Isomorphismes / Transformations naturelles

• $E \times F \simeq F \times E$

E, F ev

Déf : Soient $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ catégories.
Soient $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$

Une transformation naturelle α de F vers G est "un morphisme de F vers G"

ie : (1) pour tout objet $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$

on a un morphisme $\alpha_X : F(X) \to G(X)$

$$(\alpha_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), G(X)))$$

② $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$

$$X \xrightarrow{f} Y \quad \rightsquigarrow$$

foncteur F

foncteur G

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\alpha_X"] & F(Y) \arrow[d, "\alpha_Y"] \\
G(X) \arrow[r, "G(f)"] & G(Y)
\end{tikzcd}$$

on veut q ce diagramme commute.

<u>Bilan</u> :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "F"{name=U}] \arrow[r, bend right=50, ""{name=D, above}] & \mathcal{D}
\arrow[from=U, to=D, Rightarrow, "\alpha"]
\end{tikzcd}$$

<u>intuition pour F et G</u> :

F et G sont des familles d'objets de $\mathcal{D}$ paramétrées par $\mathcal{C}$.

C'est une famille de morphismes $\alpha_x : F(x) \longrightarrow G(x)$

faisant commuter ce qu'il faut.

<u>Fait</u> : 1) les transformations naturelles se composent :

i.e

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, bend left=60, "F"] \arrow[rr, "G"] \arrow[rr, bend right=60, "H"'] \arrow[rr, phantom, shift left=4ex, "\Downarrow\alpha"] \arrow[rr, phantom, shift right=4ex, "\Downarrow\beta"] & & \mathcal{D}
\end{tikzcd}
$$

On obtient :
$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "F"] \arrow[r, bend right=50, "H"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta\circ\alpha"] & \mathcal{D}
\end{tikzcd}
$$

2) Si $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$, on a

$Id_F : F \Longrightarrow F$

$\left(x \in \mathcal{C} : \quad F(x) \xrightarrow{Id_x} F(x) \right)$

Notation : on note

$$\mathrm{Nat}(F, G)$$

la collection des

$$\alpha : \begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

Notation :

- $\mathcal{C}, \mathcal{D}$: catégories.

  On note $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ la collection des foncteurs $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$.

- On a

$$\underset{(\mathrm{Cat})}{\mathrm{Hom}}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) := \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$$

Fait : • Si $\mathcal{C}$ est une catégorie et $X, Y \in ob(\mathcal{C})$: par définition, on a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ est une collection.

• Dans la catégorie (Cat), si $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in ob((Cat))$ i.e. si $\mathcal{C}, \mathcal{D}$: catégories, alors

$$\mathrm{Hom}_{(Cat)}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \text{ i.e. } \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$$

est désormais une catégorie !!

◦ dont les objets sont les foncteurs de $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$

• dont les morphismes sont les transfo naturelles entre tels foncteurs.

Déf : Un isomorphisme naturel est une transfo naturelle qui est un isomorphisme dans cette catégorie

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, bend left=50, "F"{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "G"'{name=D}] & \mathcal{C} \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

I, $\mathcal{C}$ catégories

tq : $\forall i \in I$, $\alpha_i : F(i) \longrightarrow G(i)$

est
un iso

• Exemple :

$\mathcal{P}(E)$ en bijection naturelle avec $\mathcal{F}(E, \{0,1\})$

On a 2 foncteurs :

(I) $\mathcal{P}(\cdot) : (Ens)^{op} \longrightarrow (Ens)$

$$E \longmapsto \mathcal{P}(E)$$

Action sur les flèches

$E \xrightarrow{f} F$ (Ens)

$$f^{\langle -1 \rangle} : \mathcal{P}(F) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$$

$$f^{\langle -1 \rangle}(B) \longleftarrow B$$

Bilan

$$(\mathrm{Ens})^{op} \longrightarrow (\mathrm{Ens})$$

$$\begin{tikzcd} & F \\ E \arrow[ur, "f"'] \end{tikzcd} \quad \longmapsto \quad \begin{tikzcd} & \mathcal{P}(F) \arrow[dl, "f^{\langle -1 \rangle}(\cdot)"] \\ \mathcal{P}(E) \end{tikzcd}$$

II Le foncteur :

$$F : \quad \begin{tikzcd} & F \arrow[r, mapsto] & \mathcal{F}(F, \{0,1\}) \arrow[d] \\ E \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, mapsto] & & \mathcal{F}(E, \{0,1\}) \end{tikzcd}$$

$\varphi : F \to \{0,1\}$

$\rotatebox{90}{$\in$}$ (sic)

$\varphi \circ f : E \xrightarrow{f} F \to \{0,1\})$

À finir

Si E ens :

$$\alpha_E : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{F}(E,\{0,1\})$$
$$A \longmapsto \mathbb{1}_A$$