potentielle n° 4

Entraînement 12.11 — Autour d'une position d'équilibre.



On donne l'expression de potentiels E_p , dans chacun desquels évolue un point matériel de masse m .

Déterminer dans chaque cas la position d'équilibre stable.

a) Pour $E_p(\theta) = mg\ell(1 - \cos(\theta))$:

$\theta_{\text{eq}} = \dots\dots\dots$

b) Pour $E_p(z) = \frac{1}{2}\kappa z^2 + \frac{1}{4}\lambda z^4$ avec $\kappa > 0$ et $\lambda < 0$:

$z_{\text{eq}} = \dots\dots\dots$

c) Pour $E_p(x) = U_0 e^{\beta x^2}$ avec $U_0, \beta > 0$:

$x_{\text{eq}} = \dots\dots\dots$

d) Pour $E_p(\phi) = E_0 \sin^2(\phi - a)$ avec $E_0 > 0$, $\phi \in [0, \pi[$ et $a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$\phi_{\text{eq}} = \dots\dots\dots$

Entraînement 12.12 — État lié ou état de diffusion ?

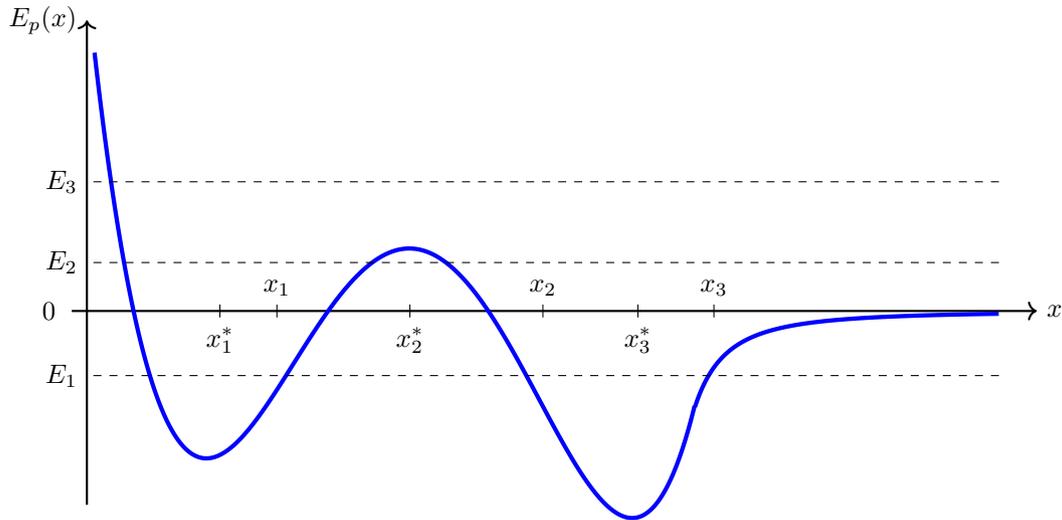


On considère le profil suivant d'énergie potentielle (les abscisses étoilées et l'abscisse x_3 serviront dans l'entraînement suivant).

Pour chaque état suivant, étant donné les valeurs de l'énergie mécanique et de la position initiale d'un point matériel, dire si ce dernier se trouve :

(a) dans un état lié

(b) dans un état de diffusion



a) $E_m = E_1$ et $x(0) = x_1$

d) $E_m = E_2$ et $x(0) = x_2$

b) $E_m = E_1$ et $x(0) = x_2$

e) $E_m = E_3$ et $x(0) = x_1$

c) $E_m = E_2$ et $x(0) = x_1$

f) $E_m = E_3$ et $x(0) = x_2$

Entraînement 12.13 — Analyse d'un profil d'énergie potentielle.



On reprend le profil d'énergie potentielle de l'entraînement précédent.

Pour chacune des positions suivantes, déterminer si elle est stable ou instable, et si le mouvement au voisinage de ces positions est périodique et/ou harmonique, en indiquant laquelle des réponses suivantes est la bonne :

- (a) équilibre stable
- (b) équilibre instable
- (c) mouvement périodique
- (d) mouvement harmonique

Plusieurs bonnes réponses sont possibles.

- | | | | |
|-------------------------------|--|--------------------------------------|--|
| a) Voisinage de x_1^* | | c) Voisinage de x_3^* | |
| b) Voisinage de x_2^* | | d) Région entre x_2 et x_3 | |

Entraînement 12.14 — Vitesse à l'infini.



On considère le profil d'énergie potentielle des deux entraînements précédents.

Un point matériel de masse $m = 2,30$ kg est abandonné avec l'énergie $E_3 = 1,30$ kJ.

Calculer la vitesse du point matériel à l'infini

Réponses mélangées

- (b) (c) (c) (d) $mg(\ell - y)$ 0,11 m a $\frac{1}{2}k(y - \ell_0)^2 - \frac{k\ell_0^2}{2}$
- (a), (c) et (d) 0 $\frac{1}{2}k\left(\frac{x}{\cos(\beta)} - \ell_0\right)^2 - \frac{1}{2}k\left(\frac{L}{\sin(\beta)} - \ell_0\right)^2$ (a) et (c) 0,65 rad = 37°
- 5,8 m · s⁻¹ (a), (c) et (d) $-(a + b + c)h$ 33,6 m/s $mgr(\cos(\psi) - 1) + E_0$
- (b) (a) $-hR\alpha$ (a) $mg(x \sin(\alpha) - H)$ (b) $1 - \frac{v_0^2}{2gl}$ $-h\ell$ 2,0 m
- $-(2a + 2b)h$ $\ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = g + \frac{k\ell_0}{m}$ 0 $-mgR \cos(\theta)$ $E_0 + k(x - \ell_0)^2$
- $\zeta + \frac{\alpha}{m}\dot{\zeta} + \frac{k}{m}\zeta = 0$ 0 (b) (a) (b) (b) (b) (c) (a)

Moment cinétique

Prérequis

Coordonnées polaires. Projections. Produit vectoriel. Moment cinétique. Moment d'inertie. Moment d'une force.

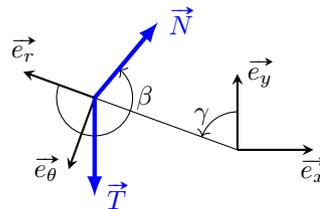
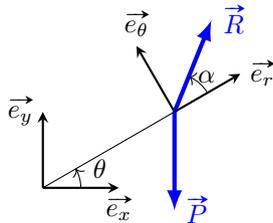
Projections préparatoires



Entraînement 13.1 — Calcul de produits scalaires.



On considère les vecteurs suivants, où \vec{P} et \vec{T} sont verticaux :



Calculer les produits scalaires suivants en fonction des normes ($\|\vec{P}\|$, $\|\vec{T}\|$, etc.) ainsi que des différents angles apparaissant sur les schémas.

- | | | |
|---|--|---|
| a) $\vec{P} \cdot \vec{e}_\theta$.. <input type="text"/> | c) $\vec{R} \cdot \vec{e}_y$.. <input type="text"/> | e) $\vec{N} \cdot \vec{e}_r$.. <input type="text"/> |
| b) $\vec{N} \cdot \vec{e}_y$.. <input type="text"/> | d) $\vec{T} \cdot \vec{e}_r$.. <input type="text"/> | f) $\vec{N} \cdot \vec{e}_\theta$.. <input type="text"/> |



Entraînement 13.2 — Projections dans une base.



En utilisant la formule donnant la décomposition d'un vecteur \vec{v} dans une base orthonormée (\vec{e}_1, \vec{e}_2)

$$\vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{e}_1) \vec{e}_1 + (\vec{v} \cdot \vec{e}_2) \vec{e}_2,$$

décomposer les vecteurs de l'exercice précédent dans chaque base (\vec{e}_x, \vec{e}_y) et $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.

- | | |
|--|--|
| a) \vec{P} dans (\vec{e}_x, \vec{e}_y) . <input type="text"/> | e) \vec{R} dans (\vec{e}_x, \vec{e}_y) . <input type="text"/> |
| b) \vec{P} dans $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$. <input type="text"/> | f) \vec{R} dans $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$. <input type="text"/> |
| c) \vec{T} dans (\vec{e}_x, \vec{e}_y) . <input type="text"/> | g) \vec{N} dans (\vec{e}_x, \vec{e}_y) . <input type="text"/> |
| d) \vec{T} dans $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$. <input type="text"/> | h) \vec{N} dans $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$. <input type="text"/> |

Produit vectoriel



Entraînement 13.3 — Produits vectoriels à partir de décompositions.



En utilisant le schéma du premier exercice et les décompositions du deuxième, donner l'expression des produits vectoriels suivants. Comme d'habitude, on complète la base (\vec{e}_x, \vec{e}_y) par le vecteur \vec{e}_z suivant la « règle de la main droite ».

a) $\vec{P} \wedge \vec{R} \dots$ b) $\vec{T} \wedge \vec{e}_r \dots$ c) $\vec{e}_x \wedge \vec{N} \dots$



Entraînement 13.4 — Produits vectoriels à partir des coordonnées.



On donne les quatre vecteurs suivants de \mathbb{R}^3 définis de manière numérique :

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer les produits vectoriels et produits scalaires suivants :

a) $\vec{A} \wedge \vec{B} \dots$ d) $\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{e}_x) \dots$

b) $(\vec{B} + \vec{A}) \wedge \vec{A} \dots$ e) $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) \dots$

c) $\vec{e}_x \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) \dots$ f) $(\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C} \dots$

Moment cinétique

Entraînement 13.5 — Bataille de moments cinétiques.



Parmi les quatre planètes décrites dans le tableau ci-dessous, laquelle présente le moment cinétique autour du Soleil le plus important ?

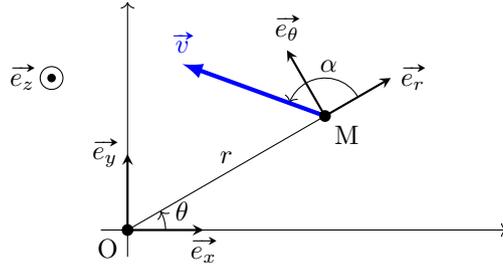
	Masse	Distance au Soleil	Vitesse sur l'orbite
Mercure	$3 \times 10^{26} \text{ g}$	$58 \times 10^9 \text{ m}$	$170 \times 10^3 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$
Vénus	$5 \times 10^{27} \text{ g}$	$1,1 \times 10^{13} \text{ cm}$	$35 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Terre	$6 \times 10^{21} \text{ t}$	$150 \times 10^6 \text{ km}$	$30 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$
Mars	$6 \times 10^{23} \text{ kg}$	$230 \times 10^6 \text{ km}$	$87 \times 10^5 \text{ cm} \cdot \text{h}^{-1}$

.....

Entraînement 13.6 — Un moustique allumé.



On considère un moustique M de masse m dont le vecteur vitesse de norme v fait un angle $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ avec le vecteur \overrightarrow{OM} comme représenté dans le schéma ci-dessous.



Exprimer le moment cinétique du moustique M par rapport à O en fonction de m , r , v et α .

.....

Moments d'inertie

Entraînement 13.7 — Une porte d'entrée.



On considère une porte de masse M , de longueur L , de hauteur h et d'épaisseur e négligeable dont on veut calculer le moment d'inertie par rapport à l'axe vertical passant par O situé dans le coin inférieur gauche de la porte.

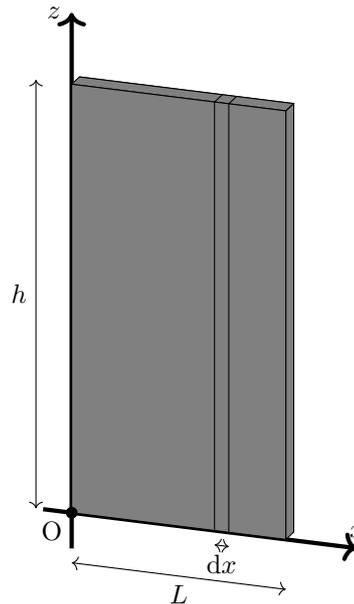
La masse est répartie de manière homogène sur toute la porte, de sorte que chaque petit volume $dV = dx dy dz$ ait pour masse :

$$dm = \rho dV,$$

avec $\rho = \frac{M}{Lhe}$.

Dans cette configuration, le moment d'inertie s'écrit :

$$I_{\Delta} = \iiint_{\text{porte}} x^2 dm = \rho \int_0^L x^2 dx \times \int_0^e dy \times \int_0^h dz.$$



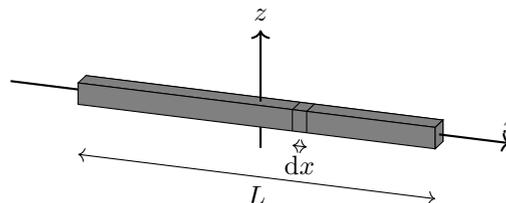
Exprimer I_{Δ} en fonction de M et L

 **Entraînement 13.8 — Un bâton de majorette.**



On considère un bâton de masse M , de longueur L et de section négligeable dont on veut calculer le moment d'inertie par rapport à son centre O .

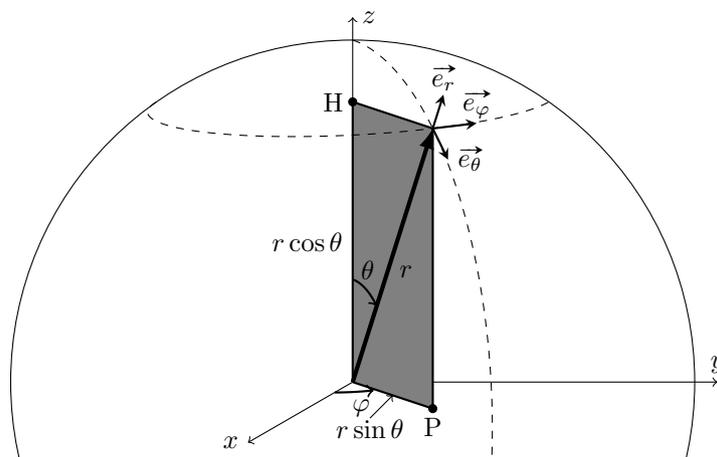
La masse est régulièrement répartie uniquement selon une variable x , de sorte que le bout de bâton de longueur dx situé à une distance x du centre ait pour masse $dm = \frac{M}{L} dx$.



Pour une rotation par rapport à un axe (Oz) orthogonal à l'axe (Ox) du bâton, et passant par son centre, calculer en fonction de M et L l'expression du moment d'inertie. C'est-à-dire, calculer :

$$I_{\Delta} = \int_{\text{bâton}} x^2 dm = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{M}{L} x^2 dx = \dots\dots\dots$$

Entraînement 13.9 — Une boule de bowling.



On considère une boule homogène de masse M et de rayon R .

Un élément de volume dV (valant $dr \times r d\theta \times r \sin \theta d\varphi$ en coordonnées sphériques) correspond à une masse $dm = \rho dV$, avec $\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$.

Ces éléments de masse sont situés à une distance $r \sin \theta$ de l'axe (Oz) de sorte que le moment d'inertie par rapport à cet axe peut s'écrire :

$$I_{\Delta} = \iiint_{\text{sphère}} (r \sin \theta)^2 dm = \rho \int_0^R r^4 dr \times \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta \times \int_0^{2\pi} d\varphi.$$

Exprimer I_{Δ} en fonction de M et R

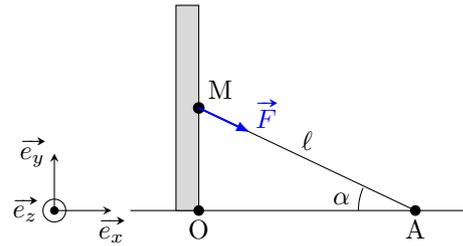
Moment d'une force

Entraînement 13.10 — Fil accroché au mur.



On considère un mur auquel est accroché un filin qu'on tire depuis un point A. Il s'agit de trouver le moment de la force \vec{F} par rapport aux axes (Oz) et (Az) en fonction de F , ℓ et α .

Calculer :



a) $\mathcal{M}_{Oz}(\vec{F})$

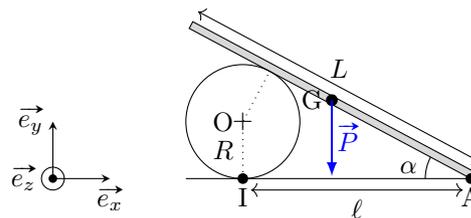
b) $\mathcal{M}_{Az}(\vec{F})$

Entraînement 13.11 — Une planche de cirque.



On considère une planche homogène de masse m appuyée sur un cylindre.

Calculer le moment du poids de cette planche par rapport aux divers points intéressants du système.



a) $\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{P})$

b) $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P})$

c) $\vec{\mathcal{M}}_I(\vec{P})$

Exercice récapitulatif

Entraînement 13.12 — Basculement d'une barre en T.



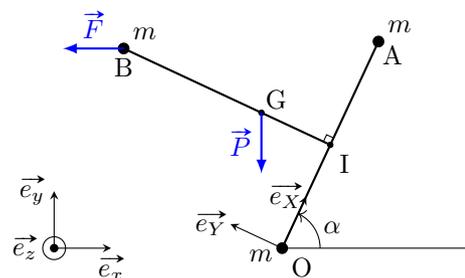
On considère trois masses m réparties aux trois sommets d'un triangle OAB isocèle en B et reliées par des tiges sans masse vérifiant :

$$OA = IB = a.$$

On note I le milieu du segment [OA].

On note G le centre de gravité des trois masses, qui est situé sur le segment [IB] de sorte que $GB = \frac{2}{3}a$.

On notera P et F les normes des deux forces représentées sur le schéma.



a) Écrire le vecteur \vec{OB} dans la base (\vec{e}_X, \vec{e}_Y)

b) Écrire le vecteur \vec{OG} dans la base (\vec{e}_X, \vec{e}_Y)

c) Écrire le vecteur \vec{P} dans la base (\vec{e}_X, \vec{e}_Y)

- d) Écrire le vecteur \vec{F} dans la base (\vec{e}_X, \vec{e}_Y)
- e) Calculer $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$
- f) Calculer $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P})$
- g) En supposant qu'il y ait équilibre entre les deux moments, déterminer l'expression $\tan(\alpha)$ dans ce cas.
.....

Réponses mélangées

$$\frac{a}{2} \vec{e}_X + \frac{a}{3} \vec{e}_Y \quad aF \left(\frac{\sin \alpha}{2} + \cos \alpha \right) \vec{e}_z \quad \begin{pmatrix} -7 \\ 14 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \|\vec{N}\| (-\sin(\beta + \gamma) \vec{e}_x + \cos(\beta + \gamma) \vec{e}_y)$$

la Terre $\frac{a}{2} \vec{e}_X + a \vec{e}_Y \quad -\|\vec{P}\| \cos \theta \quad \|\vec{N}\| (\cos(\beta) \vec{e}_r + \sin(\beta) \vec{e}_\theta)$

$$\vec{T} = \|\vec{T}\| (-\cos(\gamma) \vec{e}_r + \sin(\gamma) \vec{e}_\theta) \quad \|\vec{N}\| \cos(\gamma + \beta) \quad -7 \quad aP \left(-\frac{\cos \alpha}{2} + \frac{\sin \alpha}{3} \right) \vec{e}_z$$

$$\frac{1}{12} M L^2 \quad P(-\sin \alpha \vec{e}_X - \cos \alpha \vec{e}_Y) \quad \frac{1}{3} M L^2 \quad -\|\vec{T}\| \vec{e}_y \quad -mg \left(\ell - \frac{L}{2} \cos \alpha \right) \vec{e}_z$$

$$\frac{mgL}{2} \cos \alpha \vec{e}_z \quad \|\vec{N}\| \cos(\beta) \quad F(-\cos \alpha \vec{e}_X + \sin \alpha \vec{e}_Y) \quad \vec{P} = -\|\vec{P}\| \vec{e}_y \quad \frac{3P - 6F}{3F + 2P}$$

$$\begin{pmatrix} -6 \\ -33 \\ 24 \end{pmatrix} \quad \|\vec{N}\| \sin(\beta) \quad m r v \sin(\alpha) \vec{e}_z \quad \begin{pmatrix} -6 \\ -33 \\ 24 \end{pmatrix} \quad -\|\vec{T}\| \sin(\gamma) \vec{e}_z \quad \begin{pmatrix} 7 \\ -14 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$-lF \sin \alpha \cos \alpha \quad \|\vec{R}\| (\cos(\theta + \alpha) \vec{e}_x + \sin(\theta + \alpha) \vec{e}_y) \quad -7 \quad \|\vec{R}\| \sin(\theta + \alpha)$$

$$-mg \left(\ell - \frac{L}{2} \cos \alpha \right) \vec{e}_z \quad \frac{2}{5} M R^2 \quad 0 \quad \|\vec{P}\| \|\vec{R}\| \cos(\theta + \alpha) \vec{e}_z \quad -\|\vec{T}\| \cos(\gamma)$$

$$\|\vec{N}\| \cos(\gamma + \beta) \vec{e}_z \quad \|\vec{R}\| (\cos(\alpha) \vec{e}_r + \sin(\alpha) \vec{e}_\theta) \quad \|\vec{P}\| (-\sin(\theta) \vec{e}_r - \cos(\theta) \vec{e}_\theta)$$

Champ électrique

Prérequis

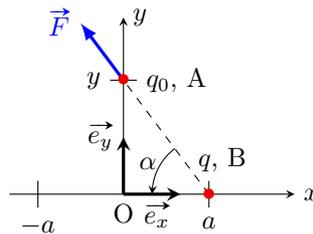
Projections. Coordonnées polaires. Développement limité.
Dérivation et intégration.

Pour commencer

Entraînement 14.1 — Projection d'une force.



Une charge électrique q située en un point $B(a, 0)$ exerce une force \vec{F} sur une autre charge q_0 située au point $A(0, y)$.



a) Exprimer la distance BA en fonction de a et de y .

.....

b) Exprimer $\cos(\alpha)$ en fonction de a et y .

.....

c) Exprimer $\sin(\alpha)$ en fonction de a et y .

.....

d) Décomposer le vecteur \vec{F} dans la base (\vec{e}_x, \vec{e}_y) en fonction de sa norme $\|\vec{F}\|$, a et y .

.....

Entraînement 14.2 — Un combat d'interaction électrique.



On étudie une charge électrique q_0 positive. La valeur de la force F qu'exerce une autre charge q sur q_0 est telle que $F = C \frac{q}{d^2}$ où d est la distance entre les deux charges et où C est une constante.

Laquelle de ces quatre charges attire le plus fortement la charge q_0 ?

(a) $q = 2,00 \text{ C}$ et $d = 4,00 \text{ mm}$

(c) $q = -3,0 \text{ mC}$ et $d = 200 \text{ }\mu\text{m}$

(b) $q = -5,0 \text{ kC}$ et $d = 0,4 \text{ m}$

(d) $q = 100 \text{ C}$ et $d = 20 \text{ cm}$

.....

Étude de charges ponctuelles

Entraînement 14.3 — Force due à deux charges.



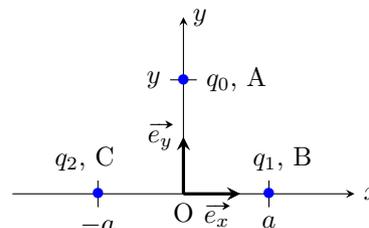
La loi de Coulomb permet d'exprimer la force $\vec{F}_{1/0}$ exercée par une charge q_1 située en un point B sur une charge q_0 située en un point A :

$$\vec{F}_{1/0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q_1}{BA^2} \vec{e}_{BA},$$

avec ϵ_0 la permittivité du vide et \vec{e}_{BA} le vecteur unitaire munissant le segment BA.

On étudie les forces $\vec{F}_{1/0}$ et $\vec{F}_{2/0}$ exercées respectivement par les charges q_1 et q_2 sur la charge q_0 .

Selon les différentes valeurs des charges q_0 , q_1 et q_2 , déterminer si la résultante des forces $\vec{F} = \vec{F}_{1/0} + \vec{F}_{2/0}$ est orientée selon \vec{e}_x , $-\vec{e}_x$, \vec{e}_y ou $-\vec{e}_y$.



- | | | | |
|------------------------------|----------------------|--|----------------------|
| a) $q_0 = q_1 = q_2$ | <input type="text"/> | c) $q_0 = -q_1 = q_2$ | <input type="text"/> |
| b) $-q_0 = -q_1 = q_2$ | <input type="text"/> | d) $-\frac{1}{2}q_0 = q_1 = q_2$ | <input type="text"/> |

Entraînement 14.4 — Charge accélérée.



On considère une particule de charge q et de masse m se déplaçant le long d'un axe (Ox) sous l'action d'un champ de potentiel électrique $V(x)$.

On dispose de trois expressions de $V(x)$ dont une seule est homogène :

(a) $V(x) = V_0 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right)$ (b) $V(x) = V_0 \left(1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right)$ (c) $V(x) = V_0 (a^2 - x^2)$.

La vitesse $v(x)$ de la particule et le potentiel $V(x)$ en un point x sont liés par la relation :

$$\frac{1}{2} m v(x)^2 + qV(x) = C^{te}. \tag{3}$$

En $x = 0$, la vitesse de la particule est nulle.

- | | |
|--|----------------------|
| a) Déterminer la seule expression de $V(x)$ homogène à un potentiel électrique | <input type="text"/> |
| b) En utilisant la relation (3) en $x = 0$, exprimer la constante en fonction de q et V_0 ... | <input type="text"/> |
| c) Exprimer $v(a)$ en fonction de q , m et V_0 | <input type="text"/> |
| d) Exprimer $v\left(\frac{a}{2}\right)$ en fonction de q , m et V_0 | <input type="text"/> |
| e) Exprimer $v\left(\frac{a}{2}\right)$ en fonction de $v(a)$ | <input type="text"/> |

Du potentiel au champ électrique



Entraînement 14.5 — Potentiel électrique dû à deux charges.



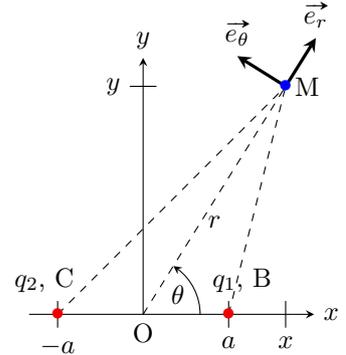
Le potentiel électrique produit en un point M par une charge q_1 située en un point B est :

$$V_1(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{BM}$$

Afin d'obtenir les potentiels $V_1(M)$ et $V_2(M)$ créés par les charges q_1 et q_2 telles que $q = q_1 = -q_2$, ainsi que le potentiel total

$$V(M) = V_1(M) + V_2(M),$$

on cherche à exprimer les distances BM et CM en fonction des coordonnées r et θ du point M et de la distance a illustrées ci-contre.



Exprimer les grandeurs suivantes en fonction des paramètres indiqués.

a) BM en fonction de x, y, a .

On pourra utiliser les coordonnées des points B et M

b) r^2 en fonction de x, y .

On pourra chercher un triangle rectangle adéquat

c) BM en fonction de r, x, a .

On pourra utiliser les réponses des questions a) et b)

d) x en fonction de r, θ

e) BM en fonction de r, a, θ .

On pourra utiliser les réponses des questions c) et d)

f) V_1 en fonction de q, r, a, θ

g) CM en fonction de x, y, a .

On pourra utiliser les coordonnées des points C et M

h) CM en fonction de r, x, a .

On pourra utiliser les réponses des questions b) et g)

i) CM en fonction de r, a, θ .

On pourra utiliser les réponses des questions d) et h)

j) V_2 en fonction de q, r, a, θ

k) V en fonction de q, r, a, θ

 **Entraînement 14.6 — Approximation de potentiels électriques.**



Développer les expressions de potentiels électriques suivantes en calculant leur développement limité au voisinage de 0 à l'ordre indiqué et selon la variable spécifiée.

- a) À l'ordre 1 : $V\left(\frac{a}{r}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \left(1 - \frac{a}{2r}\right)^4$
- b) À l'ordre 1 : $V\left(\frac{a}{r}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a}{r} \cos(\theta)}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a}{r} \cos(\theta)}}\right)$...
- c) À l'ordre 2 : $V(\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qa \cos(\theta)}{r^2}$
- d) À l'ordre 1 : $V\left(\frac{a}{r}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \ln\left(1 + \frac{a}{r}\right)$
- e) À l'ordre 1 : $V\left(\frac{a}{r}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \ln\left(\frac{\sqrt{1 + \frac{4a^2}{r^2}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{4a^2}{r^2}} - 1}\right)$

 **Entraînement 14.7 — Calcul d'un champ électrique.**



En coordonnées polaires, le champ $\vec{E}(M)$ au point M s'exprime en fonction du potentiel $V(M)$ par la formule :

$$\vec{E}(M) = -\frac{\partial V(M)}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V(M)}{\partial \theta} \vec{e}_\theta.$$

On donne :

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C.V}^{-1}.\text{m}^{-1}, \quad q = 6,0 \cdot 10^{-11} \text{ C} \quad \text{et} \quad a = 4,0 \text{ mm}.$$

Dans cet entraînement, on suppose que $V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \sin(2\theta)}{r}$.

