

Isomorphism

Transformations
naturelles

• $E \times F \cong F \times E$
 $E, F \text{ en}$

Déf : Soient \mathcal{C}, \mathcal{D} catégories.

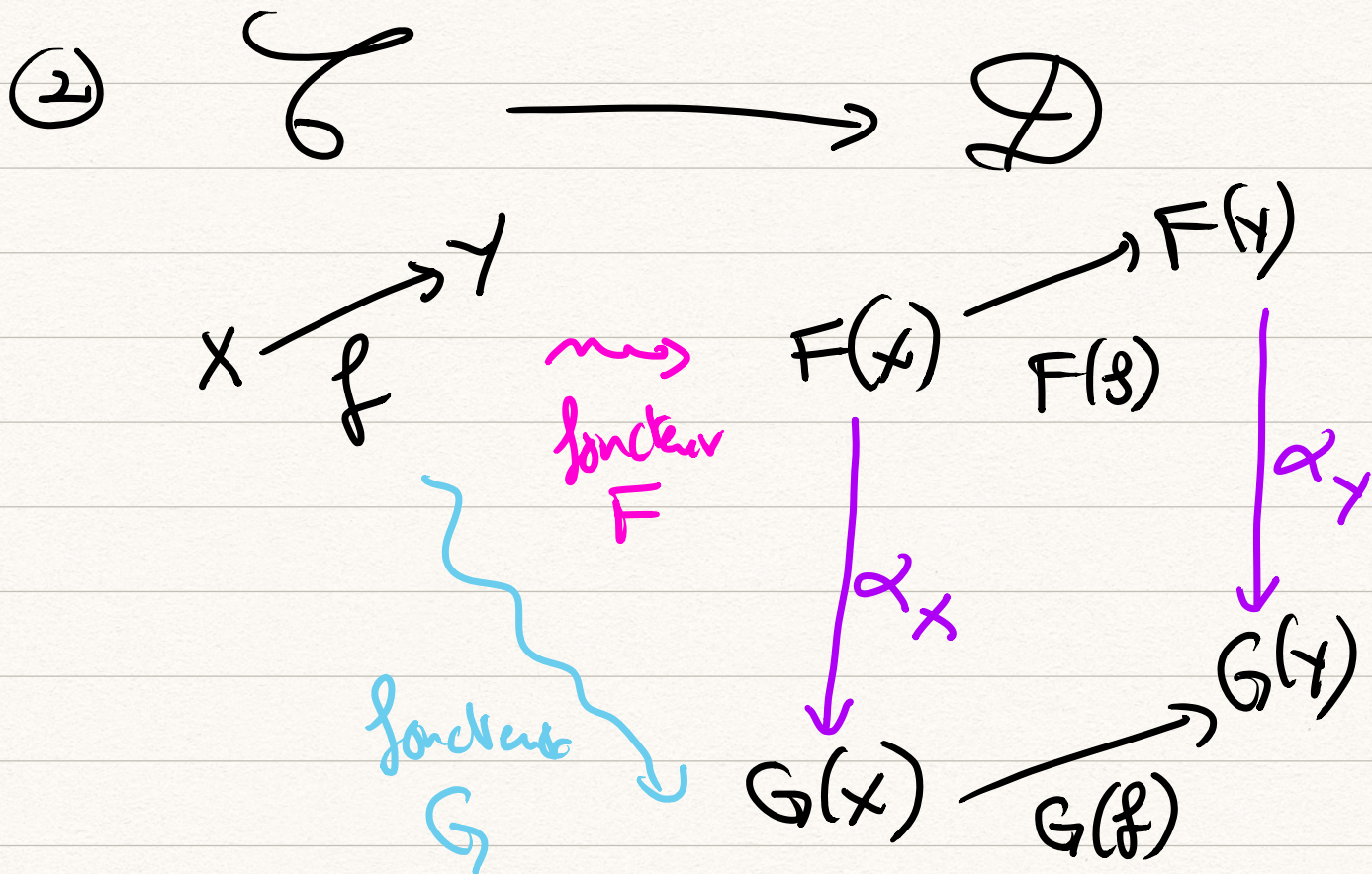
Soient $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$

the transformation naturelle α
de F vers G est "un
morphisme de F vers G "