- a) Exprimer $\vec{E}(M)$
- b) Exprimer $\vec{E}(M)$ pour $M\left(r = \frac{a}{2}, \theta = \pi\right)$
- c) À l'aide des données, calculer $\|\vec{E}(M)\|$ en V.m^{-1}

 **Entraînement 14.8 — Bis repetita.**



On reprend l'entraînement précédent avec les mêmes données, mais un potentiel électrique différent.

Dans cet entraînement, on suppose que $V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qa \cos(\theta)}{r^2}$.

- a) Exprimer $\vec{E}(M)$
- b) Exprimer $\vec{E}(M)$ pour $M\left(r = a, \theta = \frac{\pi}{2}\right)$
- c) À l'aide des données, calculer $\|\vec{E}(M)\|$ en V.m^{-1}

Du champ au potentiel électrique



Entraînement 14.9 — Champ électrique produit par un condensateur.



Un condensateur produit un champ $\vec{E} = E(x)\vec{e}_x$ entre ses deux armatures positionnées en $x = 0$ et $x = d$. La différence de potentiel entre les armatures est liée au champ de telle manière que :

$$V(0) - V(d) = \int_0^d E(x) dx.$$

On considère que l'armature en $x = d$ est la masse du circuit, son potentiel est donc considéré comme nul.

Exprimer le potentiel $V(0)$ pour les différentes formes de champ $E(x)$.

- a) $E(x) = E_0\left(1 - \frac{x}{d}\right)$
- b) $E(x) = E_0\left(1 - \frac{x}{d}\right)^2$
- c) $E(x) = E_0 \sin\left(\frac{3\pi x}{2d}\right)$
- d) $E(x) = E_0\left(1 - e^{-x/d}\right)$

Distributions continues de charges



Entraînement 14.10 — Charge d'une sphère.



On souhaite déterminer la charge électrique totale Q contenue dans une sphère de rayon R et de densité de charges $\rho(r, \theta, \varphi)$. Pour ce faire, on doit intégrer la densité de charges sur toute la sphère \mathcal{S} en utilisant la formule :

$$Q = \iiint_{\mathcal{S}} \rho(r, \theta, \varphi) d\tau.$$

On peut démontrer que le volume d'intégration élémentaire est $d\tau = r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi$ avec, pour une sphère, $r \in [0, R]$, $\theta \in [0, \pi]$ et $\varphi \in [0, 2\pi]$. Ainsi, on a :

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R \rho(r, \theta, \varphi) r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi.$$

Exprimer la charge électrique totale Q contenue dans la sphère en fonction de son rayon R pour les différentes densités de charges suivantes.

- a) $\rho(r, \theta, \varphi) = 2\rho_0$
- b) $\rho(r, \theta, \varphi) = 2\left(\frac{r}{R}\right)^2 \rho_0$
- c) $\rho(r, \theta, \varphi) = 2\left(\frac{r}{R}\right)^2 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \rho_0$

Entraînement 14.11 — Charge d'un cylindre.



On souhaite déterminer la charge électrique totale Q contenue dans un cylindre de rayon R , de hauteur h et de densité de charges $\rho(r, \theta, z)$. Pour ce faire, on doit intégrer la densité de charges sur tout le cylindre \mathcal{C} .

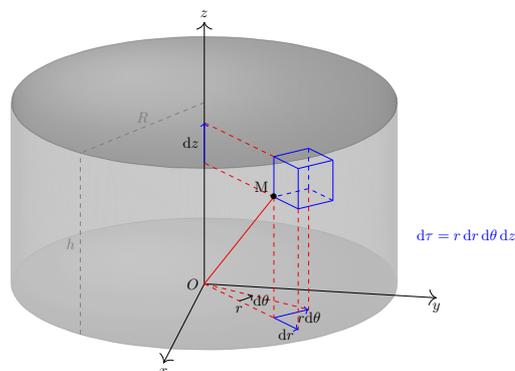
Comme on peut le voir sur la figure ci-contre, le volume d'intégration élémentaire est :

$$d\tau = r \, dr \, d\theta \, dz,$$

avec, pour un cylindre, $r \in [0, R]$, $\theta \in [0, 2\pi]$ et $z \in [0, h]$.

Ainsi, on a :

$$Q = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho(r, \theta, z) r \, dr \, d\theta \, dz.$$



Exprimer la charge électrique totale Q contenue dans le cylindre en fonction de son rayon R et de sa hauteur h pour les différentes densités de charges suivantes.

- a) $\rho(r, \theta, z) = 3$
- b) $\rho(r, \theta, z) = 2\left(\frac{r}{R}\right)^3$
- c) $\rho(r, \theta, z) = 2\left(\frac{r}{R}\right)^3 \left(\frac{z}{h}\right)^2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$

Réponses mélangées

$$\begin{array}{cccccccc} \vec{e}_x & \textcircled{c} & \sqrt{\frac{qV_0}{2m}} & 3,4 \cdot 10^4 \text{ V.m}^{-1} & \sqrt{(x-a)^2 + y^2} & \frac{2}{3\pi} E_0 d & & \\ & & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2ar \cos(\theta) + a^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + 2ar \cos(\theta) + a^2}} \right) & & \sqrt{(x+a)^2 + y^2} & & & \\ & & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qa}{r^3} (2 \cos(\theta) \vec{e}_r + \sin(\theta) \vec{e}_\theta) & \sqrt{r^2 + 2ax + a^2} & x^2 + y^2 & \frac{v(a)}{2} & & \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qa \cos(\theta)}{r^2} & -\frac{8}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^2} \vec{e}_\theta & \vec{e}_y & \frac{8}{15} R^2 h & qV_0 & \textcircled{b} & \sqrt{\frac{2qV_0}{m}} & -\vec{e}_x \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} (\sin(2\theta) \vec{e}_r - 2 \cos(2\theta) \vec{e}_\theta) & & \sqrt{r^2 - 2ax + a^2} & \sqrt{r^2 + 2ar \cos(\theta) + a^2} & & \frac{8}{5} \pi R^3 \rho_0 & & \\ \frac{1}{2} E_0 d & -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{r^2 + 2ar \cos(\theta) + a^2}} & \sqrt{r^2 - 2ar \cos(\theta) + a^2} & \frac{16}{5} R^3 \rho_0 & & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^2} \vec{e}_\theta & & \\ \frac{8}{3} \pi R^3 \rho_0 & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qa}{r^2} & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qa}{r^2} \left(1 - \frac{1}{2} \theta^2\right) & \frac{4}{5} \pi R^2 h & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{r^2 - 2ar \cos(\theta) + a^2}} & & & \\ \frac{\|\vec{F}\|}{\sqrt{a^2 + y^2}} (-a\vec{e}_x + y\vec{e}_y) & 3\pi R^2 h & \frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2 + y^2}} & E_0 d e^{-1} & & & \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \ln\left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right) & -\vec{e}_y & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \left(1 - \frac{2a}{r}\right) & r \cos(\theta) & 2,7 \cdot 10^5 \text{ V.m}^{-1} & \frac{1}{3} E_0 d & & \end{array}$$

Particule dans un champ électromagnétique

Prérequis

Principe fondamental de la dynamique. Théorème de l'énergie cinétique, de l'énergie mécanique. Puissance, travail. Énergie potentielle. Force de Lorentz.

Constantes utiles

→ charge élémentaire : $e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$

→ célérité de la lumière dans le vide : $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Préliminaires

Entraînement 15.1 — Électron-volt.



Le produit d'une charge électrique par une tension est une énergie.

En multipliant la charge élémentaire $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ par une tension de 1 V , on obtient une unité adaptée à la physique des particules, l'électron-volt, noté eV. On a $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$.

- a) Que vaut 1 J en eV?
- b) L'énergie d'un photon rouge est de $2,48 \times 10^{-19} \text{ J}$.
Convertir en eV
- c) L'énergie d'un photon violet est de $3,1 \text{ eV}$.
Convertir en J
- d) Quel photon a la plus grande énergie?
Le rouge ou le violet?

Entraînement 15.2 — Qui est le plus massique ?



On considère les trois particules suivantes :

- le proton, dont la masse vaut $m_{\text{proton}} = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$;
- le kaon, qui est une particule dont l'énergie de masse vaut $m_{\text{kaon}} \times c^2 = 7,90 \times 10^{-4} \text{ erg}$;
- le tau, qui est une particule de masse $m_{\text{tau}} = 1777 \text{ MeV}/c^2$.

On donne $1 \text{ erg} = 1 \text{ g} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ et $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$.

Laquelle de ces particules est la plus massique?

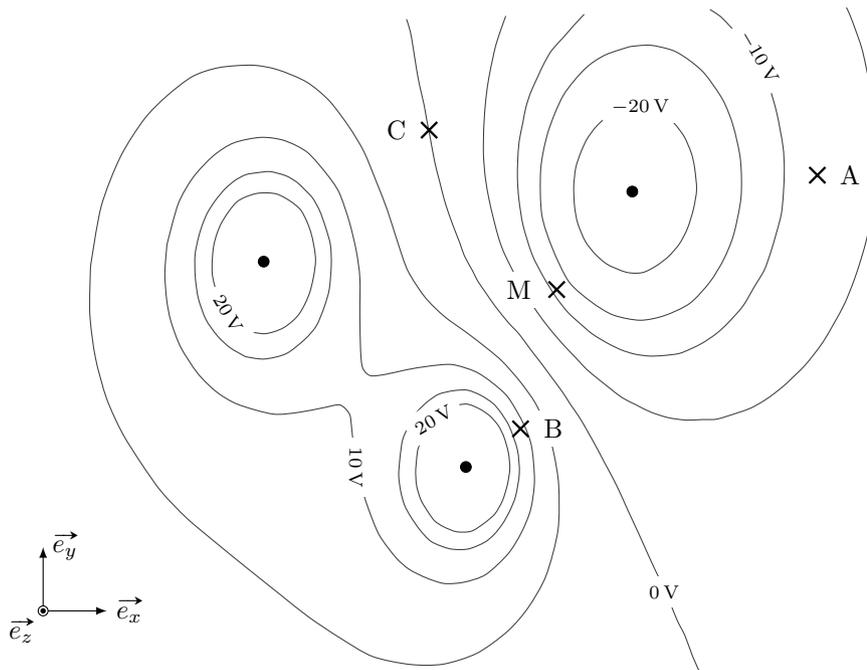
Champ électrique et potentiel scalaire

Entraînement 15.3 — Carte d'équipotentielles.



On représente ci-dessous la carte des équipotentiels créées par trois charges électriques.

Une équipotentielle correspond à l'ensemble des lieux où le potentiel électrostatique scalaire V prend une même valeur numérique.



a) En norme, le champ électrique est le plus intense :

- (a) en A
 (b) en B
 (c) en C

.....

b) En M, le champ électrique est orienté :

- (a) vers en haut à droite
 (c) vers en bas à droite
 (b) vers en haut à gauche
 (d) vers en bas à gauche

.....

Entraînement 15.4 — Potentiel scalaire.



Le potentiel électrostatique scalaire V vérifie :

$$dV(M) = -\vec{E}(M) \cdot d\vec{\ell},$$

où $d\vec{\ell}$ est le vecteur déplacement élémentaire.

On rappelle les expressions du vecteur $d\vec{\ell}$ en coordonnées cartésiennes et en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned} d\vec{\ell} &= dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z \\ &= dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z. \end{aligned}$$

En déterminant dV , puis en intégrant, exprimer le potentiel $V(M)$ pour les champs \vec{E} suivants :

- | | | | |
|---|----------------------|---|----------------------|
| a) $\vec{E}(M) = E\vec{e}_x$ | <input type="text"/> | c) $\vec{E}(M) = \frac{\beta}{r}\vec{e}_r$ | <input type="text"/> |
| b) $\vec{E}(M) = \frac{\alpha}{r^2}\vec{e}_r$ | <input type="text"/> | d) $\vec{E}(M) = \gamma(y\vec{e}_x + x\vec{e}_y)$ | <input type="text"/> |

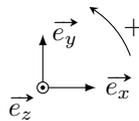
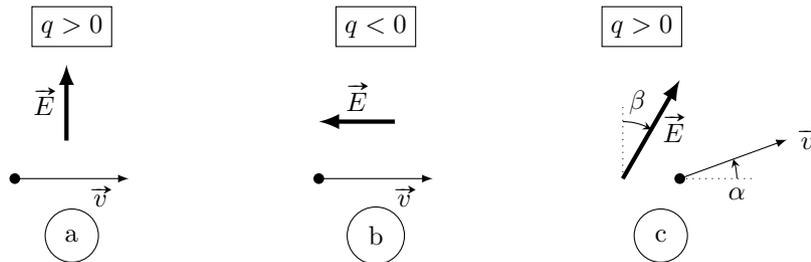
Force de Lorentz

On rappelle l'expression de la force de Lorentz : $\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$.

Entraînement 15.5 — Composante électrique de la force de Lorentz.

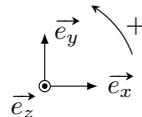
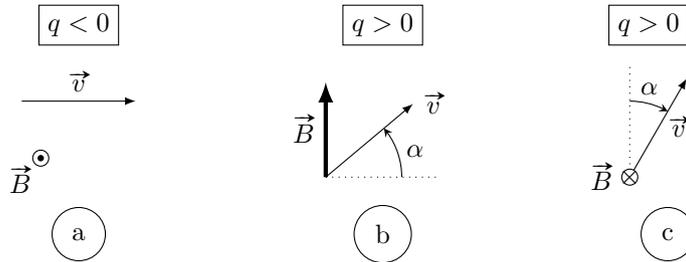


Dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, exprimer (en fonction de q , de E et éventuellement de α et β) la composante électrique de la force de Lorentz, définie par $\vec{F}_{L,\text{électrique}} = q\vec{E}$.



- | | |
|--|----------------------|
| a) $\vec{F}_{L,\text{électrique}}$ | <input type="text"/> |
| b) $\vec{F}_{L,\text{électrique}}$ | <input type="text"/> |
| c) $\vec{F}_{L,\text{électrique}}$ | <input type="text"/> |

Entraînement 15.6 — Composante magnétique de la force de Lorentz.



Dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, exprimer (en fonction de q , de v , de B , et éventuellement de α) la composante magnétique de la force de Lorentz, définie par $\vec{F}_{L,\text{magnétique}} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$.

a) $\vec{F}_{L,\text{magnétique}}$ c) $\vec{F}_{L,\text{magnétique}}$

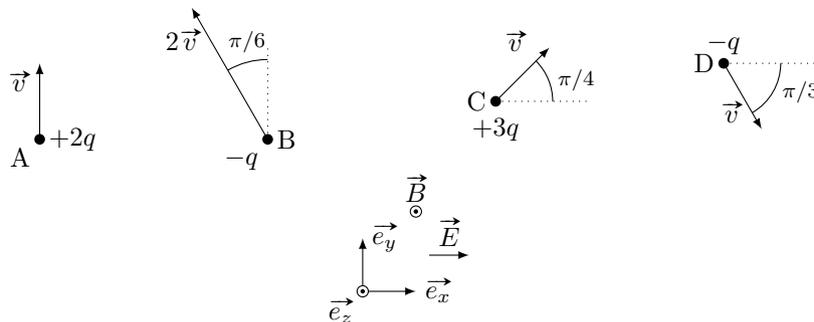
b) $\vec{F}_{L,\text{magnétique}}$

Entraînement 15.7 — Puissance de la force de Lorentz.



On se place dans une base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, et on considère :

- un champ électrique constant dans tout l'espace : $\vec{E} = E\vec{e}_x$;
- un champ magnétique constant dans tout l'espace : $\vec{B} = B\vec{e}_z$.



On rappelle que la puissance d'une force \vec{F} appliquée à une particule de vitesse \vec{v} est $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$.

Donner l'expression de la puissance des forces subies par chacune des particules A, B, C et D.

a) \mathcal{P}_A c) \mathcal{P}_C

b) \mathcal{P}_B d) \mathcal{P}_D

Mouvement dans un champ électrique

Entraînement 15.8 — Champ perpendiculaire à la vitesse initiale.

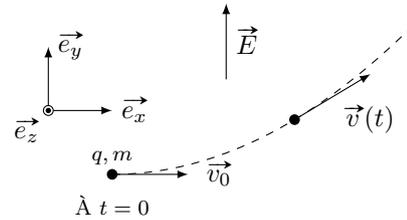


On étudie le mouvement d'une particule de charge $q > 0$ et de masse m dans une zone où règne un champ électrique $\vec{E} = E\vec{e}_y$.

À l'instant initial, la vitesse est orthogonale au champ électrique : $\vec{v}(t=0) = v_0\vec{e}_x$.

L'étude du mouvement permet d'établir l'expression de la vitesse en fonction du temps :

$$\vec{v}(t) = v_0\vec{e}_x + \frac{qE}{m}t\vec{e}_y.$$



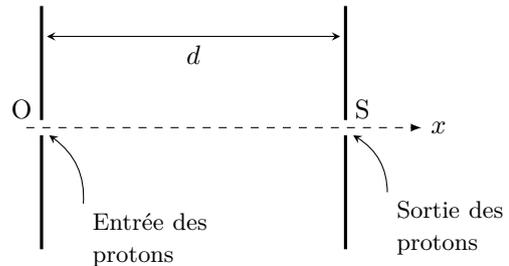
- a) À quel instant t_0 la particule double sa vitesse (par rapport à la vitesse initiale)?
- b) À quel instant t_1 l'énergie cinétique de la particule a quadruplé?
- c) Quelle est la valeur de l'angle $\alpha = (\vec{e}_x, \vec{v})$ à l'instant t_1 ?

Entraînement 15.9 — Champ colinéaire à la vitesse initiale.



Un proton de masse $m_p = 1,67 \times 10^{-27}$ kg entre en O, avec une vitesse initiale négligeable, dans un condensateur plan.

Une tension U est appliquée entre les deux armatures séparées d'une distance $d = 5,0$ cm. Le champ électrique \vec{E} entre les plaques est supposé uniforme et orienté dans le sens des x croissants. Sa norme est $E = \frac{U}{d}$.



La variation d'énergie cinétique entre l'entrée O et la sortie S vérifie :

$$\mathcal{E}_c(S) - \mathcal{E}_c(O) = qU.$$

Le champ électrique de claquage de l'air vaut $E_{\max} = 3 \times 10^7 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$.

- a) Quelle est la tension maximale U_{\max} qui peut être appliquée aux bornes du condensateur sans qu'il n'y ait de claquage?

b) L'énergie cinétique du proton en sortie du condensateur est alors égale à :

- (a) 6 keV (b) 1,5 MeV (c) 0,24 pJ (d) 9,6 mJ

(plusieurs réponses sont possibles)

.....

En associant l'un après l'autre de tels condensateurs plans, on peut augmenter l'énergie cinétique des protons : l'énergie cinétique $\mathcal{E}_{c,n}$ à la sortie du condensateur n vérifie la relation :

$$\mathcal{E}_{c,n} - \mathcal{E}_{c,n-1} = qU.$$

c) La suite $(\mathcal{E}_{c,n})_n$ est une suite :

- (a) arithmétique (b) géométrique (c) arithmético-géométrique

.....

d) En déduire l'expression de $\mathcal{E}_{c,n}$ en fonction de n , q et U

On souhaite atteindre une vitesse $v = \frac{c}{10}$, où c est la célérité de la lumière dans le vide par une mise en série de condensateurs.

e) Quel est le nombre de condensateurs plans nécessaires pour atteindre une telle vitesse avec une tension

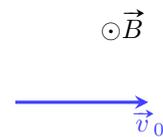
$U = 1 \text{ MV}$ aux bornes de chaque condensateur ?

Particule dans un champ magnétique

Entraînement 15.10 — Étude d'une trajectoire.



On considère une particule de masse m et de charge $q < 0$ placée dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{e}_z$. On note $\vec{v}(t)$ le vecteur vitesse et \vec{v}_0 sa valeur initiale.



On représente la situation par le schéma ci-contre :

a) Exprimer l'accélération \vec{a} en fonction de q , m , \vec{v} et \vec{B} .

On pourra négliger le poids de la particule

On admet que le mouvement est circulaire de rayon R et de centre C.

b) Exprimer la vitesse dans le repère de coordonnées polaires d'origine C

c) En déduire l'expression de la force de Lorentz en coordonnées polaires

d) Exprimer l'accélération en coordonnées polaires

e) Reprendre le PFD pour exprimer le rayon R

f) Calculer la période T du mouvement circulaire

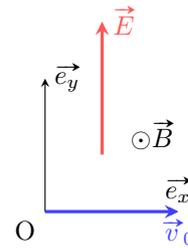
Particule dans un champ (\vec{E}, \vec{B})

Entraînement 15.11 — Mouvement uniforme.



Un électron de masse m et de charge $q < 0$ adopte un mouvement rectiligne uniforme de vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ dans une zone où règnent un champ électrique $\vec{E} = E \vec{e}_y$ et un champ magnétique $\vec{B} = B \vec{e}_z$.

On représente la situation par le schéma ci-contre :



- a) Exprimer la force de Lorentz \vec{F}_L dans la base cartésienne
- b) À quelle condition l'électron adopte-t-il un mouvement rectiligne uniforme?

Réponses mélangées

$qvB \cos(\alpha) \vec{e}_z$	1,55 eV	$\frac{q}{m} \vec{v} \wedge \vec{B}$	$v_0 = \frac{E}{B}$	$-Ex + C$	(a)			
$-\frac{qEv}{2}$	$q(E - v_0B) \vec{e}_y$	$ qE \vec{e}_x$	$\sqrt{3} \frac{mv_0}{qE}$	(b)	$R\ddot{\theta} \vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2 \vec{e}_r$			
$qE \vec{e}_y$	nqU	5	violet	qEv	0	$\frac{\pi}{3}$	(b) et (c)	$R\dot{\theta} \vec{e}_\theta$
$qRB\dot{\theta} \vec{e}_r$	$-\gamma xy + C$	$5,0 \times 10^{-19} \text{ J}$	$\sqrt{3} \frac{mv_0}{qE}$	$\frac{\alpha}{r} + C$	$2\pi \frac{m}{ q B}$			
$-qvB(\cos(\alpha) \vec{e}_x + \sin(\alpha) \vec{e}_y)$	$\frac{mv_0}{ q B}$	$6,3 \times 10^{18} \text{ eV}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2} qEv$	(a)				
$ q vB \vec{e}_y$	$-\beta \ln(r) + C$	1,5 MV	$qE(\cos(\beta) \vec{e}_y - \sin(\beta) \vec{e}_x)$	tau				

Champ magnétique

Prérequis

La force magnétique agissant sur une charge q , de vitesse \vec{v} , placée dans un champ magnétique \vec{B} vaut $\vec{F}_{\text{mag}} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$, où \vec{B} est un vecteur (ou pseudo-vecteur) axial dont l'unité est le tesla (noté T).

Constantes utiles

→ perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}$

Pour commencer

Entraînement 16.1 — À propos de la force magnétique.



La force magnétique agissant sur une charge q animée d'une vitesse \vec{v} est $\vec{F}_{\text{mag}} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$.

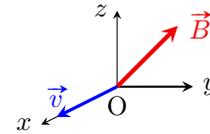
- a) A-t-on toujours $\vec{F}_{\text{mag}} \perp \vec{v}$? b) A-t-on toujours $\vec{F}_{\text{mag}} \perp \vec{B}$?



Entraînement 16.2 — Force magnétique connaissant le champ magnétique.



Un électron de charge $-e$ possède un vecteur vitesse $\vec{v} = v_0\vec{e}_x$ lorsqu'il est en O. Il subit alors l'action d'un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B_0(\vec{e}_y + \vec{e}_z)$.



La force exercée sur l'électron en O vaut :

- (a) $\vec{F} = ev_0B_0(-\vec{e}_y - \vec{e}_z)$ (c) $\vec{F} = ev_0B_0(-\vec{e}_y + \vec{e}_z)$
 (b) $\vec{F} = ev_0B_0(\vec{e}_y + \vec{e}_z)$ (d) $\vec{F} = ev_0B_0(\vec{e}_y - \vec{e}_z)$

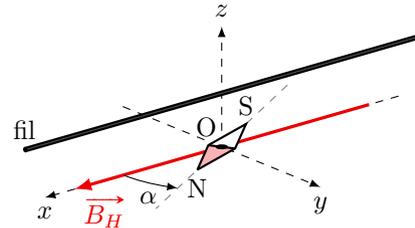
Entraînement 16.3 — Équilibre d'une boussole.



Une aiguille aimantée de centre O est libre de tourner sans frottements autour d'un axe vertical (Oz). Elle s'oriente à l'équilibre suivant $\vec{B}_H = B_H\vec{e}_x$.

Un fil conducteur de grande longueur devant la taille de l'aiguille est placé à la distance $d = 2 \text{ cm}$ au-dessus de O, parallèlement à l'axe (Ox). Le champ magnétique créé en O par le fil vaut :

$$\vec{B}_{\text{fil}}(\text{O}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \vec{e}_y.$$



Lorsqu'un courant d'intensité $I = 1,2 \text{ A}$ circule dans ce fil dans le sens des x croissants, la boussole retrouve une position d'équilibre en tournant d'un angle $\alpha = 30^\circ$ comme indiqué sur la figure.

- a) Exprimer B_H en fonction de μ_0 , I , d et α

- b) Donner la valeur numérique de B_H

Calculs de flux magnétiques

Le flux Φ du champ magnétique à travers une surface S reposant sur un contour orienté et fermé s'écrit :

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S},$$

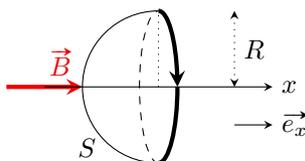
où le vecteur $d\vec{S}$ est orienté par la règle de Maxwell.

On sait par ailleurs que \vec{B} est un champ vectoriel à flux conservatif : le flux de \vec{B} sortant de toute surface fermée est nul.

Entraînement 16.4 — Flux d'un champ uniforme à travers une demi-sphère.



On considère la surface suivante, une demi-sphère de rayon R et d'axe (Ox) :



Combien vaut le flux du champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{e}_x$ à travers cette surface ?

(a) $\phi = 0$

(b) $\phi = 2B\pi R^2$

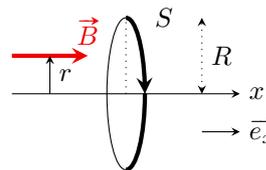
(c) $\phi = B\pi R^2$

Entraînement 16.5 — Flux d'un champ non uniforme à travers un disque.



On considère un champ magnétique \vec{B} défini par :

$$\vec{B}(M) = B_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \vec{e}_x,$$



où M est repéré à l'aide des coordonnées cylindriques r, θ et x .

Ainsi, r est la distance du point à l'axe (Ox) .

On souhaite calculer le flux ϕ de ce champ à travers le disque de rayon R et d'axe (Ox) orienté comme indiqué sur la figure. Il est défini par :

$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S},$$

où $d\vec{S} = dS \vec{e}_x$ avec dS élément de surface du disque en un point M quelconque du disque.

On rappelle que l'expression de dS en coordonnées cylindriques est :

$$dS = r \cdot d\theta \cdot dr.$$

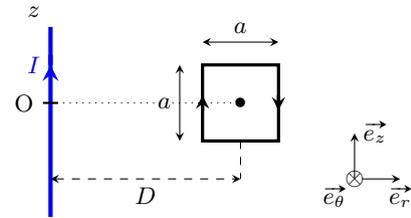
Exprimer ϕ en fonction de R et B_0

Entraînement 16.6 — Flux à travers un cadre du champ créé par un fil.



Considérons un fil rectiligne infiniment long suivant l'axe (Oz) , parcouru par un courant d'intensité I circulant dans le sens des z croissants. Le champ magnétique créé par ce fil, en un point M à la distance r de l'axe (Oz) , est :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta.$$



Nous souhaitons calculer le flux ϕ de ce champ à travers le cadre carré de côté a orienté comme indiqué sur la figure. Il est défini par :

$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S},$$

où $d\vec{S} = dS \vec{e}_\theta$ avec $dS = dr \cdot dz$ élément de surface du cadre en un point M quelconque du cadre.

- a) Exprimer ϕ en fonction de a , D , μ_0 et I
- b) Donner un équivalent de ϕ si $a \ll D$
- c) Que vaut ϕ si le cadre est situé dans un plan perpendiculaire à (Oz) ?

Superposition de champs



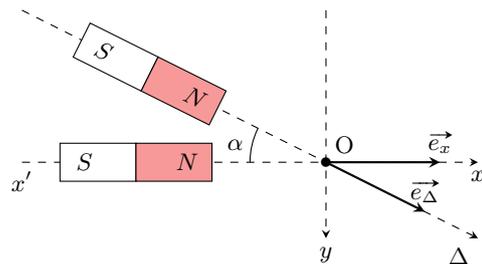
Entraînement 16.7 — Champ de deux aimants droits.



On approche le pôle Nord d'un aimant droit d'axe Δ du pôle Nord d'un aimant droit identique d'axe $(x'x)$.

On donne les champs créés par les aimants en O :

$$\vec{B}_1 = B_0 \vec{e}_x \text{ et } \vec{B}_2 = B_0 \vec{e}_\Delta \text{ avec } B_0 = 20 \text{ mT.}$$



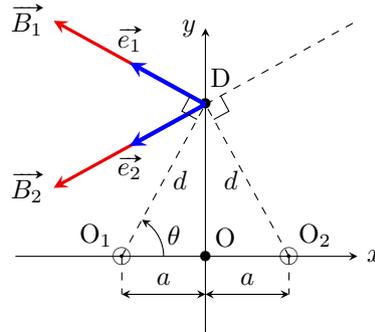
Le champ magnétique résultant de la superposition de \vec{B}_1 et \vec{B}_2 en O sera noté $\vec{B}(O)$.

- a) Exprimer $\vec{B}(O)$ dans la base (\vec{e}_x, \vec{e}_y) , en fonction de B_0 et α
- b) Exprimer la norme $B(O)$ de $\vec{B}(O)$, en fonction de B_0 et $\cos(\alpha)$
- c) Calculer $B(O)$ pour $\alpha = 60^\circ$

Entraînement 16.8 — Champ magnétique créé par deux fils.



Deux fils colinéaires à l'axe (Oz) et parcourus par un courant d'intensité I coupent le plan (xOy) respectivement en O_1 et O_2 , comme représenté ci-dessous :



Ces fils passant par O_1 et par O_2 créent, au point $D(0, y)$, respectivement, les champs \vec{B}_1 et \vec{B}_2 vérifiant

$$\vec{B}_1 = B_0 \vec{e}_1 \quad \text{et} \quad \vec{B}_2 = B_0 \vec{e}_2.$$

On donne $B_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$, où d est la distance commune de D aux points O_1 et O_2 .

Le vecteur \vec{e}_1 est un vecteur unitaire orthogonal à la droite (O_1D) ; de même pour \vec{e}_2 .

Le champ magnétique résultant de la superposition de \vec{B}_1 et \vec{B}_2 en D sera noté \vec{B}_{tot} .

- a) Exprimer d en fonction de a et θ
- b) Exprimer \vec{e}_1 dans la base (\vec{e}_x, \vec{e}_y)
- c) Exprimer \vec{e}_2 dans la base (\vec{e}_x, \vec{e}_y)
- d) Exprimer \vec{B}_{tot} dans la base (\vec{e}_x, \vec{e}_y) en fonction de B_0 et θ

Le champ \vec{B}_{tot} peut se mettre sous la forme suivante :

$$\vec{B}_{\text{tot}} = \frac{\mu_0 I}{\pi} f(y) \vec{e}_x.$$

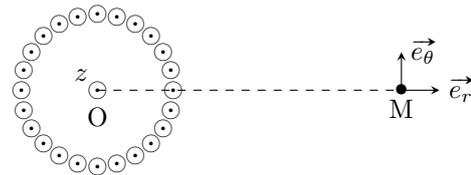
- e) Expliciter la fonction $f(y)$ en fonction de a et y
- f) Donner les valeurs de y pour lesquelles $|f(y)|$ est maximale

Champs magnétiques créés par des courants

Entraînement 16.9 — N fils sur un cylindre.



On considère N fils rectilignes ($N \gg 1$) infiniment longs, uniformément répartis sur un cylindre de centre O , de rayon a et d'axe (Oz) . Ces fils sont parcourus par le même courant circulant dans le même sens.



a) Pour la distribution des courants, le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan :

- (a) de symétrie (b) d'antisymétrie (c) ni de symétrie, ni d'antisymétrie

.....

b) Le champ magnétique en M est alors :

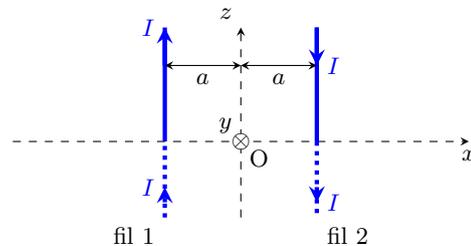
- (a) dirigé selon \vec{e}_r (b) dirigé selon \vec{e}_θ (c) dirigé selon \vec{e}_z

.....

Entraînement 16.10 — Champ créé par deux fils parallèles.



On considère deux fils conducteurs infinis parallèles à l'axe (Oz) , à égale distance a de (Oz) et parcourus par des courants de même intensité I circulant en sens inverse.



a) Lequel de ces trois plans est plan de symétrie pour la distribution des courants ?

- (a) le plan (xOy) (b) le plan (yOz) (c) le plan (xOz)

.....

b) L'analyse des symétries permet de dire que, en un point A de l'axe (Ox) , le champ $\vec{B}(A)$ est :

- (a) parallèle à (Ox) (b) parallèle à (Oy) (c) parallèle à (Oz)

.....

c) L'analyse des symétries permet de dire que, en un point D de l'axe (Oy) , le champ $\vec{B}(D)$ est :

- (a) parallèle à (Ox) (b) parallèle à (Oy) (c) parallèle à (Oz)

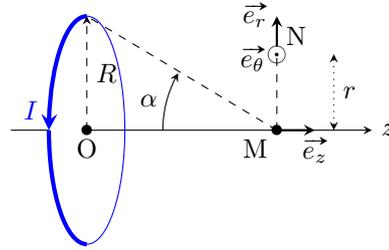
.....

Entraînement 16.11 — Champ créé par une spire circulaire.



On considère une spire circulaire de centre O, d'axe (Oz) et de rayon R, parcourue par un courant d'intensité $I > 0$ constante circulant dans le sens indiqué sur la figure.

On cherche la direction du champ \vec{B} créé par la spire en un point M de l'axe (Oz), puis en N à la distance r de M.



a) En un point M de l'axe (Oz), le champ créé par la spire est :

- (a) colinéaire à \vec{e}_r (b) colinéaire à \vec{e}_θ (c) colinéaire à \vec{e}_z

.....

b) L'analyse des symétries permet de dire que, en N, le champ $\vec{B}(N)$ est contenu dans le plan :

- (a) (M, \vec{e}_r , \vec{e}_θ) (b) (M, \vec{e}_θ , \vec{e}_z) (c) (M, \vec{e}_r , \vec{e}_z)

.....

 **Entraînement 16.12 — Champ créé sur l'axe par une spire circulaire.**



On reprend la spire circulaire de l'entraînement précédent.

Le champ magnétique créé par cette spire en M(0, 0, z) s'écrit :

$$\vec{B}_{\text{axe}}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3(\alpha) \vec{e}_z,$$

où α est l'angle orienté dans le sens horaire sous lequel M voit le rayon de la spire.

Le vecteur $\vec{B}_{\text{axe}}(M)$ peut également s'écrire en fonction de z. Il prendra alors la forme suivante :

$$\vec{B}_{\text{axe}}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} f(z) \vec{e}_z.$$

a) Exprimer $\sin(\alpha)$ en fonction de z et de R

b) Exprimer f(z) en fonction de z et de R

On note B_1 l'intensité du champ $\vec{B}_{\text{axe}}(M)$ quand $z = R$.

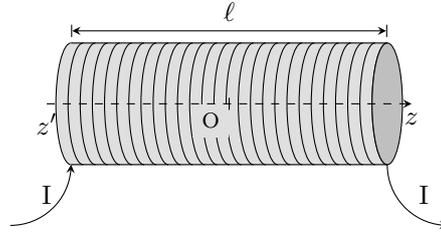
c) Exprimer B_1 en fonction de μ_0 , I et R

d) Pour quelle valeur de $z > 0$ a-t-on $\|\vec{B}_{\text{axe}}(M)\| = \frac{B_1}{2}$?

Entraînement 16.13 — Champ créé par un solénoïde.



On considère un solénoïde de longueur ℓ comportant n spires par unité de longueur. Les spires sont traversées par un courant d'intensité I .



Les extrémités du solénoïde sont en $z = \pm \frac{\ell}{2}$ et on note O son centre.

a) Tout plan qui contient l'axe (Oz) est un plan d'antisymétrie (pour la distribution des courants du solénoïde) à condition de :

- (a) négliger l'hélicité de l'enroulement
- (b) supposer que $R \ll \ell$
- (c) supposer que $\ell \rightarrow \infty$

b) En supposant la condition précédente vérifiée, l'analyse des symétries permet de dire que, en tout point M de son axe, le champ $\vec{B}(M)$ créé par le solénoïde est :

- (a) parallèle à \vec{e}_r
- (b) parallèle à \vec{e}_θ
- (c) parallèle à \vec{e}_z

Entraînement 16.14 — Expression du champ sur l'axe créé par un solénoïde.

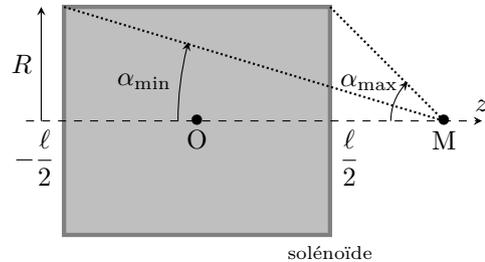


Le champ magnétique créé par un solénoïde de longueur ℓ et de rayon R en un point M de son axe (Oz) s'écrit :

$$\vec{B}(M) = B(M)\vec{e}_z,$$

avec

$$B(M) = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos(\alpha_{\min}) - \cos(\alpha_{\max})),$$



où α_{\min} et α_{\max} sont les angles sous lesquels les extrémités du solénoïde sont vues depuis M de coordonnées $(0, 0, z)$.

On rappelle que I est l'intensité du courant qui traverse chaque spire et n le nombre de spires par unité de longueur. L'origine O de l'axe (Oz) se trouve au milieu du solénoïde.

a) Exprimer $B(M)$ en fonction de μ_0, n, I, R, ℓ et z

b) Que vaut $B(O)$ pour ℓ quelconque?

c) Que vaut le rapport $\frac{B\left(\pm \frac{\ell}{2}\right)}{B(O)}$?

d) Vers quelle valeur tend $B(O)$ si $\frac{\ell}{R} \rightarrow +\infty$?

Champs solutions d'une équation différentielle

Entraînement 16.15 — Champ magnétique d'une plaquette supraconductrice.

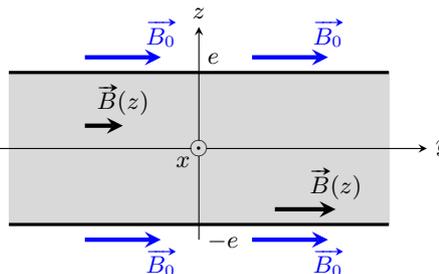


En tout point M d'une plaque supraconductrice d'épaisseur $2e$, le champ magnétique est de la forme :

$$\vec{B}(M) = B(z)\vec{e}_y.$$

$B(z)$ est une **fonction paire** vérifiant l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 B(z)}{dz^2} - \frac{B(z)}{\delta^2} = 0,$$



où δ est homogène à une longueur.

Le champ magnétique extérieur \vec{B}_0 permet d'écrire $B(-e) = B(e) = B_0$ par continuité du champ.

La fonction cosinus hyperbolique ($\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$) pourra être utilisée.

- a) Déterminer $B(z)$ en fonction de B_0, δ, e et z
- b) Calculer $\frac{B(0)}{B_0}$ pour $e = \delta/10$
- c) Calculer $\frac{B(0)}{B_0}$ pour $e = 10\delta$

Entraînement 16.16 — Évolution temporelle d'un champ uniforme.



On considère un champ magnétique uniforme et dépendant du temps $B(t)\vec{e}_z$ et on suppose que la fonction $B(t)$ vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 B(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dB(t)}{dt} + \omega_0^2 (B(t) - B_0) = 0, \quad (*)$$

où ω_0, Q et B_0 sont des constantes. On suppose que $Q > 1/2$.

- a) Quelle est l'équation caractéristique associée à (*) ? ...
- b) Combien vaut son discriminant Δ ?
- c) Quel est le signe de Δ ?
- d) Donner une solution particulière de (*)
- e) Résoudre l'équation différentielle (*)

Les conditions initiales du problème sont : $B(0) = 0$ et $B'(0) = 0$.

- f) Déterminer complètement $B(t)$

Une analyse dimensionnelle

Entraînement 16.17 — Le magnéton de Bohr.



Le magnéton de Bohr μ_B , qui est homogène à un moment magnétique, s'exprime en fonction de e (charge élémentaire), m_e (masse de l'électron) et h (constante de Planck) suivant la relation :

$$\mu_B = \frac{1}{4\pi} e^\alpha \cdot m_e^\beta \cdot h^\gamma.$$

On cherche à évaluer α , β et γ par une analyse dimensionnelle. Pour cela, on utilise les deux données suivantes :

- le système international d'unités impose que le moment magnétique s'exprime en $A \cdot m^2$;
- l'énergie d'un photon est proportionnelle à sa fréquence ν : $E = h\nu$.

Donner la valeur de (α, β, γ)

Réponses mélangées

<p>(b) $\frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}$</p> <p>$-2B_0 \sin(\theta) \vec{e}_x$</p> <p>(c) $\frac{\mu_0 I}{4\sqrt{2} R}$</p> <p>$-\sin(\theta) \vec{e}_x - \cos(\theta) \vec{e}_y$</p> <p>(c) $34,6 \text{ mT}$</p> <p>(a) $\frac{\mu_0 n I}{2} \left(\frac{z + \frac{\ell}{2}}{\sqrt{R^2 + (z + \frac{\ell}{2})^2}} - \frac{z - \frac{\ell}{2}}{\sqrt{R^2 + (z - \frac{\ell}{2})^2}} \right)$</p> <p>$-\sin(\theta) \vec{e}_x + \cos(\theta) \vec{e}_y$ oui</p> <p>$B_0 \sqrt{2(1 + \cos(\alpha))}$ (c) oui</p> <p>$\left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 (1 - 4Q^2)$</p> <p>$r^2 + \frac{\omega_0 r}{Q} + \omega_0^2 = 0$</p>	<p>(1, -1, 1)</p> <p>(b) $B_0(1 + \cos(\alpha)) \vec{e}_x + B_0 \sin(\alpha) \vec{e}_y$</p> <p>(c) $R\sqrt{2^{5/3} - 1}$</p> <p>nul</p> <p>$B_0 + e^{-\frac{\omega_0}{2Q} t} \left(\lambda \cos\left(\frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1} \cdot t\right) + \mu \sin\left(\frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1} \cdot t\right) \right)$</p> <p>(a) $\frac{\pi}{2} B_0 R^2$</p> <p>$\frac{a}{\cos(\theta)}$</p> <p>$B_0 \left(1 - e^{-\frac{\omega_0}{2Q} t} \left(\cos\left(\frac{\omega_0}{Q} \sqrt{4Q^2 - 1} \cdot t\right) + \frac{1}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \sin\left(\frac{\omega_0}{Q} \sqrt{4Q^2 - 1} \cdot t\right) \right) \right)$</p>	<p>(c) $\Delta < 0$ 20,8 μT</p> <p>(b) $B_0(1 + \cos(\alpha)) \vec{e}_x + B_0 \sin(\alpha) \vec{e}_y$</p> <p>(c) $R\sqrt{2^{5/3} - 1}$</p> <p>$\phi \approx \frac{\mu I a^2}{2\pi D}$ $\frac{B(0)}{B_0} \approx 1$</p> <p>$-\frac{y}{a^2 + y^2}$</p> <p>(c) $\mu_0 n I$ $\frac{B(0)}{B_0} \approx 9 \times 10^{-5}$</p> <p>(b) (d) $\frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln\left(\frac{D + a/2}{D - a/2}\right)$</p> <p>$B_0 \frac{\cosh\left(\frac{z}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{e}{\delta}\right)}$</p>	<p>(c) $\frac{1}{2} \frac{\sqrt{4R^2 + \ell^2}}{\sqrt{R^2 + \ell^2}}$</p>
---	---	--	--

Induction

Prérequis

Flux magnétique. Loi de Lenz. Force de Laplace.

Autour du flux d'un champ magnétique

 **Entraînement 17.1 — Flux propre d'un solénoïde.**

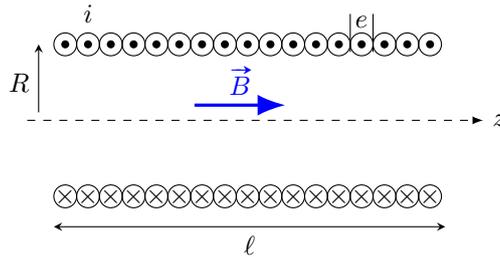


On forme une bobine en enroulant du fil de cuivre d'épaisseur e sur un cylindre de rayon R et de longueur ℓ en une seule couche de N spires jointives.

Le champ magnétique créé par un solénoïde infini est :

$$\vec{B} = \mu_0 n i \vec{e}_z,$$

où μ_0 est la perméabilité du vide, i le courant parcourant et $n = \frac{N}{\ell}$ le nombre de spires par unité de longueur.



Le flux propre dans cette bobine est $\phi_{\text{tot}} = NBS$ où S est la surface d'une spire.

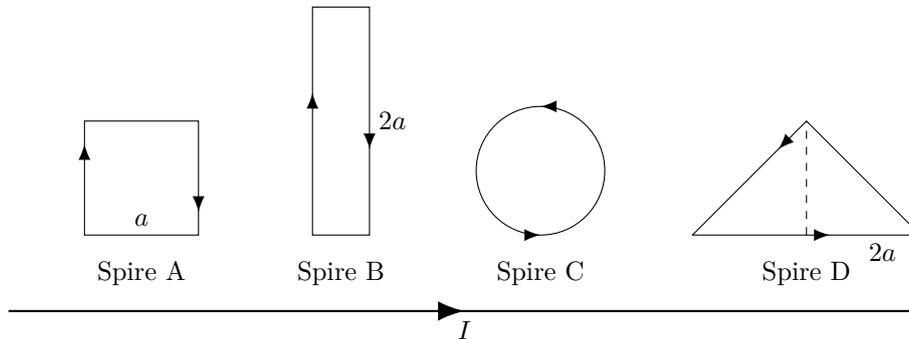
Par combien est multiplié le flux propre à travers la bobine lorsque l'on double :

- a) l'intensité du courant
- b) la longueur du solénoïde (fil de même épaisseur)
- c) l'épaisseur du fil (la longueur de fil restant la même)
- d) le rayon de la bobine (la longueur de fil restant la même)

Entraînement 17.2 — Flux dans des circuits orientés.



Des boucles de différentes formes mais toutes de même surface $S = a^2$ sont placées proches d'un fil infini parcouru par un courant I . On peut montrer que le champ produit par un fil infini est de la forme $\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$ dans le repère cylindrique (avec Oz confondu avec le fil).



a) Quels flux sont négatifs ?

- (a) ϕ_A
 (b) ϕ_B
 (c) ϕ_C
 (d) ϕ_D
 (e) Aucun

b) A-t-on $|\phi_A| > |\phi_B|$?

- (a) Oui
 (b) Non

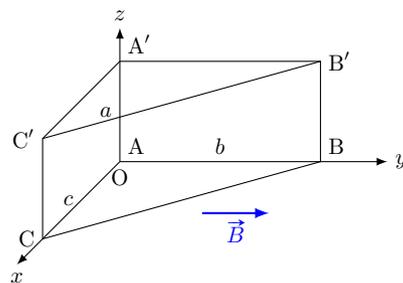
c) A-t-on $|\phi_C| > |\phi_D|$?

- (a) Oui
 (b) Non

Entraînement 17.3 — Flux dans des polyèdres (I).



Soit le polyèdre ci-dessous placé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{e}_y$. Déterminer les expressions des flux magnétiques sortant à travers les différentes surfaces de ce polyèdre.



$AA' = BB' = CC' = a$

$AB = A'B' = b$

$AC = A'C' = c$

a) $\phi(\vec{B})$ pour ABC =

d) $\phi(\vec{B})$ pour A'ACC' =

b) $\phi(\vec{B})$ pour A'C'B' =

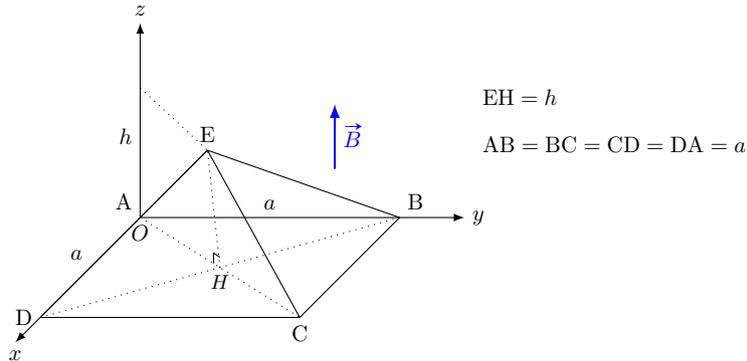
e) $\phi(\vec{B})$ pour CBB'C' =

c) $\phi(\vec{B})$ pour AA'B'B =

Entraînement 17.4 — Flux dans des polyèdres (II).



Soit le polyèdre ci-dessous placé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Déterminer les expressions des flux magnétiques sortant à travers les différentes surfaces de ce polyèdre.

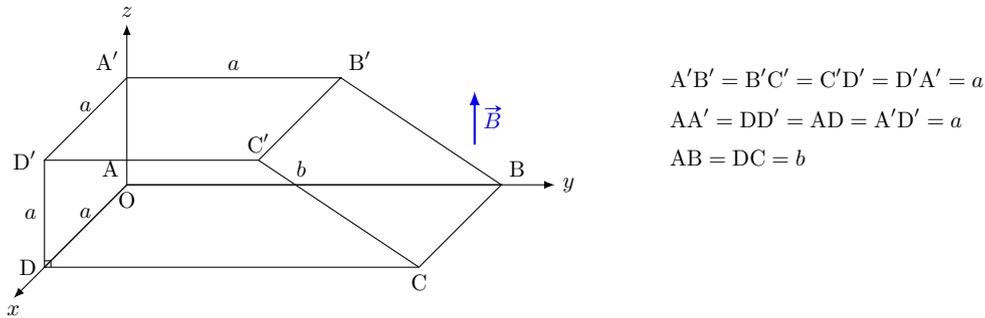


- | | |
|---|-------------------------------------|
| a) $\phi(\vec{B})$ pour ABCD = | d) $\phi(\vec{B})$ pour DCE = |
| b) $\phi(\vec{B})_{\text{tot}} =$ | e) $\phi(\vec{B})$ pour CBE = |
| c) $\phi(\vec{B})$ pour ADE = | f) $\phi(\vec{B})$ pour BAE = |

Entraînement 17.5 — Flux dans des polyèdres (III).



Soit le polyèdre ci-dessous placé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Déterminer les expressions des flux magnétiques sortant à travers les différentes surfaces de ce polyèdre.



- | | |
|--|--|
| a) $\phi(\vec{B})$ pour ABCD = | d) $\phi(\vec{B})$ pour ADD'A' = |
| b) $\phi(\vec{B})$ pour BAA'B' = | e) $\phi(\vec{B})$ pour A'D'C'B' = |
| c) $\phi(\vec{B})$ pour CC'D'D = | f) $\phi(\vec{B})$ pour CBB'C' = |

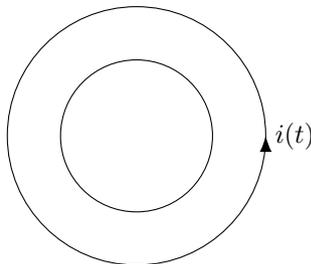
Loi de Lenz-Faraday

Entraînement 17.6 — Boucles imbriquées.



Deux boucles circulaires se trouvent dans le même plan.

Si le courant $i(t)$ dans la boucle externe est dans le sens trigonométrique et augmente avec le temps, que vaut le courant induit dans la boucle interne ?



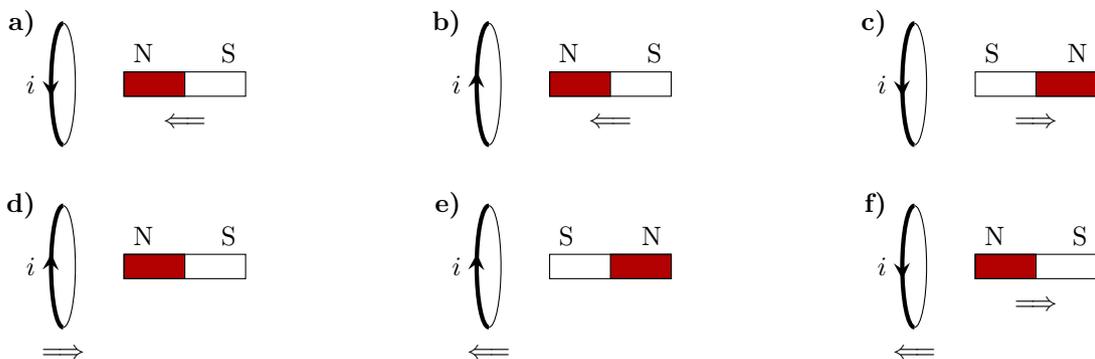
- (a) Il n'y a pas de courant induit.
- (b) Le courant induit est dans le sens des aiguilles d'une montre.
- (c) Le courant induit est antihoraire.
- (d) La direction du courant induit dépend des dimensions des boucles.

.....

Entraînement 17.7 — Signe du courant induit (I).



Dans chacun des circuits ci-dessous, la spire circulaire et/ou l'aimant sont déplacés dans le sens indiqué par la double flèche. Le courant apparaissant dans la spire pendant le déplacement est noté i .



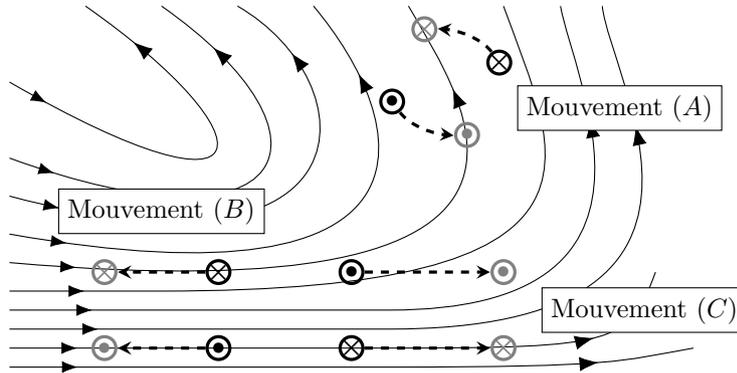
Pour chacune des situations schématisées ci-dessus, dire si on a $i > 0$ ou si on a $i < 0$.

a)	<input style="width: 80px; height: 30px;" type="text"/>	c)	<input style="width: 80px; height: 30px;" type="text"/>	e)	<input style="width: 80px; height: 30px;" type="text"/>
b)	<input style="width: 80px; height: 30px;" type="text"/>	d)	<input style="width: 80px; height: 30px;" type="text"/>	f)	<input style="width: 80px; height: 30px;" type="text"/>

Entraînement 17.8 — Signe du courant induit (II).



Des spires circulaires, orientées, perpendiculaires au plan de la figure, nommées (A), (B) et (C), sont placées dans une zone de l'espace où règne un champ magnétique (voir figure ci-dessous). Pour chacune d'elles, on veut prévoir par des considérations physiques le signe du courant i lorsque les spires sont déplacées (les déplacements sont indiqués par les flèches pointillées).



Pour chaque mouvement considéré, établir si « le flux diminue », si « le flux augmente » ou si « le flux ne varie pas ».

- a) mouvement (A)
- b) mouvement (B)
- c) mouvement (C)

Pour chaque mouvement considéré, en déduire si $i > 0$, si $i < 0$ ou si $i = 0$.

- d) (A) e) (B) f) (C)



Entraînement 17.9 — Calcul de f.é.m. avec champ magnétique variable.



On plonge une spire de surface $S(t)$ dans une zone où règne un champ magnétique $B(t)$. Déterminer la force électromotrice $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ induite pour les flux suivants :

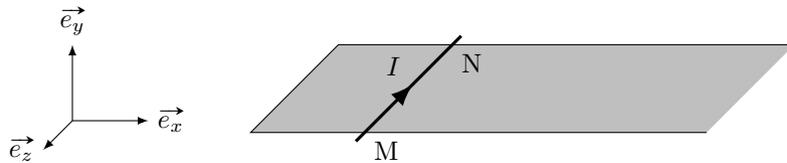
- a) $\Phi_1 = B_0 S_0 \cos(\omega t + \varphi)$
- b) $\Phi_2 = B_0 S_0 \times \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) \exp^{-\frac{t}{\tau}}$
- c) $\Phi_3 = B_0(1 - \cos(2\omega t))S_0 \sin^2(\omega t)$
- d) $\Phi_4 = B_0 \cos(\omega t)S_0 \sin(3\omega t)$

Force de Laplace

Entraînement 17.10 — Rails de Laplace.



Une tige métallique de longueur $MN = d$ et de masse m est parcourue par un courant d'intensité constante I et est lancée avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$. À la position $x = 0$, la tige entre dans une zone où règne un champ magnétique uniforme $\vec{B} = -B \vec{e}_y$. On néglige les frottements et tout phénomène d'induction.



Exprimer :

- a) La force de Laplace \vec{F} qui s'exerce sur la tige en fonction de B , d et I
- b) La norme $v(t)$ de la vitesse en fonction du temps
- c) La distance d'arrêt D depuis la position initiale en fonction de v_0 , B , I , m et d ..

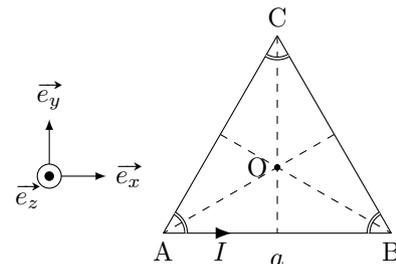
Entraînement 17.11 — Résultante des forces de Laplace.