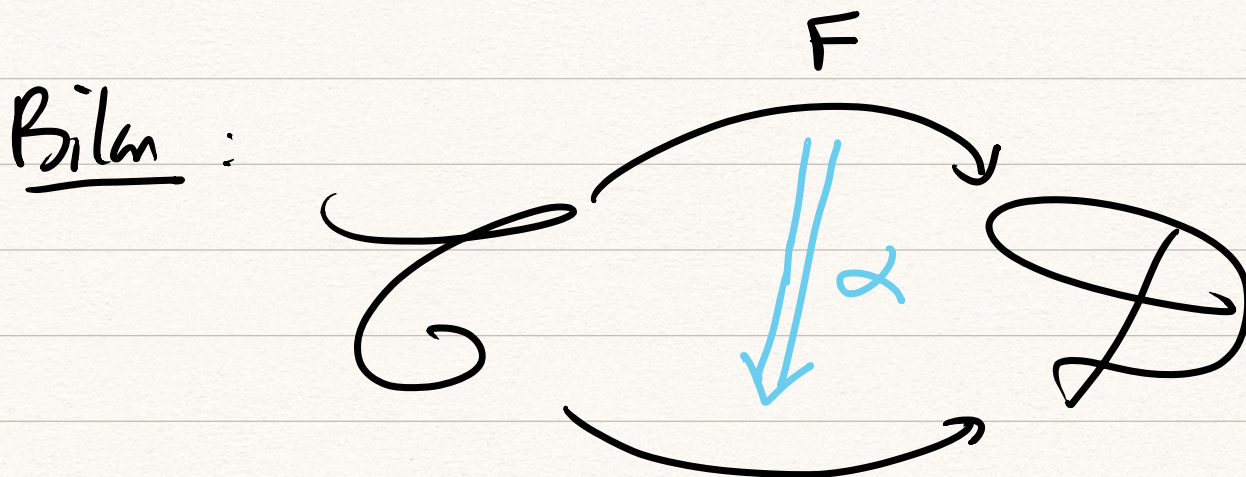
ce : ① pour tout objet $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$

on a un morphisme $\alpha_X : F(X) \rightarrow G(X)$

$$(\alpha_x \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(x), G(x)))$$



On veut q ce diagramme
commute.



G

évaluation pour F et G :

F et G sont des familles d'objets
de \mathcal{P} paramétrées par \mathcal{C} .