On considère un cadre triangulaire parcouru par un courant d'intensité I . Les trois côtés du cadre ont la même longueur notée a . On plonge ce cadre dans un champ magnétique extérieur orienté suivant la direction \vec{e}_z : $\vec{B} = B \vec{e}_z$.

On rappelle qu'un élément de longueur $d\ell$, parcouru par un courant d'intensité I placé dans un champ magnétique extérieur \vec{B} , est soumis à la force élémentaire, appelée *force de Laplace* :

$$d\vec{f} = I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}.$$



Exprimer les forces de Laplace sur chaque côté de ce cadre :

- a) $\vec{F}_{L,AB} = \dots$
- b) $\vec{F}_{L,BC} = \dots$
- c) $\vec{F}_{L,CA} = \dots$

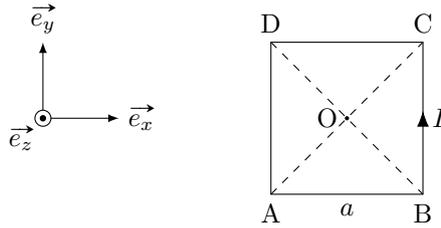
Que vaut la résultante de ces forces ?

- d) $\vec{F}_{L,tot} = \dots$

Entraînement 17.12 — Couple des forces de Laplace.



On considère un cadre carré parcouru par un courant d'intensité I . On plonge ce cadre dans un champ magnétique extérieur orienté suivant la direction \vec{e}_y : $\vec{B} = B\vec{e}_y$.



Exprimer les forces de Laplace sur chaque côté de ce cadre :

a) $\vec{F}_{L,AB} = \dots\dots\dots$

b) $\vec{F}_{L,BC} = \dots\dots\dots$

c) $\vec{F}_{L,CD} = \dots\dots\dots$

d) $\vec{F}_{L,DA} = \dots\dots\dots$

Que vaut la résultante de ces forces ?

e) $\vec{F}_{L,tot} = \dots\dots\dots$

Calculer le moment des forces de Laplace par rapport au point O.

f) $\vec{M}_O(\vec{F}_{L,tot}) = \dots\dots\dots$

On rappelle qu'un dipôle magnétique peut se caractériser par son moment magnétique $\vec{m} = I\vec{S}$. En présence d'un champ magnétique extérieur, le dipôle magnétique subit un couple $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$.

Exprimer \vec{m} et $\vec{\Gamma}$.

g) $\vec{m} = \dots\dots\dots$

h) $\vec{\Gamma} = \dots\dots\dots$

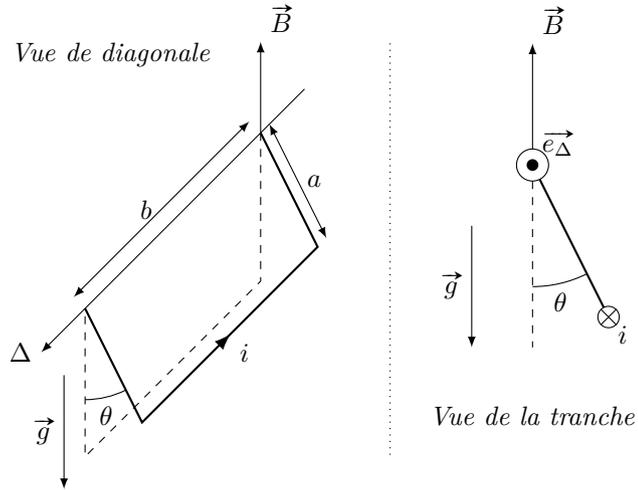
Entraînement 17.13 — Équilibre d'un cadre.



Un cadre conducteur, de forme rectangulaire, de longueur b et de largeur a , peut tourner sans frottement autour de l'axe Δ .

La masse totale du cadre est m .

Un dispositif, non représenté sur la figure, impose une intensité du courant i constante dans le cadre.



Exprimer :

- a) le moment magnétique \vec{m} en fonction de a , b et i
- b) le couple magnétique Γ_{Δ} projeté sur l'axe Δ en fonction de a , b , i , B et θ
- c) le moment du poids par rapport à l'axe Δ en fonction de a , m , g , et θ
- d) la position d'équilibre θ_{eq} en fonction de B , m , g , b et i

Réponses mélangées

$-Ia^2 B \vec{e}_x$	0	$-Bac$	$B_0 S_0 \omega \sin(\omega t + \varphi)$	Le flux ne varie pas	$\arctan\left(\frac{2ibB}{mg}\right)$
(b) $IaB \vec{e}_z$	$-IaB \vec{e}_z$	0	$IaB\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_x + \frac{1}{2}\vec{e}_y\right)$	$-\frac{a}{2}mg \sin \theta$	$i < 0$
$Ia^2 \vec{e}_z$	$iab \vec{e}_\theta$	0	$\times 2$	$i > 0$	Oui $i > 0$ $i = 0$ $\frac{Ba^2}{4}$ $i > 0$
$\frac{Ba^2}{4}$	$\times 2$	$IaB\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_x + \frac{1}{2}\vec{e}_y\right)$	$\vec{0}$	0	$\vec{0}$ $-Ba^2$ $Ba(b-a)$
$-IaB \vec{e}_y$	$i < 0$	Le flux diminue	Non	(a) et (b)	0 $\times 1/2$ $i < 0$
$\frac{Ba^2}{4}$	$-IBd \vec{e}_x$	$B_0 S_0 \frac{t}{\tau^2} e^{-t/\tau}$	$-Bab$	$\vec{0}$	$iabB \cos \theta$ $i > 0$ $\frac{Ba^2}{4}$
$-Ia^2 B \vec{e}_x$	Ba^2	Bac	0	$i < 0$	Le flux diminue $\vec{0}$ $\frac{mv_0^2}{2IBd}$
$-\frac{IBd}{m}t + v_0$	$-B_0 S_0 \omega [2 \cos(4\omega t) + \cos(2\omega t)]$			$-8B_0 S_0 \omega \cos(\omega t) \sin^3(\omega t)$	0 $\times 2$

Gaz parfaits

Prérequis

La loi des gaz parfaits s'écrit $PV = nRT$, avec P en pascals, V en mètres cubes, n en moles et T en kelvins.

Constantes utiles

→ constante des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$

→ définition du bar : $1 \text{ bar} = 1 \times 10^5 \text{ Pa}$

→ conversion entre kelvins et degrés Celsius : $T(\text{K}) = \theta(^{\circ}\text{C}) + 273,15$

Entraînement au calcul



Entraînement 18.1 — Quelques calculs de volume.



Calculer le volume (en L) occupé à $T = 25^{\circ}\text{C}$ et sous une pression $P = 1,0 \text{ bar}$ pour les gaz suivants.

a) 100 g d'argon ($M_{\text{Ar}} = 40 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$)

b) 32 g de dioxygène O_2 ($M_{\text{O}} = 16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$)

c) 1,2 kg de dioxyde de carbone CO_2 ($M_{\text{C}} = 12 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$)

Entraînement 18.2 — Bouteille de butane.



Une bouteille de 30,6 L, maintenue à 20°C , contient du butane (C_4H_{10}) qui est sous la forme d'un mélange liquide/gaz comprimé. Le contenu de la bouteille présente une masse m de 13 kg.

On donne $M_{\text{H}} = 1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $M_{\text{C}} = 12 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

a) Combien vaut la masse molaire (en $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$) du butane?

b) Quelle serait la pression à l'intérieur de la bouteille si tout le butane était à l'état gazeux?

.....

c) Quel volume occuperait le contenu de la bouteille, s'il était entièrement à l'état gazeux, sous une pression de 1,0 bar et à la température de 20°C ?



Entraînement 18.3 — Volume molaire.



Calculer le volume molaire (en $\text{L} \cdot \text{mol}^{-1}$) d'un gaz parfait :

a) sous 1,00 bar et à $25,0^{\circ}\text{C}$

b) sous 2,00 bar et à $50,0^{\circ}\text{C}$

 **Entraînement 18.4 — Surchauffe ?**



Un pneu de voiture, de volume supposé constant, est gonflé à froid, à la température $T_1 = 20^\circ\text{C}$, sous la pression $P_1 = 2,0$ bar. Après avoir roulé un certain temps, le pneu affiche une pression $P_2 = 2,3$ bar.

Quelle est alors sa température (en $^\circ\text{C}$) si l'on assimile l'air à un gaz parfait ?

 **Entraînement 18.5**



Un récipient de volume V_1 enferme de l'air (assimilé à un gaz parfait) à la température $T_1 = 20^\circ\text{C}$ et sous une pression $P_1 = 1,20$ bar.

Que vaut la pression finale (en bar) si l'on augmente :

a) le volume de 20% ?

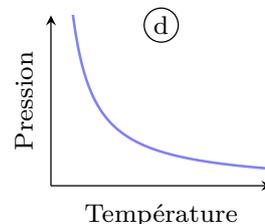
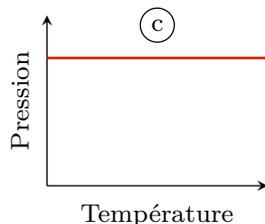
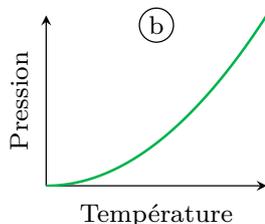
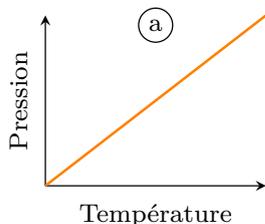
b) la température de 10°C ?

Manipulations algébriques

 **Entraînement 18.6 — Faire le lien entre une formule et un graphe.**

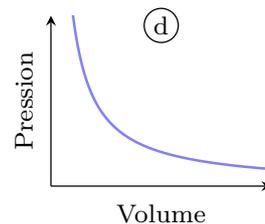
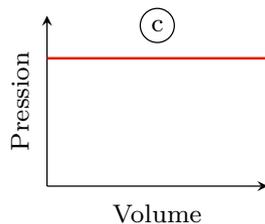
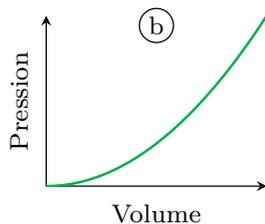
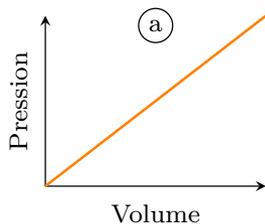


a) Lequel de ces graphes représente la relation entre pression et température lorsque n et V sont fixés ?



.....

b) Lequel de ces graphes représente la relation entre pression et volume lorsque n et T sont fixés ?



.....

Entraînement 18.7 — Masse volumique de l'eau.



On considère un gaz parfait de masse molaire M , à la pression P et à la température T .

a) Exprimer sa masse volumique ρ en fonction de M , P et T

b) La vapeur d'eau a pour masse volumique $\rho = 0,595 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ à 100°C et 1013 hPa . Sa masse molaire est $M_{\text{H}_2\text{O}} = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Est-ce compatible avec le modèle du gaz parfait?

Entraînement 18.8 — Compression d'un gaz.



Un gaz, initialement à la pression P_1 et à la température $T_1 = 25^\circ\text{C}$, est comprimé jusqu'à une pression valant $P_2 = 4P_1$. Sa masse volumique initiale est de ρ_1 .

Exprimer sa masse volumique finale ρ_2 en fonction de ρ_1 si sa température T_2 vaut :

a) $T_2 = T_1$

b) $T_2 = 50^\circ\text{C}$

 **Entraînement 18.9 — Mouvement d'un piston.**



Une enceinte maintenue à une température T est divisée en deux parties d'égal volume V , par un piston mobile sans frottement.

Initialement, le piston est bloqué, et chaque compartiment contient un gaz parfait de pressions respectives P_1 et P_2 . On note n_1 et n_2 les quantités de matière dans chaque compartiment.

Une fois débloqué, le piston se déplace librement de façon à ce que les pressions dans chaque compartiment deviennent égales.



Déterminer :

a) la relation entre n_1, n_2, P_1 et P_2

b) le volume V_1 en fonction de V, P_1 et P_2

Entraînement 18.10 — Expression de la densité d'un gaz.

La densité d d'un gaz A est le rapport entre la masse volumique du gaz A et la masse volumique de l'air sous les mêmes conditions de pression et de température. Autrement dit, c'est :

$$d = \frac{\rho_A}{\rho_{\text{air}}}.$$

On note M_A la masse molaire de A et M_{air} celle de l'air.

Exprimer la densité d en fonction de M_A et M_{air} à l'aide de la loi des gaz parfaits ...

Entraînement 18.11 — Bulle de savon.

Une bulle de savon sphérique de rayon r enferme n moles d'air à la température ambiante T_0 .

La pression qui règne à l'intérieur de la bulle de savon est donnée par :

$$P = P_0 + \frac{4\gamma}{r},$$

où γ est la tension superficielle de l'eau savonneuse et où P_0 est la pression atmosphérique.

a) Donner l'expression du volume de la bulle en fonction r

b) Exprimer n en fonction de P_0 , T_0 , γ et r

Mélange de gaz parfaits

Tous les mélanges de gaz seront considérés parfaits.

Entraînement 18.12 — Un gaz sous pression.

Un gisement donné fournit du gaz naturel dont la composition (en fractions molaires) est :

- 81,3% méthane (CH_4)
- 2,9% éthane (C_2H_6)
- 0,4% propane (C_3H_8)
- 0,2% butane (C_4H_{10})
- 14,3% diazote (N_2)

On donne $M_{\text{H}} = 1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, $M_{\text{C}} = 12 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $M_{\text{N}} = 14 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Calculer :

a) la masse molaire du mélange

b) la fraction massique de l'éthane .

Entraînement 18.13 — Composition d'un mélange.

Un mélange de diazote N_2 ($M_{\text{N}} = 14 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$) et de dioxygène O_2 ($M_{\text{O}} = 16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$) présente une masse volumique de $1,00 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$ à 100°C et sous une pression de 1 013 hPa.

a) Calculer la masse molaire du mélange

b) En déduire la fraction molaire en dioxygène

Entraînement 18.14 — Air humide.



L'humidité relative (ou *l'hygrométrie*) est le rapport :

$$H = \frac{\text{pression partielle de vapeur d'eau}}{\text{pression de vapeur saturante}}$$

La pression de vapeur saturante de l'eau à 25 °C vaut 3 166 Pa.

Quelle est la masse de vapeur d'eau (on donne $M_{\text{H}_2\text{O}} = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$) présente dans une pièce de 400 m^3 contenant de l'air à 25 °C un jour où l'humidité relative est de 60 % ?

Entraînement 18.15 — Ajout d'un gaz.



Un récipient clos de volume V enferme un mélange gazeux contenant deux espèces A et B à une température T fixée. La pression totale vaut $P = 1\,500 \text{ hPa}$ et la pression partielle de A est de $1\,100 \text{ hPa}$.

a) Quelle est la pression partielle de B ?

b) On ajoute une espèce C au système de sorte que la pression totale augmente jusqu'à $1\,800 \text{ hPa}$.

Quelle est la nouvelle pression partielle de B ?

Réponses mélangées

$64 \text{ }^\circ\text{C}$	$\frac{4\pi P_0 r^3 + 16\pi\gamma r^2}{3RT_0}$	62 L	$5,5 \text{ m}^3$	(a)	$\frac{2P_1}{P_1 + P_2}V$	65,6 %
$6,8 \times 10^2 \text{ L}$	$18,2 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$	$4\rho_1$	$58 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$	$\frac{n_2}{n_1} = \frac{P_2}{P_1}$	400 hPa	$3,7\rho_1$
$\frac{4}{3}\pi r^3$	400 hPa	non	1,00 bar	$1,8 \times 10^2 \text{ bar}$	25 L	4,79 %
$24,8 \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1}$	$\frac{M_A}{M_{\text{air}}}$	(d)	5,5 kg	$\frac{MP}{RT}$	$30,6 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$	$13,4 \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1}$

Premier principe

Prérequis

Notions sur les gaz parfaits. Équation d'état des gaz parfaits $PV = nRT$.

Constantes utiles

→ constante des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$

Calcul du travail des forces de pression



Entraînement 19.1 — Les bonnes unités.



Un étudiant doit calculer le travail reçu par un système au cours d'une transformation. L'expression littérale est la suivante :

$$W = -P_0(V_f - V_i).$$

Il sait que, pour faire l'application numérique, la pression doit être exprimée en pascals et les volumes en mètres cubes.

On rappelle que $1 \text{ bar} = 1 \times 10^5 \text{ Pa}$.

a) Calculer W pour $P_0 = 1,5 \text{ bar}$, $V_i = 5 \text{ L}$ et $V_f = 3 \text{ L}$

b) Calculer W pour $P_0 = 50 \text{ mbar}$, $V_i = 2 \text{ cL}$ et $V_f = 120 \text{ mL}$

c) Calculer W pour $P_0 = 150 \text{ bar}$, $V_i = 20 \text{ cm}^3$ et $V_f = 10 \text{ cm}^3$

Entraînement 19.2 — Suite de transformations.



Un système composé de $n = 2$ moles de gaz en contact avec un milieu extérieur à la pression $P_{\text{ext}} = 1 \text{ bar}$ subit une suite de transformations.

Au cours de la première, son volume ne varie pas (transformation isochore).

Au cours de la seconde, la pression extérieure ne varie pas (transformation monobare) et son volume initialement à $V_i = 1 \text{ L}$ augmente et se fixe à $V_f = 2 \text{ L}$.

Les transformations étant quasi statiques, le travail des forces de pression se met sous la forme suivante :

$$W = - \int_{V_{\text{initial}}}^{V_{\text{final}}} P_{\text{ext}} dV.$$

a) Calculer W au cours de la première transformation

b) Calculer W au cours de la seconde transformation

 **Entraînement 19.3 — Bataille de travaux sans calculatrice.**



Considérons deux systèmes A et B recevant de l'énergie du milieu extérieur. La puissance reçue par le premier durant 30 s s'élève à 50 W. Le second reçoit une puissance plus importante (400 W) mais durant un temps plus court (5 s).

Quel système a reçu la plus grande quantité d'énergie (sous forme de travail) ?

 **Entraînement 19.4 — Calcul d'aires.**

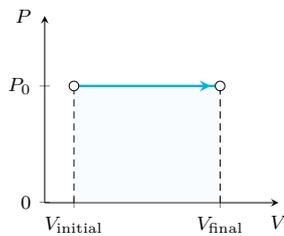


Pour une transformation quasi statique, le travail des forces de pression s'écrit sous la forme :

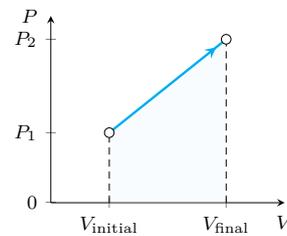
$$W = - \int_{V_{\text{initial}}}^{V_{\text{final}}} P dV.$$

Ce travail W correspond alors à l'opposé de l'aire sous la courbe $P = f(V)$, pour $V_{\text{final}} > V_{\text{initial}}$.

- a) Exprimer le travail W en fonction des variables P_0 , V_{initial} et V_{final} . b) Exprimer le travail W en fonction des variables P_1 , P_2 , V_{initial} et V_{final} .



.....



.....

 **Entraînement 19.5 — Différents types de transformations.**



Un système est composé de n moles de gaz parfait, de volume V , de pression P et de température T . Nous souhaitons évaluer le travail reçu par ce système au cours de transformations quasi statiques :

$$W = - \int_{V_i}^{V_f} P dV.$$

La loi des gaz parfaits assure que $PV = nRT$.

Transformation isotherme :

Au cours de cette transformation, la température du système ne varie pas et $T = T_0$.

- a) Écrire W en fonction de n , R , T_0 , V_i et V_f

Transformation polytropique et quasi statique :

Au cours de cette transformation, on a $PV^k = \text{constante}$ (avec $k > 1$). Les pressions et volumes du système à l'instant initial seront notés P_i et V_i , et à l'instant final P_f et V_f .

- b) Écrire le travail W en fonction de V_i , V_f , P_i , P_f et k

Variation d'énergie interne et d'enthalpie

Entraînement 19.6 — Problème d'unités.



La capacité thermique massique de l'eau vaut $c = 4,2 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$.

La masse molaire de l'eau vaut $M_{\text{H}_2\text{O}} = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Une énergie peut être exprimée en joules ou en kilocalories ; on donne la relation $1 \text{ kcal} = 4184 \text{ J}$.

a) Évaluer la capacité thermique molaire C_m de l'eau en $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$

b) En déduire sa valeur en $\text{kcal} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$

Entraînement 19.7 — Variation d'énergie interne d'une phase condensée.



Un opérateur chauffe une masse m d'eau liquide de capacité thermique massique $c = 4,2 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$. La température initialement à $T_i = 20^\circ\text{C}$ se stabilise en fin d'expérience à $T_f = 30^\circ\text{C}$.

Il souhaite calculer sa variation d'énergie interne par l'application de la relation suivante :

$$\Delta U = \int_{T_i}^{T_f} C \, dT,$$

où C est la capacité thermique du système.

a) Donner ΔU pour le système, en fonction de c , m , T_i et T_f

b) Calculer ΔU en kJ pour $m = 100 \text{ g}$

Entraînement 19.8 — Étude d'un gaz parfait diatomique.



Soient n moles de gaz parfait diatomique évoluant d'un état initial caractérisé par $T_i = 60^\circ\text{C}$ vers un état final à la température $T_f = 90^\circ\text{C}$.

Pour un gaz parfait diatomique, la relation de Mayer impose $C_P - C_V = nR$.

Pour un gaz parfait diatomique, on a $\gamma = \frac{C_P}{C_V} = 1,4$.

a) Exprimer C_V (la capacité thermique à volume constant du gaz parfait) en fonction de n , R et γ .

.....

b) Évaluer $\Delta U = \int_{T_i}^{T_f} C_V \, dT$ pour $n = 1 \text{ mol}$

c) Exprimer C_P (la capacité thermique à pression constante du gaz parfait) en fonction de n , R et γ .

.....

d) Évaluer $\Delta H = \int_{T_i}^{T_f} C_P \, dT$ pour $n = 1 \text{ mol}$

 **Entraînement 19.9 — Des variations d'énergie interne.**



Suivant la finesse des modèles utilisés, la capacité calorifique à volume constant C_V peut être une fonction de la température. Le calcul de la variation d'énergie interne $\Delta U = \int_{T_i}^{T_f} C_V(T) dT$ se fera alors en tenant compte de son expression.

Donner, dans chacun des cas suivants, l'expression de ΔU :

a) pour un gaz parfait (C_V est une constante)

b) pour un gaz réel ($C_V = AT + B$, où A et B sont des constantes) ...

c) pour un solide ($C_V = DT^3$, où D est une constante)

Entraînement 19.10 — Variation d'enthalpie lors d'un changement d'état.



Dans cet entraînement, le système sera de l'eau : à l'état initial, 1 kg d'eau sous forme liquide, à la température de 0°C ; à l'état final un mélange de 800 g d'eau sous forme solide, et 200 g d'eau sous forme liquide à la température de 0°C .

On rappelle la valeur de l'enthalpie massique de fusion de l'eau : $L_{\text{fus}} = 335 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Quelle est la variation d'enthalpie du système?

Applications du premier principe

 **Entraînement 19.11 — Détente de Joule-Gay Lussac d'un gaz réel.**



La détente de Joule-Gay Lussac est une détente au cours de laquelle l'énergie interne du système est constante : $\Delta U = 0$. Pour n moles d'un gaz réel passant du volume V_i au volume V_f et de la température T_i à la température T_f , on a alors :

$$\Delta U = C_V(T_f - T_i) - n^2 a \left(\frac{1}{V_f} - \frac{1}{V_i} \right) = 0.$$

Exprimer T_f en fonction de T_i , C_V , n , a , V_f , V_i

 **Entraînement 19.12 — Température finale.**



On applique le premier principe à un système subissant une transformation isobare. On a :

$$\Delta H = \int_{T_i}^{T_f} C_P(T) dT = Q.$$

Dans chacun des cas suivants, exprimer T_f (en fonction de T_i , Q et des paramètres liés à C_P) :

a) $C_P = C$ est une constante

b) $C_P = \frac{A}{T}$ (où A est une constante)

c) $C_P = BT^2$ (où B est une constante)

Entraînement 19.13 — Transformations du gaz parfait.



Dans cet entraînement, le système correspond à n moles de gaz parfait de coefficient adiabatique $\gamma = 1,4$. Il subit différentes transformations suivant les questions, et nous noterons les variables dans l'état initial P_i, V_i, T_i et les variables dans l'état final P_f, V_f, T_f .

On appliquera le premier principe $\Delta U = W + Q$, avec $\Delta U = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_f - T_i)$ et $W = - \int_{V_i}^{V_f} P dV$ pour une transformation quasi statique.

Dans chacun des cas suivants, exprimer le transfert thermique Q reçu par le gaz :

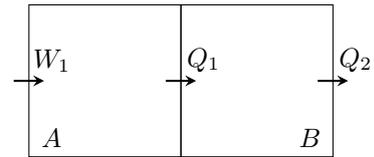
- a) pour une transformation isotherme (à température constante)
- b) pour une transformation isochore (à volume constant)
- c) pour une transformation adiabatique (sans transfert thermique)

Entraînement 19.14 — Étude d'une enceinte divisée en deux compartiments.



Une enceinte est divisée en deux compartiments.

- Le compartiment A reçoit un travail W_1 de l'extérieur et fournit un transfert thermique Q_1 au compartiment B .
- Le compartiment B reçoit un transfert thermique Q_1 du compartiment A et fournit un transfert thermique Q_2 à l'extérieur.



On rappelle l'expression du premier principe pour un système : $\Delta U = W + Q$, où ΔU est la variation d'énergie interne du système, et où W et Q sont respectivement le travail et le transfert thermique reçus par le système considéré.

- a) Exprimer ΔU_A la variation d'énergie interne du compartiment A
- b) Exprimer ΔU_B la variation d'énergie interne du compartiment B
- c) Exprimer ΔU_{tot} la variation d'énergie interne des compartiments A et B , qui correspond à la somme des variations d'énergie interne des compartiments A et B

Calorimétrie

Entraînement 19.15 — Capacité thermique d'un calorimètre.



On considère un calorimètre de valeur en eau $m = 10$ g. La valeur en eau d'un calorimètre est la masse d'eau ayant la même capacité thermique que le calorimètre vide.

On rappelle la capacité thermique massique de l'eau liquide : $c_{eau} = 4,2 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Que vaut la capacité thermique du calorimètre ?

Entraînement 19.16 — Évolution de la température d'un calorimètre.



Nous considérons ici un calorimètre initialement à la température T_0 alors que l'air extérieur est à la température T_a .

Le calorimètre étant de capacité thermique C , sa température T évolue au cours du temps et obéit à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dT}{dt} + \frac{h}{C}T = \frac{h}{C}T_a.$$

a) Définir un temps caractéristique pour l'équation différentielle

b) Résoudre l'équation différentielle et exprimer T en fonction du temps



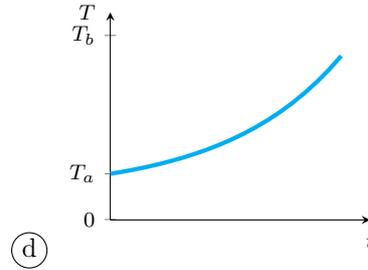
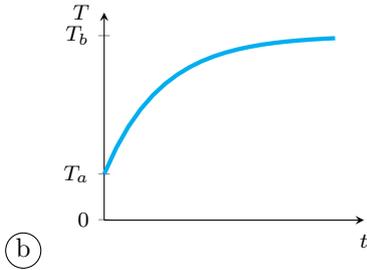
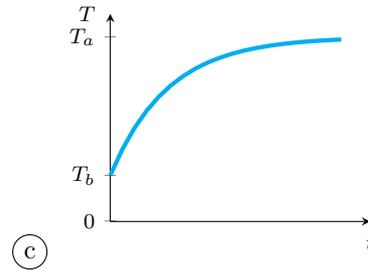
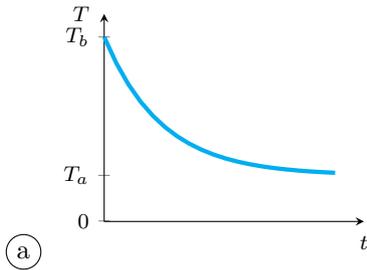
Entraînement 19.17 — Évolution temporelle de la température.



En échangeant avec l'extérieur, la température d'un système varie et suit la loi d'évolution suivante :

$$T = T_b + (T_a - T_b)e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Quelle courbe correspond à cette évolution temporelle ?



.....

 **Entraînement 19.18 — Mélange de liquides.**



Dans un calorimètre, on mélange une masse m_1 d'eau liquide à la température T_1 et une masse m_2 d'eau liquide à la température T_2 .

a) À l'équilibre, la température de l'ensemble T_{eq} vérifie l'équation :

$$m_1c(T_{\text{eq}} - T_1) + m_2c(T_{\text{eq}} - T_2) = 0.$$

Déterminer T_{eq} en fonction de T_1, T_2, m_1, m_2

b) En réalité, des pertes thermiques Q sont observées durant l'évolution de la température.

La température T_{eq} vérifie alors l'équation suivante :

$$m_1c(T_{\text{eq}} - T_1) + m_2c(T_{\text{eq}} - T_2) = Q.$$

Déterminer T_{eq} en fonction de T_1, T_2, m_1, m_2 et Q

Réponses mélangées

$T_i e^{\frac{Q}{A}}$	$\frac{A}{2}(T_f^2 - T_i^2) + B(T_f - T_i)$	-100 J	$\frac{-(P_2 + P_1)(V_{\text{final}} - V_{\text{initial}})}{2}$	$Q_1 - Q_2$
$-nRT_0 \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$	$\frac{nR}{\gamma - 1}$	$T_i + \frac{n^2 a}{C_V} \left(\frac{1}{V_f} - \frac{1}{V_i}\right)$	$W_1 - Q_1$	$8,7 \times 10^2 \text{ J}$
B	$18 \times 10^{-3} \text{ kcal} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$	$mc(T_f - T_i)$	$\frac{nR}{\gamma - 1}(T_f - T_i)$	$42 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
$T_i + \frac{Q}{C}$	$\frac{nR\gamma}{\gamma - 1}$	$C_V(T_f - T_i)$	$\frac{D}{4}(T_f^4 - T_i^4)$	0 150 J 300 J -268 kJ
$W_1 - Q_2$	$\frac{P_f V_f - P_i V_i}{k - 1}$	$6,2 \times 10^2 \text{ J}$	0 J	$nRT_i \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$
$T_a + (T_0 - T_a)e^{-\frac{ht}{c}}$	4,2 kJ	$76 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$	ⓑ	$-P_0(V_{\text{final}} - V_{\text{initial}})$
$\frac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{m_1 + m_2} + \frac{Q}{(m_1 + m_2)c}$		$\frac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{m_1 + m_2}$	$\frac{C}{h}$	$\left(T_i^3 + \frac{3Q}{B}\right)^{1/3}$

Second principe et machines thermiques

Prérequis

Équation d'état des gaz parfaits ($PV = nRT$). Premier principe de la thermodynamique ($\Delta U = W + Q$). Fraction molaire. Activité d'une espèce chimique (en phase gazeuse, en phase condensée). Loi de Dalton.

Constantes utiles

→ constante des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$

→ conversion entre kelvins et degrés Celsius : $T (\text{K}) = \theta (^\circ\text{C}) + 273,15$

Pour bien commencer

Entraînement 20.1 — Compression d'un gaz parfait.



On comprime un gaz parfait de capacité thermique isochore $C_V = 1,04 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ par l'apport d'un travail $W = 100 \text{ J}$. Il passe alors de $T_i = 20^\circ\text{C}$ à $T_f = 25^\circ\text{C}$.

La variation d'énergie interne de ce gaz parfait vérifie le premier principe $\Delta U = W + Q$ et la première loi de Joule $\Delta U = C_V \Delta T$.

Calculer le transfert thermique Q (en joules)

Entraînement 20.2 — Bataille de chiffres.



On chauffe, sur deux réchauds identiques de puissance $P = 1500 \text{ W}$, une masse d'eau sur l'un et une même masse d'huile sur l'autre, pour les emmener de 20°C à 70°C . Qui chauffe le plus vite ?

(a) l'eau ($c_{\text{eau}} = 4180 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$)

(b) l'huile ($c_{\text{huile}} = 2000 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$)

.....



Entraînement 20.3 — Identités thermodynamiques.



On rappelle l'identité thermodynamique :

$$dU = T dS - P dV.$$

a) Exprimer dH en fonction de T , V , dS et dP sachant que $H = U + PV$.

.....

b) À l'aide de la première loi de Joule, déterminer l'expression de dU pour un gaz parfait suivant une transformation isotherme.

.....

c) En déduire l'expression de dS pour un gaz parfait suivant une transformation isotherme en fonction de n , R , V et dV .

.....

Entraînement 20.4 — Variation élémentaire d'énergie interne.



On considère un système fermé dont l'énergie cinétique et l'énergie de pesanteur ne varient pas entre l'état initial et l'état final et qui reçoit uniquement un travail des forces de pression extérieures.

On notera P_{ext} la pression extérieure et P la pression du système.

Dans chacun des cas suivants, écrire la variation élémentaire d'énergie interne donnée par le premier principe de la thermodynamique ($dU = \delta W + \delta Q$) :

- a) pour une transformation adiabatique
- b) pour une transformation adiabatique et réversible
- c) pour une transformation isochore

L'entropie

Entraînement 20.5 — Variation élémentaire d'entropie.



Dans chacun des cas suivants, écrire la variation élémentaire d'entropie donnée par les principes de la thermodynamique :

- a) pour une transformation adiabatique
- b) pour une transformation adiabatique et réversible
- c) pour une transformation isochore

Entraînement 20.6 — Retrouver les lois de Laplace.



Un gaz parfait évolue des conditions initiales données par (T_i, V_i, P_i) vers un nouvel état donné par (T_f, V_f, P_f) . Son entropie varie alors de ΔS , qu'on peut exprimer de trois manières différentes :

$$\begin{aligned} \Delta S &= \frac{nR}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + nR \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) \\ &= \frac{nR\gamma}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) - nR \ln\left(\frac{P_f}{P_i}\right) \\ &= \frac{nR}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{P_f}{P_i}\right) + \frac{nR\gamma}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right). \end{aligned}$$

Sachant que la transformation est isentropique (on a donc $\Delta S = 0$), établir la relation entre :

- a) T_f, T_i, V_f et V_i
- b) T_f, T_i, P_f et P_i
- c) P_i, P_f, V_i et V_f

 **Entraînement 20.7 — Manipulation des lois de Laplace.**



Un gaz parfait évolue de sorte que :

$$PV^\gamma = C^{\text{te}}.$$

On peut déduire de cette identité d'autres relations du même type.

Pour chacune des relations suivantes, exprimer l'exposant x en fonction de γ .

- | | | | |
|----------------------------------|----------------------|---|----------------------|
| a) $TV^x = C^{\text{te}}$ | <input type="text"/> | d) $P^\gamma T^x = C^{\text{te}}$ | <input type="text"/> |
| b) $PT^x = C^{\text{te}}$ | <input type="text"/> | e) $P^x T^\gamma = C^{\text{te}}$ | <input type="text"/> |
| c) $P^x T = C^{\text{te}}$ | <input type="text"/> | | |

Entraînement 20.8 — Bilan d'entropie.



On chauffe 1 mol de vapeur d'eau assimilée à un gaz parfait de pression initiale $P_i = 1$ bar à volume constant de $T_i = 120^\circ\text{C}$ à $T_f = 130^\circ\text{C}$.

On rappelle la seconde identité thermodynamique $dH = T dS + V dP$ et ici $C_P = \frac{5}{2}nR$.

Calculer :

- | | | | |
|-----------------------------------|----------------------|---|----------------------|
| a) la pression finale P_f | <input type="text"/> | b) la variation d'entropie ΔS ... | <input type="text"/> |
|-----------------------------------|----------------------|---|----------------------|

Entraînement 20.9 — Calcul d'entropie créée (I).



On chauffe une mole d'un gaz parfait de coefficient $\gamma = 1,4$ initialement à une température $T_i = 500$ K en le mettant en contact avec un thermostat à la température $T_0 = 550$ K de manière isochore. Au terme de la transformation, la température finale du gaz vaut $T_f = T_0 = 550$ K.

- | | |
|---|----------------------|
| a) Calculer la variation d'entropie du gaz $\Delta S = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right)$ | <input type="text"/> |
| b) Calculer l'entropie échangée au cours de la transformation $S_e = \frac{Q}{T_0}$ | <input type="text"/> |
| c) La transformation est-elle réversible? | <input type="text"/> |

Entraînement 20.10 — Calcul d'entropie créée (II).



On considère la détente de n moles d'un gaz parfait selon le dispositif de Joule Gay-Lussac.

Le gaz de volume initial V_0 se détend dans le vide pour atteindre un volume final $2V_0$. Cette détente est isoénergétique.

Exprimer l'entropie créée S_c

Entraînement 20.11 — Un autre bilan d'entropie.



On chauffe une masse $m = 1,00 \text{ kg}$ d'eau sous une pression $P_0 = 1,00 \text{ bar}$ de $T_i = 80,0^\circ\text{C}$ à $T_f = 120,0^\circ\text{C}$.

On indique que l'eau se vaporise à $T_0 = 100^\circ\text{C}$ sous 1 bar.

On donne les capacités thermiques massiques :

$$c_{\text{eau}} = 4180 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$c_{P,\text{vapeur}} = 2010 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$$

ainsi que l'enthalpie massique de vaporisation :

$$\Delta_{\text{vap}}H^o = 2257 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

La variation d'enthalpie ΔH de l'eau lors de cette transformation peut s'écrire :

$$\Delta H = mc_{\text{eau}}(T_1 - T_2) + m\Delta_{\text{vap}}H^o + mc_{P,\text{vapeur}}(T_3 - T_4).$$

a) Quelle est la valeur de T_1 ?

(a) T_0

(b) T_i

(c) T_f

.....

b) Quelle est la valeur de T_2 ?

(a) T_0

(b) T_i

(c) T_f

.....

c) Quelle est la valeur de T_3 ?

(a) T_0

(b) T_i

(c) T_f

.....

d) Quelle est la valeur de T_4 ?

(a) T_0

(b) T_i

(c) T_f

.....

La variation élémentaire d'entropie pour un échauffement à pression constante s'exprime :

$$dS = mc_P \frac{dT}{T},$$

et la variation d'entropie de vaporisation s'exprime :

$$\Delta_{\text{vap}}S^o = \frac{\Delta_{\text{vap}}H^o}{T_0}.$$

e) Déterminer numériquement la variation d'entropie ΔS de l'eau lors de cette transformation.

.....

Entraînement 20.12 — Contact entre deux solides.



On met en contact thermique :

- une masse $m_1 = 200\text{ g}$ de cuivre, de capacité thermique massique c_1 , initialement à la température $T_1 = 500\text{ K}$;
- une masse $m_2 = 400\text{ g}$ de fer, de capacité thermique massique c_2 , initialement à la température $T_2 = 300\text{ K}$.

Le système constitué des deux solides est isolé.

La capacité thermique molaire des deux solides est $C_m = 3R$. On donne :

$$M(\text{Fe}) = 55,8\text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} \quad \text{et} \quad M(\text{Cu}) = 63,5\text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

- a) Déterminer c_1 b) Déterminer c_2
- c) Exprimer la température finale T_f commune aux deux solides en fonction de T_1, T_2, m_1, m_2, c_1 et c_2 .
.....
- d) Donner la valeur numérique de T_f .
.....
- e) Calculer ΔS la variation d'entropie du système constitué des deux solides.
.....
- f) Cette transformation est-elle réversible ?
.....

Autour du rendement

Entraînement 20.13 — Machine frigorifique.



On considère une machine frigorifique fonctionnant avec une source froide de température $T_F = 4^\circ\text{C}$ et une source chaude de température $T_C = 20^\circ\text{C}$.

Elle utilise une énergie journalière $W = 17\text{ MJ}$ et présente une efficacité (ou COP) égale à 1,2.

- a) Exprimer le transfert thermique journalier Q_F avec la source froide.
.....
- b) Donner la valeur numérique de Q_F (en joules).
.....
- c) Exprimer puis calculer le transfert thermique Q_C avec la source chaude.
.....

Entraînement 20.14 — Moteur réel.



Un moteur cyclique ditherme évoluant entre une source froide de température $T_F = 400\text{ K}$ et une source chaude de température $T_C = 650\text{ K}$ produit 500 J par cycle pour $1\,500\text{ J}$ de transfert thermique fourni.

L'efficacité de Carnot de ce moteur est $\eta_{\text{Carnot}} = 38,5\%$.

a) Calculer le transfert thermique Q_F avec la source froide.

- (a) $-1\,000\text{ J}$ (b) $1\,000\text{ J}$ (c) $2\,000\text{ J}$ (d) $-2\,000\text{ J}$

.....

b) Calculer l'efficacité η de ce moteur réel

Entraînement 20.15 — Pompe à chaleur.



On considère une pompe à chaleur fournissant un transfert thermique hebdomadaire de $3,0\text{ GJ}$ avec une efficacité (ou COP) égale à $3,0$.

a) Exprimer l'énergie hebdomadaire W nécessaire au fonctionnement de cette pompe à chaleur.

.....

b) Donner la valeur numérique de W (en joules).

.....

c) Convertir 1 kWh en joules

d) Calculer le coût annuel de fonctionnement de cette pompe à chaleur en supposant qu'elle tourne la moitié de l'année. On considérera un prix moyen de dix-sept centimes d'euro au kilowatt-heure.

.....

Entraînement 20.16 — Calcul de la puissance d'un moteur.



On considère un moteur thermique évoluant entre une source froide à $T_F = 126,85^\circ\text{C}$ et une source chaude à $T_C = 326,85^\circ\text{C}$. On suppose que ce moteur suit le cycle de Carnot et qu'il libère un transfert thermique de 600 J par cycle. On indique que ce moteur tourne à un régime de $2\,000\text{ cycles/min}$ et qu'un cheval-vapeur (cv) vaut 736 W .

On rappelle que le rendement de Carnot est donné par $\eta = 1 - \frac{T_F}{T_C}$.

a) Calculer le rendement de Carnot η de ce moteur

b) Exprimer le travail W libéré par ce moteur lors d'un cycle en fonction de Q_F et η .

.....

c) Donner la valeur numérique de ce travail W

d) Calculer la puissance de ce moteur en cv

Les dérivées partielles

Entraînement 20.17 — Calcul de dérivées partielles.



On définit le *coefficient de compressibilité isotherme*. C'est :

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T.$$

a) Exprimer χ_T pour un gaz parfait en fonction de P

On définit le *coefficient de dilatation isobare*. C'est :

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P.$$

b) Exprimer α pour un gaz parfait en fonction de T

On considère Y le produit défini par :

$$Y = \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_V \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T.$$

c) Calculer Y pour un gaz parfait

Réponses mélangées

$393 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$	$x = \gamma - 1$	ⓑ	33 %	$\Delta S = 7,54 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$	3,6 MJ
$T_f^\gamma P_f^{1-\gamma} = T_i^\gamma P_i^{1-\gamma}$	$\frac{1}{P}$	$T_f V_f^{\gamma-1} = T_i V_i^{\gamma-1}$	$dH = T dS + V dP$		
$nR \ln(2)$	$dS = 0$	$x = \frac{\gamma}{(1-\gamma)}$	$dS = \delta S_c$	361 K	1,03 bar
$dU = 0$	$P_f V_f^\gamma = P_i V_i^\gamma$	$\eta = 33 \%$	Non	1 GJ	$\frac{\eta Q_F}{(1-\eta)}$
$dU = \delta Q$	13,4 cv	$x = 1 - \gamma$	$6390 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$	$0,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$	ⓐ
$\frac{-Q_C}{\text{COP}}$	ⓐ	-94,8 J	$\frac{1}{T}$	$1,98 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$	20,4 MJ
$\frac{m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}$	ⓐ	$x = \frac{(1-\gamma)}{\gamma}$	ⓑ	$1,2 \times 10^3$ euros	-37,4 MJ
$W \times \text{COP}$	$dS = nR \frac{dV}{V}$	-1	$1,89 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$	$dU = \delta W = -P_{\text{ext}} dV$	
$x = \frac{\gamma^2}{(1-\gamma)}$	$dU = \delta W = -P dV$	Non	$dS = \frac{\delta Q}{T} + \delta S_c$	ⓐ	

Statique des fluides

Prérequis

Pression dans un gaz et dans un liquide incompressible. Poussée d'Archimède. Bases de la mécanique. Équations différentielles.

Constantes utiles

- champ de pesanteur : $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
- constante des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$

Pour commencer



Entraînement 21.1 — Quelques conversions.



On rappelle que $1 \text{ atm} = 1013,25 \text{ hPa}$.

Un fluide exerce sur une paroi une pression de 750 kPa . Convertir cette pression en :

- a) $\text{N} \cdot \text{cm}^{-2}$ b) bar c) atm

Entraînement 21.2 — Champagne !



Dans une bouteille de champagne, le gaz est maintenu sous une pression $p = 6,0 \text{ bar}$ grâce à un bouchon cylindrique de diamètre 20 mm .

- a) Quelle est l'intensité de la force pressante qui pousse le bouchon vers le haut ?
- b) Quelle est la pression intérieure si l'on incline la bouteille de 30° ?



Entraînement 21.3 — Est-ce au moins homogène ?



On considère un fluide dont la pression p dépend de l'altitude z (comprise entre 0 et z_{max}). Pour $z = 0$, la pression vaut p_0 . Après analyse et résolution du problème, quatre étudiants obtiennent quatre résultats différents pour l'expression de $p(z)$.

Indiquer le ou les résultats qui ont le mérite d'être homogènes :

- (a) $p(z) = p_0 + z$
- (b) $p(z) = p_0 \left(1 - e^{-\frac{z}{z_{\text{max}}}} \right) + z$
- (c) $p(z) = \frac{z_{\text{max}}}{z_{\text{max}} + z} p_0$
- (d) $p(z) = \frac{1 - z - z^2}{1 - z_{\text{max}} - z_{\text{max}}^2} p_0$

.....

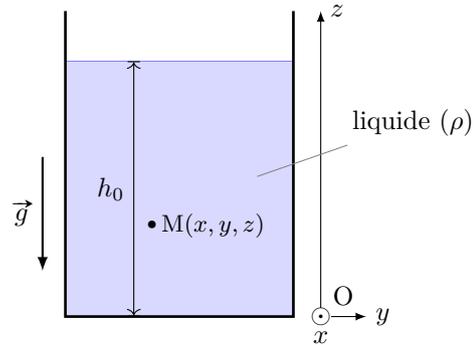
Pression dans un liquide

Entraînement 21.4 — Quelle est la formule déjà ?



On considère un liquide incompressible de masse volumique ρ en équilibre dans le champ de pesanteur \vec{g} uniforme et soumis à une pression p_0 à sa surface.

Comment s'exprime la pression au point M dans le liquide ?



(a) $p(M) = p_0(1 - \rho g z)$

(c) $p(M) = p_0 + \rho g h_0$

(b) $p(M) = (p_0 + \rho g z) \vec{u}_z$

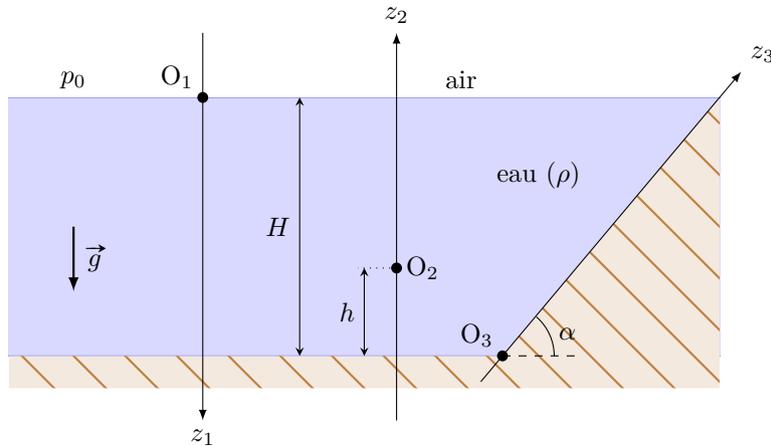
(d) $p(M) = p_0 + \rho g(h_0 - z)$

.....

Entraînement 21.5 — La pression dans différents repères.



On note p la pression dans l'eau, supposée incompressible et de masse volumique ρ , et p_0 la pression de l'air à l'interface eau/air.



Exprimer p dans les différents systèmes de coordonnées :

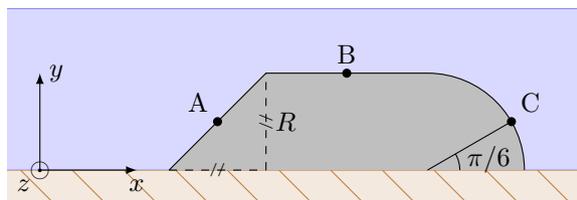
a) $p(z_1)$, en fonction de p_0 , de g et de z_1

b) $p(z_2)$, en fonction de p_0 , de g , de z_2 de H et de h

c) $p(z_3)$, en fonction de p_0 , de g , de z_3 de H et de α

On considère un solide situé au fond de l'eau.

Exprimer, dans la base orthonormée $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, le vecteur unitaire normal à la surface de l'objet et orienté dans le sens de la force pressante de l'eau sur l'objet :



a) En A

c) En C

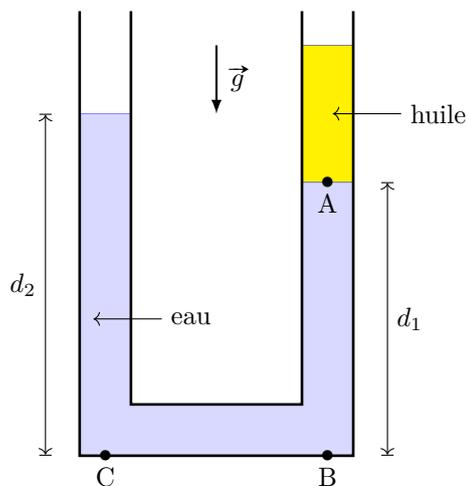
b) En B

Entraînement 21.7 — Dans un tube en U.

On verse dans un tube en U, dont la section a pour surface s , une certaine quantité d'eau puis un volume V_h d'huile. Les liquides se répartissent comme indiqué ci-contre.

On cherche à exprimer la différence de hauteur entre les deux niveaux d'eau de part et d'autre.

On note p_{atm} la pression atmosphérique, ρ_e la masse volumique de l'eau et ρ_h celle de l'huile.



a) Que peut-on dire de la pression en A ?

- (a) $p_A = p_{atm} + \rho_e g \frac{V_h}{s}$
 (b) $p_A = p_{atm} + \rho_h g \frac{V_h}{s}$
 (c) $p_A = p_{atm} + \rho_e g d_1$

.....

b) Que peut-on dire de la pression en B ?

- (a) $p_B = p_{atm} + \rho_e g d_1$
 (b) $p_B = p_{atm} + \rho_e g \left(\frac{V_h}{s} + d_1 \right)$
 (c) $p_B = p_A + \rho_e g d_1$

.....

c) Que peut-on dire de la pression en C ?

- (a) $p_C = p_B$
 (b) $p_C = p_{atm} + p_A$
 (c) $p_C = p_{atm} + \rho_e g d_2$

.....

d) En déduire une expression de $d_2 - d_1$

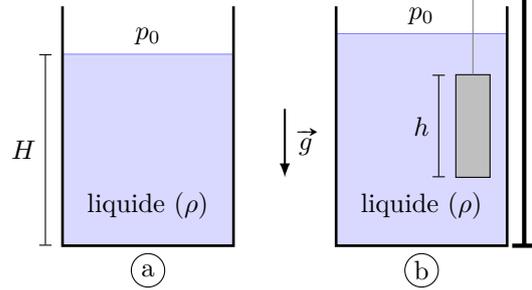
Entraînement 21.8 — Immersion et pression.



Un récipient cylindrique de section de surface S contient un liquide sur une hauteur H : c'est la situation (a).

On immerge complètement un cylindre solide de section de surface s et de hauteur h que l'on maintient grâce à une potence : c'est la situation (b).

On note ρ la masse volumique du liquide et g le champ de pesanteur.



Exprimer la pression au fond du récipient en fonction des données :

a) Situation (a) ...

b) Situation (b) ...

Poussée d'Archimède

Entraînement 21.9 — Immersion de volumes.



La poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$ subie par un corps submergé ou immergé dans un fluide est une force dont l'intensité correspond à celle du poids de fluide déplacé par ce corps : $\|\vec{\Pi}\| = m_{\text{fluide}} \times g$.

On connaît les masses volumiques suivantes, à 25 °C :

Matériau	aluminium	eau	fer	glycérine	plastique	savon liquide
Masse volumique (en $\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$)	2,7	1,0	7,9	1,2	0,9	2,5

Calculer, à 25 °C, l'intensité de la poussée d'Archimède qui s'exerce sur :

a) un cube de fer de côté $a = 10$ cm totalement immergé dans de la glycérine.

b) une boule d'aluminium de rayon $a = 10$ cm à moitié immergée dans du savon liquide.

c) un cylindre de plastique de rayon $a = 10$ cm et de hauteur $4a$ immergé verticalement aux deux tiers dans de l'eau.

Entraînement 21.10 — Flottaison d'un glaçon.



Un glaçon de masse volumique ρ_S et de volume V_S , déposé dans un fluide de masse volumique ρ_L et de volume V_L , s'immerge d'un volume V_{imm} . Comment sont reliées ces grandeurs ?

(a) $\rho_L V_S = \rho_S V_{\text{imm}}$

(d) $\rho_S V_{\text{imm}} = \rho_L V_S$

(b) $\rho_L V_{\text{imm}} = \rho_S V_S$

(e) $\rho_L V_{\text{imm}} = \rho_L V_L$

(c) $\rho_S V_{\text{imm}} = \rho_S V_S$

(f) $V_{\text{imm}} = V_S$

.....

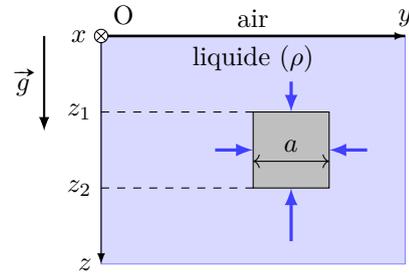
Entraînement 21.11 — Eurêka !



Un bloc solide qui a la forme d'un cube d'arête a est plongé dans un liquide de masse volumique ρ .

Il est soumis à des forces pressantes sur chacune des faces.

On note \vec{R} la résultante de ces forces.



Exprimer les composantes de \vec{R} dans le repère orthonormé (O, x, y, z) :

- a) R_x b) R_y c) R_z
- d) Retrouver \vec{R} en fonction du poids \vec{P}_d du liquide déplacé

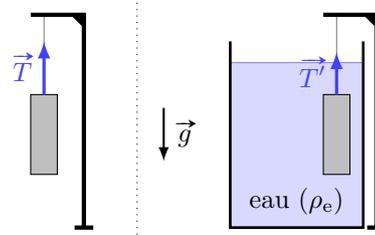
Entraînement 21.12 — Mesure de densité.



Un morceau de métal de volume inconnu est suspendu à une corde.

Avant immersion, la tension dans la corde vaut 10 N.

Une fois le métal totalement immergé dans l'eau, on mesure une tension de 8 N.



- a) Calculer l'intensité de la poussée d'Archimède
- b) En déduire la densité du métal par rapport à l'eau

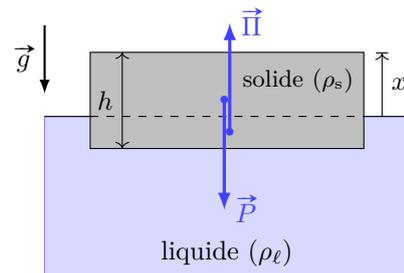
Entraînement 21.13 — Ligne de flottaison.



Un bloc en forme de parallélépipède, de masse volumique ρ_s , de base S et d'épaisseur h , flotte à la surface d'un liquide de masse volumique $\rho_\ell > \rho_s$.

On note \vec{P} le poids du solide, $\vec{\Pi}$ la poussée d'Archimède, \vec{g} le champ de pesanteur et x la hauteur de la partie émergée.

Enfin, on note $\vec{R} = \vec{P} + \vec{\Pi}$.

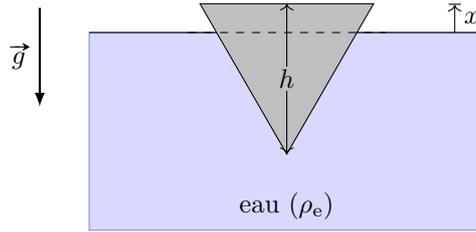


- a) Exprimer \vec{R} en fonction de $x, h, S, \rho_s, \rho_\ell$ et \vec{g}
- b) En déduire la valeur de x quand le bloc est à l'équilibre
- c) On exerce une force verticale \vec{F} supplémentaire sur le glaçon pour le maintenir totalement immergé. Que vaut $\|\vec{F}\|$?

Entraînement 21.14 — Iceberg conique.



Un iceberg en forme de cône, de masse volumique ρ_s , de hauteur h , flotte à la surface de l'eau de masse volumique ρ_e . On note x la hauteur de la partie émergée.



On rappelle que le volume d'un cône de section de surface S et de hauteur h vaut $\frac{1}{3}Sh$.

a) Parmi les résultats faux suivants, indiquer ceux qui ont le mérite d'être homogènes :

(a) $x = h \left(1 - \frac{\rho_s}{\rho_e} \right)$

(c) $x = \frac{1}{3} \frac{h - \rho_s}{\rho_e}$

(b) $x = \sqrt[3]{\frac{h\rho_s}{\rho_e}}$

(d) $x = h(\rho_s - \rho_e)$

.....

b) Exprimer le volume immergé en fonction de S , h et x

c) En déduire x en traduisant l'égalité entre la poussée d'Archimède et le poids de l'iceberg.