C'est une suite de

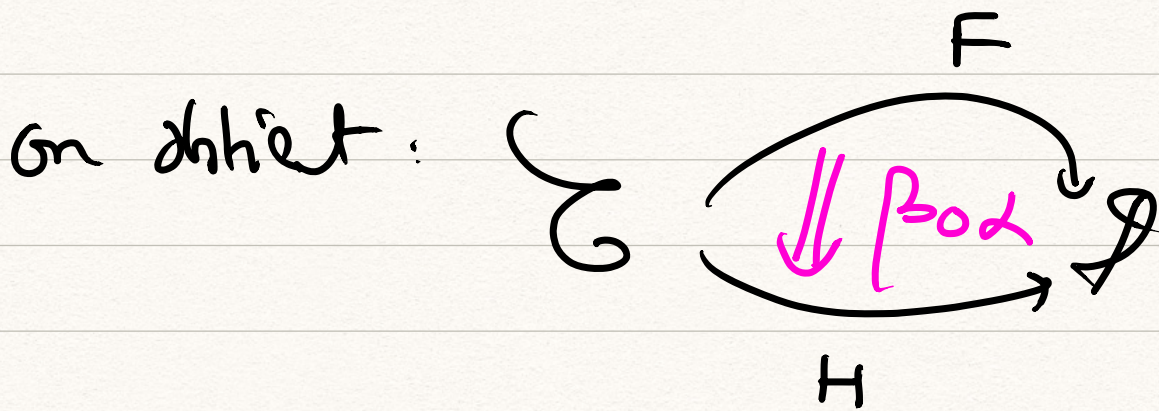
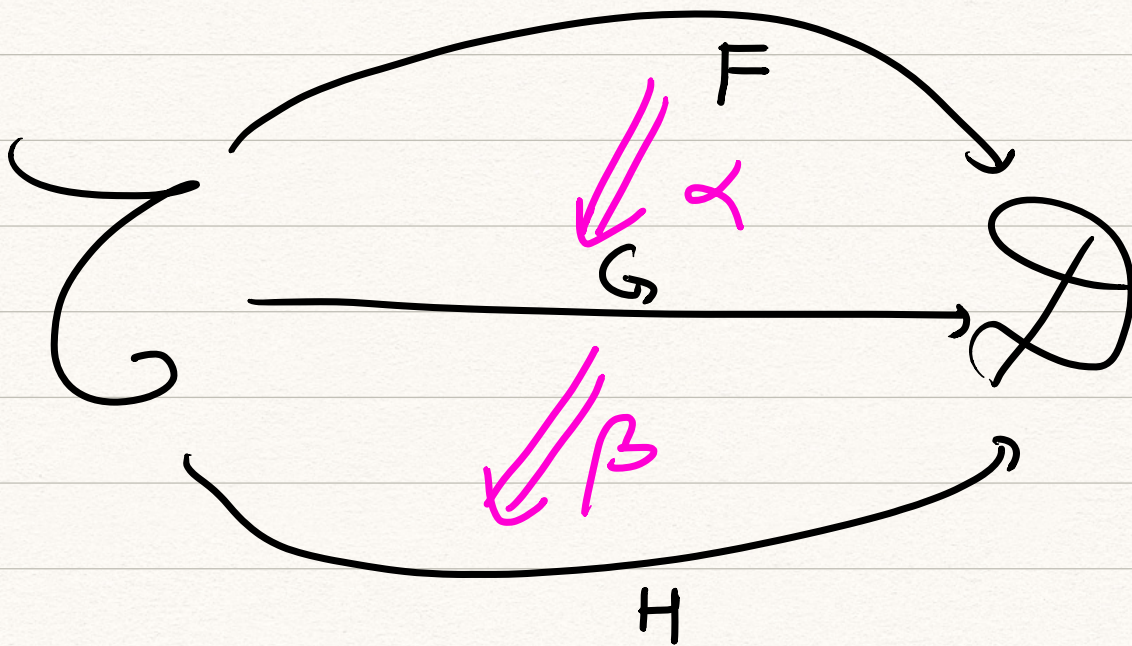
complexes $\alpha_x : F(x) \longrightarrow G(x)$

qui font connaître ce qu'il faut.

Fait : 1) les transformations

naturelles se composent :

ie



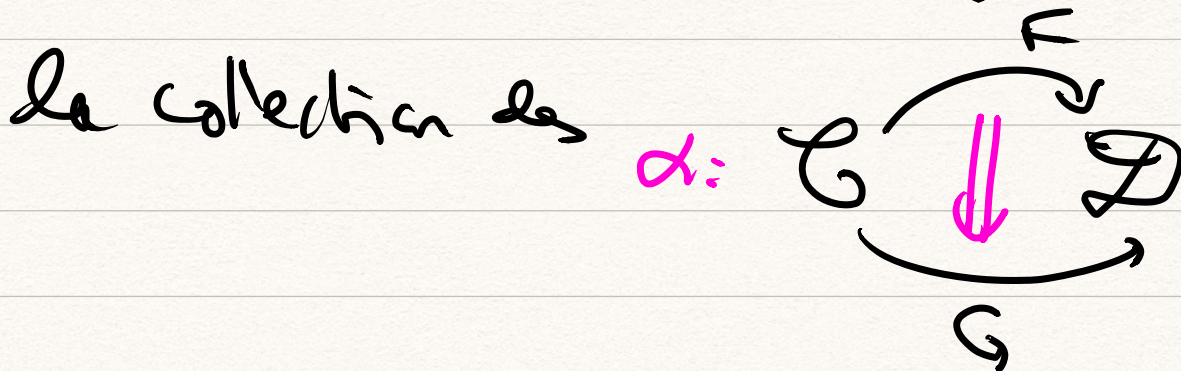
$$2) \text{ si } \mathcal{G} \xrightarrow{F} \mathcal{D}, \text{ on a}$$

$$\text{Id}_F : F \implies F$$

$$\left(x \in \mathcal{G} : F(x) \xrightarrow{\text{Id}_x} F(x) \right)$$

Notation: on note

$\text{Nat}(F, G)$



Notation:

• \mathcal{C}, \mathcal{D} : catégories.