.....

Entraînement 21.15 — Quand Archimède fait mal à la tête.



Considérons deux verres identiques A et B. On remplit le verre A d'eau jusqu'à une certaine hauteur h .

a) Dans le verre B, on met quelques glaçons, et on complète avec de l'eau jusqu'à la même hauteur h .

Les masses m_A et m_B des deux verres vérifient :

(a) $m_A < m_B$

(b) $m_A = m_B$

(c) $m_A > m_B$

.....

b) Dans le verre B, on remplace maintenant les glaçons par des boules de polystyrène de même masse que les glaçons mais de densité inférieure.

Par à rapport à la hauteur initiale, le niveau dans ce verre :

(a) augmente

(b) reste le même

(c) diminue

.....

c) On remplace les glaçons par des boules en fer de masse identique aux glaçons dans le verre B.

Par à rapport à la hauteur initiale, le niveau dans ce verre :

(a) augmente

(b) reste le même

(c) diminue

.....

Équation de la statique des fluides



Entraînement 21.16 — Musculation sur le gradient.



On donne l'expression du gradient en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\text{grad}}(p) = \frac{\partial p}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{e}_z.$$

Exprimer $\vec{\text{grad}}(p)$ pour les champs de pression suivants :

a) $p(x, y, z) = p_0 + Az$, où p_0 et A sont des constantes

b) $p(x, y, z) = Bxy^2 + Ce^{2z}$, où B et C sont des constantes

Entraînement 21.17 — Atmosphère de Mars.



L'atmosphère de Mars est composée de 96 % de dioxyde de carbone, 2 % d'argon, 2 % de diazote et contient des traces de dioxygène, d'eau et de méthane.

La pression et la température moyennes à la surface de Mars sont $p_0 = 6 \text{ mbar}$ et $T = -60^\circ\text{C}$.

On donne les masses molaires des éléments suivants :

Élément	H	C	O	N	Ar
Masse molaire (en $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$)	1	12	16	14	40

a) Quelle est la masse molaire M de l'atmosphère martienne?

On considère l'atmosphère martienne comme un gaz parfait, et on note ρ sa masse volumique.

b) Estimer ρ à la surface

Dans le référentiel martien d'axe (Oz) vertical ascendant, la pression vérifie l'équation :

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g.$$

La température est considérée uniforme dans toute l'atmosphère.

c) La pression $p(z)$ dans l'atmosphère de Mars, qui vérifie $p(0) = p_0$, s'écrit alors :

Ⓐ $p(z) = p_0 \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)$ avec $z_0 = \frac{RT}{Mg}$

Ⓒ $p(z) = p_0 \exp\left(-\frac{z}{z_0}\right)$ avec $z_0 = \frac{RT}{Mg}$

Ⓑ $p(z) = p_0 \exp\left(-\frac{z}{z_0}\right)$ avec $z_0 = \frac{Mg}{RT}$

Ⓓ $p(z) = p_0 \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)$ avec $z_0 = \frac{Mg}{RT}$

.....

Le champ de pesanteur sur Mars vaut $g = 3,72 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

d) Estimer l'épaisseur H de l'atmosphère, qu'on assimilera à $5z_0$

Entraînement 21.18 — Une expression infinitésimale.



On considère un fluide dont la pression p dépend de l'altitude z (comprise entre 0 et z_{\max}).

On suppose que cette pression vérifie la relation suivante :

$$p(z + dz) - p(z) = -\frac{2}{z_{\max}}p(z) dz.$$

On souhaite trouver l'expression de $p(z)$ en fonction de z et de p_0 (qui est la pression en $z = 0$).

a) Donner l'équation différentielle vérifiée par p

b) Donner l'expression de $p(z)$ en fonction de p_0

Entraînement 21.19 — Résoudre l'équation de la statique.



Un fluide en équilibre dans le champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ vérifie l'équation :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(p) = \rho\vec{g},$$

où ρ est la masse volumique du fluide, qui dépend éventuellement de la pression.

Dans chacun des cas suivants, déterminer le champ de pression $p(x, y, z)$ sachant que $p(x, y, 0) = p_0$ et que les paramètres a, b, c et g sont des constantes :

a) $\rho = a\frac{p}{p_0}$

b) $\rho = a + b(p - p_0)$

c) $\rho = a - be^{-z/c}$

Entraînement 21.20 — Attention ça déborde !

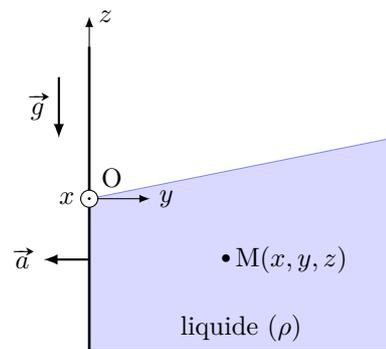


Un récipient cubique contenant un liquide incompressible de masse volumique ρ est soumis à une accélération uniforme $\vec{a} = -a\vec{e}_y$.

Dans le référentiel lié au récipient, la pression vérifie l'équation :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(p) = \rho(\vec{g} - \vec{a}),$$

avec $p(0, 0, 0) = p_0$.



a) Déterminer $p(x, y, z)$ dans le liquide

b) En déduire l'équation de la surface libre

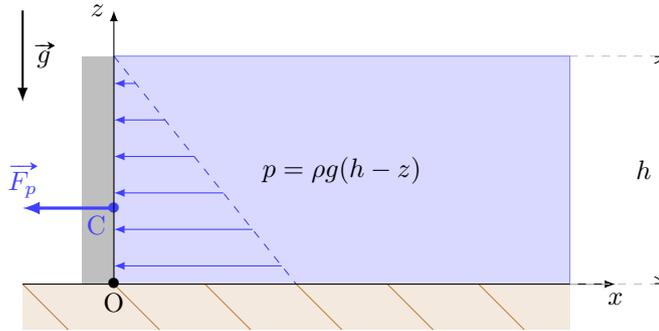
Forces pressantes

Entraînement 21.21 — Pression sur un barrage.



Un barrage rectangulaire de hauteur h et de largeur L baigne d'un côté dans l'air et de l'autre dans de l'eau.

On modélise la situation à l'aide du schéma suivant :



La fonction $p = \rho g(h - z)$ correspond à la surpression exercée par l'eau à l'altitude z , étant donné la masse volumique de l'eau ρ et l'intensité du champ de pesanteur g .

Calculer :

- a) la résultante des forces pressantes $F_p = \iint_{\text{barrage}} p(z) \, dy \, dz$
- b) le moment en O des forces pressantes $\mathcal{M}_p = \iint_{\text{barrage}} z p(z) \, dy \, dz$
- c) la position du centre de poussée z_C tel que $\mathcal{M}_p = z_C \times F_p$

Réponses mélangées

- (c) $-\vec{e}_y$ (b) $\frac{dp}{dz} = -\frac{2p}{z_{\max}}$ $75 \text{ N} \cdot \text{cm}^{-2}$ $7,5 \text{ bar}$ $p_0 + \frac{a}{b}(e^{-bgz} - 1)$
 0 2 N $h\left(1 - \sqrt[3]{\frac{\rho_s}{\rho_e}}\right)$ $(\rho_\ell - \rho_s)Shg$ $1,9 \times 10^2 \text{ N}$ $p_0 e^{-agz/p_0}$ (c)
 $\rho g(H - z_3 \sin(\alpha)) + p_0$ 0 (c) $7,4 \text{ atm}$ 12 N $43,6 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ $A\vec{e}_z$ (d)
 $p_0 + \rho g(H - h - z_2)$ $\frac{1}{3} \frac{S(h-x)^3}{h^2}$ $\frac{1}{3}h$ 5 (b) (b) $p_0 + \rho g\left(H + \frac{s}{S}h\right)$
 (c) $\frac{1}{2}\rho gLh^2$ $h\left(\frac{\rho_\ell - \rho_s}{\rho_\ell}\right)$ $[\rho_s h - \rho_\ell(h-x)]S\vec{g}$ $-\vec{P}_d$ 6 bar
 $p_0 - agz + bcg(1 - e^{-z/c})$ $p_0 e^{-2z/z_{\max}}$ $\rho(ay - gz) + p_0$ $p_0 + \rho gH$ 82 N
 55 km $14,8 \text{ g} \cdot \text{m}^{-3}$ (a) $z = \frac{a}{g}y$ $-\rho ga^3$ $By^2\vec{e}_x + 2Bxy\vec{e}_y + 2Ce^{2z}\vec{e}_z$ (b)
 $-\frac{1}{2}(\sqrt{3}\vec{e}_x + \vec{e}_y)$ 51 N $\frac{\rho_h V_h}{\rho_e s}$ $\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x - \vec{e}_y)$ $p_0 + \rho gz_1$ (a) (c) $\frac{1}{6}\rho gLh^3$

Fondamentaux de la chimie des solutions

Prérequis

Pour cette fiche, on utilisera les masses molaires des éléments suivants :

Élément	H	C	O	F	Ca
Masse molaire (en $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$)	1	12	16	19	40
	M_{H}	M_{C}	M_{O}	M_{F}	M_{Ca}

On rappelle la masse volumique de l'eau : $\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 1,0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$

Constantes utiles

→ nombre d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Avant toute chose

Entraînement 22.1 — Morceau de sucre.



Un morceau de sucre est un corps pur qui contient 6,0 g de saccharose $\text{C}_{12}\text{H}_{22}\text{O}_{11}$. Calculer :

a) La quantité de matière n de saccharose dans le morceau de sucre

b) Le nombre N de molécules de saccharose dans le morceau de sucre

Entraînement 22.2 — Atomes de carbone dans le diamant.



Le diamant est un cristal contenant uniquement des atomes de carbone, de masse molaire $M = 12 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$. Sa valeur est évaluée par sa masse en carats. Un carat est équivalent à 200 mg. Le plus gros diamant jamais découvert l'a été en 1905 avec une masse de 3 106 carats. Calculer :

a) La masse m d'atomes de carbone contenue dans ce diamant

b) La quantité de matière n d'atomes de carbone dans ce diamant

c) Le nombre N d'atomes de carbone dans ce diamant

Entraînement 22.3 — Un verre d'eau à la mer.



On verse un verre d'eau de volume $V = 24,0 \text{ cL}$ contenant initialement N_0 molécules d'eau dans la mer, et on suppose qu'il est possible d'agiter vigoureusement pour obtenir une répartition homogène de ce verre d'eau dans l'ensemble des mers et océans du globe qui représentent un volume total $V_{\text{tot}} = 1,37 \times 10^{18} \text{ m}^3$.

a) Calculer N_0

b) Calculer le rapport $R = \frac{V}{V_{\text{tot}}}$

c) Si on remplit alors le verre d'eau dans la mer, combien de molécules N contenues initialement dans le verre retrouve-t-on ?

Entraînement 22.4 — Combat de masses volumiques.



On considère un morceau de cuivre de 20 cm^3 pesant 178 g et un morceau de fer de 3 dm^3 pesant 24 kg .

Qui a la masse volumique la plus élevée?

Entraînement 22.5 — Calcul autour du pH.



Le pH d'une solution aqueuse est défini par $\text{pH} = -\log_{10}(a_{\text{H}_3\text{O}^+}) = -\log_{10}\left(\frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{C^\circ}\right)$.

On rappelle que $C^\circ = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

a) Calculer le pH d'une solution aqueuse contenant $[\text{H}_3\text{O}^+] = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

b) Exprimer puis calculer la concentration en H_3O^+ en fonction du pH si celui-ci vaut 7 ..

On considère une solution dont la concentration en H_3O^+ vaut x , et on note pH_0 son pH.

c) Exprimer en fonction de pH_0 le pH d'une solution pour laquelle la concentration en H_3O^+ a été multipliée par 100

Entraînement 22.6 — Diagramme de prédominance.



L'acide malonique, ou acide propanedioïque, de formule $\text{HOOC} - \text{CH}_2 - \text{COOH}$, est caractérisé par les constantes $\text{pK}_{A1} = 2,85$ et $\text{pK}_{A2} = 5,80$. Il sera noté H_2A par la suite.

On rappelle la constante d'équilibre de l'autoprotolyse de l'eau $K_e = 10^{-14}$.



a) Identifier les valeurs de (x) et (y)

b) Identifier les espèces correspondant à (a), (b) et (c)

c) Quelle espèce prédomine dans une solution de $\text{pH} = 4,2$?

d) Quelle espèce prédomine dans une solution de concentration $[\text{H}_3\text{O}^+]_{\text{éq}} = 1,0 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ en ions oxonium?

e) Quelle espèce prédomine dans une solution de concentration $[\text{HO}^-]_{\text{éq}} = 1,0 \times 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ en ions hydroxyde?

Concentrations, dilutions

Entraînement 22.7 — Combat de concentrations.



Qui est le plus concentré ?

a) 8 g de sel dans 3 cL d'eau ou 3 kg de sel dans 1×10^3 L d'eau?

b) 3 mol de sucre dans 10 mL d'eau ou 400 kmol de sucre dans 2 m^3 d'eau?

Entraînement 22.8 — Du sucre dans votre thé ?



On prépare 20 cL de thé sucré en y ajoutant 3 morceaux de sucre, constitués chacun de 6 g de saccharose de masse molaire $M = 344 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$. Calculer :

a) La concentration en masse C_m de saccharose dans le thé

b) La concentration en quantité de matière C de saccharose dans le thé

Entraînement 22.9 — Dilution homogène.



On mélange un volume $V_1 = 10 \text{ mL}$ de solution aqueuse d'ion Fe^{3+} à $C_1 = 0,10 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et $V_2 = 10 \text{ mL}$ de solution aqueuse d'ions Sn^{2+} à $C_2 = 0,10 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

On souhaite donner la composition du système en Fe^{3+} avant toute réaction.

a) Parmi les formules fausses suivantes, laquelle ou lesquelles ont au moins le mérite d'être homogènes ?

(a) $[\text{Fe}^{3+}]_i = \frac{C_1}{V_1}$

(b) $[\text{Fe}^{3+}]_i = C_1 V_1$

(c) $[\text{Fe}^{3+}]_i = \frac{C_1}{V_1} (V_1 + V_2)$

.....

b) Établir l'expression littérale correcte donnant $[\text{Fe}^{3+}]_i$ dans le mélange

Entraînement 22.10 — Un café au lait sucré.



On mélange 100 mL de café à la concentration en masse de caféine $C_1 = 0,7 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$ avec 150 mL de lait sucré à la concentration en masse de sucre $C_2 = 40 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$.

a) Calculer la concentration finale en masse C'_1 en caféine

b) Calculer la concentration en masse C'_2 en sucre dans le mélange obtenu ...

 **Entraînement 22.11 — Mélange de solutions.**



On mélange deux bouteilles d'eau sucrée de volumes respectifs V_1 et V_2 dont les concentrations en mole de sucre sont respectivement C_1 et C_2 . On veut exprimer la concentration en quantité de matière C du sucre dans le mélange en fonction de V_1 , V_2 , C_1 et C_2 .

a) Parmi les formules fausses suivantes, laquelle ou lesquelles ont au moins le mérite d'être homogènes ?

(a) $C = \frac{C_1}{V_1 + V_2}$

(b) $C = C_1 V_1 + C_2 V_2$

(c) $C = \frac{C_1(V_1 + V_2)}{C_2 V_1}$

.....

b) Déterminer la formule correcte donnant C .

.....

 **Entraînement 22.12 — Manipulation de formules.**



Soit C la concentration en quantité de matière et C_m la concentration en masse d'un soluté en solution.

On note n , m et M la quantité de matière, la masse et la masse molaire du soluté et V le volume de la solution.

Exprimer :

a) C_m en fonction de n , M et V

b) La quantité de matière n en fonction de C_m , V et M

c) Le volume V en fonction de M , C et m

 **Entraînement 22.13 — Préparation d'une solution par dilution.**



a) On dispose d'une grande quantité d'une solution mère d'acide acétique à la concentration en masse $C = 80 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$. On souhaite préparer 100 mL d'une solution à la concentration en masse de $20 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$ par dilution.

Quel volume V_i de la solution mère doit-on prélever ?

b) On prélève 20 mL d'une solution mère de permanganate de potassium à la concentration en masse $C_m = 40 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$ que l'on verse dans une fiole jaugée de 250 mL et que l'on complète ensuite jusqu'au trait de jauge avec de l'eau distillée.

Calculer la concentration en masse C_f de la solution finale

Dissolution

Prérequis

On rappelle qu'on dit qu'une solution est saturée lorsque la concentration du soluté correspond à la concentration maximale que l'on peut dissoudre (la solubilité) à cette température.

Entraînement 22.14 — Dissoudre du sel ou du sucre.



Une solution aqueuse saturée en sel a une concentration en masse de sel valant $358 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$. Une solution aqueuse saturée en sucre contient $2,00 \text{ kg}$ de sucre par litre de solution.

a) Quelle est la masse de sel contenue dans 20 mL d'une solution saturée en sel ?

.....

b) Quelle masse de sucre peut-on dissoudre dans une tasse de 300 mL ?

.....

Entraînement 22.15 — Saturation du carbonate de potassium.



On peut dissoudre au maximum $1\,220 \text{ g}$ de carbonate de potassium K_2CO_3 dans $1,0 \text{ L}$ d'eau. On indique la masse molaire du carbonate de potassium $M = 138 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Calculer :

a) La quantité de matière n de carbonate de potassium dans 250 mL d'une solution saturée en carbonate de potassium

b) La quantité de matière n_1 en ions potassium K^+

c) La quantité de matière n_2 en ions carbonates CO_3^{2-} dans la solution

Entraînement 22.16 — Fluorure de calcium.



On dissout $10,0 \text{ g}$ de fluorure de calcium CaF_2 dans 500 mL d'eau. Calculer :

a) La quantité de matière de fluorure de calcium dissoute

b) La quantité de matière en ions calcium Ca^{2+}

c) La masse en ions fluorures dans la solution

Autour de la masse volumique

Prérequis

On rappelle que la densité d d'un liquide correspond au rapport entre sa masse volumique et la masse volumique de l'eau.



Entraînement 22.17 — Le sel.



On dissout une masse $m = 10\text{ g}$ de sel dans un volume $V = 20\text{ mL}$ d'eau à 25°C . La solubilité du sel à cette température est $s = 330\text{ g}\cdot\text{L}^{-1}$. On suppose que cette dissolution s'opère à volume constant.

a) Calculer la masse de sel qui reste sous forme solide

b) Calculer la densité d de la solution finale

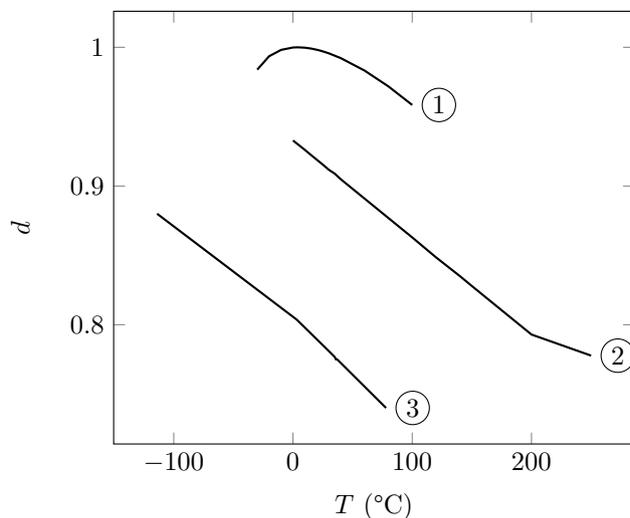
c) La densité expérimentale de la solution est $d_{\text{exp}} = 1,35$.

Le volume de la solution a-t-il diminué ou augmenté lors de la dissolution? ...

Entraînement 22.18 — Densité et température.



Le graphe suivant présente l'évolution, en fonction de la température, de la densité de l'eau pure, de l'huile de tournesol et de l'éthanol. La pression est la pression atmosphérique.



Liquide	$T_{\text{solidification}} (^\circ\text{C})$	$T_{\text{ébullition}} (^\circ\text{C})$
Eau	0	?
Éthanol	-117	78
Huile	3	230

Températures de changement d'état ($P = P_{\text{atm}}$)

a) À quelle courbe correspond la densité de l'eau pure?

b) À quelle courbe correspond la densité de l'huile?

c) Retrouver, par lecture graphique, la température d'ébullition de l'eau pure.

(a) 0°C

(b) 50°C

(c) 100°C

(d) -50°C

.....

Titre massique

Prérequis

On rappelle que le titre massique t correspond au rapport, exprimé en pourcentage, de la masse de composé dissous sur la masse de la solution.

Entraînement 22.19 — Acide chlorhydrique.



Une solution d'acide chlorhydrique concentrée possède un titre massique en HCl de 37 % pour une densité $d = 1,19$. On donne $M_{\text{HCl}} = 36,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Calculer :

a) La masse m d'un litre de cette solution

b) La masse m_{HCl} d'acide chlorhydrique pur contenu dans ce litre de solution.

.....

c) La concentration en quantité de matière C en acide chlorhydrique de cette solution.

.....

Entraînement 22.20 — Acide sulfurique.



Une solution d'acide sulfurique concentrée possède une concentration en quantité de matière $C = 18 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ en H_2SO_4 pour une densité $d = 1,84$. On donne $M_{\text{H}_2\text{SO}_4} = 98 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Calculer le titre massique t en acide sulfurique de cette solution

Entraînement 22.21 — L'éthanol.



On prépare $V = 10\,000 \text{ L}$ d'éthanol de titre massique $t = 95,4 \%$ par distillation fractionnée. Cette solution possède une densité $d = 0,789$ et on indique que l'éthanol, de formule brute $\text{C}_2\text{H}_6\text{O}$, présente une masse molaire $M = 46,07 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Quelle est la quantité de matière n d'éthanol dans cette solution ?

(a) $163 \times 10^3 \text{ mol}$

(b) $461 \times 10^3 \text{ mol}$

(c) $439 \times 10^3 \text{ mol}$

(d) $7,53 \times 10^3 \text{ mol}$

.....

Réponses mélangées

$0,26 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ $\frac{n \times M}{V}$ 3,4 g 1,19 kg (a) = H₂A, (b) = HA⁻ et (c) = A²⁻
 2,2 mol 12 mol · L⁻¹ $1,75 \times 10^{-22}$ $3,12 \times 10^{25}$ $\frac{C_1V_1 + C_2V_2}{V_1 + V_2}$ 7,2 g
 (c) 4,86 g 3,2 g · L⁻¹ Aucune 25 mL $\frac{V \times C_m}{M}$ A²⁻ $\frac{C_1V_1}{V_1 + V_2}$
 $[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-7} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ 1 400 0,44 kg $V = \frac{m}{C \times M}$ Le premier
 $1,1 \times 10^{22}$ (2) 621 g 600 g (c) 0,128 mol 1 pH₀ - 2
 18 mmol HA⁻ 4,4 mol H₂A 2,2 mol 0,128 mol 1,33
 (a) (x) = 2,85 et (y) = 5,80 90 g · L⁻¹ 0,28 g · L⁻¹ 8,01 × 10²⁴
 Il a diminué 51,8 mol (1) Le premier 24 g · L⁻¹ Le cuivre 96 %

Fondamentaux de la chimie en phase gazeuse

Prérequis

Équation d'état des gaz parfaits ($PV = nRT$). Fraction molaire. Activité d'une espèce chimique (en phase gazeuse, en phase condensée).
Loi de Dalton.

Constantes utiles

→ constante des gaz parfaits : $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$

Corps pur à l'état gazeux

Entraînement 23.1 — Volume molaire d'un gaz parfait.



On considère un échantillon gazeux de n moles contenues dans un volume V à la température T et à la pression P . Le gaz est supposé se comporter comme un gaz parfait.

Exprimer le volume molaire V_m (en fonction de R, T et P)



Entraînement 23.2 — Calculs de volumes molaires.



Pour chacun des jeux de conditions de pression P et de température T suivants, déterminer le volume molaire (en litres par mole) d'un gaz se comportant comme un gaz parfait.

On rappelle que $T(\text{K}) = T(^{\circ}\text{C}) + 273,15$.

a) $P = 1,00 \text{ bar}$, $T = 150 \text{ K}$

b) $P = 1,00 \text{ bar}$, $T = 300 \text{ K}$

c) $P = 5,000 \text{ kPa}$, $T = 25^{\circ}\text{C}$

d) $P = 500 \text{ mbar}$, $T = -123^{\circ}\text{C}$

Entraînement 23.3 — Bataille de chiffres.



On donne les masses molaires suivantes :

Élément chimique	Hydrogène	Hélium	Azote	Oxygène
Masse molaire (en $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$)	1	4	14	16

Dans les conditions de pression et de température identiques, quel est l'échantillon gazeux (supposé être un gaz parfait) ayant la masse la plus importante ?

(a) 5 L d'hélium

(c) 1 000 cm^3 de diazote

(b) 750 mL de dioxygène

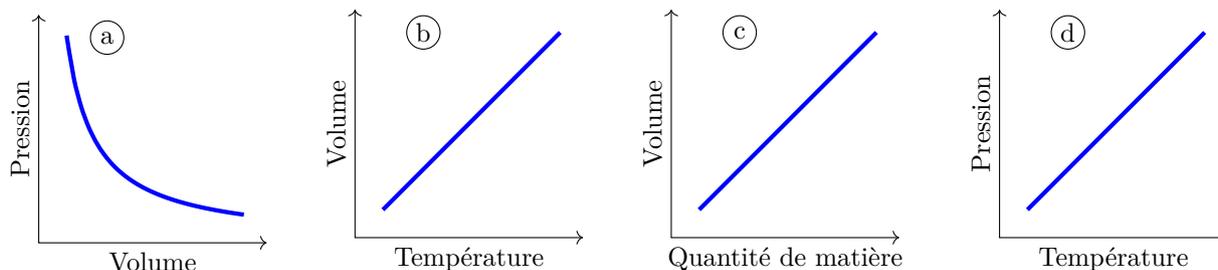
(d) 0,1 hL de dihydrogène

.....

 **Entraînement 23.4 — Expérimentalement parfait.**



L'équation d'état des gaz parfaits résulte de la combinaison de différentes lois expérimentales traduisant des relations de proportionnalité entre les grandeurs d'état P , V , n et T . Identifier la représentation graphique associée à chacune des lois expérimentales caractérisant un gaz parfait.



a) Loi de Charles : le rapport V/T est constant si P et n sont fixés

b) Loi d'Avogadro : la grandeur V_m est constante si P et T sont fixées

c) Loi de Gay-Lussac : le rapport P/T est constant si V et n sont fixés

d) Loi de Boyle-Mariotte : le produit PV est constant si n et T sont fixés

Entraînement 23.5 — Une bouteille de plongée.



Une bouteille de plongée standard est une bonbonne de 12 L qui contient de l'air à la pression de 200 bar. Un détendeur permet de fournir au plongeur de l'air à la pression standard. En supposant que la température de l'air en entrée et en sortie du détendeur est constante, et que l'air se comporte comme un gaz parfait, on peut estimer que le plongeur dispose d'une réserve respirable de :

(a) 12 L d'air

(c) 6 L d'air

(b) 2 400 L d'air

(d) 200 L d'air

.....

Entraînement 23.6 — Un gaz mystérieux.



Une expérience réalisée à température ambiante ($T = 25^\circ\text{C}$) et sous la pression ambiante ($P = 1,00$ bar) permet de produire un volume $V = 9,0$ mL d'un gaz, que l'on admet être un gaz parfait. L'échantillon gazeux est caractérisé par une masse $m = 0,70$ mg.

a) Calculer la masse volumique ρ du gaz en $\text{g} \cdot \text{L}^{-1}$

b) Calculer le volume molaire en $\text{L} \cdot \text{mol}^{-1}$

c) Calculer la masse molaire du gaz en $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$

d) Identifier le gaz

Entraînement 23.7 — Parfait... mais pas uniquement.



Pour la modélisation d'un gaz, on considère les deux modèles suivants :

- le modèle du gaz parfait : $PV = nRT$;
- le modèle de van der Waals : $\left(P + \frac{an^2}{V^2}\right)\left(\frac{V}{n} - b\right) = RT$, où a et b sont des constantes.

a) Exprimer PV_m pour un gaz parfait

b) Exprimer PV_m pour un gaz de van der Waals

c) Que valent a et b pour un gaz parfait ?

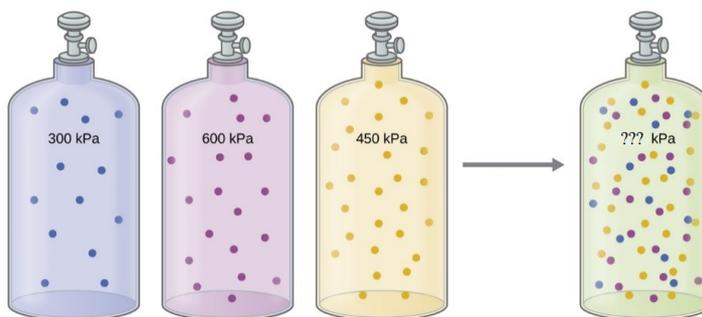
Mélanges gazeux

Entraînement 23.8 — La bouteille de gaz.



On dispose de trois bouteilles de gaz de même volume remplies avec des gaz différents (supposés parfaits) et à des pressions différentes.

Si on transvase (sans aucun changement de température) toutes les bouteilles dans une unique bouteille de même volume que les autres, que vaut la pression dans cette bouteille ?



- (a) 1350 kPa
- (b) 450 kPa
- (c) 600 kPa

.....

Entraînement 23.9 — Cocktails gazeux.



Un système de production industriel permet de transvaser dans un unique flacon de volume V_0 un ensemble de N volumes V_k de différents gaz dont les pressions respectives sont notées P_k . On note P la pression du mélange obtenu dans le flacon. L'ensemble du système est maintenu à une température T_0 constante, et on admet que tous les gaz sont modélisables comme des gaz parfaits.

Exprimer la pression dans le flacon dans le cas :

a) général

b) où $V_k = V_0/N$ et $P_k = P_0$

c) où $V_k = V_0$ et $P_k = kP_0$

d) où $V_k = \frac{n_0 RT_0}{P_k}$

Entraînement 23.10 — Des fractions molaires aux pressions partielles.



Au cours de la respiration, des échanges chimiques permettent aux poumons de prélever le dioxygène de l'air et de rejeter du dioxyde de carbone. Tous les gaz sont supposés parfaits.

• Mélange inspiré :

Espèce chimique	N ₂	O ₂	CO ₂	total
Quantité de matière	119 mmol	32 mmol	0 mmol	a)
Fraction molaire	b)	c)	0 mmol	1,000
Pression	800 mbar	d)	0 mmol	1 013 mbar

• Mélange expiré :

Espèce chimique	N ₂	O ₂	CO ₂	total
Quantité de matière	119 mmol	24 mmol	e)	151 mmol
Fraction molaire	0,788	f)	0,050	1,000
Pression	798 mbar	g)	h)	1 013 mbar

Compléter les valeurs manquantes dans les deux tableaux.

a) $n_{\text{tot}} = \dots\dots\dots$

e) $n_{\text{exp}}(\text{CO}_2) = \dots\dots\dots$

b) $x_{\text{ins}}(\text{N}_2) = \dots\dots\dots$

f) $x_{\text{exp}}(\text{O}_2) = \dots\dots\dots$

c) $x_{\text{ins}}(\text{O}_2) = \dots\dots\dots$

g) $P_{\text{exp}}(\text{O}_2) = \dots\dots\dots$

d) $P_{\text{ins}}(\text{O}_2) = \dots\dots\dots$

h) $P_{\text{exp}}(\text{CO}_2) = \dots\dots\dots$

Entraînement 23.11 — Proportions dans un mélange gazeux.



On considère une enceinte fermée contenant un mélange de deux gaz parfaits différents. Indiquer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses : « Les quantités de matière sont différentes si ...

- a) les pressions partielles sont égales » .. c) les masses des gaz sont égales »
 b) les fractions molaires sont égales » ... d) les volumes des gaz sont égaux »

Entraînement 23.12 — Atmosphères et pressions partielles.



Le tableau suivant présente la composition de différentes atmosphères de planètes du système solaire.

Planète	Pression en surface	Composition atmosphérique (fractions molaires)
Vénus	9 MPa	dioxyde de carbone (96 %), diazote (4 %)
Terre	1 000 hPa	diazote (78 %), dioxygène (21 %)
Mars	600 Pa	dioxyde de carbone (95 %), diazote (3 %)

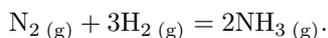
Calculer les pressions suivantes en bar :

- a) P_{N_2} sur Vénus d) P_{CO_2} sur Vénus
 b) P_{N_2} sur Terre e) P_{CO_2} sur Mars
 c) P_{N_2} sur Mars f) P_{O_2} sur Terre

Entraînement 23.13 — Pression et avancement.



On considère la réaction chimique de synthèse de l'ammoniac, modélisée par l'équation chimique suivante :



Les quantités initiales valent $n_{N_2} = n$ mol et $n_{H_2} = 3n$ mol. On considère un état intermédiaire quelconque de la réaction, qui est réalisée à température constante dans un volume constant. On considère que tous les gaz se comportent comme des gaz parfaits. Exprimer les grandeurs suivantes uniquement en fonction de la pression initiale totale P_i du mélange et/ou de la quantité de matière n et/ou de l'avancement ξ de la réaction.

- a) Quantité de matière totale
 b) Pression totale
 c) Pression partielle en amoniac
 d) Pression partielle en diazote
 e) Pression partielle en dihydrogène

Activité chimique et constante d'équilibre

Entraînement 23.14 — Activité d'un gaz.



On considère un mélange de gaz parfaits confiné dans une enceinte de 2 m^3 à la température de 25°C . Ce système contient du dioxygène présent à hauteur de 10 moles. Son activité doublera si :

- (a) on ajoute 20 moles de dioxygène
 (b) l'enceinte est agrandie à 4 m^3
 (c) la température passe à 323°C
 (d) la température passe à 50°C



Entraînement 23.15 — La juste puissance.



Pour chacun des quotients de réaction suivants, déterminer la puissance à laquelle est élevée la pression de référence P° après l'avoir simplifié au maximum.

a) $Q_1 = \frac{\left(\frac{n_1}{n_{\text{tot}}} \frac{P}{P^\circ}\right)^2 \left(\frac{n_2}{n_{\text{tot}}} \frac{P}{P^\circ}\right)^3}{\left(\frac{n_3}{n_{\text{tot}}} \frac{P}{P^\circ}\right)^3 \left(\frac{n_4}{n_{\text{tot}}} \frac{P}{P^\circ}\right)^2}$

b) $Q_2 = \frac{\left(\frac{n_1}{n_{\text{tot}}} \frac{P}{P^\circ}\right)^4 \left(\frac{n_2}{n_{\text{tot}}} \frac{P}{P^\circ}\right)^2}{\left(\frac{n_3}{n_{\text{tot}}} \frac{P}{P^\circ}\right) \left(\frac{n_4}{n_{\text{tot}}} \frac{P}{P^\circ}\right)^3}$

c) $Q_3 = \frac{\left(\frac{c_1}{C^\circ}\right)^2 \left(\frac{n_1}{n_{\text{tot}}} \frac{P}{P^\circ}\right)^5}{\left(\frac{n_2}{n_{\text{tot}}} \frac{P}{P^\circ}\right)^3 \left(\frac{n_3}{n_{\text{tot}}} \frac{P}{P^\circ}\right)^4}$

d) $Q_4 = \left(\frac{n_1}{n_{\text{tot}}} \frac{P}{P^\circ}\right)^3 \left(\frac{c_1}{C^\circ}\right)^2 \left(\frac{n_2}{n_{\text{tot}}} \frac{P}{P^\circ}\right)^{-2} \left(\frac{c_2}{C^\circ}\right)^{-3}$

Entraînement 23.16 — Des quotients de réaction.



Pour chacune des réactions chimiques suivantes, exprimer les quotients de réaction en les simplifiant au maximum, c'est-à-dire en faisant apparaître le moins de fois possible les facteurs P° et/ou C° correspondant respectivement à la pression de référence 1 bar et à la concentration de référence $1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.



Réactions chimiques

Prérequis

Tableaux d'avancement, avancement (ξ) et avancement volumique (ξ_v) d'une réaction. Loi d'action de masse. Définition du pH, constante d'acidité. Constante d'autoprotolyse de l'eau.

Pour commencer

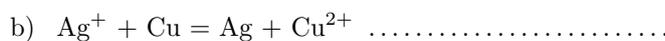


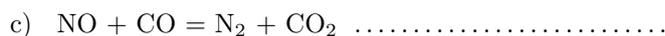
Entraînement 24.1 — Ajuster des équations de réaction.

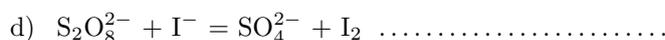


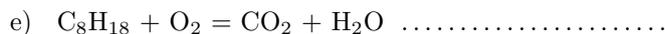
Ajuster les équations des réactions suivantes.

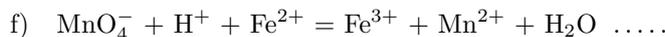












Entraînement 24.2 — Tableau d'avancement.



On considère le tableau d'avancement en quantité de matière suivant :

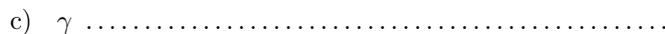
	$\text{N}_{2(\text{g})} + 3 \text{H}_{2(\text{g})} = 2 \text{NH}_{3(\text{g})}$		
État initial	n_1	n_2	0
État final	α	β	γ

où n_1 et n_2 sont des quantités de matière. À l'instant final, l'avancement molaire de la réaction vaut ξ .

Déterminer en fonction de n_1 , n_2 et ξ , les quantités suivantes :







Entraînement 24.3 — Dimension de la constante thermodynamique d'équilibre.



On considère la transformation d'équation :



Trouver, parmi les formules suivantes, l'expression de sa constante d'équilibre K° :

Ⓐ $K^\circ = \frac{P(\text{SO}_2)_{\text{eq}} \times P(\text{Cl}_2)_{\text{eq}}}{P(\text{SO}_2\text{Cl}_2)_{\text{eq}}}$

Ⓒ $K^\circ = \frac{P(\text{SO}_2\text{Cl}_2)_{\text{eq}} \times P^\circ}{P(\text{SO}_2)_{\text{eq}} \times P(\text{Cl}_2)_{\text{eq}}}$

Ⓑ $K^\circ = \frac{P(\text{SO}_2\text{Cl}_2)_{\text{eq}}}{P(\text{SO}_2)_{\text{eq}} \times P(\text{Cl}_2)_{\text{eq}}}$

Ⓓ $K^\circ = \frac{P(\text{SO}_2)_{\text{eq}} \times P(\text{Cl}_2)_{\text{eq}}}{P(\text{SO}_2\text{Cl}_2)_{\text{eq}} \times P^\circ}$

.....

Entraînement 24.4 — Expression de la constante thermodynamique d'équilibre.



On considère la transformation d'équation :



Trouver, parmi les formules suivantes, l'expression de sa constante d'équilibre K° :

Ⓐ $K^\circ = \frac{[\text{HO}^-]_{\text{eq}} \times [[\text{Cd}(\text{NH}_3)_4]^{2+}]_{\text{eq}}}{[\text{Cd}(\text{OH})_2]_{\text{eq}} \times [\text{NH}_3]_{\text{eq}}}$

Ⓓ $K^\circ = \frac{[\text{HO}^-]_{\text{eq}}^2 \times [[\text{Cd}(\text{NH}_3)_4]^{2+}]_{\text{eq}}}{[\text{NH}_3]_{\text{eq}}^4 \times C^\circ}$

Ⓑ $K^\circ = \frac{[\text{HO}^-]_{\text{eq}}^2 \times [[\text{Cd}(\text{NH}_3)_4]^{2+}]_{\text{eq}}}{[\text{Cd}(\text{OH})_2]_{\text{eq}} \times [\text{NH}_3]_{\text{eq}}^4 \times (C^\circ)^2}$

Ⓔ $K^\circ = \frac{[\text{HO}^-]_{\text{eq}}^2 \times [[\text{Cd}(\text{NH}_3)_4]^{2+}]_{\text{eq}} \times C^\circ}{[\text{NH}_3]_{\text{eq}}^4}$

Ⓒ $K^\circ = \frac{[\text{HO}^-]_{\text{eq}}^2 \times [[\text{Cd}(\text{NH}_3)_4]^{2+}]_{\text{eq}} \times (C^\circ)^2}{[\text{Cd}(\text{OH})_2]_{\text{eq}} \times [\text{NH}_3]_{\text{eq}}^4}$

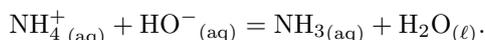
Ⓕ $K^\circ = \frac{[\text{NH}_3]_{\text{eq}}^4 \times C^\circ}{[\text{HO}^-]_{\text{eq}}^2 \times [[\text{Cd}(\text{NH}_3)_4]^{2+}]_{\text{eq}}}$

.....

Entraînement 24.5 — Expression et calcul de la constante d'équilibre.



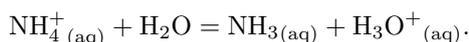
On considère la réaction acide-base entre le chlorure d'ammonium (NH_4^+ ; Cl^-) et l'hydroxyde de sodium (Na^+ ; HO^-) :



a) En utilisant la loi d'action de masse, exprimer la constante d'équilibre K° de la réaction en fonction des activités des différentes espèces physico-chimiques intervenant dans la réaction.

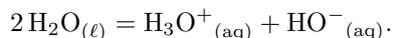
.....

b) La constante d'acidité K_A du couple $\text{NH}_4^+/\text{NH}_3$ est la constante d'équilibre de la réaction



Exprimer K_A en fonction des activités des espèces pertinentes

c) La constante d'autoprotolyse de l'eau K_e est la constante d'équilibre de la réaction



Exprimer K_e en fonction des activités des espèces pertinentes

d) Donner l'expression de K° en fonction de K_A et K_e

e) À 25 °C, on donne $\text{p}K_A = -\log_{10}(K_A) = 9,25$ et $\text{p}K_e = -\log_{10}(K_e) = 14$.

Calculer K°

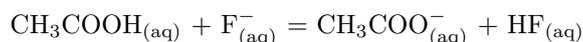
Composition finale d'un système siège d'une réaction chimique



Entraînement 24.6 — Sens d'évolution d'une réaction.



On considère la transformation d'équation :



dont la constante d'équilibre à 25 °C est $K^\circ = 10^{-1,6}$.

On réalise cette réaction en partant de différentes concentrations initiales de réactifs et de produits.

Pour chacun des cas ci-dessous, déterminer le sens d'évolution de la réaction.

a) $[\text{CH}_3\text{COOH}]_i = [\text{F}^-]_i = 1 \times 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et $[\text{CH}_3\text{COO}^-]_i = [\text{HF}]_i = 0 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

(a) sens direct

(c) pas d'évolution

(b) sens indirect

b) $[\text{CH}_3\text{COOH}]_i = [\text{F}^-]_i = [\text{CH}_3\text{COO}^-]_i = 1 \times 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et $[\text{HF}]_i = 0 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

(a) sens direct

(c) pas d'évolution

(b) sens indirect

c) $[\text{CH}_3\text{COOH}]_i = [\text{F}^-]_i = [\text{CH}_3\text{COO}^-]_i = [\text{HF}]_i = 1,0 \times 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

(a) sens direct

(c) pas d'évolution

(b) sens indirect

d) $[\text{CH}_3\text{COOH}]_i = 8,0 \times 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et $[\text{F}^-]_i = [\text{HF}]_i = 4,0 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$
 et $[\text{CH}_3\text{COO}^-]_i = 2,0 \times 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

(a) sens direct

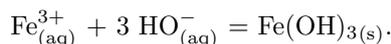
(c) pas d'évolution

(b) sens indirect

Entraînement 24.7 — Détermination du réactif limitant.



On considère la réaction entre les ions fer (III) et les ions hydroxyde, formant un précipité d'hydroxyde de fer $\text{Fe}(\text{OH})_{3(s)}$, aussi connu sous le nom de rouille. L'équation de la réaction est :



À l'instant initial, on mélange une solution de chlorure de fer (III) (Fe^{3+} ; 3Cl^{-}) avec une solution de soude (hydroxyde de sodium (Na^{+} ; HO^{-})) de sorte à obtenir les conditions suivantes :

	Fe^{3+}	Cl^{-}	Na^{+}	HO^{-}
Quantité de matière initiale	$3,0 \times 10^{-2}$ mol	$9,0 \times 10^{-2}$ mol	$6,0 \times 10^{-2}$ mol	$6,0 \times 10^{-2}$ mol

Déterminer le réactif limitant.

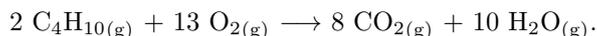
- (a) $\text{Fe}^{3+}_{(aq)}$
 (b) $\text{HO}^{-}_{(aq)}$
 (c) $\text{Fe}(\text{OH})_{3(s)}$
 (d) Il n'y en a pas

.....

Entraînement 24.8 — Transformation totale.



On considère la réaction de combustion du butane à l'état gazeux suivante, ainsi que les concentrations initiales des réactifs :



	C_4H_{10}	O_2	CO_2	H_2O
Quantité de matière initiale	$n_1 = 0,10$ mol	$n_2 = 0,65$ mol	0 mol	0 mol

Sachant que la réaction est totale, déterminer :

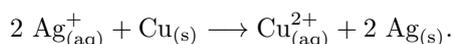
a) L'avancement maximal ξ_{max} pour cette transformation

b) La quantité de matière de dioxyde de carbone (CO_2) à l'état final

Entraînement 24.9 — Une autre transformation totale.



On s'intéresse à la réaction des ions argent avec le cuivre selon l'équation de réaction :



Cette réaction est totale. On mélange initialement un volume $V = 20$ mL d'une solution contenant des ions argent (Ag^{+}) à la concentration $C = 0,25 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ avec une masse $m = 0,254$ g de cuivre solide (Cu).

On donne la masse molaire du cuivre $M_{\text{Cu}} = 63,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et celle de l'argent $M_{\text{Ag}} = 107 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

a) Quel est le réactif limitant ?

- (a) $\text{Ag}_{(aq)}^{+}$
 (b) $\text{Cu}_{(s)}$
 (c) Il n'y en a pas

.....

b) À la fin de la réaction, la quantité de matière de $\text{Cu}_{(s)}$ vaut :

- (a) 1,5 mmol
 (b) 2,5 mmol
 (c) 0 mmol

.....

Entraînement 24.10 — Loi d'action de masse et composition à l'équilibre.



À l'instant initial, on mélange un volume V_1 d'une solution aqueuse d'ions benzoate (PhCOO^-) à la concentration C_1 et un volume V_2 d'une solution aqueuse d'ions oxonium (H_3O^+) à la concentration C_2 .

On donne l'équation de la réaction et son tableau d'avancement en quantité de matière :

	$\text{PhCOO}^-_{(\text{aq})}$	+	$\text{H}_3\text{O}^+_{(\text{aq})}$	=	$\text{PhCOOH}_{(\text{s})}$	+	$\text{H}_2\text{O}_{(\ell)}$
État initial	C_1V_1		C_2V_2		0		excès
État final	$C_1V_1 - \xi$		$C_2V_2 - \xi$		ξ		excès

a) À l'aide de la loi d'action de masse, exprimer la constante d'équilibre K° associée à cette réaction, en fonction de C_1 , C_2 , V_1 , V_2 , C° et ξ .

.....

b) En déduire l'équation du second degré permettant de déterminer la valeur de ξ .

.....



Entraînement 24.11 — À la recherche de l'équilibre.



La loi d'action de masse permet de déterminer l'avancement ξ ou l'avancement volumique ξ_v à l'équilibre. Mettre ces différentes lois d'action de masse sous la forme d'une équation du second degré en ξ ou ξ_v .

a) $K^\circ = \frac{\xi_v^2}{(C_1 - \xi_v) \times (C_2 - \xi_v)}$

b) $K^\circ = \frac{\xi_v(C_2 + \xi_v)}{(C_1 - \xi_v) \times C^\circ}$

c) $K^\circ = \frac{\left(\frac{\xi RT}{V}\right)^2}{\left(\frac{(n_1 - \xi)RT}{V}\right) \times \left(\frac{(n_2 - \xi)RT}{V}\right)}$

d) $K^\circ = \frac{\left(\frac{\xi RT}{V}\right) \cdot P^\circ}{\left(\frac{(n - 2\xi)RT}{V}\right)^2}$

e) $K^\circ = \frac{\left(\frac{\xi}{n - \xi} \cdot P\right) P^\circ}{\left(\frac{(n - 2\xi)}{n - \xi} \cdot P\right)^2}$

 **Entraînement 24.12 — Calcul de l'avancement à l'équilibre.**



Dans chacune des situations suivantes, une réaction se produit dans le sens direct. On indique que son avancement maximal est $\xi_{v,\max} = 1,0 \times 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

La loi d'action de masse donne l'équation dont est solution l'avancement volumique ξ_v .

Calculer ξ_v .

a) $\xi_v^2(1 - K^\circ) + \xi_v K^\circ(C_1 + C_2) - K^\circ C_1 C_2 = 0$ avec $\begin{cases} K^\circ = 2,0 \\ C_2 = 2C_1 = 1,0 \times 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \end{cases}$

b) $\xi_v^2 + \xi_v K^\circ C^\circ - K^\circ C_1 C^\circ = 0$ avec $\begin{cases} K^\circ = 10^{-1,7} \\ C_1 = 1,0 \times 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \end{cases}$

Autour des réactions acido-basiques

 **Entraînement 24.13 — pH d'une solution.**



La constante d'autoprotolyse de l'eau $K_e = \frac{a(\text{HO}^-) \times a(\text{H}_3\text{O}^+)}{a(\text{H}_2\text{O})^2}$ vaut $K_e = 10^{-14}$ à 25 °C.

Calculer le pH de la solution dans les cas suivants.

a) Une solution telle que $[\text{H}_3\text{O}^+] = 5,0 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

b) Une solution telle que $[\text{HO}^-] = 1,0 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

 **Entraînement 24.14 — Quelques combats de concentration.**



Pour chacun des cas suivants, déterminer quelle solution possède la plus grande concentration en ions oxonium.

a) Premier cas

(a) Une solution de pH = 1,0. (b) Une solution de pH = 2,0.

b) Deuxième cas

(a) Une solution avec $[\text{H}_3\text{O}^+] = 5,0 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. (b) Une solution de pH = 3,0.

c) Troisième cas

(a) Une solution avec $[\text{HO}^-] = 2,0 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.
 (b) Une solution avec $[\text{HO}^-] = 8,0 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

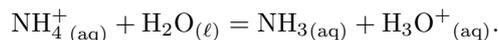
d) Quatrième cas

(a) Une solution avec $[\text{HO}^-] = 1,0 \times 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.
 (b) Une solution de pH = 9,0.

Entraînement 24.15 — Constante d'acidité.

On considère le couple $\text{NH}_4^+/\text{NH}_3$.

Sa constante d'acidité K_A est la constante d'équilibre de la réaction :



On donne $K_A = 10^{-9,2}$ à 25 °C.

a) À l'aide de la loi d'action de masse, exprimer le pH en fonction de $\text{p}K_A = -\log_{10}(K_A)$ ainsi que des concentrations $[\text{NH}_4^+]$ et $[\text{NH}_3]$.

.....

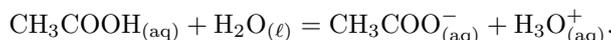
b) Sachant qu'on a $[\text{NH}_4^+] = 2,0 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et $[\text{NH}_3] = 1,0 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, calculer le pH de la solution.

.....

Entraînement 24.16 — Équilibre acido-basique.

On introduit un volume $V = 20,0 \text{ mL}$ d'une solution d'acide éthanoïque CH_3COOH à la concentration $C = 2,00 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ dans un bécher contenant un volume $V' = 20,0 \text{ mL}$ d'eau distillée.

Un équilibre s'établit selon l'équation de réaction :



La constante d'équilibre de cette réaction est $K_A = 10^{-4,8}$ à la température de l'expérience.

a) Établir l'équation du second degré vérifiée par l'avancement volumique ξ_v à l'état final d'équilibre.

.....

b) Calculer $[\text{CH}_3\text{COOH}]_{\text{eq}}$ à l'équilibre

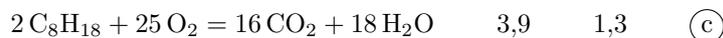
c) En déduire le pH de la solution à l'équilibre

Réponses mélangées

$$\frac{a(\text{NH}_3)_{\text{eq}} \times a(\text{H}_2\text{O})_{\text{eq}}}{a(\text{NH}_4^+)_{\text{eq}} \times a(\text{HO}^-)_{\text{eq}}} \quad 8,8 \times 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \quad n_2 - 3\xi$$

$$4K^\circ \xi^2 - \xi \left(4K^\circ n + \frac{P^\circ V}{RT} \right) + K^\circ n^2 = 0 \quad \textcircled{b} \quad \textcircled{a} \quad 2 \text{CO} + \text{O}_2 = 2 \text{CO}_2$$

$$3,6 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \quad 5,0 \times 10^{-2} \text{ mol} \quad \frac{a(\text{NH}_3)_{\text{eq}} \times a(\text{H}_3\text{O}^+)_{\text{eq}}}{a(\text{NH}_4^+)_{\text{eq}} \times a(\text{H}_2\text{O})_{\text{eq}}}$$



$$\xi^2(4K^\circ P + P^\circ) - \xi(4nK^\circ P + nP^\circ) + K^\circ n^2 P = 0 \quad \xi_v^2 + \xi_v(C_2 + K^\circ C^\circ) - K^\circ C_1 C^\circ = 0$$

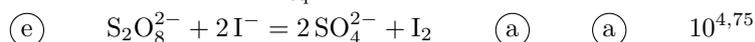
$$2\xi \quad 2 \text{NO} + 2 \text{CO} = \text{N}_2 + 2 \text{CO}_2 \quad \xi^2(K^\circ - 1) - \xi K^\circ(n_1 + n_2) + K^\circ n_1 n_2 = 0$$

$$\textcircled{a} \quad \textcircled{b} \quad \textcircled{a} \quad \text{pH} = \text{p}K_A + \log_{10} \left(\frac{[\text{NH}_3]}{[\text{NH}_4^+]} \right) \quad \textcircled{a}$$

$$n_1 - \xi \quad \xi^2 - \xi(C_1 V_1 + C_2 V_2) + C_1 C_2 V_1 V_2 - \frac{[C^\circ(V_1 + V_2)]^2}{K^\circ} = 0$$



$$\textcircled{a} \quad \frac{a(\text{HO}^-)_{\text{eq}} \times a(\text{H}_3\text{O}^+)_{\text{eq}}}{a(\text{H}_2\text{O})_{\text{eq}}^2} \quad \frac{(C^\circ(V_1 + V_2))^2}{(C_1 V_1 - \xi) \times (C_2 V_2 - \xi)}$$



$$\xi_v^2(1 - K^\circ) + \xi_v K^\circ(C_1 + C_2) - K^\circ C_1 C_2 = 0 \quad 12 \quad \xi_v^2 + K_A C^\circ \xi_v - K_A C_1 C^\circ = 0$$

$$\textcircled{d} \quad 8,9 \quad 2 \text{Ag}^+ + \text{Cu} = 2 \text{Ag} + \text{Cu}^{2+} \quad 4,0 \times 10^{-1} \text{ mol} \quad \textcircled{b} \quad K^\circ = \frac{K_A}{K_e}$$

Cinétique chimique

Prérequis

Avancement. Spectrophotométrie. Catalyse. Équations différentielles.

Vitesse de réaction et notion d'ordre

Entraînement 25.1 — Constante de vitesse.



On considère une transformation chimique modélisée par la réaction d'équation :



On suppose que la réaction admet un ordre, on note k la constante de vitesse et v la vitesse volumique de réaction.

a) On suppose que k s'exprime en s^{-1} .

Parmi ces relations fausses, laquelle a au moins le mérite d'être homogène ?

(a) $v = k \times [B]$

(b) $v = k^2 \times [A]$

(c) $v = \frac{k}{[A]}$

(d) $v = \ln(k) \times [A]$

.....

b) La constante k s'exprime en $L^2 \cdot mol^{-2} \cdot s^{-1}$.

Quel est l'ordre probable de la réaction ?

(a) 0

(b) $\frac{1}{2}$

(c) 2

(d) 3

.....

L'unité de k s'écrit $mol^\alpha \cdot L^\beta \cdot s^\gamma$.

c) Quelle est la valeur de γ quel que soit l'ordre de la réaction ?

(a) 0

(b) 1

(c) -1

(d) 2

.....

d) Quelle est la valeur de α si l'ordre de la réaction est 2 ?

(a) 0

(b) 1

(c) -1

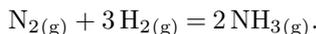
(d) 2

.....

Entraînement 25.2 — Exprimer des vitesses de réaction.



On considère l'équation de la réaction de formation de l'ammoniac NH_3 à partir du diazote N_2 et du dihydrogène H_2 , en phase gazeuse :



a) Exprimer la vitesse volumique de formation du produit en fonction de sa concentration.

(a) $v_{\text{form}}(\text{NH}_3) = + \frac{d[\text{NH}_3]}{dt}$

(c) $v_{\text{form}}(\text{NH}_3) = \frac{1}{2} \frac{d[\text{NH}_3]}{dt}$

(b) $v_{\text{form}}(\text{NH}_3) = - \frac{d[\text{NH}_3]}{dt}$

(d) $v_{\text{form}}(\text{NH}_3) = 2 \frac{d[\text{NH}_3]}{dt}$

.....

b) Exprimer la vitesse volumique de disparition de H_2 en fonction de sa concentration.

(a) $v_{\text{disp}}(\text{H}_2) = - \frac{1}{3} \frac{d[\text{H}_2]}{dt}$

(c) $v_{\text{disp}}(\text{H}_2) = 3 \frac{d[\text{H}_2]}{dt}$

(b) $v_{\text{disp}}(\text{H}_2) = - \frac{d[\text{H}_2]}{dt}$

(d) $v_{\text{disp}}(\text{H}_2) = -3 \frac{d[\text{H}_2]}{dt}$

.....

c) Choisir les bonnes réponses parmi les propositions suivantes définissant la vitesse volumique v de réaction.