On note $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ la collection des foncteurs $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$.

• On a $\text{Hom}_{(\text{Cat})}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$

$= \text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$

Fait : • Si \mathcal{C} est une catégorie
et $X, Y \in \text{ob}(\mathcal{C})$: par définition,
on a $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ est une
collection.

• Dans la catégorie (Cat) ,
si $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \text{ob}(\text{Cat})$ i.e.
si \mathcal{C}, \mathcal{D} : catégories, alors

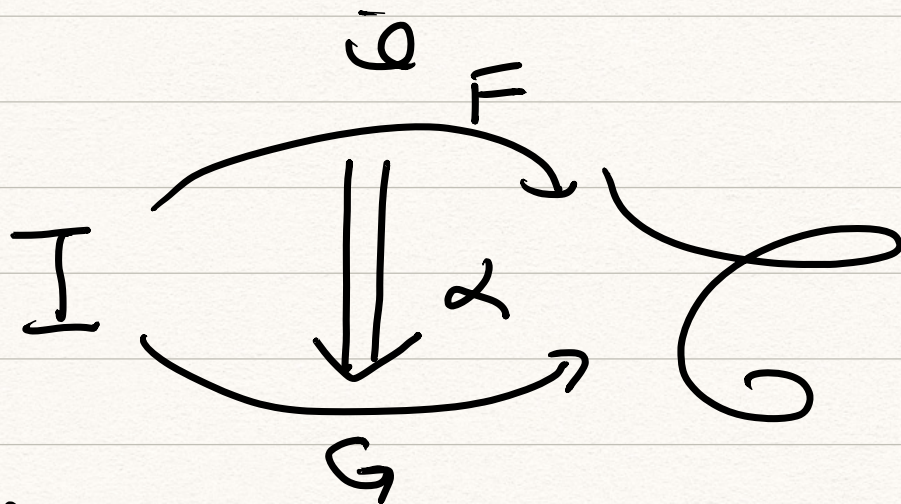
$\text{Hom}_{(\text{Cat})}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ i.e. $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$

est elle-même une catégorie !!

• dans \mathcal{C} , objets sont les fonctions
de $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$

• dont les morphismes sont
les transformations entre
les foncteurs.

Def: Un isomorphisme naturel
est une transformation naturelle qui
est un isomorphisme dans toute
catégorie



I, C catégories

$\alpha = \alpha_i : F(i) \rightarrow G(i)$

en iso

• Exemple :

$\mathcal{P}(E)$ en bijection avec
naturelle

$\mathcal{F}(E, \{0, 1\})$

On a 2 fonctions :

$$\textcircled{I} \mathcal{P}(\cdot) : (E_{ns})^{op} \longrightarrow (E_{ns})$$
$$\mathbb{E} \longmapsto \mathcal{P}(E)$$

Action sur les flèches

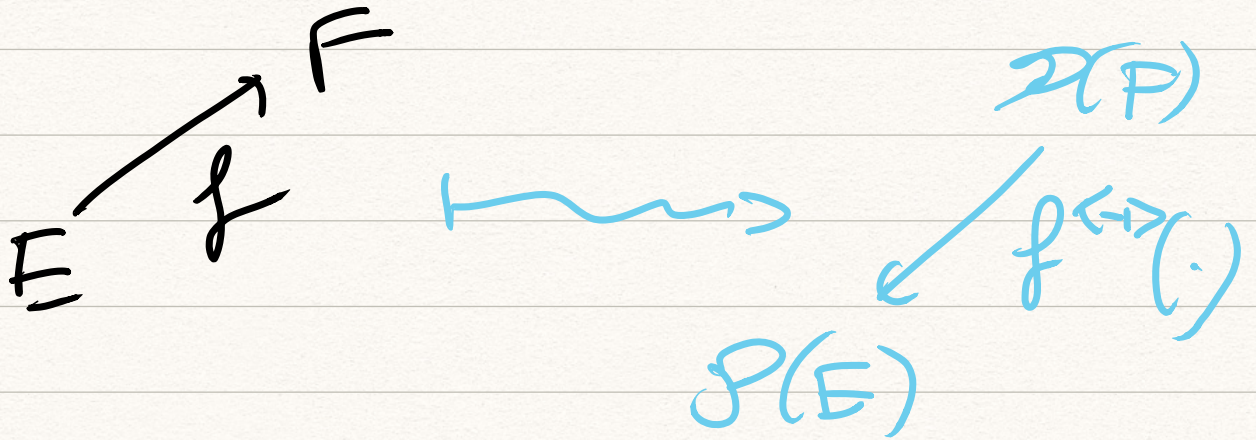
$$E \xrightarrow{f} F$$

(E_{ns})

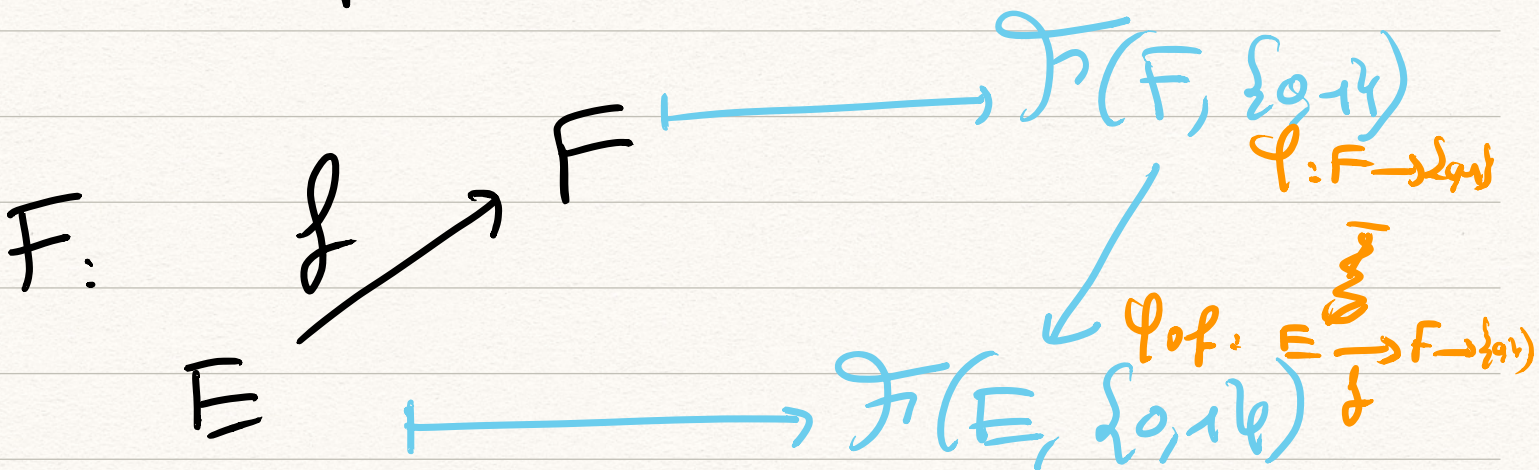
$$\begin{array}{ccc} & f \xleftrightarrow{\quad} & \mathcal{P}(F) \\ \mathcal{P}(E) & \longleftarrow & \\ & f \xleftrightarrow{\quad} & B \\ & \mathcal{P}(B) & \end{array}$$

Bien

$$(F_{us})^{op} \longrightarrow (F_{us})$$



① le facteur :



Algebra

if E is:

$$\alpha_E : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{T}(E, \text{deriv})$$

$$A \longmapsto \mathcal{A}_A$$