(a) $v = \frac{1}{2} \frac{d[\text{NH}_3]}{dt}$

(c) $v = - \frac{d[\text{N}_2]}{dt}$

(b) $v = - \frac{1}{2} \frac{d[\text{NH}_3]}{dt}$

(d) $v = - \frac{1}{3} \frac{d[\text{H}_2]}{dt}$

.....

d) Exprimer la vitesse de disparition des réactifs et la vitesse de formation du produit en fonction de la vitesse volumique v de réaction.

(a) $\frac{1}{2}v; v; v$

(c) $v; 3v; 2v$

(b) $v; -3v; -2v$

(d) $v; -v; -v$

.....

Entraînement 25.3 — Notion d'ordre.



Indiquer si les réactions suivantes possèdent un ordre global et, si oui, préciser sa valeur.

a) $\text{NO}_{2(\text{g})} + \text{CO}_{(\text{g})} = \text{NO}_{(\text{g})} + \text{CO}_{2(\text{g})}; v = k \times [\text{NO}_2]^2$

b) $\text{CO}_{(\text{g})} + \text{Cl}_{2(\text{g})} = \text{COCl}_{2(\text{g})}; v = k \times [\text{CO}][\text{Cl}_2]^{3/2}$

c) $\text{H}_{2(\text{g})} + \text{Br}_{2(\text{g})} = 2 \text{HBr}_{(\text{g})}; v = \frac{k \times [\text{H}_2][\text{Br}_2]^{1/2}}{1 + k' \times \frac{[\text{HBr}]}{[\text{Br}_2]}}$

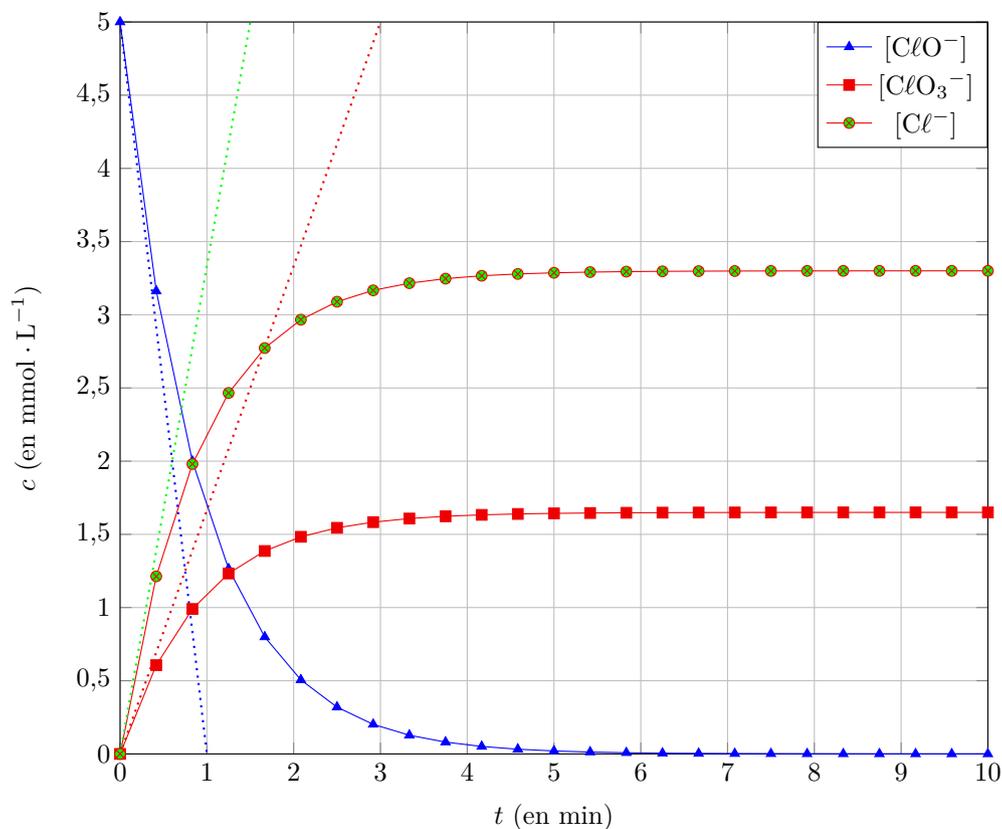
Entraînement 25.4 — Déterminer graphiquement des vitesses.



On considère la transformation chimique d'équation suivante :



Le profil de concentration des réactifs et des produits est présenté ci-dessous :



Déterminer graphiquement, à l'instant $t = 0$ min :

a) la vitesse de disparition des ions hypochlorite ClO^-

b) la vitesse de formation des ions chlorate ClO_3^-

c) la vitesse de formation des ions chlorures Cl^-

d) la vitesse de réaction v

Around the Arrhenius law

The rate constant k of a reaction is given by the Arrhenius relation :

$$k = A \times \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right), \quad (*)$$

where A is the frequency factor independent of temperature, E_a the activation energy of the transformation (in $\text{J} \cdot \text{mol}^{-1}$) and $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ the constant of perfect gases.

📖 Entraînement 25.5 — Exploiter la loi d'Arrhenius.



a) À l'aide de (*), exprimer E_a en fonction de k , A , R et T

The value of k doubles between $T_1 = 25^\circ\text{C}$ and $T_2 = 35^\circ\text{C}$.

b) Déterminer la valeur de E_a

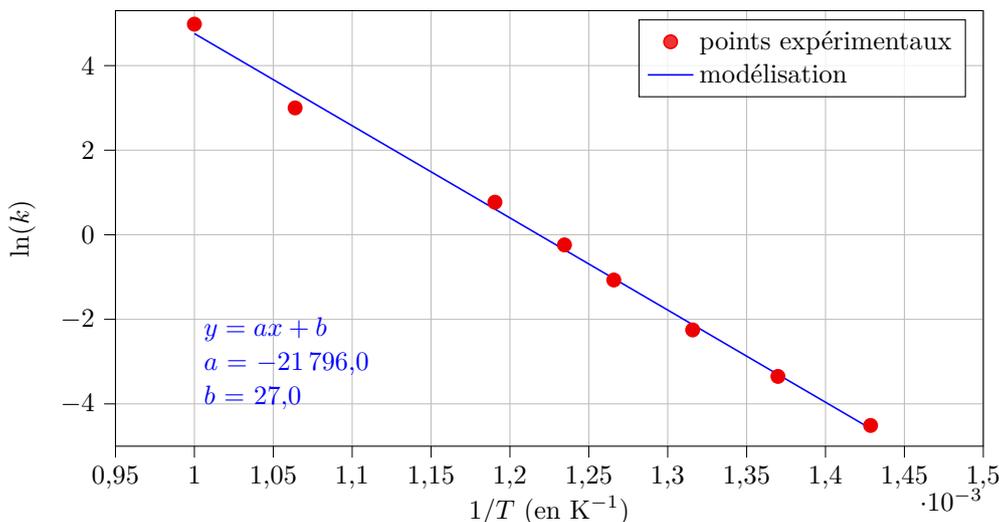
📖 Entraînement 25.6 — Exploiter la loi d'Arrhenius linéarisée.



In this training, the rate constant k is expressed in $\text{L} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$.

a) À l'aide de (*), exprimer $\ln(k)$ en fonction de E_a , A , R et T

On considers the linear regression below.



b) À l'aide de cette régression, déterminer la valeur de l'énergie d'activation E_a

c) À l'aide de cette régression, déterminer la valeur du facteur de fréquence A

Autour des réactions admettant un ordre

On considère une transformation chimique modélisée par la réaction d'équation :



où A et B sont des composés chimiques et où α et β sont les coefficients stœchiométriques correspondants.

La constante de vitesse de la réaction est notée k .



Entraînement 25.7 — Établir une loi d'ordre 0.



a) Donner l'expression de v , la vitesse volumique de réaction, en fonction de $[A]$.

.....

b) La réaction est supposée d'ordre 0 par rapport à A. Quelle est l'autre expression de v ?

.....

c) En déduire, par intégration, la concentration $[A]$ en fonction du temps.

On notera $[A]_0$ la concentration initiale.

.....



Entraînement 25.8 — Établir une loi d'ordre 1.



a) La réaction est supposée d'ordre 1 par rapport à A. Quelle est l'autre expression de v ?

.....

b) En déduire, par intégration, la concentration $[A]$ en fonction du temps.

On notera $[A]_0$ la concentration initiale.

.....



Entraînement 25.9 — Établir une loi d'ordre 2.



a) La réaction est supposée d'ordre 2 par rapport à A. Quelle est l'autre expression de v ?

.....

b) En déduire, par intégration, l'expression de $\frac{1}{[A]}$ en fonction du temps.

On notera $[A]_0$ la concentration initiale.

.....

c) En déduire l'expression de $[A]$ en fonction du temps.

.....

**Entraînement 25.10 — Exprimer un temps de demi-réaction.**

On considère une transformation chimique modélisée par la réaction d'équation :



où A et B sont des composés chimiques et où α et β sont les coefficients stoechiométriques correspondants.

On appelle *temps de demi-réaction* et on note $t_{1/2}$, le temps au bout duquel la moitié du réactif limitant a été consommée. On note $[A]_0$ la concentration initiale en A.

Exprimer le temps de demi-réaction $t_{1/2}$ pour chaque expression de $[A]$:

a) $[A] = [A]_0 - \alpha kt$

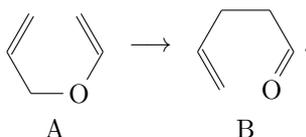
b) $[A] = [A]_0 \times \exp(-\alpha kt)$

c) $\frac{1}{[A]} = \frac{1}{[A]_0} + \alpha kt$

Détermination expérimentale d'ordre

Entraînement 25.11 — Appliquer la méthode du temps de demi-réaction.

On considère la réaction d'isomérisation ci-dessous dont on a mesuré le temps de demi-réaction $t_{1/2}$ pour différentes concentrations initiales en réactif :



$[A]_0$ (en mol · L ⁻¹)	2,66	3,24	4,03	4,87
$t_{1/2}$ (en s)	877	876	878	877

On rappelle ci-dessous les expressions des temps de demi-réaction pour des réactions d'ordre 0, 1 ou 2.

Ordre	0	1	2
$t_{1/2}$	$\frac{[A]_0}{2k}$	$\frac{\ln(2)}{k}$	$\frac{1}{[A]_0 k}$

a) Déterminer l'ordre de la réaction

b) Calculer la constante de vitesse

Entraînement 25.12 — Appliquer la méthode de la dégénérescence de l'ordre.



On étudie dans cet entraînement la réaction de transformation du 1-bromo-2-méthylpropane (noté RBr) en 2-méthylpropan-1-ol (noté ROH) par l'hydroxyde de sodium en solution aqueuse.

L'équation associée à cette réaction, de constante de vitesse k , est :



Pour étudier sa cinétique, on mesure la concentration en réactif [RBr] au cours du temps, durant une expérience pour laquelle la concentration initiale en ions hydroxyde est $[\text{OH}^-] = 1,0 \times 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

Temps t (en min)	0	20	70	140	280
Concentration c (en 10^{-3} mol/L)	1,00	0,80	0,50	0,25	0,06

a) Déterminer le temps de demi-réaction $t_{1/2}$ à l'aide du tableau.

(a) $t_{1/2} = 20 \text{ min}$

(c) $t_{1/2} = 140 \text{ min}$

(b) $t_{1/2} = 70 \text{ min}$

(d) $t_{1/2} = 280 \text{ min}$

.....

b) On suppose que l'ordre partiel par rapport à chacun des réactifs est de 1.

La loi de vitesse peut s'écrire (*plusieurs réponses sont possibles*) :

(a) $v = k[\text{RBr}][\text{HO}^-]$

(c) $v = k_{\text{app}}[\text{RBr}]$ avec $k_{\text{app}} = k[\text{HO}^-]_0$

(b) $v = k_{\text{app}}[\text{HO}^-]$ avec $k_{\text{app}} = k[\text{RBr}]_0$

(d) $v = k[\text{RBr}]^2$

.....

c) Indiquer le graphique à tracer pour déterminer la valeur de la constante apparente k_{app} .

(a) [RBr] en fonction du temps

(b) $\ln([\text{RBr}])$ en fonction du temps

(c) $\frac{1}{[\text{RBr}]}$ en fonction du temps

(d) $\exp([\text{RBr}])$ en fonction du temps

.....

d) On trouve $k_{\text{app}} = 1,0 \times 10^{-2} \text{ min}^{-1}$. En déduire la valeur de k .

(a) $k = 1,0 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$

(c) $k = 1,0 \times 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$

(b) $k = 1,0 \times 10^{-3} \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$

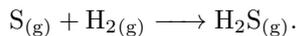
(d) $k = 1,0 \times 10^{-1} \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$

.....

Entraînement 25.13 — Appliquer la méthode différentielle.



On étudie la synthèse du sulfure d'hydrogène $\text{H}_2\text{S}_{(g)}$ à partir de vapeurs de soufre $\text{S}_{(g)}$ et de dihydrogène gazeux $\text{H}_{2(g)}$ suivant la réaction d'équation :



On suppose que la vitesse initiale est de la forme $v_0 = k \times [\text{S}]_0^n \times [\text{H}_2]_0^m$.

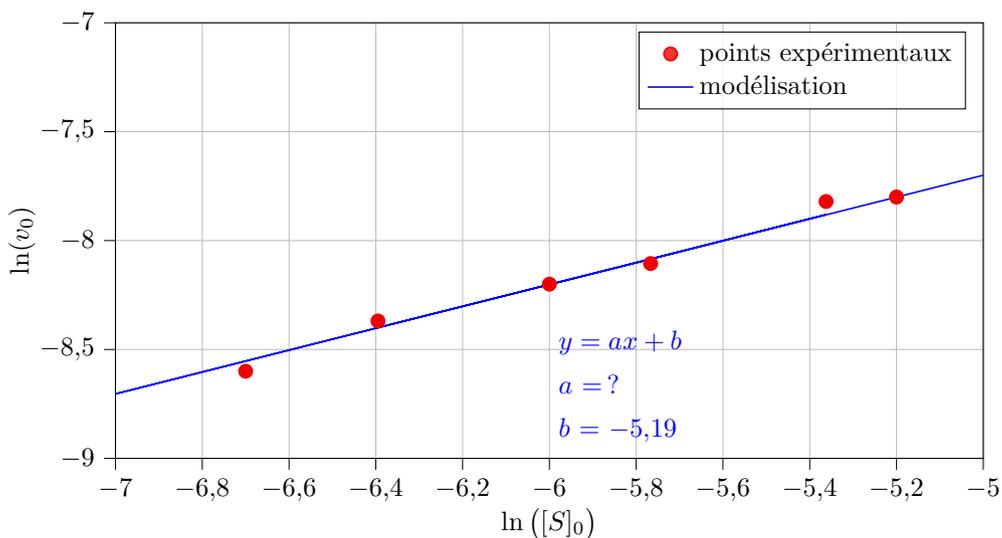
Deux séries d'expériences ont été effectuées afin de déterminer les ordres partiels par rapport à chacun des réactifs.

Série 1			
$[\text{S}]_0$ (en $10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$)	1,67	1,67	1,67
$[\text{H}_2]_0$ (en $10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$)	0,62	1,24	1,86
v_0 (en $10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$)	0,75	1,50	2,25

a) Déterminer la valeur de m par exploitation des données expérimentales de la série 1.

.....

La deuxième série d'expériences donne la régression linéaire suivante pour $[\text{H}_2]_0 = 1,86 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.



b) Exprimer $\ln(v_0)$ en fonction de $\ln[\text{S}]_0$ et montrer que ces entités sont reliées par une fonction affine.

.....

c) Exploiter la régression linéaire afin de déterminer la valeur de n

d) Déterminer la valeur de la constante de vitesse k

Réponses mélangées

$m = 1$	$k[A]^2$	k	Ⓓ	$\frac{\ln(2)}{\alpha k}$	Ⓐ Ⓒ Ⓓ	$1,8 \times 10^2 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$
$\frac{1}{[A]_0 \alpha k}$	$n = \frac{1}{2}$	Ⓐ	$\frac{[A]_0}{2\alpha k}$	$1,7 \text{ mmol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$		$3,3 \text{ mmol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$
$1,7 \text{ mmol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$	$\ln(A) - \frac{E_a}{RT}$		$3,00 \text{ L}^{1/2} \cdot \text{mol}^{-1/2} \cdot \text{min}^{-1}$			$53 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$
1	Oui : $\frac{5}{2}$	Non	$7,90 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$	$[A]_0 \times \exp(-\alpha kt)$		Oui : 2
$RT(\ln(A) - \ln(k))$	$\frac{1}{[A]_0} + \alpha kt$	Ⓐ	$5,0 \text{ mmol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$	Ⓐ et Ⓒ		
Ⓒ	Ⓑ	Ⓓ	$-\frac{1}{\alpha} \frac{d[A]}{dt}$	$\ln(k \times [\text{H}_2]_0^m) + n \ln([\text{S}]_0)$	Ⓒ	Ⓑ
$\frac{[A]_0}{1 + \alpha[A]_0 kt}$	$[A]_0 - \alpha kt$		$5,3 \times 10^{11} \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$	$v = k[A]$	Ⓒ	Ⓑ

Chiffres significatifs et incertitudes

Prérequis

- Les incertitudes sont à donner avec deux chiffres significatifs.
- Toutes les incertitudes fournies sont des incertitudes-types.

Ainsi, si le résultat d'une mesure de vitesse est de 30 mètres par seconde avec une incertitude-type de 1 mètre par seconde, on notera cette vitesse :

$$v = (30,0 \pm 1,0) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Résultats numériques

Entraînement 26.1 — Écriture scientifique.



Réécrire les nombres en utilisant l'écriture scientifique. On veillera à garder les chiffres significatifs.

- | | | | |
|--------------------|----------------------|---------------------------------|----------------------|
| a) 31,5 | <input type="text"/> | e) 2 023,9 | <input type="text"/> |
| b) 0,001 9 | <input type="text"/> | f) 7 300 | <input type="text"/> |
| c) 0,8120 | <input type="text"/> | g) 330×10^6 | <input type="text"/> |
| d) 1 600 002 | <input type="text"/> | h) $70,22 \times 10^{-4}$ | <input type="text"/> |

Entraînement 26.2 — Combien de chiffres significatifs ?



Indiquer le nombre de chiffres significatifs des grandeurs mesurées suivantes :

- | | | | |
|--|----------------------|---|----------------------|
| a) une intensité électrique de 0,39 A .. | <input type="text"/> | c) une vitesse de 12,250 km · h ⁻¹ | <input type="text"/> |
| b) une tension de 12,84 mV | <input type="text"/> | d) une longueur de 0,002 0 m | <input type="text"/> |

Entraînement 26.3 — Opérations et chiffres significatifs.



Effectuer les calculs en gardant le bon nombre de chiffres significatifs.

- a) Combien de kilomètres sont parcourus en 6,0 min par une voiture roulant à une vitesse moyenne $v = 80 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$?
-
- b) Quel est le périmètre d'un rectangle de largeur 6 mm et de longueur 15 cm ?
-

Le gain d'un pont diviseur de tension vaut $G = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$. On effectue le montage avec une résistance $R_1 = 0,9 \text{ k}\Omega$ et une résistance $R_2 = 100 \Omega$.

- c) Que vaut le gain G ?
-

Entraînement 26.4 — Incertitude et chiffres significatifs.



Une mesure de focale donne pour résultat $f' = 12,016\ 835\ 7$ cm avec une incertitude-type de $32,316\ 648\ 2$ mm. Quel sera votre résultat numérique final ?

- (a) $f' = (12 \pm 3)$ cm (c) $f' = (12,0 \pm 3,2)$ cm
 (b) $f' = (120 \pm 65)$ mm (d) $f' = (120 \pm 33)$ mm

.....

Propagation des erreurs

Prérequis

On considère x et y , deux grandeurs expérimentales indépendantes, et on considère $z = f(x, y)$ une grandeur calculée.

L'incertitude-type $u(z)$ est reliée à celles de x et y *via* les relations :

$$u(z)^2 = a^2 u^2(x) + b^2 u^2(y) \quad \text{si } z = ax + by$$

$$\left(\frac{u(z)}{z}\right)^2 = a^2 \left(\frac{u(x)}{x}\right)^2 + b^2 \left(\frac{u(y)}{y}\right)^2 \quad \text{si } z = cx^a y^b$$

où a , b et c sont des paramètres fixés.

Entraînement 26.5 — Pour commencer.



On mesure $x = (10,0 \pm 0,2)$ m et $y = (9,1 \pm 0,3)$ m.

Calculer :

- a) $x + y$
 b) $x - y$
 c) $x \times y$
 d) $\frac{y}{x}$



Entraînement 26.6 — Dosage d'une solution.



On dose une solution acide de concentration c_A inconnue. Le volume de la solution dosée est V_A , et la solution utilisée pour le dosage est de concentration c_B . À l'équivalence, un volume V_B de base est versé et l'on a :

$$c_A = \frac{c_B \times V_B}{V_A}.$$

La base est préparée de sorte à avoir $c_B = (100,0 \pm 2,0)$ mmol · L⁻¹.

De plus, on mesure les volumes $V_A = (20,00 \pm 0,10)$ mL et $V_B = (11,80 \pm 0,10)$ mL.

Quel résultat obtient-on pour c_A ? (en mmol · L⁻¹)

**Entraînement 26.7 — Puissance électrique dans une résistance.**

On désire mesurer la puissance dissipée par effet Joule dans une résistance, donnée par $\mathcal{P} = U \times I = R I^2$.
Donner la puissance (exprimée en watts) et son incertitude pour les mesures suivantes :

- a) $U = (2,382 \pm 0,050) \text{ V}$ et $I = (0,500 \pm 0,010) \text{ A}$
- b) $I = (0,500 \pm 0,010) \text{ A}$ et $R = (4,70 \pm 0,14) \Omega$
- c) Ces deux mesures sont-elles compatibles ?
 (a) Oui (b) Non

**Entraînement 26.8 — Diamètre d'un tube.**

On mesure l'épaisseur d'un tube cylindrique au pied à coulisse.
Le diamètre intérieur du tube est $d = (6,8 \pm 0,1) \text{ mm}$ et le diamètre extérieur $D = (10,3 \pm 0,1) \text{ mm}$.

- a) Exprimer l'épaisseur e du tube en fonction de d et D .
 (a) $\pi(D^2 - d^2)$ (b) $\frac{D-d}{2}$ (c) $\sqrt{D^2 + d^2}$ (d) $\frac{d-D}{2}$
- b) En déduire l'expression de l'incertitude-type sur l'épaisseur $u(e)$ en fonction de D , d , $u(d)$ et $u(D)$.
 (a) $\frac{1}{2} \sqrt{u^2(D) + u^2(d)}$ (c) $\sqrt{u^2(D) + u^2(d)}$
 (b) $\sqrt{\left(\frac{u(D)}{D}\right)^2 + \left(\frac{u(d)}{d}\right)^2}$ (d) $\frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{u(D)}{D}\right)^2 + \left(\frac{u(d)}{d}\right)^2}$
- c) En déduire le résultat de la mesure de e .
 (a) $e = (1,75 \pm 0,07) \text{ mm}$ (c) $e = (1,8 \pm 0,1) \text{ mm}$
 (b) $e = (1,75 \pm 0,10) \text{ mm}$ (d) $e = (1,750 \pm 0,071) \text{ mm}$

**Entraînement 26.9 — Analyse d'une figure de diffraction.**

On mesure la figure de diffraction obtenue en interposant un cheveu entre un écran et un laser. La distance entre le cheveu et l'écran est $D = (3 \pm 10 \times 10^{-3}) \text{ m}$, la longueur d'onde du laser $\lambda = (632,80 \pm 0,10) \text{ nm}$, et l'on observe une tache de diffraction de largeur $\ell = (5,10 \pm 0,30) \text{ cm}$.

Le diamètre d du cheveu peut alors se déduire de ces mesures *via* la relation :

$$d = 2 \frac{\lambda D}{\ell}.$$

- a) Exprimer l'incertitude $u(d)$ en fonction de d , λ , D , ℓ ,
 et de $u(\lambda)$, $u(D)$ et $u(\ell)$
- b) Quel résultat obtient-on pour d ? (en μm)

Incertitudes expérimentales

Entraînement 26.10 — Série de mesures.



On procède à $n = 10$ mesures d'une tension. Le tableau ci-dessous recense les résultats :

Mesure n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
U_i (en V)	4,955	5,596	4,271	4,955	5,164	5,371	4,671	4,736	5,393	4,183

a) Que vaut la moyenne arithmétique $m = \frac{1}{n} \sum_i U_i$ de la série?

b) Calculer l'écart-type expérimental de la série $\sigma_U = \sqrt{\frac{\sum_i (U_i - m)^2}{n - 1}}$

L'incertitude-type de m est donnée par $u(m) = \frac{\sigma_U}{\sqrt{n}}$.

c) En déduire le résultat final de la mesure

Entraînement 26.11 — Focométrie.



On procède à des mesures d'une distance focale (notée f') ; le tableau ci-dessous recense les résultats :

f' (en cm)	24,6	24,5	25,1	25,1	25,3	25,4	24,9	24,8	24,9	25,4	25,3	24,9
--------------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

Donner le résultat final de la mesure

Entraînement 26.12 — Résistances en série.



On dispose de n résistances identiques, dont l'incertitude relative est donnée à 1%. On les monte en série. Ainsi, la résistance totale est égale à la somme des résistances individuelles.

Quelle est l'incertitude relative pour la résistance totale lorsque $n = 5$?

(a) 0,44 %

(b) 1 %

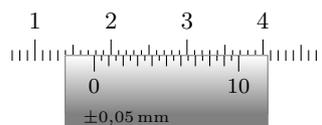
(c) 2,2 %

.....

Entraînement 26.13 — Mesure au pied à coulisse.



On mesure le diamètre d d'un fil de cuivre au pied à coulisse (on prendra $u(d) = 0,050$ mm) :



a) Que vaut le diamètre?

b) En déduire la section droite du fil (en mm^2)

Autour du z-score

Prérequis

On appelle *écart normalisé* (ou *z-score*) entre deux grandeurs x_1 et x_2 , connues avec des incertitudes-types $u(x_1)$ et $u(x_2)$, le nombre réel positif défini par :

$$z = \frac{|x_2 - x_1|}{\sqrt{u(x_1)^2 + u(x_2)^2}}$$

Par convention, les deux valeurs x_1 et x_2 sont dites compatibles si $z \leq 2$. Comme c'est un indicateur à comparer à 2, on ne garde qu'une décimale lors de sa détermination.

On utilise en particulier cette définition dans le cas où une des grandeurs, par exemple x_1 peut être considérée comme une référence, avec une incertitude négligeable. On a alors $u(x_1) \ll u(x_2)$ et la formule approchée plus simple :

$$z = \frac{|x_2 - x_1|}{u(x_2)}$$

Entraînement 26.14 — Z-scores et compatibilité.



Dans chaque situation, deux valeurs d'une même grandeur sont obtenues indépendamment.

Indiquer, en calculant leurs z-scores, si ces valeurs sont compatibles :

a) La vitesse du son dans l'air est déterminée expérimentalement à $(349,0 \pm 2,3) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Une table de référence donne $(344,08 \pm 0,69) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

(a) Oui, elles sont compatibles

(b) Non, elles ne le sont pas

.....

b) Une température est mesurée par deux groupes en TP. Le premier groupe obtient $(52,900 \pm 0,060) ^\circ\text{C}$, le second $(53,100 \pm 0,060) ^\circ\text{C}$.

(a) Oui, elles sont compatibles

(b) Non, elles ne le sont pas

.....

c) Une lentille est vendue pour avoir une focale de 25 cm. Lors d'une séance de TP, cette focale est mesurée à $(24,05 \pm 0,85) \text{ cm}$.

(a) Oui, elles sont compatibles

(b) Non, elles ne le sont pas

.....

Réponses mélangées

$3,30 \times 10^8$ 8,0 km $(1,191 \pm 0,035) \text{ W}$ $1,0 \times 10^{-1}$ $7,300 \times 10^3$ 0,472 V
 (a) 5 4,929 5 V 4 (a) $0,910 \pm 0,035$ $(19,10 \pm 0,36) \text{ m}$
 (a) (b) (b) $7,022 \times 10^{-3}$ $3,15 \times 10^1$ (a) $(74,4 \pm 4,4) \mu\text{m}$
 $(91,0 \pm 3,5) \text{ m}^2$ (c) et (d) 2 31 cm $d \sqrt{\left(\frac{u(\lambda)}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{u(D)}{D}\right)^2 + \left(\frac{u(\ell)}{\ell}\right)^2}$
 $(2,49 \pm 0,14) \text{ mm}^2$ 2 $1,600\,002 \times 10^6$ $2,023\,9 \times 10^3$ $(1,175 \pm 0,059) \text{ W}$
 $8,120 \times 10^{-1}$ $(59,0 \pm 1,4) \text{ mmol} \cdot \text{L}^{-1}$ $(0,90 \pm 0,36) \text{ m}$ $(1,780 \pm 0,050) \text{ mm}$
 $(4,93 \pm 0,15) \text{ V}$ (d) $1,9 \times 10^{-3}$ $(25,017 \pm 0,092) \text{ cm}$ (b)